



**Universidad de Valladolid**



**ESCUELA DE INGENIERÍAS  
INDUSTRIALES**

**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

**ESCUELA DE INGENIERÍAS INDUSTRIALES**

**GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES**

**DESARROLLO DE UN MODELO DE  
DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL  
PARA LA CORRECCIÓN DE FLUJOS  
MEDIDOS POR RESONANCIA MAGNÉTICA -  
4D FLOW**

**Autor:**

**Serrano Holgado, Ricardo**

**Tutor:**

**Sierra Pallares, José  
Ingeniería Energética y  
Fluidomecánica**

**Valladolid, junio 2023**



## Resumen

Este trabajo trata sobre la complementación de las mediciones de la velocidad de un fluido llevadas a cabo mediante 4D Flow utilizando Dinámica de Fluidos Computacional.

Para ello, se ha recopilado información sobre los fundamentos de 4D Flow, de la mecánica de fluidos y de la Dinámica de Fluidos Computacional.

Después, se han seleccionado los modelos numéricos adecuados y se han realizado simulaciones del flujo sanguíneo en un *phantom* de arteria aorta, así como de trayectorias de partículas en el *phantom*, utilizando el software *Ansys Fluent*.

Por último, se han analizado los resultados de varias propiedades del fluido y de las trayectorias de las partículas, y se han indicado las conclusiones del trabajo.

### Palabras clave

4D Flow, Dinámica de Fluidos Computacional (CFD), *Ansys Fluent*, *phantom*, arteria aorta.

## Abstract

This paper is about the complementation of the velocity measurements of a fluid carried out by 4D Flow using Computational Fluid Dynamics.

To achieve this, information about the fundamentals of 4D Flow, fluid mechanics and Computational Fluid Dynamics was gathered.

Then, suitable numerical models were selected, and simulations of blood flow inside a phantom of the aorta artery, as well as of particle trajectories inside the phantom, were performed using the software *Ansys Fluent*.

Lastly, the results of various fluid properties and of the particle trajectories were analysed, and the paper's conclusions were stated.

### Keywords

4D Flow, Computational Fluid Dynamics (CFD), *Ansys Fluent*, *phantom*, aorta artery.



## **Agradecimientos**

A todas las personas que me han ayudado a llegar hasta aquí.

En especial, a mi tutor, José, sin cuya ayuda no habría podido realizar este trabajo.

Y sobre todo, a mis padres, por la confianza que depositan en mí y el apoyo que me ofrecen en todas mis decisiones.



## Índice

Índice de Figuras.....	II
Índice de Tablas .....	VII
Índice de Ecuaciones .....	VIII
Nomenclatura.....	XII
Acrónimos .....	XII
Símbolos .....	XIII
1    Introducción y objetivos .....	1
1.1    Estado del arte.....	1
1.1.1    Imagen por Resonancia Magnética .....	1
1.2    Objetivos .....	18
1.3    Estructura del TFG .....	18
2    Desarrollo del TFG.....	19
2.1    Modelo fluidodinámico.....	19
2.1.1    Ecuaciones de conservación .....	19
2.1.2    Propiedades físicas .....	25
2.2    Modelo numérico.....	27
2.2.1    Ventajas de la CFD .....	27
2.2.2    Métodos numéricos frente a otros métodos.....	28
2.2.3    Pasos para resolver un problema por CFD.....	29
2.2.4    Aspectos numéricos de la CFD.....	30
2.2.5    Condiciones de contorno e iniciales .....	41
2.2.6    Criterios de parada .....	42
2.2.7    Detección de vórtices .....	43
2.3    Caso de estudio .....	45
2.3.1    Caso bidimensional.....	46
2.3.2    Caso tridimensional .....	52
2.3.3    Resumen del modelo aplicado al caso de estudio.....	56
2.4    Resultados .....	57
2.4.1    Simulación bidimensional .....	58
2.4.2    Simulación tridimensional .....	82
3    Conclusiones .....	107
4    Bibliografía.....	108

## Índice de Figuras

Figura 1. Representación de un escáner de MRI [4].	2
Figura 2. Imagen obtenida por MRI [4].	2
Figura 3. Precesión del momento magnético de los núcleos atómicos ante un campo $B_0$ [6].	5
Figura 4. Esfera de Bloch ante la aplicación del campo $B_0$ [6].	7
Figura 5. Esfera de Bloch ante la aplicación de los campos $B_0$ y $B_1$ [6].	8
Figura 6. Esfera Bloch ante la aplicación de los campos $B_0$ y $B_1$ en un sistema de referencia móvil [6].	10
Figura 7. Desfases típicos de la densidad de magnetización [6].	10
Figura 8. Tiempos de relajación de la densidad de magnetización [8].	12
Figura 9. Campo magnético oscilante linealmente polarizado [6].	14
Figura 10. Celda estructurada [11].	31
Figura 11. Geometría de estudio tridimensional.	45
Figura 12. Geometría de estudio bidimensional.	46
Figura 13. División en áreas para el mallado de la geometría bidimensional.	47
Figura 14. Nomenclatura de las secciones del contorno de la geometría bidimensional.	47
Figura 15. Velocidad en la entrada.	50
Figura 16. División en áreas para el mallado de la geometría tridimensional.	53
Figura 17. Punto en el que se miden las velocidades.	55
Figura 18. Nomenclatura de las secciones del contorno de la geometría tridimensional.	56
Figura 19. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19$ s.	58
Figura 20. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19,1$ s.	59
Figura 21. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19,2$ s.	59
Figura 22. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19,3$ s.	60
Figura 23. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19,4$ s.	60

Figura 24. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general. t=19,5 s. ....	61
Figura 25. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general. t=19,6 s. ....	61
Figura 26. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general. t=19,7 s. ....	62
Figura 27. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general. t=19,8 s. ....	62
Figura 28. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general. t=19,9 s. ....	63
Figura 29. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19 s. ....	63
Figura 30. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,1 s. ....	64
Figura 31. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,2 s. ....	64
Figura 32. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,3 s. ....	65
Figura 33. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,4 s. ....	65
Figura 34. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,5 s. ....	66
Figura 35. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,6 s. ....	66
Figura 36. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,7 s. ....	67
Figura 37. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,8 s. ....	67
Figura 38. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,9 s. ....	68
Figura 39. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades. t=19 s. ....	69
Figura 40. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades. t=19,1 s. ....	70
Figura 41. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades. t=19,2 s. ....	70
Figura 42. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades. t=19,3 s. ....	71
Figura 43. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades. t=19,4 s. ....	71
Figura 44. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades. t=19,5 s. ....	72

Figura 45. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades. $t=19,6$ s. ....	72
Figura 46. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades. $t=19,7$ s. ....	73
Figura 47. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades. $t=19,8$ s. ....	73
Figura 48. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades. $t=19,9$ s. ....	74
Figura 49. Geometría bidimensional. Vórtices. $t=19$ s.....	75
Figura 50. Geometría bidimensional. Vórtices. $t=19,1$ s.....	75
Figura 51. Geometría bidimensional. Vórtices. $t=19,2$ s.....	76
Figura 52. Geometría bidimensional. Vórtices. $t=19,3$ s.....	76
Figura 53. Geometría bidimensional. Vórtices. $t=19,4$ s.....	77
Figura 54. Geometría bidimensional. Vórtices. $t=19,5$ s.....	77
Figura 55. Geometría bidimensional. Vórtices. $t=19,6$ s.....	78
Figura 56. Geometría bidimensional. Vórtices. $t=19,7$ s.....	78
Figura 57. Geometría bidimensional. Vórtices. $t=19,8$ s.....	79
Figura 58. Geometría bidimensional. Vórtices. $t=19,9$ s.....	79
Figura 59. Geometría bidimensional. Trayectorias de las partículas. ....	81
Figura 60. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19$ s. ....	83
Figura 61. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19,1$ s.....	83
Figura 62. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19,2$ s.....	84
Figura 63. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19,3$ s.....	84
Figura 64. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19,4$ s.....	85
Figura 65. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19,5$ s.....	85
Figura 66. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19,6$ s.....	86
Figura 67. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19,7$ s.....	86
Figura 68. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general. $t=19,8$ s.....	87

Figura 69. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general. t=19,9 s. ....	87
Figura 70. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19 s. ....	88
Figura 71. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,1 s. ....	88
Figura 72. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,2 s. ....	89
Figura 73. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,3 s. ....	89
Figura 74. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,4 s. ....	90
Figura 75. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,5 s. ....	90
Figura 76. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,6 s. ....	91
Figura 77. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,7 s. ....	91
Figura 78. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,8 s. ....	92
Figura 79. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,9 s. ....	92
Figura 80. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades. t=19 s. ....	94
Figura 81. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades. t=19,1 s. ....	94
Figura 82. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades. t=19,2 s. ....	95
Figura 83. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades. t=19,3 s. ....	95
Figura 84. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades. t=19,4 s. ....	96
Figura 85. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades. t=19,5 s. ....	96
Figura 86. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades. t=19,6 s. ....	97
Figura 87. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades. t=19,7 s. ....	97

---

Figura 88. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades. $t=19,8$ s.....	98
Figura 89. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades. $t=19,9$ s.....	98
Figura 90. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices. $t=19$ s. ....	99
Figura 91. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices. $t=19,1$ s. ....	100
Figura 92. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices. $t=19,2$ s. ....	100
Figura 93. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices. $t=19,3$ s. ....	101
Figura 94. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices. $t=19,4$ s. ....	101
Figura 95. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices. $t=19,5$ s. ....	102
Figura 96. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices. $t=19,6$ s. ....	102
Figura 97. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices. $t=19,7$ s. ....	103
Figura 98. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices. $t=19,8$ s. ....	103
Figura 99. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices. $t=19,9$ s. ....	104
Figura 100. Geometría tridimensional. Trayectorias de las partículas.....	105

---

## Índice de Tablas

Tabla 1. Resultados del estudio de convergencia de malla. ....	55
Tabla 2. Resumen de modelos utilizados. ....	57

## Índice de Ecuaciones

Ecuación 1. Momento magnético cuántico de una partícula [6].	3
Ecuación 2. Diferencia de energía entre los estados estacionarios [6].	4
Ecuación 3. Frecuencia angular del campo $B_1$ [6].	4
Ecuación 4. Momento magnético clásico de una partícula [6].	5
Ecuación 5. Movimiento de la densidad de magnetización ante la aplicación del campo $B_0$ [6].	6
Ecuación 6. Frecuencia de Larmor [6].	6
Ecuación 7. Movimiento de la densidad de magnetización ante la aplicación de los campos $B_0$ y $B_1$ .	7
Ecuación 8. Movimiento de la densidad de magnetización ante la aplicación del campo $B_0$ en un sistema de referencia móvil [6].	8
Ecuación 9. Campo magnético aparente ante la aplicación del campo $B_0$ en un sistema de referencia móvil [6].	8
Ecuación 10. Campo magnético aparente ante la aplicación del campo $B_0$ en un sistema de referencia móvil. Simplificación [6].	9
Ecuación 11. Movimiento de la densidad de magnetización ante la aplicación del campo $B_0$ en un sistema de referencia móvil. Simplificación [6].	9
Ecuación 12. Movimiento de la densidad de magnetización ante la aplicación de los campos $B_0$ y $B_1$ en un sistema de referencia móvil [6].	9
Ecuación 13. Movimiento de la densidad de magnetización ante la aplicación de los campos $B_0$ y $B_1$ en un sistema de referencia móvil. Simplificación [6].	9
Ecuación 14. Frecuencia angular de la densidad de magnetización ante la aplicación de los campos $B_0$ y $B_1$ en un sistema de referencia móvil [6].	9
Ecuación 15. Desfase de la densidad de magnetización ante la aplicación del campo $B_1$ durante un periodo de tiempo finito [6].	10
Ecuación 16. Relajación longitudinal de la densidad de magnetización [6].	11
Ecuación 17. Relajación transversal de la densidad de magnetización [6].	11
Ecuación 18. Ecuaciones de Bloch [6].	12
Ecuación 19. Módulo del campo $B_0$ [6].	13
Ecuación 20. Intensidad de corriente aplicada a la bobina [6].	14

Ecuación 21. Desfase provocado por un campo gradiente [10].	15
Ecuación 22. Posición de una partícula en función del tiempo [10].	16
Ecuación 23. Desfase provocado por un campo gradiente. Simplificación [10].	16
Ecuación 24. Desfase provocado por un campo gradiente. Segunda simplificación [10].	16
Ecuación 25. Desfase provocado por un campo gradiente bipolar [10].	17
Ecuación 26. Ecuación diferencial de conservación de una propiedad genérica del fluido [11].	19
Ecuación 27. Ecuación diferencial de conservación de la masa. Forma 1 [11].	20
Ecuación 28. Ecuación diferencial de conservación de la masa. Forma 2 [11].	20
Ecuación 29. Ecuación diferencial de conservación de la masa. Forma 3 [11].	20
Ecuación 30. Derivada sustancial [11].	20
Ecuación 31. Condición de flujo incompresible [11].	21
Ecuación 32. Ecuación diferencial de conservación de la masa para flujos incompresibles [11].	21
Ecuación 33. Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento. Forma 1 [11].	21
Ecuación 34. Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento. Forma 2 [11].	21
Ecuación 35. Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento. Forma 3 [11].	22
Ecuación 36. Ley de Navier-Poisson [12].	22
Ecuación 37. Delata de Kronecker [11].	22
Ecuación 38. Ecuaciones de Navier-Stokes [12].	22
Ecuación 39. Número de Knudsen [11].	23
Ecuación 40. Teorema de Gauss-Ostrogradski [13].	23
Ecuación 41. Ecuación integral de conservación de una propiedad genérica del fluido. Forma 1 [11].	24

Ecuación 42. Aplicación del teorema de Gauss-Ostrogradski al término de convección [11].	24
Ecuación 43. Aplicación del teorema de Gauss-Ostrogradski al término de difusión [11].	24
Ecuación 44. Ecuación integral de conservación de una propiedad genérica del fluido. Forma 2 [11].	24
Ecuación 45. Ecuación integral de conservación de la masa [12].	25
Ecuación 46. Ecuaciones integrales de conservación de la cantidad de movimiento [12].	25
Ecuación 47. Ley de los Gases Ideales [11].	25
Ecuación 48. Relación entre la densidad y la temperatura en líquidos [11].	26
Ecuación 49. Esfuerzos tangenciales en fluidos newtonianos [11].	26
Ecuación 50. Ley constitutiva de los fluidos de Carreau [17].	26
Ecuación 51. Ley constitutiva de los fluidos de Casson [19].	27
Ecuación 52. Integración del término de acumulación en una celda estructurada [11].	31
Ecuación 53. Integración del término de convección en una celda estructurada [11].	32
Ecuación 54. Integración del término de difusión en una celda estructurada [11].	32
Ecuación 55. Integración del término de generación en una celda estructurada [11].	32
Ecuación 56. Esquema de diferencias centradas [11].	33
Ecuación 57. Estimación del gradiente [11].	33
Ecuación 58. Esquema upwind de primer orden [11].	34
Ecuación 59. Esquema upwind de segundo orden [11].	34
Ecuación 60. Esquema van Leer [11].	35
Ecuación 61. Ecuación para la presión [11].	35
Ecuación 62. Sub-relajación [11].	36
Ecuación 63. Integración espacial y temporal de la ecuación de conservación de una propiedad genérica del fluido [11].	37

Ecuación 64. Factor e peso en la integración temporal [11].	37
Ecuación 65. Condición de delimitación del método explícito [11].	38
Ecuación 66. Condición de delimitación del método de Crank-Nicolson [11].	38
Ecuación 67. Condición de Courant-Friedrichs-Lewy [20].	38
Ecuación 68. Número de Courant [20].	39
Ecuación 69. Número de Courant generalizado para n dimensiones [20].	39
Ecuación 70. Índice de convergencia en caso de utilizar la malla más densa [21].	40
Ecuación 71. Ratio de refinado de malla [21].	40
Ecuación 72. Índice de convergencia en caso de utilizar la malla menos densa [21].	41
Ecuación 73. GCI asintótico [21].	41
Ecuación 74. Tensor gradiente de velocidad.	43
Ecuación 75. Tensor de velocidades de deformación [23].	43
Ecuación 76. Tensor de velocidades de rotación [23].	44
Ecuación 77. Invariante Q [24].	44
Ecuación 78. Tensor $S^2 + \Omega^2$ [24].	44
Ecuación 79. Número de Reynolds [25].	48
Ecuación 80. Condición de régimen laminar para flujo interno en tuberías de sección circular [25].	48
Ecuación 81. Cálculo de la viscosidad dinámica.	49
Ecuación 82. Velocidad en la entrada.	49
Ecuación 83. Cálculo del número de Courant para el área general de la malla.	52
Ecuación 84. Cálculo del número de Courant para el área afectada por las esferas de influencia de la malla.	52

## Nomenclatura

### Acrónimos

Acrónimo	Descripción
MRI	<i>Magnetic Resonance Imaging</i> Imagen por Resonancia Magnética
NMR	<i>Nuclear Magnetic Resonance</i> Resonancia Magnética Nuclear
MRA	<i>Magnetic Resonance Angiography</i> Angiografía por Resonancia Magnética
PC-MRA	<i>Phase Contrast Magnetic Resonance Angiography</i> Angiografía por Resonancia Magnética por Contraste de Fase
PC-MRI	<i>Phase Contrast Magnetic Resonance Imaging</i> Imagen por Resonancia Magnética por Contraste de Fase
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i> Dinámica de Fluidos Computacional
CAD	<i>Computer-Aided Design</i> Diseño Asistido por Ordenador
GCI	<i>Grid Convergence Index</i> Índice de Convergencia de Malla

---

**Símbolos**

---

Símbolo	Descripción
$t$	Tiempo
$\rho$	Densidad
$U$	Velocidad
$T$	Temperatura
$P$	Presión
$F$	Fuerza
$A$	Área
$V$	Volumen
$E$	Energía
$R$	Constante de los gases ideales
$\mu$	Viscosidad dinámica
$\nu$	Viscosidad cinemática

---



## 1 Introducción y objetivos

La MRI (*Magnetic Resonance Imaging*) es una de las técnicas más avanzadas y efectivas para la obtención de imágenes de los tejidos del cuerpo humano y la realización de diagnósticos de forma no invasiva [1].

La MRI comprende una amplia variedad de técnicas. Una de ellas, denominada PC-MRA (*Phase Contrast Magnetic Resonance Angiography*) se basa en el hecho de que algunos tejidos, como la sangre, se encuentran en movimiento [2]. Esta técnica es adecuada para la detección de problemas cardiovasculares.

La PC-MRA presenta algunos problemas como excesivo ruido, baja resolución o incapacidad para determinar parámetros fluidodinámicos de la sangre aparte de su velocidad que pueden ser de importancia para el diagnóstico [3].

En caso de que el paciente posea algún dispositivo interno metálico como un *stent* o un marcapasos, estos problemas pueden verse agravados, ya que el dispositivo puede interferir con los campos magnéticos del escáner MRI, provocando una falta de fiabilidad en la información obtenida en la zona donde se sitúa el dispositivo.

Una forma de solucionar estos problemas es la complementación de la PC-MRA con la CFD (*Computational Fluid Dynamics*). La CFD presenta fortalezas en los puntos más débiles de la PC-MRA, lo que hace que la combinación de ambas técnicas, si se hace correctamente, proporcione una información precisa, fiable y completa [3].

### 1.1 Estado del arte

#### 1.1.1 Imagen por Resonancia Magnética

La Imagen por Resonancia Magnética (MRI por sus siglas en inglés, *Magnetic Resonance Imaging*) es un procedimiento médico no invasivo que permite obtener imágenes de alta resolución de tejidos internos del cuerpo [1].

Para llevarla a cabo, el sujeto debe primero deshacerse de todos los objetos metálicos que porte, ya que pueden producir daños tanto humanos como materiales y alterar el resultado de la prueba.

En caso de que el médico lo considere necesario, se le inyecta al sujeto una sustancia conocida como medio de contraste, basada en gadolinio, que sirve para mejorar la resolución de la imagen final.

El sujeto debe acostarse en una mesa motorizada que lo introduce dentro de un gran escáner cilíndrico. El escáner produce una serie de campos magnéticos

ante los que los distintos tejidos del cuerpo del sujeto reaccionan de formas diferentes, dando lugar a distintas señales que el escáner detecta. Se pueden configurar los parámetros del escáner para que en la imagen final aparezcan resaltados uno o varios tejidos. Con esta información, se genera por ordenador la imagen final [4].

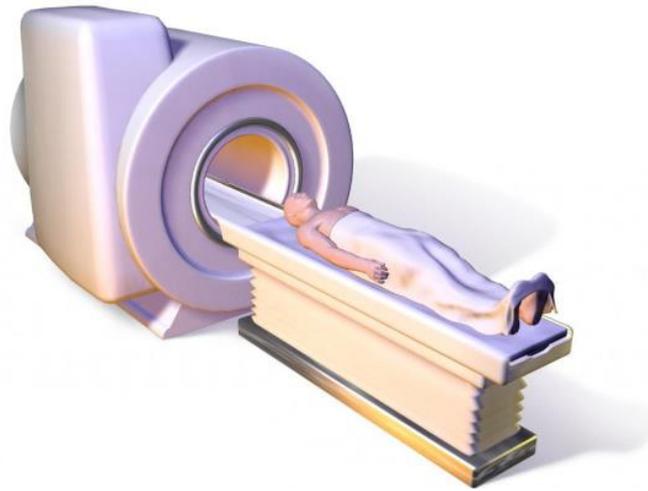


Figura 1. Representación de un escáner de MRI [4].



Figura 2. Imagen obtenida por MRI [4].

Si el sujeto tiene algún dispositivo metálico interno, como un *stent* o un marcapasos, se debe atender a ciertas consideraciones especiales. Se debe consultar cuáles son las propiedades magnéticas del dispositivo y cuál es la

recomendación del fabricante respecto a la realización de la MRI. Actualmente la mayoría de los dispositivos que se implantan tienen un carácter no ferromagnético o débilmente ferromagnético y es posible realizar la MRI sin riesgo [5], aunque si la zona estudiada es cercana al dispositivo es posible que los resultados de la prueba se vean alterados.

## Resonancia Magnética Nuclear

La MRI se fundamenta en el fenómeno físico de Resonancia Magnética Nuclear (NMR por sus siglas en inglés, *Nuclear Magnetic Resonance*).

Este fenómeno es de naturaleza cuántica. Sin embargo, al estudiar objetos macroscópicos, el elevado número de núcleos atómicos involucrados hace que las particularidades cuánticas pierdan relevancia. Por ello, es habitual describir la NMR mediante una analogía con un fenómeno de naturaleza clásica: un objeto en rotación dentro de un campo magnético [6].

Aun así, es importante no olvidar que la descripción clásica no es más que una analogía, y no describe correctamente los fenómenos que tienen lugar a escala microscópica.

A continuación se desarrollan ambas perspectivas.

### *NMR según la mecánica cuántica*

Las partículas como los electrones, protones o neutrones poseen una propiedad denominada espín ( $\vec{S}$ ), que está asociada con un momento angular intrínseco. Este momento angular no tiene nada que ver con una rotación.

El espín es una cantidad vectorial que presenta algunas particularidades: su módulo es fijo, y está limitada a un conjunto de posibles orientaciones.

Para una partícula de espín  $\frac{1}{2}$  como los electrones, protones o neutrones, el espín solo puede tomar dos valores:  $\pm \frac{\hbar}{2}$ , donde  $\hbar$  es la constante de Planck dividida entre  $2\pi$  [6].

Las partículas con espín poseen un momento magnético de valor

$$\vec{m} = \gamma \hbar \vec{S}$$

*Ecuación 1. Momento magnético cuántico de una partícula [6].*

donde  $\gamma$  es el ratio giromagnético, que es característico de cada partícula.

Los espines de los nucleones que forman un núcleo atómico se combinan cuánticamente para dar lugar al espín total del núcleo  $\vec{I}$ . Los átomos que poseen un número impar de protones o neutrones tienen espín no nulo y por tanto tienen momento magnético no nulo [6].

Cuando un núcleo con momento magnético no nulo es sometido a un campo magnético externo  $\vec{B}_0$  se produce una interacción que hace que la energía que posee el núcleo varíe. El espín del núcleo puede adquirir una componente de  $+\frac{\hbar}{2}$  o  $-\frac{\hbar}{2}$  en la dirección del campo magnético externo. A estos dos estados se les llama estados estacionarios y entre ellos existe una diferencia de energía de

$$\Delta E = -\gamma\hbar B_0$$

*Ecuación 2. Diferencia de energía entre los estados estacionarios [6].*

Si ahora se somete al núcleo a un segundo campo magnético externo  $\vec{B}_1$  perpendicular a  $\vec{B}_0$  y que rota a su alrededor con una frecuencia angular de

$$\omega_0 = |\gamma B_0|$$

*Ecuación 3. Frecuencia angular del campo  $B_1$  [6].*

el espín del núcleo comienza a oscilar a través de una serie de estados de superposición cuántica entre los dos estados estacionarios.

Si el campo magnético externo  $\vec{B}_1$  se retira cuando el espín se encuentra en un estado intermedio, sus componentes transversales (las perpendiculares a la dirección de  $\vec{B}_0$ ) continúan oscilando entre sus posibles valores a una frecuencia  $\omega_0$  [6].

### ***NMR según la mecánica clásica***

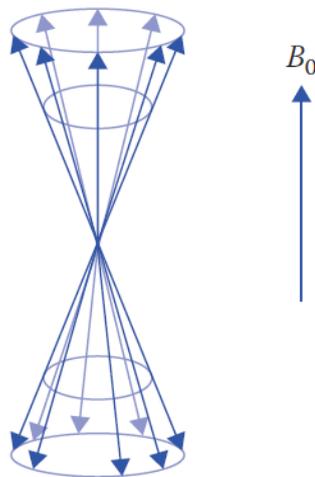
La explicación clásica del fenómeno de NMR parte de considerar el espín de las partículas y núcleos atómicos como una rotación real.

Esta rotación tiene asociada un momento angular ( $\vec{J}$ ) que causa un momento magnético ( $\vec{m}$ ), relacionados según la siguiente expresión

$$\vec{m} = \gamma \vec{J}$$

*Ecuación 4. Momento magnético clásico de una partícula [6].*

En ausencia de manipulaciones externas, el vector momento magnético presenta una orientación aleatoria. Sin embargo, al someter un núcleo atómico con momento magnético no nulo a un campo magnético externo  $\vec{B}_0$ , su momento magnético describe un movimiento de precesión alrededor de la dirección del campo  $\vec{B}_0$ , bien en sentido paralelo al mismo o bien en sentido antiparalelo [6].



*Figura 3. Precesión del momento magnético de los núcleos atómicos ante un campo  $B_0$  [6].*

Sumando los momentos magnéticos de todos los núcleos atómicos presentes en una determinada región del espacio se obtiene nueva magnitud de carácter macroscópico denominada densidad de magnetización ( $\vec{M}$ ), que representa el momento magnético por unidad de volumen [6]. Cada grupo de núcleos

atómicos lo suficientemente grande como para que su comportamiento pueda ser descrito macroscópicamente se denomina isocromato [7].

En equilibrio térmico, la densidad de magnetización ( $\vec{M}_0$ ) tiene la misma dirección que  $\vec{B}_0$ , ya que la probabilidad de que el momento magnético de un núcleo atómico se encuentre en cierto punto de su trayectoria de precesión y la probabilidad de que se encuentre en el punto opuesto es la misma. Por tanto, si el número de núcleos atómicos cuyos momentos magnéticos se suman es elevado, las componentes transversales de estos momentos magnéticos se cancelan entre sí.

Además,  $\vec{M}_0$  también tiene el mismo sentido que  $\vec{B}_0$ , ya que los núcleos con orientación paralela se encuentran en un estado de menor energía que los núcleos con orientación antiparalela, y por tanto el número de núcleos con orientación paralela es ligeramente mayor [6].

El movimiento de  $\vec{M}$  viene descrito por la siguiente ecuación:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B}_0$$

*Ecuación 5. Movimiento de la densidad de magnetización ante la aplicación del campo  $B_0$  [6].*

Una observación importante que se deduce de esta ecuación es que la densidad de magnetización varía perpendicularmente a sí misma, y su módulo es por tanto constante.

También se deduce que, en su estado de equilibrio térmico, la densidad de magnetización es estática. Lo mismo ocurriría si de alguna forma  $\vec{M}$  se orientase de forma antiparalela a  $\vec{B}_0$ . En cualquier otro caso,  $\vec{M}$  trazaría una trayectoria circular alrededor de  $\vec{B}_0$  con una frecuencia angular

$$\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0$$

*Ecuación 6. Frecuencia de Larmor [6].*

Al movimiento circular de  $\vec{M}$  alrededor  $\vec{B}_0$  de se le denomina precesión libre, y a la frecuencia angular  $\omega_0$  se le denomina frecuencia de Larmor.

La esfera de Bloch es una herramienta gráfica útil para visualizar el movimiento de la densidad de magnetización. Se trata de una esfera imaginaria de radio  $M$  en la que se representan las magnitudes involucradas [6].

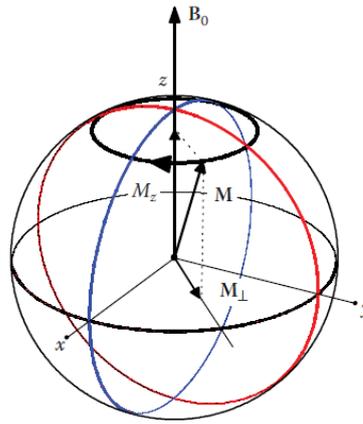


Figura 4. Esfera de Bloch ante la aplicación del campo  $B_0$  [6].

Se añade ahora un segundo campo magnético externo  $\vec{B}_1$ , perpendicular a  $\vec{B}_0$ , de módulo constante y que rota alrededor de  $\vec{B}_0$  a la frecuencia de Larmor.

Ahora  $\vec{M}$  describe un movimiento de precesión respecto del campo magnético resultante, es decir, la suma de  $\vec{B}_0$  y  $\vec{B}_1$ .

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)$$

Ecuación 7. Movimiento de la densidad de magnetización ante la aplicación de los campos  $B_0$  y  $B_1$ .

De la combinación de estos dos movimientos resulta una trayectoria en espiral como la que se representa a continuación [6].

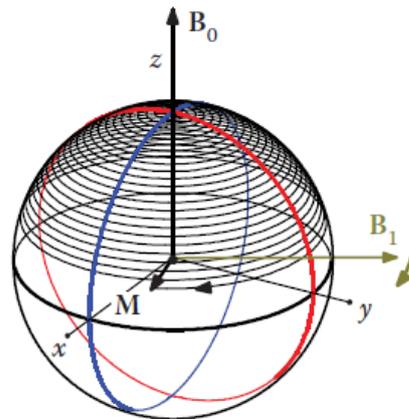


Figura 5. Esfera de Bloch ante la aplicación de los campos  $B_0$  y  $B_1$  [6].

Las trayectorias descritas por  $\vec{M}$  son más sencillas de describir si se trabaja en un sistema de referencia móvil que rote a la frecuencia de Larmor.

En este sistema de referencia, la Ecuación 5 se convierte en

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma\vec{M} \times \vec{B}_0 + \vec{M} \times \vec{\omega}_0 = \gamma\vec{M} \times \left(\vec{B}_0 + \frac{\vec{\omega}_0}{\gamma}\right)$$

Ecuación 8. Movimiento de la densidad de magnetización ante la aplicación del campo  $B_0$  en un sistema de referencia móvil [6].

La densidad de magnetización se comporta como si estuviese respondiendo a un campo magnético aparente

$$\vec{B}_{ap} = \vec{B}_0 + \frac{\vec{\omega}_0}{\gamma}$$

Ecuación 9. Campo magnético aparente ante la aplicación del campo  $B_0$  en un sistema de referencia móvil [6].

Sustituyendo la Ecuación 6 en la Ecuación 9 resulta que el campo magnético aparente es nulo.

$$\vec{B}_{ap} = \vec{B}_0 + \frac{-\gamma \vec{B}_0}{\gamma} = \vec{0}$$

Ecuación 10. Campo magnético aparente ante la aplicación del campo  $B_0$  en un sistema de referencia móvil. Simplificación [6].

Por tanto,  $\vec{M}$  es estacionario en el nuevo sistema de referencia.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \left( \vec{B}_0 + \frac{\vec{\omega}_0}{\gamma} \right) = \gamma \vec{M} \times \vec{0} = \vec{0}$$

Ecuación 11. Movimiento de la densidad de magnetización ante la aplicación del campo  $B_0$  en un sistema de referencia móvil. Simplificación [6].

Al añadir el campo  $\vec{B}_1$ , la Ecuación 8 se convierte en

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times (\vec{B}_{ap} + \vec{B}_1)$$

Ecuación 12. Movimiento de la densidad de magnetización ante la aplicación de los campos  $B_0$  y  $B_1$  en un sistema de referencia móvil [6].

El campo magnético aparente es nulo por la misma razón que en el caso anterior. Por tanto, la Ecuación 12 queda reducida a

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B}_1$$

Ecuación 13. Movimiento de la densidad de magnetización ante la aplicación de los campos  $B_0$  y  $B_1$  en un sistema de referencia móvil. Simplificación [6].

El movimiento que describe  $\vec{M}$  en el nuevo sistema de referencia es una rotación alrededor de  $\vec{B}_1$  con frecuencia angular

$$\omega_1 = -\gamma B_1$$

Ecuación 14. Frecuencia angular de la densidad de magnetización ante la aplicación de los campos  $B_0$  y  $B_1$  en un sistema de referencia móvil [6].

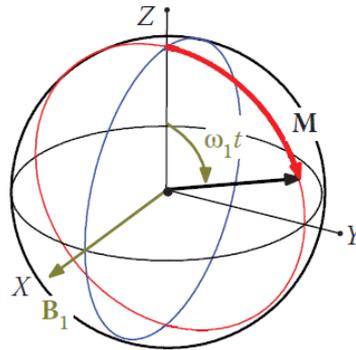


Figura 6. Esfera Bloch ante la aplicación de los campos  $B_0$  y  $B_1$  en un sistema de referencia móvil [6].

Si el campo  $\vec{B}_1$  se aplica durante un periodo de tiempo finito  $\tau$ ,  $\vec{M}$  traza un arco sobre la superficie de la esfera de Bloch de amplitud

$$\theta = \omega_1 \tau$$

Ecuación 15. Desfase de la densidad de magnetización ante la aplicación del campo  $B_1$  durante un periodo de tiempo finito [6].

De esta forma, se puede conseguir que  $\vec{M}$  se desfase de su posición de equilibrio térmico  $\vec{M}_0$  en cualquier ángulo deseado mediante el control del periodo de tiempo  $\tau$  durante el que se aplica el campo  $\vec{B}_1$ .

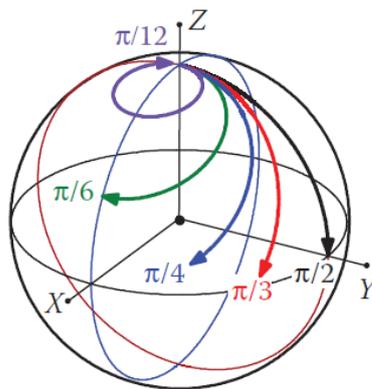


Figura 7. Desfases típicos de la densidad de magnetización [6].

Al retirar el campo  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{M}$  vuelve a realizar un movimiento de precesión libre. Este estado no persiste indefinidamente. Si se deja pasar un determinado periodo de tiempo sin hacer manipulaciones sobre el sistema, este regresará a su estado de equilibrio térmico.

El tiempo que un sistema necesita para regresar a su estado de equilibrio térmico depende de dos constantes,  $T_1$  y  $T_2$ , que son características de los núcleos que haya presentes en la región estudiada, y que se obtienen experimentalmente [6].

La constante  $T_1$ , denominada tiempo de relajación longitudinal, se define como el tiempo que tarda la componente longitudinal de  $\vec{M}$  en alcanzar el 63% de su valor en equilibrio térmico [8]. La ecuación que rige la relajación longitudinal es

$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1}$$

*Ecuación 16. Relajación longitudinal de la densidad de magnetización [6].*

La constante  $T_2$ , denominada tiempo de relajación transversal, se define como el tiempo que tardan las componentes transversales de  $\vec{M}$  en reducirse al 37% de su valor inicial [8]. La ecuación que rige la relajación transversal es

$$\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} = -\frac{\vec{M}_\perp}{T_2}$$

*Ecuación 17. Relajación transversal de la densidad de magnetización [6].*

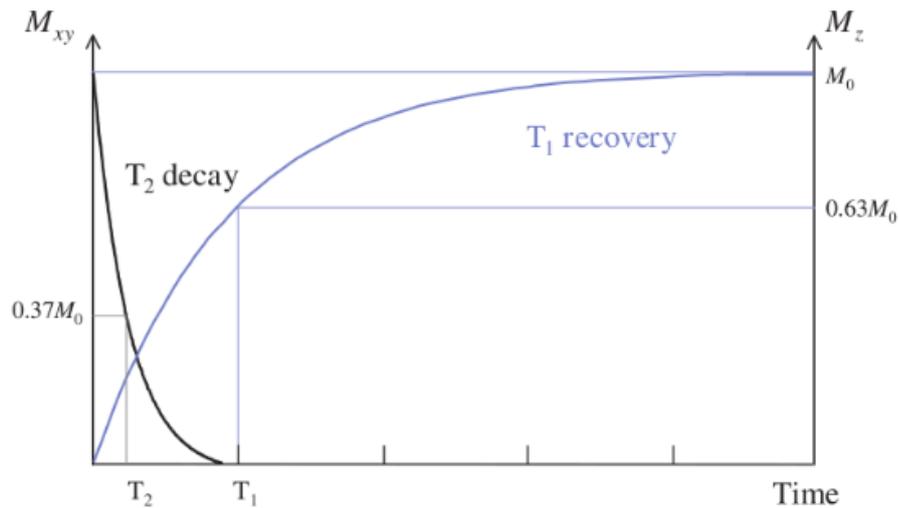


Figura 8. Tiempos de relajación de la densidad de magnetización [8].

Durante la relajación, el módulo de  $\vec{M}$  no permanece constante.

Agrupando los términos que describen la precesión de  $\vec{M}$  y los términos que describen su relajación se obtienen las ecuaciones completas del movimiento de  $\vec{M}$ , denominadas ecuaciones de Bloch [6].

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B} - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2} - \frac{M_z - M_0}{T_1}$$

Ecuación 18. Ecuaciones de Bloch [6].

## Generación de los campos magnéticos

Para que el fenómeno de NMR se produzca es necesaria la generación de varios campos magnéticos controlados. Los escáneres de MRI disponen de conjuntos de bobinas que, en combinación con materiales magnéticos y magnetizables, producen estos campos magnéticos al hacer circular corrientes eléctricas por ellas, según describe la ley de Ampère [6].

### **Campo estático**

Para generar el campo  $\vec{B}_0$  se utiliza un gran solenoide a través del cual se hace circular una corriente eléctrica. La expresión que define el campo generado es

$$B_0 = \frac{\mu_0 n I}{\sqrt{1 + \left(\frac{D}{L}\right)^2}}$$

*Ecuación 19. Módulo del campo  $B_0$  [6].*

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$ ,  $n$  es el número de espiras de la bobina,  $I$  es la intensidad de corriente que circula por la bobina,  $D$  es el diámetro de la bobina y  $L$  es la longitud de la bobina.

En la práctica, el campo magnético producido por el solenoide no tiene la homogeneidad que se necesita para conseguir una imagen de alta resolución. Por ello, los escáneres de MRI disponen también de una serie de bobinas de corrección que ayudan a conseguir la uniformidad requerida [6].

### **Campos gradientes**

Para distinguir de qué punto del espacio provienen las señales de detección de NMR, es necesario que señales provenientes de regiones distintas tengan intensidades distintas. Para ello, cada punto de la región de estudio del escáner MRI debe estar sometido a una intensidad de campo magnético distinta.

Para conseguir esto, se superponen al campo estático los llamados campos gradientes: campos magnéticos que varían en función de la posición.

Los escáneres de MRI disponen de conjuntos de bobinas destinados a este propósito [6].

### **Campo de radiofrecuencia**

El campo rotatorio  $\vec{B}_1$ , también llamado campo de radiofrecuencia o de RF debido a que la frecuencia a la que rota pertenece a este rango del espectro electromagnético, se obtiene a partir de un campo magnético oscilante linealmente polarizado. Este campo se puede descomponer en dos componentes de módulos iguales y constantes y que rotan con velocidades

angulares iguales en módulo pero de sentido opuesto, como se observa en la Figura 9 [6].

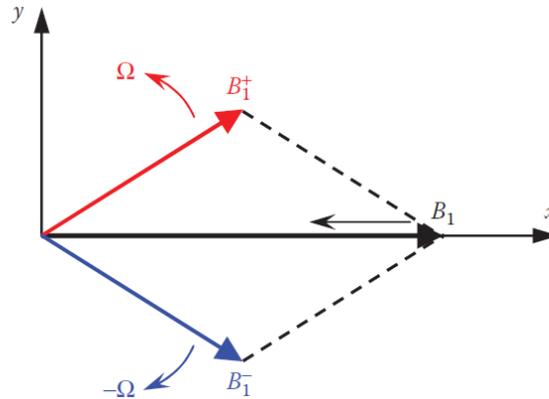


Figura 9. Campo magnético oscilante linealmente polarizado [6].

Una de estas componentes será el campo  $\vec{B}_1$ . La otra tiene una influencia despreciable sobre la NMR, ya que no gira a la frecuencia de Larmor, y por tanto puede ser ignorada.

Para producir el campo magnético oscilante linealmente polarizado se hace circular por una bobina dedicada a este propósito una corriente eléctrica que varía con el tiempo según la expresión

$$i(t) = i_0 \cos(\omega_0 t)$$

Ecuación 20. Intensidad de corriente aplicada a la bobina [6].

## Detección

La densidad de magnetización está asociada a un pequeño campo magnético. Las variaciones de este campo magnético ante las interacciones con los campos  $\vec{B}_0$  y  $\vec{B}_1$  previamente explicadas provocan variaciones en el flujo magnético que atraviesa los conjuntos de bobinas de detección que los escáneres de MRI poseen.

Esto, según las leyes de Faraday y Lenz de inducción electromagnética, produce en las bobinas una fuerza electromotriz que se opone a la variación de flujo magnético que las atraviesa.

Normalmente, esta fuerza electromotriz es muy pequeña, y debe ser amplificada tan pronto como sea posible para evitar que la señal se vea alterada debido a interferencias o ruidos externos [6].

## Angiografía por Resonancia Magnética

Se denomina Angiografía por Resonancia Magnética (MRA por sus siglas en inglés, *Magnetic Resonance Angiography*) al conjunto de técnicas de MRI aplicadas a la obtención de imágenes de los vasos sanguíneos, especialmente de las arterias.

La MRA es útil para detectar aneurismas, estenosis, trombos y otras afecciones del sistema circulatorio, y también para obtener mapas de velocidad del flujo sanguíneo [9].

La MRA comprende técnicas que se pueden dividir en dos grandes familias: MRA dependiente del flujo, que se basa en el hecho de que la sangre está en movimiento para distinguir los vasos sanguíneos de otros tejidos; y MRA independiente del flujo, que no tiene en consideración este hecho.

De las técnicas de MRA dependiente del flujo, la más extendida y relevante para este trabajo se denomina Angiografía por Contraste de Fase (PC-MRA por sus siglas en inglés, *Phase Contrast Magnetic Resonance Angiography*).

La PC-MRA, también denominada PC-MRI, consiste en la medición indirecta de la velocidad de una partícula a través de la medición de la variación que se produce en la fase de su espín al someterla a ciertos campos magnéticos. Estos campos, denominados campos gradientes bipolares, consisten en la aplicación de un campo gradiente (variable con la posición) durante cierto periodo de tiempo y posteriormente la aplicación del campo gradiente opuesto durante el mismo periodo de tiempo, en la dirección sobre la que se quiere medir la velocidad [2].

El cambio de fase provocado por los campos gradientes en el espín de una partícula es

$$\theta = \gamma \int_0^t B_0 + G(\tau)r(\tau)d\tau$$

*Ecuación 21. Desfase provocado por un campo gradiente [10].*

donde  $r(\tau)$  es la posición de la partícula en función del tiempo.

$$r(\tau) = r_0 + v_\tau \tau + \frac{1}{2} a_\tau \tau^2 + \dots$$

*Ecuación 22. Posición de una partícula en función del tiempo [10].*

donde  $r_0$  es la posición inicial de la partícula,  $v_\tau$  su velocidad,  $a_\tau$  su aceleración...

Tomando en consideración solo las partículas con velocidad en la dirección sobre la que se quiere medir, y considerando despreciables los términos de orden superior a 2 de la Ecuación 22, la Ecuación 21 queda reducida a

$$\theta = \gamma x_0 \int_0^t G_x(\tau) d\tau + \gamma v_x \int_0^t G_x(\tau) \tau d\tau$$

*Ecuación 23. Desfase provocado por un campo gradiente. Simplificación [10].*

donde la primera integral se conoce como momento 0 del campo gradiente ( $M_0$ , no confundir con la densidad de magnetización en equilibrio térmico  $\vec{M}_0$ ) y la segunda integral como primer momento del campo gradiente ( $M_1$ ).

$$\theta = \gamma(x_0 M_0 + v_x M_1)$$

*Ecuación 24. Desfase provocado por un campo gradiente. Segunda simplificación [10].*

Para una partícula estacionaria, la aplicación del primer campo gradiente modificará la fase de su espín en cierto grado, y la aplicación del segundo campo gradiente la modificará en la misma medida, pero en sentido opuesto, resultando una variación en la fase del espín neta nula.

Para una partícula en movimiento, la aplicación del primer campo gradiente modificará la fase de su espín en cierto grado. Sin embargo, las posiciones en las que se encontrará la partícula durante la aplicación del segundo campo gradiente estarán sometidas a intensidades de campo magnético distintas, y por tanto la fase de su espín se verá modificada en distinta medida que durante la aplicación del primer campo gradiente. Esto ocasiona una variación en la fase de su espín neta proporcional a su velocidad y al primer momento del campo gradiente aplicado.

$$\Delta\theta = \gamma v_x \Delta M_1$$

*Ecuación 25. Desfase provocado por un campo gradiente bipolar [10].*

Detectando esta variación en la fase del espín es posible conocer la velocidad de la partícula.

La PC-MRA permite determinar la velocidad de una partícula solo en una dirección del espacio cada vez que se aplica. Mediante la aplicación repetida de esta técnica en varias direcciones es posible obtener un mapa de velocidades de 4 dimensiones (3 dimensiones espaciales y el tiempo) [2]. Esta técnica se conoce como 4D Flow.

El 4D Flow, a pesar de ser una técnica muy potente para conocer la velocidad de un flujo, no está exento de limitaciones. Algunas de ellas son el ruido, la baja resolución espaciotemporal o la incapacidad para determinar otros parámetros hemodinámicos, como el esfuerzo cortante en las paredes de los vasos sanguíneos.

Para compensar todas estas carencias, es posible combinar el 4D Flow con la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD por sus siglas en inglés, *Computational Fluid Dynamics*).

La CFD es capaz de conseguir una resolución espaciotemporal muy elevada, no tiene ruido y permite calcular todas las características del fluido.

A su vez, para conseguir un resultado adecuado mediante CFD, es necesario que la geometría y las condiciones de contorno estén descritas de forma precisa, lo cual se puede conseguir con la ayuda del 4D Flow [3].

Así, cada técnica cubre las carencias de la otra, de modo que la combinación de ambas permite conseguir resultados precisos y de alta resolución.

Además, es posible simular la adquisición de resultados por 4D Flow a partir de una simulación de trayectorias de partículas de CFD. Las partículas simuladas modelan los isocromatos del 4D Flow, y permiten resolver las ecuaciones de Bloch (Ecuación 18) para cada isocromato [7].

## 1.2 Objetivos

El objetivo global de este TFG es complementar las técnicas de medida de flujos por 4D Flow mediante técnicas de CFD. Para ello, se plantean los siguientes subobjetivos:

1. Determinar un modelo fluidodinámico para la simulación de flujos en arterias grandes.
2. Aplicar métodos de detección de vórtices a la localización de zonas de recirculación y estasis en simulaciones de flujo cardiovascular.
3. Contribuir mediante la simulación de trayectorias de partículas fluidas a la simulación de la obtención de flujos por 4D Flow.

## 1.3 Estructura del TFG

Este trabajo se divide en los siguientes capítulos.

**Capítulo 1. Introducción y objetivos.** En este capítulo se introduce el tema sobre el que va a tratar el TFG, se describen los fundamentos de las técnicas actuales para la obtención de Imágenes por Resonancia Magnética y su relación con la Dinámica de Fluidos Computacional y se plantean los objetivos del trabajo.

**Capítulo 2. Desarrollo del TFG.** En este capítulo se describen las ecuaciones y propiedades de la mecánica de fluidos relacionadas con el TFG, se exponen las principales características, metodologías y modelos utilizados en la Dinámica de Fluidos Computacional y de ellos se escogen los modelos más adecuados para el caso a resolver. Después, se exponen y comentan los resultados obtenidos.

**Capítulo 3. Conclusiones.** En este capítulo se evalúa el cumplimiento de los objetivos planteados, se comentan las repercusiones del trabajo y se sugieren varias líneas de trabajo futuras relacionadas con el TFG.

**Capítulo 4. Bibliografía.** En este capítulo se enuncian las fuentes de las que se ha obtenido la información que se expone en el trabajo, formateadas según el estándar IEEE.

## 2 Desarrollo del TFG

### 2.1 Modelo fluidodinámico

Para realizar un uso correcto de la CFD es necesario tener conocimientos de la mecánica de fluidos subyacente para así poder escoger modelos adecuados, definir condiciones de contorno e iniciales correctamente y analizar los resultados críticamente [11].

Por ello, en este apartado se proporcionan unas nociones básicas de los aspectos de la mecánica de fluidos más relevantes para este trabajo.

#### 2.1.1 Ecuaciones de conservación

##### Ecuaciones diferenciales de conservación

##### *Ecuación diferencial de conservación de una propiedad genérica del fluido*

Antes de empezar a exponer las ecuaciones de conservación de las diferentes propiedades del fluido es conveniente saber identificar los distintos términos que aparecerán en ellas.

Para ello, se presenta la ecuación de conservación de una propiedad genérica del fluido, representada como  $\phi$  [11].

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{\partial (U_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi$$

*Ecuación 26. Ecuación diferencial de conservación de una propiedad genérica del fluido [11].*

El primer término corresponde a la acumulación, y es identificable por la derivada temporal.

El segundo término corresponde al transporte por convección, y es identificable por la velocidad y la derivada de primer orden.

El tercer término corresponde al transporte por difusión, y es identificable por la derivada segunda y el coeficiente de transporte (difusividad, conductividad o viscosidad).

El cuarto término corresponde a la generación, y es función únicamente de variables locales [11].

### ***Ecuación diferencial de conservación de la masa o de continuidad***

Realizando un balance de materia en un volumen infinitesimal de fluido se obtiene la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j)}{\partial x_j} = 0$$

*Ecuación 27. Ecuación diferencial de conservación de la masa. Forma 1 [11].*

A veces es conveniente describir la conservación de la masa de un elemento fluido que se encuentra en movimiento con el flujo. Para ello, se desarrolla la derivada del producto en la Ecuación 27, obteniendo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = -\rho \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right)$$

*Ecuación 28. Ecuación diferencial de conservación de la masa. Forma 2 [11].*

Esta ecuación también se puede expresar como

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \text{div}(\vec{U}) = 0$$

*Ecuación 29. Ecuación diferencial de conservación de la masa. Forma 3 [11].*

donde el primer término es la derivada sustancial de la densidad. La derivada sustancial representa la derivada temporal de una propiedad de un elemento fluido que se mueve con el flujo

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

*Ecuación 30. Derivada sustancial [11].*

Se puede asumir que el flujo es incompresible cuando se cumple

$$M = \frac{U}{\sqrt{\gamma RT}} < 0.1$$

*Ecuación 31. Condición de flujo incompresible [11].*

En los casos en los que el flujo se puede considerar incompresible, la densidad es constante y uniforme, y por tanto su derivada sustancial es nula. La Ecuación 29 queda reducida a

$$\text{div}(\vec{U}) = 0$$

*Ecuación 32. Ecuación diferencial de conservación de la masa para flujos incompresibles [11].*

### ***Ecuaciones diferenciales de conservación de la cantidad de movimiento o de Navier-Stokes***

Realizando un balance de cantidad de movimiento en un volumen infinitesimal de fluido se obtiene

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i U_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_{m_i}$$

*Ecuación 33. Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento. Forma 1 [11].*

Desarrollando las derivadas de los productos

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} + U_i \left[ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \text{div}(\vec{U}) \right] = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_{m_i}$$

*Ecuación 34. Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento. Forma 2 [11].*

donde el segundo término es nulo por cumplir la ecuación de continuidad, resultando

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_{m_i}$$

Ecuación 35. Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento. Forma 3 [11].

Según la Ley de Navier-Poisson, el tensor de esfuerzos es

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau'_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \left( \mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) \text{div}(\vec{U})\delta_{ij}$$

Ecuación 36. Ley de Navier-Poisson [12].

donde  $\delta_{ij}$  es la función delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ecuación 37. Delata de Kronecker [11].

Sustituyendo la Ecuación 36 en la Ecuación 35 se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes.

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -P\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \left( \mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) \text{div}(\vec{U})\delta_{ij} \right] + \rho f_{m_i}$$

Ecuación 38. Ecuaciones de Navier-Stokes [12].

Estas ecuaciones son válidas solo para casos macroscópicos.

Microscópicamente, las moléculas se mueven una pequeña distancia antes de colisionar con otras moléculas. Debido a ello, sus energías cinéticas y por tanto sus velocidades siguen una distribución de Boltzmann. Estos efectos deben ser tenidos en cuenta en condiciones de baja presión o en volúmenes muy pequeños [11].

El número de Knudsen relaciona el camino libre promedio que recorren las moléculas con las dimensiones del sistema.

$$Kn = \frac{\lambda}{L}$$

*Ecuación 39. Número de Knudsen [11].*

Si el Knudsen es mayor de 0,02 es necesaria una corrección de las ecuaciones de Navier-Stokes y las condiciones de contorno.

### **Ecuaciones integrales de conservación**

Las ecuaciones integrales de conservación se obtienen mediante la integración de las ecuaciones diferenciales de conservación en un volumen de control.

#### ***Teorema de Gauss-Ostrogradski***

El teorema de Gauss-Ostrogradski, también llamado teorema de Gauss o teorema de la divergencia, relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la divergencia del campo en el volumen delimitado por dicha superficie [13].

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{F}) \, dV$$

*Ecuación 40. Teorema de Gauss-Ostrogradski [13].*

Esta relación se emplea en mecánica de fluidos para transformar algunos de los términos que resultan de integrar las ecuaciones diferenciales de conservación en un volumen de control, y por tanto es necesario enunciarla antes de proceder con la obtención de las ecuaciones integrales de conservación.

#### ***Ecuación integral de conservación de una propiedad genérica del fluido***

Dado que el procedimiento de integración y transformación de cada término es el mismo para todas las propiedades del fluido, se explicará utilizando una propiedad genérica  $\phi$ , y posteriormente se aplicará a cada propiedad concreta sin necesidad de repetir la explicación.

Partiendo de la Ecuación 26, se integra cada término en un volumen de control.

$$\int_{VC} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{VC} \rho \frac{\partial (U_j \phi)}{\partial x_j} dV = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dV + \int_{VC} S_\phi dV$$

Ecuación 41. Ecuación integral de conservación de una propiedad genérica del fluido. Forma 1 [11].

Los términos de convección y difusión se transforman mediante la aplicación del teorema de Gauss.

$$\int_{VC} \rho \frac{\partial (U_j \phi)}{\partial x_j} dV = \int_{SC} \rho U_j n \phi dA$$

Ecuación 42. Aplicación del teorema de Gauss-Ostrogradski al término de convección [11].

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dV = \int_{SC} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n dA$$

Ecuación 43. Aplicación del teorema de Gauss-Ostrogradski al término de difusión [11].

Se obtiene así la ecuación integral de conservación de una propiedad genérica del fluido.

$$\int_{VC} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{SC} \rho U_j n \phi dA = \int_{SC} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n dA + \int_{VC} S_\phi dV$$

Ecuación 44. Ecuación integral de conservación de una propiedad genérica del fluido. Forma 2 [11].

A continuación se obtendrán las ecuaciones integrales de conservación de las propiedades concretas del fluido aplicando este mismo procedimiento.

### **Ecuación integral de conservación de la masa o de continuidad**

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (\vec{U}_r \cdot \vec{n}) dA = 0$$

*Ecuación 45. Ecuación integral de conservación de la masa [12].*

### **Ecuaciones integrales de conservación de la cantidad de movimiento**

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{U} dV + \int_{SC} \rho \vec{U} (\vec{U}_r \cdot \vec{n}) dA = \int_{SC} (\vec{n} \cdot \vec{\tau}) dA + \int_{VC} \rho \vec{f}_m dV$$

*Ecuación 46. Ecuaciones integrales de conservación de la cantidad de movimiento [12].*

#### **2.1.2 Propiedades físicas**

##### **Ecuaciones de estado**

Las propiedades físicas de los fluidos varían localmente debido a variaciones en su temperatura, presión o composición. Para calcular las variaciones de estas propiedades se deben definir las expresiones algebraicas que las relacionan: las ecuaciones de estado [11].

La Ley de los Gases Ideales describe correctamente la relación entre las propiedades de gases a baja presión y fluidos incompresibles sin mucha variación en la presión

$$\rho = \frac{P}{RT \sum_n \frac{y_n}{M_{w,n}}}$$

*Ecuación 47. Ley de los Gases Ideales [11].*

Para líquidos es habitual despreciar la dependencia de la densidad con la presión, de modo que se puede expresar como función polinómica de la temperatura.

$$\rho = A + BT + CT^2 + DT^3 + \dots$$

*Ecuación 48. Relación entre la densidad y la temperatura en líquidos [11].*

## Viscosidad

Atendiendo a su viscosidad, un fluido puede catalogarse como newtoniano o no newtoniano.

Un fluido newtoniano es aquel cuya viscosidad puede considerarse constante. En un fluido newtoniano, la relación entre el esfuerzo tangencial al que está sometido el fluido y su velocidad de deformación es lineal, y el coeficiente de proporcionalidad es su viscosidad [14].

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu \left( \frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} \right)$$

*Ecuación 49. Esfuerzos tangenciales en fluidos newtonianos [11].*

Un fluido no newtoniano es aquel cuya viscosidad varía en función de la temperatura y los esfuerzos tangenciales que se le aplican [15].

Dentro de los fluidos no newtonianos existe un subtipo denominado fluidos newtonianos generalizados. Un fluido newtoniano generalizado es un aquel para el cual la tensión cortante depende de la velocidad de corte en un momento dado, pero no de deformaciones pasadas [16].

Existen multitud de modelos que describen el comportamiento de distintos tipos de fluidos no newtonianos. Para este trabajo son especialmente relevantes aquellos que describen el comportamiento de la sangre: el modelo de Carreau y el modelo de Casson.

Un fluido de Carreau es un fluido newtoniano generalizado cuya ley constitutiva es

$$\mu_{eff} = \mu_{inf} + (\mu_0 - \mu_{inf}) (1 + (\lambda \dot{\gamma})^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

*Ecuación 50. Ley constitutiva de los fluidos de Carreau [17].*

donde  $\mu_{eff}$  es la viscosidad efectiva o real,  $\mu_{inf}$  es la viscosidad cuando la velocidad de corte tiende a infinito,  $\mu_0$  es la viscosidad cuando la velocidad de corte es nula,  $\lambda$  es el tiempo característico,  $\dot{\gamma}$  es la velocidad de corte [18] y  $n$  es el índice de la potencia.

Un fluido de Casson es un fluido newtoniano generalizado cuya ley constitutiva es

$$\mu = \frac{\mu_{\infty}^2}{\dot{\gamma}} + \frac{2\mu_{\infty}N_{\infty}}{\sqrt{\dot{\gamma}}} + N_{\infty}^2; N_{\infty} = \sqrt{\mu_p(1 - Hct)^{-0,25}}; \mu_{\infty} = \sqrt{0,625 Hct}$$

*Ecuación 51. Ley constitutiva de los fluidos de Casson [19].*

donde  $\mu_p$  y  $Hct$  son constantes características de cada fluido.

Sin embargo, las variaciones en la viscosidad de la sangre que describen estos modelos solo son relevantes cuando circula por conductos pequeños (capilares y otros vasos de menor tamaño). Dado que el tamaño de la arteria aorta, y por tanto del *phantom* que la emula, es elevado, en este trabajo se considerará la sangre como un fluido newtoniano.

## 2.2 Modelo numérico

En este apartado se proporciona una descripción general de la CFD y todos sus aspectos relevantes para este trabajo.

La Dinámica de Fluidos Computacional (o CFD por sus siglas en inglés, *Computational Fluid Dynamics*) consiste en la resolución de problemas de mecánica de fluidos utilizando métodos numéricos implementados en ordenador.

### 2.2.1 Ventajas de la CFD

La CFD es hoy en día uno de los métodos más utilizados para la resolución de problemas de mecánica de fluidos. Algunas de las razones por las que esto es así se presentan a continuación.

El desarrollo exponencial que han sufrido los procesadores en las últimas décadas permite que el tiempo de computación de las simulaciones de sistemas fluidos sea bajo en comparación con el que requieren otros métodos.

El coste de la CFD se limita al del equipo en el que el software se va a ejecutar, el del propio *software* y el salario del empleado que realiza la simulación. Este coste es reducido en comparación con el de otros métodos de resolución, como los métodos empíricos, que involucran elevados costes materiales.

Existe una amplia variedad de *softwares* comerciales, que pueden ser usados incluso por usuarios inexpertos para obtener soluciones a problemas sencillos, aunque para problemas más avanzados el usuario debe tener conocimientos suficientes en mecánica de fluidos para determinar qué modelo es el más adecuado para el caso de estudio y para detectar errores o falta de precisión en el resultado.

La CFD, a pesar de no proporcionar las soluciones exactas de los problemas, es capaz de proporcionar soluciones suficientemente precisas en una amplia gama de situaciones.

Incluso en los casos en los que la CFD no es capaz de proporcionar soluciones con suficiente precisión, como en sistemas multifásicos o en sistemas con velocidades de reacción muy elevadas, la CFD puede resultar de utilidad, ya que proporciona cierta información que puede ayudar a definir las pruebas experimentales que se deben realizar, así como sus condiciones, para obtener soluciones más precisas [11].

### 2.2.2 Métodos numéricos frente a otros métodos

La CFD se basa en la resolución de las ecuaciones de la mecánica de fluidos mediante métodos numéricos. Los métodos numéricos presentan ciertas ventajas sobre otros métodos de resolución.

Los métodos analíticos proporcionan una solución exacta del problema en los casos en los que se puede asumir una simplificación (esto es, cuando la viscosidad es despreciable, el movimiento del fluido es unidireccional, etc.). Sin embargo, su mayor inconveniente es que aún no se ha encontrado una solución analítica general para las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos, y por lo tanto su uso queda limitado a unos pocos casos particulares.

Los métodos empíricos o semi-empíricos funcionan muy bien para sistemas ampliamente estudiados. Sin embargo, al modificar las condiciones de los procesos estudiados o al desarrollar equipos y procesos nuevos, generalmente no se dispone de una base de datos lo suficientemente amplia como para que un modelo empírico o semi-empírico resulte fiable.

Los métodos numéricos, además de no contar con ninguno de los inconvenientes que presentan los métodos anteriores, cuentan con la gran ventaja de que su implementación en ordenador se puede llevar a cabo con facilidad [11].

### 2.2.3 Pasos para resolver un problema por CFD

Los pasos a seguir para la resolución de un problema de mecánica de fluidos mediante CFD son:

1. **Modelado de la geometría.** Definir la geometría del sistema que se va a estudiar. Para ello, los *softwares* comerciales cuentan con programas de Diseño Asistido por Ordenador (CAD por sus siglas en inglés, *Computer-Aided Design*) integrados, aunque también se puede definir la geometría en un programa CAD externo y posteriormente importarla.
2. **Mallado.** El mallado consiste en la división del volumen de estudio en elementos más pequeños denominados celdas. Cada celda funciona como un elemento discreto y toma un único valor de las propiedades del fluido.
3. **Definición de modelos.** Mientras que para casos sencillos se puede obtener una solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes, para flujos más complejos es necesario utilizar otros modelos, empíricos o semi-empíricos, que pueden estar definidos en el programa CFD o ser definidos por el usuario mediante una subrutina.
4. **Definición de las propiedades del fluido.** Se definen las propiedades físicas del fluido tales como viscosidad, densidad o composición. Los *softwares* comerciales disponen de polinomios con coeficientes modificables por el usuario para los casos en los que estas propiedades no son constantes. También se pueden definir mediante una subrutina escrita por el usuario.
5. **Definición de condiciones iniciales y de contorno.** Se especifican las propiedades del fluido en las entradas, salidas, paredes y otras fronteras, así como en el instante inicial.

6. **Resolución.** Se definen las propiedades del solver y se ejecuta la simulación. El simulador resuelve las ecuaciones de la mecánica de fluidos numéricamente en cada celda y para cada instante de tiempo.
  
7. **Análisis de la solución.** Se analiza si la solución es razonable y precisa, su dependencia del tamaño de malla y de las condiciones iniciales y de contorno, su relación con los resultados experimentales, etc. [11].

## 2.2.4 Aspectos numéricos de la CFD

### El método de volúmenes finitos

Las primeras simulaciones por CFD empleaban el método de diferencias finitas para obtener una aproximación algebraica de las ecuaciones de la mecánica de fluidos. Este método consiste en aproximar las derivadas parciales por su desarrollo en serie de Taylor. El objetivo del método de diferencias finitas es conseguir el mínimo error global entre la solución exacta y la solución aproximada. Sin embargo, en mecánica de fluidos es importante garantizar la conservación local, y el método de diferencias finitas no la garantiza necesariamente, y por tanto no es la mejor elección.

El método de volúmenes finitos, por el contrario, tiene por uno de sus principios garantizar la conservación local. Este método consiste en dividir el volumen de estudio en pequeños sub-volúmenes llamados celdas. Después, se aplica el teorema de Gauss-Ostrogradski en cada celda para transformar las ecuaciones diferenciales en ecuaciones integrales, se establecen las superficies limitantes de la celda como límites de integración y se integra, obteniendo un conjunto de ecuaciones algebraicas que se resuelven mediante métodos numéricos.

Debido a la discretización del volumen de estudio existe un error numérico. Este error se aproxima a cero al tender a cero el tamaño de la celda. Por tanto, para asegurar un resultado preciso es suficiente con escoger un tamaño de celda lo suficientemente pequeño. Sin embargo, escoger un tamaño de celda demasiado pequeño conlleva aumentar el número de celdas y por lo tanto el tiempo de computación, por lo que se debe encontrar un equilibrio.

La forma de las celdas es un factor a tener en cuenta para la aplicación del método de volúmenes finitos. Lo ideal es disponer de una malla que contenga únicamente celdas con ángulos internos de 90 grados. Esto se denomina

mallada estructurada, y es el caso que se va a desarrollar en los siguientes apartados [11].

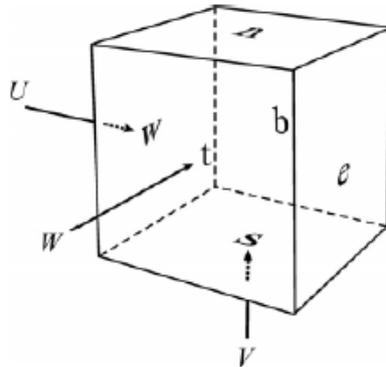


Figura 10. Celda estructurada [11].

Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos, las geometrías tienen partes que no se pueden dividir mediante este tipo de celdas, y por tanto esta no es una estructura muy común en la práctica [11].

### Balances de celda

Cada uno de los términos de la Ecuación 44 se debe transformar en una expresión algebraica para poder resolver la ecuación mediante un método numérico.

- Por el momento solo se considerarán problemas estacionarios, y por lo tanto el término de acumulación es nulo.

$$\int_{V_C} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = 0$$

Ecuación 52. Integración del término de acumulación en una celda estructurada [11].

- El término de convección se integra con las caras de una celda estructurada como límites de integración.

$$\int_{SC} \rho U_j n \phi dA = -\rho [(AU\phi)_w - (AU\phi)_e + (AU\phi)_s - (AU\phi)_n + (AU\phi)_t - (AU\phi)_b]$$

Ecuación 53. Integración del término de convección en una celda estructurada [11].

- El término de convección se integra con las caras de una celda estructurada como límites de integración.

$$\int_{SC} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n dA = - \left[ \left( A \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w - \left( A \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e + \left( A \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_s - \left( A \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_n + \left( A \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_t - \left( A \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_b \right]$$

Ecuación 54. Integración del término de difusión en una celda estructurada [11].

- El término de generación se promedia en cada celda.

$$\int_{VC} S_\phi dV \approx \bar{S}_\phi V$$

Ecuación 55. Integración del término de generación en una celda estructurada [11].

## Esquemas de discretización espacial

Para resolver las ecuaciones algebraicas que resultan de las transformaciones anteriores es necesario hacer una estimación de los valores de  $\phi$  y el gradiente de  $\phi$  en las caras de las celdas, Para hacerlo existen varios métodos, llamados esquemas de discretización [11].

### Delimitación y transportividad

Existen dos propiedades que resultan deseables en un esquema de discretización: delimitación y transportividad.

Un esquema de discretización está delimitado si las propiedades estimadas están comprendidas entre los valores que se han utilizado para estimarlas.

Un esquema de discretización posee transportividad si la dirección de transmisión de la información (la dirección del flujo) resulta obvia con tan solo conocer el esquema [11].

A continuación se describen algunos de los esquemas de discretización más relevantes. Se asume que el flujo es unidimensional y su sentido es de oeste a este. Los subíndices W, P, E, w, e representan la celda al oeste, la celda actual, la celda al este, la cara oeste de la celda actual y la cara este de la celda actual respectivamente.

### **Esquema de diferencias centradas**

El valor de  $\phi$  en una cara se calcula mediante una interpolación lineal entre los valores de  $\phi$  en las celdas que comparten la cara.

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \quad \phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}$$

*Ecuación 56. Esquema de diferencias centradas [11].*

El valor del gradiente se calcula mediante la aproximación de primer orden de su desarrollo en serie de Taylor. Esto es así para todos los esquemas de discretización que se describen a continuación, y por tanto no se repetirá en cada uno de ellos.

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{x_P - x_W} \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P}$$

*Ecuación 57. Estimación del gradiente [11].*

Este esquema está condicionalmente delimitado y no tiene transportividad. El esquema falla en problemas en los que los fenómenos convectivos son de importancia. El error que se comete es del orden de la segunda potencia de la distancia entre celdas [11].

### **Esquema upwind de primer orden**

El valor de  $\phi$  en una cara es igual al valor de  $\phi$  en la celda inmediatamente aguas arriba de la cara.

$$\phi_w = \phi_W \quad \phi_e = \phi_P$$

*Ecuación 58. Esquema upwind de primer orden [11].*

Este esquema está delimitado y tiene transportividad. El error que se comete es del orden de la distancia entre celdas [11].

### **Esquema upwind de segundo orden**

El valor de  $\phi$  en una cara se calcula asumiendo que el gradiente entre la cara y la celda inmediatamente aguas arriba de la cara, y el gradiente entre la celda inmediatamente aguas arriba de la cara y dos celdas aguas arriba de la cara, son iguales.

$$\frac{\phi_e - \phi_P}{x_e - x_P} = \frac{\phi_P - \phi_W}{x_P - x_W} \rightarrow \phi_e = \phi_P + \frac{(\phi_P - \phi_W)(x_e - x_P)}{x_P - x_W}$$

*Ecuación 59. Esquema upwind de segundo orden [11].*

Este esquema no está delimitado y tiene transportividad. Existen otros esquemas de segundo orden que solucionan el problema de delimitación, como el esquema van Leer [11].

### **Esquema van Leer**

Si el gradiente es pequeño, se utiliza una expresión similar a la del esquema *upwind* de segundo orden. Si el gradiente es grande, se utiliza la expresión del esquema *upwind* de primer orden. Así, se consigue resolver el problema de delimitación del esquema *upwind* de segundo orden.

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P + \frac{(\phi_P - \phi_W)(\phi_E - \phi_P)}{\phi_E - \phi_W} & \text{si } |\phi_E - 2\phi_P + \phi_W| \leq |\phi_E - \phi_W| \\ \phi_P & \text{si } |\phi_E - 2\phi_P + \phi_W| > |\phi_E - \phi_W| \end{cases}$$

*Ecuación 60. Esquema van Leer [11].*

## Resolución del campo de velocidades

Para resolver las ecuaciones de conservación como se ha explicado en el apartado anterior es necesario conocer previamente el campo de velocidades.

Para ello se debe resolver un sistema de ecuaciones que comprende las tres ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, siendo las incógnitas las tres componentes de la velocidad y la presión.

Las tres ecuaciones de Navier-Stokes se utilizan para hallar las tres componentes de la velocidad. Sin embargo, no es posible hallar la presión directamente a partir de la ecuación de continuidad, por lo que se deben hacer ciertas modificaciones.

Se toma la divergencia de las ecuaciones de Navier-Stokes y, tras reescribir algunos términos, asumiendo densidad y viscosidad constantes, se combina con la ecuación de continuidad [11].

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_i} = - \frac{\partial^2 (\rho U_i U_j)}{\partial x_i \partial x_j}$$

*Ecuación 61. Ecuación para la presión [11].*

Esta ecuación sí puede ser utilizada para hallar la presión directamente. Sin embargo, su resolución mediante métodos numéricos presenta algunas dificultades. Por ello, para resolverla se utilizan algoritmos específicos. Algunos de los más usados son SIMPLE, SIMPLEC, SIMPLER o PISO [11].

## Sub-relajación

Las ecuaciones de Navier-Stokes contienen términos no lineales que pueden provocar que el método numérico diverja. Para evitarlo se utiliza un método denominado sub-relajación.

En cada iteración, se tomará como nuevo valor de  $\phi$ , en vez del valor obtenido directamente por el método numérico, una media ponderada entre el valor obtenido por el método numérico y el valor anterior de  $\phi$  [11].

$$\phi_{nuevo} = \alpha \phi_{método} + (1 - \alpha) \phi_{anterior}$$

*Ecuación 62. Sub-relajación [11].*

$\alpha$  se denomina factor de sub-relajación y está comprendido entre 0 y 1. Su valor puede variar entre iteraciones y cada ecuación puede tener su propio factor de sub-relajación.

Un valor de  $\alpha$  demasiado bajo provoca tiempos de computación elevados y un valor demasiado alto puede provocar que el método diverja, por lo que es necesario encontrar un equilibrio [11].

## Flujos no estacionarios

Antes de comenzar con la explicación sobre la resolución de problemas con flujo no estacionario, es conveniente hacer un comentario sobre su definición.

Si se define un flujo estacionario como un flujo que varía en el tiempo, casi todos los flujos serían no estacionarios, ya que la mayoría de los flujos de importancia industrial son turbulentos y la turbulencia implica variación en el tiempo de las propiedades del fluido. Por tanto, es conveniente ajustar esta definición.

En el estudio de flujos turbulentos se toman en consideración las propiedades del fluido promediadas en el tiempo en vez de las cantidades instantáneas. Por tanto, en estos casos es conveniente definir la no estacionariedad de un flujo como la variación en el tiempo de dichas propiedades promediadas.

El método de resolución de problemas con flujo no estacionario es similar al de problemas con flujo estacionario. Primero, se integra la Ecuación 26, en este caso no solo en el espacio, sino también en el tiempo [11].

$$\int_{VC} \left( \int_t^{t+\Delta t} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \right) dV + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} \rho \frac{\partial (U_j \phi)}{\partial x_j} dV \right] dt =$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dV \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_{VC} S_\phi dV \right) dt$$

*Ecuación 63. Integración espacial y temporal de la ecuación de conservación de una propiedad genérica del fluido [11].*

Después, se aplican los esquemas de discretización. Para los términos espaciales se utilizan los esquemas de discretización espacial expuestos anteriormente. Para los términos temporales se utilizan los esquemas de discretización temporal que se expondrán a continuación.

Una vez se ha discretizado la ecuación, se realiza un procedimiento iterativo tanto en el tiempo como en el espacio: para cada iteración en el tiempo se realizan sub-iteraciones en el espacio hasta alcanzar la convergencia en ese instante, y se continúa iterando en el tiempo hasta alcanzar el instante de tiempo deseado. Para cada instante se utiliza como aproximación inicial la solución alcanzada en el instante anterior [11].

### ***Esquemas de discretización temporal***

Para integrar los términos dependientes de  $\phi$  en cada paso temporal, es necesario estimar un valor de  $\phi$  para el paso completo, ya que su valor solo se conoce en los instantes inicial y final [11].

Para ello, existen varias opciones: tomar el valor de  $\phi$  al principio del paso, al final del paso o una mezcla de los dos. Esto se puede expresar utilizando un factor de peso  $\theta$  de forma que

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi dt = [\theta \phi(t + \Delta t) + (1 - \theta) \phi(t)] \Delta t$$

*Ecuación 64. Factor e peso en la integración temporal [11].*

### **Método explícito**

El valor de  $\theta$  es 0, es decir, se considera que el valor de  $\phi$  durante todo el intervalo de integración es igual a su valor al inicio del intervalo [11]. El error que se comete es del orden del paso de tiempo. Para que este esquema esté delimitado se debe cumplir la condición

$$\Delta t < \frac{\rho(\Delta x)^2}{\Gamma_e + \Gamma_w}$$

Ecuación 65. Condición de delimitación del método explícito [11].

### Método completamente implícito

El valor de  $\theta$  es 1, es decir, se considera que el valor de  $\phi$  durante todo el intervalo de integración es igual a su valor al final del intervalo. El error que se comete es del orden del paso de tiempo. Este esquema está incondicionalmente delimitado, lo cual supone una gran ventaja y hace que este sea el método predeterminado para la discretización temporal en la mayoría de los *softwares* comerciales [11].

### Método de Crank-Nicolson

El valor de  $\theta$  es 0,5, es decir, se considera que el valor de  $\phi$  durante todo el intervalo de integración es igual al promedio entre su valor al inicio y su valor al final del intervalo [11]. El error que se comete es del orden de la segunda potencia del paso de tiempo. Para que el esquema esté delimitado se debe cumplir la condición

$$\Delta t < \frac{\rho(\Delta x)^2}{\Gamma}$$

Ecuación 66. Condición de delimitación del método de Crank-Nicolson [11].

### Elección del paso temporal

Para elegir el paso de tiempo se utiliza la condición Courant–Friedrichs–Lewy.

La condición Courant-Friedrichs-Lewy es una condición necesaria, pero no suficiente, para la convergencia de algunos métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales [20].

La condición de convergencia es la siguiente:

$$C < C_{m\acute{a}x}$$

Ecuación 67. Condición de Courant-Friedrichs-Lewy [20].

donde  $C$  es el número adimensional de Courant, que se define como

$$C = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x}$$

*Ecuación 68. Número de Courant [20].*

o bien generalizando para  $n$  dimensiones

$$C = \Delta t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{\Delta x_i}$$

*Ecuación 69. Número de Courant generalizado para  $n$  dimensiones [20].*

$C_{\text{máx}}$  es un valor que depende del método de discretización temporal utilizado. Si se utiliza un método explícito, su valor suele ser de 1; si se utiliza un método implícito, su valor suele ser mayor que 1. Al utilizar un método implícito, es conveniente empezar con un  $C_{\text{máx}}$  pequeño e ir aumentándolo progresivamente [20].

## Mallado

### ***Mallas de múltiples densidades***

Las regiones del volumen de estudio que presentan cambios rápidos en las propiedades del fluido, como las regiones cercanas a las paredes, necesitan una densidad de malla elevada para que la precisión de los resultados de la simulación sea aceptable.

Aumentar la densidad de malla de todo el volumen para cumplir con los requerimientos de estas regiones resulta ineficiente, ya que el tiempo de computación aumenta significativamente.

Una solución habitual a este problema es definir una malla con varios niveles de densidad, de forma que se pueda asignar a cada región la densidad de malla que necesite y por tanto se puedan establecer mallas densas para regiones que requieran alta precisión sin necesidad de afectar a todo el volumen de estudio y consecuentemente aumentar excesivamente el tiempo de computación [11].

### **Estudio de convergencia de malla**

Es necesario asegurar que la malla escogida proporciona un resultado cuyo error de discretización sea pequeño. Al mismo tiempo, es necesario evitar mallas excesivamente densas, especialmente si se van a realizar muchas simulaciones, ya que el error de discretización se aproxima a cero de forma asintótica, y por tanto un aumento del número de celdas cuando el error ya es pequeño puede tener graves consecuencias sobre el coste computacional de la simulación sin apenas afectar al error.

Existen varios métodos para analizar la idoneidad de la malla escogida. Uno de los más comúnmente utilizados es el cálculo del Índice de Convergencia de Malla (GCI por sus siglas en inglés, *Grid Convergence Index*).

El GCI proporciona una medida relativa entre la solución obtenida por CFD y el valor asintótico al que se aproximaría esta solución conforme se aumentase la densidad de la malla. Este valor asintótico no es el valor de la solución exacta, ya que hay otros tipos de error presentes además del error de discretización, como el error de truncamiento y redondeo.

Para calcular el GCI se necesitan al menos dos mallas de distinta densidad, aunque es recomendable realizar el estudio con tres o más, que se comparan dos a dos [21].

Si se pretende utilizar la malla más densa, el GCI de cada pareja de mallas se calcula como

$$GCI_{12} = \frac{F_s |\varepsilon|}{r^p - 1}$$

*Ecuación 70. Índice de convergencia en caso de utilizar la malla más densa [21].*

donde  $F_s$  es un factor de seguridad que toma el valor de 3 para comparaciones entre dos mallas y de 1,25 para comparaciones entre tres o más mallas,  $|\varepsilon|$  es una estimación del error obtenida mediante la extrapolación de Richardson,  $p$  es el orden de precisión de la extrapolación de Richardson y  $r$  es el ratio de refinado de malla, que se define como

$$r = \frac{h_2}{h_1}$$

*Ecuación 71. Ratio de refinado de malla [21].*

donde  $h_1$  es el espaciado de la malla más densa de la pareja y  $h_2$  el de la menos densa.

Si se pretende utilizar la malla menos densa, el GCI de cada pareja de mallas se calcula como

$$GCI_{12} = \frac{F_s |\varepsilon| r^p}{r^p - 1}$$

*Ecuación 72. Índice de convergencia en caso de utilizar la malla menos densa [21].*

El valor de la solución que proporciona la simulación realizada con la malla escogida estará tanto más cerca de su valor asintótico como próximo a 1 sea el valor del GCI asintótico, que se define como

$$GCI_a = \frac{GCI_{23}}{r^p \cdot GCI_{12}}$$

*Ecuación 73. GCI asintótico [21].*

### 2.2.5 Condiciones de contorno e iniciales

Para resolver las ecuaciones diferenciales, es necesario establecer unas condiciones de contorno y unas condiciones iniciales [11].

Existen tres tipos de superficies en las que se deben especificar las condiciones de contorno:

- **Entradas.** Lo más habitual es definir la velocidad o el gasto de entrada, así como su distribución sobre las superficies de entrada. También es posible especificar la presión en la entrada.
- **Salidas.** La condición de contorno estándar para salidas es la de flujo con difusión cero, que indica que las condiciones en las salidas se extrapolan del dominio del fluido y no tienen impacto aguas arriba. Otra posibilidad, que funciona especialmente bien cuando hay muchos flujos de retorno, es especificar la presión a la salida.
- **Paredes.** La condición de contorno más habitual para las paredes es la de no deslizamiento, que indica que la velocidad relativa entre las partículas fluidas próximas a la pared y la propia pared es nula. Para flujos turbulentos, la malla es habitualmente demasiado imprecisa

como para que la condición de no deslizamiento funcione correctamente, y por tanto se suelen calcular la velocidad y el esfuerzo cortante del fluido cerca de la pared mediante una función de pared.

En cuanto a la transferencia de calor, las paredes se pueden considerar adiabáticas o no adiabáticas, y en este último caso existen multitud de opciones como temperatura constante, flujo de calor constante y otras.

En cuanto a las especies químicas, las paredes se pueden considerar permeables o impermeables [11].

En algunos problemas existen simetrías en las condiciones de contorno que se deben especificar, ya que pueden reducir el coste computacional de la simulación significativamente.

En flujos estacionarios, se necesitan unas condiciones iniciales que sirvan como aproximación inicial para que se pueda empezar a aplicar el método iterativo. Cuanto mejores sean estas condiciones iniciales, más rápido convergerá el método. Si existen varias soluciones, el método convergerá hacia una u otra en función de las condiciones iniciales especificadas, y por tanto se deben probar varias condiciones iniciales para asegurarse de que la solución a la que se llega es la deseada.

En flujos no estacionarios, en los que la solución es distinta para cada instante de tiempo, se deben especificar las condiciones iniciales reales de todas las propiedades del fluido que se quieran conocer [11].

### 2.2.6 Criterios de parada

Es necesario establecer un criterio de parada de modo que el programa deje de realizar iteraciones cuando el criterio se satisfaga. No suele ser posible comparar la solución numérica con la solución exacta, ya que si se está usando un método iterativo es generalmente porque la solución exacta no se conoce. Algunos criterios comunes son:

- Que la diferencia absoluta entre la solución actual y la anterior sea menor que cierto umbral.
- Que la diferencia relativa entre la solución actual y la anterior sea menor que cierto umbral.

- Que el valor de los residuales (la diferencia entre ambos miembros de las ecuaciones de conservación), escalado con un factor adecuado, sea menor que cierto umbral.
- Que la masa se conserve (es decir, que la suma de todos los flujos másicos del sistema sea 0 o muy cercana a 0) [11].

### 2.2.7 Detección de vórtices

Un vórtice es una región de un fluido que gira alrededor de un eje [22]. Los vórtices son estructuras que juegan un papel importante en la dinámica de los flujos turbulentos. Hasta la fecha no existe una definición estricta de vórtice. Sin embargo, existen métodos que permiten su detección y visualización [23].

La mayoría de los métodos se basan en el análisis del tensor gradiente de velocidad y, más concretamente, de la descomposición de este tensor en otros dos: uno simétrico (S) denominado tensor de velocidades de deformación y otro antisimétrico ( $\Omega$ ) denominado tensor de velocidades de rotación.

$$\nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Ecuación 74. Tensor gradiente de velocidad.

$$S = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & 2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Ecuación 75. Tensor de velocidades de deformación [23].

$$\Omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 76. Tensor de velocidades de rotación [23].

Algunos de los métodos más importantes se explican a continuación.

## Método Q

Se denota como Q el segundo invariante del tensor gradiente de velocidad.

$$Q = \frac{1}{2} (\|\Omega\|^2 - \|S\|^2)$$

Ecuación 77. Invariante Q [24].

Se define un vórtice como una región conectada para la cual Q es positivo en todos sus puntos, o equivalentemente, una región conectada en la cual la velocidad local de rotación del fluido es mayor que su velocidad local de deformación [24].

## Método Lambda2

Si se desprecian los términos no estacionarios y los debidos a la viscosidad de las ecuaciones de Navier-Stokes se cumple que

$$S^2 + \Omega^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla^2 p$$

Ecuación 78. Tensor  $S^2 + \Omega^2$  [24].

$S^2 + \Omega^2$  es una matriz real y simétrica y por tanto tiene tres valores propios reales. Se denotan dichos valores propios, en orden decreciente, como  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ .

Se define un vórtice como una región conectada para la cual  $\lambda_2$  es negativo en todos sus puntos [24].

### 2.3 Caso de estudio

La geometría de estudio es un *phantom* de la arteria aorta diseñado y modelado mediante CAD por el Departamento de Ingeniería Energética y Fluidomecánica.

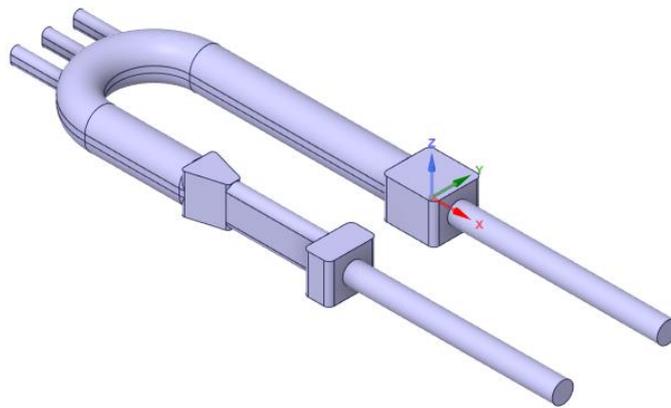


Figura 11. Geometría de estudio tridimensional.

El *phantom* consta, aparte de la geometría que emula la de la arteria aorta y sus intersecciones con otras arterias, de dos depósitos y dos tubos (uno a la entrada y otro a la salida) para la alimentación del fluido.

Previamente al estudio de la geometría presentada, se realizará el estudio de una geometría bidimensional obtenida a partir del plano medio de la geometría tridimensional.

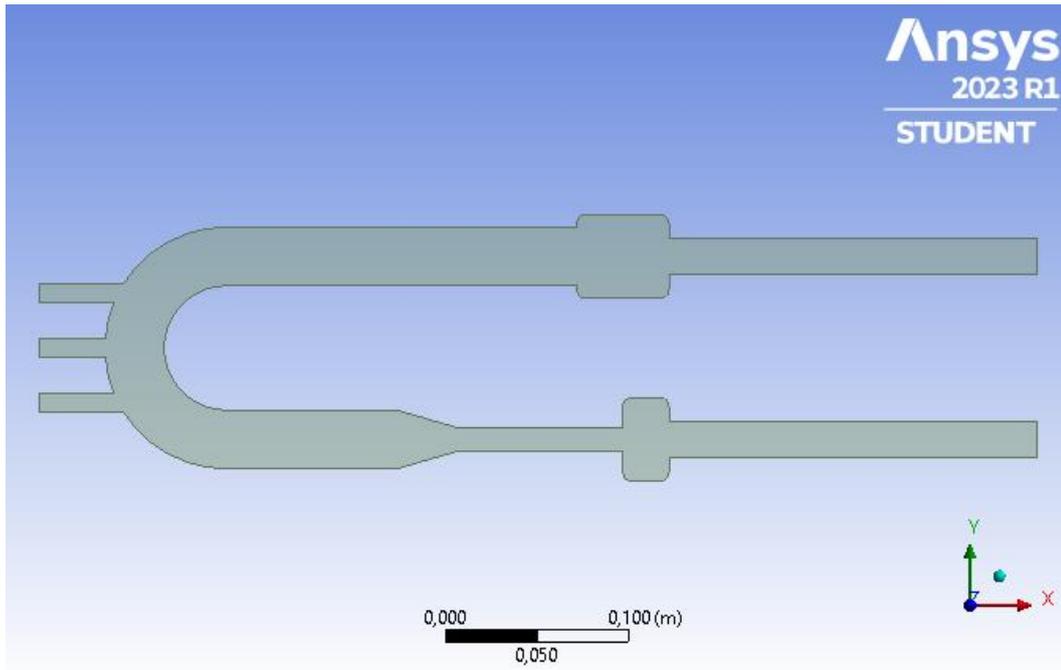


Figura 12. Geometría de estudio bidimensional.

Así, en caso de cometer algún error al establecer las condiciones de contorno, los parámetros del *solver* o algún otro aspecto de la simulación, el coste computacional del error, y consecuentemente su coste temporal, serán mucho más pequeños que si se hubiese cometido el mismo error directamente en la simulación tridimensional.

El estudio de ambas geometrías se realizará utilizando el *software Ansys*, concretamente sus módulos *SpaceClaim*, *DesignModeler*, *Fluent* y *CFD-Post*.

### 2.3.1 Caso bidimensional

#### Mallado

Se comienza realizando el mallado de la geometría bidimensional. Para ello, se establecen cinco áreas:

- **Área A.** Es el área general. Se malla con elementos de 1 mm de lado.
- **Áreas B, C y D.** Son las áreas donde la representación de la aorta interseca con las representaciones de otras arterias del cuerpo humano (el tronco braquiocefálico, la arteria carótida común izquierda y la arteria subclavia izquierda, respectivamente). En estas

áreas se colocan esferas de influencia de 20 mm de radio en las que el mallado se realiza con elementos de 0,5 mm de lado.

- **Área E.** Es el contorno de la geometría. Se malla mediante dos capas de elementos de 0,1 mm de espesor.

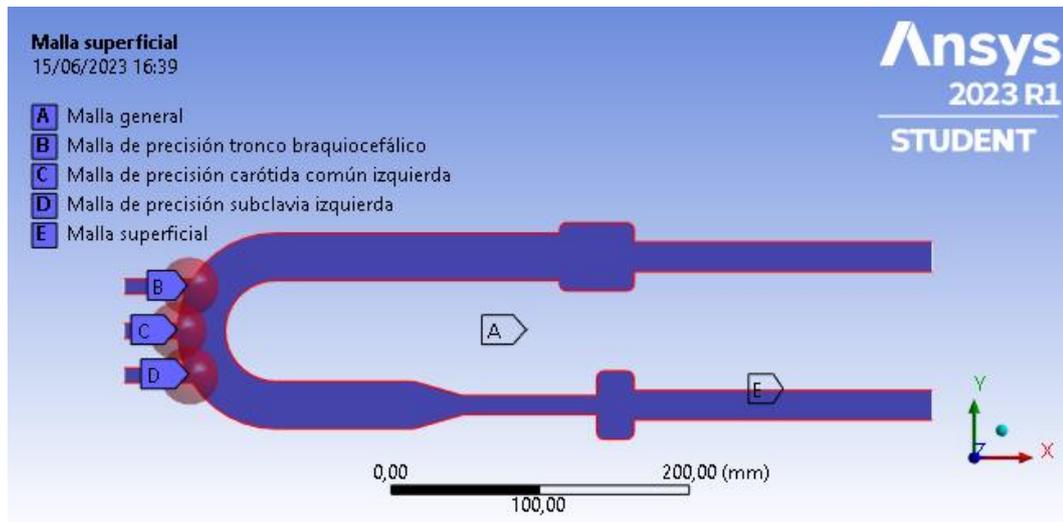


Figura 13. División en áreas para el mallado de la geometría bidimensional.

Además, se da nombre a la entrada, las salidas y el contorno de la geometría.

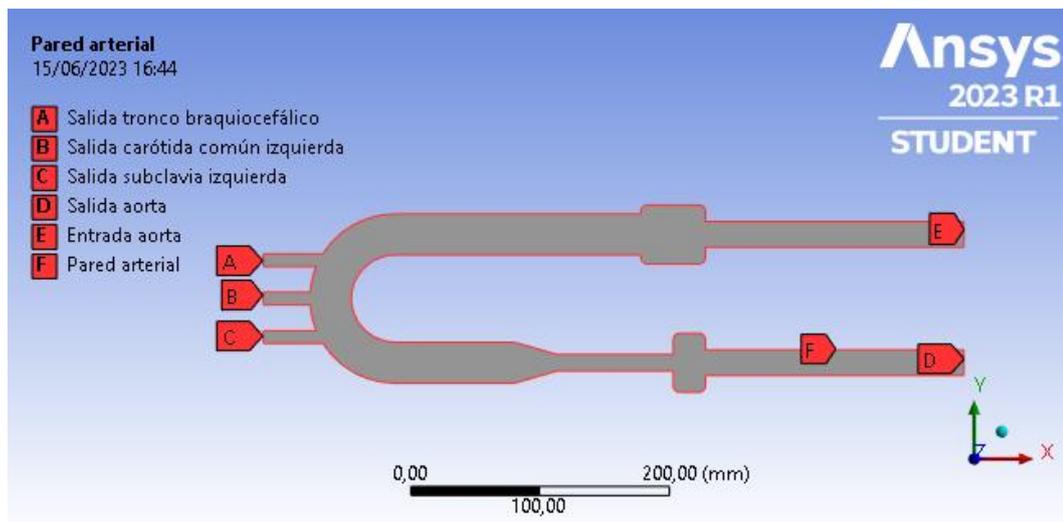


Figura 14. Nomenclatura de las secciones del contorno de la geometría bidimensional.

## Definición de modelos

Para escoger el modelo de viscosidad es necesario conocer el régimen de flujo. Para ello, se calcula el número de Reynolds. Antes de ejecutar la simulación, únicamente se conoce la velocidad en la entrada. Se calcula el número de Reynolds tomando su valor máximo.

$$Re_{pico} = \frac{u_{pico} \cdot D}{\nu} = \frac{0,5 \cdot 0,02}{9,264 \cdot 10^{-6}} = 1079,45$$

*Ecuación 79. Número de Reynolds [25].*

La condición de régimen laminar para flujo interno en tuberías de sección circular es:

$$Re \leq 2300$$

*Ecuación 80. Condición de régimen laminar para flujo interno en tuberías de sección circular [25].*

Por tanto, el flujo es aparentemente laminar. Si tras la ejecución de la simulación existiesen velocidades sustancialmente superiores a la velocidad máxima en la entrada, esto se reconsiderará. Por el momento, se escoge el modelo de viscosidad laminar.

Para la simulación de trayectorias de partículas, se escoge el modelo de fase discreta sin masa.

## Definición de las propiedades del fluido

Las propiedades del fluido de estudio (sangre) son:

- **Densidad.**  $\rho = 1153 \frac{kg}{m^3}$
- **Viscosidad cinemática.**  $\nu = 9,246 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

*Ansys Fluent* requiere la densidad y la viscosidad dinámica para la definición de un fluido. Por tanto, se calcula la viscosidad dinámica como

$$\mu = \rho \cdot \nu = 1,066 \cdot 10^{-2} \frac{kg}{m \cdot s}$$

*Ecuación 81. Cálculo de la viscosidad dinámica.*

## Definición de las condiciones de contorno

### **Entrada**

Como condición de contorno en la entrada se establece un perfil de velocidad uniforme, variable en el tiempo y periódico. Cada periodo dura un segundo (emulando el latido de un corazón a 60 pulsos por minuto) y consta de dos partes:

- En los primeros 0,436 segundos la velocidad varía con forma de onda sinusoidal, partiendo desde 0,1 m/s, alcanzando su pico en 0,5 m/s y regresando a 0,1 m/s. Esta parte emula la fase sistólica del latido del corazón.
- En el resto del periodo la velocidad permanece constante e igual a 0,1 m/s. Esta parte emula la fase diastólica del latido del corazón.

$$u_{entrada}(t) = \begin{cases} 0,5 \cdot \text{sen}(2\pi(t + 0,0320472)) & \text{si } t \leq 0,436 \\ 0,2 & \text{si } t > 0,436 \end{cases}$$

*Ecuación 82. Velocidad en la entrada.*

donde t es el tiempo local dentro de cada periodo.

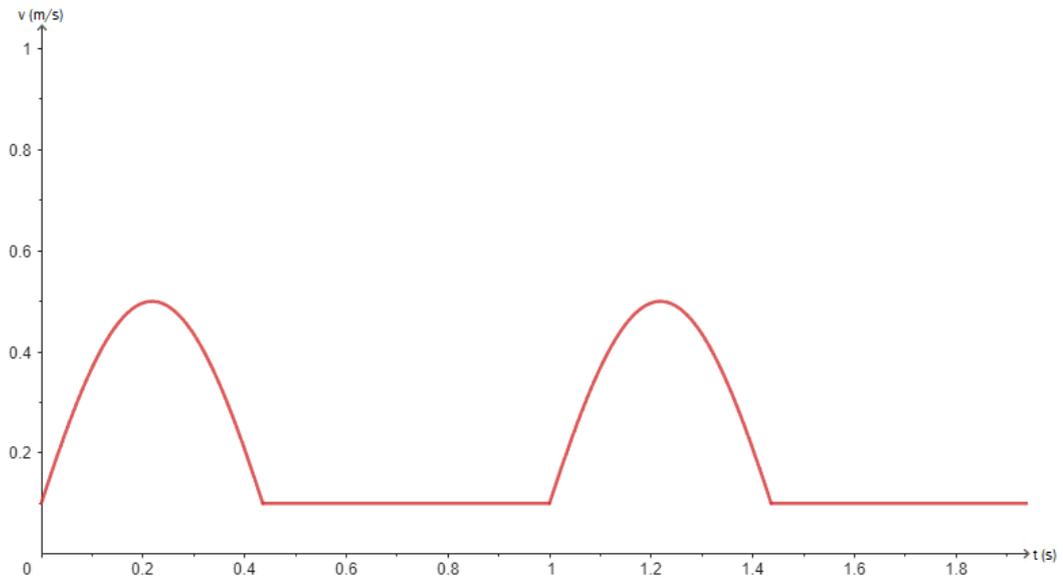


Figura 15. Velocidad en la entrada.

Para poder introducir la condición de contorno en la entrada en *Fluent*, se implementa la función en lenguaje C, tomando como base una función similar [26].

```
#include "udf.h"//archivo que contiene las definiciones de las funciones
DEFINE y las operaciones de Fluent
```

```
#define PI 3.141592654
```

```
DEFINE_PROFILE(inlet_velocity_60_BPM,th,i)
```

```
{
```

```
    face_t f;
```

```
    begin_f_loop(f,th)
```

```
        double t = CURRENT_TIME-floor(CURRENT_TIME); //t es el
        tiempo local en cada periodo
```

```
    {
```

```
        if(t <= 0.436)
```

```
            F_PROFILE(f,th,i) = 0.5*sin(2*PI*(t+0.0320472));
```

```
        else
```

```
F_PROFILE(f,th,i) = 0.1;
}
end_f_loop(f,th);
}
```

### **Salidas**

Como condición de contorno en las salidas se establece una presión manométrica de 13332 Pa.

### **Pared arterial**

Como condición de contorno en la pared arterial se establece la condición de no deslizamiento (la velocidad de las partículas fluidas próximas a la pared es igual a la velocidad de la pared, en este caso nula).

### **Definición de las propiedades del solver**

Se configura el solver de la siguiente forma:

- Para la resolución del campo de velocidades se utiliza el esquema SIMPLE.
- Para la discretización espacial:
  - o Para la discretización del gradiente se utiliza el método de mínimos cuadrados.
  - o Para la discretización de la presión se utiliza el método de segundo orden.
  - o Para la discretización del momento se utiliza el esquema *upwind* de segundo orden.
- Para la discretización temporal se utiliza el método implícito de primer orden.
- Los factores de sub-relajación son:
  - o 0,3 para la presión.
  - o 1 para la densidad.

- 1 para las fuerzas másicas.
- 0,7 para el momento.
- Los parámetros de avance del tiempo son:
  - Se realizan 400 pasos temporales.
  - Cada paso es de 0,05 segundos.
  - Se realiza un máximo de 50 iteraciones por paso temporal.

Para comprobar si el paso temporal es adecuado, se calcula el número de Courant. Para el área general de la malla

$$C = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} = \frac{0,5 \cdot 0,05}{0,0032} = 7,81$$

*Ecuación 83. Cálculo del número de Courant para el área general de la malla.*

Para el área afectada por las esferas de influencia de la malla

$$C = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} = \frac{0,5 \cdot 0,05}{0,002} = 12,5$$

*Ecuación 84. Cálculo del número de Courant para el área afectada por las esferas de influencia de la malla.*

Dado que la discretización temporal se realiza mediante el método implícito, estos valores son aceptables y el paso temporal es adecuado.

### 2.3.2 Caso tridimensional

#### Mallado

Para el mallado de la geometría tridimensional se establecen las mismas cinco zonas (en este caso se denominarán volúmenes desde A hasta E, en vez de áreas) que para el de la geometría bidimensional.

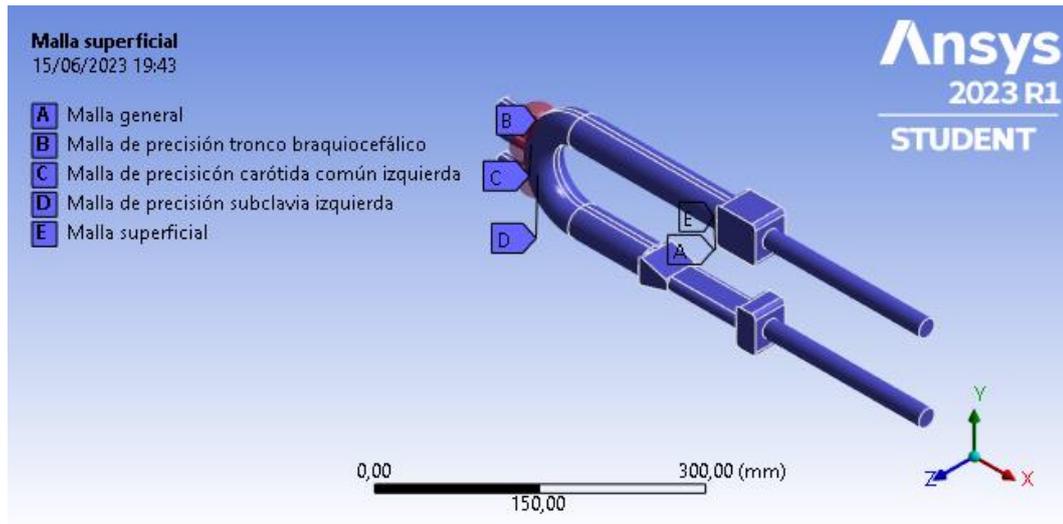


Figura 16. División en áreas para el mallado de la geometría tridimensional.

Sin embargo, los tamaños de los elementos en cada zona difieren de los tamaños descritos en el caso bidimensional, ya que si fuesen iguales resultaría un número de celdas mucho mayor, lo cual conllevaría dos problemas: primero, el coste computacional de la simulación sería inasequiblemente alto; segundo, el programa (*Ansys Fluent*, con licencia para estudiantes) impone un número máximo de celdas (512.000) que se superaría.

Para ajustarse a esta restricción, se tantea con los tamaños de elemento hasta llegar a una malla que posee un número de celdas cercano al máximo. Los tamaños de elemento a los que se llega son:

- **Volumen A.** 3,2 mm de lado.
- **Volúmenes B, C y D.** 2 mm de lado.
- **Volumen E.** 5 capas de 0,1 mm cada una.

Se obtiene así una malla de 501.719 elementos (malla 1).

Dado que la malla se ha obtenido atendiendo más a las limitaciones impuestas por el programa que a que el tamaño de sus elementos sea el adecuado, es necesario realizar un estudio de convergencia de malla para comprobar su viabilidad.

Para ello, es necesario disponer de tres mallas. La malla 1 será la malla de alta densidad. Se define la malla de densidad intermedia con los siguientes tamaños de elemento:

- **Volumen A.** 5 mm de lado.
- **Volúmenes B, C y D.** 3 mm de lado.
- **Volumen E.** 5 capas de 0,1 mm cada una.

Se obtiene así una malla con 322.634 elementos (malla 2).

Se define la malla de baja densidad con los siguientes tamaños de elemento:

- **Volumen A.** 7 mm de lado.
- **Volúmenes B, C y D.** 5 mm de lado.
- **Volumen E.** 5 capas de 0,1 mm cada una.

Se obtiene así una malla con 280.841 elementos (malla 3).

Para realizar el estudio de convergencia de malla se necesita conocer una propiedad del fluido en el mismo punto y en el mismo instante para las tres mallas.

La propiedad escogida es el módulo de la velocidad del fluido. Se deben escoger un punto y un instante en los que velocidad presente una dependencia de la geometría significativa; de lo contrario, un resultado positivo no sería extrapolable a otros puntos del volumen de estudio ni a otros instantes de la simulación.

Atendiendo a esto, se toma un punto cercano a las representaciones de las intersecciones de la aorta con otras arterias ( $x = -260$  mm;  $y = -5$  mm;  $z = 0$  mm), y un instante de tiempo cercano al pico de velocidad del último ciclo simulado ( $t = 19,2$  s).

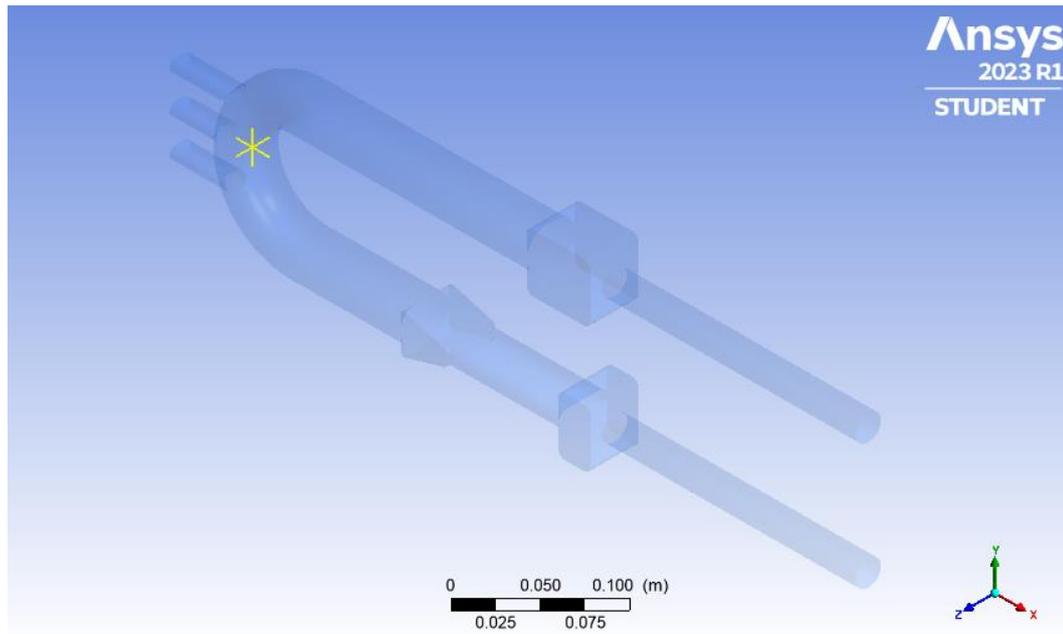


Figura 17. Punto en el que se miden las velocidades.

El número de celdas y las mediciones de velocidad de las tres mallas se introducen en un *software* que ejecuta los cálculos y devuelve los siguientes resultados [27]:

Tabla 1. Resultados del estudio de convergencia de malla.

	Nº de celdas	Velocidad (cm/s)	r	GCI (%)	GCI <sub>a</sub>	p
<b>Malla 1</b>	501.719	7,890	1,56	11,34	1,077	1,83
<b>Malla 2</b>	322.634	8,111		1,15		
<b>Malla 3</b>	280.841	7,994				

El valor del GCI asintótico es próximo a 1. Por tanto, los resultados proporcionados por la simulación realizada con la malla 1 se aproximan a sus valores asintóticos, y consecuentemente la malla 1 es adecuada.

Se da nombre a la entrada, las salidas y la pared de la geometría de la misma forma que en el caso bidimensional.

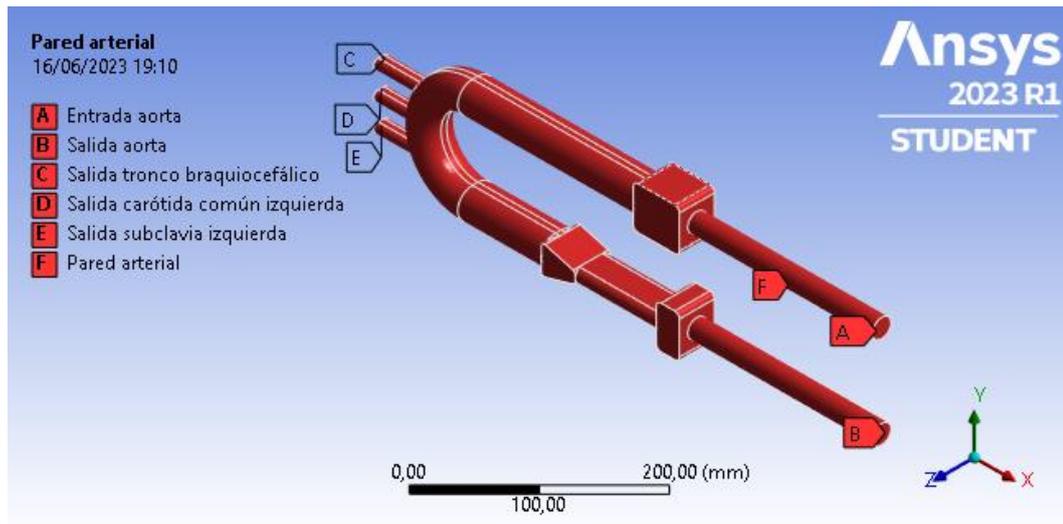


Figura 18. Nomenclatura de las secciones del contorno de la geometría tridimensional.

## Definición de modelos, propiedades del fluido, condiciones de contorno y propiedades del solver

Los modelos utilizados, las propiedades del fluido, las condiciones de contorno y las propiedades del solver son las mismas que en el caso bidimensional.

### 2.3.3 Resumen del modelo aplicado al caso de estudio

Se presenta una tabla resumen de todo lo expuesto en los apartados 2.3.1 y 2.3.2.

Tabla 2. Resumen de modelos utilizados.

Mallado	Espaciado general		3,2 mm
	Espaciado zona de precisión		2 mm
	Mallado superficial		5 capas de 0,1 mm
	Número total de celdas		501.719
Modelos	Modelo de viscosidad		Laminar
	Modelo de fase discreta		Sin masa
Propiedades del fluido	Densidad		1153 kg/m <sup>3</sup>
	Viscosidad cinemática		9,246 · 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s
	Viscosidad dinámica		1,066 · 10 <sup>-2</sup> kg/(m · s)
Condiciones de contorno	Entrada		U <sub>entrada</sub> (t)
	Salidas		Presión manométrica de 13332 Pa
	Pared		No deslizamiento
Propiedades del solver	Resolución del campo de velocidades		SIMPLE
	Discretización espacial	Gradiente	Mínimos cuadrados
		Presión	Segundo orden
		Momento	Upwind segundo orden
	Discretización temporal		Implícito de primer orden
	Factores de sub-relajación	Presión	0,3
		Densidad	1
		Fuerzas másicas	1
		Momento	0,7
	Propiedades del paso temporal	Nº de pasos	400
Incremento de tiempo por paso		0,05 s	
Nº máximo de iteraciones por paso		50	

## 2.4 Resultados

Con las condiciones descritas en el apartado anterior, se ejecuta la simulación bidimensional y, tras comprobar que los resultados son coherentes, se ejecuta la simulación tridimensional.

Dado que no se han especificado las condiciones iniciales, se debe dejar pasar cierto número de ciclos para que los resultados se estabilicen. Se comprueba que, a partir del undécimo ciclo ( $t = 10$  s), todos los ciclos son prácticamente idénticos. Por tanto, los 10 primeros ciclos se desestiman, y se establece  $t = 10$  s como instante en el que se realiza la inyección de partículas. Se simulan otros 10 ciclos más para que las partículas recorran el volumen de estudio.

Los resultados se presentan a continuación.

## 2.4.1 Simulación bidimensional

### Aproximación euleriana

La aproximación euleriana a un campo fluido es la descripción del campo mediante la especificación de las propiedades de puntos del espacio inmóviles a través de los cuales fluye el fluido [28]. En este apartado se describirán el campo de velocidades y la vorticidad del fluido.

Se presentan, para comenzar, imágenes del campo de velocidades del fluido, así como de una vista detalle del mismo en la zona próxima a las representaciones de las intersecciones de la aorta con otras arterias, tomadas durante el último ciclo simulado, cada 0,1 segundos.

Las imágenes se han tomado aplicando un factor de reducción de 75, es decir, se muestra la velocidad en uno de cada 75 puntos en los que se ha calculado, ya que de otra manera su visualización resulta inviable.

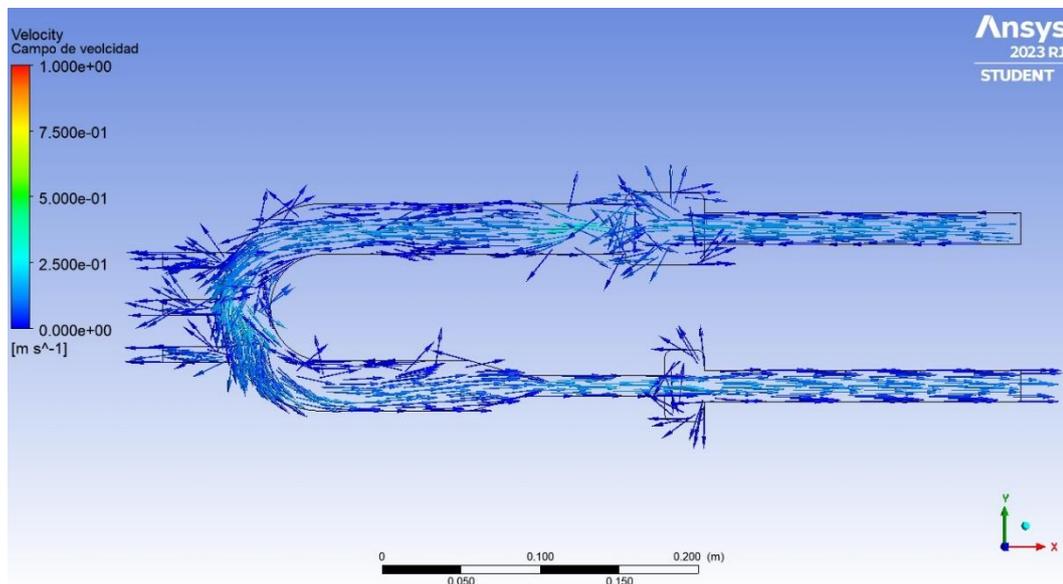


Figura 19. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19$  s.

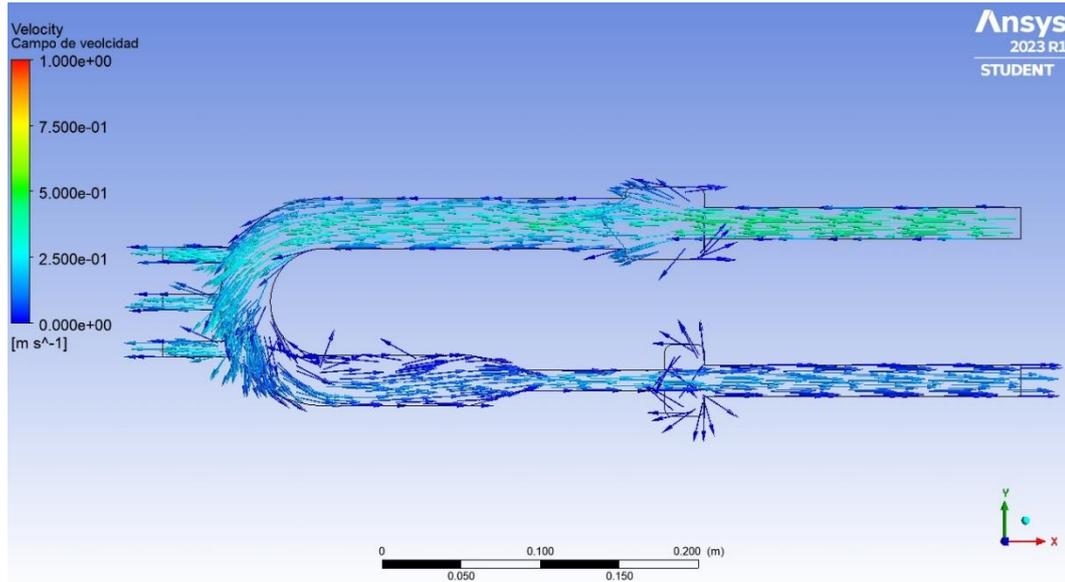


Figura 20. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,1$  s.

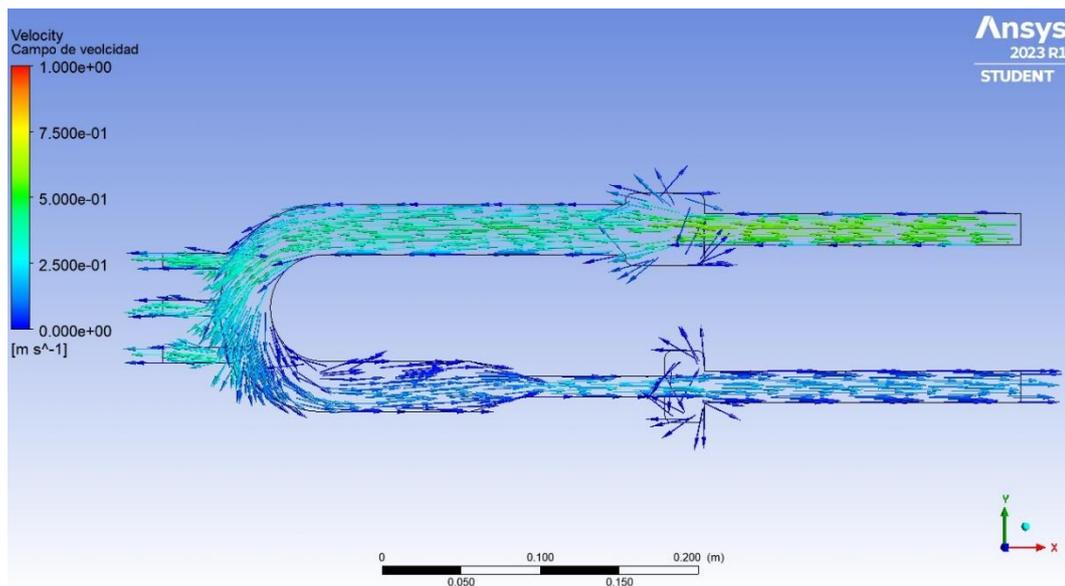


Figura 21. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,2$  s.

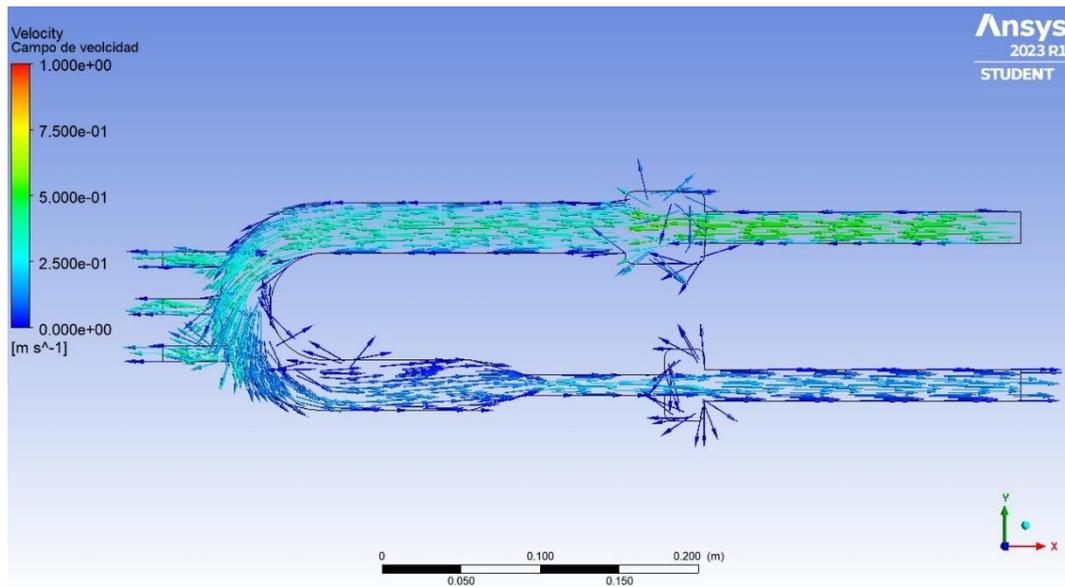


Figura 22. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,3$  s.

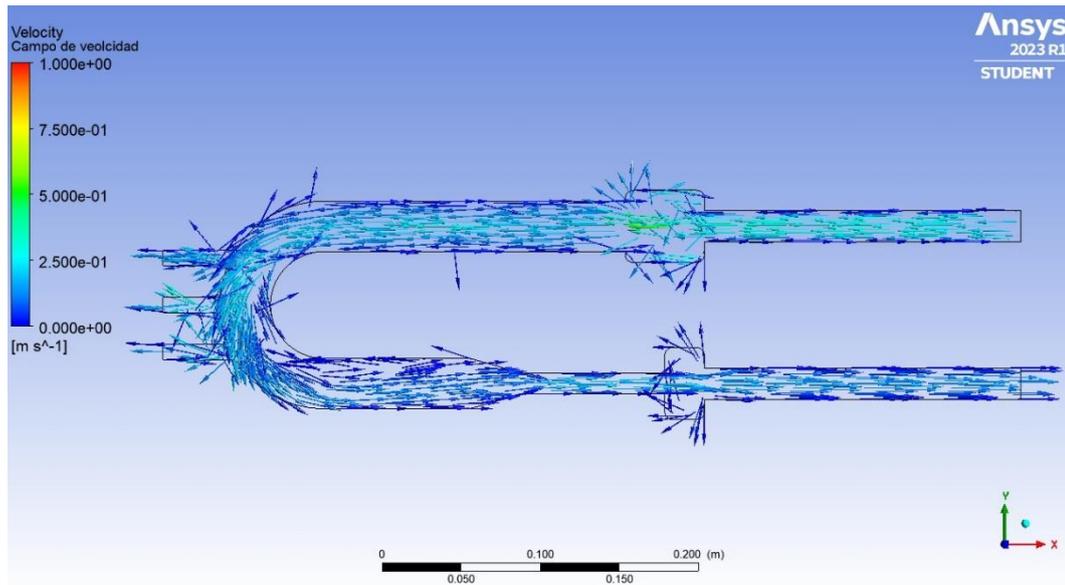


Figura 23. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,4$  s.

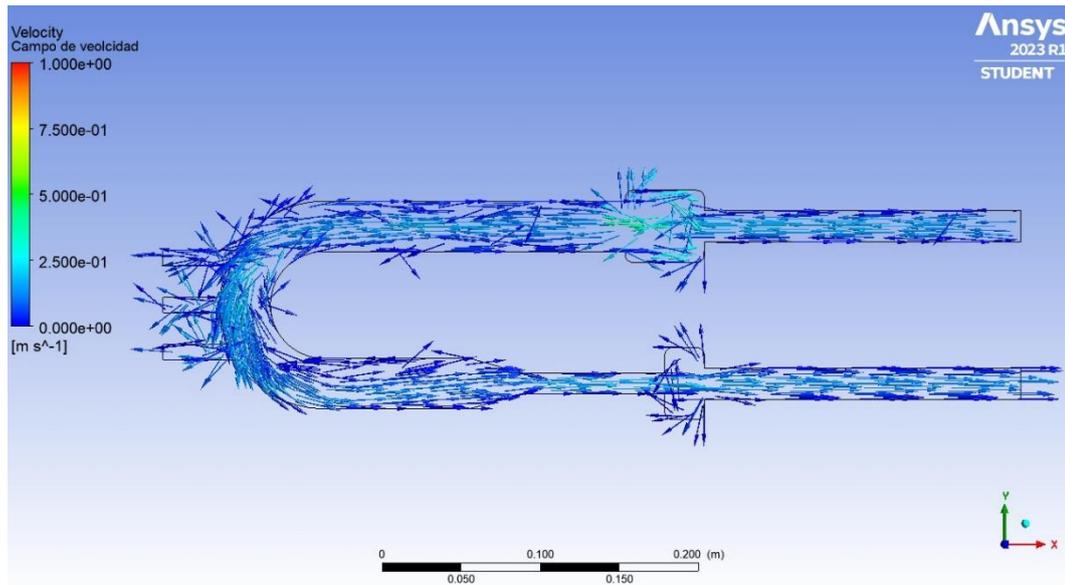


Figura 24. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,5$  s.

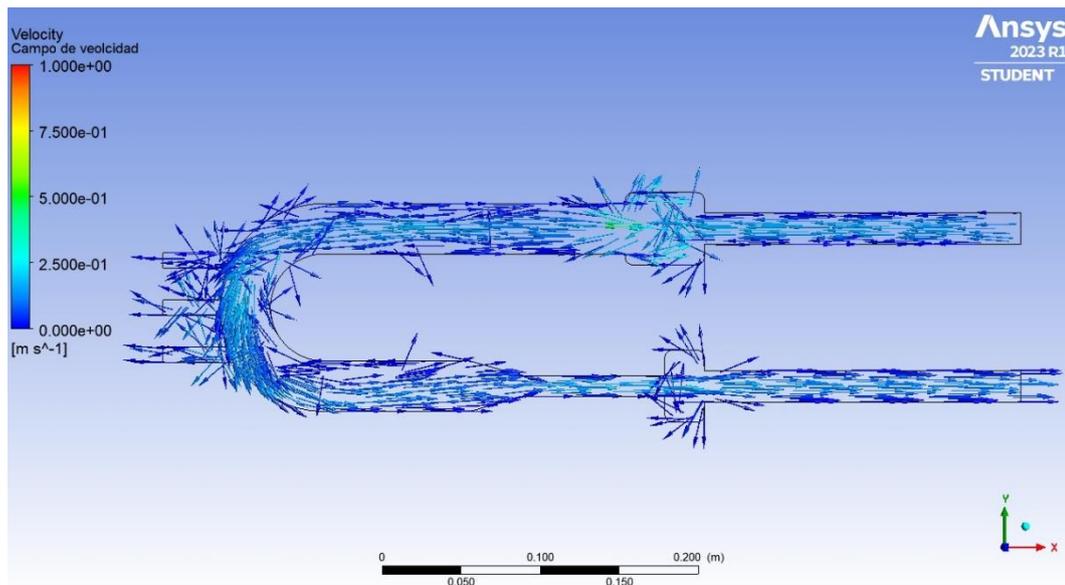


Figura 25. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,6$  s.

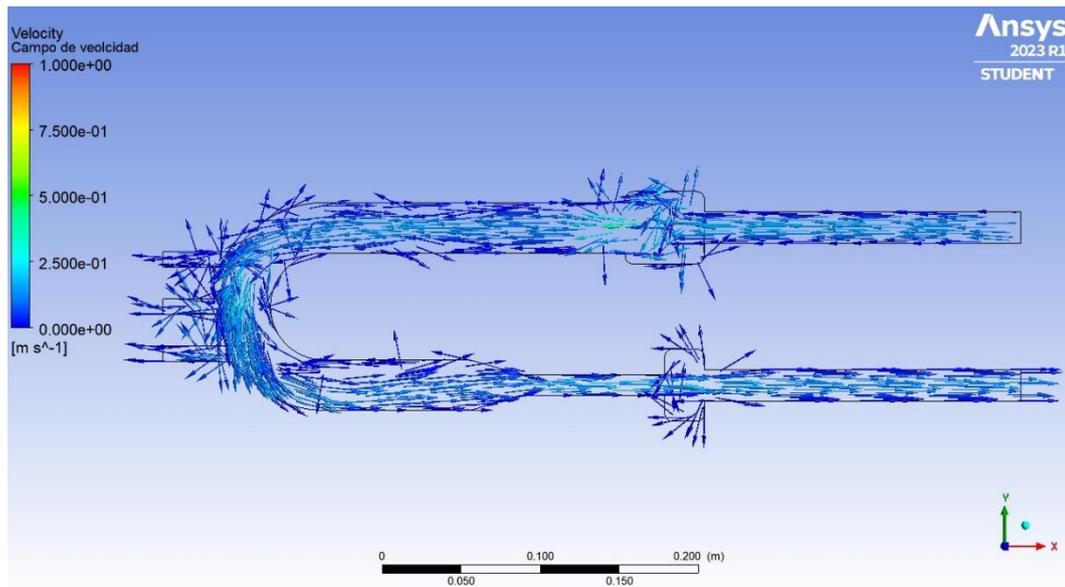


Figura 26. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,7$  s.

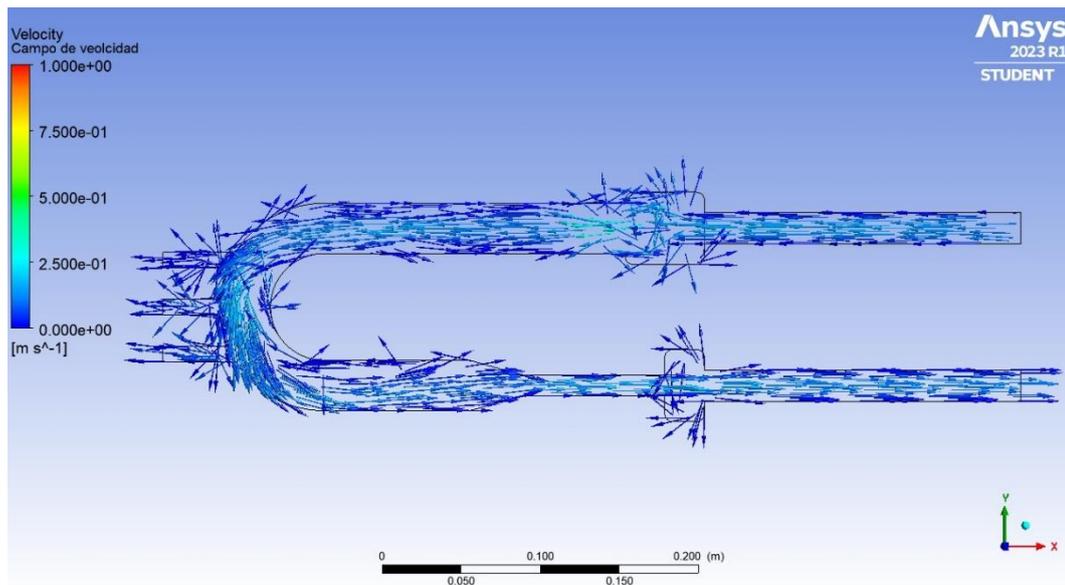


Figura 27. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,8$  s.

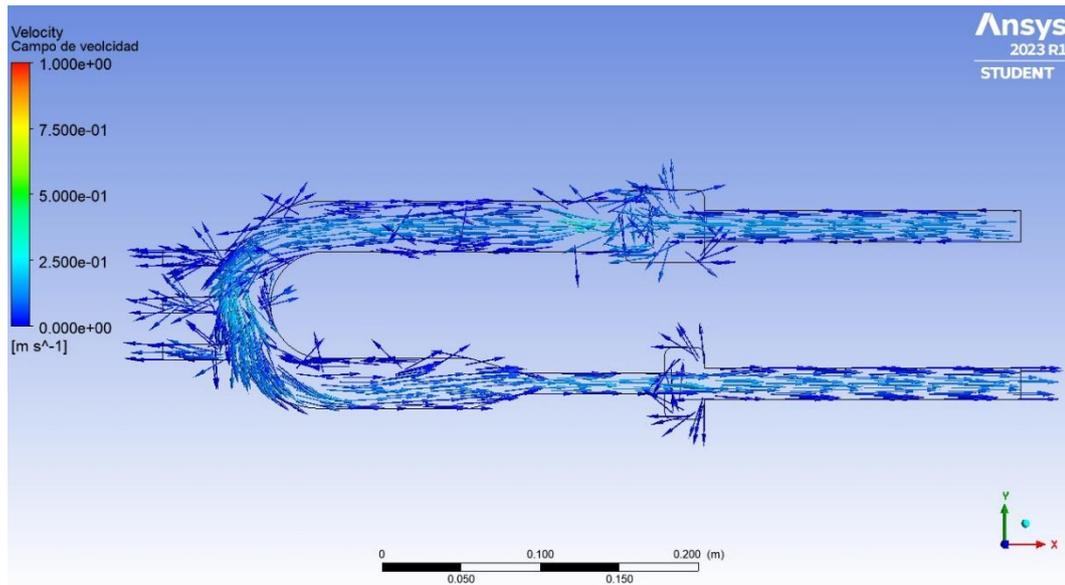


Figura 28. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,9$  s.

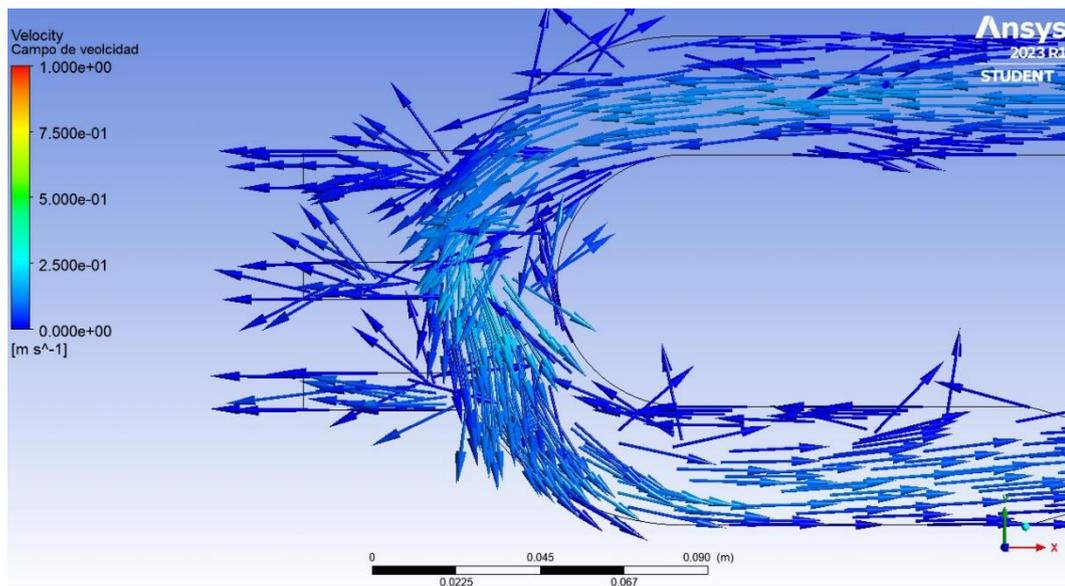


Figura 29. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19$  s.

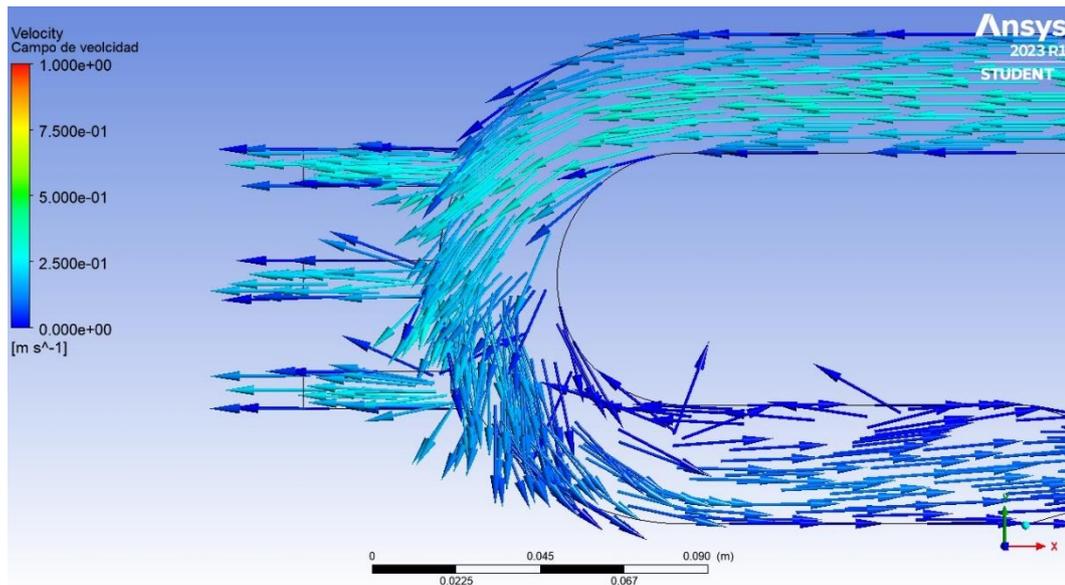


Figura 30. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,1$  s.

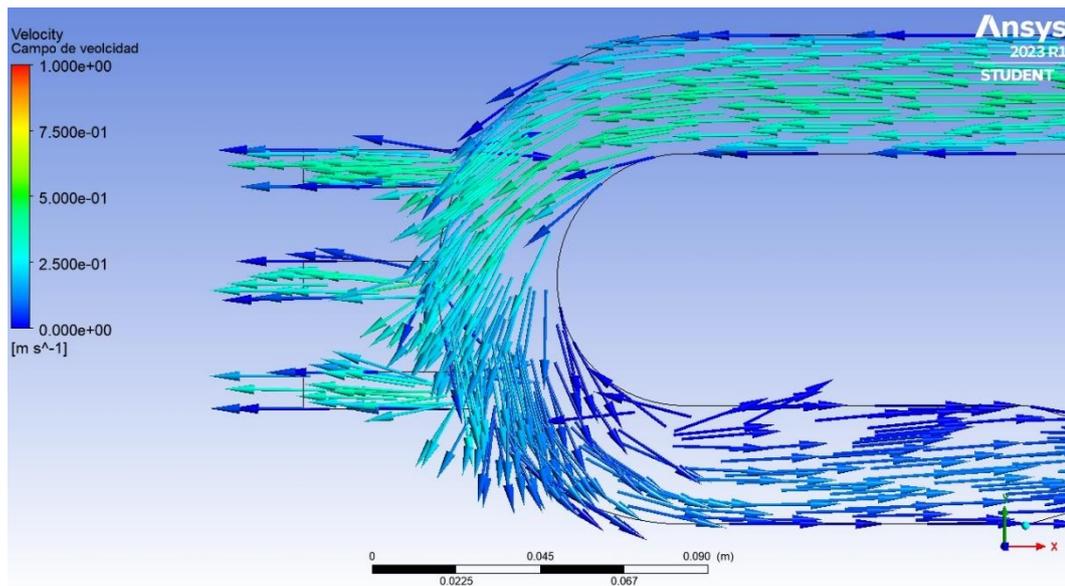


Figura 31. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,2$  s.

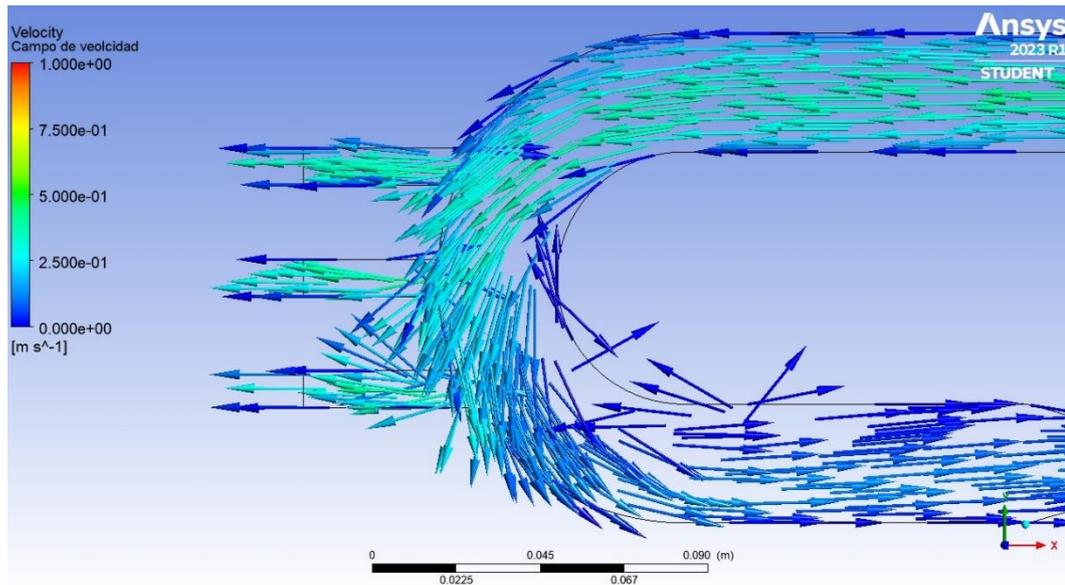


Figura 32. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,3$  s.

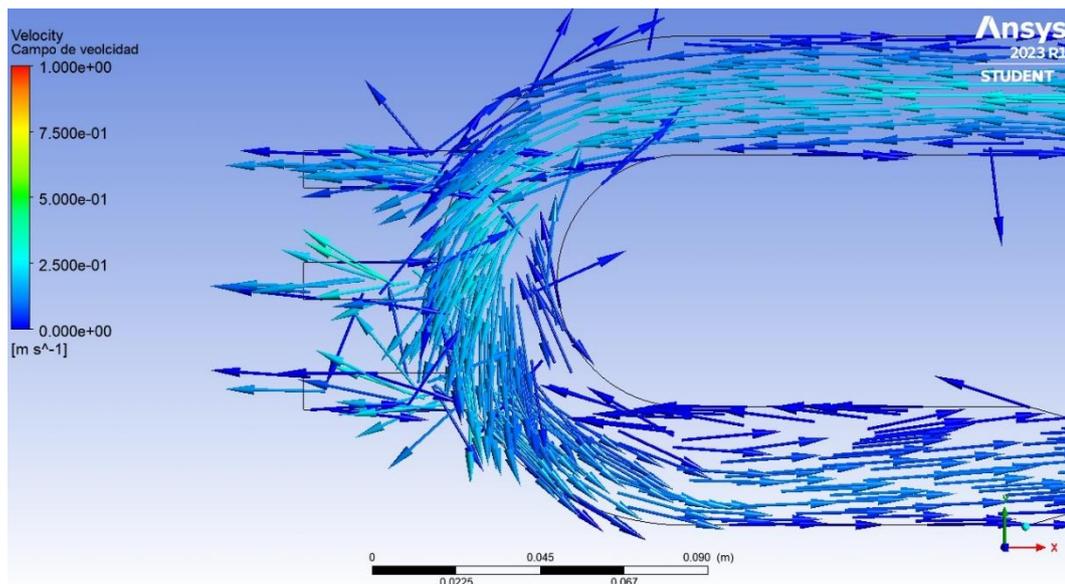


Figura 33. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,4$  s.

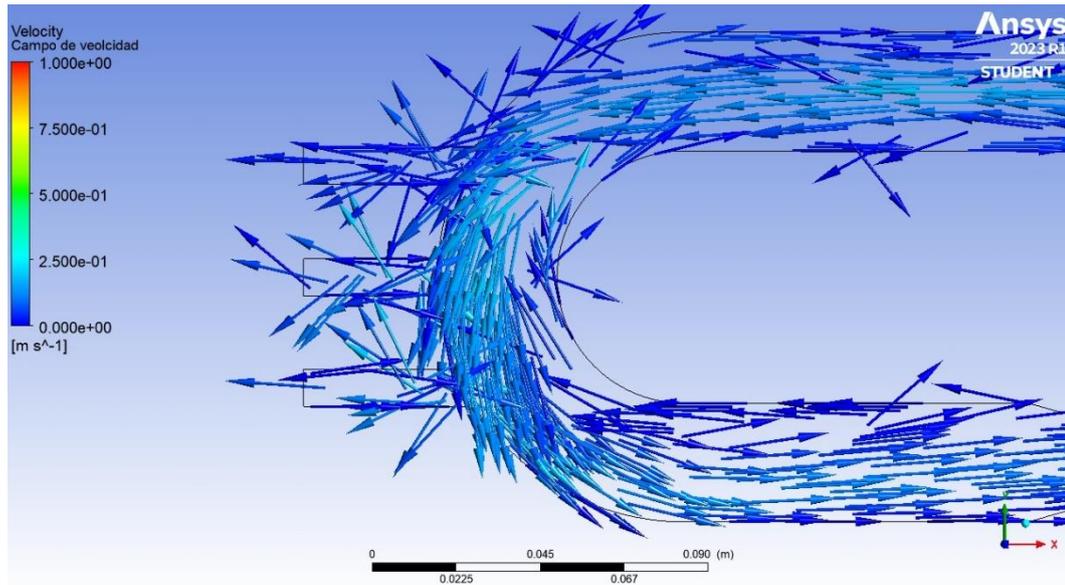


Figura 34. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,5$  s.

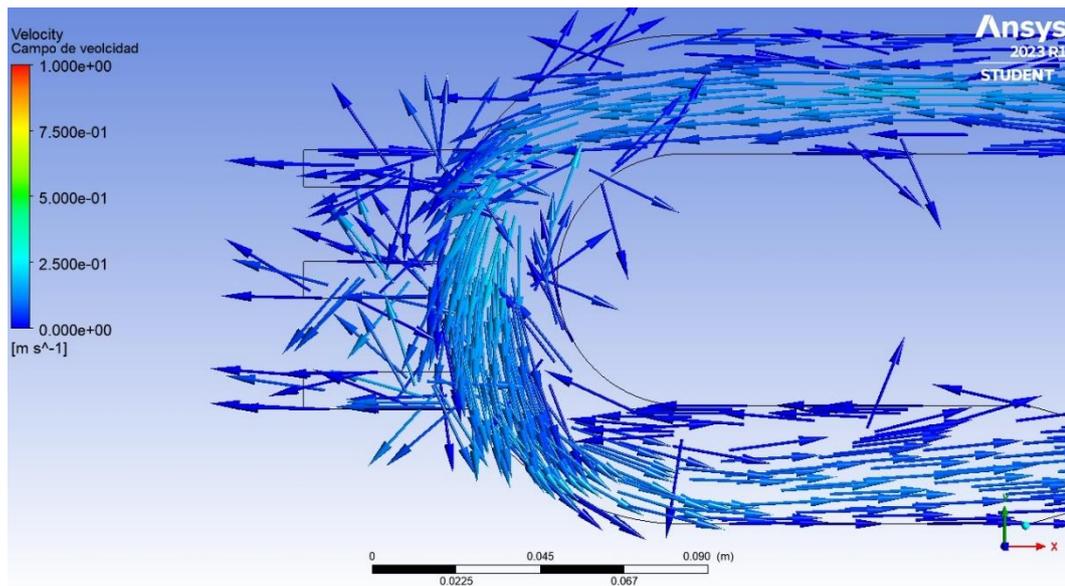


Figura 35. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,6$  s.

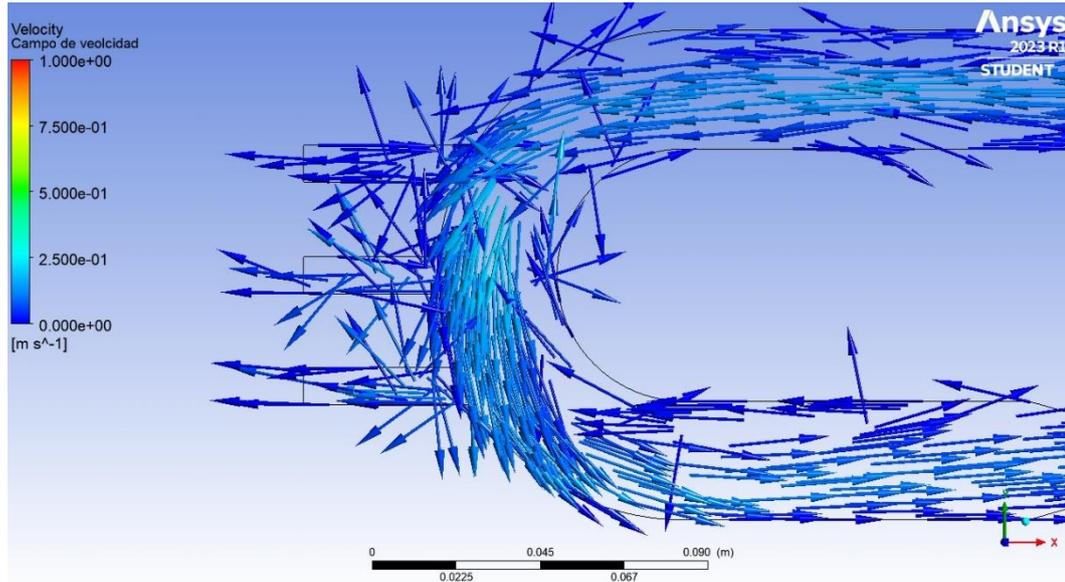


Figura 36. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,7$  s.

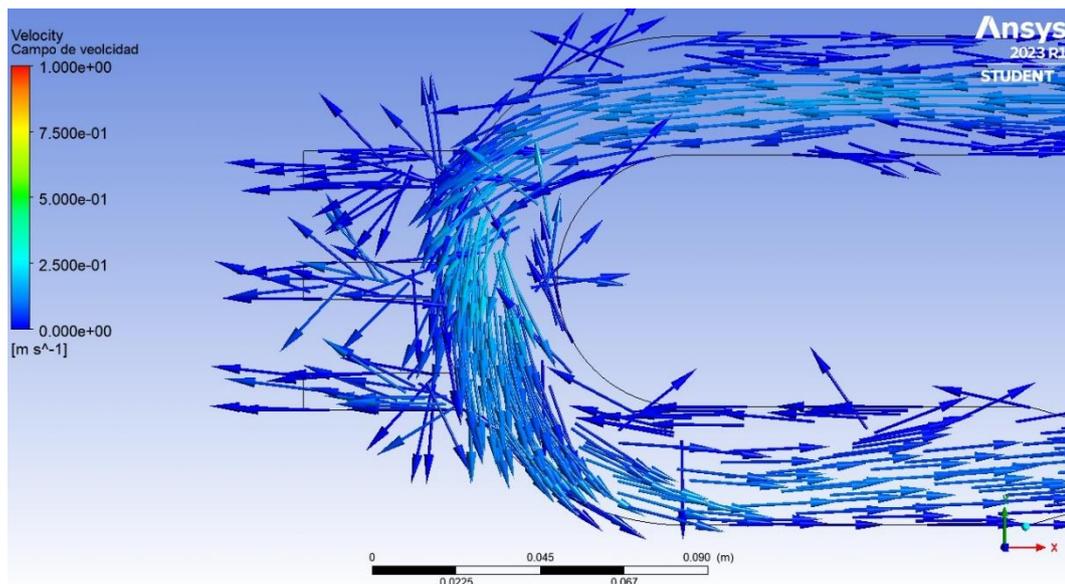


Figura 37. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,8$  s.

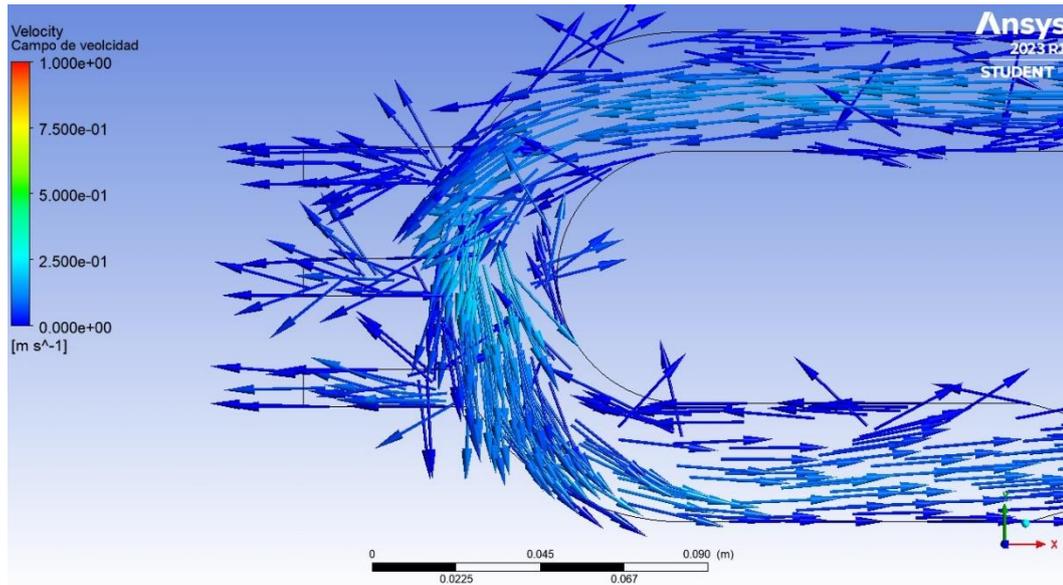


Figura 38. Geometría bidimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,9$  s.

Al comienzo del ciclo, el flujo es lento. En las zonas más periféricas de los depósitos de entrada y salida se observa variedad en las direcciones de los vectores de velocidad, lo que indica que el fluido se encuentra en rotación (Figura 19). También es observable un ligero desorden en algunas zonas de las intersecciones, aunque en una medida mucho menor (Figura 29). En el contorno interior de la representación de la aorta descendente y en ambos contornos de la representación de la aorta ascendente puede apreciarse flujo reverso.

Al empezar a aumentar la velocidad de la entrada, todo el flujo se acelera. De las zonas que antes presentaban rotación solo lo siguen haciendo las más periféricas, mientras que en las más próximas al centro el fluido adquiere una dirección predominante de avance (Figuras 20 a 22). El flujo reverso en la representación de la aorta ascendente desaparece, aunque se mantiene en el contorno interior de la representación de la aorta descendente. Se aprecia más claramente que en instantes anteriores cómo el fluido que circula por la representación de la aorta ascendente se divide en dos partes: las partículas fluidas que se encuentran más cerca del contorno exterior se dirigen hacia las intersecciones, mientras que las partículas fluidas que se encuentran más cerca del contorno interior continúan por la representación de la aorta descendente (Figuras 30 a 32).

Al comenzar a descender la velocidad de la entrada, vuelven a aparecer vectores de velocidad orientados en diversas direcciones en las zonas periféricas de los depósitos y en las intersecciones, indicativo de que el fluido

en esas zonas comienza a rotar. También vuelve a aparecer flujo reverso en la representación de la aorta ascendente. El fluido en la zona central de la geometría decelera, pero se mantiene ordenado (Figuras 23 a 28 y 33 a 38).

La velocidad máxima en la geometría de estudio durante el ciclo es de 0,58 m/s. Aunque esta velocidad es mayor que la velocidad pico en la entrada (0,5 m/s), que es la que se ha utilizado para calcular el número de Reynolds de forma provisional (1079,45), se aprecia sin necesidad de realizar cálculos que el nuevo Reynolds no supera la condición de régimen laminar para flujo interno en tuberías de sección circular (2300). Por tanto, se confirma que la elección del modelo de viscosidad laminar es adecuada para el caso bidimensional.

Para complementar la información que se ha obtenido a partir del campo de velocidades, se presentan a continuación imágenes del contorno de velocidades, tomadas durante el último ciclo simulado, cada 0,1 segundos. Estas, aunque proporcionan menos información que las del campo de velocidades, ya que indican únicamente el módulo de la velocidad y no su dirección y sentido, cuentan con la ventaja de que su sencillez permite una interpretación visual mucho más rápida e intuitiva.

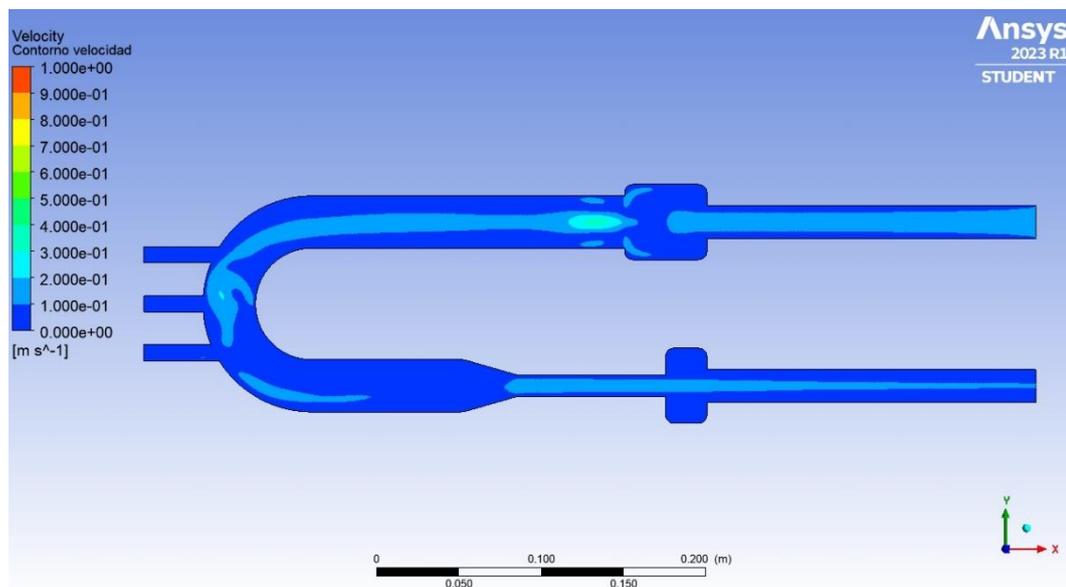


Figura 39. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades.  $t=19$  s.

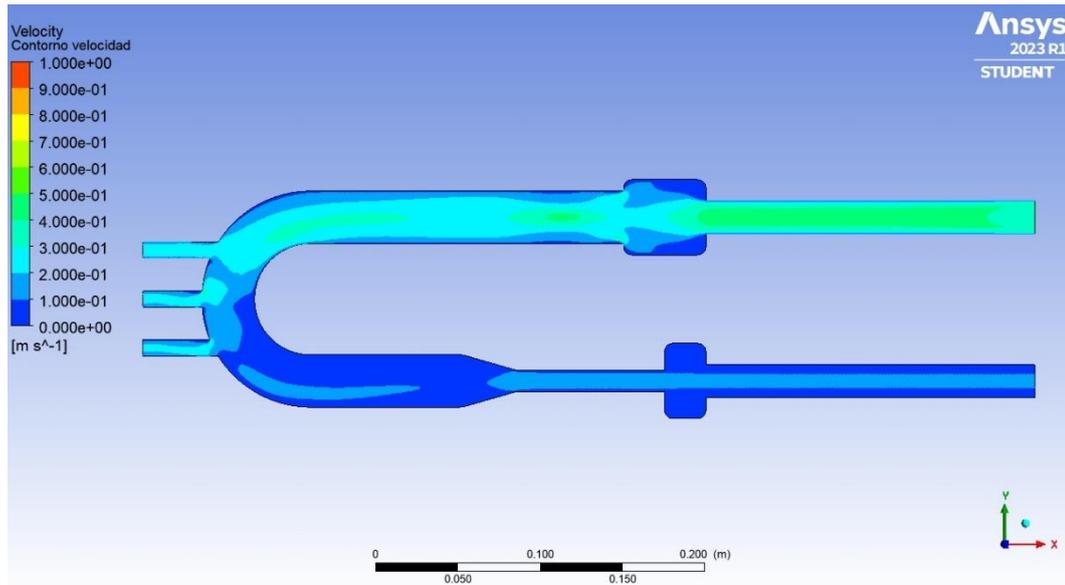


Figura 40. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades.  $t=19,1$  s.

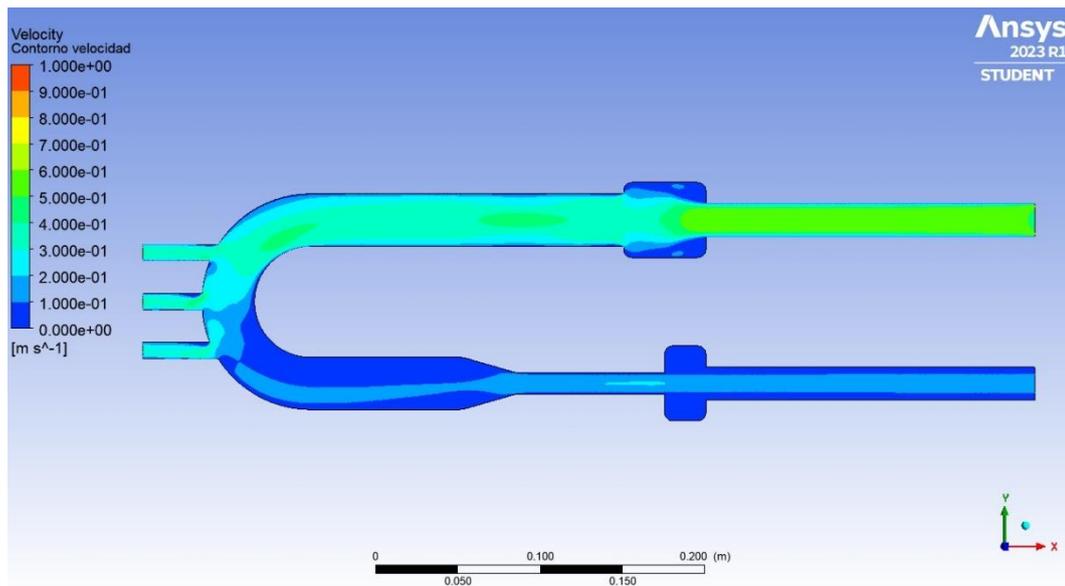


Figura 41. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades.  $t=19,2$  s.

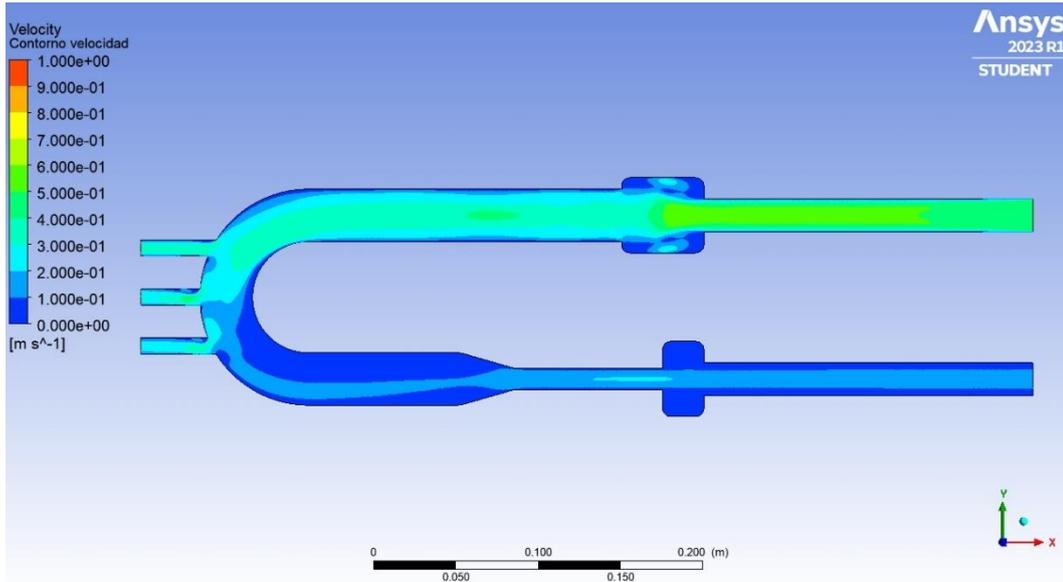


Figura 42. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades.  $t=19,3$  s.

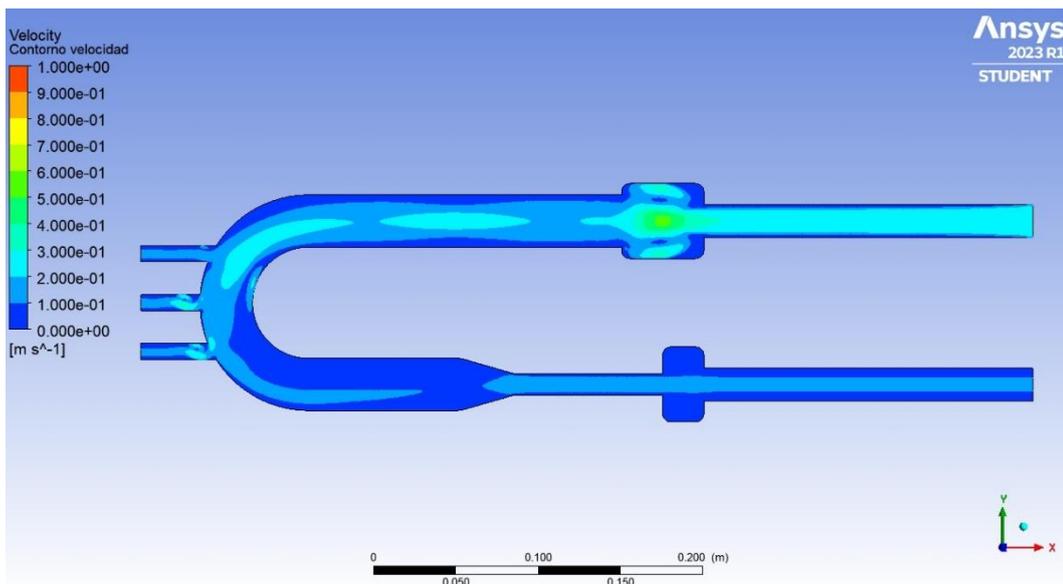


Figura 43. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades.  $t=19,4$  s.

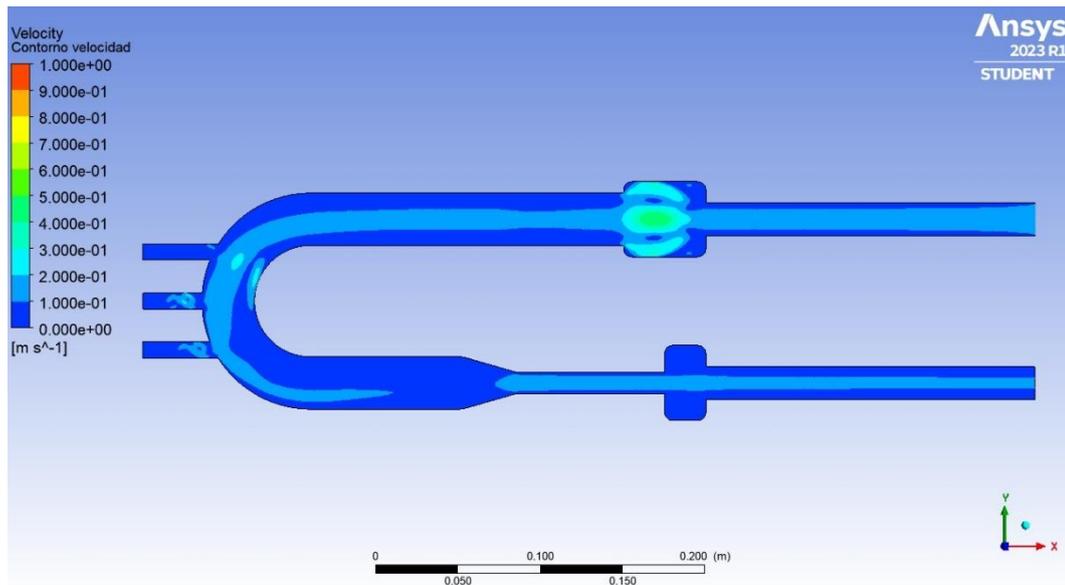


Figura 44. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades.  $t=19,5$  s.

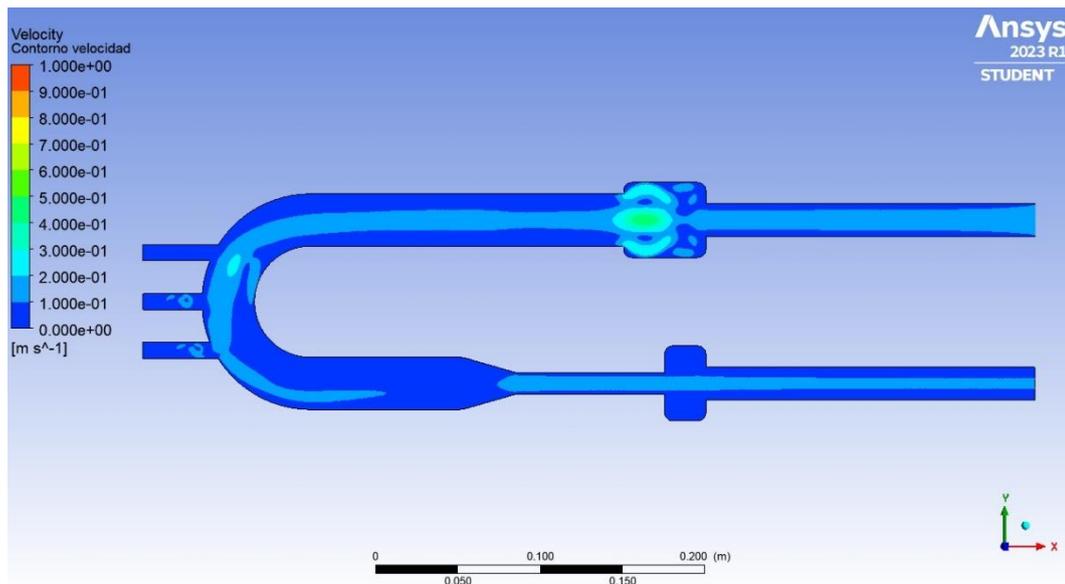


Figura 45. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades.  $t=19,6$  s.

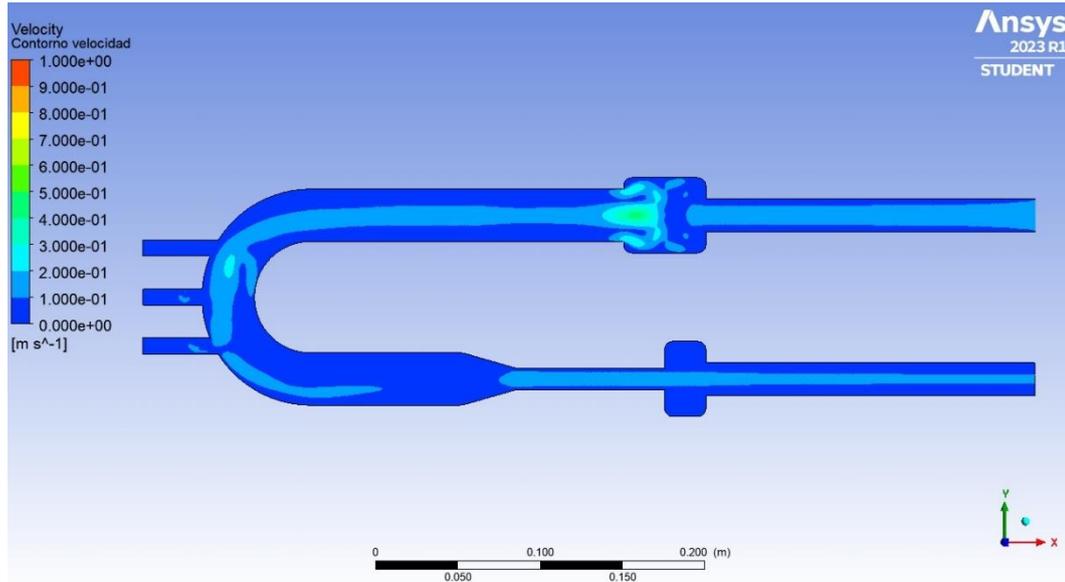


Figura 46. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades.  $t=19,7$  s.

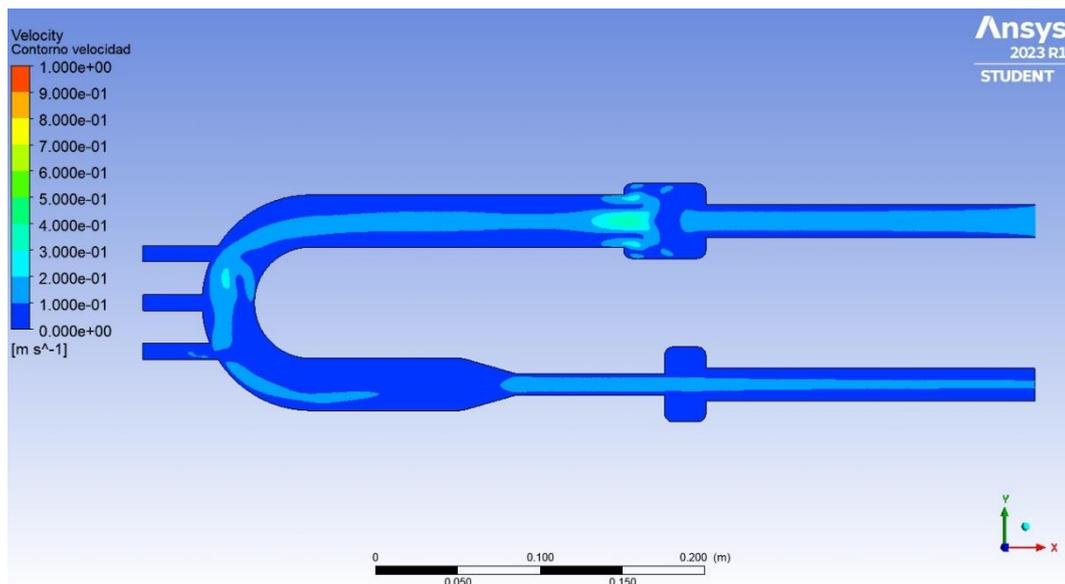


Figura 47. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades.  $t=19,8$  s.

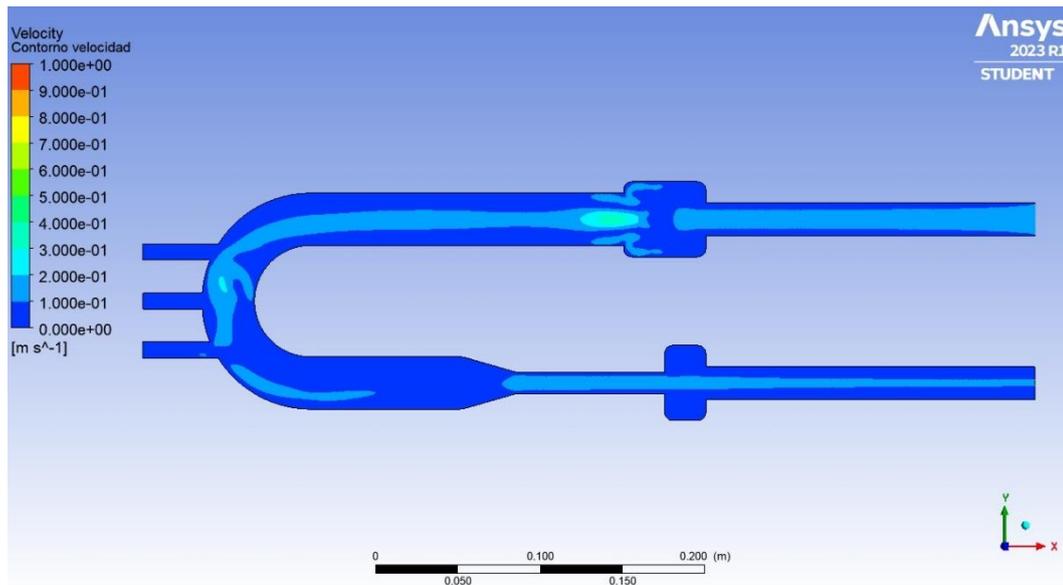


Figura 48. Geometría bidimensional. Contorno de velocidades.  $t=19,9$  s.

Como ya se ha comentado, al inicio del ciclo el flujo es en general lento. Sin embargo, en las imágenes del contorno de velocidades se aprecia algo mejor que la velocidad del fluido en la parte central de la geometría es significativamente mayor que en la periferia (Figura 39).

Al comenzar a aumentar la velocidad en la entrada, el flujo se acelera en toda la zona que representa la aorta ascendente y las intersecciones de la aorta con otras arterias, exceptuando las partes más externas del depósito de entrada. Sin embargo, en la zona correspondiente a la aorta descendente apenas se aprecia variación (Figuras 40 a 42).

Cuando la velocidad en la entrada disminuye, la velocidad del fluido vuelve a disminuir en todas las zonas en las que había aumentado previamente, a excepción de un área en el depósito de entrada en la que el fluido mantiene una celeridad elevada en comparación con el resto del volumen de estudio. Por la forma redondeada de esta área, y teniendo también en cuenta la información proporcionada anteriormente por las imágenes del campo de velocidades, se puede inferir que en ella el fluido se encuentra en rotación. Lo mismo ocurre, aunque en menor medida, en unas pequeñas áreas en las intersecciones (Figuras 44 y 45).

En los últimos momentos del ciclo, cuando la velocidad en la entrada se estabiliza, estas áreas van perdiendo velocidad, asemejándose cada vez más a las zonas que las rodean (Figuras 46 a 48).

Se presentan a continuación imágenes, tomadas durante el último ciclo simulado, cada 0,1 segundos, de los vórtices en el volumen de estudio, analizados según el criterio Q. El color rojo representa la presencia de vórtices, mientras que el color azul representa su ausencia.

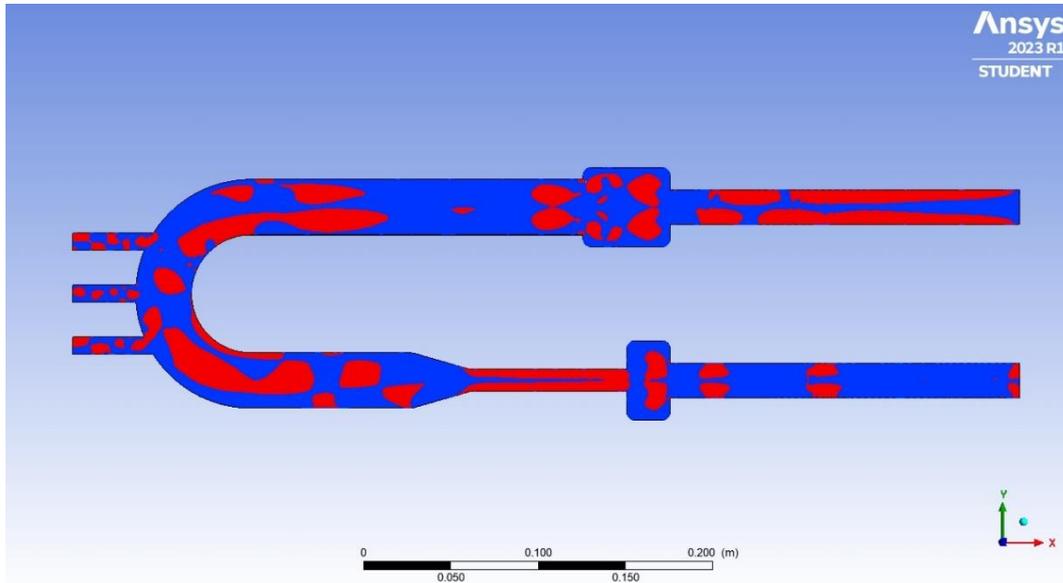


Figura 49. Geometría bidimensional. Vórtices.  $t=19$  s.

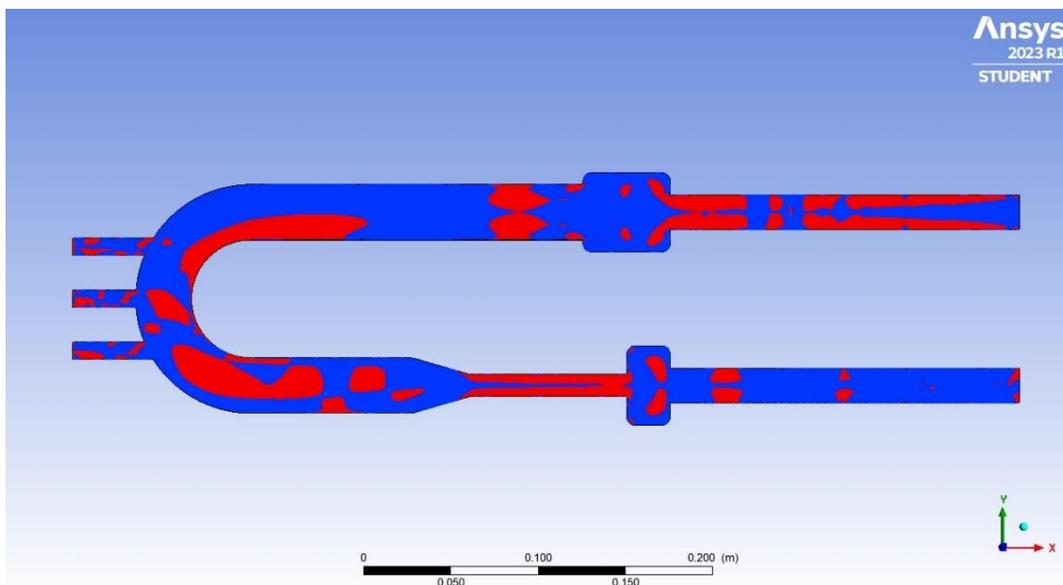


Figura 50. Geometría bidimensional. Vórtices.  $t=19,1$  s.

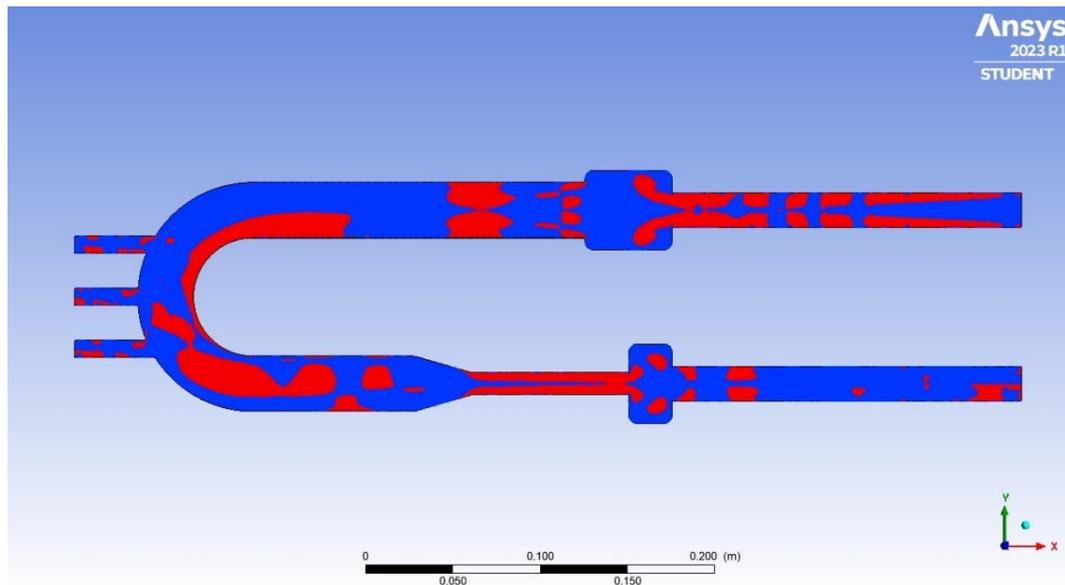


Figura 51. Geometría bidimensional. Vórtices.  $t=19,2$  s.

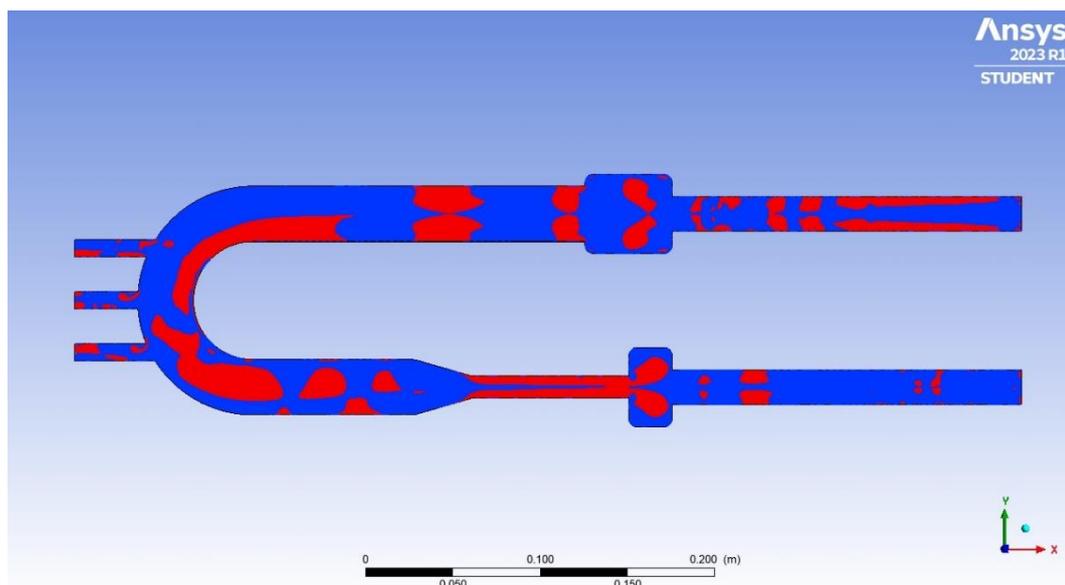


Figura 52. Geometría bidimensional. Vórtices.  $t=19,3$  s.

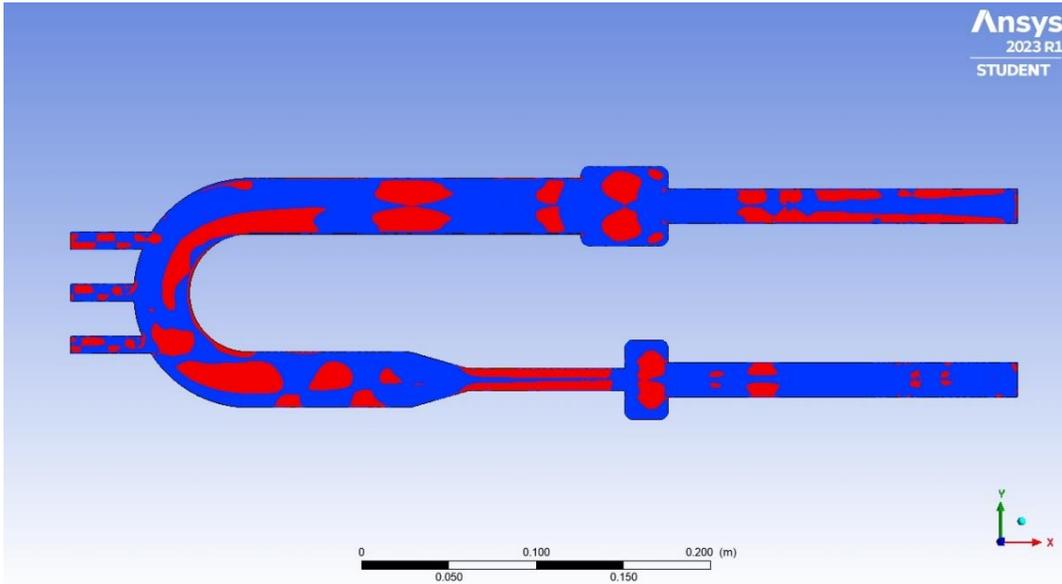


Figura 53. Geometría bidimensional. Vórtices.  $t=19,4$  s.

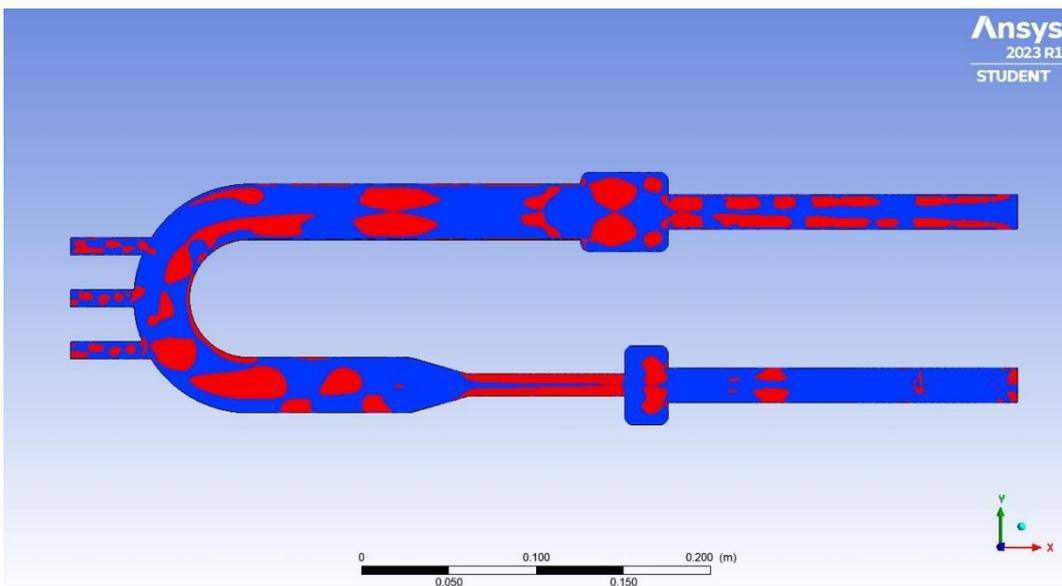


Figura 54. Geometría bidimensional. Vórtices.  $t=19,5$  s.

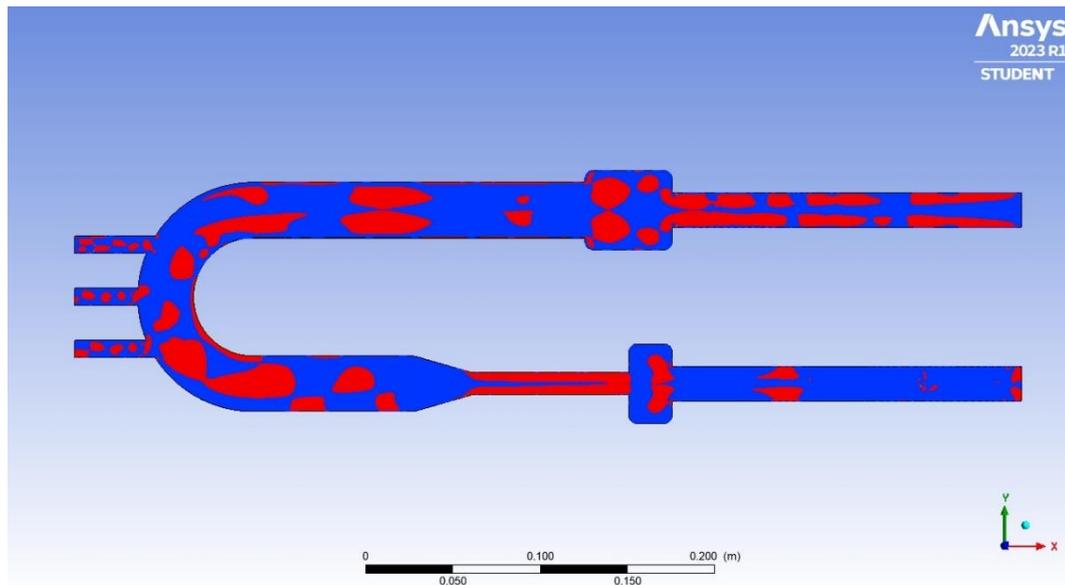


Figura 55. Geometría bidimensional. Vórtices.  $t=19,6$  s.

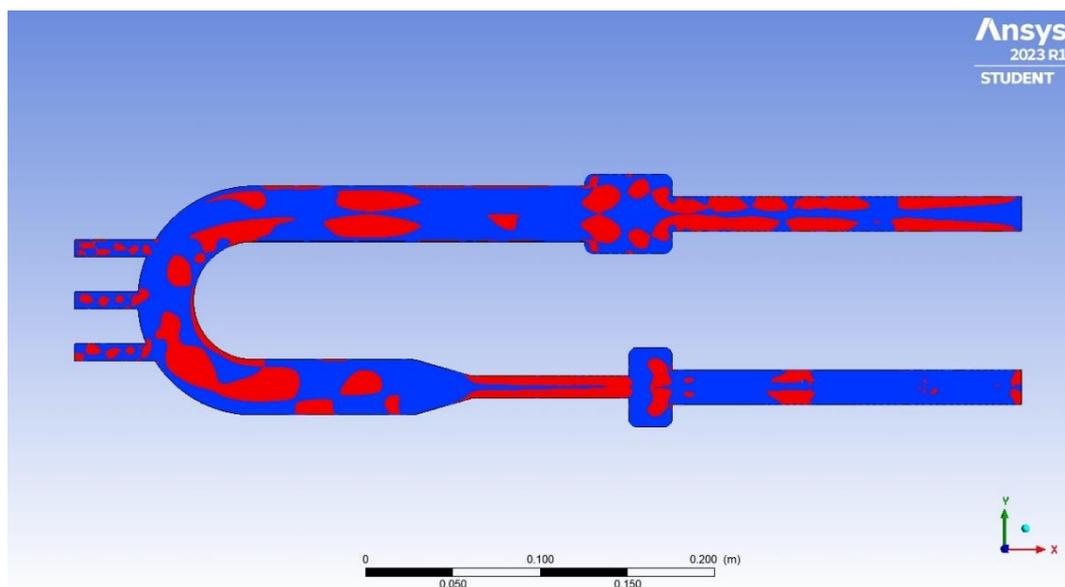


Figura 56. Geometría bidimensional. Vórtices.  $t=19,7$  s.

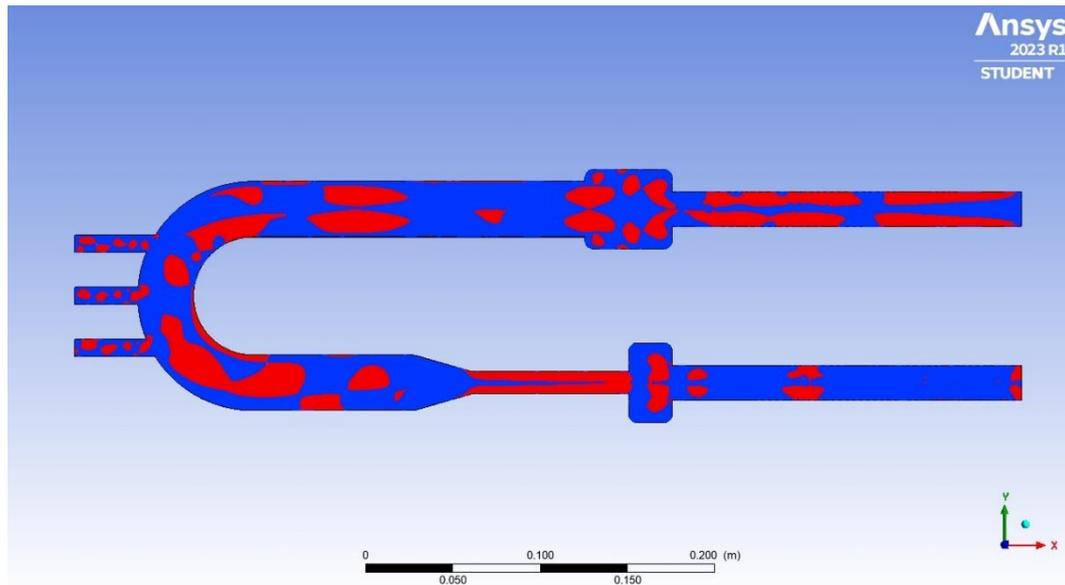


Figura 57. Geometría bidimensional. Vórtices.  $t=19,8$  s.

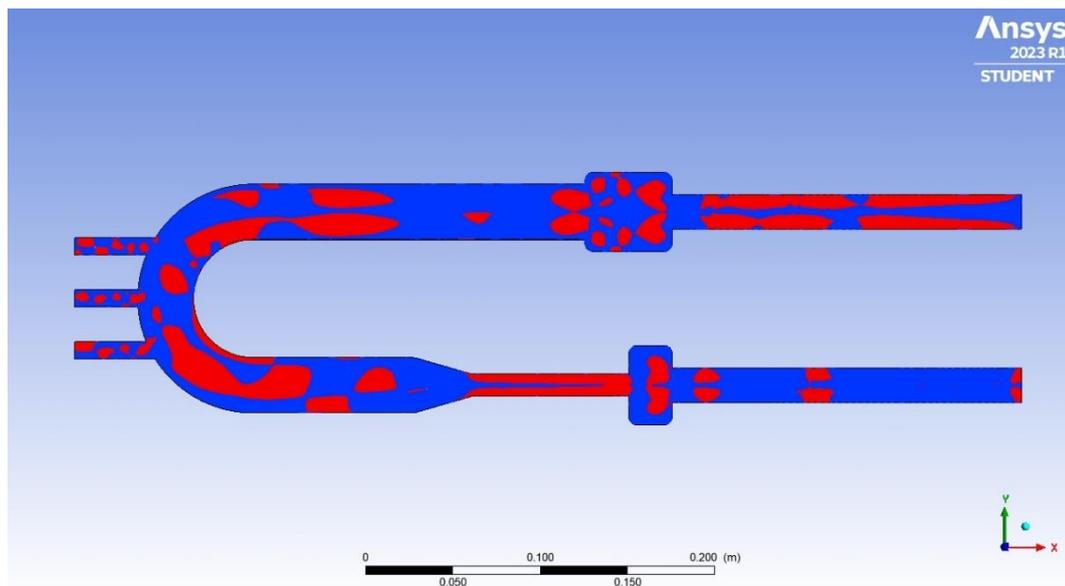


Figura 58. Geometría bidimensional. Vórtices.  $t=19,9$  s.

Hay que tener en cuenta que los criterios actuales de detección de vórtices, incluido el criterio  $Q$ , no se caracterizan por tener una tasa de acierto especialmente elevada, y tampoco distinguen la intensidad de los vórtices, sino únicamente su presencia o ausencia. Por ello, hay que corroborar la información que proporcionan las imágenes de vórtices con la que proporcionan las imágenes del campo de velocidades.

Al comienzo del ciclo se aprecian grandes vórtices en el conducto de entrada, el depósito de entrada, la representación del arco aórtico, parte del conducto

de salida y el depósito de salida. También se aprecian pequeños vórtices en las intersecciones. Observando las imágenes del campo de velocidades se aprecia que, de estos, los únicos vórtices relevantes son los del depósito de entrada, el depósito de salida, las zonas más próximas al contorno de la representación del arco aórtico y las intersecciones (Figuras 49 y 19).

Al aumentar la velocidad en la entrada, los vórtices del depósito de entrada desaparecen (el fluido deja de rotar y adquiere una velocidad predominante de avance). Aparecen dos grandes vórtices en la representación de la aorta ascendente que, observando las imágenes del campo de velocidades, se desestiman. Los vórtices del contorno externo de la representación de la aorta ascendente desaparecen también, y el tamaño los pequeños vórtices de las intersecciones disminuye hasta prácticamente desaparecer. Los únicos vórtices que quedan presentes son los del depósito de salida, que también ven reducido su tamaño (Figuras 40 a 52 y 20 a 22).

Cuando la velocidad en la entrada comienza a descender, poco a poco se vuelven a formar vórtices en las zonas en las que habían desaparecido, y los vórtices del depósito de salida recuperan su tamaño inicial (Figuras 53 a 58 y 23 a 28).

## Aproximación lagrangiana

La aproximación lagrangiana a un campo fluido es la descripción del campo mediante la especificación de las propiedades de partículas del fluido que se desplazan a través del campo [28]. En este apartado se describirán las trayectorias de dichas partículas.

Se realiza una inyección de partículas sin masa en la entrada de la geometría en el instante  $t = 10$  s. A continuación se presenta una imagen de las trayectorias de las partículas, 10 segundos después de su inyección, coloreadas según su tiempo de residencia en el volumen de estudio.

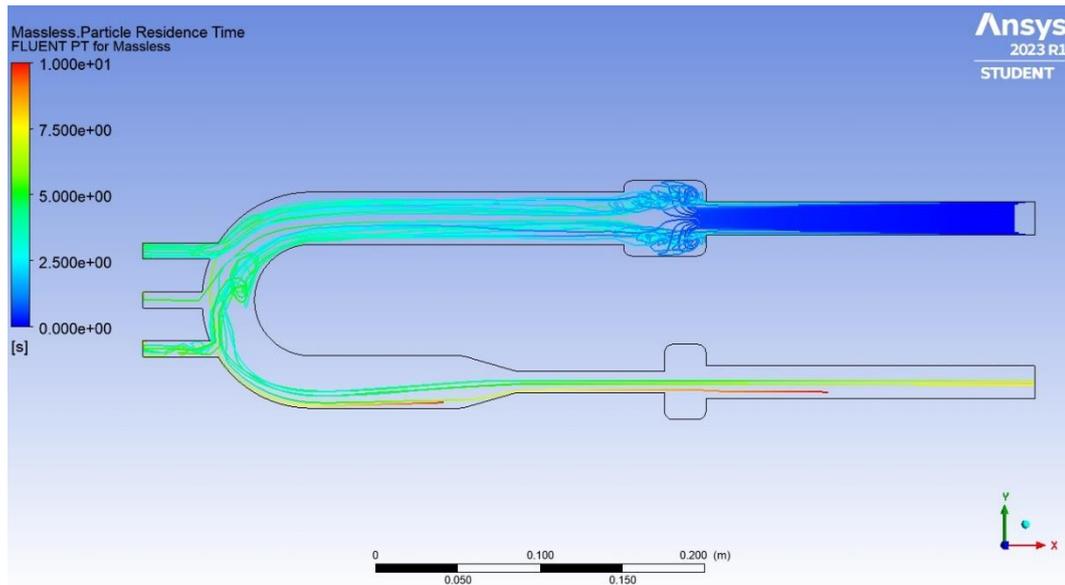


Figura 59. Geometría bidimensional. Trayectorias de las partículas.

Las partículas parten de la entrada de forma ordenada hasta llegar al depósito de entrada. Allí, incluso aquellas que se posicionan más al centro de la geometría describen una trayectoria rizada hasta abandonar el depósito, en concordancia con el análisis de vórtices realizado anteriormente. Las partículas siguen su camino por la representación de la aorta ascendente de nuevo de forma ordenada. Hasta aquí apenas se aprecian diferencias en la velocidad de las partículas en función de su posición radial: todas las partículas, salvo aquellas situadas muy en los extremos, presentan aproximadamente los mismos tiempos de residencia al alcanzar los mismos planos transversales. Al llegar a las intersecciones, entre 4 y 5 segundos tras su inserción, la mayoría de las partículas abandonan la geometría de estudio. Se puede observar que las partículas que abandonan la geometría de estudio a través de la representación de la arteria carótida común izquierda y de la arteria subclavia izquierda (la segunda y la tercera intersección) describen una trayectoria rizada antes de hacerlo. Las partículas restantes continúan por la representación de la aorta descendente. Ahora sí se aprecian diferencias en la velocidad de las partículas en función de su posición radial: las partículas posicionadas en el centro tienen una velocidad mayor, y abandonan la geometría de estudio unos 7 segundos después de su inserción; mientras que las partículas más periféricas tienen una velocidad menor, y siguen en la geometría de estudio cuando la simulación termina, 10 segundos después de su inserción.

Para simular la adquisición de resultados por 4D Flow mediante la simulación de trayectorias de partículas es necesario que las partículas recorran la geometría de estudio en su totalidad, lo cual no se ha conseguido mediante una única inyección en la entrada. Por tanto, es necesario realizar más

inyecciones de partículas en otros puntos. Para ello, es conveniente tener en cuenta, entre otros factores, el análisis de vórtices que se ha realizado anteriormente: las posiciones en las que hay vórtices permanentemente, como las zonas más alejadas del centro de los depósitos, requieren de una inyección de partículas propia, ya que no se pueden alcanzar inyectando partículas en otros puntos.

*Ansys Fluent* permite realizar inyecciones multitudinarias de partículas de forma sencilla solo en las superficies o contornos delimitantes de la geometría de estudio (entrada, salidas y pared arterial). Como ya se ha visto, la inyección de partículas en la entrada no es suficiente y se requieren inyecciones en puntos intermedios. Por tanto, quedan planteadas como líneas de trabajo futuro la búsqueda de un *software* que permita realizar las inyecciones necesarias para cubrir la geometría de estudio completa de forma sencilla (o en caso de que no exista, su desarrollo), así como la realización de dichas inyecciones.

## 2.4.2 Simulación tridimensional

### Aproximación euleriana

En este apartado se describirán el campo de velocidades y la vorticidad del fluido de la geometría tridimensional. Se comienza presentando las imágenes del campo de velocidades del fluido, así como de una vista detalle del mismo en la zona próxima a las representaciones de las intersecciones de la aorta con otras arterias, tomadas durante el último ciclo simulado, cada 0,1 segundos y con un factor de reducción de 75.

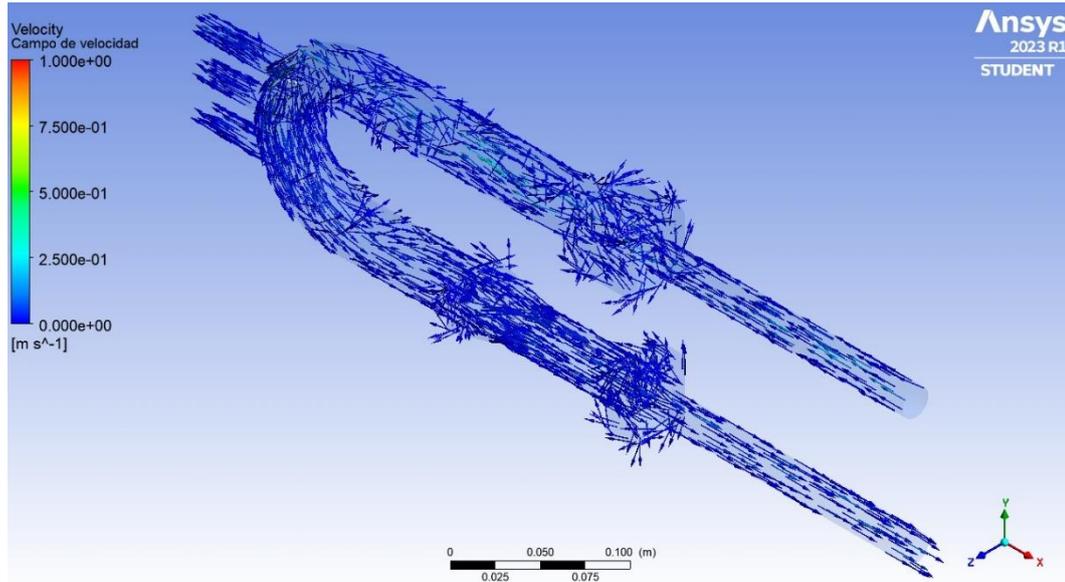


Figura 60. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19$  s.

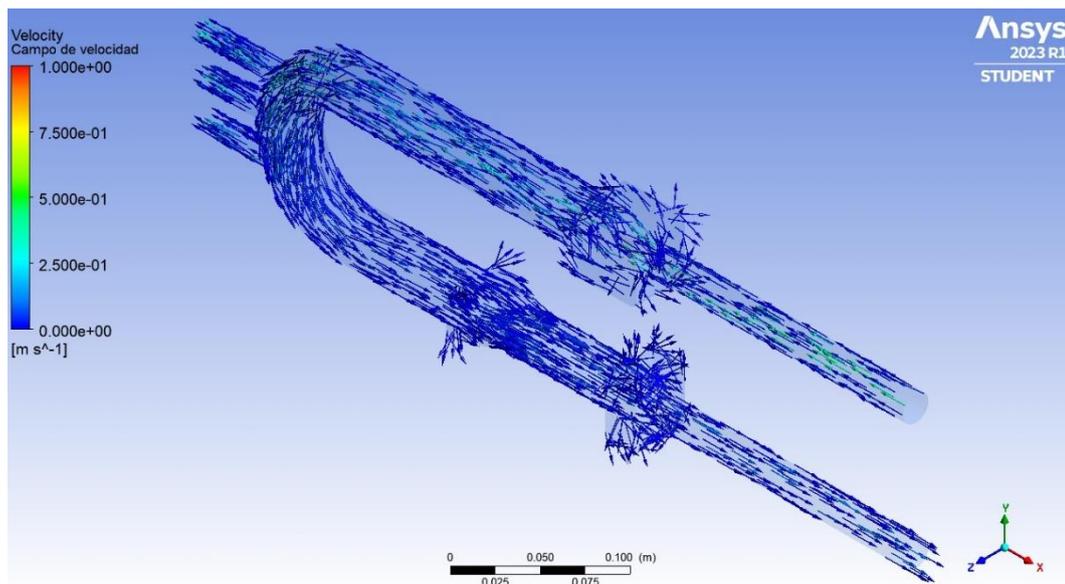


Figura 61. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,1$  s.

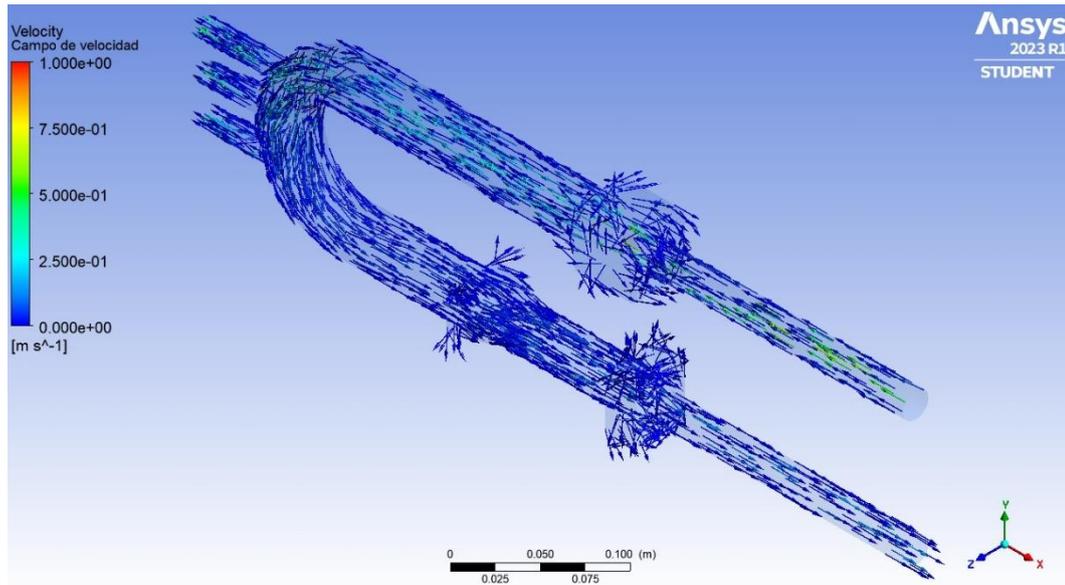


Figura 62. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,2$  s.

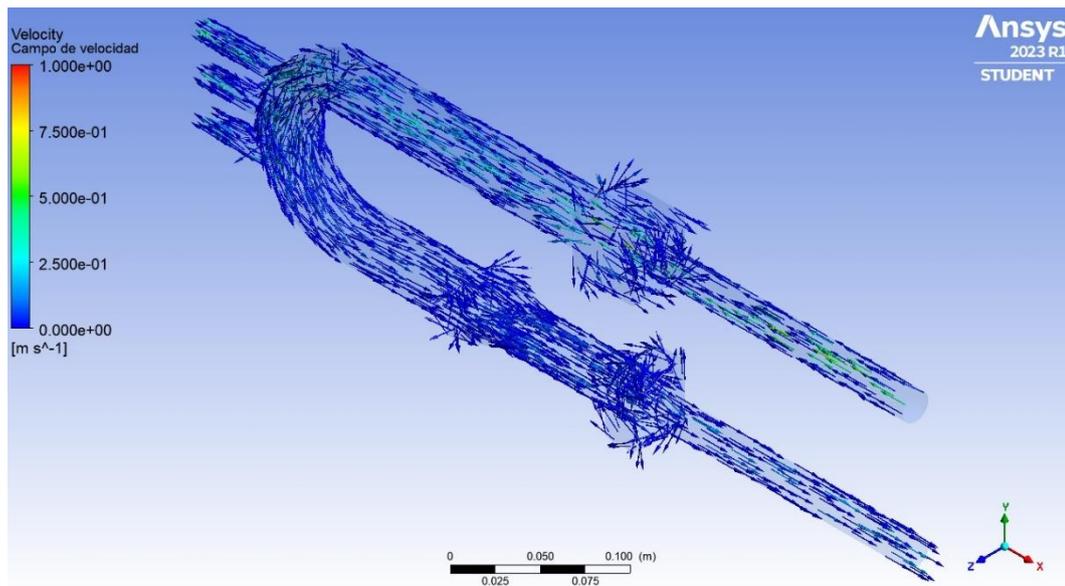


Figura 63. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,3$  s.

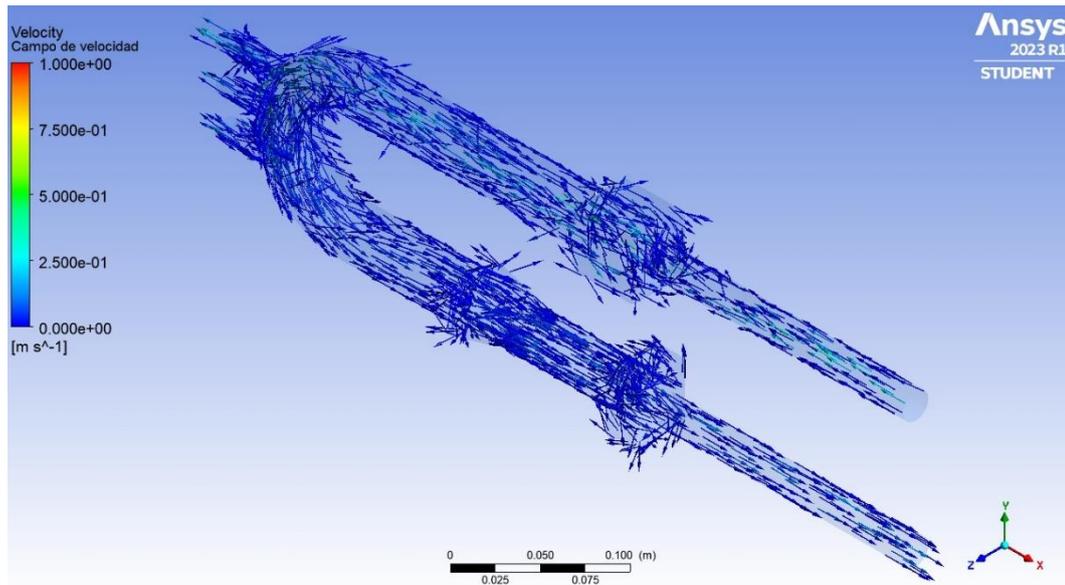


Figura 64. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,4$  s.

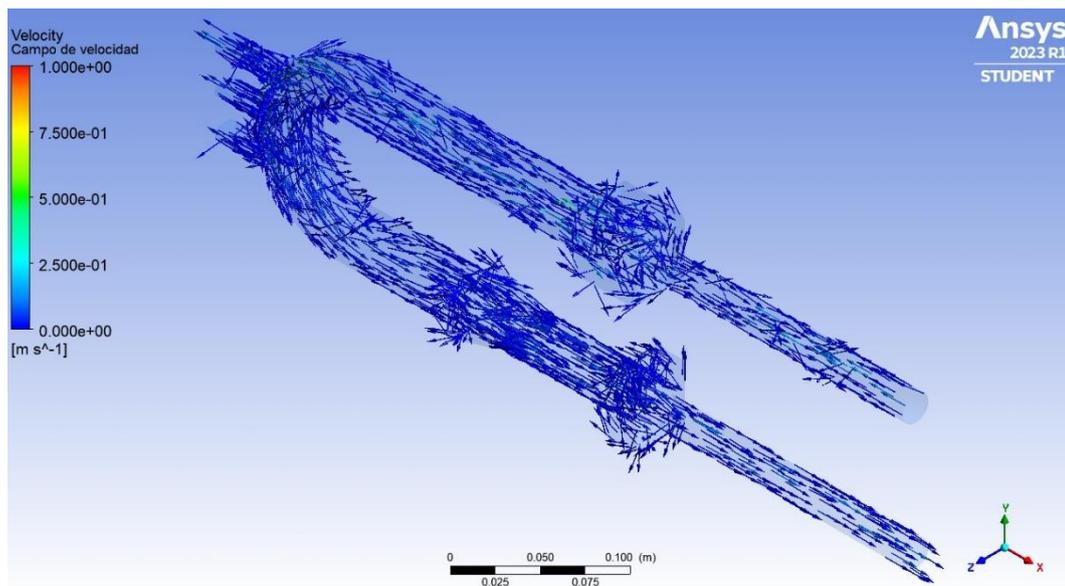


Figura 65. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,5$  s.

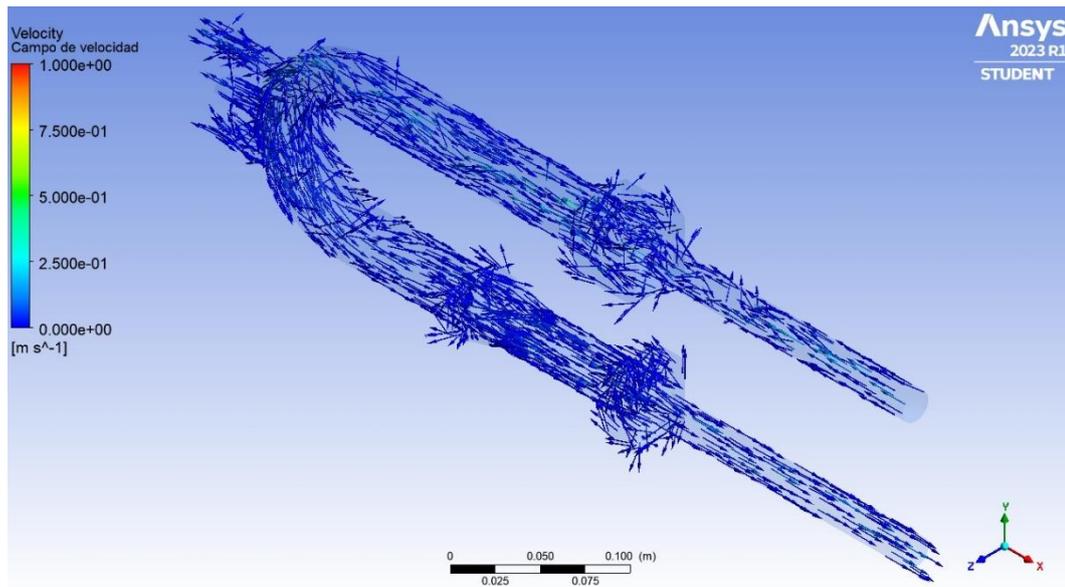


Figura 66. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,6$  s.

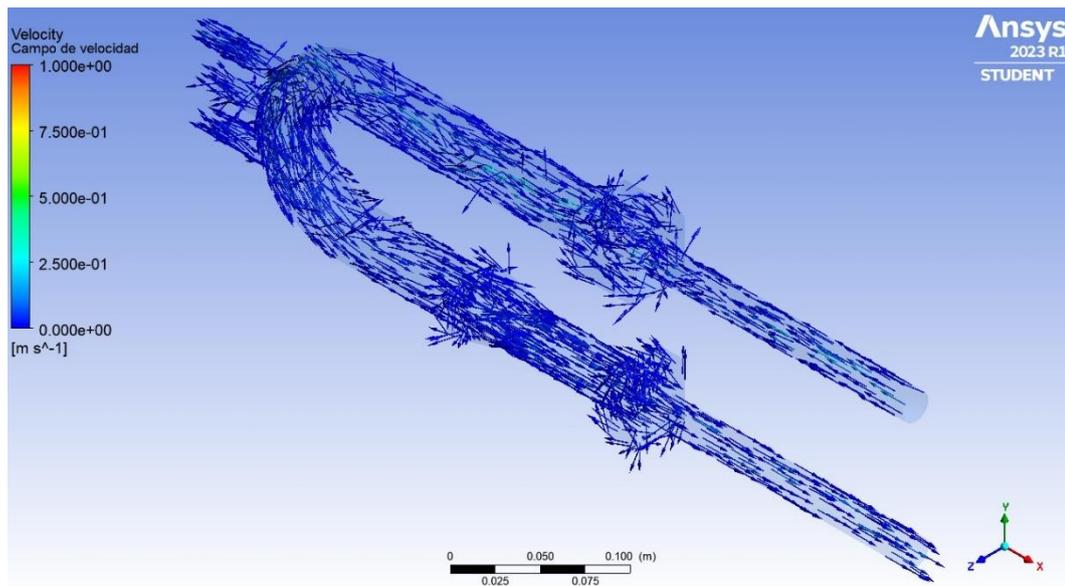


Figura 67. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,7$  s.

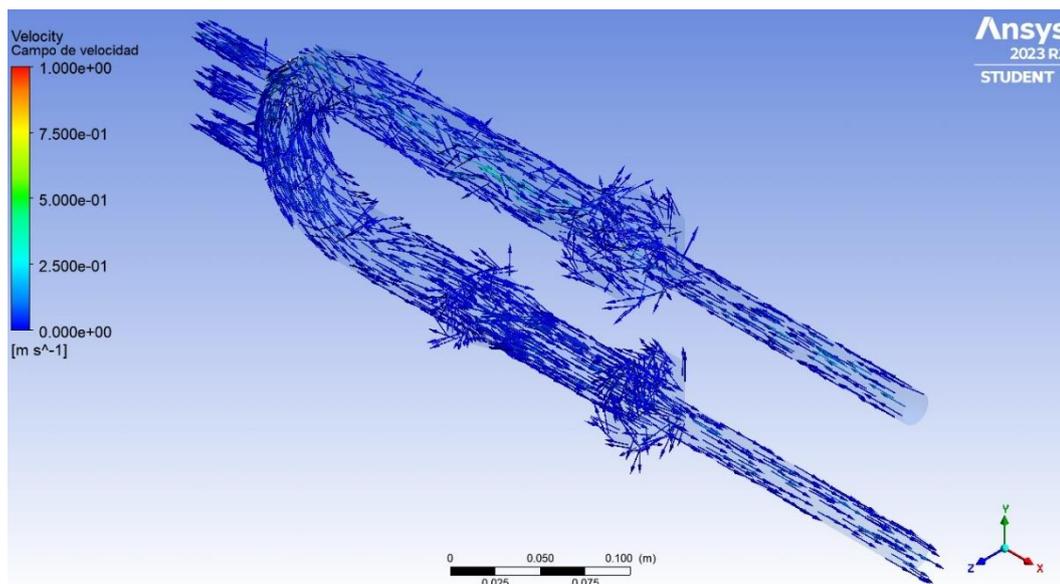


Figura 68. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,8$  s.

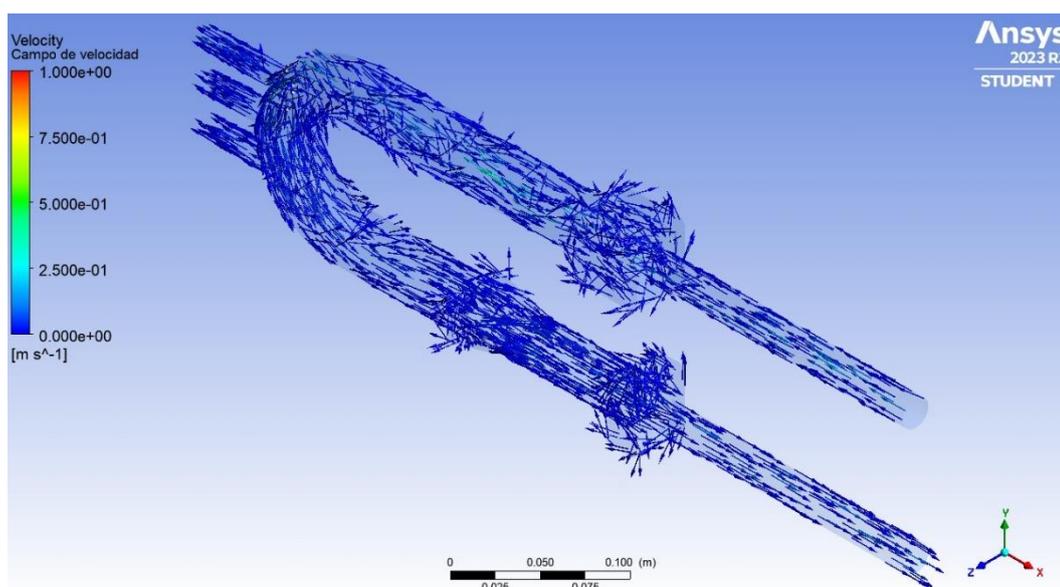


Figura 69. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista general.  $t=19,9$  s.

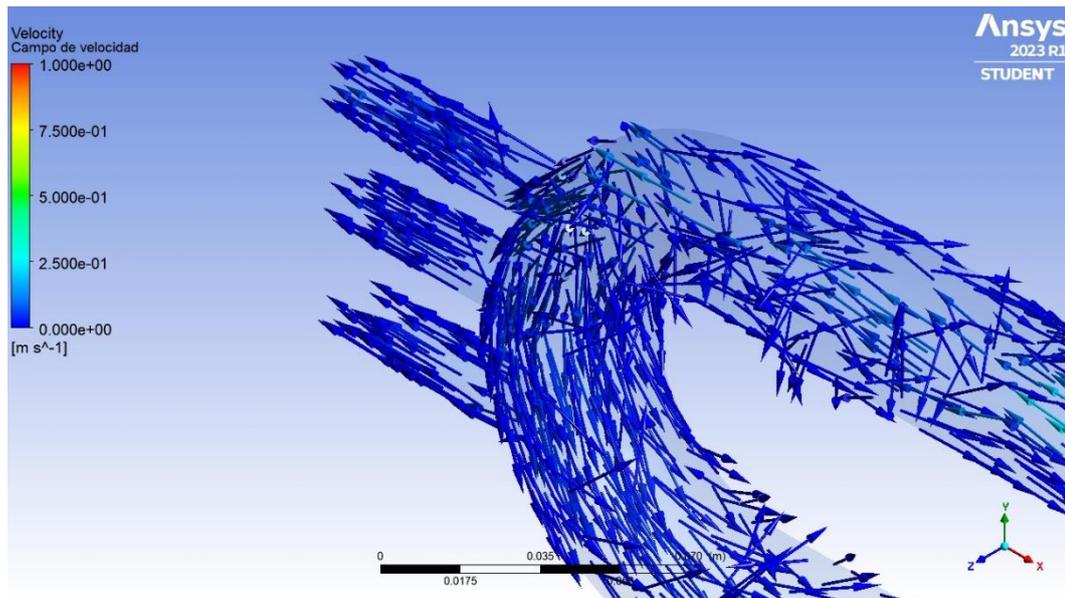


Figura 70. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19$  s.

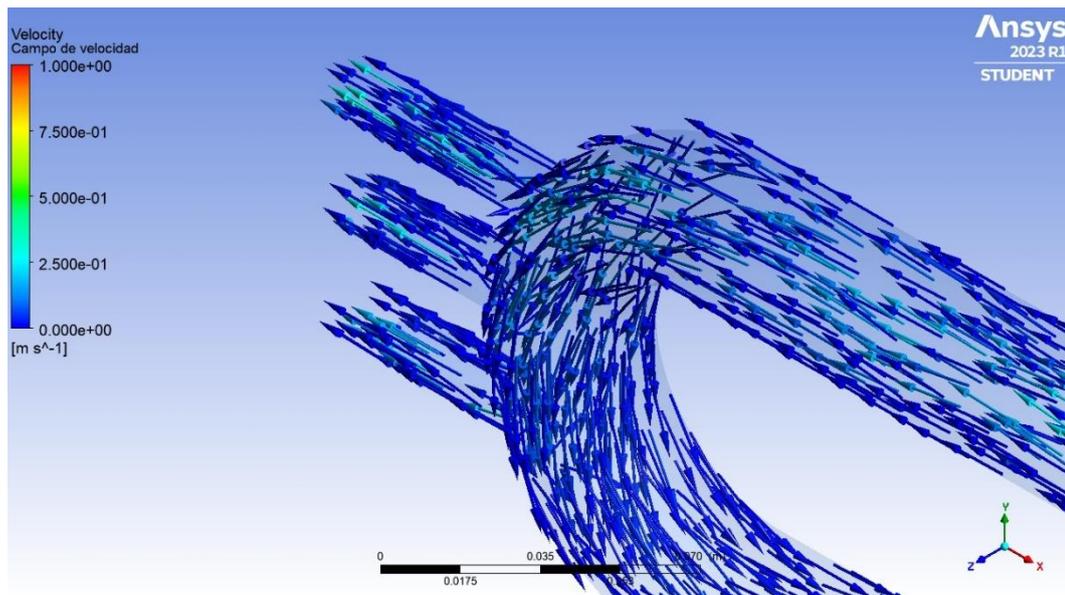


Figura 71. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,1$  s.

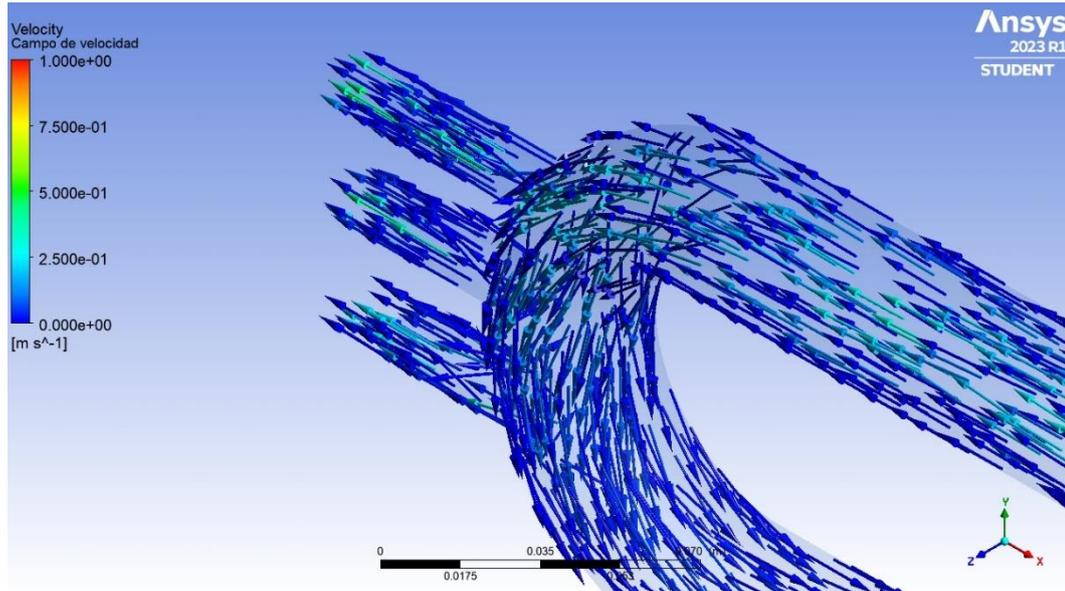


Figura 72. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,2$  s.

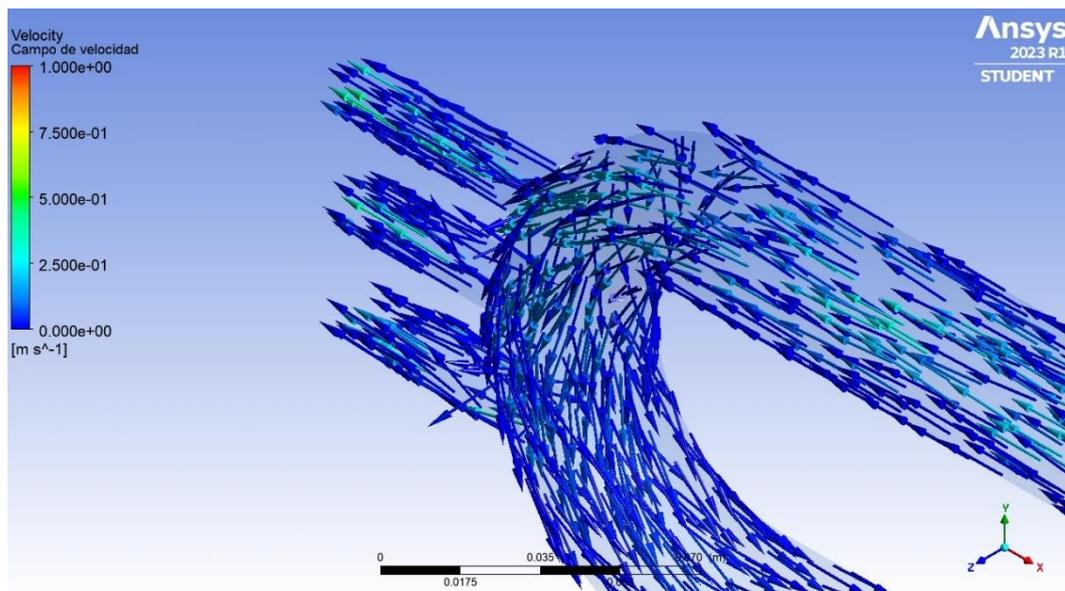


Figura 73. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,3$  s.

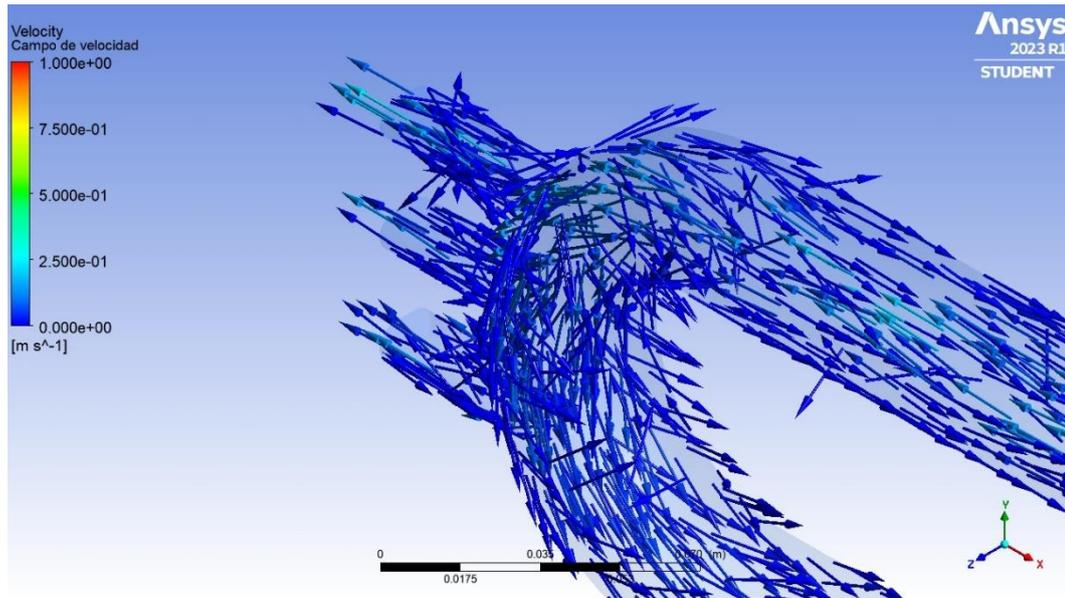


Figura 74. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,4$  s.

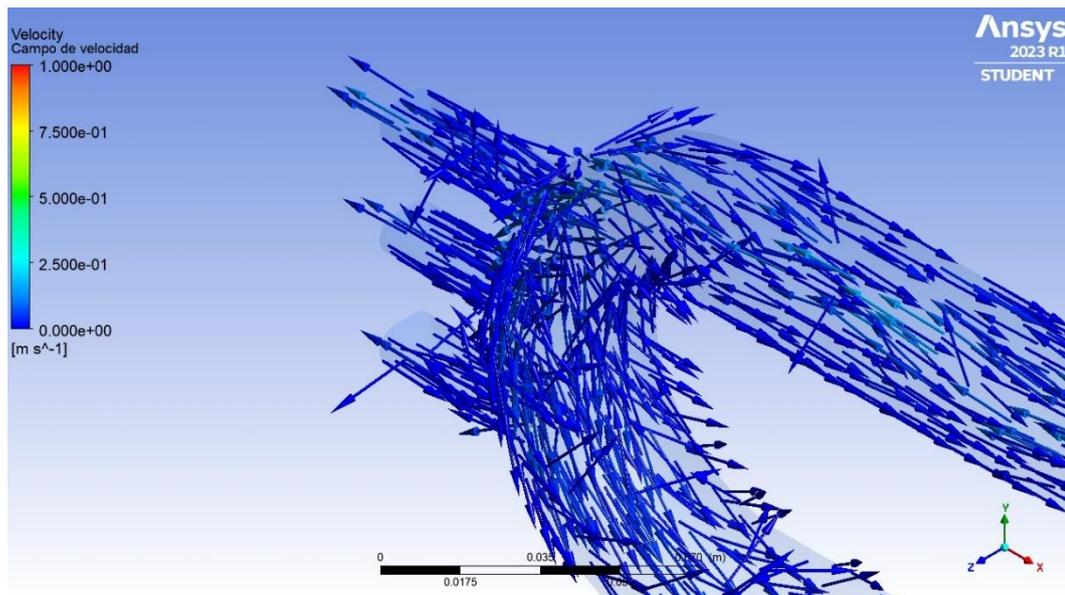


Figura 75. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,5$  s.

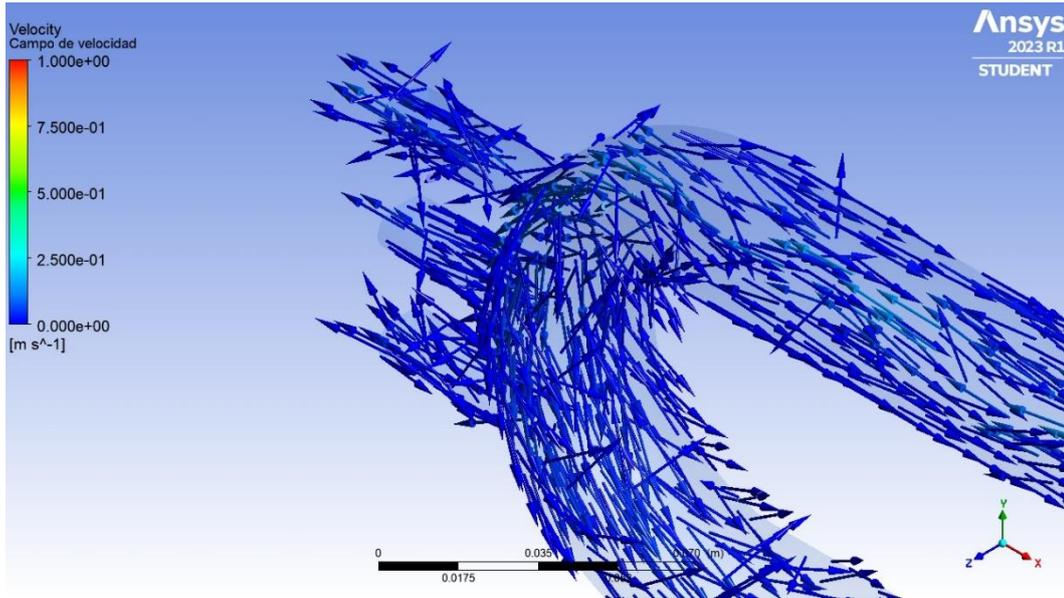


Figura 76. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,6 s.

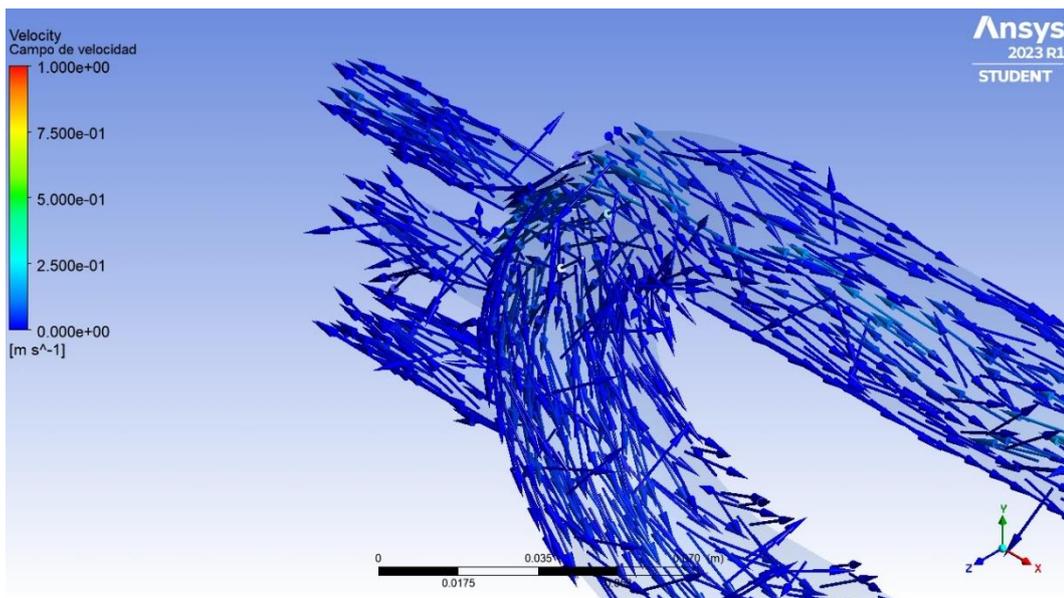


Figura 77. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle. t=19,7 s.

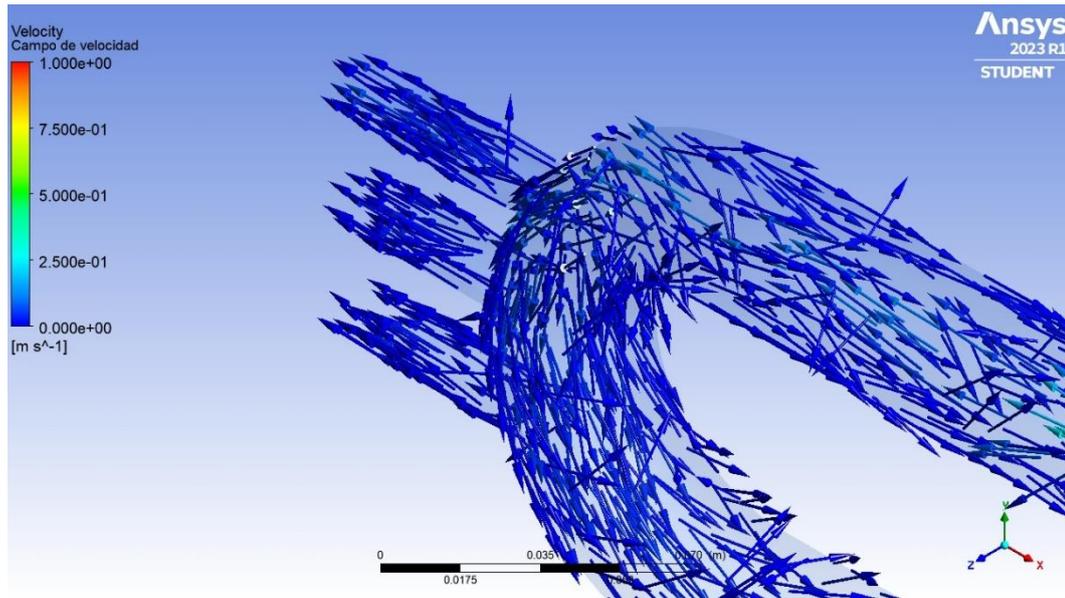


Figura 78. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,8$  s.

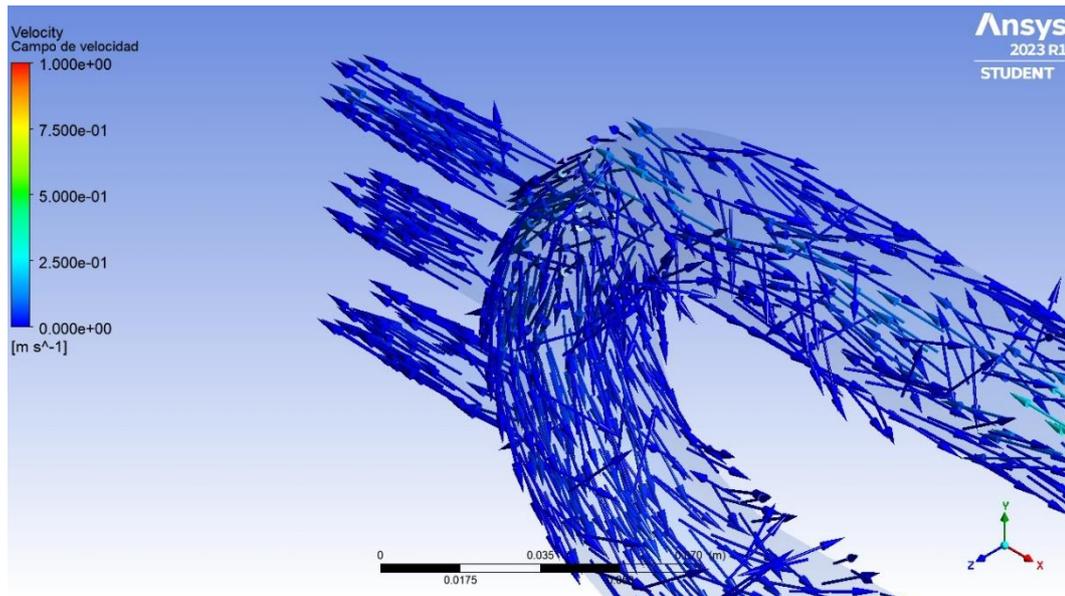


Figura 79. Geometría tridimensional. Campo de velocidades. Vista detalle.  $t=19,9$  s.

Al comienzo del ciclo todo el flujo es lento, especialmente en las zonas periféricas del volumen. Se puede apreciar flujo reverso muy lento en la periferia de la representación de la aorta ascendente. En los depósitos se observa una variedad de direcciones en los vectores de velocidad que sugiere que el fluido está rotando (Figuras 60 y 70).

Al aumentar la velocidad en la entrada, la velocidad del fluido próximo al centro de la geometría aumenta, especialmente entre la entrada y las intersecciones. Sin embargo, apenas se aprecia diferencia en las zonas periféricas: el flujo reverso que existía anteriormente en la representación de la aorta ascendente desaparece, pero todo el fluido sigue circulando con la misma lentitud en estas zonas. La variedad en las direcciones de los vectores de velocidad en el depósito de entrada disminuye, es decir, en algunas de las zonas en las que previamente el fluido se encontraba en rotación ahora adquiere una dirección predominante de avance. Sin embargo, en el depósito de salida la situación no cambia respecto del instante anterior (Figuras 61 a 63 y 71 a 73).

Cuando la velocidad en la entrada vuelve a disminuir, el flujo en la parte central decelera, el flujo reverso en la representación de la aorta ascendente vuelve a aparecer y el fluido en el depósito de entrada vuelve a adquirir una velocidad de rotación predominante sobre la de avance (Figuras 64 a 69 y 74 a 79).

En resumen, en la simulación tridimensional se observa un comportamiento similar al que se observaba en la bidimensional, pero con una diferencia fundamental: los cambios de velocidad del flujo se producen únicamente en la parte central del volumen de estudio, que está rodeada de una capa de fluido en las zonas periféricas que permanece casi inmóvil incluso en los momentos en los que la velocidad en la entrada está cerca de su valor pico.

La velocidad máxima en la geometría de estudio durante el ciclo es de 0,55 m/s. Al igual que en el caso bidimensional, esta velocidad es mayor que la velocidad pico en la entrada (0,5 m/s), que es la que se ha utilizado para calcular el número de Reynolds de forma provisional (1079,45). De nuevo, se aprecia sin necesidad de realizar cálculos que el nuevo Reynolds no supera la condición de régimen laminar para flujo interno en tuberías de sección circular (2300). Por tanto, se confirma que la elección del modelo de viscosidad laminar es adecuada también para el caso tridimensional.

Al igual que en el caso anterior, se complementa la información proporcionada por las imágenes del campo de velocidades con imágenes del contorno de velocidades. Sin embargo, su representación en el caso tridimensional resulta difícil, ya que el color de la superficie de la geometría opaca el interior e impide visualizar correctamente todo el volumen de estudio. Lo mismo ocurre con la representación de los vórtices.

Por ello, para permitir la visualización de estas magnitudes, se mostrará su representación sobre el plano de simetría de la geometría.

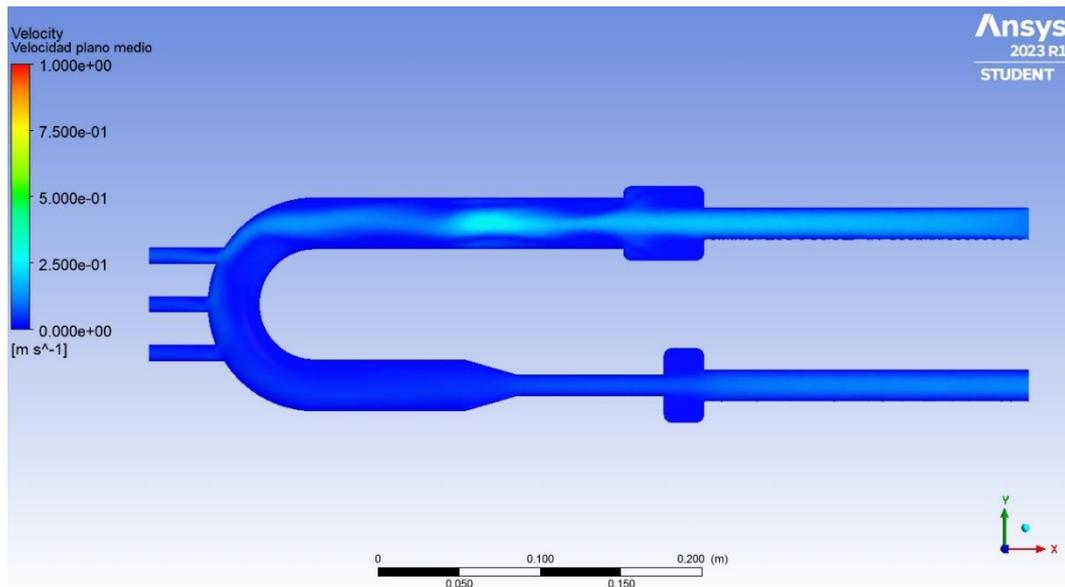


Figura 80. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades.  $t=19$  s.

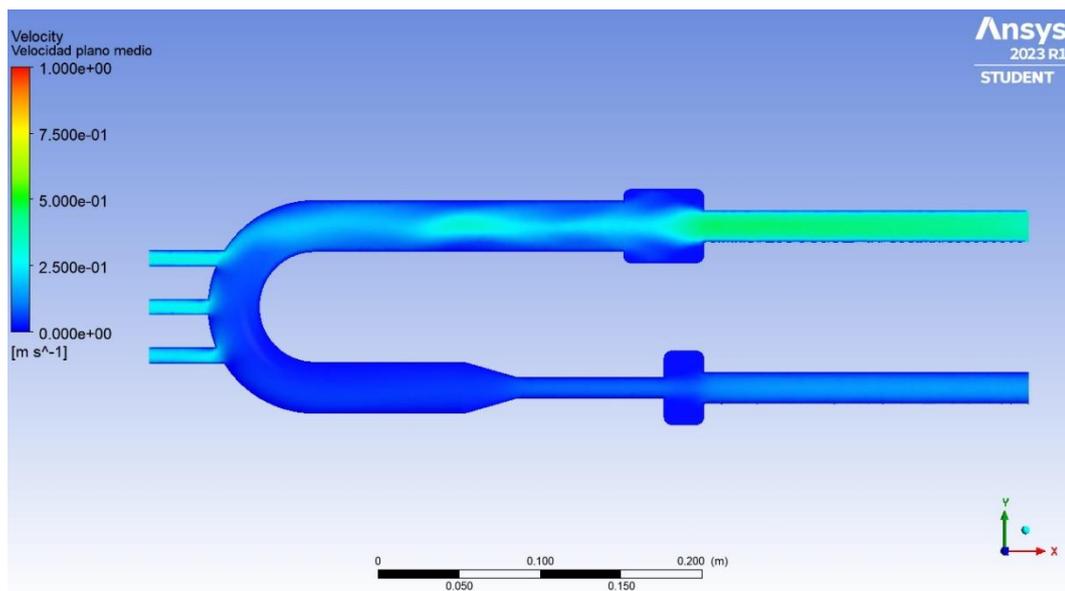


Figura 81. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades.  $t=19,1$  s.

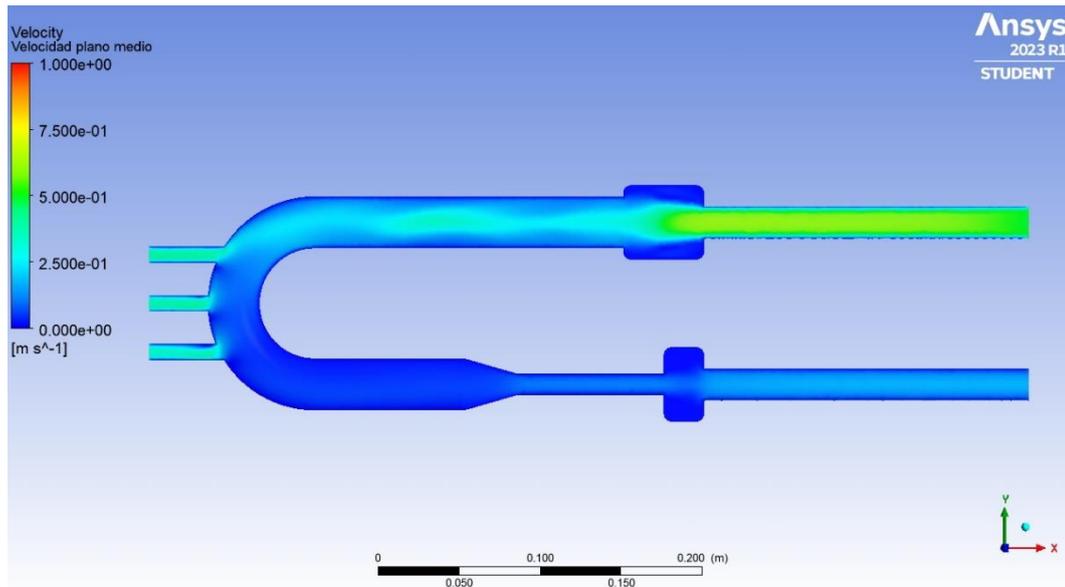


Figura 82. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades.  $t=19,2$  s.

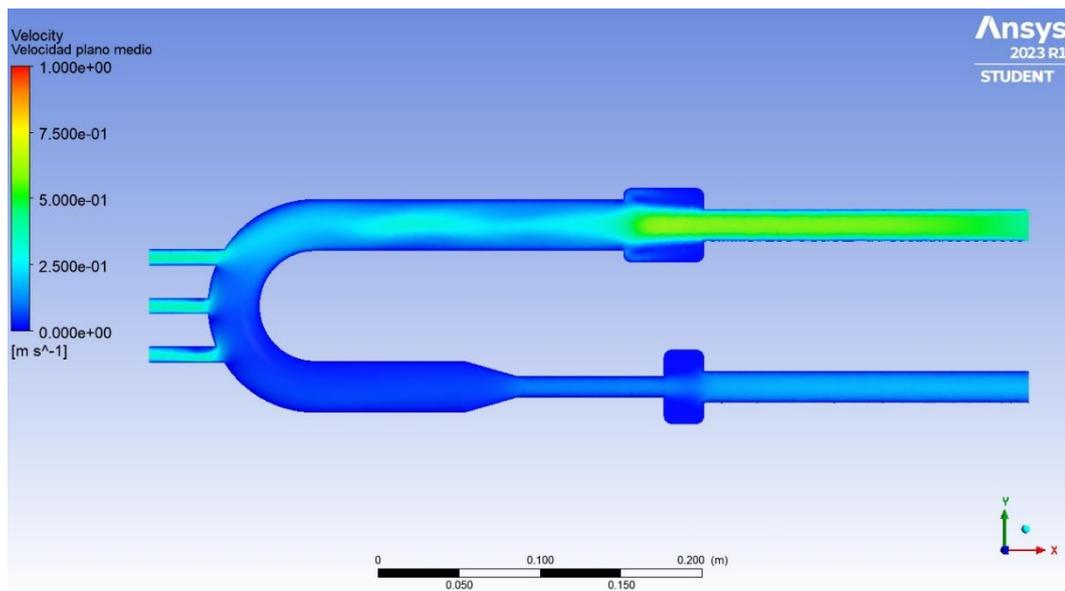


Figura 83. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades.  $t=19,3$  s.

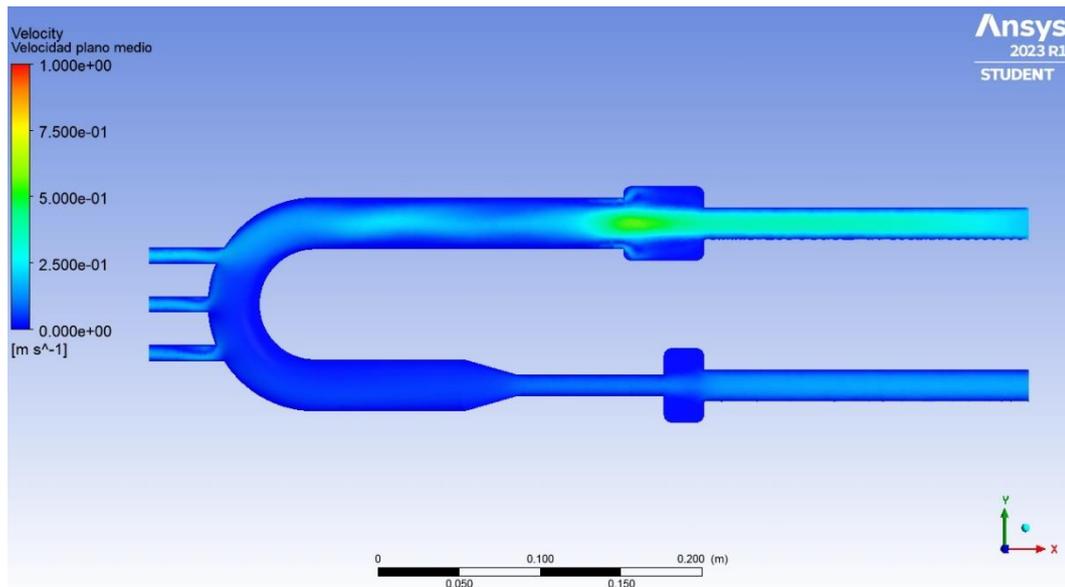


Figura 84. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades.  $t=19,4$  s.

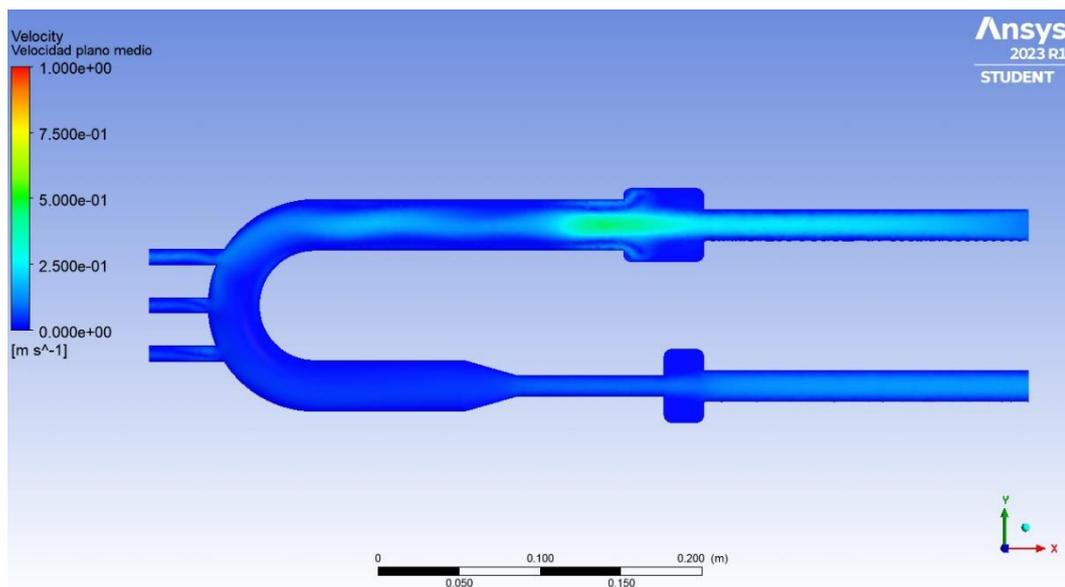


Figura 85. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades.  $t=19,5$  s.

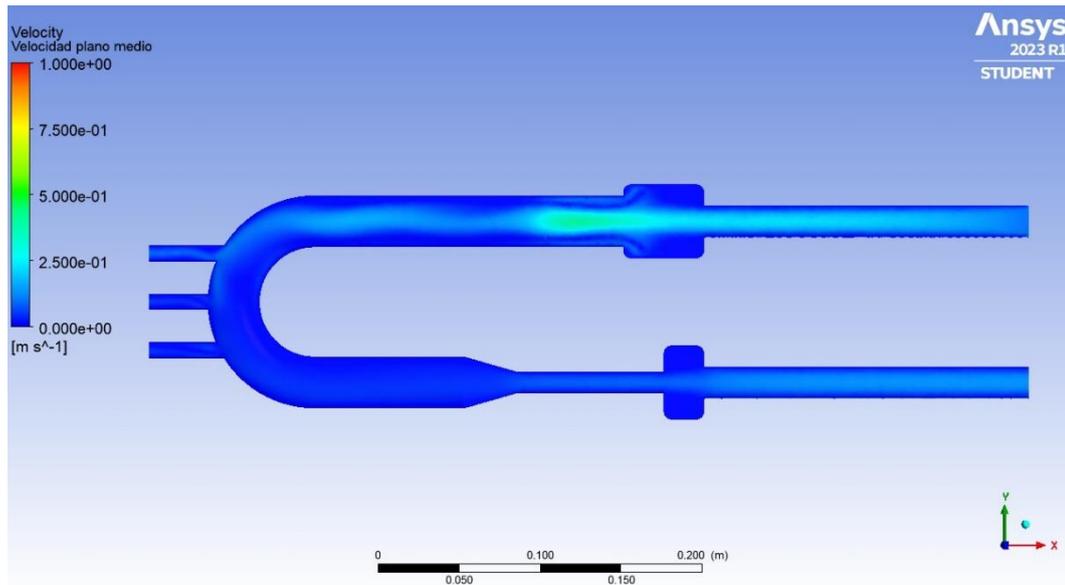


Figura 86. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades.  $t=19,6$  s.

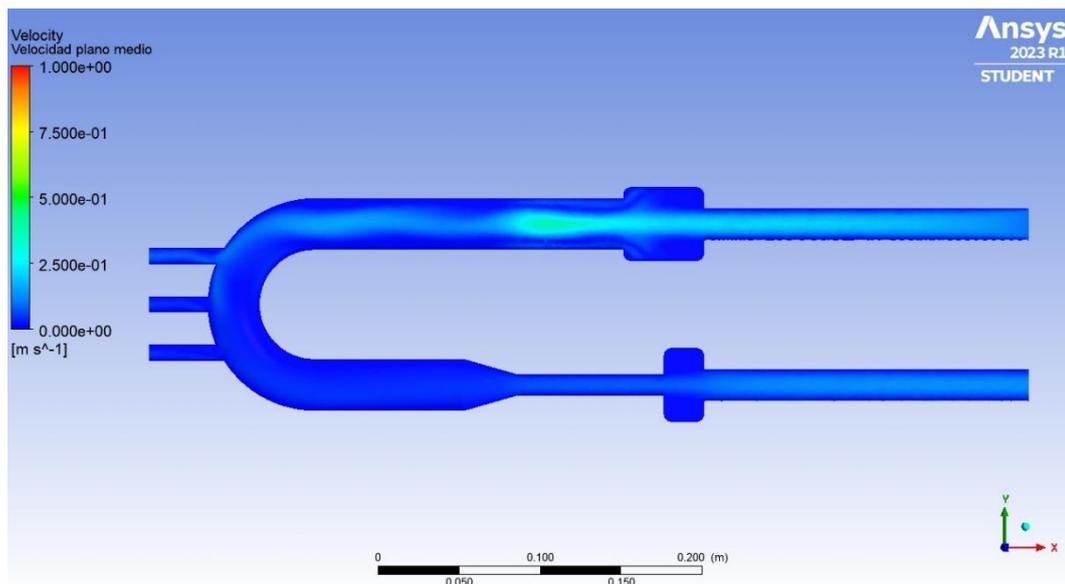


Figura 87. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades.  $t=19,7$  s.

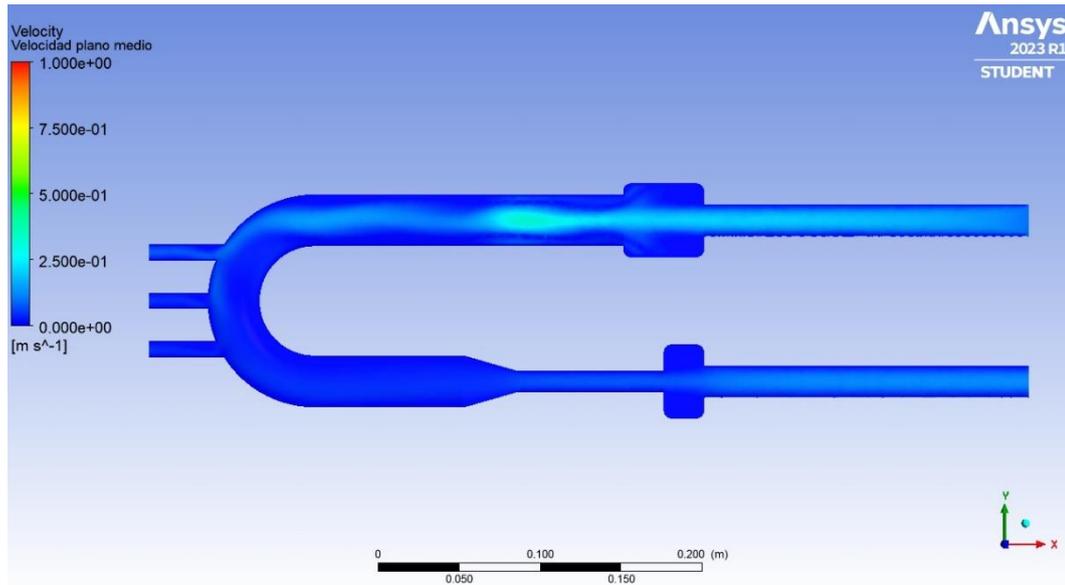


Figura 88. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades.  $t=19,8$  s.

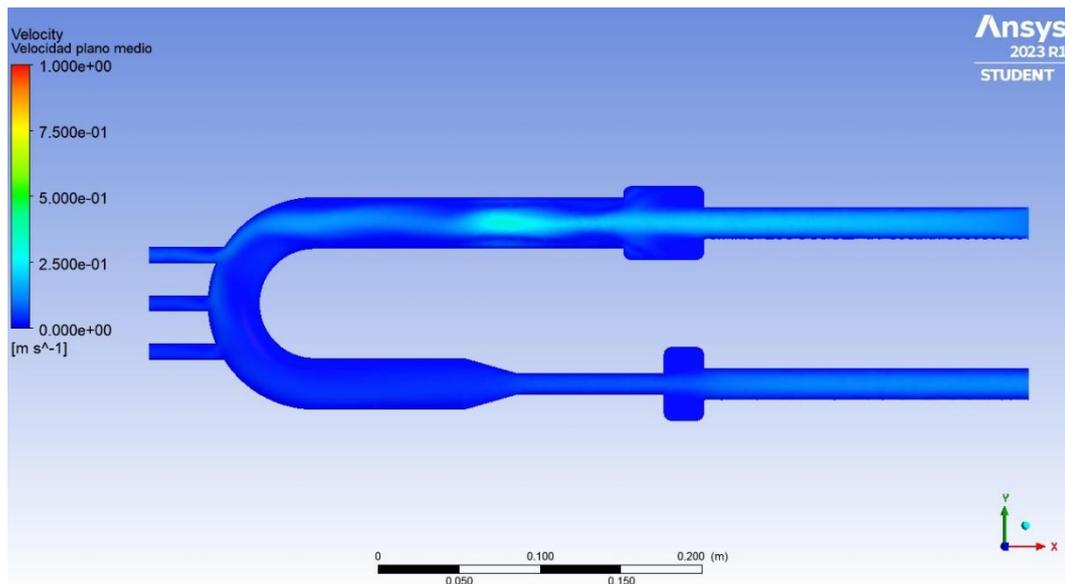


Figura 89. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Contorno de velocidades.  $t=19,9$  s.

Al principio del ciclo el flujo es lento. En la zona central del conducto de entrada, el depósito de entrada y la representación de la aorta ascendente el flujo es más rápido que en otras zonas, aunque sigue sin contar con una velocidad especialmente elevada (Figura 80).

Al aumentar la velocidad en la entrada, aumenta la velocidad del fluido desde la entrada hasta las intersecciones. Desde las intersecciones hasta la salida no se aprecia variación en la velocidad (Figuras 81 a 83).

Al disminuir la velocidad en la entrada, disminuye la velocidad del fluido en todas las zonas en las que previamente había aumentado, exceptuando una zona de forma alargada a la salida del depósito de entrada, que mantiene una celeridad relativamente alta durante unos instantes. Después, va perdiendo poco a poco esta celeridad hasta que regresa a la situación inicial (Figuras 84 a 89).

En comparación con los resultados obtenidos en la simulación bidimensional, la zona del depósito de entrada en la que el fluido mantiene cierta velocidad tras la caída de la velocidad en la entrada es mucho más excéntrica. Esto indica que en el caso tridimensional la velocidad de avance del fluido en esa zona es más significativa respecto de la velocidad de rotación que en el caso bidimensional. Además, el incremento de velocidad en la entrada en el caso tridimensional tiene un menor efecto sobre el resto del fluido que en el caso bidimensional: la velocidad en la representación de la aorta ascendente aumenta menos, y en la representación de la aorta descendente ni siquiera se aprecia una variación.

Para finalizar con el análisis euleriano de la geometría tridimensional, se presentan imágenes, tomadas durante el último ciclo simulado, cada 0,1 segundos, de los vórtices en el plano de simetría del volumen de estudio, analizados según el criterio Q. El color rojo representa la presencia de vórtices, mientras que el color azul representa su ausencia.

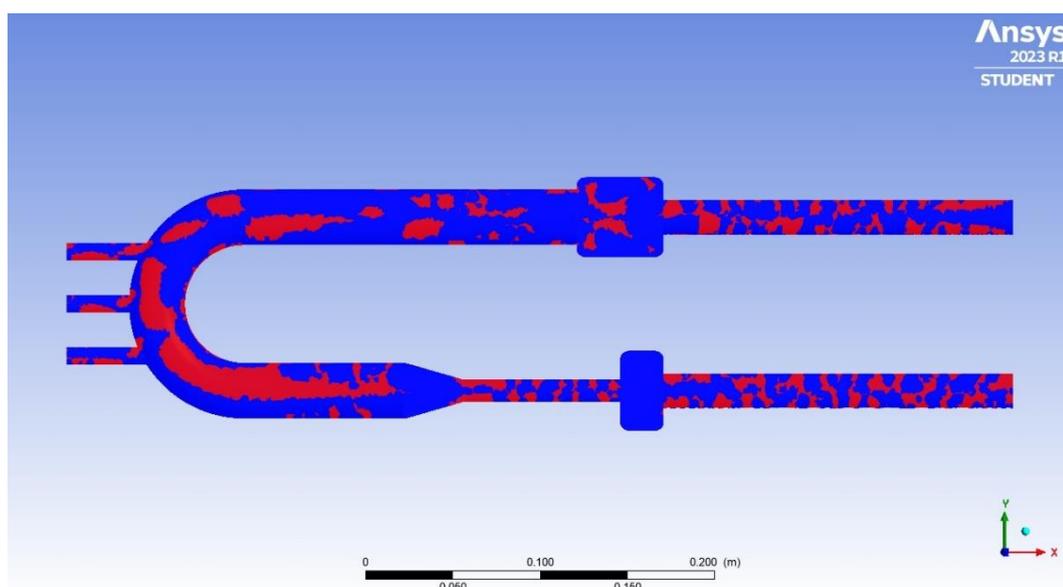


Figura 90. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices.  $t=19$  s.

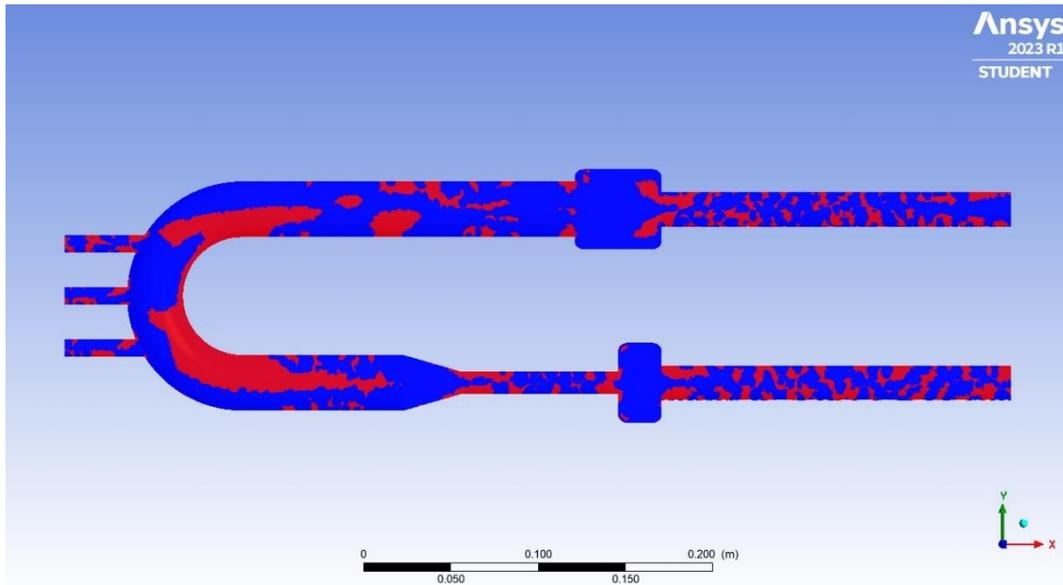


Figura 91. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices.  $t=19,1$  s.

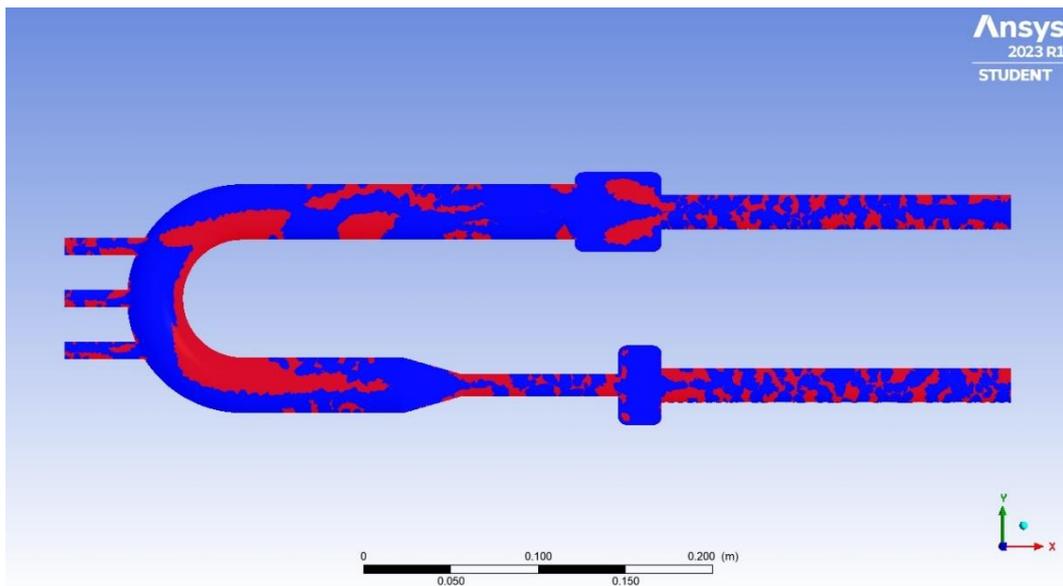


Figura 92. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices.  $t=19,2$  s.

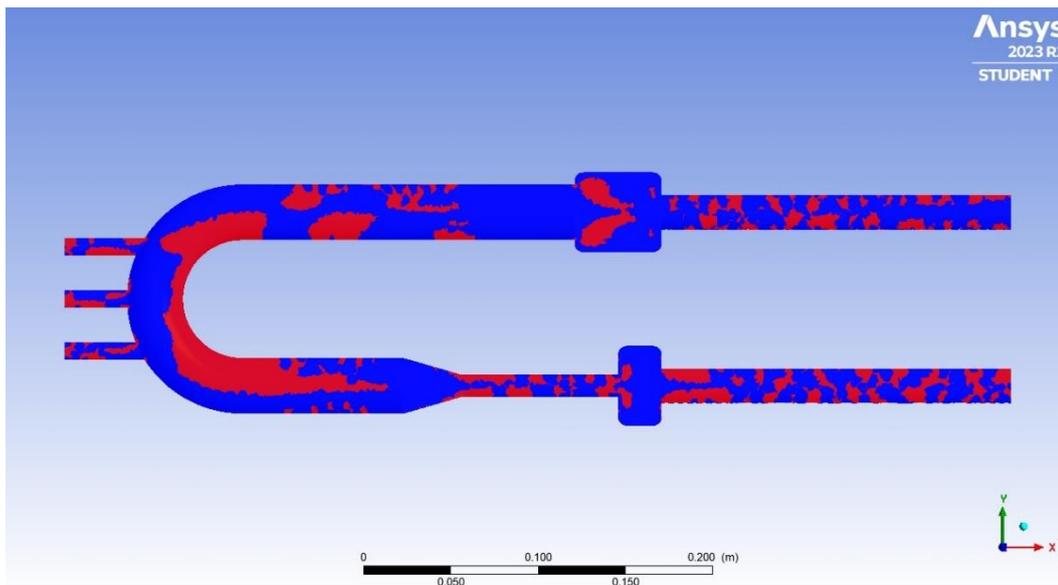


Figura 93. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices.  $t=19,3$  s.

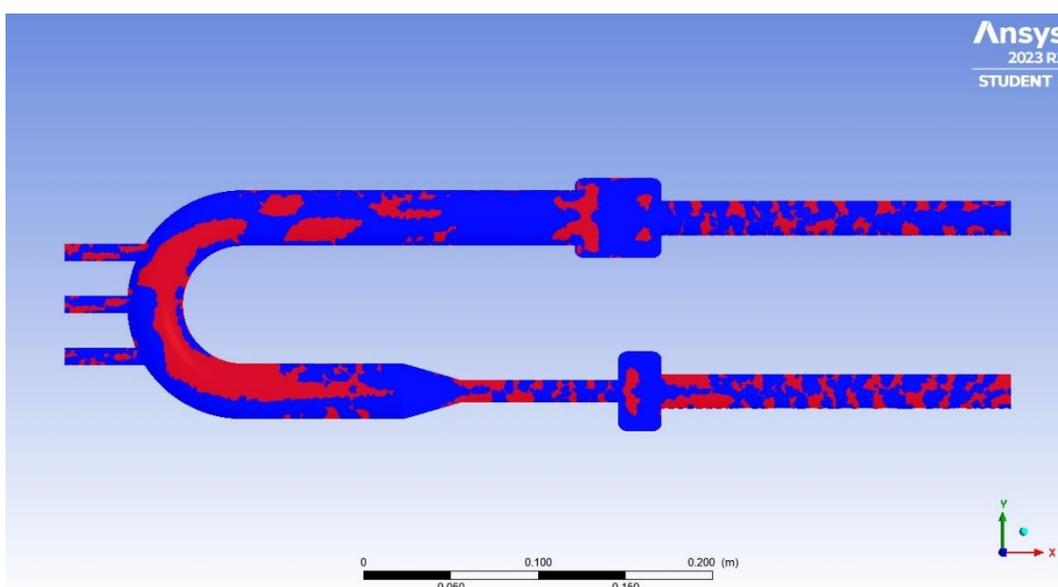


Figura 94. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices.  $t=19,4$  s.

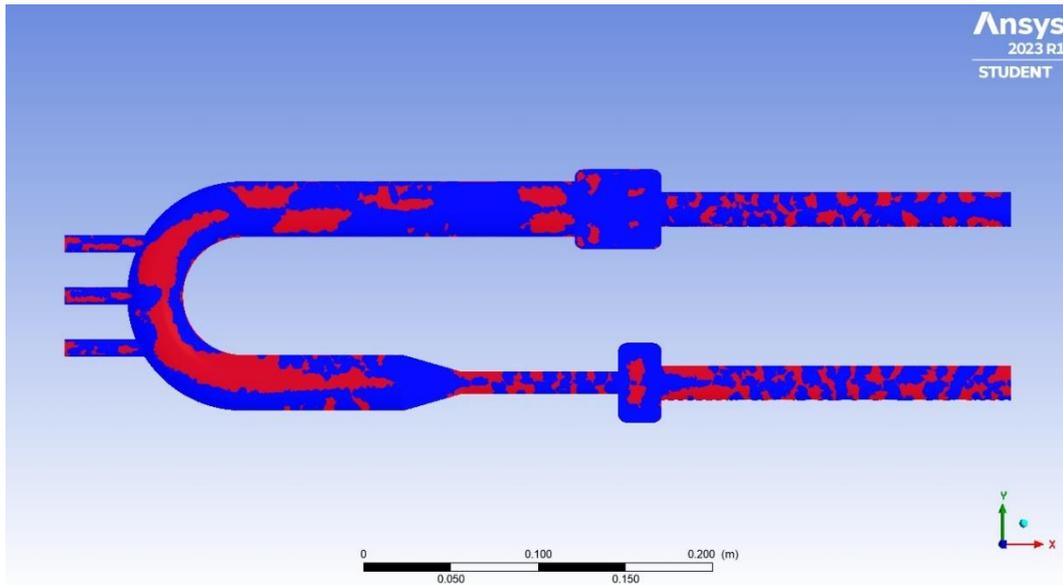


Figura 95. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices.  $t=19,5$  s.

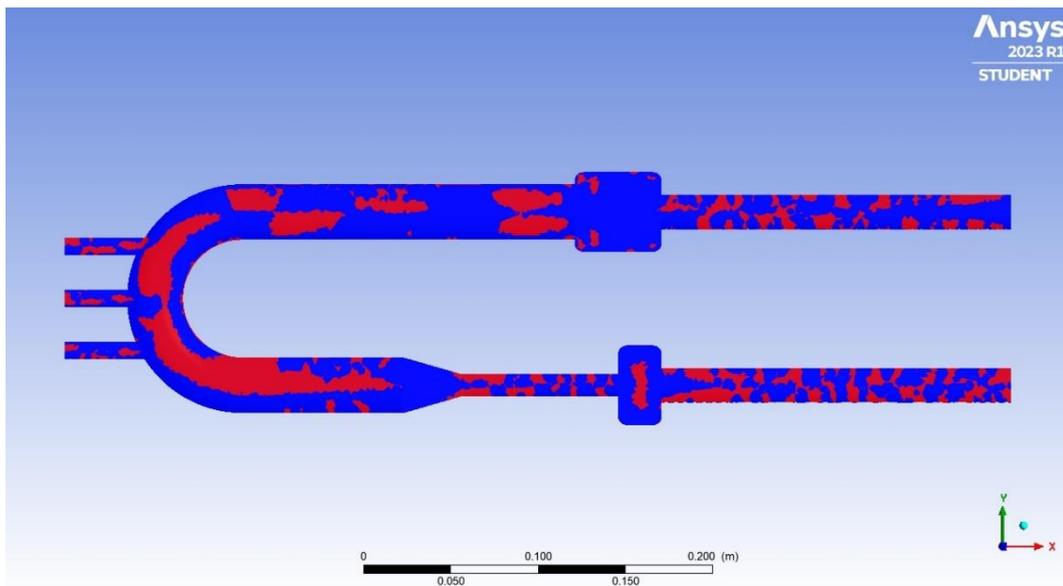


Figura 96. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices.  $t=19,6$  s.

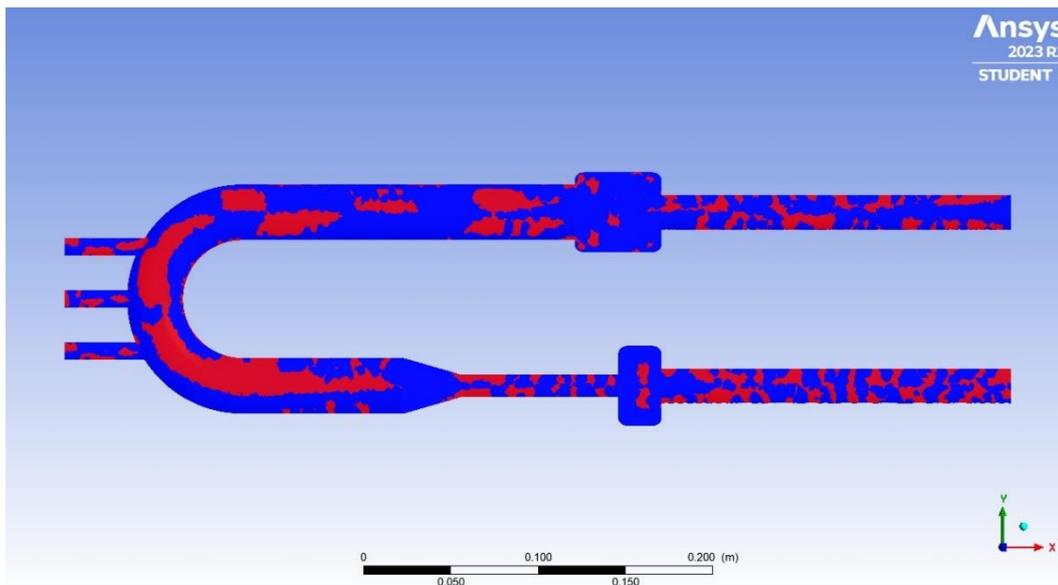


Figura 97. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices.  $t=19,7$  s.

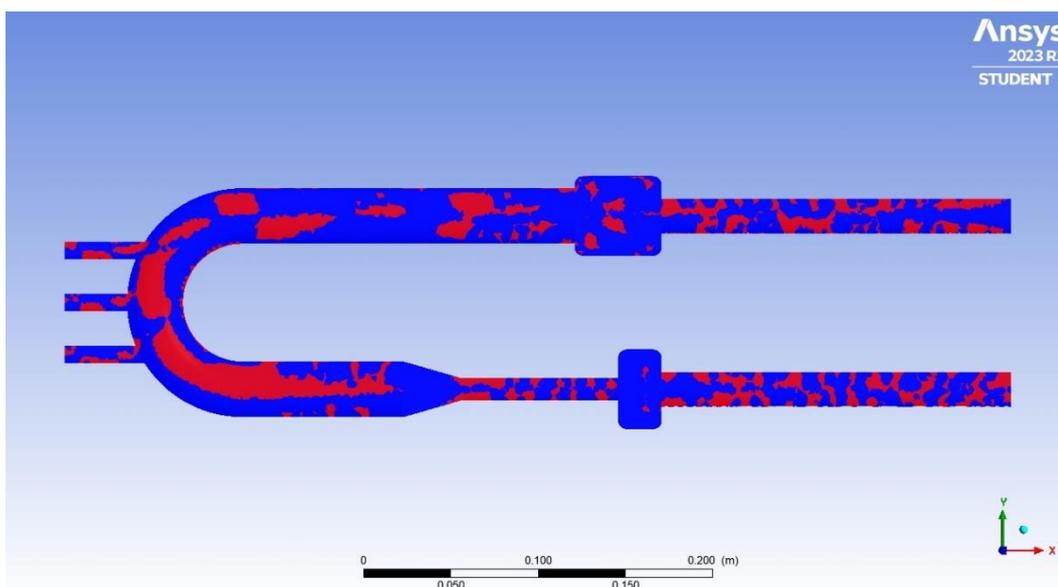


Figura 98. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices.  $t=19,8$  s.

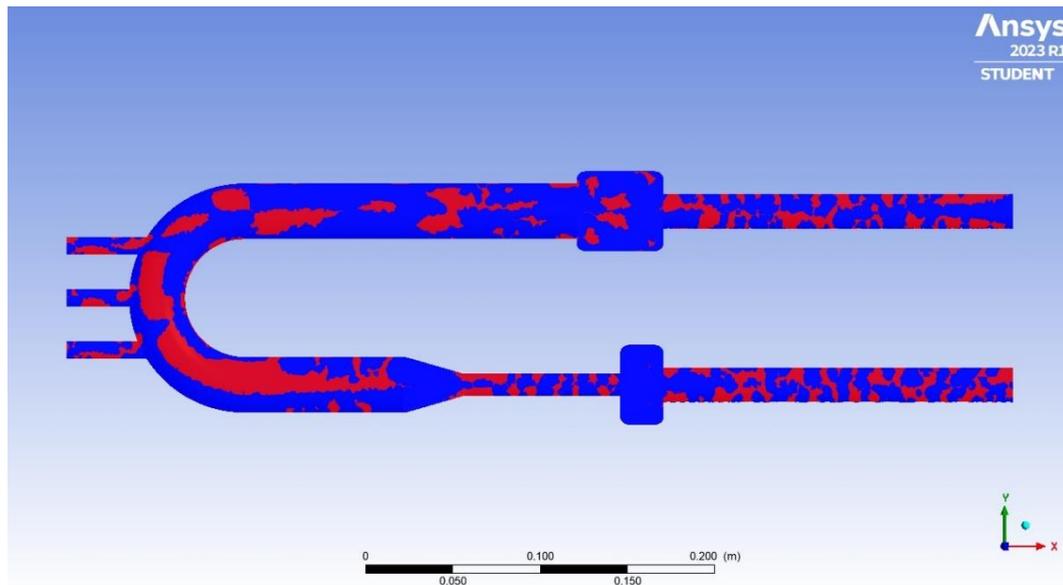


Figura 99. Geometría tridimensional. Plano de simetría. Vórtices.  $t=19,9$  s.

Al observar las imágenes, lo primero que llama la atención es la cantidad de pequeños vórtices inconexos que hay en todo el volumen fluido, especialmente en los conductos de entrada y salida. Esto no es más que la consecuencia de estar visualizando una capa bidimensional obtenida a partir de un volumen tridimensional. En realidad, todos los pequeños vórtices que se aprecian en las imágenes son partes de vórtices tridimensionales más grandes y conectados.

De todas formas, igual que en el caso bidimensional, hay que contrastar la información con la que se obtiene a partir de las imágenes del campo de velocidades, ya que el criterio  $Q$ , igual que otros criterios de detección de vórtices, no se caracteriza por ser infalible. Al hacerlo, no se observa una vorticidad relevante en los conductos de entrada y salida, y por tanto estos pequeños vórtices que en realidad son partes de vórtices más grandes se desestiman.

Destaca también la ausencia de vórtices en los depósitos. De nuevo, esto es consecuencia de estar observando únicamente el plano de simetría. Observando las imágenes del campo de velocidades, sí que se aprecia una rotación significativa del fluido en los depósitos, solo que en planos más externos.

Exceptuando estas diferencias, el comportamiento de los vórtices en el caso tridimensional es similar a su comportamiento en el caso bidimensional, y lo comentado en el caso bidimensional es válido también para este caso.

## Análisis lagrangiano

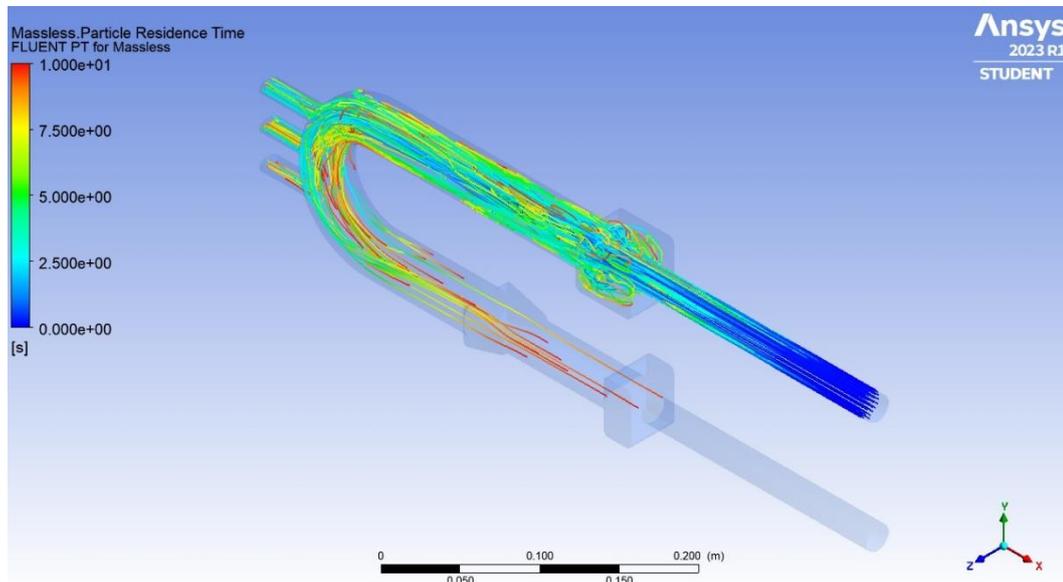


Figura 100. Geometría tridimensional. Trayectorias de las partículas.

El comportamiento de las trayectorias de las partículas en el caso tridimensional difiere significativamente respecto del caso bidimensional.

Para empezar, se aprecian diferencias en la velocidad de las partículas en función de su posición radial desde el conducto de entrada: las partículas posicionadas en el centro alcanzan distintos planos transversales con menor tiempo de residencia que las partículas periféricas, es decir, son más rápidas.

Las partículas que abandonan el volumen de estudio por las intersecciones lo hacen con un tiempo de residencia de entre 2 y 9 segundos (en el caso 2D lo hacían con un tiempo de residencia de entre 4 y 5 segundos). Esto implica que existen partículas tanto más lentas como más rápidas que en el caso bidimensional, es decir, existe una mayor variabilidad en la velocidad de las partículas.

Además, ninguna de las partículas que continúan por la representación de la aorta descendente llega a abandonar el volumen de estudio antes de que finalice la simulación. Las partículas más avanzadas se encuentran a la altura del depósito de salida en el instante final. Dado que en el caso 2D existen partículas que abandonan la representación de la aorta descendente 7 segundos tras su inserción, y que otras que no llegan a abandonar la geometría se encuentran en posiciones más adelantadas que el depósito de salida, se puede decir que, al menos desde las intersecciones en adelante, el flujo es en general más lento en el caso tridimensional.

Por otra parte, también existen varias similitudes con el caso bidimensional: todas las partículas, incluso las más céntricas, describen una trayectoria rizada en el depósito de entrada; y la mayoría de las partículas abandonan el volumen de estudio a través de las intersecciones.

Al igual que en el caso 2D, una inyección de partículas en la entrada no es suficiente para barrer el volumen de estudio al completo, lo cual es necesario para simular la adquisición de resultados por 4D Flow, y por tanto es necesario realizar inyecciones en puntos intermedios. Como ya se ha comentado previamente, *Ansys Fluent* no es el *software* más adecuado para realizar estas inyecciones. Por tanto, quedan planteadas como líneas de trabajo futuro la búsqueda de un *software* que permita realizar las inyecciones necesarias para cubrir el volumen de estudio completo de forma sencilla (o en caso de que no exista, su desarrollo), así como la realización de dichas inyecciones, también en el caso 3D.

### 3 Conclusiones

Para empezar, se evalúa el cumplimiento de los objetivos planteados:

1. Se ha definido un modelo fluidodinámico que permite la simulación del flujo sanguíneo en un *phantom* de arteria aorta.
2. Se han detectado, mediante la aplicación del criterio Q de detección de vórtices y su contraste con el campo de velocidades, las zonas del *phantom* de arteria aorta donde se producen recirculaciones y flujos en rotación.
3. Se ha realizado una simulación de trayectorias de partículas que sirve como punto de partida para la simulación de la adquisición de resultados por 4D Flow.

Dado que todos los subobjetivos se han cumplido, se puede afirmar que el objetivo global de este TFG, que es la complementación de técnicas de medida de flujos por 4D Flow mediante CFD, se ha cumplido.

Las repercusiones de este trabajo, en conjunto con otros trabajos relacionados con él, tanto previos (como el diseño del *phantom* de aorta) como posteriores (como la completación de la simulación de trayectorias de partículas o la simulación de la adquisición de resultados de 4D Flow a partir de ella), son la mejora en la calidad de las imágenes obtenidas mediante 4D Flow, y por tanto de los diagnósticos realizados a partir de esas imágenes, permitiendo una detección más temprana y precisa de diferentes afecciones del sistema circulatorio y consecuentemente reduciendo su impacto sobre la vida de las personas que las padecen; y la mejora en la calidad de la formación de los técnicos de rayos, así como la reducción de su coste, mediante la implementación de simuladores de MRI que puedan ser utilizados por multitud de alumnos simultáneamente y por un periodo de tiempo indefinido sin necesidad de dejar fuera de servicio los equipos reales.

Por último, quedan planteadas las siguientes líneas de trabajo futuro:

1. Búsqueda de un *software* que permita realizar las inyecciones de partículas necesarias para cubrir el volumen de estudio completo de forma sencilla, o en caso de que no exista, desarrollo del *software*.
2. Realización de las inyecciones de partículas necesarias para cubrir el volumen de estudio completo.
3. Simulación de la adquisición de resultados por 4D Flow a partir de las trayectorias de partículas simuladas.
4. Realización de mediciones experimentales mediante 4D Flow en el *phantom* de aorta y comparación con los resultados de la simulación.
5. Modificación de las condiciones de contorno en la entrada a partir de las mediciones experimentales realizadas.

## 4 Bibliografía

- [1] «Wikipedia - Imagen por resonancia magnética,» 12 2022. [En línea]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/Imagen\\_por\\_resonancia\\_magn%C3%A9tica](https://es.wikipedia.org/wiki/Imagen_por_resonancia_magn%C3%A9tica). [Último acceso: 02 2023].
- [2] L. Barberini, «Introduction to the Basics of MRI to Introduce the Macroscopic Magnetization M,» de *Image Principles, Neck, and the Brain*, CRC Press, 2016.
- [3] E. Ferdian, A. Suinesiaputra, D. J. Dubowitz, D. Zhao, A. Wang, B. Cowan y A. A. Young, «4DFlowNet: Super-Resolution 4D Flow MRI Using Deep Learning and Computational Fluid Dynamics,» *Frontiers in Physics*, 2020.
- [4] «Manual MSD - Resonancia magnética nuclear,» 04 2021. [En línea]. Available: <https://www.msmanuals.com/es-es/hogar/temas-especiales/pruebas-de-diagn%C3%B3stico-por-la-imagen-habituales/resonancia-magn%C3%A9tica-nuclear-rmn>. [Último acceso: 02 2023].
- [5] G. N. Levine, A. S. Gomes, A. E. Arai, D. A. Bluemke, S. D. Flamm, E. Kanal, W. J. Manning, E. T. Martin, J. M. Smith, N. Wilke y F. S. Shellock, «Safety of Magnetic Resonance Imaging in Patients With Cardiovascular Devices,» *AHA Journals*, vol. 116, nº 24, 2007.
- [6] M. E. Hayden y P.-J. Nacher, «History and Physical Principles of Magnetic Resonance Imaging,» de *Image Principles, Neck, and the Brain*, CRC Press, 2016.
- [7] T. Puiseux, A. Sewonu, R. Moreno, S. Méndez y F. Nicoud, «Numerical simulation of time-resolved 3D phase-contrast magnetic resonance imaging,» *PLoS ONE*, vol. 16, nº 3, 2021.
- [8] I. Arias Fernández, Desarrollo en GPU de algoritmos paralelos de procesamiento de imagen aplicados a la simulación del fenómeno de resonancia magnética, 2022.
- [9] «Wikipedia - Magnetic Resonance Angiography,» 05 2023. [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic\\_resonance\\_angiography](https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_resonance_angiography). [Último acceso: 05 2023].
- [10] «Wikipedia - Phase contrast magnetic resonance imaging,» 03 2023. [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Phase\\_contrast\\_magnetic\\_resonance\\_imaging](https://en.wikipedia.org/wiki/Phase_contrast_magnetic_resonance_imaging). [Último acceso: 04 2023].
- [11] B. Andersson, R. Andersson, L. Hakansson, M. Mortenssen, R. Sudiyo y B. van Wachem, *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Cambridge University Press, 2012.

- [12] A. Crespo Martínez, *Mecánica de Fluidos*, Ediciones Paraninfo, 2006.
- [13] «Wikipedia - Teorema de la divergencia,» 03 2023. [En línea]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_de\\_la\\_divergencia](https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_la_divergencia). [Último acceso: 03 2023].
- [14] «Wikipedia - Fluido newtoniano,» 02 2023. [En línea]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/Fluido\\_newtoniano](https://es.wikipedia.org/wiki/Fluido_newtoniano). [Último acceso: 02 2023].
- [15] «Wikipedia - Fluido no newtoniano,» 02 2023. [En línea]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/Fluido\\_no\\_newtoniano](https://es.wikipedia.org/wiki/Fluido_no_newtoniano). [Último acceso: 02 2023].
- [16] «Wikipedia - Generalized Newtonian fluid,» 02 2023. [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized\\_Newtonian\\_fluid](https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_Newtonian_fluid). [Último acceso: 02 2023].
- [17] «Wikipedia - Carreau fluid,» 09 2022. [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Carreau\\_fluid](https://en.wikipedia.org/wiki/Carreau_fluid). [Último acceso: 02 2023].
- [18] «Wikipedia - Shear rate,» 02 2023. [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Shear\\_rate](https://en.wikipedia.org/wiki/Shear_rate). [Último acceso: 02 2023].
- [19] «Ansys Innovation Courses - 3D Bifurcating Artery - Simulating the Non-Newtonian Fluid Using Casson Fluid Model,» [En línea]. Available: <https://courses.ansys.com/index.php/courses/fluent-3d-bifurcating-artery/lessons/exercise-lesson-10/topic/simulating-the-non-newtonian-fluid-using-casson-fluid-model/>. [Último acceso: 02 2023].
- [20] «Hmong - Condición de Courant-Friedrichs-Lewy,» [En línea]. Available: [https://hmong.es/wiki/Courant%E2%80%93Friedrichs%E2%80%93Lewy\\_condition](https://hmong.es/wiki/Courant%E2%80%93Friedrichs%E2%80%93Lewy_condition). [Último acceso: 04 2023].
- [21] J. W. Slater, «NASA - Examining Spatial (Grid) Convergence,» 02 2021. [En línea]. Available: <https://www.grc.nasa.gov/www/wind/valid/tutorial/spatconv.html>. [Último acceso: 05 2023].
- [22] «Wikipedia - Vortex,» 04 2023. [En línea]. Available: <https://en.wikipedia.org/wiki/Vortex>. [Último acceso: 04 2023].
- [23] Y. Dong, Y. Yan y C. Liu, «New visualization method for vortex structure in turbulence by,» *Applied Mathematical Modelling*, vol. 40, n° 1, 2016.
- [24] J.-m. Zhan, Z.-y. Chen, C.-w. Li, W.-q. Hu y Y.-t. Li, «Vortex identification and evolution of a jet in cross,» *Engineering Applications of Computational Fluid*, vol. 14, n° 1, 2020.
- [25] «Wikipedia - Número de Reynolds,» 09 2022. [En línea]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_de\\_Reynolds](https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Reynolds). [Último acceso: 06 2023].

- [26] «Ansys Innovation Courses - 3D Bifurcating Artery - Boundry Conditions,» [En línea]. Available: <https://courses.ansys.com/index.php/courses/fluent-3d-bifurcating-artery/lessons/physics-setup-lesson-5/topic/boundary-conditions/>. [Último acceso: 03 2023].
- [27] T.-R. Teschner, «GitHub - pyGCS (Grid Convergence Study),» 07 2022. [En línea]. Available: <https://github.com/tomrobin-teschner/pyGCS>. [Último acceso: 06 2023].
- [28] «Wikipedia - Lagrangian and Eulerian specification of the flow field,» 10 2022. [En línea]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian\\_and\\_Eulerian\\_specification\\_of\\_the\\_flow\\_field](https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_and_Eulerian_specification_of_the_flow_field). [Último acceso: 06 2023].