



---

**Universidad de Valladolid**

**Facultad de Ciencias Económicas y  
Empresariales**

**Trabajo de Fin de Grado**

**Grado en Economía**

**Teoría de subastas.  
Aplicaciones.**

Presentado por:

***Claudia Martínez Navarro***

*Valladolid, 27 de Julio de 2022*

## **RESUMEN**

La Teoría de juegos se encarga de analizar las situaciones denominadas juegos, en las que dos o más agentes toman sus decisiones, teniendo en cuenta que las decisiones de unos influyen en las decisiones que tienen que tomar los otros. La teoría de juegos se usa en muchas decisiones, aplicándose también a diferentes situaciones de la vida. Las subastas se han venido utilizando desde la antigüedad para la compraventa de productos. Las subastas a día de hoy han evolucionado y han cobrado gran importancia siendo una de las aplicaciones más importantes de la teoría de juegos. Se analiza la evolución que han tenido las subastas desde la antigüedad y los tipos de subastas, así como la teoría de subastas y el Modelo de Referencia, siendo éste el modelo más extendido. Se hace referencia a las aplicaciones que tienen las subastas, siendo ejemplos las letras del tesoro y las licitaciones y el problema del pacto de precios.

**PALABRAS CLAVE:** teoría de juegos, subastas, letras del tesoro, licitaciones.

## **ABSTRAC**

Game theory is responsible for analyzing situations called games, in which two or more agents make their decisions, taking into account that the decisions of some influence the decisions that the others have to make. Game theory is used in many decisions and is also applied to different life situations. Auctions have been used since ancient times to buy and sell products. Today, auctions have evolved and have gained great importance as one of the most important applications of game theory. The evolution of auctions since ancient times and the types of auctions are analyzed, as well as the theory of auctions and the Reference Model, the latter being the most widespread model. Reference is made to the applications of auctions, being examples the treasury bills and tenders and the price pact problem.

**KEYBOARDS:** Game theory, Auctions, treasury bills, tenders.

**Códigos JEL:** C71, C72, D44.

## ÍNDICE

<b>1. Introducción</b> .....	5
<b>2. Teoría de Juegos</b> .....	5
2.1. Historia de la Teoría de Juegos.....	7
2.2. Elementos de un juego .....	7
2.3. Clasificación de los Juegos.....	8
2.3.1. Representación de los juegos .....	9
2.3.1.1. Representación en forma normal.....	10
2.3.1.2. Representación en forma extensiva.....	10
2.4. Juegos bayesianos .....	12
2.4.1. Especificación del juego .....	13
2.4.2. Equilibrio Bayesiano de Nash.....	13
<b>3. Subastas</b> .....	14
3.1. El inicio de las subastas y su evolución histórica .....	15
3.2. Tipos de subastas .....	16
3.2.1. Subastas de un solo bien .....	16
3.2.2. Subastas de múltiples bienes.....	17
3.3. Modelo de referencia .....	21
3.3.1. Estrategias de equilibrio .....	23
3.3.2. Teorema Ingreso Equivalente.....	23
<b>4. Aplicaciones</b> .....	24
4.1. Letras del tesoro y funcionamiento de las subasta.....	24
4.2. Licitaciones y problema del pacto de precios.....	26
<b>5. Conclusiones</b> .....	28
<b>Referencias bibliográficas</b> .....	29

## 1. INTRODUCCIÓN

La primera publicación que se realizó acerca de la teoría de juegos es la publicación Von Neumann, Morgenstern (1944) "Theory of games and economic behaviour". La teoría de juegos permite estudiar el comportamiento estratégico cuando dos o más individuos interactúan y la decisión individual va a resultar de lo que el individuo espera que los demás hagan.

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría de juegos es la teoría de las subastas. Estas vienen utilizándose en la compraventa de bienes, servicios... desde hace muchos años, siendo muy importantes en las últimas décadas. El estudio y análisis de la teoría de las subastas permite conocer mejor su funcionamiento y los distintos tipos de subastas que se pueden encontrar.

Las subastas de un único bien son las más antiguas, y son aquellas en las que se va a vender un único bien entre un número grande de compradores, siendo el objetivo que el vendedor reciba el precio más alto por la venta. Por otro lado, las subastas de múltiples unidades son aquellas en las que el objetivo es vender muchas unidades de un bien homogéneo. Las subastas pueden complicarse cuando el objetivo es vender varios productos que no se consideran homogéneos y en este caso no se tiene la posibilidad de participar en una de las subastas sin valorar los resultados de las demás.

Las subastas como un mecanismo de asignación utilizado desde hace varios años y el objetivo del trabajo es aproximarse al mundo de las subastas sobre todo en la actualidad. En la actualidad se subastan multitud de bienes, y permite conocer información sobre el bien que se ha subastado, que, en algún caso se desconoce. En la actualidad, el uso de internet permite que las personas o incluso las empresas obtengan bienes mediante las subastas. Las subastas realizadas en la actualidad son a través de internet, siendo subastas de empresas privadas o subastas que han sido realizadas por organismos como el Tesoro Público. Las subastas hoy en día tienen una gran importancia y por eso resulta ser uno de los métodos más eficientes para la compraventa de productos que utilizan los individuos y las empresas.

El trabajo consta de una primera parte, en la que se aborda la Teoría de Juegos, una definición de la misma, su evolución histórica y la clasificación y

los diferentes tipos de juegos. También se habla más específicamente acerca de los juegos bayesianos y el Equilibrio Bayesiano de Nash.

En una segunda parte, se habla acerca del inicio de las subastas y su evolución histórica y los diferentes tipos de subastas, las subastas de un solo bien y las subastas de múltiples bienes. Se aborda también la Teoría de las subastas y el Modelo de Referencia que es el modelo más extendido de esta teoría.

Por último, se abordan las aplicaciones que tienen las subastas, haciendo referencia a las Letras del Tesoro y a las licitaciones.

## **2. TEORÍA DE JUEGOS**

La teoría de juegos es una rama de la economía que estudia las situaciones de conflicto de los individuos. Una de las hipótesis de muchos modelos de esta disciplina es que los individuos son racionales, y esto implica que tengan preferencias sobre los distintos resultados de una situación y que elijan las acciones que maximicen la satisfacción de sus preferencias. Esta rama de la ciencia estudia las decisiones en las que un individuo tendrá éxito solo si tiene en cuenta las decisiones que previamente han tomado el resto de los individuos que participan en el juego. En teoría de juegos cabe preguntarse qué es lo que hay que hacer pero siempre pensando cómo van a actuar los demás agentes que participan. La teoría de juegos es usada en muchas decisiones, tanto empresariales como económicas y políticas. Se aplica a diferentes situaciones de la vida real, por ejemplo, cuando distintos agentes o empresas analizan la estrategia que van a tomar o la elección a tomar cuando afecta a más de un individuo. El estudio de los juegos ha provocado que los científicos se inspiren para desarrollar modelos matemáticos y teorías. La teoría de juegos examina el comportamiento estratégico de los jugadores que toman decisiones y que estarían motivados por la maximización de la utilidad, teniendo en cuenta la racionalidad de los demás jugadores.

## **2.1. Historia de la Teoría de Juegos**

Aunque la teoría de juegos se difunde a través de John von Neumann y John Forbes Nash, fue James Waldegrave quien escribió sobre la teoría de juegos brindando una solución mínima de estrategia mixta en un juego de cartas donde participan dos personas. Cournot propuso un trabajo sobre el duopolio en 1838, presentando una versión más limitada del equilibrio de Nash. En 1950, fueron Merrill M. Flood y Albert W. Tucker quienes propusieron el dilema del prisionero y por otro lado Nash definió una estrategia óptima para distintos juegos donde participan distintos individuos, llamándose el equilibrio de Nash. Se considera que la teoría de juegos nació como disciplina en 1944 cuando Von Neumann y Morgenstern publicaron *Game Theory and Economic Behaviour*. No obstante, hubo trabajos anteriores acerca de la teoría de juegos como los de Zermelo (1913), Borel (1921) y de Von Neumann (1928). Von Neumann y Morgensterns proporcionan una solución para los juegos de suma cero y fijaron las bases para analizar los juegos en los que participan más de dos jugadores. Nash proporcionó algunos conceptos importantes como el equilibrio de Nash y solución de negociación de Nash para una gama más amplia de juegos. En los años setenta algunos investigadores como Selten (en juegos dinámicos) y Harsanyi (en juegos con información incompleta) desarrollaron conceptos que permitirán la aplicación de la teoría de juegos a la economía y a otras muchas disciplinas. En la actualidad, la teoría de juegos recibe un gran respaldo académico, recibiendo el Premio Nobel de Economía algunos de sus practicantes, en 1994 Nash, Selten y Harsanyi y en 1996 Vickrey y Mirlees.

## **2.2. Elementos de un juego**

Los elementos por los que está compuesto un juego son los siguientes:

- Jugadores o agentes: Son los que participan en el juego y toman sus decisiones con el objetivo de que se maximice su utilidad.
- Acciones: Movimientos de cada jugador cuando le toca su turno de juego.
- Información: Conocimiento que tienen los agentes acerca de las variables que componen el juego.

- Estrategias: Conjunto de acciones del jugador en cada momento en que le toque su turno de juego. Se trata de las decisiones que van a tomar los jugadores con el objetivo de salir beneficiados, teniendo en cuenta, la acción que tengan los otros oponentes del juego.

- Perfil de estrategias: Formado por la estrategia que le corresponde a cada jugador.

- Resultados: Son las distintas maneras en las que puede finalizar el juego.

- Pagos: Refleja la utilidad que el agente asigna a cada resultado posible del juego. Cada resultado tiene asignado un pago para cada uno de los distintos jugadores.

- Equilibrio: Teniendo en cuenta una determinada norma, se trata de las mejores posibilidades que tiene cada jugador a la hora de desarrollar el juego.

### **2.3. Clasificación de los juegos**

Los juegos pueden clasificarse en diferentes categorías:

- Juegos cooperativos y juegos no cooperativos

Los juegos cooperativos son los juegos en los que los jugadores llegan a un acuerdo acerca de las decisiones que todos ellos van a tomar con el objetivo de que su utilidad sea mucho mayor a la que tendrían si no se hubiera producido el acuerdo. Los grupos que van a formar los distintos jugadores entre ellos se denominan coaliciones. En los acuerdos, los distintos jugadores van cooperar entre ellos para desarrollar estrategias conjuntas.

Al contrario que los cooperativos, los juegos no cooperativos son aquellos juegos donde los jugadores toman sus decisiones individualmente, sin que exista la posibilidad de crear acuerdos con los demás jugadores. De esta forma, cada jugador se beneficia de la decisión que tome, ya que actúan por sí solos.

- Juegos estáticos y juegos dinámicos

Los juegos estáticos son aquellos en los que los jugadores no tienen constancia acerca de la estrategia que han tomado los demás jugadores. Los jugadores hacen sus movimientos simultáneamente, por lo que desconocen los movimientos que han seguido los demás jugadores.

Los juegos dinámicos son aquellos en los que un jugador juega detrás de otro por lo que puede o no haber conocimiento acerca de los movimientos que han tenido los demás jugadores anteriormente.

Por tanto, al contrario que en los juegos estáticos, los jugadores pueden adoptar su estrategia teniendo en cuenta las acciones de los jugadores anteriores y beneficiarse de ello.

- Juegos de información completa y juegos de información incompleta

Los juegos de información completa son aquellos en los que cada jugador conoce tanto la información acerca de las consecuencias que tiene cada jugada como las estrategias de los demás jugadores.

Los juegos de información perfecta son aquellos en los que en todo momento, se sabe el comportamiento de cada jugada. Se trata de juegos de información incompleta cuando algún o todos los jugadores desconocen la información relativa acerca de las decisiones que toman los demás jugadores.

- Juegos de información perfecta y juegos de información imperfecta

En los juegos de información perfecta, los jugadores conocen perfectamente el desarrollo del juego. En cambio, en los juegos de información imperfecta no se conoce cómo se ha desarrollado el juego ni las decisiones que han tomado los jugadores.

### 2.3.1. Representación de los juegos

Existen dos posibles formas en las que se puede representar un juego no cooperativo: la forma normal y la forma extensiva. Un juego en forma normal es la representación natural de los juegos estáticos. Se basa en lo siguiente:

- Conjunto de jugadores.
- Cada jugador dispone de un conjunto de estrategias.
- Existe una función de pagos para cada jugador, que va a representar sus preferencias acerca de las combinaciones posibles de estrategias.

Un juego en forma extensiva es la representación natural de los juegos dinámicos. Especifica los jugadores, las acciones y los pagos y lo organiza en

forma de árbol, destacando la forma en la que se realizan las acciones de los jugadores para obtener los resultados posibles del juego.

#### 2.3.1.1. Representación en forma normal

Un ejemplo de juego en forma normal es el dilema del prisionero, siendo éste atribuido a A.W. Tucker. Se usa como un ejemplo del conflicto entre los intereses individuales y los intereses colectivos de los individuos que toman las decisiones, y para justificar la colaboración de éstos. Cada jugador, tiene el objetivo de maximizar su beneficio, de manera independiente. El problema del prisionero es el siguiente: “la policía detiene a dos sospechosos de un delito. No tienen suficientes pruebas para condenarlos, por lo tanto, deciden interrogarlos por separado. Cada uno de ellos va a ser preguntado sobre la culpabilidad del otro. Cada uno de los sospechosos se encuentra en una celda, y a ambos se les ofrece el mismo trato: si uno confiesa y su cómplice continúa sin hablar, su cómplice será condenado a la pena máxima (10 años) y él será puesto en libertad. Si el cómplice confiesa, pero él no, recibirá la pena máxima y su cómplice será liberado. Si ambos permanecen callados, ambos serán encerrados 6 meses por un cargo menor, mientras que si ambos confiesan, serán condenados a 6 años.”

Cada preso puede colaborar con su compañero, para que ambos queden absueltos, o por otro lado, defraudar, acusándole en este caso de haber realizado el delito.

	Confesar	Callar
Confesar	-5,-5	0,-7
Callar	-7,0	-1,-1

*Tabla 2.1: Dilema del Prisionero.*

#### 2.3.1.2. Representación en forma extensiva

Un juego en forma extensiva es una especificación de un juego en la teoría de juegos, que va a permitir representar una serie de aspectos importantes como por ejemplo el orden de los movimientos posibles de todos los jugadores, sus decisiones y la información que cada jugador tiene acerca del jugador contrario cuando toma una decisión, así como las ganancias en todos los

resultados del juego. La representación en forma extensiva del juego tendrá la forma de árbol invertido y dependiendo de la estrategia que se realice, se tomará un camino u otro. Cada nodo del árbol va a representar las acciones que puede llevar a cabo el jugador.

Un ejemplo de representación de juegos en forma extensiva es el de la batalla de los sexos, que comentaremos a continuación.

Existen dos jugadores;  $i = (E)lla, E(L)$ . Las acciones serían  $c$  - ir al cine a ver una película de acción o  $b$  - salir a bailar. Ambos jugadores prefieren pasar el día juntos, pero  $E$  prefiere ir a bailar y  $L$  a ver una película. Por tanto, la estructura del juego deriva en que primero,  $E$  va a decidir qué hacer y luego  $L$  decidirá que hacer sabiendo lo que ha elegido  $E$ . Estrategias:  $SE = \{c; b\}$ ,

$SL = \{c, c; c, b; b, b; b, c\}$ .  $E$  tiene dos acciones en un nodo, va a decidir  $c$  o  $b$ .  $L$  en cambio tiene dos acciones en dos nodos. La solución en este caso sería por inducción hacia atrás. En la etapa 2 vemos que decisión tomaría  $L$  en cada nodo en el que le tocaría jugar.

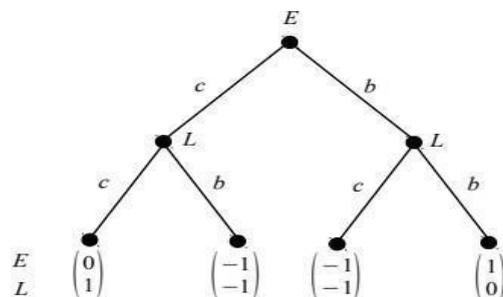


Tabla 2.2: Ejemplo representación en forma extensiva.

La solución adecuada para este tipo de juegos es el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. El Equilibrio de Nash es la mejor acción que puede realizar un jugador teniendo en cuenta las acciones que han realizado el resto de los jugadores.

## 2.4. Juegos bayesianos

Un juego bayesiano es aquel en el que los jugadores tienen información incompleta acerca de los demás jugadores. Es un tipo de juego estratégico que permite analizar situaciones en las que el jugador no conoce toda la información. Es posible que un jugador no conozca las funciones de pago de los demás jugadores, sino que tenga ciertas creencias acerca de esas funciones de pago representadas por una distribución de probabilidad acerca de las posibles funciones de pago. En un juego con información incompleta, los jugadores tienen información privada acerca de las preferencias y las habilidades cuando eligen sus estrategias de juego. Los jugadores eligen sus estrategias con asimetrías en la información, lo que les diferencia del resto de juegos. Esta propiedad contrasta con la situación de los juegos con información imperfecta, donde la asimetría aparece después de haber elegido las estrategias. Von Neumann y Morgenstern (1944) fueron los primeros que introdujeron estos términos.

Harsanyi propone un enfoque para configurar un juego bayesiano de forma que los juegos de información incompleta se conviertan en juegos de información imperfecta, en el que la historia del juego no será conocida por todos los jugadores. En base a las ideas de John Harsanyi un juego bayesiano puede ser configurado a través de la introducción de la naturaleza como un jugador en un juego. Esta naturaleza va a asignar una variable aleatoria a cada jugador que puede coger valores de tipos para cada jugador y las probabilidades de asociación. La naturaleza va a elegir de forma aleatoria un tipo para cada jugador en función de la distribución de probabilidad a través de las características de cada jugador. Los jugadores tienen unas creencias iniciales acerca del tipo de cada jugador. Estas creencias se pueden actualizar de acuerdo con la regla de Bayes conforme se lleva a cabo el juego, es decir, la creencia de que cada jugador tenga sobre otro jugador podría cambiar en función de las acciones que hayan jugado.

Harsanyi sugiere que a los juegos estáticos con información incompleta se les incorpore una etapa inicial que sea “ficticia” en la que la naturaleza decida el “tipo” de los jugadores. Este “tipo” de jugadores solo será conocido por el propio jugador, los demás jugadores conocerán solamente la distribución de probabilidad de los demás candidatos del juego. Los jugadores tienen los

mismos conocimientos acerca de la distribución de probabilidades del resto de los candidatos. La idea que es utilizada para estos juegos es el de Equilibrio Bayesiano de Nash (EBN), que es similar al Equilibrio de Nash pero existe una diferencia acerca de lo que definiría una estrategia al tratarse de juegos con información incompleta. Las estrategias tienen que incluir todas las acciones posibles que haría el jugador y tiene que depender del “tipo de jugador” que es cada jugador.

#### 2.4.1. Especificación del juego

En un juego bayesiano, hay que detallar espacios de tipo, espacios de estrategia, funciones de pago y las creencias previas. Una estrategia para un jugador se define como un plan de acción completo que abarca las posibilidades que aparezcan para cada tipo de jugador. El espacio de tipo para un jugador es el conjunto de todos los tipos posibles de ese jugador. Las creencias de un jugador detallan la incertidumbre que tiene ese jugador acerca de los tipos de los otros jugadores. La creencia es la probabilidad de que los demás jugadores posean tipos particulares, dado el tipo de jugador con esa creencia. La función de pago se define como la función de los tipos de estrategia y de los perfiles. En un juego, un perfil de estrategia es un equilibrio de Nash solo si para cada jugador, la estrategia de ese perfil es una respuesta óptima a las demás estrategias usadas por los demás jugadores, esto es, no existe ninguna estrategia que otro jugador pueda realizar y que derive en una retribución más alta.

#### 2.4.2. Equilibrio Bayesiano de Nash

Cada jugador conoce el juego que está jugando y también conoce las preferencias de los demás jugadores. Los participantes en ocasiones no son conscientes de las características de sus oponentes. Un equilibrio bayesiano de Nash se puede definir como un perfil de estrategia que maximiza la recompensa esperada para cada jugador cuando las creencias y las estrategias jugadas por los demás jugadores están dadas. En un juego, un perfil de estrategia es un equilibrio de Nash solo si para cada jugador, la estrategia de ese perfil es una respuesta óptima a las demás estrategias usadas por los demás jugadores, esto es, no existe ninguna estrategia que otro

jugador pueda realizar y que derive en una retribución más alta. En los juegos con información completa, los jugadores conocían los pagos de los demás jugadores, las acciones de éstos y la racionalidad de los jugadores.

Se plantean los juegos con información incompleta, entre los que se encuentran los juegos Bayesianos estáticos.

Los juegos bayesianos estáticos se proponen modelizar aquellas situaciones de naturaleza estática en que cada jugador  $i$  tiene un conjunto de acciones disponibles  $A_i$ , pero además algunos o todos los jugadores disponen de alguna información privada, y las preferencias de cada jugador dependen, no sólo de las acciones decididas por todos los jugadores, sino también de la información privada de los jugadores. (Pérez, J., Jimeno, J.L. y Cerdá, E., 2004, pp.289).

### **3. SUBASTAS**

Las subastas son unas de las aplicaciones más importantes de la teoría de juegos. Su importancia ha ido aumentando durante las últimas décadas, llegándose a utilizar en cualquier contexto, y para poder vender o comprar los distintos bienes. Se han utilizado desde la antigüedad para la venta de diferentes objetos, y en la actualidad, algunos de los mercados más importantes del mundo se estructuran como subastas. Las subastas se utilizan debido a que el vendedor no conoce la valoración de los compradores por el objeto que se subasta. La incertidumbre respecto al valor que tienen compradores y vendedores por el objeto es un rasgo inherente de las subastas (Krishna, 2002). Una subasta se puede definir en términos generales como un juego en el que los compradores de un bien van a reflejar lo que están dispuestos a pagar por ese bien a través de las llamadas pujas, y el resultado del juego queda decidido por la información que abarcan las pujas. Las subastas tienen reglas que definen quién va a ganar y cuál es el precio que tiene que pagar. Se caracterizan por tener información asimétrica entre los agentes que participan y el objetivo es, aparte de conseguir eficiencia, hacer que el mercado se extienda. Las subastas se utilizan porque permiten la asignación de recursos a los individuos que más los valoran y hacen posible que se maximicen los ingresos del vendedor presentando a su vez transparencia y objetividad.

McAfee and McMillan (1987) definen una subasta como una institución de mercado que cuenta con un conjunto explícito de reglas que determinan la asignación de recursos y los precios basándose en las pujas presentadas por los participantes.

Una subasta se define como un mecanismo de asignación y se le atribuyen tres propiedades:

- 1) Todos los participantes conocen quién va a obtener el objeto y cuánto se va a pagar por él, es una regla conocida como la regla de asignación.
- 2) Las asignaciones van a depender exclusivamente de las pujas que los compradores hacen.
- 3) En todo caso, los compradores van a ser anónimos, las identidades de los distintos jugadores no juegan ningún papel en la asignación.

### **3.1. El inicio de las subastas y su evolución histórica**

Shubik (1983) reflejaba que las sociedades más avanzadas eran las únicas que contemplaban las subastas como un método de venta, siempre y cuando se cumplieran al menos dos condiciones necesarias: un adecuado número de compradores y de vendedores y debía haber una moneda para poder valorar las distintas pujas. Para Shubik, la existencia de las subastas comienza en la antigua Babilonia, pues en cada pueblo se realiza un mercado de esposas al año, donde las mujeres que estuvieran en edad de casarse se reunían y eran asignadas a un hombre mediante la subasta. Existían subastas sucesivas en las que las mujeres vendidas no se consideraban iguales.

Con la caída del Imperio Romano y hasta el siglo XVII, las subastas dejan de tener importancia. Según el economista Shubik las subastas no eran bien recibidas en Oriente y no será hasta el siglo XVII cuando las subastas adquieren prestigio y se empiezan a utilizar nuevos métodos. El Estado se considera como uno de los agentes más importantes para el desarrollo de las subastas, ejerciendo un papel de vendedor y también de comprador, ya que una parte de las compras que efectúa es a través de los mecanismos de subastas. Se puede decir que Internet ha “democratizado” el uso de las subastas como método de venta, ya que es muy útil para aquellos que dispongan de conexión a internet y acceso a un ordenador.

Durante los últimos años, la importancia de las transacciones realizadas por subastas ha tenido una gran importancia, ya que su uso se ha expandido a nuevos bienes y servicios y el número de individuos que participan ha aumentado considerablemente. Las subastas se han considerado como una de las aplicaciones primordiales en la teoría de juegos y también en el mercado.

### **3.2. Tipos de subastas**

Desde el trabajo de Vickrey (1961) se consideran dos grupos básicos de subastas: subastas de un solo bien y subastas de múltiples bienes.

#### **3.2.1. Subastas de un solo bien**

Se va a subastar sólo un objeto. Desde el trabajo de Vickrey (1961) se consideran cuatro tipos de subastas básicas.

- Subasta ascendente o inglesa

Es el tipo de subasta que más se utiliza. El subastador comienza solicitando un precio muy bajo, a partir del cual los compradores pueden hacer pujas más altas. La subasta finaliza cuando hay un comprador que tiene una puja que nadie está dispuesto a superar, entonces, el comprador obtiene el objeto y paga el precio que ha pujado. El precio va aumentando sucesivamente hasta que solo queda un comprador, que será el que adquiera el bien al precio final. Los compradores pueden mostrar las pujas que quieran con la única condición de superar a la puja más alta en ese momento. Los que participan en la subasta observan las demás pujas y deciden si aumentan su oferta o no. Los compradores saben en todo momento el nivel actual de la puja máxima.

- Subasta holandesa o subasta descendente

El subastador empieza solicitando un precio muy alto y la cantidad mínima a la que está dispuesto a vender el bien, y luego va bajando el precio hasta que algún comprador esté de acuerdo con el precio y decida hacer a compra, o hasta que llegue al precio de reserva, es decir, el mínimo que el oferente está dispuesto a aceptar. Este tipo de subasta se comenzó a usar tradicionalmente para la venta de flores en Holanda. Lo ideal en este tipo de subastas es que el vendedor obtenga el mayor precio posible. Este tipo de subastas son convenientes cuando se necesita vender la mercancía o el bien rápidamente, ya que no requiere varias pujas entre los distintos participantes de la subasta.

- Subastas con sobre cerrado al primer precio

El ganador va a pagar la cantidad que previamente puja. Los compradores van a mostrar las pujas en sobre cerrado, el bien se concede al mejor postor y el precio va a corresponder con la mejor puja. En el momento de mostrar las pujas, los compradores no conocen cuales son las pujas de los demás, y cada jugador podrá realizar una única puja, con diferencia a los otros tipos de subastas.

- Subastas con sobre cerrado al segundo precio. (o subasta de Vickrey).

El ganador paga la segunda puja más alta entre las distintas pujas. Similar a la subasta con sobre cerrado al primer precio pero diferenciándose en que el precio a pagar no sería la puja del ganador, sino que será igual a la segunda puja más alta mostrada. El comprador conoce que en caso de que gane, los precios no se van a alterar.

### 3.2.2. Subastas de múltiples bienes

En alguna ocasión constituirían partes de un mismo bien y en otras serían bienes independientes que pueden ser homogéneos o no. Las subastas de múltiples bienes, es una situación en la que se quieren vender muchas unidades de un bien que es homogéneo. El comprador y el vendedor tienen la capacidad para hacer ofertas y para definir distintas estrategias.

- Subasta discriminatoria

En la subasta discriminatoria también conocida como subasta pay-as-bid, los compradores dan al subastador un sobre cerrado que precisa el número de unidades que quieren comprar y el precio que están dispuestos a pagar por cada unidad. El comprador va a ordenar los precios que se han pujado de mayor a menor, fijando el precio de corte y va a conceder dichas unidades a los compradores que pujen por encima de ese precio de corte. El comprador va a pagar por cada unidad que gane el precio que previamente ha pujado por él. En este tipo de subastas, parece difícil encontrar un equilibrio, pero se puede encontrar a partir de tres supuestos de simetría: primero, se considera que los compradores son simétricos, donde la información es igual para todos y que el valor que los distintos compradores dan a cada unidad del bien es similar, siendo el valor de todas las unidades el mismo en cualquier momento del

tiempo. El equilibrio es semejante al equilibrio para una subasta de sobre cerrado al primer precio de un único bien.

- Subasta de precio uniforme

El proceso de funcionamiento de la subasta de precio uniforme es similar a la subasta discriminatoria ya que los compradores van a mostrar sus pujas con sobres cerrados y adquieren la cantidad de bienes por los que previamente han pujado en el precio de equilibrio. El precio que paga el comprador es el precio de equilibrio. El precio de este bien puede estar por encima de la cantidad que estaba dispuesto a pagar, y por tanto, obtendrá un beneficio negativo, y por otro lado, el precio de este bien puede situarse por debajo, y el beneficio que obtiene será positivo al pagar menos de lo que principalmente estaba dispuesto a pagar. Este tipo de subasta surge con el objetivo de evitar problemas generados por la distinta información de la que disponen los jugadores.

- Subasta inglesa con múltiples unidades

En este tipo de subastas el vendedor ofrece distintos lotes similares de un bien determinado a los distintos jugadores que participan en la subasta. Principalmente, la subasta empieza fijando un precio de salida por unidad, donde los participantes establecen la cantidad que estarían dispuestos a comprar a ese precio, y al final de cada ronda se calcula la demanda de todos los jugadores. En el caso de que la demanda sea superior a la oferta, el precio subirá y el proceso volverá a repetirse. La subasta termina cuando la demanda y la oferta coinciden y se encuentran en equilibrio, en el momento en el que se pujan por todos los bienes y el precio al que se han vendido dichos bienes surge de este equilibrio entre oferta y demanda. En este tipo de subastas, la estrategia es similar que en la subasta de sobre cerrado al segundo precio.

- Subasta holandesa con múltiples unidades

El subastador empieza con un precio alto, y va disminuyendo el precio hasta que algún jugador pujan. El comprador que ha pujado al precio que previamente ha anunciado el subastador, se lleva la cantidad de bienes que quiera, y en caso de que no se quede con todos, la subasta sigue en curso. El precio seguirá bajando hasta que otro pujador realice una puja, y así, hasta que todos

los bienes se han vendido. Cada jugador que obtiene bienes de la subasta paga un precio distinto, aunque las estrategias sean diferentes, ya que los valores que hacen los distintos pujadores del bien no son independientes del resto. En todo caso, todos conocen la puja del jugador que ha decidido pujar.

### 3.3. Modelo de referencia

Friedman en el año 1956 mostró su trabajo académico acerca de la estrategia óptica para presentar las distintas pujas, aunque en ese trabajo aún no se utiliza la Teoría de Juegos, ya que se considera que existe un único jugador estratégico. Vickrey (1961) mostró su trabajo en el que se utiliza la Teoría de Juegos para presentar las pujas y también para analizar las subastas. Hasta la década de los ochenta o finales de los setenta, el desarrollo de las subastas fue lento, predominando los enfoques que empezó Friedman.

Muchos de los resultados de la Teoría de Subastas se basan en el Modelo de referencia, por lo que se trata del modelo más extendido. Estamos ante un juego con información incompleta o juegos bayesianos. Los compradores cuando muestran sus ofertas hacen una suposición acerca de cómo sus rivales van a valorar el bien y sobre cómo van a pujar en función de esa valoración, y además, tendrán que suponer lo que los jugadores piensan acerca de cómo él mismo va a pujar. Algunos de los supuestos para el Modelo de Referencia son los siguientes:

- Los compradores se denominan por la letra  $N$ .
- Las pujas  $b_i$  son funciones reales continuas y no negativas.
- Las valoraciones de los compradores ( $v_i$ ) son independientes e idénticamente distribuidas donde  $F(x)$  es la función de distribución de las valoraciones en  $(V_{min}, V_{máx})$ .

Para poder lograr el Equilibrio Bayesiano de Nash el jugador tiene que conjeturar el comportamiento de los demás jugadores ante su puja. El jugador tiene el objetivo de pensar cómo actuaría ante las distintas alternativas posibles. El Equilibrio Bayesiano de Nash está compuesto por un conjunto de estrategias en la que la estrategia del jugador tiene el mejor resultado en función de las estrategias que tienen el resto de los jugadores. Esta definición conlleva que aunque un jugador tuviera la posibilidad de cambiar su tipo,

ninguno de los demás jugadores cambiaría la estrategia que previamente ha jugado.

Los supuestos que especifican el Modelo de Referencia son los siguientes:

1) Compradores neutrales al riesgo

Los compradores poseen funciones de utilidad del dinero lineales, por lo que el hecho de maximizar su utilidad esperada es similar a maximizar sus ganancias esperadas.

2) Compradores simétricos

Los compradores serían iguales “ex ante”, todas las valoraciones salen de la misma distribución de probabilidad. El vendedor va a percatarse de todos los jugadores de forma similar.

3) Los pagos son una función únicamente de las pujas

El vendedor solo puede hacer depender los pagos realizados por los compradores de las pujas presentadas.

4) Valoraciones independientes privadas

Los compradores saben en cuánto valora él el objeto que se ha subastado. No hay información significativa acerca del objeto que se vende que no conozcan los compradores, ya que si fuese así, los compradores no conocerían con exactitud en cuanto valoran el bien. Las variables aleatorias de las que se derivan las valoraciones de los jugadores son independientes y las valoraciones de los compradores no están correlacionadas.

El modelo de referencia asume, a su vez, otros supuestos adicionales, que son los siguientes:

- No existen costes, ni por parte del comprador, ni por parte del vendedor a la hora de preparar las pujas.
- Los compradores no pactan entre ellos para así obtener un beneficio y a su vez, perjudicar a otros compradores, por tanto no cooperan entre sí.
- Tanto el número de compradores como las actitudes hacia el riesgo y las distribuciones de probabilidad de las valoraciones de los compradores son conocidos.

- El vendedor tiene la obligación de cumplir con las normas concertadas.

### 3.3.1. Estrategias de equilibrio

Dependiendo del tipo de subasta ante la que nos enfrentemos, existirá una estrategia distinta de equilibrio, por tanto, un Equilibrio Bayesiano de Nash.

#### a) Subasta con sobre cerrado al segundo precio

En este tipo de subastas, la estrategia deriva en hacer una puja por el objeto que sea similar a la valoración que se da del mismo, y con independencia de cómo actúen el resto de jugadores. Vickrey (1961) manifiesta que esta estrategia débilmente dominante deriva en que ningún jugador podría aumentar sus ganancias desarrollando una puja diferente por el objeto, tanto si la puja es inferior o como si es superior:

- Puja inferior a su valoración: Si el jugador la realiza, tendría menos posibilidades de conseguir el bien por el que se ha pujado, y en el caso de que lo consiguiera, lo que pagaría por ese objeto sería lo que ha pujado el segundo jugador con la puja más alta. Esto ocurre, con independencia de que el jugador que obtenga el objeto hubiera pujado menos cantidad del valor que daba al bien.

- Puja superior a su valoración: En el caso de que el jugador ganara la subasta, sería perjudicial porque cabe la posibilidad de que tuviera que pagar un precio superior por el que valoraba el bien, en el caso en el que el segundo bien el segundo precio fuera superior a su valoración. Por otro lado, si consigue el bien y el segundo precio es inferior a su valoración, el jugador al final va a acabar pagando lo mismo que si hubiera pujado por su valoración.

#### b) Subasta inglesa o ascendente

Los compradores disponen de una estrategia que será la mejor para ellos con independencia de las estrategias que lleven a cabo los demás jugadores. Esta estrategia consiste en permanecer en la subasta hasta que el precio de la puja se iguale con la valoración que hace el jugador del objeto que se ha subastado. Si en algún caso no se lleva a cabo esa estrategia, no podría obtener un resultado mejor. El jugador que haya dado una mayor valoración al objeto que se ha pujado es quien se lo lleva, si y solo si todos los compradores

que participan realizan esta estrategia. No obstante, el jugador no pagará lo que cree que vale el objeto ( $v_1$ ) sino que va a pagar la valoración que tenía el segundo comprador ya que sería el que ha realizado la segunda puja más alta ( $v_2$ ). El vendedor no obtiene el máximo beneficio. El ganador obtiene unas ganancias netas derivadas de la diferencia entre su valoración y la segunda valoración más elevada ( $v_1 - v_2$ ).

c) Subasta con sobre cerrado al primer precio

En las subastas con sobre cerrado al primer precio se presenta a los compradores de que pujas mayores provocan mayores probabilidades de ganar pero a su vez, se reduce el beneficio en caso de ganar. Las estrategias dominantes ya no están disponibles y cada comprador hará una hipótesis acerca del comportamiento que tienen los demás. La solución a este problema se basa en mostrar una suposición acerca de cuál sería la valoración más alta entre los distintos competidores teniendo en cuenta que la valoración del jugador es la más alta. Por tanto, si los compradores se comportan de esta manera, el ganador será el que posea una valoración más alta y el precio coincidirá con su propia puja.

La función de puja de equilibrio según McAfree y McMillan sería la siguiente:

$$b_i = B(v_i) = v_i - \frac{\int_{v_{min}}^{v_i} [F(x)^{N-1}] dx}{F(v_i)^{N-1}}$$

Donde ( $b_i$ ) sería igual a la puja del comprador  $i$ , y ( $v_i$ ) sería la valoración del comprador  $i$ .  $N$  sería el número de competidores.

La función de puja se compone de tres características:

1. Si el número de compradores que participan en la subasta tiene a infinito, las pujas de cada jugador tienden al valor que los jugadores concedieron al objeto que se ha subastado, y por tanto no se obtendría ninguna ganancia, y los beneficios serían nulos.
2. El vendedor conoce que en equilibrio, podría obtener una puja mayor, pero las pujas que realicen los jugadores van a ser inferiores a las cantidades máximas que los jugadores están dispuestos a pagar.

3. La función ( $v_i$ ) es creciente en el número de compradores que participan en la puja.

d) Subasta holandesa

La situación a la que hacen frente los compradores desde un punto de vista estratégico es igual que en una subasta con sobre cerrado al primer precio. El comprador tiene que escoger su puja sin tener conocimiento acerca de las decisiones de los demás, y en el caso de que sea el ganador, tendría que pagar una cantidad igual a su propia puja. El resultado que obtiene es independiente de las aptitudes de los demás jugadores ante el riesgo y del supuesto que se adopte sobre las correlaciones de las valoraciones de los demás compradores.

### 3.3.1. Teorema Ingreso Equivalente

El “Teorema del Ingreso Equivalente” refleja que si se cumplen los supuestos que abarca el Modelo de Referencia, los ingresos esperados por el vendedor serán similares en cualquier mecanismo de venta que satisfaga los siguientes requisitos:

- En equilibrio, el objeto se tiene que asignar al pujador que tenga la valoración más alta.
- El comprador que tenga una valoración situada en el nivel más bajo, obtendrá una utilidad esperada igual a cero.

El Teorema del Ingreso Equivalente es uno de los resultados más relevantes de la Teoría de Subastas con aplicación a otros campos. De la misma forma, los cuatro tipos de subastas que hemos visto anteriormente conforman el mecanismo de venta óptimo, desde la perspectiva del vendedor si en todo caso se realiza una política de precios mínimos óptima. Esto es, que es indiferente el tipo de subasta que se elija porque todos tienen la capacidad de maximizar los ingresos esperados del vendedor.

## **4. APLICACIONES**

En este apartado se analizan dos de las aplicaciones básicas de las subastas, las letras del tesoro y, por otra parte, las licitaciones.

### **4.1. Letras del tesoro y funcionamiento de las subastas**

Una vez que se han analizado los distintos tipos de subastas, explicamos el funcionamiento de la subasta de las letras del tesoro. El procedimiento más habitual utilizado por el Tesoro a la hora de emitir deuda es la subasta. Las letras del Tesoro se pueden definir como títulos de deuda pública (renta fija) a corto plazo y que son emitidos al descuento por el Tesoro del Estado como modo de financiación. Su plazo de vencimiento suele ser entre tres y dieciocho meses. Las letras del Tesoro son los títulos que tienen normalmente plazos de 3,6,12 y 18 meses. El objetivo que tienen las letras del Tesoro es conseguir financiación a corto plazo y con el menor coste posible

A la subasta de las letras del tesoro van diferentes entidades, que se denominan compradores, que van a realizar sus pujas con el método de sobre cerrado.

Una vez que comienza la subasta, los compradores presentan tantas peticiones de compra u ofertas como quieran, las cuales pueden ser de dos tipos diferentes:

1) Oferta no competitiva: en esta petición de compra, no se señala el precio al que el comprador quiere adquirir las letras. El precio al que se adjudicarán las letras va a ser el precio medio ponderado que se consiga en la subasta de éstas a través de la oferta competitiva. Por tanto, se pueden denominar ofertas pasivas.

2) Oferta competitiva: en este tipo de oferta, se va a indicar el precio al que el comprador está dispuesto a conseguir los títulos y también la cantidad de títulos que se quieren.

Una vez que ha terminado el tiempo para realizar las ofertas, el subastador, que es en este caso el Tesoro Público, asigna la cantidad de títulos que se han subastado a los distintos compradores. Las adjudicaciones de títulos se llevan a cabo en dos etapas:

- Una primera etapa, en la que se asigna la cantidad que corresponde a las ofertas no competitivas.

- Una segunda etapa, en la que los títulos que sobran tras la primera etapa se van a repartir entre las ofertas competitivas.

En la primera etapa, se van a adjudicar tantas letras como la cantidad que se ha demandado previamente a un precio de venta que se calculará posteriormente.

En la segunda etapa, el proceso es más complicado, primero, se ordena de mayor a menor el precio que se ha ofertado en la oferta competitiva por los compradores. En segundo lugar, se adjudican las letras del tesoro y se reparten por el comprador que ha pujado más alto por ellas. Finalmente, se adjudican todos los títulos que componían la subasta. El precio que se pagará por las letras va a depender de si estamos ante una subasta discriminatoria, en la que cada comprador va a pagar lo que ha pujado por las letras o en otro caso, ante una subasta de precio uniforme, en la que los compradores van a pagar por las letras el precio de equilibrio, excepto aquellas peticiones que han sido aceptadas y que se sitúan por debajo del precio medio ponderado, en las que se va a pagar por el valor ofertado.

Para finalizar, se calcula el precio medio ponderado de las letras del tesoro de la oferta competitiva. El precio que se obtenga va a ser el precio que van a pagar los compradores por las letras que se han adquirido en la oferta no competitiva, y en el caso en el que estemos ante una subasta de precio uniforme, este va a ser el precio para todas las ofertas aceptadas y que posean un valor superior al precio medio ponderado.

Las subastas de las letras del tesoro son subastas de múltiples unidades con sobre cerrado, de precio uniforme o discriminatorio.

Las subastas hoy en día tienen una gran importancia ya que se aplican a diversos campos y cada vez en mayor medida, sobre todo en materia de transacciones económicas. El Tesoro Público utiliza las subastas de precio uniforme en vez de discriminatorio.

A continuación se expone un caso práctico del procedimiento de subasta de Letras del Tesoro. El Tesoro recibe 465 millones de euros en ofertas, de las cuales 100 millones son ofertas no competitivas. La Dirección General del Tesoro decide emitir 400 millones de euros. A continuación se indica el precio y volumen de las ofertas competitivas:

<b>Precio ofertado</b>	<b>Volumen solicitado</b>	<b>Volumen aceptado</b>
95,75%	70	70
95,73%	85	85
95,72%	90	90
95,69%	70	55
95,68%	50	0
<b>Totales</b>	<b>365</b>	<b>300</b>

*Tabla 4.1: Ejemplo del procedimiento de subasta de Letras del Tesoro.*

El precio marginal se fija, pues, en 95,69 % al ser el que corresponde al último nivel que se acepta de ofertas.

El precio medio ponderado será de:

$$95,75\% \frac{70}{300} + 95,73\% \frac{85}{300} + 95,72\% \frac{90}{300} + 95,69\% \frac{55}{300} = 95,72\%$$

Según el procedimiento de subasta las peticiones por debajo del precio medio se adjudican al precio ofrecido, es decir, que 55 millones se adjudicarán al 95,69% y 90 millones al 95,72%. Las peticiones por encima del precio medio se concederán a este. Así que el resto (85 y 70) se concederán a 95,72%.

#### **4.2. Licitaciones y problema del pacto de precios**

Una licitación pública es el procedimiento administrativo para adquirir suministros, realizar servicios o ejecutar obras celebradas por distintos organismos del Sector Público en España. Su objetivo es ofrecer y asegurar la adquisición de los bienes y servicios por parte del Estado. Se publica una licitación con las condiciones que tiene el ente que está interesado en la contratación, donde están los requisitos para los ofertantes.

Las subastas y licitaciones se utilizan cada vez más para la asignación o compraventa de bienes, servicios, obras y suministros. El principal agente económico que usa las subastas para realizar las transacciones económicas es el Estado. El sector público contrata, a través de subastas y concursos, a la mayoría de sus proveedores en todos los sectores. En los últimos años, esta forma de adjudicar servicios ha crecido notablemente. La forma en la que el

Estado se relaciona con los suministradores son las subastas, los concursos y la venta directa. El Estado sigue un proceso para desarrollar los concursos públicos, que consta de tres fases. Primero, se va a hacer la convocatoria de licitación, en donde se informa acerca de las características concretas del concurso o la subasta y también los requisitos que los proveedores tienen que cumplir. Seguidamente, los participantes realizan sus ofertas y pujas, durante varios días o incluso meses y por último, recapitulando las ofertas que se han realizado, el Estado pone en marcha la apertura de sobres en los que se indican los nombres de los participantes y también las pujas, y el participante que previamente ha realizado la mejor oferta, se lleva el lote.

El cártel se puede definir como un acuerdo formal entre dos o más empresas con el objetivo de reducir la competencia entre ellas y con ello aumentar sus beneficios. Las diversas empresas tienen el pacto de no competir, repartiéndose el mercado, y por ello, suelen pactar los precios. El objetivo es aumentar los precios y como no existe competencia, para satisfacer su demanda tienen que pagar el precio que previamente se ha acordado. Existen impedimentos para formar un cártel, ya que éstos son ilegales, de modo que las empresas tienen que ocultar las acciones que realizan, y también puede ser que cada empresa mire por su bien propio, para obtener mayores ganancias. Los cárteles reducen la competencia, y esto afecta de manera negativa a los consumidores, ya que aumentan los precios y hay una menor cantidad, calidad y variedad de productos. Los consumidores tienen una sola opción para comprar, eliminando así la competencia y también la participación de nuevos agentes en el mercado. La economía se perjudica y por eso, hoy en día, existen leyes de competencia que tienen el objetivo de sancionar los cárteles.

A modo de ejemplo, se citará un ejemplo de esta práctica del pacto de precios y las repercusiones que tiene su puesta en práctica.

El titular de esta noticia dice “Competencia sanciona a las seis grandes constructoras por operar como un cártel durante 25 años en miles de licitaciones públicas”. Se les impone una multa impuesta por la Comisión Nacional de los Mercados y la Competencia. Las seis principales constructoras españolas han actuado como un cártel, durante 25 años. La Comisión no es competente para poder prohibir a las empresas del cártel participar en nuevas

licitaciones, ya que esto recae sobre la Junta Consultiva de Contratación Pública del Estado. Destaca que la multa impuesta a estas constructoras, es de las más altas impuestas por la Comisión. Las empresas decidían los concursos en los que iban a compartir entre todas o entre sólo algunas, una parte o todos los trabajos que se necesitan para presentarse a una licitación. Se intercambia información comercial sensible y estratégica. Esto ha tenido efecto sobre las instituciones públicas y sobre aquellas empresas que no participaban en el cártel.

Es por ello que la puesta en marcha del cártel es ilegal y que perjudica negativamente a toda la economía y también a las empresas que no participan en ello.

## **5. CONCLUSIONES**

La teoría de juegos ayuda a estudiar los problemas de decisión con múltiples decisiones, ya que se trata de situaciones en las que no sabemos la decisión que van a tomar los demás. Las subastas tienen una gran importancia a día de hoy ya que se usan en diversos campos y para realizar diversas operaciones económicas y para la compraventa de bienes o servicios por parte de los individuos, empresas y organismos institucionales, aplicándose también en diversos mercados. Se han analizado los diferentes tipos de subastas, diferenciándose las subastas de un solo bien y las subastas de múltiples bienes. Algunos tipos de subasta son la subasta inglesa, la subasta holandesa, subasta en sobre cerrado al primer precio y la subasta en sobre cerrado al segundo precio. Se analiza la teoría de subastas destacando el modelo de referencia como el modelo más extendido. Las subastas, han estado presentes desde las épocas más antiguas y han persistido en la actualidad cobrando una gran importancia, siendo en alguna ocasión un método de asignación eficiente. El estudio de la Teoría de juegos y de las subastas es la parte fundamental del trabajo para analizar el comportamiento de los individuos ante diferentes situaciones y la repercusión que tiene sobre la economía. Se hace referencia a las aplicaciones que tienen las subastas, siendo ejemplos las letras del tesoro y las licitaciones y el problema del pacto de precios, donde se cita un ejemplo actual de este problema y las repercusiones que ha tenido.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez D. (2016): "Un recorrido por la historia de las subastas", Surus <https://www.surusin.com/un-recorrido-por-la-historia-de-las-subastas/> (consulta 26/05/2022).

Durá, P. (2003): "Teoría de subastas y reputación del vendedor". Comisión Nacional del Mercado de Valores, Madrid, España.

Mavila, D. (2003). Las subastas. *Industrial Data*, 6(2), 79-81.

Mc Afee R.P. and McMillan J. (1987): "Auctions with entry". *Economics Letters* 23, pp. 343-347.

Millán, L. (2006): "Teoría de Subastas". Notas de clase, Universidad del Valle, Valle del Cauca, Colombia.

Monsalve, S. (2003). John Nash y la teoría de juegos. *Lecturas matemáticas*, 24(2), 137-149.

Pérez, Joaquin, Jimeno, J.L. y Cerdá, Emilio (2004): "Teoría de Juegos". Pearson Educación S.A., Madrid, España.

Ricart, Joan E. "Juegos con información incompleta." *IESE Business School-Universidad de Navarra* (1988): 5-9.

Sáez, A. M., & Montijano, R. C. (2004). Una aproximación a los principales modelos de subastas y las licitaciones públicas del estado español. *Cuadernos de Información económica*, (180), 86.

Shubik, M. (1983). Juegos: una encuesta sobre el estado del arte. *Juego operativo: un enfoque internacional*, 13-22.

Usategui Díaz de Otalora, J. M. (2020). Diseño de subastas y licitaciones. Una introducción.

Usategui, J. M. (2009). Economía de las subastas. San Sebastián. España: Universidad del País Vasco.

Vitoriano, B. (2007). Teoría de la decisión: decisión con incertidumbre, decisión multicriterio y teoría de juegos. *Universidad Complutense de Madrid*, 107.

Von Neumann, Morgenstern (1944) "Theory of games and economic behaviour".

### **ENLACES WEB**

Economipedia (2017): "Cártel". Disponible en:

<https://economipedia.com/definiciones/cartel.html> (consulta 5/06/2022)

El salto diario (consulta 13/07/2022)

<https://www.elsaltodiario.com/corrupcion/competencia-sanciona-203-millones-seis-grandes-constructoras-operar-como-cartel-durante-25-anos-miles-licitaciones-publicas>