



Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

La Constante de Hubble y el problema de su medida

Autor: Jorge Porrón Lafuente

Tutor/es: Diego Sáez Gómez

Índice

Introducción

1. Métrica FLRW y teoría del Big Bang

- Ley de Hubble
- Métrica FLRW
- Teoría del Big Bang y CMB
- Problema de la tensión de la Constante de Hubble

2. Medidas de la Constante de Hubble por diferentes métodos

- Consecuencias de una medida precisa de la Constante de Hubble
- Medidas de la Constante de Hubble
- Cálculo de la Constante de Hubble a través del CMB
- Plano $r_s^{\text{drag}} - H_0$

3. Posibles soluciones a la discrepancia

- Soluciones Post-Recombinación
- Soluciones Pre-Recombinación

4. Conclusiones

5. Bibliografía y referencias

Introducción

La cosmología y el estudio del universo han avanzado mucho en los últimos años gracias a los avances tecnológicos. A principios del siglo XX era generalmente aceptado que el universo permanecía estático, no fue hasta la década de 1920 que el astrónomo Edwin Hubble estudió las galaxias próximas y obtuvo la primera evidencia experimental de que el universo evolucionaba, introduciendo la llamada *Ley de Hubble* que permitía relacionar la velocidad de expansión a la que se separan unas galaxias de otras en función de la distancia entre ellas, siendo el factor de proporcionalidad la llamada *Constante de Hubble* (H). En principio se supuso que el universo debía contraerse debido a la atracción gravitatoria de los cuerpos que lo componen aunque a finales de siglo gran cantidad de observaciones indican que realmente se expande cada vez más rápidamente.

La medida de este parámetro es imprescindible para el cálculo de propiedades tan importantes como la edad del universo o la densidad de sus distintos componentes. A lo largo de los años se han realizado diferentes intentos de medir este parámetro obteniendo resultados cada vez más acotados hacia un valor, desde los $500 \text{ Km/s} \cdot \text{Mpc}$ que midió Hubble por primera vez hasta un valor próximo a $70 \text{ Km/s} \cdot \text{Mpc}$ que es el más aceptado actualmente, aunque distintos métodos para medirlo ofrecen distintos resultados.

Durante años los valores obtenidos por distintos métodos coexistían en un rango plausible pero las medidas cada vez más y más precisas evidencian una inconsistencia en los valores obtenidos por distintas técnicas en lo que se conoce como *Tensión de Hubble* y es un problema abierto en la cosmología actual.

En este TFG estudiaremos la importancia de obtener un valor preciso y aceptado de este parámetro, los distintos métodos por los que se puede obtener, los resultados que ofrecen y algunas de las posibles soluciones propuestas hasta ahora para el problema de la *Tensión de Hubble*.

Comenzaremos en un primer capítulo presentando la *Constante de Hubble*, la *Métrica FLRW* y la *Teoría del Big Bang*. En el segundo apartado estudiaremos los distintos métodos usados para la medida de este parámetro y los resultados que ofrecen. Finalmente en el tercer apartado propondremos algunas posibles (e improbables) soluciones a la discrepancia y presentaremos las conclusiones en el cuarto.

1. Métrica FLRW y teoría del Big Bang

La propiedad más importante del universo y la base de la cosmología actual es el *Principio cosmológico* que implica a grandes escalas su homogeneidad, según la cual cualquier punto del universo es equivalente y tiene las mismas propiedades que cualquier otro, e isotropía, según la cual el universo cumple las mismas propiedades sin importar la dirección en que se observe. Veamos algunas observaciones firmemente establecidas:

- El universo es homogéneo e isótropo a escalas mayores que $100Mpc$ pero presenta estructura inhomogénea a escalas menores. Por ejemplo, en el Sistema Solar es obvio que no es lo mismo estudiar la superficie del Sol que la de la Luna. Esto sigue siendo cierto para escalas mayores si consideramos regiones del universo relativamente pequeñas que contengan unas pocas galaxias o cuerpos, los efectos gravitatorios locales son muy importantes y debemos abandonar la suposición de homogeneidad e isotropía.
- El universo se expande de acuerdo con la *Ley de Hubble*.
- La radiación térmica de fondo de microondas tiene una temperatura de aproximadamente $2.73^{\circ}K$. Sólo hubo pequeñas fluctuaciones en la distribución de densidad de energía (del orden de 10^{-5}) cuando el universo era joven.

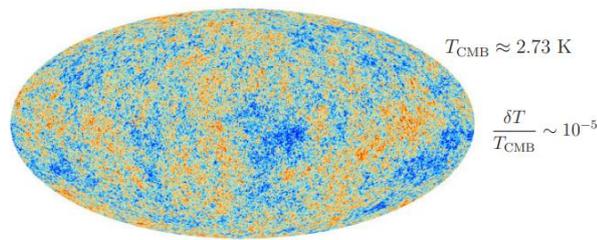


Figura 1: Imagen del WMAP de la radiación de fondo cósmico de microondas (Cosmic Microwave Background, CMB).

- En cosmología, materia bariónica (frecuentemente referida como *Polvo*) es toda aquella materia compuesta por bariones y leptones, que tienen una presión positiva (a excepción de algunos tipos de neutrinos cuya presión se considera despreciable). Aproximadamente hay 1 barión por cada 10^9 fotones pero no hay cantidades sustanciales de antimateria.
- Aproximadamente el 75% de esta materia bariónica es hidrógeno y el otro 25% helio, hay muy poca cantidad de elementos más pesados.
- La materia bariónica constituye sólo un pequeño porcentaje de la densidad de energía total, el resto está compuesto por materia oscura fría con una presión despreciable ($\cong 25\%$ del total) y por energía oscura con presión negativa ($\cong 70\%$ del total).

Ley de Hubble:

En un universo homogéneo e isótropo en expansión las velocidades relativas a la que se separan dos observadores obedecen la *Ley de Hubble*. Esta ley es una ley empírica que obtuvo Edwin Hubble estudiando la velocidad a la que se separan de nosotros galaxias próximas. La separación da lugar a un corrimiento al rojo cuando se observa el objeto lo que nos permite saber a qué velocidad se separa, así, conocida la distancia a la que se encuentran separadas, se obtiene la siguiente relación entre la velocidad del observador B respecto de A y el vector posición entre ambos:

$$\vec{v}_{B(A)} = H(0) \cdot \vec{r}_{BA} \quad (1)$$

La constante de proporcionalidad $H(0)$ es la llamada *Constante de Hubble*. Veremos que depende del modelo cosmológico considerado y de la densidad de energía de los diferentes componentes del universo que varían en diferentes épocas, así, unas veces se utiliza el *Parámetro de Hubble* $H(t)$ que evidencia explícitamente esta dependencia y otras la *Constante de Hubble* que proporciona el valor de este parámetro en el momento en que se hace la medida y será lo que intentaremos calcular una vez estudiados los métodos de cálculo de distancias en el universo.

Además, cabe notar que de acuerdo con esta ley la velocidad relativa entre dos objetos separados por una distancia mayor que $1/H$ debe superar la velocidad de la luz, esto se conoce como *Límite de Hubble* y los objetos más allá de él se separan de nosotros a una velocidad mayor que la de la luz. Si el *Parámetro de Hubble* no hubiera variado a lo largo de la historia del universo entonces la luz emitida por objetos fuera de este límite no podría alcanzarnos y no serían visibles, difiere por lo tanto del *Horizonte de sucesos* que pone un límite a partir del cual nunca podremos interactuar con objetos más allá. Esto no contradice la teoría de la relatividad que impone que en el universo la velocidad máxima posible es la de la luz pero no impone restricción alguna sobre cómo puede expandirse el propio universo, que puede hacerlo a velocidades superiores a la de la luz. En un universo en expansión infinita el universo visible es cada vez más grande pero con el paso del tiempo los cuerpos se alejan cada vez más y más entre sí, de modo que cada vez más cuerpos se alejan de nosotros escapando de nuestro universo causal. Así, aunque el universo visible sea cada vez más grande, el número de elementos con el que podemos interactuar es cada vez menor lo que da lugar a una de las hipótesis cosmológicas sobre el destino final del universo más aceptadas conocida como "*Big Freeze*".

Métrica FLRW:

El hecho de que las galaxias se alejen unas de otras evidencia que el universo es homogéneo e isótropo en el espacio pero no en el tiempo, el universo cambia con el paso del tiempo. Estas propiedades imponen unas restricciones a la métrica del universo: como debe ser homogénea entonces debe ser invariante bajo traslaciones espaciales y como debe ser isótropa entonces debe ser invariante bajo rotaciones espaciales. Así, la geometría del universo será:

$R \cdot \Sigma$, representando R la dirección temporal y Σ una 3-superficie espacial homogénea e isótropa.

Como el universo es espacialmente homogéneo e isótropo, la 3-superficie espacial Σ debe ser máximamente simétrica, lo que implica 6 simetrías: 3 traslaciones y 3 rotaciones (por ser espacialmente tridimensional). De aquí se deduce que la métrica del universo debe ser:

$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j$, donde a es el *Factor de escala* que describe completamente la evolución temporal de un universo homogéneo e isótropo, dando cuenta del crecimiento de la parte espacial, y γ es la métrica de la sección espacial. Vemos que la parte temporal va por su lado.

- Dada la expansión del universo es muy recomendable el uso de unas coordenadas que sean estáticas con respecto a esta expansión, es decir, que se muevan con el universo. Estas coordenadas se denominan *Coordenadas comóviles* (x^i) y en ellas un objeto que sea estático respecto a la expansión del universo, es decir, que su único movimiento en el espacio sea debido a la propia expansión de éste, tendrá unas coordenadas comóviles constantes. Para dos puntos en un universo en expansión dados en coordenadas comóviles separados por una distancia dada, esta distancia será la misma en estas coordenadas pero la distancia física que los separa habrá aumentado debido a la expansión del universo.

En estas coordenadas la distancia física entre dos puntos ($\vec{d}_{AB}(t)$) viene dada por un factor (a), que indica cómo se expande en universo, multiplicado por la distancia en estas coordenadas entre ellos (\vec{x}_{AB}), que es constante. Como:

$\vec{d}_{AB}(t) = a(t) \cdot \vec{x}_{AB} \rightarrow$ Al ser $\vec{v}_{AB} = \dot{\vec{d}}_{AB}(t) \rightarrow$ Por ser \vec{x}_{AB} constante y usando la *Ley de Hubble*:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2)$$

Así introducimos uno de los parámetros más importantes, el *Factor de escala* (a), que da cuenta de la expansión del universo.

Como el espacio es máximamente simétrico entonces debe ser esféricamente simétrico y usando el hecho de que el tensor de Riemann debe ser proporcional al tensor de curvatura K en una métrica máximamente simétrica obtenemos:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \cdot \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2) \right] \quad (3)$$

Esta es la métrica *Friedmann – Lemaître – Robertson – Walker (FLRW)* en coordenadas comóviles y es espacialmente homogénea e isótropa. La homogeneidad e isotropía no determinan de forma unívoca la geometría espacial pues hay 3 tipos de geometrías espaciales máximamente simétricas y, por tanto, homogéneas e isótropas:

$K = 0 \rightarrow$ Universo euclídeo plano

$K = 1 \rightarrow$ Universo cerrado esférico

$K = -1 \rightarrow$ Universo abierto hiperbólico

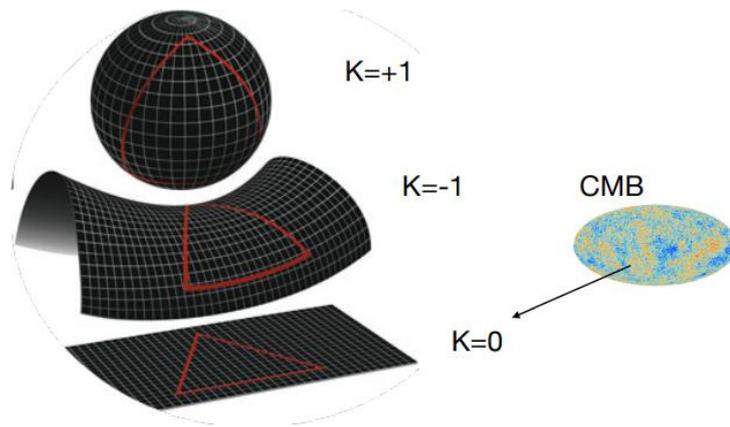


Figura 2: Geometrías cerrada, abierta y plana respectivamente en función del parámetro de curvatura.

Aunque estas 3 geometrías son compatibles con la métrica *FLRW* las observaciones parecen indicar que el universo es espacialmente plano a grandes distancias ($K = 0$).

Conocida la métrica que rige un universo 4-dimensional (1-temporal y 3-espacial), homogéneo e isótropo como el nuestro (*Métrica FLRW*) podemos hallar las ecuaciones que rigen su comportamiento. Para ello lo primero es hallar el tensor energía-momento, pues las ecuaciones de Einstein nos permitirán relacionar las entidades geométricas (como la forma del espacio-tiempo) con el contenido de materia/energía. Si la propiedad de homogeneidad e isotropía se cumple a un lado de las ecuaciones (hemos obtenido la métrica en base a estas propiedades) debe cumplirse al otro lado de las ecuaciones y el contenido de un universo homogéneo e isótropo puede modularse con fluidos perfectos (sin presiones transversales), obteniendo la siguiente forma para el tensor energía-momento:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Esto se debe a que en coordenadas comóviles la cuadrivelocidad es $u^{\mu} \equiv (1, 0, 0, 0)$, ya que el fluido se mueve únicamente con la expansión del universo pero no se mueve espacialmente, de modo que la única componente distinta de 0 en estas coordenadas será la temporal.

Cualquier fluido viene descrito por una ecuación barotrópica que para el caso de fluidos perfectos es:

$p = w \cdot \rho$, donde w contiene la información sobre la velocidad térmica de las partículas.

Se puede probar que:

- $w = 0 \rightarrow$ La velocidad de las partículas es mucho menor que la de la luz y el fluido tendrá presión igual a 0, esto es lo que se conoce en cosmología como polvo.
- $w = 1/3 \rightarrow$ Tenemos cierta presión, este caso es el de la radiación (fotones o neutrinos). Se obtiene al considerar que se mueven a velocidades comparables a la de la luz de modo que el tensor energía momento es $T_{\mu}^{\mu} = 3p_{radiación} - \rho_{radiación}$ y con la ecuación de fluidos perfectos se obtiene $w = 1/3$.
- $w = -1 \rightarrow$ La presión es negativa, es el caso de la constante cosmológica, la presión del vacío. Esta es la propuesta más aceptada para la energía oscura, aunque hay otras como

$-1 < w < -1/3$, para una energía oscura descrita por la quintaesencia o $w < -1$, para una energía oscura fantasma.

Una de las propiedades de la teoría de Einstein de la gravedad es que el tensor de Einstein (G) debe conservarse covariantemente de modo que también debe hacerlo el tensor energía-momento. Así, tomando la componente $\nu = 0$:

$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \rightarrow$ Aplicando la métrica $FLRW \rightarrow$ Obtenemos la *Ecuación de continuidad*:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (4)$$

Vemos que para un fluido perfecto la densidad es inversamente proporcional al factor de escala pues al resolver la ecuación se obtiene $\rho(a) \propto a^{-3(1+w)}$ y dependiendo de la especie tendremos un w u otro de modo que decaerá más o menos rápido. Así, si suponemos que en el Big Bang había la misma densidad de componentes, al cabo de un tiempo ésta variará dependiendo de la especie y unas predominarán sobre otras en distintas etapas del universo.

- Para el polvo por ejemplo $p \sim 0$ y, como $\rho_{materia} \gg p_{materia} \rightarrow w_{materia} \sim 0$. Obtenemos al resolver la ecuación que $\rho_{materia} \propto a^{-3}$ y, ya que $E \propto \rho_{materia} \cdot a^3$ por ser el volumen proporcional a a^3 para el espacio tridimensional, la E es constante para el polvo.
- Para la radiación vimos que $w = 1/3$ luego $\rho_{radiación} \propto a^{-4}$ y $E \propto \rho_{radiación} \cdot a^3 = a^{-1}$. Vemos que la energía de las partículas relativistas no se conserva, le ceden energía al propio universo.

Vista la *Ecuación de continuidad* obtengamos las otras 2 ecuaciones dinámicas importantes, las *Ecuaciones de Friedmann*. Para ello usaremos las ecuaciones de Einstein a las que aplicaremos la métrica $FLRW$ y los ya conocidos tensores energía-momento de las diferentes componentes.

En unidades naturales $c = 1 \rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$

Con las componentes 00 – e ij – se deducen para la métrica $FLRW$ la *primera y segunda ecuación de Friedmann*:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \quad (5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (6)$$

Con la primera de estas ecuaciones podemos hallar $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ y con la segunda ver si la expansión acelera o decelera.

Es importante mencionar que en caso de que se considere el modelo Λ CDM, que considera materia oscura fría + una constante cosmológica, aparecerá la constante cosmológica Λ en las ecuaciones de Einstein y al resolverlas aparece en la *primera ecuación de Friedmann* un término $\frac{\Lambda}{3}$ extra.

Veamos cómo se comporta la expansión en un universo Λ CDM con métrica $FLRW$ como el nuestro. Como vimos en un universo $FLRW$ obtenemos las ecuaciones dinámicas (5) y (6).

En Λ CDM consideramos la constante cosmológica de modo que la primera ecuación se convierte en:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}$$

En cosmología la velocidad de expansión del universo, fijada por la *Constante de Hubble*, ha sido relativamente bien medida mientras que la densidad de masa no. Así, históricamente se caracterizan los problemas en términos de una *Densidad crítica* ($\rho^{crítica}$), que sería la densidad total de un universo plano, en lugar de una velocidad crítica que no puede ser bien medida. Esta *Densidad crítica* se obtiene a partir de la solución de las ecuaciones de Friedmann tomando $K = 0$, obteniendo para nuestro universo, siendo H_0 la *Constante de Hubble*, es decir, el valor del *Parámetro de Hubble* medido hoy:

$$\rho^{crítica} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (7)$$

En base a este parámetro podemos obtener las densidades de cada una de las especies del universo (materia bariónica, radiación, energía oscura y constante cosmológica) definiéndose los *Parámetros densidad de cada especie* (Ω_i) con:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho^{crítica}} \quad (8)$$

Si la suma de todas las densidades es mayor que la crítica tendremos un universo abierto, si es menor será cerrado y si es igual será plano pues la densidad total del universo, que viene dada por la suma de las densidades de los distintos componentes, coincidiría con la densidad crítica que, por definición, es la de un universo plano. Disponemos así de una herramienta para estudiar la geometría del universo, conocida la densidad de energía de cada componente y, por tanto, la del universo, podemos estudiar su geometría. Como hemos adelantado antes resulta que en nuestro universo la suma de los *Parámetros densidad* de todas las especies medidos hoy es aproximadamente igual a 1, lo que indica que nuestro universo es plano pues (Planck Collaboration VIII, A&A 641 A6, (2020), arXiv:1807.06209):

$$\Omega_{polvo + Dark Matter} \approx 0.26$$

$$\Omega_{radiación} \approx 0.00001$$

$$\Omega_{Dark Energy} \approx 0.73$$

De nuevo con las ecuaciones de Friedmann se puede obtener:

$$\Omega_{TOT} - 1 = \frac{K}{a^2 \cdot H^2}$$

Como vemos cuando $K = 0$ tenemos que $\Omega_{TOT} = 1 \rightarrow \rho_{TOT} = \rho^{crítico}$ y tendremos un universo plano, si $K = -1$ tenemos que $\Omega_{TOT} < 1 \rightarrow \rho_{TOT} < \rho^{crítico}$ y el universo es abierto y si $K = 1$ tenemos que $\Omega_{TOT} > 1 \rightarrow \rho_{TOT} > \rho^{crítico}$ y el universo es cerrado.

Como hemos mencionado, en nuestro universo las observaciones dan:

$$1 - \Omega_{TOT} = -0.02 \pm 0.05, \text{ que parecen indicar un universo plano.}$$

Las expresiones de los parámetros densidad se pueden obtener de la observación con:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho^{crítica}}, \rho^{crítica} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \rightarrow \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \Omega_K = -\frac{K}{a_0^2 H_0^2}$$

Así, hoy, en t_0 :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \rightarrow H_0^2 = H_0^2[\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_K]$$

Obtenemos que la suma de los parámetros densidad de todas las especies es aproximadamente igual a 1 hoy, como ya comentamos. En general se puede obtener, no para hoy sino para un z cualquiera, recordando que cada especie varía con el factor de escala de una forma particular, según sea su ecuación barotrópica:

$$H^2(a) = H_0^2 \left[\Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_K \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right] \quad (9)$$

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_r (1+z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_K (1+z)^2] \quad (10)$$

Vemos que la constante de Hubble depende de la densidad de los distintos componentes, como mencionamos al introducirla.

Teoría del Big Bang y CMB:

Veamos rápidamente en qué consiste la *Teoría del Big Bang* y porqué el *CMB* está limitado a 380000 años después del Big Bang, lo que nos permitirá entender el origen de las anisotropías del *CMB*, que serán claves en alguno de los métodos de cálculo de distancias en el universo que veremos a continuación.

No sabemos qué originó el universo pero el fenómeno que lo pone en expansión es conocido como Big Bang. De acuerdo con la *Teoría del Big Bang* el universo se encontraba en un estado de muy alta densidad y temperatura en que las leyes de la física dejan de ser válidas (singularidad). En cierto momento comenzó una expansión increíblemente rápida haciendo que la temperatura del universo bajara a medida que se expandía. Durante los primeros 300000 o 400000 años la temperatura era tan alta que los bariones y los fotones se encontraban ligados en lo que se conoce como *Plasma barión-fotón*, la energía era tan alta que no se tenían fotones libres pues al moverse por el plasma chocaban constantemente sufriendo dispersión de Coulomb y de Thomson y la distancia media de dispersión era muy pequeña, es decir, recorrían muy poca distancia entre colisión y colisión quedando confinados en el plasma. Esta época se conoce como *Época oscura*, no fue hasta unos 300000 años después que el universo se expandió lo suficiente para que su temperatura bajara hasta los 3000°K y comenzaran a formarse los primeros átomos, a esta temperatura la energía promedio de los fotones es menor que la energía de ligadura de los electrones en el átomo de modo que el camino libre de dispersión medio de los fotones se hizo tan grande como el tamaño del universo obteniéndose así los primeros fotones libres y quedando congelada la materia bariónica del plasma. Antes de la formación de los átomos no había un límite inferior en la energía que debían tener los fotones para poder interactuar con la materia y tanto los de alta como los de baja energía se veían sometidos a colisiones y dispersiones, al formarse los primeros átomos aparece un límite inferior en esa interacción (como sabemos los fotones deben tener energías concretas para interactuar con los átomos) y algunos de los fotones dejan de interactuar con la materia bariónica, liberándose. Esto es lo que se conoce como *Recombinación*, a veces es referido sencillamente como el momento en que se produjo el desacople de los fotones, y se considera que ocurrió unos 380000 años después del Big Bang. Son los fotones liberados en

la *Recombinación* lo que observa en el *CMB* y por eso tenemos un límite a los 380000 años, sencillamente antes de este momento no había fotones libres que puedan haber viajado por el universo y alcanzarnos, ya que se encontraban confinados por el plasma.

Las anisotropías que se observan en el *CMB* se deben a que en el momento de la *Recombinación* había zonas de distinta densidad que provocaban la formación de cúmulos de materia, agrupándose fotones y bariones, que sufrían fluctuaciones en el plasma conocidas como “*Baryon Acoustic Oscillations (BAO)*”, probablemente remanentes de fluctuaciones cuánticas que sufrió el universo cuando aún era muy pequeño y que se amplificaron con la expansión. Dentro del plasma los fotones ejercían una presión hacia fuera al intentar liberarse del plasma mientras que los cúmulos de materia estaban sometidos a la gravedad, haciendo fuerza hacia dentro. La relación entre estas fuerzas hacia fuera y hacia dentro hacía que el tamaño de esos cúmulos de bariones y fotones fluctuara como un globo que se hincha y deshinch. La velocidad de expansión y compresión de los cúmulos depende de la *Velocidad del sonido* (c_s) en el medio, en concreto en el plasma barión-fotón, que será un parámetro clave en lo que sigue. Con las definiciones habituales de ρ como densidad, Ω como parámetro cosmológico y $h = H_0/100$ se define como:

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}} \quad \text{con } R = \frac{3\rho_{\text{bariónica}}}{4\rho_{\text{fotónica}}} = 3 \cdot 10^4 \cdot (1+z)^{-1} \Omega_b \cdot h^2 \quad (11)$$

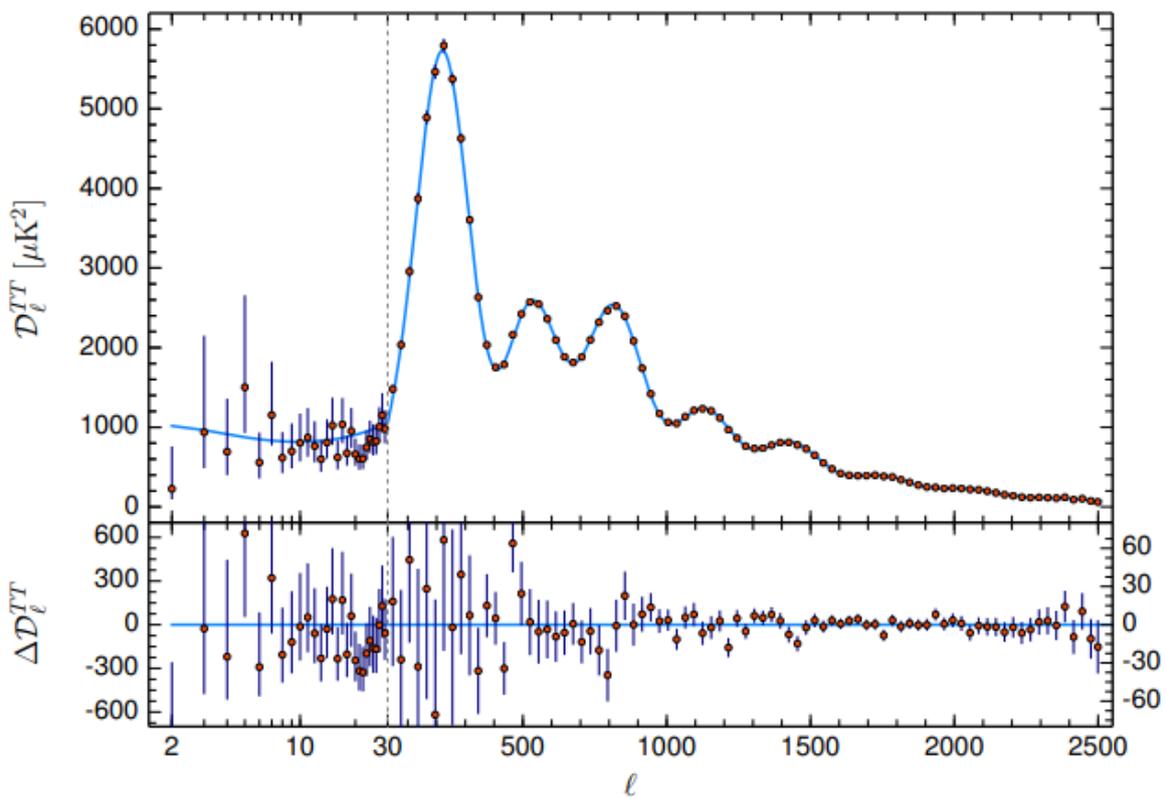
El tamaño de los cúmulos viene dado por el *Horizonte de sonidos* que es el borde de ellos y que depende de la *Velocidad del sonido* (c_s) y del momento en que se produjo la *Recombinación*, para algunos se produjo cuando estaban en el máximo de su oscilación y serán grandes mientras que otros estaban en el mínimo y serán más pequeños y otros serán intermedios. Aunque menos comunes que los intermedios, son los máximos y los mínimos los más interesantes pues dejan una marca más obvia en el *CMB*. Cuando se produjo el desacople la materia bariónica se congeló en el estado en que se encontrase, quedando el crecimiento de estos cúmulos ligado únicamente a la expansión del universo (esta idea será clave en el cálculo de H_0), y algunos cúmulos lo hicieron en un estado y otros en otro dependiendo de su densidad de energía, así, esas anisotropías que se observan en el *CMB* evidencian variaciones de densidad de energía en el universo primitivo. Con la expansión del universo estos cúmulos de exceso bariónico se expanden formando a la postre las estructuras a gran escala del universo como las galaxias, éstas se forman tanto dentro como en el centro y en el borde de estos cúmulos de modo que podemos esperar cierto patrón en la distribución de galaxias en el universo, por lo general será bastante arbitrario pero si medimos la distancia entre unas galaxias y otras en muchas ocasiones estaremos considerando galaxias que se formaron cerca del centro de los cúmulos y en muchas otras consideraremos galaxias que se formaron justo en el borde de los cúmulos. Al medir las distancias entre gran cantidad de galaxias se observa precisamente esto, se obtienen valores muy diferentes entre sí pero hay un exceso de galaxias a una distancia concreta del resto ($146.8 \pm 1.8 Mpc$) lo que corresponde al caso de medir la distancia entre las galaxias que se formaron en el centro y las que se formaron en el extremo de los cúmulos y que coincide con el tamaño esperado de éstos una vez considerada la expansión del universo tras la congelación bariónica. Esta evidencia observacional de la distribución de galaxias en el universo es una gran prueba en favor de la *Teoría del Big Bang* y de la existencia de esas fluctuaciones de densidad de energía que se observan en el *CMB*, las *BAO*.

Cabe destacar que la *Recombinación* no se dio en un momento concreto sino que la liberación de fotones es un proceso estadístico, pues se considera que los fotones pasan a ser fotones libres y comienzan a moverse por el universo cuando su camino libre medio es mayor que el tamaño del universo, pero al ser el camino *medio* algunos se liberarán antes que otros. Esto queda

evidenciado en la llamada *Superficie de última dispersión* que se define como el conjunto de puntos en el espacio a la distancia adecuada a nosotros de modo que recibimos ahora de ellos los fotones emitidos en el desacoplamiento, es decir, son los puntos del espacio desde los que se emite el *CMB* y son una corteza con una cierta anchura pues, como hemos mencionado, en unos puntos se produjo antes que en otros el desacoplamiento y la consecuente liberación de fotones, al tratarse de un proceso estadístico.

Espectro de potencias del CMB:

Para el estudio del *CMB* no sólo disponemos de la famosa imagen del *WMAP* (Figura 1) sino que contamos con un espectro de potencias que presenta diferentes picos que ofrecen gran información:



- *Figura 3: (Planck Collaboration VIII, A&A 641 A6, (2020), arXiv:1807.06209) Espectro de potencias del CMB, muestra el número de puntos del CMB con un tamaño concreto (Angular scale). Este número de puntos se representa en °K pues se puede relacionar el tamaño de los cúmulos con la temperatura del CMB, que está directamente relacionada con la longitud de onda de los fotones observados y que, por el Efecto Sachs-Wolfe, varía más o menos en función del tamaño del cúmulo. Así, las anisotropías de temperatura observadas en el CMB están relacionadas con el tamaño de los cúmulos, que se puede caracterizar con l . Dentro del CMB observamos puntos más grandes (Angular scale mayor) y otros más pequeños (Angular scale menor), el espectro de potencias muestra claramente que unos tamaños son más comunes que otros.*

Para explicarlo debemos volver a nuestras oscilaciones en el plasma, las *BAO*. Como hemos visto antes de la *Recombinación* fotones y bariones estaban ligados, apareciendo algunas zonas de mayor densidad que otras, y la presión de los fotones hacia fuera y la atracción gravitatoria de los bariones hacia dentro daban lugar a oscilaciones. En el momento de la *Recombinación* la materia

bariónica se congeló en el estado en que se encontrase, podía haber sufrido una oscilación completa, cientos o miles de ellas, encontrarse en algún momento de su primera oscilación,... este conglomerado de oscilaciones es lo que forma el *CMB*. Al observarlo nosotros recibimos el *CMB* como una corteza esférica alrededor de nosotros pues, de acuerdo con la homogeneidad e isotropía, nos encontramos en el centro de nuestro *Universo visible* y es desde los confines de él desde donde se emiten los fotones que conforman el *CMB*. De este modo, lo percibimos como una proyección esférica que podemos descomponer en ondas simples, de forma análoga a como descomponemos una onda plana como funciones seno y coseno, solo que al ser en este caso una proyección esférica, hacemos para ello uso de los armónicos esféricos.

Así, podemos modelar el universo como un conjunto de capas superpuestas de fluctuaciones de densidad simples, conteniendo cada una de estas capas fluctuaciones de un cierto tamaño. Las fluctuaciones de cada capa oscilan independientemente pero es el conjunto de todas estas fluctuaciones lo que modela el universo y el *CMB* que observamos. Como hemos dicho, cada una de estas capas contiene un tipo concreto de fluctuaciones y se puede modelar con la letra l que caracteriza un armónico concreto, de forma análoga al número de onda para las ondas planas, y que es la l que observamos en el espectro de potencia, el *Momento multipolar*.

El hecho de que sean las *BAO* que se congelaron cuando se encontraban en el máximo y en el mínimo de su fluctuación las más importantes es porque, como mencionamos, son las que dejan una marca más obvia en el *CMB* y nos permiten obtener resultados interesantes. Para verlo basta con multiplicar la *Velocidad del sonido* por la edad del universo en el momento de la *Recombinación*, esto nos dirá cuán lejos podrían haber viajado esas fluctuaciones en caso de no contraerse, y dividiendo el radio de una fluctuación de densidad concreta por este valor podemos conocer cuántas veces se ha expandido y contraído esa fluctuación en concreto. La mayoría de veces obtendremos un número decimal, lo que implica que se trata de una de esas oscilaciones intermedias, pero para algunas obtendremos un número entero, lo que implica que se encontraban, en el momento de la *Recombinación*, en una de las situaciones extremas, o bien en su máximo de expansión o bien en el mínimo. Vemos que los tamaños de estos puntos especiales del *CMB* deben poder expandirse en términos de los armónicos esféricos.

Cada uno de los picos que se observan en el espectro de potencias corresponde a una de estas situaciones extremas, que resultan ser los fenómenos que más suceden. El primer pico corresponde al caso en que esas perturbaciones sólo tuvieron tiempo de colapsar una vez y se encontraban en su mínimo por primera vez en el momento de la *Recombinación*. El segundo pico corresponde a una compresión y una expansión completas, el tercero a una compresión, expansión y compresión completas, y así sucesivamente. Una vez entendido esto debemos responder a la siguiente pregunta: *¿Qué información nos ofrece esto sobre el universo?* Pues bien, cada pico nos dice algo único sobre los parámetros densidad de 3 de las especies del universo:

1. El primer pico actúa como una regla, nos permite constatar la curvatura del universo. Como hemos visto este pico corresponde a los puntos que en el momento de la *Recombinación* se encontraban precisamente en su primera compresión completa, es decir, conocida la velocidad del sonido y el tiempo que han tenido para expandirse, los 380000 años en que se dio la *Recombinación*, y multiplicando por el factor de expansión del universo entonces, podemos calcular teóricamente su tamaño en el momento de la *Recombinación*, que debe ser de unos 500000 años luz. Ahora bien, este valor obtenido teóricamente puede compararse con un valor experimental que se puede obtener al medir estos puntos en el *CMB*. Para ello medimos el tamaño de los puntos en el cielo, obteniendo un ángulo, su *Tamaño diametral angular*, que podemos convertir en distancia usando trigonometría sencilla, siendo éste el ángulo medido, la distancia al *CMB* uno de los

catetos y el tamaño del objeto el otro. Para que esto tenga sentido debemos asumir un universo plano, en el que las rectas paralelas permanecen paralelas, los ángulos de un triángulo suman 180° ,... Sabemos que si suponiendo esto obtenemos al medir el tamaño de esos puntos el mismo valor de 500000 años luz, entonces nuestra suposición de universo geoméricamente plano será correcta. Por otro lado, sabemos que la presencia de materia y energía, así como la expansión del universo, deben curvar su geometría. Así tenemos un test: si medimos el tamaño de los puntos usando geometría sencilla y obtenemos precisamente ese valor de 500000 años luz entonces el universo debe ser geoméricamente plano como hemos mencionado y podemos obtener la cantidad de energía total del universo. La materia y la energía resultan en una curvatura positiva mientras que un universo en expansión sin materia ni energía tendría curvatura negativa, así un universo plano debe tener exactamente la cantidad de energía que compense esa curvatura negativa debida a la expansión. Al realizar las medidas ese primer pico nos da el siguiente resultado: el universo es *PLANO* y, por tanto, nos dice la cantidad de energía total del universo, dada por la suma de bariones, materia oscura y energía oscura.

2. Este segundo pico corresponde al caso en que las *BAO* estudiadas se había contraído y expandido una vez justo en el momento de la Recombinación y ofrece información sobre la cantidad de bariones en el universo. Podemos entender las oscilaciones con la siguiente analogía: serían masas, más o menos pesadas dependiendo de la cantidad de bariones contenida en el cúmulo de densidad que oscila, unidas a un resorte que se dejan caer desde una posición inicial de equilibrio. En el momento inicial ambas se encuentran en la misma situación y son indistinguibles pero cuando se dejan caer la gravedad es más fuerte para los cúmulos con gran cantidad de bariones. Los picos representan estas situaciones, los picos pares son aquellos en que la fluctuación se comprime y se vuelve a expandir de modo que se encuentran en el momento inicial, cuando está máximamente expandido y comienza la oscilación. Para el segundo pico esto sólo pasa una vez, para el cuarto pico pasará dos veces, y así sucesivamente. Por otro lado los picos impares son aquellos en que se ha dado la compresión pero no la expansión, en el primer pico teníamos sólo una compresión, en el tercer pico habrá pasado dos veces, y así sucesivamente. Podemos darnos cuenta que en el momento de máxima expansión todos los cúmulos son iguales, se encontrarían en el estado inicial de la oscilación, momento en que dejamos caer las masas en nuestra analogía, y la compresión será más o menos violenta dependiendo de la cantidad de bariones, en nuestra analogía el resorte se estira más o menos dependiendo de la masa. Así tener más bariones debe aumentar los picos impares que es en aquellos en que se nota la diferencia de bariones, mientras que los picos pares no se ven afectados por la cantidad de bariones. En cuanto a los picos del espectro esto implica lo siguiente: cuantos más bariones más altos serán los picos impares comparados con los pares, que no se ven afectados por la cantidad de bariones. Así, podemos comparar la altura relativa de los picos para medir el contenido bariónico del universo, obteniendo que la cantidad de bariones es de cerca del 5% del contenido total del universo.
3. El resto de picos representan las fluctuaciones más pequeñas y aportan información sobre la cantidad de materia oscura relativa a la de radiación. Sabemos que durante los primeros años el universo se encontraba en la época dominada por radiación y las fluctuaciones que eran lo suficientemente pequeñas como para oscilar al menos una vez durante este breve periodo deberían ser realizadas y sus picos en el espectro de potencia deberían crecer en comparación a las fluctuaciones más grandes. Así, observando la altura de los picos pequeños podemos calcular cuando acabó la época dominada por radiación y se pasó a la

época dominada por materia oscura. Con esto podemos calcular cuanta materia oscura hay, que resulta ser cerca de un 26.5%.

En conclusión, los picos del espectro de potencia nos dicen la cantidad de energía asociada a las distintas especies. El primero nos dice la energía total del universo, compuesta por bariones, materia oscura y energía oscura, el segundo nos dice la cantidad de energía debida a los bariones y el tercero la debida a la materia oscura de modo que podemos deducir la de energía oscura obteniendo los siguientes resultados:

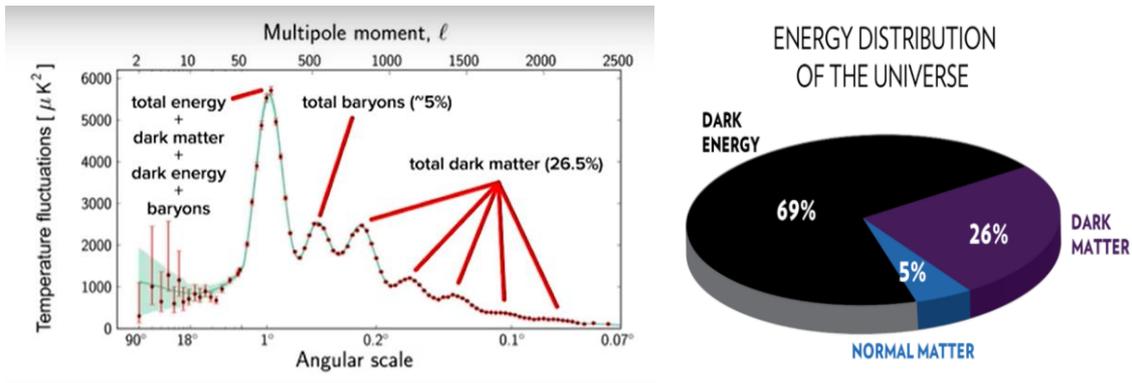


Figura 4: Resultados ofrecidos por los distintos picos del espectro de potencias del CMB (a la izquierda) y distribución de energía de las distintas especies (a la derecha).

Problema de la tensión de la Constante de Hubble:

Como hemos mencionado, distintos métodos de medida de la *Constante de Hubble* ofrecen resultados diferentes. A día de hoy no está muy claro a qué se debe este problema, pero es bastante claro que se obtienen principalmente dos grupos de medidas en torno a valores distintos de H_0 , aunque veremos los distintos métodos para su cálculo en el siguiente capítulo con más detalle.

El primer grupo de medidas se basa en la observación de fenómenos astronómicos conocidos como las supernovas tipo *Ia* o las Cefeidas para calcular la distancia a la que se producen y, conocida la velocidad a la que se separan con el "*Redshift*", se puede calcular la *Constante de Hubble*. Estas medidas ofrecen unos valores de entre:

$$H_0 \approx 72.8 \pm 1.1 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}, \text{ y } H_0 \approx 74.3 \pm 1.0 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$$

Por otro lado el segundo grupo se basa en medidas teóricas obtenidas a partir de la observación del *CMB* y ofrecen valores de en torno a:

$$H_0 \approx 67.4 \pm 0.5 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$$

Observando estos resultados resulta obvio que hay una inconsistencia. Durante años los errores de ambas medidas solapaban y, aunque extraño, podía no haber problema, pero las medidas cada vez más precisas han evidenciado este problema.

Notemos que las medidas se hacen sobre la *Constante de Hubble actual* como es evidente pues ese será siempre el parámetro que dice cómo se expande el universo en el punto de observación en el momento en que se mide. Si volvemos a medir desde la Tierra la *Constante de Hubble* en

algún momento concreto del futuro ese valor será diferente, pero debido a la homogeneidad e isotropía del universo ese valor es el mismo en todos los puntos del universo en el mismo momento.

Cuando se obtienen dos valores distintos para un mismo parámetro se dice que hay una tensión entre las dos medidas. Esta tensión se mide en σ que representa la desviación estándar e indica cuán confiable es la medida, siendo 2σ una confianza del 95% pero bajando este valor a medida que aumenta σ .

El cálculo se realiza de la siguiente manera:

Supongamos una medida $A \pm \delta A$ y otra $B \pm \delta B$ para un mismo parámetro. La tensión se halla con:

$$Tensión = \frac{A - B}{\sqrt{(\delta A)^2 + (\delta B)^2}} \quad (12)$$

Supongamos 2 medidas de H_0 con, por ejemplo:

$$H_0 \approx 67.4 \pm 0.5 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$$

$$H_0 \approx 73.3 \pm 1.8 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$$

Aplicando (12) obtenemos un valor para la tensión de $\cong 3.1\sigma$, se dice que la tensión entre 67.4 ± 0.5 y 73.3 ± 1.8 es de 3.1 sigmas, que corresponde a un intervalo de confianza en una distribución normal del 62%.

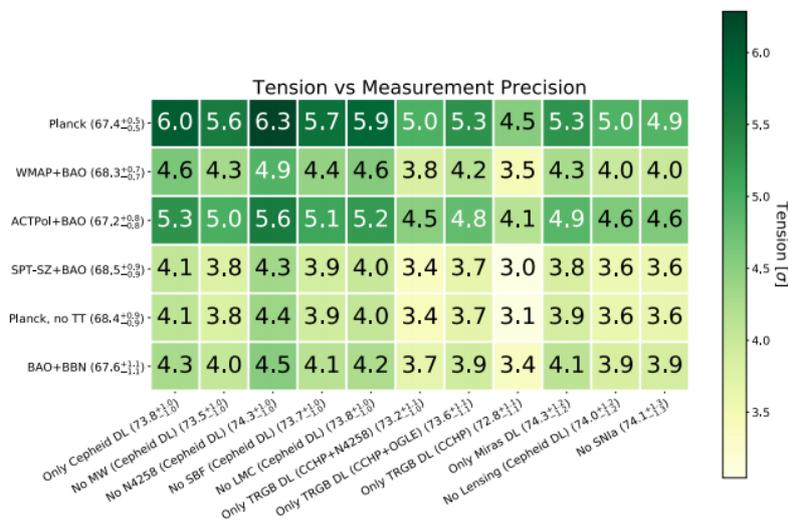


Figura 5: (Riess (2020)) Tensión entre distintos valores de la Constante de Hubble obtenidos por distintos métodos. Resulta obvio que son tensiones inaceptables para considerar el parámetro como bien conocido.

2. Medidas de la Constante de Hubble por diferentes métodos

Consecuencias de una medida precisa de la Constante de Hubble:

Ya hemos mencionado la extrema importancia de una medida aceptable de la *Constante de Hubble* a la hora de obtener información sobre el universo, pero su utilidad no se limita a eso:

- **Degeneración geométrica:** Como hemos visto el estudio de los picos del espectro de potencias del *CMB* nos permite obtener información sobre las densidades de energía de distintos componentes. Recordemos que por su propia definición la suma de todos los parámetros densidad de los distintos componentes es igual a 1 en un universo plano. Así:

$$\Omega_{total} + \Omega_K = \sum_i \Omega_i + \Omega_K = 1 \rightarrow \text{Para } h = \frac{H_0}{100} \text{ y } w_i \equiv \Omega_{i0} h^2, \text{ obteniendo:}$$

$$h^2 = w_b + w_m + w_K + w_\Lambda$$

Donde distinguimos entre materia bariónica y oscura y despreciamos la radiación.

Al estudiar el espectro de potencias del *CMB* se observa un problema: sin importar la precisión de las medidas, diferentes modelos con diferentes curvaturas y densidades dan lugar a observaciones indistinguibles en el *CMB*, esto se conoce como degeneración geométrica.

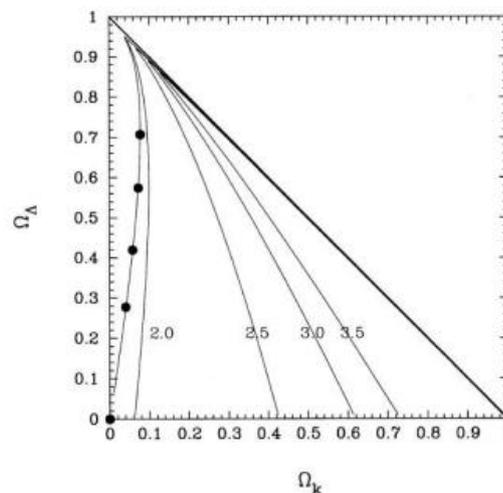


Figura 6: Líneas de degeneración para un cierto Ω_m fijo (Efstathiou & Bond (1999)). Las distintas líneas están caracterizadas por un parámetro R propio que depende de las densidades de los distintos componentes y representa las Ω_K y Ω_Λ que darían lugar a las mismas anisotropías en el *CMB* para una densidad de materia total ($\Omega_b + \Omega_m$) fija. Se trata de una degeneración fundamental pues una mayor precisión en las medidas del *CMB* hará más fina la línea de degeneración, pero no la eliminará.

Esta degeneración se puede romper usando medidas por medios distintos del *CMB* para imponer limitaciones a una de las densidades Ω_K o Ω_Λ . En particular, si los parámetros del contenido de materia son bien conocidos por *CMB* una limitación en la *Constante de Hubble* (obtenida por un método alternativo) impone una limitación en la energía oscura.

Vemos que para eliminar la degeneración es necesaria una medida precisa de la *Constante de Hubble* por un método alternativo, obteniendo:

$$\delta\Omega_\Lambda \cong 2 \frac{\delta H_0}{H_0} \quad (13)$$

Una precisión de ≈ 0.1 para Ω_Λ se puede obtener si el error de H_0 es del 5% (*Efstathiou & Bond 1999*).

- **Limitación de la ecuación de estado de la energía oscura:** Como vimos, un universo homogéneo e isótropo se puede describir con la *métrica FLRW* y vimos que la ecuación de estado de las distintas especies era la ecuación barotrópica para fluidos perfectos:

$$p = w \cdot \rho.$$

Cada especie viene descrita por esta w que para polvo y para radiación y materia relativista estaba bien definida a partir de sus propiedades, en concreto, a partir de su velocidad que es comparable a la de la luz para las segundas y despreciable para el polvo. En cuanto a la energía oscura a día de hoy continúa siendo bastante misteriosa y hay varias propuestas para su w que podrían ser aceptables, de entre las que destacan:

- $w = -1$, para una energía oscura descrita por la constante cosmológica.
- $-1 < w < -1/3$, para una energía oscura descrita por la quintaesencia.
- $w < -1$, para una energía oscura fantasma.

Aunque estas son las más aceptadas podría ser que w fuera distinta, incluso que fuera dinámica y variase con z , por ejemplo.

Medidas del *CMB* en combinación con otras medidas cosmológicas independientes pueden imponer limitaciones directas en la ecuación de estado de la energía oscura. En concreto, una medida precisa de la *Constante de Hubble* parece el mejor complemento al *CMB* para estudios de la energía oscura.

- **Limitación de la masa de los neutrinos:** Hasta ahora hemos incluido a los neutrinos como contribuyentes en la densidad de energía relativista Ω_r , pues, aunque los experimentos han establecido una masa $\neq 0$ para ellos, sigue siendo un valor muy pequeño y se mueven a velocidades comparables a la de la luz.

El *CMB* se ve afectado por los neutrinos de varias formas, como es lógico al ser una de las especies que componen el universo. Sabemos que en la *Recombinación* los neutrinos tenían cierta energía media, como en el caso de los fotones unos eran más energéticos que otros. Por otro lado, sabemos que los neutrinos presentan una degenerancia de 3.04 en sus eigenestados, es decir, existen 3.04 especies efectivas de neutrinos distintas. Si al menos una de las masas de los neutrinos es mayor que la energía media entonces serían no relativistas durante el desacoplamiento, lo que se evidenciaría en el *CMB* pues nuestros modelos los suponen relativistas.

Se puede relacionar el *Parámetro de Hubble* con la masa de los neutrinos con (Komatsu et al. (2011)):

$$H(a) = H_0 \left\{ \frac{\Omega_c + \Omega_b}{a^3} + \frac{\Omega_\gamma}{a^4} \left[1 + 0.2271 N_{eff} f \left(m_\nu a / T_{\nu 0} \right) \right] + \frac{\Omega_k}{a^2} + \frac{\Omega_\Lambda}{a^{3(1+w_{eff}(a))}} \right\}^{1/2} \quad (14)$$

Para el valor aceptado actualmente de su energía media durante la *Recombinación* se dará esta situación de ser no relativistas cuando $m_\nu \geq 0.58eV$, de modo que si la masa de los neutrinos es $\sum m_\nu \geq 1.8eV$ (por haber 3.04 especies) esto se evidenciará en el *CMB* (Komatsu et al. 2009), imponiéndose así un límite superior a su masa en caso de no encontrarse rastro de esto en nuestras medidas del *CMB*.

Se puede realizar un razonamiento parecido pero incluyendo medidas de otros parámetros complementarias a las de *CMB*, en nuestro caso de la *Constante de Hubble*, para reducir este límite superior, obteniendo así un valor más acotado de la masa de los neutrinos. Para modelos Λ CDM se obtienen límites de:

$$\begin{aligned} \sum m_\nu &\leq 1.3eV \text{ para } w = -1 \\ \sum m_\nu &\leq 1.5eV \text{ para } w \neq -1 \end{aligned}$$

Añadiendo datos de otros métodos como *BAO* o *SNe* se mejoran las limitaciones (Ichikawa et al. 2005):

$$\begin{aligned} \sum m_\nu &\leq 0.67eV \text{ para } w = -1 \\ \sum m_\nu &\leq 0.8eV \text{ para } w \neq -1 \end{aligned}$$

- **Edad del universo:** Conocido el ritmo de expansión del universo a lo largo de su historia puede calcularse su edad sencillamente observando cuanto tiempo ha tardado en crecer hasta su tamaño actual teniendo en cuenta este ritmo de expansión. Usando (10) obtenemos:

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H(z)} = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\sum_n \Omega_n (1+z)^{3(1+w_n)}}} \quad (15)$$

Históricamente el cálculo de la edad del universo resultó imprescindible para la introducción de la energía oscura pues modelos sin ella daban edades del universo menores que la edad de algunas estrellas para valores de la *Constante de Hubble* $\geq 50 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$ como el nuestro. Medidas muy precisas de la edad de ciertas estrellas permite imponer un límite inferior de 11.2Gyr para la edad del universo, lo que está de acuerdo con el valor más aceptado actualmente, de $13.7 \pm 0.13\text{Gyr}$ (Komatsu et al. (2009))

Medidas de la Constante de Hubble:

Es necesario introducir la *Distancia de luminosidad* D_L :

Si suponemos una fuente que emite luz a una cierta distancia de un detector en la Tierra, la *Distancia de luminosidad* (d_L) se define como el radio de la esfera centrada en la fuente. Debido a

la expansión del universo la energía que recibimos no es la misma que se emitió ya que el fotón sufre un corrimiento al rojo por culpa de la expansión del universo, el fotón cede energía al propio universo. Conocido el corrimiento al rojo podemos hallar la energía que tendrá la luz cuando llegue a nuestro detector pues:

$$E_0 = \frac{E}{1+z}$$

Además, el ritmo al que emite fotones la candela estándar también va a variar pues la frecuencia lo hace:

$$dt_0 = \frac{dt}{1+z}$$

Como el flujo de energía es:

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

Obtenemos finalmente una relación entre la distancia de luminosidad y el flujo de energía:

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} = \frac{L}{4\pi a_0^2 (1+z)^2 r(z)^2} \quad (16)$$

Por ser:

$$d_L = a_0 \cdot (1+z) \cdot r(z) \quad (17)$$

Finalmente tenemos todas las herramientas necesarias para estudiar distintos métodos para la medida de la *Constante de Hubble*, parámetro cuya extrema importancia ya ha sido expuesta. A la hora de usar cuerpos celestes para determinar distancias es muy importante que se encuentren lo suficientemente lejos de nosotros como para que su movimiento local nos sea despreciable de modo que sólo consideremos la expansión del universo como su movimiento. Veamos los métodos más importantes, comenzando por una explicación del fenómeno para estudiar después cómo obtener medidas para H_0 y, finalmente, las posibles fuentes de error:

- **Cefeidas:** Las Cefeidas son estrellas muy masivas, de modo que brillan mucho y pueden localizarse e identificarse a grandes distancias, que han gastado el oxígeno de sus núcleos y evolucionan adelante y atrás en el diagrama *Hertzsprung-Russell (HR)* debido a que pulsan radialmente, aumentando y disminuyendo tanto su temperatura como su diámetro produciendo cambios en su luminosidad con un periodo y amplitud muy estables.

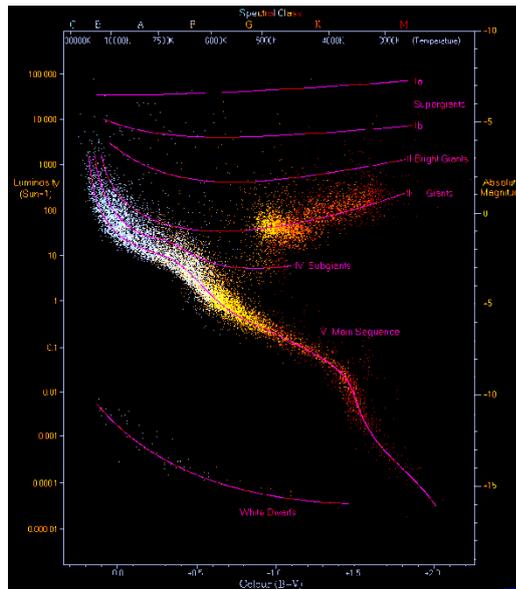


Figura 7: Diagrama de Hertzsprung-Russell (HR), relaciona la temperatura de las estrellas con su luminosidad. Como las Cefeidas varían su temperatura a lo largo de su periodo de pulsación se mueven de un lado a otro del diagrama.

El proceso de pulsación de las Cefeidas se debe a que tienen una capa de *He* doblemente ionizado que cuando es opaca a la radiación hace que la energía quede atrapada en su interior, aumentando la presión y expandiéndose su superficie, disminuyendo así la temperatura. Cuando esta temperatura alcanza cierto valor crítico la capa de *He* vuelve a hacerse transparente a la radiación permitiendo la liberación de energía y disminuyendo así su presión y, por tanto, su radio, aumentando la temperatura. Este proceso se repite cíclicamente pues en cierto momento la temperatura aumenta lo suficiente para volver a impedir que se escape la energía, opacándose la capa de *He* y creciendo el radio de la estrella de nuevo. Esto se conoce como *Mecanismo kappa*, todas las estrellas tienen una opacidad radiactiva para cierta profundidad en su atmósfera estelar (dada por el parámetro kappa) pero en la mayoría de ellas este proceso de pulsación se detiene en el equilibrio (Freedman & Madore 2010).

La idea para el cálculo de la *Constante de Hubble* es la siguiente:

Hemos definido la *Distancia de luminosidad* (d_L) y hallado en (16) una relación entre ella y la luminosidad (L). Así, conocida la luminosidad y el flujo de energía, que se obtiene directamente en el telescopio, podemos hallar a qué distancia se encuentra la estrella y calcular la velocidad a la que se separa es sencillo, hallando el "*Redshift*" mediante técnicas espectrales. Conocida la distancia y la velocidad podemos usar la *Ley de Hubble* para calcular la *Constante de Hubble*. Así, nuestro objetivo es sencillo: calcular la luminosidad.

De conocer la temperatura sería inmediato hallar la luminosidad haciendo uso del *Diagrama HR* o con la *Ley de Stefan-Boltzmann* ($L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, siendo σ la constante de Stefan-Boltzmann) pero la información de que nosotros disponemos es el periodo de la Cefeida, no su temperatura. Hay distintas formas de hallar la luminosidad en función del periodo, siendo la más común hacer uso de la *Ley de Leavitt* dada por:

$$M = A - 2.5 \log \left(\frac{L}{4\pi \cdot (10pc)} \right) \quad (18)$$

Donde A es una constante que depende de la banda de longitudes de onda a las que se realiza la observación y M es la magnitud absoluta que tendría la estrella de encontrarse a $10pc$ de distancia y viene dada por $M = \alpha_1 + \alpha_2 \log P + \alpha_3 C$, siendo C y los α constantes que pueden determinarse empírica o teóricamente y P nuestro dato, el periodo de pulsación.

Otras técnicas más recientes permiten calibrar la relación distancia-luminosidad geoméricamente. El *Método de Baade-Wesselink* nos permite hallar el radio medio de la Cefeida a partir la luminosidad y de su velocidad radial, es decir, a la que crece y decrece, que puede hallarse por espectroscopía Doppler. Con su radio en el momento de máxima expansión y el de máxima contracción se puede hallar fácilmente la distancia con:

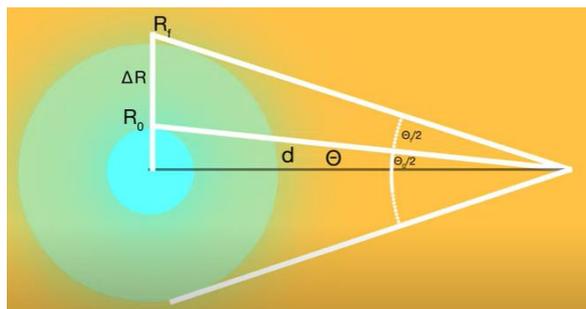


Figura 8: Método de Baade-Wesselink.

Siendo R_f el radio de la Cefeida en su máxima expansión, R_0 el radio de la Cefeida en su máxima compresión y $\theta_i/2$ los ángulos. Como vemos es necesaria una gran precisión de observación para poder distinguir ángulos tan pequeños. Por trigonometría simple $\tan \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\Delta R}{d}$ y como el ángulo es muy pequeño $\tan \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \approx \Delta\theta$ obteniendo:

$$d = \frac{2\Delta R}{\Delta\theta} \quad (19)$$

Estos métodos para el cálculo de distancias mediante Cefeidas son de los más utilizados pero presentan algunas fuentes de error, tanto errores estadísticos que se manifiestan en la relación periodo-luminosidad al producirse un desvío de entre el 30% y el 10% en la relación ideal entre periodo y luminosidad ($M = \alpha_1 + \alpha_2 \log P + \alpha_3 C$), como errores sistemáticos al no tener en cuenta la extinción estelar (absorción y reemisión de fotones entre la fuente y nosotros) que hace que los objetos parezcan más débiles y lejanos de lo que son u otros errores debidos a la metalicidad de los cuerpos observados que no podemos conocer con precisión y puede afectar a esta relación.

- **Supernovas tipo Ia (SNe Ia):** Es otro de los métodos más usados y proporciona las medidas más precisas, aunque no están bien entendidas a nivel teórico. La idea básica es la misma que para las Cefeidas, hallar una medida confiable de su luminosidad y con ella hacer uso de (16) para hallar la *Distancia de luminosidad*.

Las principales ventajas que presentan son que son muy brillantes de modo que pueden ser observadas a distancias suficientemente grandes para que su movimiento local pueda despreciarse respecto a la expansión del universo, muestran dispersiones muy pequeñas entre su pico y su mínimo de luminosidad de modo que cuando se conocen las suficientes

pueden ser usadas para calibrar y son fácilmente identificables ya que presentan una evolución espectral característica.

El cálculo de la luminosidad se hace con el *Método de Baade-Wesselink* calculando por espectroscopía Doppler su velocidad radial ($\frac{d(R(t)/R_0)}{dt}$) y con ella y su luminosidad el radio en los momentos de máxima y mínima luminosidad.

En cuanto a la física de las *SNe Ia* se asume que se producen por la ruptura de enanas blancas *C + O* de masa cercana a la de Chandrasekhar, que es la máxima que puede tener para no colapsar y convertirse en un agujero negro o en una estrella de neutrones. Normalmente una sola enana blanca no puede causar la explosión de modo que se originan en sistemas binarios. Actualmente se consideran dos clases de progenitores de las *SNe Ia*:

1. *“Single-degenerate”*: Una de las enanas blancas de masa cercana al límite de Chandrasekhar recibe material de su compañero. Esto es consistente con la homogeneidad de las *SNe Ia* y al mismo tiempo puede ser ajustado fácilmente para ajustar las diversidades observadas.
2. *“Double-degenerate”*: Se producen por la fusión de las dos enanas blancas. Las ventajas de este proceso es que ofrece una explicación a la historia del progenitor, predicciones razonables de los ratios predichos de *SNe Ia*, una explicación natural a la ausencia de *H* y *He* en el espectro de las *SNe Ia* y presenta un único parámetro a considerar: la masa total del sistema. Su mayor problema es que para que estos sistemas sean viables debe sobreponerse la dificultad teórica crítica de evitar el colapso por acreción.

A día de hoy no se entiende ni el mecanismo de explosión ni la ausencia de *H* y *He* en el espectro, que se esperan por la transferencia de masa del compañero (Hillebrandt & Niemeyer (2000)).

Una vez estudiados los dos métodos para el cálculo de distancias más comunes veamos qué resultados ofrecen:

$H_0 = 63.4 \pm 1.7 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$, obtenido con una muestra de 29 *Cepheid* (Tammann et al. 2008)

$H_0 = 60.3 \pm 2.6 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$, obtenido con una muestra de 20 *SNe Ia*

$H_0 = 61.2 \pm 0.5 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$, obtenido con una muestra de 62 *SNe Ia*

$H_0 = 74.2 \pm 3.6 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$, obtenido con una muestra de 240 *Cepheid lejanas* (Riess et al. (2009a-b))

$H_0 = 73.8 \pm 2.4 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$, obtenido con una muestra de 600 *Cepheid lejanas* (Riess et al. (2011))

Resulta evidente que se observan dos grupos de medidas, proponiéndose posibles errores entre el método de unos y otros. El primer grupo propone que el excesivo valor de H_0 obtenido por el segundo se debe a la asunción de que se puede usar la misma relación luminosidad-periodo en las Cefeidas de diferentes galaxias, con diferentes metalicidades,... lo que explicaría el error de una muestra mayor de datos, pero esto puede no ser cierto. Además, al observarse solo eventos lejanos puede haber una selección parcial de eventos, al considerarse sólo los más brillantes. El segundo grupo propone que el menor valor de H_0 se debe a un error de entre el 10% y el 12% debido a una calibración imprecisa de la relación periodo-luminosidad al usarse datos obsoletos. Además, el uso únicamente de Cefeida de grandes periodos presenta una selección parcial de eventos.

Es obvio que hay un problema y serán necesarios mejores datos observacionales además de un mejor entendimiento de la física de los indicadores de distancia, sobre todo del efecto de la metalicidad en la calibración de la distancia de las Cefeidas y en el proceso de explosión de las *SNe Ia*, para obtener resultados aceptables.

Veamos más métodos por el cálculo de la Constante de Hubble:

- **Método de la punta de rama de una gigante roja (TRGB):** Hace uso de la luminosidad de la rama de las gigantes rojas más brillantes de una galaxia para calibrar su distancia, en concreto se usa la *Banda infrarroja de luminosidad (I-Band)* por ser menos sensible a la metalicidad. Esta insensibilidad a la metalicidad hace de este método muy útil a la hora de estudiar el efecto de la metalicidad en el caso de las Cefeidas que, como mencionamos, es una posible fuente de error muy importante. De calcular la distancia a varias galaxias concretas por estos dos métodos podemos estudiar las diferencias en los valores obtenidos, ofreciéndonos información sobre el efecto de la metalicidad en las medidas de Cefeidas.

La etapa de gigante roja es una etapa en la evolución estelar de estrellas de masas relativamente pequeñas, comparables con la masa solar (cuyo destino es convertirse en una gigante roja). Estas estrellas se sitúan durante gran parte de su vida en la *Secuencia principal* en el *diagrama HR (Figura 7)*, durante este periodo la estrella está compuesta por un núcleo de H que se fusiona en He liberando energía. A medida que el H arde y se va produciendo He éste se acumula en el núcleo, aumentando su masa, presión, temperatura y luminosidad, pero disminuyendo el radio del núcleo debido a la mayor densidad del He , hasta que se tiene un núcleo compuesto sólo por He inerte y rodeado de una capa de H . En este momento el proceso de quemado de H continúa pero ahora se produce cada vez más y más fuera del núcleo de He aumentando el tamaño de la estrella y su luminosidad, pasando a considerarse una *Gigante roja*. El proceso continúa, durante la fase de gigante roja sigue quemándose H y produciéndose He que se acumula en el núcleo, el aumento de masa en el núcleo da lugar a un aumento en la gravedad que se compensa en la reacción de quemado de H aumentando el tamaño de la estrella para evitar el colapso gravitacional (este equilibrio sólo se da en ciertas estrellas con masas concretas, en estrellas muy masivas la fuerza gravitacional vence dando lugar al colapso y produciendo agujeros negros o estrellas de neutrones). La formación y acumulación en el núcleo de más y más He hace que la presión del núcleo y su temperatura vayan aumentando hasta que se alcanza una temperatura crítica de unos $10^8 K$ en que el He del núcleo se enciende por el proceso *Triple α* y comienza a fusionarse. Al arder el He provoca una explosión que arrastra la enorme cobertura de H cuyo tamaño máximo es la *TRGB* y que es responsable de que la luminosidad de la gigante roja sea máxima en el momento de la explosión, por suerte esta

luminosidad a la que ocurre la explosión es predecible por física nuclear pues ocurre para una masa del núcleo casi constante. Una vez eliminada a causa de esta violenta explosión la cobertura de H , la luminosidad decrece mucho y la estrella se contrae rápidamente comenzando a quemar lentamente el He en la llamada *Fase de quemado de He*, durante la cual se sitúa en el *Diagrama HR* en una rama horizontal. Estrellas de masas comparables a la solar nunca tendrán la fuerza suficiente para alcanzar la temperatura de ignición de elementos más pesados que el He y una vez éste se agote morirán como *Enanas blancas*, quedando un remanente inerte de elementos pesados.

El método para el cálculo de distancia de las galaxias en que se produce este fenómeno se basa en la comparación de la luminosidad de las gigantes rojas en dos etapas: su momento de máxima luminosidad que es el *TRGB* y la luminosidad que presenta en la *Fase de quemado de He*, cuando se encuentra en la rama horizontal en el *Diagrama HR*.

Este método es muy útil para medir distancias pequeñas ($10Mpc$) pues las luminosidades durante la transición de gigante roja a *Fase de quemado de He* son muy grandes, además, presenta la enorme ventaja de que permite tomar distintas observaciones (en distintos rangos de λ , se suele elegir la *I-band* por su independencia de la metalicidad pero pueden usarse varias bandas diferentes).

Algunos resultados obtenidos para medidas de distancia de galaxias por el método *TRGB* son:

$$H_0 = 73 \pm 5 \text{ km/s} \cdot Mpc, \text{ obtenido con una muestra de 14 galaxias (Mould \& Sakai (2008))}$$

$$H_0 = 67 \pm 3(\text{random}) \pm 10(\text{sistemático}) \text{ km/s} \cdot Mpc, \text{ obtenido con una muestra de 21 galaxias (Sakai et al. (2000))}$$

$$H_0 = 68 \pm 6(\text{random}) \pm 4(\text{sistemático}) \text{ km/s} \cdot Mpc, \text{ obtenido con TRGB (Mould \& Sakai (2009a))}$$

$$H_0 = 70 \pm 4(\text{random}) \pm 5(\text{sistemático}) \text{ km/s} \cdot Mpc, \text{ obtenido con TRGB (Mould \& Sakai (2009b))}$$

Vemos que estos resultados son compatibles con los ofrecidos por medidas de Cefeidas.

- **Método Tully-Fisher:** Es un método de calibrado para medidas de distancias basado en la *Relación de Tully-Fischer (Relación TF)* que es una relación empírica entre la luminosidad y la velocidad orbital máxima de galaxias espirales. Su base física no ha sido firmemente establecida aunque parece proveniente de la relación entre masa, velocidad orbital y luminosidad ya que galaxias más masivas son más luminosas y, además, tienen una velocidad orbital mayor.

La velocidad orbital se puede calcular con la curva de rotación óptica o con observaciones del espectro de emisión de $21cm$ del H y no depende de la distancia. Por otro lado, sabemos que la luminosidad sí depende de la distancia y pueden usarse medidas independientes de Cefeidas para calibrar la relación entre luminosidad y distancia. Con esto podemos calcular la velocidad orbital de galaxias espirales lejanas (unos $100Mpc$) y graficarlo con la luminosidad observada. Al hacerlo se aprecia una relación lineal que

depende de la λ a la que se realiza la observación, cuanto más estrecha sea la dispersión de las medidas con respecto a la relación lineal mejor calibrado estará y mejores serán los resultados obtenidos:

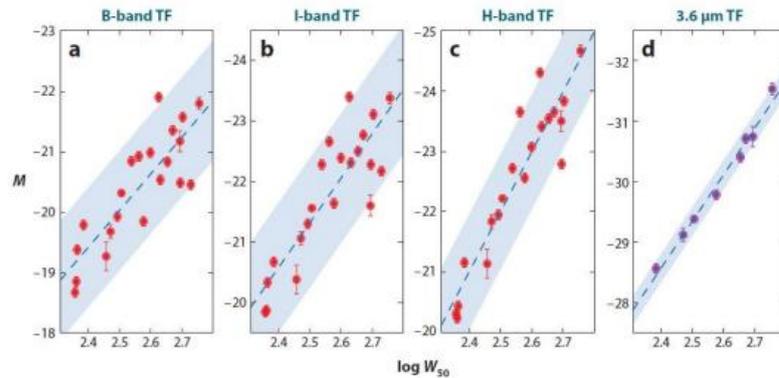


Figura 9: Relación TF para medidas de distintas galaxias espirales. M es la magnitud aparente y está relacionada con la luminosidad (como vimos al estudiar las Cefeidas) y $\log W_{50}$ está relacionado con la velocidad rotacional. Las gráficas a, b y c son diferentes medidas para un mismo conjunto de datos en diferentes bandas de observación, vemos claramente en a y c que la pendiente de la Relación TF es diferente, lo que evidencia su dependencia de la banda de observación. En d se observa la Relación TF para 8 galaxias con luminosidad observada en $3.6\mu\text{m}$, vemos que las medidas se concentran en una banda muy pequeña de modo que sirve como un buen calibre.

Se han obtenido valores de $H_0 \approx 50 - 70 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$ (Tully & Pierce (2000)) aunque se espera que con un mejor calibrado se puedan hallar medidas de distancia con un 5% de error que proporcionarían valores de gran precisión de H_0 (Friedmann & Madore (2010)).

- **Método de fluctuación en el brillo de la superficie (SBF):** Las galaxias están compuestas por estrellas individuales distribuidas de manera más o menos uniforme y la luminosidad que recibimos de ella se debe a la suma de las contribuciones de cada una de sus estrellas (u otras fuentes de luminosidad). Cuando se observa una galaxia, ésta tiene un cierto tamaño en nuestro telescopio y conocida su luminosidad total podemos dividir por el tamaño para obtener una luminosidad media por elemento de volumen. Aunque a grandes distancias parezca que la distribución de estrellas en la galaxia es muy uniforme a distancias más pequeñas esto no es así, puede dar la casualidad que al observar una pequeña zona concreta de la galaxia ésta presente una gran cantidad de fuentes de luminosidad o que presente menos de las esperadas, de este modo, cuando se observan regiones pequeñas de una galaxia (como si hiciéramos zoom a una zona concreta de ella) y se mide la luminosidad de esa región concreta observada aparecen fluctuaciones con respecto a la luminosidad media esperada, si esa zona observada está muy ocupada presentará una luminosidad mayor por elemento de volumen que la media de la galaxia y si está poco poblada será menor.

En base a esta idea el método para el cálculo de distancias es sencillo: cuanto más lejos se encuentre la galaxia más uniforme nos parecerá su distribución de estrellas, es decir, estas fluctuaciones al observar regiones más pequeñas de la galaxia se desviarán menos de la luminosidad media cuanto más lejos se encuentre la galaxia.

Para poder obtener medidas de distancia es necesario calibrar algunas de ellas de forma que si conocemos la distancia a la que se encuentran ciertas galaxias podemos estudiar sus

fluctuaciones y calibrar un punto cero. Para ello podemos usar métodos teóricos, basados en modelos de población estelar, o experimentales, en los cuales elegimos una galaxia que se encuentra a una distancia conocida concreta (normalmente por el método de Cefeidas) y se estudia la desviación estándar de las fluctuaciones de diferentes puntos de la galaxia, tomando el valor obtenido como el punto cero. Al observar otra galaxia más lejana la desviación estándar respecto al valor medio de la luminosidad de la galaxia será menor pues sus fuentes de luminosidad nos parecerán distribuidas de forma más uniforme por encontrarse más lejos.

Cuanto mejores sean las medidas de distancia y luminosidad media de las galaxias que se usan para el calibrado mejores serán los resultados obtenidos.

Con este método se pueden medir distancias de hasta $100Mpc$ y se han obtenido valores de:

$H_0 = 76 \pm 6(\text{random}) \pm 5(\text{sistemático}) \text{ km/s} \cdot Mpc$, para calibrados teóricos (Biscardi et al. (2008))

$H_0 = 73 \pm 4(\text{random}) \pm 1(\text{sistemático}) \text{ km/s} \cdot Mpc$, para calibrados Cepheid (Blakeslee et al. (2002))

El principal problema que presenta este método es que no se conoce bien el efecto de la edad ni de las metalicidades de las distintas galaxias sobre la luminosidad observada, de modo que puede estar usándose un calibrado incorrecto.

- **MASERS:** La emisión *MASER* ocurre naturalmente para altas densidades de gases (principalmente de *H* aunque los hay de agua y de otros elementos) cerca de una fuente de excitación o fuente de energía, sobre todo agujeros negros supermasivos del centro de las galaxias, que se encuentran rodeados por gas intergaláctico que en tales condiciones extremas emite rayos *X* (*MASER* es un acrónimo de *Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*). Estos rayos *X* son tan energéticos que excitan el electrón de más de la mitad de los átomos de *H* del gas que produce el *MASER*, encontrándose así en inversión de población. A medida que estos átomos excitados reciben más energía de los rayos *X* emitidos por el gas intergaláctico se desexcitan emitiendo energía en la misma dirección en que fue alcanzado el átomo por el rayo *X* que lo excitó (esto es lo que se conoce como *Emisión estimulada* y es clave para que el *MASER* sea colimado y todos los átomos de *H* emitan en la misma dirección). Así todos estos átomos de *H* emitiendo la misma energía concreta de desexcitación del *H* en la misma dirección tienen la suficiente longitud de camino astronómica para que esos picos de energía se observen en los espectros de observación.

Estos picos que se observan en el espectro a esa temperatura concreta son fácilmente identificables. Además, se observa que los picos no son perfectamente estrechos sino que presentan cierta anchura, esto se debe al movimiento propio del *MASER* que por efecto Doppler produce un desvío con respecto a la línea esperada en función de si parte de él se mueve en favor o en contra de la emisión de esa microonda colimada.

De este modo resulta que estos picos perfectamente observables e identificables en el espectro de observación de cierta galaxia *MASER* nos dicen dónde se encuentran las zonas

de emisión *MASER* alrededor del centro de la galaxia, que es donde se sitúa el agujero negro que estimula el *MASER*.

Conocida la posición relativa de la fuente *MASER* con respecto al centro de la galaxia puede hallarse la distancia a nosotros por trigonometría sencilla:

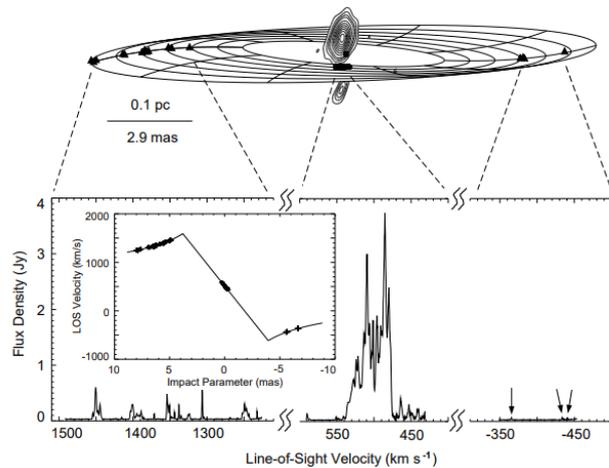


Figura 10: Espectro de observación de la galaxia NGC4258 (Lo (2005)), la representación de arriba muestra cómo los picos en el espectro pueden mostrar la posición del MASER relativa a la fuente de estimulación.

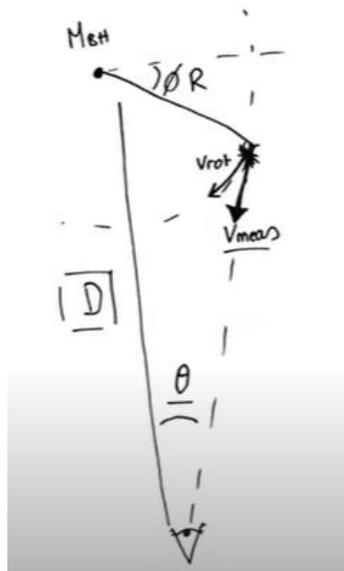


Figura 11: Conocida la masa del agujero negro (M_{BH}), el ángulo de observación (ϑ), la velocidad tangencial de la fuente MASER (v_{mas}) y su posición con respecto al agujero negro (Φ_R) puede hallarse la distancia D .

Con la técnica *MASER* se ha obtenido una distancia para la galaxia NGC248 de unos $7Mpc$ (Herrnstein et al. (1999)), lo que está de acuerdo con los valores obtenidos por Cefeidas y *TRGB* de modo que los 3 métodos parecen bastante consistentes. Esta técnica es muy prometedora pero a día de hoy no se dispone de un catálogo suficiente para ofrecer resultados aceptables, el gran éxito obtenido para NGC248 es prometedor pero al encontrarse tan próxima hay muchas fuentes de error que pueden estar quedando minimizadas. Actualmente se realizan grandes esfuerzos para la mejora de este prometedor método como el “*Megamaser Cosmology Project*” (Reid et al. (2009)).

En conclusión, tenemos varios métodos para calcular distancias con sus distintas ventajas y desventajas, especialmente apropiados para ciertas distancias. Para 2011 el mejor catálogo de medidas de distancia era el *NASA/IPAC Extragalactic Database NED-1D* (Madore & Steer 2008) que contiene 2553 medidas de distancia para 979 galaxias (con velocidades de recesión conocidas) tomadas por los siguientes métodos, siendo la distancia máxima para cada método incluida en este catálogo la siguiente:

- Cefeidas (hasta $\approx 55\text{Mpc}$)
- Supernovas tipo *Ia* (hasta $\approx 600\text{Mpc}$)
- *TRGB* (hasta $\approx 14\text{Mpc}$)
- Método de *Tully-Fisher* (hasta $\approx 100\text{Mpc}$)
- *SBF* (hasta $\approx 100\text{Mpc}$)
- *MASER* (hasta $\approx 18\text{Mpc}$)

Representando las distintas medidas de distancia y velocidad se obtiene una relación lineal (consistente con la Ley de Hubble) que ofrece como resultado:

$$H_0 \approx 70 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$$

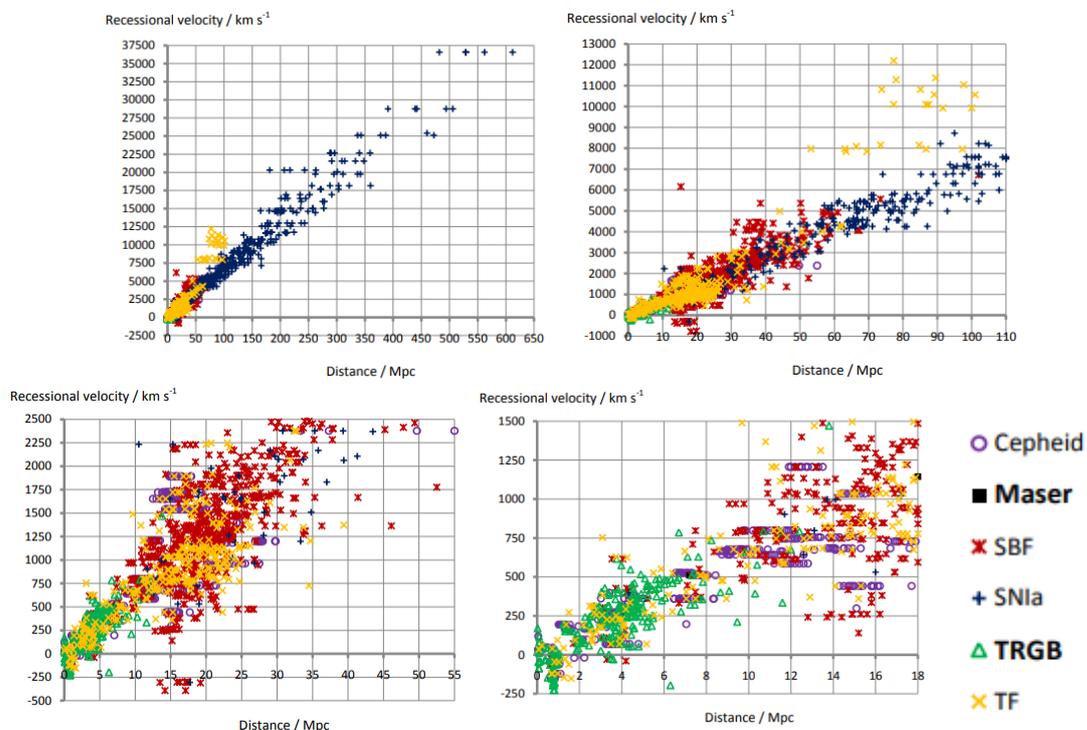


Figura 12: Catálogo NASA/IPAC Extragalactic Database NED-1D (Madore & Steer 2008). De arriba abajo y de izquierda a derecha corresponden al catálogo completo, zoom hasta los 110Mpc, zoom hasta los 55Mpc y zoom hasta los 18Mpc, destacando ligeramente un tipo u otro de método de medida según destaquen.

Veamos algunos métodos más para hallar H_0 basados en medidas de distancia:

- **“Baryon Acoustic Oscillations (BAO)”**: En el anterior capítulo hemos estudiado exhaustivamente el origen físico de las *BAO*, que eran oscilaciones de las zonas de exceso de densidad en el plasma barión-fotón que se propagan con la *Velocidad del sonido en el plasma* dada por (11) antes de la *Recombinación* y son producidas por la competición entre las presiones de radiación (hacia fuera) y gravitacional (hacia dentro). En la

Recombinación los fotones quedan liberados y al desaparecer esa presión de radiación las oscilaciones se detienen quedando congelada la materia bariónica y dando lugar a fluctuaciones en la densidad de energía bariónica que podemos observar en el *CMB* y cuya expansión queda ligada a la del universo, convirtiéndose esas fluctuaciones de densidad del universo primigenio en las estructuras a gran escala actuales que pueden ser observadas.

Para el cálculo de H_0 es necesario tomar una muestra de la distribución de galaxias para un z concreto. Al calcular la distancia entre galaxias de esta distribución se observará un exceso para una distancia concreta que, como sabemos, se debe a que la mayoría de galaxias se forman en el centro y en los extremos de los cúmulos de exceso de densidad producidos por las *BAO*, de modo que esta distribución de galaxias nos da el tamaño actual de los cúmulos tras ser sometidos a la expansión del universo, y como se entiende bastante bien la física del *Horizonte de sonidos* podemos comparar el tamaño de los cúmulos en el momento de la *Recombinación*, dado por este horizonte ($146.8 \pm 1.8 Mpc$), con el tamaño actual de los cúmulos, dado por la distribución de galaxias, y obtener así información sobre la expansión a la que han sido sometidos, que está relacionada con la expansión del universo.

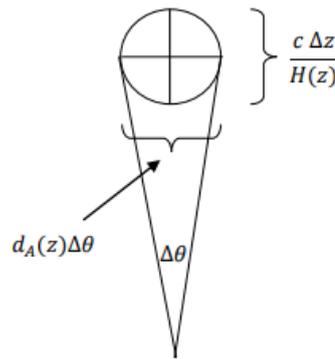


Figura 13: Diagrama del test Alcock-Paczinsky (Alcock & Paczinsky (1979)), que permite hallar $d_A(z) \cdot H(z)$ a partir de medidas de $\Delta z / \Delta\theta$ (que conocemos) cuando se tiene un objeto esférico (en nuestro caso una distribución de galaxias) cuyo diámetro es desconocido. El ratio entre el tamaño del objeto observado a lo largo del plano de visión y en la dirección perpendicular depende únicamente del modelo cosmológico. El tamaño angular del objeto $\Delta\theta$ se obtiene directamente de la distribución de galaxias, $d_A(z)$ es la Distancia diametral angular, $H(z)$ la Constante de Hubble y Δz la diferencia de "Redshift" entre las partes frontal y trasera del objeto.

Una vez localizada, los radios en el plano de visión y en la dirección perpendicular de esta distribución esférica de galaxias proveniente del cúmulo de exceso de densidad dejado atrás por la *BAO* en el momento de la *Recombinación* vienen dados por:

$$s_{\parallel}(z) = \frac{c\Delta z}{H(z)}$$

$$s_{\perp}(z) = d_A(z)\Delta\theta(1+z)$$

Conocidos Δz , $\Delta\theta$ y z podemos hallar $d_A(z)$ y $H(z)$ si conocemos $s_{\parallel}(z)$ y $s_{\perp}(z)$. Para obtenerlos se hace uso de la *Función de correlación* (ξ) entre dos puntos para la distribución de galaxias, que es una medida de la diferencia de densidades en una escala relativa para una distribución uniforme de densidades y se obtiene directamente de la distribución de galaxias observada.

De este modo la aplicación de medidas *BAO* para imponer restricciones a los parámetros cosmológicos depende de la distribución de galaxias observada. Esto presenta varias fuentes de error importantes como la *Varianza cósmica*, que impone limitaciones en la precisión de las observaciones a gran escala, el *Ruido de disparo* que son los errores debidos a la poca cantidad de muestras en la reconstrucción de la distribución de galaxias o los *Efectos de no linealidad*.

Medidas de H_0 por este método ofrecen $H_0 = 68.2 \pm 2.2 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$ (Percival et al. (2010)) para las limitaciones en la densidad de materia oscura y bariónica obtenida por las observaciones del *WMAP*.

- **Efecto Sunyaev-Zel'dovich (SZE):** (Sunyaev & Zeldovich (1970), (1972)) Se trata de un efecto de modificación en el *CMB* debido a que los fotones emitidos en la *Superficie de última dispersión* sufren una dispersión por electrones libres en su camino a nosotros, modificando la señal del *CMB*. Es independiente del "*Redshift*" de modo que sirve para largas distancias y junto con otras medidas permite limitar la *Constante de Hubble*. Procediendo como hasta ahora comenzaremos dando una explicación física de los distintos tipos de efecto, después veremos cómo permite obtener medidas de H_0 y finalmente estudiaremos sus fuentes de error principales.

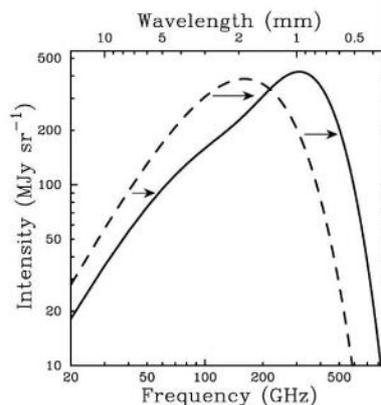


Figura 14: SZE producido por un cúmulo ficticio 1000 veces más masivo que los habituales (Carlstrom et al. (2002)). La línea punteada muestra el espectro del CMB sin distorsionar (cuerpo negro) y la continua el espectro distorsionado por este cúmulo ficticio. Como se puede apreciar para frecuencias menores de un cierto valor (218GHz en este caso) el efecto es un descenso en la intensidad mientras que para valores superiores da lugar a un aumento. Para un valor concreto de la frecuencia NO se produce efecto alguno por el SZE.

Veamos los distintos tipos:

1. *Basado en Dispersión de Compton inversa:* Cuando los electrones producen una dispersión en los fotones se dice que se trata de un proceso de Compton inverso. Esta dispersión produce un cambio en la E y dirección del fotón y viene dada por:

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \quad (20)$$

Donde ν y ν' son las frecuencias del fotón antes y después de la dispersión y θ el ángulo de dispersión.

Podemos considerar fotones de baja energía siendo dispersados por electrones apenas relativistas, en este límite se tiene de manera logarítmica el cambio en la frecuencia producido por el efecto: $s = \log \nu''/\nu$, siendo ν'' la frecuencia final observada del fotón, que es distinta de ν' debido al cambio de dirección. Con esto la probabilidad de que la dispersión por un electrón de velocidad βc cause un desplazamiento s en la frecuencia viene dada por:

$$P(s; \beta) = \frac{3}{16\gamma^4\beta} \int_{\mu_1}^{\mu_2} (1 + \beta\mu') \left[1 + \mu^2\mu'^2 + \frac{1}{2}(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2) \right] (1 - \beta\mu)^{-3} d\mu \quad (21)$$

Donde son $\beta = v/c$, $\mu = \cos \theta$, θ el ángulo que describe la dirección del fotón, γ el factor de Lorentz, los $'$ indican el final y:

$$\mu' = \frac{e^s(1 - \beta\mu) - 1}{\beta}, \mu_1 = \begin{cases} -1; & \text{si } s < 0 \\ \frac{1 - e^{-s}(1 + \beta)}{\beta}; & \text{si } s \geq 0 \end{cases}, \mu_2 = \begin{cases} \frac{1 - e^{-s}(1 - \beta)}{\beta}; & \text{si } s < 0 \\ 1; & \text{si } s \geq 0 \end{cases}$$

La dispersión que sufren los fotones del *CMB* por efecto de electrones en su camino a nosotros se da en zonas de gran concentración de electrones, teniendo cada uno de ellos una velocidad concreta. Para estudiar el efecto que tiene, no un único electrón, sino una población de ellos con distintas velocidades relativas a la de la luz (β) hay que considerar una distribución de electrones con distintas β . Para ello comenzamos considerando fotones que atraviesan la población de electrones siendo dispersados sólo una vez, en este caso la probabilidad de que se produzca un desplazamiento s en la frecuencia es:

$$P_1(s) = \int_{\beta_{min}}^1 p_e(\beta) d\beta P(s; \beta)$$

Donde $p_e(\beta)$ es la distribución de velocidades de la población de electrones que produce el efecto y $\beta_{min} = \frac{e^{|s|}-1}{e^{|s|}+1}$ el valor mínimo de β para que se dé un desplazamiento s .

Se puede hallar para fotones que son dispersados dos veces por la población de electrones:

$$P_2(s) = \int dt_1 P_1(t_1) P_1(s - t_1)$$

Procediendo análogamente para el caso en que se produjeran 3, 4, ... dispersiones se obtiene:

$$P(s) = e^{-\tau_e} \left(\delta(s) + \tau_e P_1(s) + \frac{1}{2!} \tau_e^2 P_2(s) + \dots \right) \quad (22)$$

Vamos a considerar ahora por simplicidad despreciables los efectos de múltiples dispersiones. Consideremos un espectro de *CMB* de un cuerpo negro puro $\rightarrow I_0(\nu) =$

$\frac{2h\nu^3}{c^2 \left(e^{\left(\frac{h\nu}{k_B \cdot T_{RAD}} \right)} - 1 \right)}$ que es la ley de Planck para la radiación de un cuerpo negro puro. Así, el

espectro para una única dispersión será dado por la siguiente expresión y nos permitirá hallar el cambio en el *CMB* producido por este *SZE* de *Dispersión de Compton inversa* para este caso de una única dispersión:

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(s) I_0(\nu_0) ds$$

Para terminar, si suponemos que tenemos, además de fotones de baja energía y electrones no relativistas, una dispersión óptica media pequeña ($\tau_e \ll 1$) se obtiene:

$$\Delta I(\nu) = \frac{2h}{c^2} \tau_e \int_{-\infty}^{\infty} P_1(s) ds \left(\frac{\nu_0^3}{e^{\left(\frac{h\nu_0}{k_B \cdot T_{RAD}} \right)} - 1} - \frac{\nu^3}{e^{\left(\frac{h\nu_0}{k_B \cdot T_{RAD}} \right)} - 1} \right) \quad (23)$$

Esta ecuación (23) muestra la esencial propiedad de la independencia del *SZE* con el “*Redshift*”. Como vemos el *SZE* depende de la temperatura de los electrones pues, como dijimos depende de su velocidad.

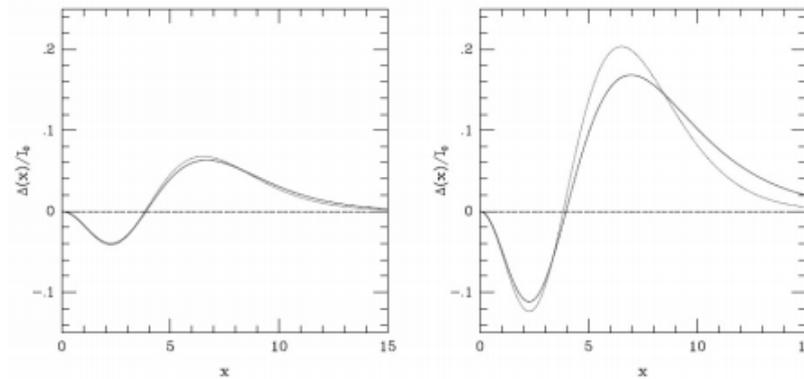


Figura 15: (Birkinshaw (1999)) Deformación espectral causada por la *Dispersión de Compton inversa* sobre un espectro de Planck incidente tras una única dispersión al paso por una población térmica de electrones en función de la frecuencia adimensional $x = \frac{h\nu}{k_B T_{RAD}}$, para $I_0 = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{k_B T_{RAD}}{h} \right)^3$. Para la izquierda los electrones se encuentran a una $k_B T_{RAD} = 5.1 \text{ KeV}$ y para la derecha a $k_B T_{RAD} = 15.3 \text{ KeV}$.

2. *SZE térmico*: Se da en poblaciones que no tienen tanta *E* y son muy poco relativistas de modo que pueden estudiarse en la aproximación Kompaneets. Para estudiar la población de electrones se usan principalmente los siguientes parámetros:

- La concentración de electrones (n_e)
- La dispersión óptica media ($\tau_e = \int n_e(\vec{r}) \sigma_T dl$), siendo l la longitud de camino que se integra a lo largo de la extensión del gas electrónico y σ_T la sección eficaz de Thomson.
- Parámetro de Comptonización ($y = \int n_e(\vec{r}) \sigma_T \frac{k_B T_e(\vec{r})}{m_e c^2} dl$)
- Brillo de la superficie espectral de rayos X en la línea de visión ($b_x(E) = \frac{1}{4\pi(1+z)^3} \int n_e(\vec{r})^2 \Lambda(E, T_e) dl$), siendo z el “*Redshift*”, Λ la emisividad espectral del gas electrónico asumido isotrópico y E la energía observada de los rayos X.

Datos observacionales de la emisión de rayos X proporcionan información sobre $b_x(E)$ y permiten predecir el SZE del cúmulo, obteniendo observacionalmente n_e y T_e y hallando con ellos el resto de parámetros.

Para la interpretación de los datos observacionales es frecuente elegirse el *Modelo isotérmico* β , en que la T_e es constante y la concentración de electrones se considera distribuida esféricamente, luego $n_e = n_{e0} \left(1 + \frac{r^2}{r_c^2}\right)^{-1.5\beta}$ siendo r_c el radio del núcleo del cúmulo. Este es el modelo más simple para interpretar los datos observacionales aunque hay algunos más complejos que consideran una estructura elíptica o en que la T varía.

Típicamente el efecto del SZE térmico observado en cúmulos de galaxias es del orden de $\Delta T_0 \sim -h_{100}^{-0.5} mK$ para frecuencias bajas, siendo h_{100} la h considerada para $H_0 = 100 \text{ km/sMpc}$, lo que evidencia la posibilidad de medir la *Constante de Hubble* haciendo uso de este efecto.

3. Otros tipos de SZE : Destacamos 2 tipos:

- *No térmico*: Se da en poblaciones de electrones altamente relativistas y su efecto es mucho menor que el de el SZE térmico ya que los electrones altamente relativistas tienen una densidad mucho menor que los no relativistas y es mucho menos probable la dispersión de los fotones del CMB .
- *Cinemático*: Se debe al movimiento del cúmulo de dispersión debido a la expansión del universo. En el sistema de referencia del medio de dispersión la radiación del CMB parece anisotrópica y el efecto Compton inverso la re isotropiza ligeramente. Como resultado, en ese marco se ve un CMB anisotrópico con amplitud proporcional a la velocidad peculiar en la línea de visión y a la dispersión óptica media. Su efecto es bastante débil y tiene un espectro distinto del SZE térmico de modo que actúa como ruido en las medidas de H por SZE térmico.

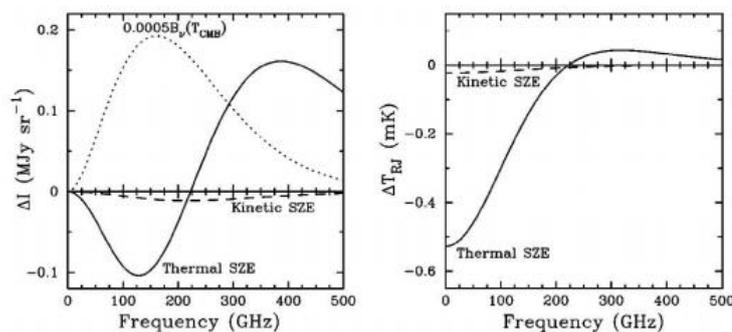


Figura 16: Fuerzas relativas de los SZE térmico y cinemático para un cúmulo con $k_B T_e = 10 \text{ KeV}$, parámetro de Comptonización $y = 10^{-4}$ y velocidad peculiar de 500 km/s (Carlstrom et al. (2002)). A la izquierda se muestra su efecto en los cambios de intensidad sobre un espectro térmico del CMB a $2.7 \text{ }^\circ\text{K}$ y a la derecha cambios en la temperatura.

Una vez estudiados los distintos tipos de SZE veamos cómo usarlo para hallar la *Constante de Hubble*. Para ello procedemos como es habitual, hallando una distancia (la *Distancia diametral angular* del cúmulo que produce el SZE en este caso) y con el “Redshift”

hallaremos la *Constante de Hubble*. Como hemos visto es posible caracterizar estos cúmulos con ciertos parámetros que pueden obtenerse observacionalmente con el espectro de emisión del cúmulo, que ofrece información relativa al cambio de intensidad debido al *SZE* con (23) y al brillo de la superficie de los rayos X con $b_x(E) = \frac{1}{4\pi(1+z)^3} \int n_e(\vec{r})^2 \Lambda(E, T_e) dl$. Tomando $x = \frac{h\nu}{k_B T_{RAD}}$ que es una frecuencia adimensional, $I_0 = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{k_B T_{RAD}}{h} \right)^3$ una escala de la densidad y $\psi(x, T_e) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(s) ds \left(\frac{x_0^3}{e^{x_0-1}} - \frac{x^3}{e^{x-1}} \right)$ la forma adimensional del espectro relativista que depende de la frecuencia para el *SZE* térmico, se puede escribir (23) como:

$$\Delta I(x) = I_0 \int n_e \sigma_T \psi(x, T_e) dl$$

Como vemos el *SZE* térmico depende de n_e y el espectro de rayos X depende de n_e^2 de modo que el ratio $\frac{\Delta I^2}{b_x}$ da una medida de la longitud de camino a lo largo del gas electrónico. Así, conocida la estructura del gas se puede determinar su tamaño angular y con él la *Distancia diametral angular*. Adoptando el *Modelo isotérmico* β se puede expresar el *SZE* y la emisión de rayos X en términos de los diferentes parámetros observacionales y de los factores de forma adimensionales (f) con:

$$\Delta I(\theta, \varphi) = N_{SZ} \int f_n f_\psi d\xi, \text{ donde } N_{SZ} \text{ representa parámetros observables por SZE}$$

$$b_x(\theta, \varphi) = N_x \int f_n^2 f_\Lambda d\xi, \text{ donde } N_x \text{ representa parámetros observables por rayos } X$$

Los ángulos θ, φ son el ángulo entre la línea de visión y el centro del cúmulo y el ángulo acimutal sobre la línea de visión respectivamente. Obtenemos finalmente en base a estos datos observacionales:

$$D_A = \frac{N_{SZ}^2}{N_x} \left(\frac{\Lambda_{e0}}{4\pi(1+z)^3 (\psi_0 I_0 \sigma_T)^2} \right) \quad (24)$$

Recordando que Λ es la emisividad espectral del gas electrónico asumido isotrópico.

Finalmente con (24) y con el "*Redshift*" se puede hallar H_0 para valores asumidos del *Parámetro de deceleración* $q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$ y de la constante cosmológica. Para constante cosmológica igual a 0 obtenemos:

$$H_0 = \frac{c}{D_A q_0^2} \frac{[q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1)]}{(1+z)^2} \quad (25)$$

Para terminar con el *SZE* estudiemos las principales fuentes de error. A diferencia de otros métodos en este no se hace uso de ningún calibrado sino que es basa en la física de un gas en ciertas condiciones hidrostáticas dentro de un pozo gravitacional debido al cúmulo, eliminándose así errores sistemáticos importantes y dependiendo la precisión de las medidas de cuán bien se entienda el modelo del gas en el cúmulo.

El principal error se debe al uso de los factores de forma f para el cálculo de los parámetros observacionales N_{SZE} y N_x pues imperfecciones en el modelo considerado hacen aparecer errores sistemáticos. Por otro lado aparece un error debido a una preferencia en la selección de cúmulos alargados, pues en ellos son más fáciles de detectar los efectos del *SZE* y de los rayos X , pese a que en el modelo los supusimos perfectamente esféricos. El factor que describe cuán alargada está la distribución en la línea de visión es Z y corrige los cálculos con:

$$D_A(\text{estimado}) = Z \cdot D_A(\text{verdadero}), \text{ con } Z = 1 \text{ para simetría esférica}$$

Se han realizado medidas de H_0 por *SZE* (Bonamente et al. (2006)) a partir de observaciones de emisión de rayos X . Para 38 cúmulos de galaxias con $0.14 < z < 0.89$ asumiendo un universo con $\Omega_m = 0.3$ y $\Omega_\Lambda = 0.7$ se obtiene:

$$H_0 = 76.9^{+3.9-10(\text{random})}_{-3.4-8(\text{sistemático})} \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}, \text{ para el modelo en equilibrio hidrostático}$$

$$H_0 = 77.6^{+4.8-10.1(\text{random})}_{-4.3-8.2(\text{sistemático})} \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}, \text{ para el modelo isotérmico } \beta$$

- **Retardo temporal por lentes gravitacionales:** Las lentes gravitacionales se forman cuando la luz de objetos distantes y brillantes se curva alrededor de un objeto masivo situado entre el emisor y el receptor debido a la curvatura del espacio-tiempo en presencia de ese objeto masivo, predicha por la teoría de la gravedad de Einstein.

Para entender cómo se puede usar este fenómeno para hallar la *Constante de Hubble* partimos de una lente gravitacional producida por una masa puntual, aproximación que puede hacerse cuando la lente es muy pequeña en comparación con las distancias consideradas. En este caso la luz emitida por un objeto más lejano que la lente sufrirá una dispersión por efecto de la curvatura del espacio-tiempo en presencia de esa lente. El resultado de este fenómeno en el punto de observación depende de la posición relativa de la fuente, la lente y el observador como se observa en la *Figura 17*:

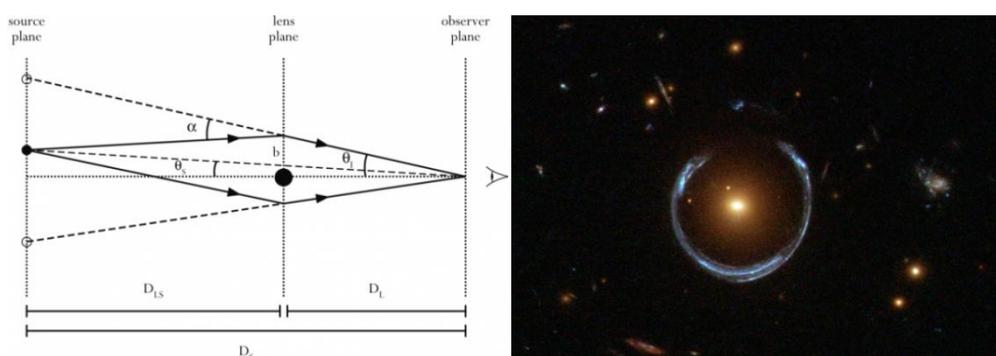


Figura 17: A la izquierda el efecto de la lente gravitacional sobre la luz de una fuente fuera del eje óptico en presencia de una lente gravitacional puntual (Blandford & Narayan (1992)), el resultado en el punto de observación es la aparición de 2 imágenes del mismo objeto fuente en lados opuestos de la lente, siendo θ_s la posición real de la fuente, θ_i la posición aparente desde el punto de observación de una de las imágenes formadas siendo $i = 1, 2$ para este caso, α el efecto de la lente y D_s , D_L y D_{LS} las "Distancias diametrales angulares" de la fuente, la lente y la de la fuente respecto a la lente, respectivamente. A la derecha un anillo de Einstein, formado por las muchas imágenes que se observan en el punto de observación de un mismo objeto fuente cuando se encuentra en el eje óptico (justo detrás de la lente) en cuyo caso se forman muchas más que 2 imágenes del mismo objeto.

Cuando la lente que da lugar al fenómeno es una distribución de masa lo suficientemente ancha para que no se pueda hacer la aproximación de masa puntual la situación es algo más compleja y se producen varias imágenes de la misma fuente, siendo la *Multiplicidad de imagen* el número de imágenes formadas, que depende de dónde esté situada la fuente con respecto a la lente y al observador.

El tiempo de propagación desde la fuente al observador puede variar para cada una de estas imágenes pues, al producirse cada una en un punto concreto y ser sometidas a un potencial gravitacional distinto, recorren una longitud de camino particular en su viaje hasta el observador. Si la fuente es variable se puede medir esa diferencia en el tiempo de propagación, si la fuente se apagara de repente, por ejemplo, entonces en el punto de observación cada imagen producida por el efecto de la lente gravitacional sobre esa fuente se apagaría en un momento concreto pues los rayos de luz recorrerán caminos ópticos distintos en su viaje al observador.

Para una lente en un universo homogéneo el exceso de tiempo t_i para una imagen observada con en cierto θ_i relativo al tiempo en caso de que no hubiera lente (el subíndice i etiqueta las distintas imágenes observadas de una misma fuente) viene dado por:

$$t_i = (1 + z_L) \left[\frac{D_L D_S}{2c D_{LS}} (\theta_i - \theta_S)^2 - \frac{\psi(\theta_i)}{c^3} \right] \quad (26)$$

Donde z_L es el “Redshift” correspondiente a la posición de la lente, D_S , D_L y D_{LS} las *Distancias diametrales angulares* de la fuente, la lente y la de la fuente respecto a la lente, respectivamente y $\psi(\theta_i)$ el potencial Newtoniano debido a la lente al que es sometida esa imagen concreta, que viene dado en función de la densidad de masa de la lente (ϵ) por la ecuación de Poisson $\nabla^2 \psi = 8\pi G \epsilon$. La primera parte del corchete describe el retardo geométrico y la segunda el retardo gravitacional (*Efecto Shapiro*). Podemos calcular el retardo temporal entre 2 imágenes distintas con $t_{i,j} = t_i - t_j$.

Con esto podemos relacionar el parámetro observacional medible $t_{i,j}$ con la *Distancia diametral angular*. Por otro lado, para un universo *FLRW* homogéneo la *Distancia diametral angular* está relacionada con la longitud propia (ξ_j) observada en el corrimiento z_j y con el ángulo θ_i observado en $z_i < z_j$ con (*Blandford & Narayan (1992)*):

$$D(z_i, z_j) = \frac{\xi_j}{\theta_i} = \frac{2c(1 - \Omega_0 - G_i G_j)(G_i - G_j)}{H_0 \Omega_{total}^2 (1 + z_i)(1 + z_j)^2} \quad (27)$$

Siendo $G_i = \sqrt{1 + \Omega_{total} z_i}$, de modo que hay una gran dependencia con la distribución de masa de la lente y recordando con $d_A(z) = D/\delta$ para la *Distancia diametral angular* que relaciona el tamaño real del objeto con el tamaño observado. Vemos que con (26) podemos hallar la *Distancia diametral angular* a partir de medidas observacionales y con (27) la *Constante de Hubble*.

Este método presenta algunas dificultades importantes. A priori no tenemos información sobre la forma del potencial de la lente ψ de modo que debemos introducir modelos parametrizados que estén de acuerdo con nuestros datos observacionales. Esto supone

una limitación en la obtención de la diferencia temporal (26) con la que se obtiene el valor de la *Constante de Hubble* y la precisión de las medidas queda limitada por la cantidad y calidad de datos observacionales.

Además, existen degeneraciones que si no se rompen dan lugar a grandes variaciones en la predicción de la *Constante de Hubble*. La más importante es la de *Lámina de masa* y se debe a que puede añadirse una lámina de masa al modelo de forma que no afecte a la posición en que se observan las diferentes imágenes, lo que estaría de acuerdo con las observaciones, pero sí afectaría al retardo temporal ofreciendo una *Constante de Hubble* distinta, pues esta masa adicional tendría efectos sobre el potencial ψ que será distinto en caso de que esta lámina de masa, que es indistinguible en las observaciones, estuviera o no presente (Suyu et al. (2010)).

En general la falta de información suficiente sobre la lente es un escollo muy importante pero existe otro problema, el llamado *Microlensing* en que otros cuerpos presentes a lo largo de la línea de visión de la fuente pueden dar lugar a efectos de dispersión, modificando la posición en que se observan las imágenes producto de la lente gravitacional principal.

Las dificultades comentadas hacen que haya pocos sistemas que ofrezcan medidas de gran precisión por este método. Uno de ellos es *JVAS0218 + 357* cuya precisión es mejor al 5% y que predice un valor de $H_0 = 78 \pm 6 \text{ km/sMpc}$ (Schechter (2005)).

Otros sistemas ofrecen valores más pequeños como *B1608 + 656* para el que asumiendo $\Omega_m = 0.3$ y $\Omega_\Lambda = 0.7$ para un H_0 supuesto uniforme se obtiene $H_0 = 70.6 \pm 3.1 \text{ km/sMpc}$ (Suyu et al. (2010)).

- **Ondas gravitacionales:** Es el último método que vamos a estudiar y tiene la particularidad de que no se basa en la observación de fotones como los anteriores de modo que puede ser una buena alternativa y complemento a ellos. Es una técnica bastante nueva y aún no se dispone de medidas precisas aunque se espera que avances próximos permitan obtener grandes resultados.

Las ondas gravitacionales son perturbaciones en el espacio-tiempo producidas por un cuerpo masivo acelerado, que se propagan por el espacio a la velocidad de la luz y que pueden ser detectadas por métodos interferométricos (su existencia fue confirmada por *LIGO* recientemente).

En el universo hay muy pocos cuerpos capaces de producir ondas gravitacionales detectables de modo que las fuentes más probables son sistemas binarios de agujeros negros o estrellas de neutrones. Así, un sistema binario de estrellas de neutrones puede emitir estas ondas y esta pérdida de energía en forma de ondas gravitacionales hace que el sistema entre en una espiral de decaimiento hasta su colisión. Las ondas emitidas justo antes de la coalescencia (colisión) son detectables con métodos actuales y ofrecen suficiente información para calcular la distancia de la fuente y, con el "*Redshift*", la *Constante de Hubble*.

El sistema binario en coalescencia tiene una órbita espiral casi circular debido a la pérdida de energía por la emisión de estas ondas gravitacionales (Schutz (1986)). Con la fórmula del cuadrupolo estándar de la relatividad general se puede obtener la amplitud media $\langle A \rangle$ y el tiempo de escala del cambio de frecuencia τ con:

$$\langle A \rangle = 1 \cdot 10^{-23} m_T^{2/3} \mu f_{100}^{2/3} r_{100}^{-1}$$

$$\tau = \frac{f}{\dot{f}} = 7.8 m_T^{-2/3} \mu^{-1} f_{100}^{-8/3}$$

Siendo las masas total y reducida m_T y μ dadas en masas Solares, $f_{100} = f/100$ las frecuencias de las ondas gravitacionales dada en Hz y $r_{100} = r/100$ la distancia al sistema dada en Mpc (estas dos últimas cantidades se han definido de forma análoga a $h = \frac{H_0}{100}$). Las observaciones ofrecen valores de $\langle A \rangle$, τ y f_{100} de modo que puede determinarse la distancia al sistema sin necesidad de conocer las masas con:

$$r_{100} = 7.8 \cdot 10^{-23} \cdot f_{100}^{-2} (\tau \langle A \rangle)^{-1} \quad (28)$$

Conocida la distancia a la fuente se puede triangular su posición con los retardos temporales en diferentes detectores. Conocida la posición de la fuente se puede calcular la *Constante de Hubble* de la manera habitual, conocido su "Redshift".

Cálculo de la Constante de Hubble a través del CMB:

Para entender el origen del problema y poder proponer posibles soluciones comencemos por ver cómo pueden obtenerse resultados interesantes a partir de las predicciones teóricas ofrecidas por el modelo Λ CDM en base a observaciones en el espectro de potencias del CMB. Recordemos que el espectro de potencias del CMB nos proporciona información sobre las densidades de energía de las distintas especies del universo, de modo que lo hace de la *Constante de Hubble* recordando (9) y (10). Para determinar la *Constante de Hubble* directamente del espectro de potencias asumiendo Λ CDM podemos proceder en los siguientes pasos:

1. *Determinar la densidad bariónica y de materia para calcular el Horizonte de sonidos:*

Ya hemos visto en el capítulo anterior cómo los picos del espectro de potencias ofrecen información sobre los parámetros densidad, en concreto el segundo pico da información de la densidad bariónica y observando (11) vemos que la Velocidad del sonido (c_s) depende del ratio de ésta densidad con la fotónica, que está enteramente determinada por la temperatura del CMB en Λ CDM (Fixsen et al. (1996)). Conocido c_s se puede hallar el *Horizonte de sonidos en el momento de última dispersión* (r_s^*) con:

$$r_s^* = \int_0^{t^*} \frac{dt}{a(t)} c_s(t) = \int_{z^*}^{\infty} \frac{dz}{H(z)} c_s(t) \quad (29)$$

Aquí el exponente * indica que son medidas en el momento de la última dispersión. Cuando estudiamos por primera vez el *Horizonte de sonidos* lo hicimos desde un punto de vista más cualitativo y no fue necesario obtener este resultado (29).

En (29) se puede observar la relación directa entre la *Constante de Hubble* y el *Horizonte de sonidos en el momento de última dispersión* (r_s^*), además, vemos que éste depende de la *Velocidad del sonido* que de acuerdo con (11) sólo depende de la densidad bariónica, que conocemos con el espectro de potencias del *CMB*. Así, un cálculo preciso de r_s^* permitiría obtener $H(z)$ con precisión y podemos estudiar modelos que varíen r_s^* para ver cómo variaría $H(z)$.

Recordando (9) y (10) vemos que es necesario obtener las densidades del resto de especies. La densidad de radiación viene perfectamente determinada en Λ CDM por la temperatura, que es conocida, y la densidad de materia se puede obtener con el *Tamaño angular del horizonte de sonidos* (θ_s^*) pues θ_s^* depende de ρ_m / ρ_{rad} . Conocido ρ_{rad} veamos cómo calcular θ_s^* para obtener ρ_m y con ella, la densidad bariónica y la de radiación podemos ajustar el último parámetro desconocido para obtener la *Constante de Hubble*.

2. *Obtener el Tamaño angular del horizonte de sonidos* (θ_s^*) *a partir del espaciado entre picos para obtener la Distancia diametral angular* (D_A^*):

Sabemos que el espectro de potencias aporta información sobre las *BAO*, que como explicamos pueden expandirse en términos de armónicos esféricos caracterizados por l . Cada uno de estos modos l corresponde a una dispersión angular en el *CMB* y, recordando que los picos del espectro corresponden al número de puntos del *CMB* que se desvían en una cierta cantidad del valor medio de la temperatura del *CMB*, se puede relacionar el espaciado entre picos con el *Tamaño angular del horizonte de sonidos* (θ_s^*) con:

$$\theta_s^* = \pi / \Delta l, \text{ siendo } \Delta l \text{ el espaciado entre picos, que conocemos. (Wu \& White (1997))}$$

Así, podemos hallar θ_s^* observando directamente el espectro de potencias y con él obtenemos ρ_m , de modo que sólo nos faltaría ajustar ρ_Λ .

3. *Ajustar el único parámetro libre de densidad para que coincida la Distancia diametral angular* (D_A^*):

Vemos que sólo a partir de resultados teóricos no podemos obtener ρ_Λ , para ello debemos hacer coincidir el valor de la *Distancia diametral angular* (D_A^*) obtenido de este modo, que es por definición $D_A^* = \frac{r_s^*}{\theta_s^*}$ con el obtenido teóricamente para Λ CDM en que aparece explícitamente la densidad de Λ :

$$D_A^* = \int_0^{z^*} \frac{dz}{H(z)} = 2.998 \text{ Mpc} \cdot \int_0^{z^*} \frac{dz}{\sqrt{w_\Lambda + w_m(1+z)^3 + w_\gamma(1+z)^4 + w_\nu(z)}}$$

Siendo $w_x = \Omega_x h^2$ y representando w_γ la densidad de radiación que se halla con la temperatura, w_ν la de neutrinos que se obtiene asumiendo especificadas las masas de los neutrinos y w_Λ la de energía oscura.

Se pueden ajustar los valores para el parámetro w_A de modo coincidan los resultados de D_A^* para ambos métodos.

Es al realizar este ajuste donde se observa la dificultad a la hora de reconciliar los resultados observacionales con los resultados teóricos predichos por Λ CDM. Los resultados observacionales más precisos actualmente (que son una mezcla de los distintos métodos que hemos estudiado en el capítulo anterior) son los obtenidos por proyectos como *BOSS BAO*, *Pantheon Supernova* o *SH0ES* e imponen una restricción en el valor del *Horizonte de sonidos en el momento de última dispersión* (r_s^*), que estudiaremos en el Plano $r_s^{drag} - H_0$ y que sabemos está relacionado con la *Constante de Hubble*. Al obtenerlo por métodos teóricos (como acabamos de hacer) se obtiene un valor que queda fuera de esas restricciones observacionales, de modo que no es compatible el resultado teórico obtenido con los resultados observacionales. Para intentar solucionarlo debe modificarse el modelo con el objetivo de que el valor obtenido sea compatible con los resultados observacionales o deben proponerse fuentes de error que den lugar a resultados observacionales erróneos.

Plano $r_s^{drag} - H_0$:

Hemos visto la estrecha relación entre el *Horizonte de sonidos en el momento de última dispersión* (r_s^*) y la *Constante de Hubble*. Esta relación implica que una discordancia en medidas de la *Constante de Hubble* debe implicar una discordancia en medidas del *Horizonte de sonidos en el momento de última dispersión* (r_s^*), y viceversa, en particular para los datos observacionales más precisos actuales se obtiene un resultado un 7% menor para el *Horizonte de sonidos en el momento de última dispersión* (r_s^*) que el obtenido por medidas de Λ CDM (que acabamos de ver). Para verlo representamos los valores de H_0 obtenidos por distintos métodos teóricos (veremos enseguida qué significa “distintos métodos teóricos”) en función de los correspondientes valores para el *Horizonte de sonidos en el final de la época de arrastre bariónico* (r_s^{drag}), que es lo que se observa realmente en las *BAO* y que está fuertemente relacionado con el *Horizonte de sonidos en el momento de última dispersión* (r_s^*) pues ocurre ligeramente después de la última dispersión, obteniendo:

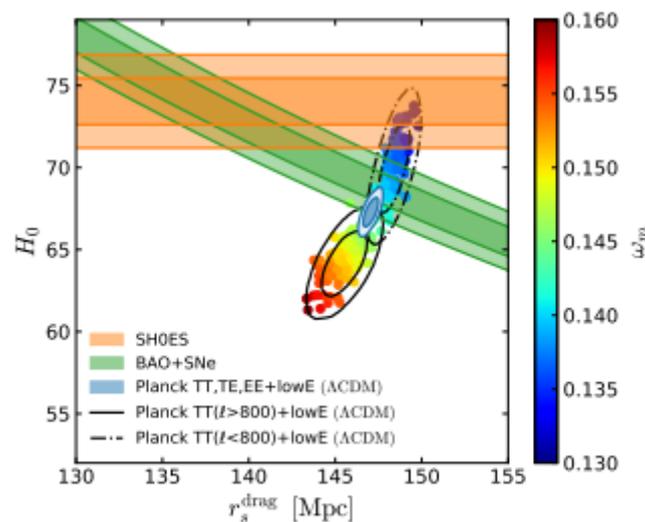


Figura 18: (Knox & Millea (2019)) Plano $r_s^{drag} - H_0$, representa los valores de H_0 obtenidos por distintos métodos teóricos asumiendo Λ CDM (Planck TT, TE, EE + low E, Planck TT ($l > 800$) + low E y Planck TT ($l < 800$) + low E) y sus correspondientes r_s^{drag} . El código de colores indica el valor de w_m con el que se han obtenido las medidas y las zonas naranja y verde muestran las regiones de confianza de un 68% (débil) y de un 95% (intenso) para los resultados observacionales de SH_0ES y $BAO + SNe$, respectivamente, ambas obtenidas sin asumir Λ CDM.

Se observa en la Figura 18 que un incremento en w_m da lugar a un decrecimiento en r_s^{drag} (y equivalentemente en r_s^*) y a un decrecimiento de H_0 . Eso se debe a que un cambio en w_m da lugar a un cambio en el Horizonte de sonidos en el momento de última dispersión (r_s^*) con:

$$\delta r_s^* / r_s^* \cong -\frac{1}{4} \delta w_m / w_m \quad (\text{Wu et al. (2001)})$$

Recordemos que w_m se obtiene a partir de θ_s^* haciendo uso del espaciado entre picos. Vemos que en zonas distintas del espectro de potencias (distintos l) obtenemos valores distintos de w_m , lo que se explica con un espaciado entre picos distinto en cada zona, en particular vemos que w_m es menor cuando se utiliza Planck TT ($l < 800$) + low E, que considera la región de $l < 800$, que al usar Planck TT ($l > 800$) + low E, en la región $l > 800$ en el espectro de potencias. Con “distintos métodos teóricos” nos referimos a valores de w_m obtenidos con el espaciado entre picos correspondiente a distintas zonas del espectro de potencias.

Si asumimos Λ CDM debemos mantener θ_s fijo de modo que un cambio en r_s^* , que es producido por los cambios en w_m , debe ser compensado por un cambio en D_A^* , así, un incremento en w_m da lugar a un decrecimiento en r_s^* y, por tanto, en D_A^* .

Vemos que para intentar cuadrar los datos teóricos con los observacionales dados por SH_0ES y $BAO + SNe$ debemos reducir el valor de r_s^* , aumentando la w_m , pero se observa que esto da lugar a una disminución de H_0 alejándonos de los valores observacionales aceptables, saliéndonos de las restricciones impuestas por ellos.

En conclusión, para que los valores teóricos fueran consistentes con los datos observacionales deberíamos reducir r_s^* y aumentar H_0 (como se observa en la Figura 18), pero esto no es posible de acuerdo con el modelo Λ CDM actual que permite movernos en el plano variando w_m pero no hay un valor de esta densidad que satisfaga mutuamente Λ CDM y los resultados observacionales. Para intentar conseguirlo vamos a proponer soluciones que modifiquen el valor obtenido para el Horizonte de sonidos en el momento de última dispersión (r_s^*) de dos maneras: primero proponiendo Soluciones Post-Recombinación, es decir, anisotropías que pudieran confundir nuestros datos del CMB producidas en el camino de los fotones una vez liberados en la Recombinación y después proponiendo Soluciones Pre-Recombinación, en que las anisotropías que confunden los datos del CMB se producen antes de la liberación de los fotones en la Recombinación.

3. Posibles soluciones a la discrepancia

Una vez estudiados los distintos métodos para obtener la *Constante de Hubble* y observada la discrepancia en los resultados obtenidos, es necesario proponer posibles soluciones al problema. Como hemos visto algunos de los métodos están fuertemente basados en la teoría y hacen uso de las observaciones del *CMB* para obtener conclusiones, mientras que otros métodos se basan en la observación directa de cuerpos celestes, ya sean Cefeidas, Supernovas tipo *Ia*, MASERs,... Esto parece indicar que hay una discordancia entre la teoría (basada en el modelo Λ CDM) y la observación. Para intentar solucionarla propondremos varios modelos: algunos que no se alejen de las predicciones de Λ CDM y que corrijan los resultados observacionales (dando lugar a variaciones en las medidas de distancia con las que hallábamos H_0 , principalmente) y otros que sí hacen cambios a Λ CDM y que corrigen errores en los resultados teóricos.

Es importante entender que pese a que el problema de la *Tensión de Hubble* es real, las observaciones actuales obtenidas del estudio del espectro de potencias del *CMB* están en muy buen acuerdo con la teoría, de modo que posibles soluciones que afecten mucho a la teoría dejarían de estar de acuerdo con las observaciones, que imponen restricciones en las soluciones que podemos proponer.

Soluciones Post-Recombinación:

Hemos visto que es necesario proponer soluciones que corrijan el error del 7% entre medidas observacionales y teóricas de r_s^* . En este primer apartado propondremos soluciones para las que las anisotropías que dan lugar a errores en la obtención de parámetros se producen después de la *Recombinación* y distinguimos entre *Soluciones para r_s^* grande* en que asumimos como correcto el resultado teórico de Λ CDM e intentamos encontrar errores en los resultados observacionales que aumenten el valor observacional y *Soluciones para r_s^* pequeño* en que intentamos reducir el valor teórico, en ambos casos para anisotropías *Post-Recombinación*:

- **Soluciones para r_s^* grande:** Como hemos mencionado asumen como correcto el valor obtenido teóricamente por Λ CDM. Vamos a considerar 3 posibilidades:
 - o **1. Meneos de $H(z)$:** Cuando se consideran los resultados observacionales para datos obtenidos a distancias correspondientes a corrimientos $z < 3$ aparecen restricciones que dan lugar a tensiones de entre 2σ y 3σ con respecto a los resultados teóricos de Λ CDM (Joudaki et al. (2018) & Keeley et al. (2019)). Para intentar solucionarlo se pueden considerar modelos de energía oscura distintos que corrijan la tensión. En particular, puede proponerse que una gran cantidad de nuevos grados de libertad afecte al ratio de expansión del universo a "*Redshifts*" pequeños, de modo que los resultados observacionales obtenidos para estos $z < 3$ se modifiquen al modificarse este ratio de expansión y se obtenga un valor para r_s^* más grande del que se obtiene asumiendo los grados de libertad actuales (Ravieri (2019)).

Este método presenta dos problemas principales, el primero es que la adición de estos nuevos grados de libertad parece bastante arbitraria y son preferidos modelos con pocos grados de libertad (la inclusión de estos grados de libertad reduce la tensión pero es necesario un fundamento físico que justifique su

introducción). Además, esta solución da lugar a meneos de $H(z)$ que podrían invalidar la reducción de la tensión para distintos corrimientos z .

- 2. *Violación de la relación de dualidad de distancias*: Se pueden relacionar la *Distancia de luminosidad* D_L y la *Distancia diametral angular* D_A con la relación:

$$d_A(z) = \frac{d_L(z)}{(1+z)^2} \quad (30)$$

Este es un resultado teórico del que hicimos uso para hallar el r_s^* asumiendo Λ CDM y es válido siempre que el número de fotones se conserve. Vemos que una posible solución a la discrepancia sería que esta relación deje de ser válida al usarla para obtener resultados observacionales (Ma & Corasaniti (2018)), si en una supernova algunas de las partículas emitidas se convirtiesen en fotones durante su viaje, por ejemplo, vemos que esta relación se violaría de modo que para supernovas cercanas se produciría menos esta conversión de partículas que en una lejana, al ser su camino hasta nosotros más corto, y sería erróneo usar esta relación de forma equivalente para ambas.

El principal problema de este método es que no soluciona la tensión entre resultados de Λ CDM y resultados observacionales por otros métodos independientes de la relación entre luminosidad y distancia, como el método de las ondas gravitacionales, por ejemplo. Además, no existe un modelo físico de partículas en el que un proceso como éste no diera problemas a otros procesos conocidos, como dar lugar a una menor producción de neutrinos por otros métodos en que las observaciones están muy de acuerdo con la teoría de su producción.

- 3. *Fallos en la calibración de Cefeidas*: Otra solución propuesta consiste en la aparición de una 5ª fuerza fundamental de largo alcance que afectaría a la fuerza gravitacional (Desmond et al. (2019)) pero estaría apantallada para densidades suficientemente grandes. Así, algunas de las Cefeidas usadas en la calibración de los distintos métodos para el cálculo de distancia que hemos visto tendrían una constante gravitacional G mayor, lo que afectaría a la relación periodo-luminosidad (18) al modificar la M y provocaría un aumento en la H_0 obtenida observacionalmente.

Presenta el mismo inconveniente que la solución anterior, no explica la tensión que aparece al considerar medidas por métodos que no hacen uso de este calibrado Cefeida.

- **Soluciones para r_s^* pequeño**: Como hemos mencionado estas soluciones suponen incorrecto el valor teórico obtenido con Λ CDM y buscan reducirlo. Veamos 2 de ellas:

- *Causas de confusión en tiempos tardíos*: Se trata de una solución que trata de reducir el r_s^* obtenido con Λ CDM pero sin asumir el modelo como incorrecto. Para reducir r_s^* sin cambiar Λ CDM hemos visto que hay que cambiar las w_m y w_b que controlan r_s^* y que obtuvimos al considerar el modelo Λ CDM en los datos del CMB. Para reducir la diferencia del 7% habría que doblar la w_b , lo cual se saldría mucho

de los resultados observacionales que pueden no ser perfectos, pero es un error demasiado grande como para tenerlo en cuenta (Aver et al. (2015) & Cooke et al. (2018)). Así, vamos a centrarnos en una posible confusión en la determinación de w_m .

Hay 3 efectos principales que pueden dar lugar a anisotropías: el primero es el “Efecto ISW” que es independiente del modelo de modo que un cambio en él no debería afectar a los datos. El segundo es el “Gravitational lensing” cuyo impacto en el CMB ya presenta fuertes restricciones independientes del modelo, además, cambios en el espectro debidos a este efecto pueden determinarse con un 3% de error, de modo que no se soluciona el 7% que buscamos (Planck Collaboration VI, A&A, (2018), arXiv:1807.06210). Por último, podríamos considerar un cambio en la Distancia diametral angular (D_A) pero no hay ningún cambio dentro de las limitaciones impuestas por los datos en θ_s^* que ofrezca una reducción del 7% (Hu & White (1997)).

La conclusión es que si queremos encontrar una solución al problema modificando el valor teórico esperado es necesario proponer modificaciones *Pre-Recombinación*, pues como vemos los efectos que introducen anisotropías *Post-Recombinación* no son lo suficientemente fuertes.

- *Evolución de r_s^{drag} Post-Recombinación*: Recordemos que en el estudio del método de cálculo de distancias por BAO hicimos uso de una Función de correlación (ξ) para hallar el *Horizonte de sonidos*. En principio una ξ diferente debería poder reconciliar los datos experimentales con los teóricos si se la hace tender a una distancia de comovimiento más pequeña entre la *Recombinación* y su observación para $z \leq 1$.

Las escalas de distancias que manejamos son lo suficientemente grandes como para poder usarse teoría de perturbaciones siendo las fluctuaciones muy pequeñas y efectos como la evolución no lineal de ξ , polarización de galaxias o distorsiones en z son muy pequeños (Padmanabhan & White (2009)). Podrían proponerse otros fenómenos que modificaran ξ como una gravedad que fuese más fuerte a grandes escalas lo que aumentaría la velocidad de caída de la BAO hacia su mínimo pero esto daría lugar a velocidades peculiares mucho mayores para las galaxias que las predichas por la teoría estándar.

Este tipo de modelos que pudieran afectar a los datos, como este de gravedad fuerte, parecen muy improbables ya que darían lugar a resultados muy diferentes al modelo actual que sería fácilmente observables, el hecho de que no se observen estos resultados discordantes parece indicar que no son modelos viables.

Soluciones Pre-Recombinación:

Como hemos mencionado es muy poco probable que un abandono del modelo Λ CDM modifique el valor del r_s^* si consideramos sólo anisotropías causadas después de la *Recombinación*. Para este último apartado vamos a considerar modelos modificados de Λ CDM que puedan modificar los valores obtenidos para r_s^* pero sin ser sometidos a las restricciones observacionales impuestas

para otros parámetros, así, asumiremos como correctos los resultados observacionales pues las soluciones *Pre-Recombinación* implican el abandono de Λ CDM, obteniendo resultados teóricos distintos a partir del mismo espectro, que es el que es y no varía por mucho que lo interpretemos de formas diferentes. Vamos a clasificarlos en 4 grupos:

- **Causas de confusión:** Al igual que para Λ CDM se consideran modelos con radiación, materia no relativista y constante cosmológica. Estos modelos se diferencian de Λ CDM en las condiciones iniciales o en la aparición de alguna interacción extra. Al considerar estas modificaciones respecto de Λ CDM se obtienen resultados distintos al obtener w_m a partir de los datos con respecto a los que se habrían obtenido con Λ CDM. Si el nuevo modelo es correcto se dice que esos aspectos extra considerados han “confundido” el w_m de Λ CDM. Algunos ejemplos de estos modelos son el modelo de interacción de neutrinos, la gravedad modificada o la introducción de grados de libertad extra en el espectro primitivo (Lancaster et al. (2017) & Lin et al. (2019)).

Como vemos en la *Figura 18* las variaciones de w_m que pudieran producir estos modelos vienen acompañadas de variaciones en r_s^{drag} y en H_0 . El principal problema es que dan lugar a variaciones de H_0 que no son para nada despreciables y un estudio exhaustivo de ellos deja claro que no ofrecen resultados reconciliables con los observacionales.

- **Reducción de la Velocidad del sonido (c_s):** Hemos visto en (11) que la *Velocidad del sonido* (c_s) depende de las densidades de fotones y bariones del plasma de modo que se puede introducir un efecto de alguna especie no relativista desconocida (x) en $R = 3\rho_b / 4\rho_\gamma$ obteniendo $R = 3(\rho_b + \rho_x) / 4\rho_\gamma$ que como vemos en (11) reducirían c_s .

El problema de esta propuesta es que la inclusión de esta nueva especie (x) contribuye de forma análoga al ratio entre picos pares e impares que usamos al estudiar el espectro de potencias para hallar las densidades de las distintas especies, de modo que su contribución ya habría sido considerada en los cálculos.

- **Reducción del tiempo de la Recombinación:** Como hemos visto el *Horizonte de sonidos en el momento de última dispersión* (r_s^*) viene dado por c_s multiplicado por el momento en que se produjo la *Recombinación*. Si recordamos, la *Recombinación* se dio unos 380000 años después de Big Bang debido a la formación de los primeros átomos por un descenso suficiente en la temperatura media del universo a medida que se expandía. Vemos que en caso de que la *Recombinación* se diera antes el *Horizonte de sonidos en el momento de última dispersión* (r_s^*) sería más pequeño. Para ello es necesario introducir una nueva física que permita la formación de átomos a temperaturas mayores o un enfriamiento más rápido con la expansión.

Una posibilidad para aumentar la temperatura de recombinación sería que la Constante de estructura fina (α) fuese distinta durante la *Recombinación*, ya que una interacción electromagnética más fuerte permitiría la *Recombinación* a mayor temperatura. Los datos de *CMB* ofrecen una variación de $\delta\alpha/\alpha = (0.7 \pm 2.5)10^{-3}$ desde la *Recombinación* hasta la actualidad (Hart & Chluba (2018)). Como la cantidad de recombinaciones nucleares es proporcional a este α se observa que los cambios en la temperatura de recombinación son muy pequeños y no alcanza para reconciliar ese 7% de error que buscamos.

Otra posibilidad para reducir el tiempo en que se da la *Recombinación* es asumir que es correcto el modelo para la temperatura de recombinación actual pero que ésta se alcanza antes. Por ejemplo, un enfriamiento fotónico más rápido previo a la *Recombinación* podría obtenerse de haber alguna interacción extra que hiciera que la temperatura bajase más rápido con la expansión y que en ausencia de esa interacción extra este enfriamiento fotónico fuera el esperado (Chiang & Slosar (2018)). El problema de una nueva física como ésta es que debería dejar un rastro observable en el espectro y el hecho de que no haya indicios de ello parece indicar que no es posible, ya que es altamente improbable que su no observación sea una simple coincidencia.

Estos ejemplos de la variación de α o de conversión fotónica para intentar reducir r_s^* son un caso concreto pero nos sirven para deducir una propiedad general: modelos que reduzcan r_s^* en un 7% afectarían mucho a los datos del *CMB* de modo que parece poco probable que una nueva física que altere r_s^* cambiando la física de la recombinación sea compatible con las restricciones impuestas por los datos.

- ***H(z)* aumentada:** Por último vamos a considerar posibles soluciones que aumenten la densidad de energía antes de la *Recombinación*, lo que aumentaría $H(z)$ por (9) y (10), haciendo decrecer el r_s^* teórico por (29). Para ello vamos a considerar 3 posibilidades que podrían conseguir un aumento suficiente de $H(z)$ para modificar el valor de r_s^* obtenido teóricamente y conseguir que sea compatible con las restricciones observacionales, estos nuevos modelos se conocen como $\Lambda\text{CDM} + N_{eff}$. Este tipo de soluciones son las más prometedoras y las que parecen más probables actualmente, antes de ver los posibles métodos veamos cómo un aumento de $H(z)$ antes de la *Recombinación* puede ajustarse a los resultados observacionales.

Como hemos mencionado no podemos buscar modelos nuevos que se alejen drásticamente de ΛCDM pues éste es, cuanto menos, una muy buena aproximación al modelo real. Una restricción impuesta en ΛCDM era que debía mantenerse fijo *Tamaño angular del horizonte de sonidos* (θ_s^*) de modo que queremos evitar que varíe mucho al considerar nuevos modelos, como $D_A^* = \frac{r_s^*}{\theta_s^*}$ entonces para evitar que varíe mucho debemos tener $\frac{\delta D_A^*}{D_A^*} \cong \frac{\delta r_s^*}{r_s^*}$. Un modelo puede alejarse de ΛCDM variando θ_s^* pero sólo será

válido mientras la variación de otras cantidades se ajuste a los datos. Otro parámetro que está fuertemente limitado por los datos es la *Escala de difusión fotónica* (r_d^*) que viene dada por $r_d^* = \pi/k_d$ (Kaiser (1983)) siendo k_d el número de onda de difusión y cuya importancia radica en el proceso de difusión fotónica, que tiene un gran impacto en la amplitud del espectro de potencias del *CMB*, reduciéndola en un factor de ≈ 30 en $l = 2000$ (observando el espectro vemos que la amplitud de los picos decrece con l). Los datos dicen que $l_d \equiv k_d D_A^* \cong 1950$ y no podemos considerar modelos que variando $H(z)$ afecten a r_d^* de forma que hagan que deje de ser compatible con este resultado observacional.

Para un $H(z)$ que varíe antes de la *Recombinación* es habitual hallar r_s^* y r_d^* integrando hasta tiempos en torno a la mitad de la *Recombinación* pero esta elección es artificial y podría ser que $H(z)$ no variase uniformemente de modo que se introducen sus cantidades medias \bar{r}_s y \bar{r}_d para eliminar en cierta medida la arbitrariedad por la elección de un z concreto. Podemos ver cómo responden estas cantidades a cambios de $H(z)$ con:

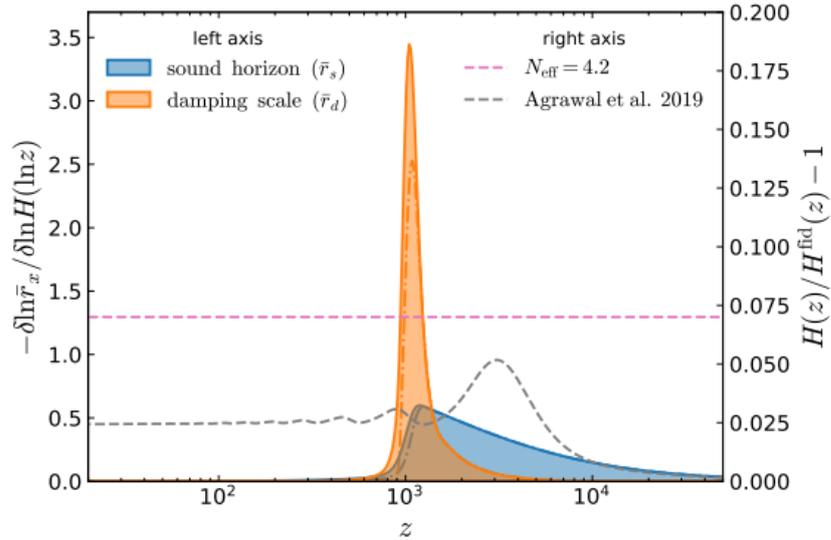


Figura 19: (Knox & Millea (2019)) El eje izquierdo corresponde a las curvas coloreadas y muestra la variación de \bar{r}_d y \bar{r}_s en cierto intervalo logarítmico de z . El eje derecho (lo veremos a continuación) corresponde a las líneas punteadas y muestra la variación relativa a nuestro modelo fiducial de Λ CDM, la rosa consigue la corrección del 7% que buscamos mientras que la azul se ajusta mejor al comportamiento esperado para un cambio en $H(z)$.

Vemos que el *Horizonte de sonidos mediado* (\bar{r}_s) es más sensible al ratio de expansión en la década antes de la *Recombinación* mientras que la *Escala de difusión fotónica mediada* (\bar{r}_d) está muy compactadamente contenida cerca de la *Recombinación*.

Veamos las 3 posibilidades que consideramos para obtener esta variación de $H(z)$:

- *Especies relativistas térmicas adicionales*: Algunas especies relativistas pueden formarse térmicamente y podrían aumentar la densidad de energía antes de la *Recombinación* aumentando $H(z)$. El parámetro que cuantifica la desviación respecto de Λ CDM es el N_{eff} que hemos mencionado antes. Recordemos que por (29) el r_s^* depende de c_s que por (11) depende del ratio entre la densidad de materia y la de radiación. Para que la inclusión de estas especies relativistas produzca un cambio aceptable por los datos debe variar la densidad de materia con la de radiación con $1 + R_\nu$ siendo $R_\nu = \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} N_{eff}$ el ratio de la densidad de energía de radiación no fotónica con la fotónica, que ha variado al considerar las nuevas especies relativistas no fotónicas. Así $r_s^* \propto (1 + R_\nu)^{-1/2}$ de modo que para reducirlo un 7% debe ser $N_{eff} = 4.2$ (Hou et al. (2013)).

El problema es que $\frac{\delta r_d^*}{r_d^*} \cong \frac{1}{2} \frac{\delta r_s^*}{r_s^*}$ de modo que la variación que hemos producido en r_s^* también produce una variación en r_d^* pero al no ser una variación 1 a 1 el ratio $\frac{r_d^*}{r_s^*}$ varía pero esto produce también un cambio en el ratio $\frac{\theta_d^*}{\theta_s^*}$ que es muy consistente con el modelo estándar (Follin et al. (2015)). Es para evitar una variación muy brusca en este ratio que está en gran acuerdo con las observaciones la razón por la que se prefieren valores pequeños de N_{eff} .

- *Energía oscura temprana*: Existen algunos modelos que pueden evitar este problema de variar el ratio θ_d^*/θ_s^* añadiendo un campo escalar cerca de la Recombinación que actúe como una constante cosmológica (*modelo Agrawal et al. 2019 de la figura 19*). Pese a que no varía θ_d^*/θ_s^* sí se varía r_d^*/r_s^* en este modelo pero vemos que hay un gran acuerdo con los datos de donde deducimos un interesante resultado: se puede obtener un gran acuerdo incluso considerando un r_d^*/r_s^* diferente del esperado por Λ CDM. Modelos como *Lin et al.(2019)* o *Smith et al. (2019)* obtienen un acuerdo incluso mejor.
- *Rediseño de $H(z)$* : Por último, se pueden hacer cambios en el $H(z)$ del modelo Λ CDM considerando una componente oscura para diferentes elecciones de la c_s , todas dentro de los límites dados por los datos Planck antiguos. Con estos cambios se puede corregir el error del 7% y será interesante ver los resultados obtenidos para datos Planck más precisos (*Hojjati et al. (2013)*).

La mayoría de los modelos propuestos presentan complicaciones difícilmente salvables aunque algunos, principalmente los que proponen un aumento de $H(z)$ antes de la *Recombinación*, ofrecen resultados prometedores.

La mejor prueba que tenemos para considerar como prometedoras las propuestas de un $H(z)$ distinto antes de la *Recombinación* se observa directamente en el espectro de potencias y ya ha sido comentada. Como vimos en distintas zonas del espectro (distintos l) se obtenían valores diferentes al medir el espaciado entre picos, lo que proporcionaba un *Tamaño angular del horizonte de sonidos* (θ_s^*) que variaba según la región observada, haciendo variar la densidad de materia w_m , aunque no se conseguía ningún valor de ésta que ofreciera resultados aceptables para la *Constante de Hubble* ni el *Horizonte de sonidos en el momento de última dispersión* (r_s^*). Un cambio en la densidad de materia (que supone un cambio en $H(z)$) se manifestaría en el espectro de potencias y ya parece haber evidencias de algo parecido pues al comparar datos para $l < 1000$ y $l > 1000$ se observa una tensión de 2.5σ .

Aunque no está claro, éstas podrían ser las primeras pruebas dentro de los datos del *CMB* en favor de una solución a la discrepancia de $H(z)$, medidas con mayor resolución angular y menos ruido podrán dar más luz a las especulaciones.

4. Conclusiones

La *Constante de Hubble* es un parámetro cosmológico de extrema importancia, no sólo como el parámetro que mide el ritmo de expansión del universo en el momento en que se realiza la medida, sino también como complemento para limitar otros parámetros cosmológicos tales como las densidades de curvatura y energía oscura, la ecuación de estado de la energía oscura o la masa de los neutrinos.

Pese a que aparece de manera natural en el estudio de las propiedades dinámicas del universo un estudio exhaustivo evidencia un problema a la hora de calcular su valor: distintos métodos de medida ofrecen resultados irreconciliables.

El objetivo del TFG era el de presentar la *Constante de Hubble* y abordar el problema de su medida, conocido como *Tensión de Hubble*. Para ello presentamos diferentes métodos para calcularla siguiendo una metodología común: estudiando primero el fundamento físico del método, presentando después los resultados que ofrece y considerando por último las posibles fuentes de error en la medida de la *Constante de Hubble*.

Algunos de los métodos estudiados como el de las *Cefeidas*, las *Supernovas tipo Ia* o los *MASER* se basan en la observación de cuerpos astronómicos y una medida precisa de la *Constante de Hubble* depende mucho de la calidad de la observación y el aparato de medida, mientras que otros métodos como las *BAO* o el cálculo a partir del *CMB* dependen en gran medida de la exactitud del modelo teórico propuesto.

Combinando distintas medidas por distintos métodos se obtiene el valor más aceptado actualmente para la *Constante de Hubble*:

$$H_0 \approx 70 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$$

Una vez introducido el problema y estudiados los distintos métodos presentamos algunas posibles soluciones a la discrepancia, algunas de las cuales proponen modelos cosmológicos nuevos muy alejados del modelo ΛCDM que es el más aceptado actualmente y está en gran acuerdo con las observaciones y otras soluciones que no se alejan de ΛCDM y en las cuales la discrepancia entre las medidas se debe a algún fenómeno que confunde las observaciones.

La búsqueda de una solución al problema de la *Tensión de Hubble* es un tema de actualidad en investigación y muchos grupos por todo el mundo trabajan en la búsqueda de un valor aceptado para la *Constante de Hubble*, lo que permitiría dar un gran salto en el campo de la cosmología donde muchos de los grandes avances como el descubrimiento de la expansión acelerada del universo o proyectos internacionales como el lanzamiento de las sondas *Planck* o *WMAP* se han realizado en los últimos 20 años, algunos incluso tan recientes como la observación directa de ondas gravitacionales en 2015.

Bibliografía y referencias

- **Notas Diego Sáez-Chillón Gómez, Gravitación y Cosmología, Universidad de Valladolid**
- **Mukhanov V. (2005), Physical Foundations of Cosmology**
- **Agrawal et al. (2019):** P. Agrawal, F.-Y. Cyr-Racine, D. Pinner, and L. Randall, arXiv:1904.01016 [astro-ph, physics:hep-ph] (2019), arXiv:1904.01016 [astro-ph, physics:hep-ph]
- **Alcock & Paczynski (1979):** Alcock C., Paczynski B., 1979, *Nature*, 281, 358.
- **Aver et al. (2015):** E. Aver, K. A. Olive, and E. D. Skillman, *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* 2015, 011 (2015)
- **Birkinshaw (1999):** Birkinshaw M., 1999, *Phys. Rep.*, 310, 97.
- **Biscardi et al. (2008):** Biscardi I., Raimondo G., Cantiello M., Brocato E., 2008, *Ap. J.*, 678, 168.
- **Blakeslee et al. (2002):** Blakeslee J.P., Lucey J.R., Tonry J.L., Hudson M.J., Narayanan V.K., et al., 2002, *MNRAS*, 330, 443.
- **Blandford & Narayan (1992):** Blandford R.D., Narayan R., 1992, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 30, 311
- **Bonamente et al. (2006):** Bonamente M., Joy M.K., LaRoque S.J., Carlstrom J.E., et al., 2006, *Ap. J.*, 647, 25.
- **Carlstrom et al. (2002):** Carlstrom J.E., Holder G.P., Reese E.D., 2002, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 40, 643
- **Chiang & Slosar (2018):** C.-T. Chiang and A. Slosar, arXiv e-prints 1811, arXiv:1811.03624 (2018)
- **Cooke et al. (2018):** R. J. Cooke, M. Pettini, and C. C. Steidel, *The Astrophysical Journal* 855, 102 (2018)
- **Desmond et al. (2019):** H. Desmond, B. Jain, and J. Sakstein, arXiv:1907.03778 [astro-ph] (2019), arXiv:1907.03778 [astro-ph].
- **Efstathiou & Bond (1999):** Efstathiou G., Bond J.R., 1999, *MNRAS*, 304, 75.
- **Fixsen et al. (1996):** D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer, and E. L. Wright, *napj* 473, 576 (1996)
- **Follin et al. (2015):** B. Follin, L. Knox, M. Millea, and Z. Pan, *Physical Review Letters* 115, 091301 (2015)
- **Freedman & Madore (2010):** Freedman W.L., Madore B. F., 2010, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 48, 673.
- **Hart & Chluba (2018):** L. Hart and J. Chluba, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 474, 1850 (2018)
- **Herrnstein et al. (1999):** Herrnstein, J., Moran, J., Greenhill, L. *et al.* A geometric distance to the galaxy NGC4258 from orbital motions in a nuclear gas disk. *Nature* 400, 539–541 (1999).
- **Hillebrandt & Niemeyer (2000):** Hillebrandt W., Niemeyer J.C., 2000, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 38, 191
- **Hojjati et al. (2013):** A. Hojjati, E. V. Linder, and J. Samsing, *Physical Review Letters* 111, 041301 (2013)
- **Hou et al. (2013):** Z. Hou, R. Keisler, L. Knox, M. Millea, and C. Reichardt, *Physical Review D* 87, 83008 (2013)
- **Ichikawa et al. (2005):** Ichikawa K., Fukugita M., Kawasaki, M., 2005, *Phys. Rev. D*, 71, 043001

- **Joudaki et al. (2018):** S. Joudaki, M. Kaplinghat, R. Keeley, and D. Kirkby, *Physical Review D* 97, 123501 (2018), arXiv:1710.04236
- **Kaiser (1983):** N. Kaiser, *mnras* 202, 1169 (1983)
- **Keeley et al. (2019):** R. E. Keeley, S. Joudaki, M. Kaplinghat, and D. Kirkby, arXiv e-prints , arXiv:1905.10198 (2019)
- **Knox & Millea (2019):** L.Knox and M. Millea, *The Hubble Hunter's Guide*, arXiv:1908.03663v2 (2019)
- **Komatsu et al. (2009):** Komatsu E., Dunkley J., Nolta M.R., Bennett C.L., Gold B., et al., 2009, *Ap. J. Suppl.*, 180, 330
- **Komatsu et al. (2011):** Komatsu E., Smith K.M., Dunkley J., Bennett C.L., Gold B., et al., 2011, *Ap. J. Suppl.*, 192, 18.
- **Lancaster et al. (2017):** L. Lancaster, F.-Y. Cyr-Racine, L. Knox, and Z. Pan, *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* 2017, 033 (2017).
- **Lin et al. (2019):** M.-X. Lin, M. Raveri, and W. Hu, *Physical Review D* 99, 043514 (2019)
- **Lin et al. (2019):** M.-X. Lin, M. Raveri, and W. Hu, *Physical Review D* 99, 043514 (2019)
- **Lo (2005):** Lo K.Y., 2005, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 43, 625.
- **Ma & Corasaniti (2018):** C. Ma and P.-S. Corasaniti, *The Astrophysical Journal* 861, 124 (2018), arXiv:1604.04631.
- **Madore & Steer (2008):** Madore B.F., Steer I.P., 2008, *NASA/IPAC Extragalactic Database Master List of Galaxy Distances*
- **Mould & Sakai (2008):** Mould J., Sakai S., 2008, *Ap. J. Lett.*, 686, L75.
- **Mould & Sakai (2009a):** Mould J., Sakai S., 2009a, *Ap. J.*, 694, 1331.
- **Mould & Sakai (2009b):** Mould J., Sakai S., 2009b, *Ap. J.*, 697, 996.
- **Padmanabhan & White (2009):** N. Padmanabhan and M. White, *Physical Review D* 80, 063508 (2009)
- **Percival et al. (2010):** Percival W.J., Reid B.A., Eisenstein D.J., Bahcall N.A., Budavari T., et al., 2010, *MNRAS*, 401, 2148.
- **Planck Collaboration VIII, A&A 641 A6, (2020), arXiv:1807.06209**
- **Planck Collaboration VI, A&A, (2018), arXiv:1807.06210**
- **Raveri (2019):** M. Raveri, arXiv e-prints , arXiv:1902.01366 (2019)
- **Reid et al. (2009):** Reid M.J., Braatz J.A., Condon J.J., Greenhill L.J., Henkel C., et al., 2009, *Ap. J.*, 695, 287
- **Riess (2020):** A. Riess, *The Expansion of the Universe is Faster than Expected* ,*Nat Rev Phys* 2, 10-12,2020, arXiv:2001.03624 [astro-ph.CO]
- **Riess et al. (20011):** Riess A.G., Macri L., Casertano S., Lampeitl H., Ferguson H.G., et al., 2011, *Ap. J.*, 730, 119.
- **Riess et al. (2009a):** Riess A.G., Macri L., Casertano S., Sosey M., Lampeitl H., et al., 2009a, *Ap. J.*, 699, 539.
- **Riess et al. (2009b):** Riess A.G., Macri L., Li W., Lampeitl H., Casertano S., et al., 2009b, *Ap. J. Suppl.*, 183, 109.
- **Sakai et al. (2000):** Sakai S., Mould J.R., Hughes S.M.G., Huchra J.P., Macri L.M., et al., 2000, *Ap. J.*, 529, 698.
- **Schechter (2005):** Schechter P.S., 2005, *In Gravitational Lensing Impact on Cosmology*, edited by Mellier Y. & Meylan G., (Cambridge, UK: Cambridge University Press), 225, 281.
- **Schutz (1986):** Schutz B.F., 1986, *Nature*, 323, 310.
- **Smith et al. (2019):** T. L. Smith, V. Poulin and M. A. Amin, arXiv:1908.06995 [astro-ph, physics:gr-qc, physics:hep-ph] (2019), arXiv:1908.06995 [astro-ph, physics:gr-qc, physics:hep-ph].

- **Sunyaev & Zeldovich (1970):** Sunyaev R.A., Zel'dovich Y.B., 1970, Comments Astrophys. Space Phys., 2, 66.
- **Sunyaev & Zeldovich (1972):** Sunyaev R.A., Zel'dovich Y.B., 1972, Comments Astrophys. Space Phys., 4, 173
- **Suyu et al. (2010):** Suyu S.H., Marshall P.J., Auger M.W., Hilbert S., Blandford R.D., et al., 2010, Ap.J., 711, 201
- **Tammann et al. (2008):** Tammann G.A., Sandage A.R., Reindl B., 2008, Astron. Astrophys. Rev., 15, 289
- **Tully & Pierce (2000):** Tully R.B., Pierce M.J., 2000, Ap. J., 553, 744.
- **Wu & White (1997):** W. Hu and M. White, Microwave Background Anisotropies 16, 333 (1997)
- **Wu et al. (2001):** W. Hu, M. Fukugita, M. Zaldarriaga, and M. Tegmark, The Astrophysical Journal 549, 669 (2001)