



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas.

Teorema de Clasificación de Superficies Compactas

Autor: Óscar Cabezón Rodríguez

Tutora: Carolina Ana Núñez Jiménez

Índice general

Introducción	2
1. Triangulación de superficies	3
1.1. Conceptos básicos.	3
1.2. Grafos planos.	4
1.3. Teorema de triangulación.	8
2. Superficies como cocientes de polígonos	11
2.1. Algunos resultados sobre el grupo fundamental.	11
2.2. Superficies y polígonos.	14
3. Esquemas poligonales	21
3.1. Esquemas poligonales. Equivalencias.	21
3.2. Clasificación de esquemas poligonales.	26
4. Clasificación de superficies.	33
4.1. Suma conexa de superficies.	33
4.2. El primer grupo de homología.	34
4.3. El Teorema de Clasificación.	41

Resumen

En este trabajo se hace una demostración completa y rigurosa del Teorema de Clasificación de Superficies, que asegura que toda superficie conexa y compacta es homeomorfa a una esfera, una suma conexa de toros o una suma conexa de planos proyectivos. En él se demuestra también la existencia de triangulaciones en las superficies compactas.

Abstract

In the present work we give a complete and rigorous proof of the Classification Theorem for Surfaces, establishing that every connected and compact surface is homeomorphic either to a sphere, a connected sum of tori or a connected sum of projective planes. We also prove the existence of triangulations in compact surfaces.

Introducción

Una *superficie* es un espacio topológico Hausdorff que es localmente homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 . Ejemplos bien conocidos de superficies son la esfera y el toro. También el plano proyectivo real, $P^2(\mathbb{R})$, que no puede ser inmerso en \mathbb{R}^3 . Estas tres superficies tienen la propiedad de ser compactas, además de conexas.

Este trabajo tiene como objetivo la demostración del teorema que clasifica todas las superficies compactas (y conexas, aunque esto no es una restricción real, ya que toda superficie compacta es unión de un número finito de superficies conexas y compactas). Dicho teorema proporciona un *conjunto completo de representantes* para tales superficies. A saber, cualquier superficie compacta y conexa es homeomorfa a la esfera, S^2 , a la suma conexa de $n \geq 1$ toros, T_n o a la suma conexa de $n \geq 1$ planos proyectivos, P_n , y además dos cualesquiera de estas superficies no son homeomorfas entre sí (la suma conexa de dos superficies se obtiene, *grosso modo*, eliminando el interior de un “disco” en cada una de ellas y pegando los dos cerrados resultantes por el borde de los discos).

La primera aproximación al teorema de clasificación fue la que se refiere a las superficies orientables inmersas en \mathbb{R}^3 (la esfera y la suma conexa de toros), y fue establecida por Möbius [8], pero la carencia de las suficientes herramientas técnicas e incluso de una definición de superficie abstracta convierten su “prueba” en una aproximación. La clasificación de superficies no orientables fue anunciada por Von Dyck [9] en 1888, pero su demostración era igualmente incompleta. Existen varios intentos más que de nuevo carecen del rigor necesario. La primera demostración rigurosa fue dada por Brahaná [9] en 1920, pero tanto esta prueba como las precedentes suponían las superficies triangulables. Radó [11] en 1925 probó finalmente que toda superficie puede ser triangulada.

Existen actualmente varias demostraciones del teorema, pero todas ellas tienen dos partes, siendo una de ellas (la “más topológica”) la triangulación de superficies. La otra parte es básicamente combinatoria, y consiste en convertir una superficie triangulada en otra, homeomorfa, en “forma normal”.

En cuanto a la triangulación, en este trabajo se sigue el enfoque de Thomassen [2], más desarrollado en [4], y que utiliza algunos aspectos de teoría de grafos, y en concreto de grafos planos.

Para la parte combinatoria se ha seguido la demostración de Munkres [3], que sigue la idea de Massey [6] pero, al contrario de esta, es completamente rigurosa.

También hay más de una aproximación al hecho de que superficies distintas de las que aparecen en la clasificación no son homeomorfas entre sí. Se puede usar como invariante topológico que los distingue el par formado por el carácter orientable o no de la superficie junto con su característica de Euler. La vía elegida en este

trabajo es distinta, y consiste en usar como invariante el grupo fundamental, o más concretamente, el primer grupo de homología singular de la superficie.

El esquema de la demostración del teorema es el que sigue: una vez probado que toda superficie es triangulable, se deduce que cada superficie se puede representar mediante lo que se llama un esquema poligonal, que no es más que una forma de escribir una identificación entre las aristas de un polígono. Se define una noción de equivalencia de esquema, de forma que dos esquemas equivalentes produzcan superficies homeomorfas, y se manipulan los esquemas para hacer una primera clasificación, de forma que finalmente se encuentre que toda superficies es homeomorfa a una esfera, una suma conexa de $n \geq 1$ toros o a una suma conexa de $m \geq 1$ planos proyectivos. La parte que resta consiste en comprobar que dos de tales superficies no son homeomorfas entre sí, lo que se hace calculando su primer grupo de homología singular y viendo que son distintos.

El trabajo está estructurado como sigue:

En el primer capítulo se introducen los conceptos de superficies y triangulaciones. La parte fundamental de este capítulo es la demostración de que toda superficie compacta es triangulable. La demostración hace uso del teorema de Jordan y el teorema de Jordan-Schönflies, que no demostraremos, y de conceptos de la Teoría de Grafos, y consiste en comprobar que una superficie se puede escribir como unión de imágenes de polígonos en el plano de forma que tales imágenes se corten en un número finito de puntos. Las triangulaciones de los polígonos dan lugar entonces a una triangulación de la superficie.

En el segundo capítulo se comprueba que toda superficie triangulable (y por tanto toda superficie) es homeomorfa al espacio cociente obtenido de una colección de triángulos planos disjuntos pegando sus aristas por pares. La demostración utiliza varios resultados sobre el grupo fundamental, que ya fueron estudiados en la asignatura de Topología Algebraica del grado y que solamente enunciaremos.

En el tercer capítulo se define lo que es un esquema poligonal: básicamente, una representación mediante una “palabra” del espacio cociente de un polígono por identificaciones en sus aristas. En este capítulo se introduce también la noción de “esquemas equivalentes”, que producen espacios homeomorfos, y se encuentra una “forma normal” que los clasifica.

Finalmente, en el cuarto y último capítulo se define el concepto de suma conexa de varias superficies, y se estudia su equivalente en términos de esquemas. Volviendo de nuevo al grupo fundamental, se calcula el grupo fundamental de la esfera S^2 , la suma conexa de $n \geq 1$ toros T_n y la suma conexa de $m \geq 1$ planos proyectivos P_m viendo que estos no son isomorfos entre sí. Por último se deduce el teorema de clasificación de superficies compactas:

Teorema.

1. *Toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a S^2 , o al n -toro T_n , o al m -plano proyectivo P_m .*
2. *Sean T_n y P_m la suma conexa de n toros y de m planos proyectivos, respectivamente. Entonces las superficies $S^2, T_1, T_2, \dots, P_1, P_2, \dots$, son topológicamente distintas.*

Capítulo 1

Triangulación de superficies

En este capítulo veremos que toda superficie compacta y conexa puede ser triangulada, para en capítulos posteriores demostrar el teorema de clasificación de superficies compactas. Por ello antes de meternos en las demostraciones de estos teoremas veremos algunos conceptos básicos y enunciaremos, sin demostrar, los teoremas de Jordan y Jordan-Schönflies que nos harán falta para la demostración del teorema principal de este capítulo.

1.1. Conceptos básicos.

Definición 1.1. Una m -variedad topológica ($m \geq 1$) es un espacio de Hausdorff X para el cual existe un recubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ y una familia de homeomorfismos $(\varphi_i)_{i \in I}$ tal que $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$, donde $(\Omega_i)_{i \in I}$ es una familia de abiertos de \mathbb{R}^m . Cada par (U_i, φ_i) se denomina carta local, al homeomorfismo $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$ se le denomina aplicación coordinada y al homeomorfismo inverso $\varphi_i^{-1} : \Omega_i \rightarrow U_i$ se le conoce como parametrización. A $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ se le denomina atlas.

Definición 1.2. Llamaremos superficie a una 2-variedad conexa y compacta.

Observación. En ocasiones se añade a la definición de variedad la condición de que cumpla el segundo axioma de numerabilidad. Pero una variedad compacta siempre lo cumple, por tener un atlas finito formado por abiertos en la que el axioma se cumple.

Respecto al hecho de que en la definición de superficie pidamos la propiedad de conexión, señalemos que por ser localmente conexa las componentes conexas de una m -variedad son abiertas y por lo tanto son a su vez m -variedades y conexas, habiendo una cantidad finita.

Ejemplo. Los ejemplos básicos que manejaremos son los siguientes: la esfera, $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, el toro, $T_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | [\sqrt{x^2 + y^2} - R]^2 + z^2 = r^2\}$ y el plano proyectivo real, $P = P^2(\mathbb{R})$.

Las cartas locales de la esfera se obtienen con parametrizaciones “adecuadas” del tipo $f(s, t) = (\cos s \cos t, \cos s \sin t, \sin t)$ (es decir, eligiendo convenientemente el abierto de definición).

Análogamente, las cartas locales del toro se obtienen con parametrizaciones del tipo $f(s, t) = ((R + r \cos s) \cos t, (R + r \cos s) \sin t, r \sin s)$.

Finalmente, las cartas locales del plano proyectivo real vienen dadas por los abiertos $U_i = \{[x_0, \dots, x_2] | x_i \neq 0\}$, que son homeomorfos a \mathbb{R}^2 .

Notación. Denotemos por B^n la n -bola, $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$

Definición 1.3. Sea X un espacio de Hausdorff y compacto. Un triángulo curvo en X es un par (A, h) formado por un subespacio A de X y un homeomorfismo $h : T \rightarrow A$, donde T es un triángulo cerrado en el plano. Si e es una arista de T , entonces $h(e)$ es una arista de A . Si v es un vértice de T , entonces $h(v)$ es un vértice de A . Una triangulación de X es una colección finita de triángulos curvos A_1, \dots, A_n en X cuya unión es X y tal que para $i \neq j$, $A_i \cap A_j$ es o bien vacía, o bien un vértice común de A_i y A_j , o bien una arista común de A_i y A_j . Si existe una triangulación de X , se dirá que X es triangulable.

Teorema 1.4 (Jordan). Si C es una curva cerrada y simple en \mathbb{R}^2 , entonces $\mathbb{R}^2 - C$ tiene exactamente dos componentes conexas una de las cuales es acotada y la otra no y ambas tienen a C como borde.

La prueba de este teorema se puede ver, por ejemplo, en Thomassen [2] (Theorem 2.12)

Definición 1.5. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un curva cerrada y simple en \mathbb{R}^2 . Llamaremos $\text{int}(\gamma([a, b]))$, con $a < b$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ a la componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 - \gamma([a, b])$.

Teorema 1.6 (Jordan-Schönflies). Sea $f : C \rightarrow C'$ un homeomorfismo entre dos curvas simples y cerradas en \mathbb{R}^2 . Entonces f se puede extender a un homeomorfismo del plano completo.

Thomassen da la prueba del teorema anterior en [1] (Section 2.2).

1.2. Grafos planos.

Sea V un conjunto; denotamos por $[V]^2$ el conjunto de subconjuntos $\{u, v\}$ tal que $u, v \in V$ y $u \neq v$.

Definición 1.7. Un grafo, G , es una terna (V, E, st) , donde V es un conjunto finito cuyos puntos llamaremos vértices, E es un conjunto finito cuyos elementos llamaremos aristas y $st : E \rightarrow [V]^2$ asigna a cada arista dos vértices $\{u, v\}$ que llamaremos sus extremos. Dos aristas diferentes son paralelas si tienen los mismos extremos. Se dice que G es simple si no tiene aristas paralelas. En este caso, denotaremos en ocasiones por uv el único lado de extremos u y v , si existe.

Un subgrafo de $G = (V, E, st)$, es un grafo $H = (V_H, E_H, st_H)$ tal que $V_H \subseteq V$, $E_H \subseteq E$ y st_H es la restricción de st a E_H .

En lo que sigue entenderemos que los grafos considerados son simples y denotaremos por $G - \{v\}$ al grafo obtenido al eliminar el vértice v del conjunto de vértices V y el conjunto de aristas incidentes con v del conjunto de aristas E .

Definición 1.8. Una cadena en un grafo G es una sucesión

$$\pi = (v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n)$$

tal que e_i es una arista de G que tiene como extremos $\{v_{i-1}, v_i\}$. Se dice que π une v_0 y v_n . Si $v_i \neq v_j$, para todo $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, decimos que π es un camino, y si $v_i \neq v_j$, para todo $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n-1$ y $v_1 = v_n$ decimos que es un ciclo.

Definición 1.9. Un grafo, G , es conexo si para cualesquiera dos vértices de G hay un camino que los une. Decimos que G es 2-conexo si tiene como mínimo tres vértices y $G - \{v\}$ es conexo para cualquier vértice $v \in G$.

Proposición 1.10. Sea G un grafo 2-conexo. Entonces, para cualquier subgrafo H 2-conexo de G , el grafo G se puede construir a partir de H formando una sucesión de grafos 2-conexos, $G_0 = H, G_1, \dots, G_n = G$, tales que para $i = 0, \dots, n-1$, G_{i+1} se obtiene de G_i añadiendo un camino de G el cual tiene solo sus extremos y ninguno de sus lados en G_i .

Demostración. Procederemos por inducción en el número de lados de G que no están en H . Si $G = H$ la demostración es trivial. Si $G \neq H$, se pueden dar dos casos:

1. Si $V = V_H$, sea H' el subgrafo 2-conexo obtenido al añadir a H un lado $e \in E - E_H$. Entonces, $|E - E_{H'}| < |E - E_H|$ y por hipótesis de inducción sobre H' tenemos el resultado.
2. Si $V \neq V_H$, como G es conexo debe de haber un lado e con extremos $\{u, v\}$ donde u está en V_H y v en $V - V_H$. Al ser G 2-conexo, entonces $G - \{u\}$ es conexo. Sea π un camino en $G - \{u\}$ de longitud mínima entre las que unen v con un vértice de H . Entonces el camino obtenido uniendo (u, e, v) y π tiene como extremos u y algún vértice de V_H , y el resto de sus vértices fuera de V_H . Sea H' el subgrafo 2-conexo obtenido al añadir a H dicho camino. Se tiene $|E - E_{H'}| < |E - E_H|$ y por hipótesis de inducción sobre H' tenemos el resultado.

□

Definición 1.11. Dado X espacio topológico, un grafo $G = (V, E, st)$ en X es un grafo tal que $V \subset X$ y cada arista de extremos u y v es una curva simple en X que une u y v , de forma que un mismo punto de X no puede pertenecer a dos aristas distintas salvo que sea un vértice común a ambas. Un grafo plano es un grafo en \mathbb{R}^2 .

Definición 1.12. Un isomorfismo entre dos grafos G_1 y G_2 , $f : G_1 \rightarrow G_2$, es un par (f_V, f_E) con $f_V : V_1 \rightarrow V_2$ y $f_E : E_1 \rightarrow E_2$ ambas biyecciones y tal que $st_1 = st_2 \circ f_E$.

Dado un grafo plano G , denotamos por $|G|$ al subconjunto de \mathbb{R}^2 que consiste en la unión de todos los vértices y aristas de G . $|G|$ es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 y su complementario, $\mathbb{R}^2 - |G|$, es un abierto de \mathbb{R}^2 , cuyas componente arco-conexas se llaman caras de G . Llamaremos borde de una cara a su frontera en \mathbb{R}^2 . La cara exterior de G es la única cara no acotada de G .

Definición 1.13. *Un camino en \mathbb{R}^2 es un camino poligonal si su imagen es la unión de un número finito de segmentos de línea recta.*

Observación. *Es obvio que todo camino poligonal contiene a un camino poligonal simple con los mismos extremos.*

Lema 1.14. *Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^2 . Entonces dos puntos cualesquiera de Ω están unidos por un camino poligonal en Ω .*

Demostración. Sea $p \in \Omega$. Sea $A \subset \Omega$ el conjunto de puntos $x \in \Omega$ tal que existe un camino poligonal que une p con x . Veamos que $A \neq \emptyset$, A es abierto y cerrado y entonces $A = \Omega$ por ser Ω conexo.

1. $A \neq \emptyset$ pues $p \in A$.
2. A es abierto en Ω : sea $x \in A$, entonces existe un camino poligonal que une p con x . Como Ω es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset \Omega$. Puesto que existe un segmento recto que une x con cualquier punto de la bola $B(x, \delta)$, existe un camino poligonal que une p con cualquier punto de la bola $B(x, \delta)$, luego $B(x, \delta) \subset A$.
3. A es cerrado en Ω : veamos que $\Omega - A$ es abierto en Ω . Si $x \notin A$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset \Omega$ y por la misma razón de antes, $B(x, \delta) \subset \Omega - A$. Por lo tanto A es cerrado en Ω .

□

Lema 1.15. *Dado un grafo plano G , existen un grafo plano G' con $V(G) = V(G')$ y tal que todas las aristas de G' son caminos poligonales, y un homeomorfismo entre $|G|$ y $|G'|$ que es también un isomorfismo de grafos.*

Demostración. Sea p un vértice de G , y sea D_p un disco cerrado de centro p tal que D_p interseca solo a los lados incidentes a p . Más aún, suponemos que $D_p \cap D_q = \emptyset$ para cada par de vértices distintos p, q de G . Para cada arista pq de G , sea C_{pq} el segmento de pq tal que C_{pq} une D_p con D_q y tiene solo sus extremos, p', q' , en $D_p \cup D_q$.

Podemos encontrar un grafo plano isomorfo y homeomorfo a G como sigue: C_{pq} se reemplaza por un camino poligonal que no corte al resto de aristas, que se construye uniendo p con p' y q con q' por segmentos rectos y p' con q' usando el lema 1.14 aplicado a la cara de $G - \{pq\}$ que contiene a pq . Se puede suponer que este camino es simple, luego el nuevo grafo es claramente isomorfo y homeomorfo a G pues dos curvas simples son homeomorfas. Haciendo esto sucesivamente para todas las aristas de G se llega al grafo buscado. □

Proposición 1.16. *Sea G un grafo plano 2-conexo y sea H un subgrafo 2-conexo de G . Entonces existen un grafo plano G' homeomorfo e isomorfo a G con $V(G) = V(G')$ y una sucesión de grafos planos 2-conexos, $G_0 = H, \dots, G_m = G'$, tal que para $i = 1, \dots, m - 1$, G_{i+1} se obtiene de G_i añadiendo un camino poligonal el cual tiene solo sus extremos y ninguno de sus lados en G_i . Además el homeomorfismo deja H invariante.*

Demostración. La prueba se hace por inducción como en la proposición 1.10, utilizando una representación plana con aristas poligonales (excepto en H), construida según el lema 1.15. \square

Teorema 1.17. *Sea G un grafo plano 2-conexo. Entonces el borde de cada cara de G es un ciclo. Sea G' otro grafo plano y sea g un homeomorfismo de $|G|$ en $|G'|$ que es además isomorfismo de grafos, y tal que el borde de cada cara de G se aplica en el borde de alguna cara de G' , y el borde de la cara exterior de G se aplica en el borde de la cara exterior de G' . Entonces g se puede extender a un homeomorfismo del plano.*

Demostración. La primera afirmación se deduce del hecho de que si existiese alguna arista en G que solo perteneciera al borde de una cara, dicha arista no podría formar parte de ningún ciclo y por lo tanto G no sería 2-conexo.

Respecto a la segunda parte la probaremos por inducción en el número de lados de G , ya que si G es un ciclo entonces no hay más que usar el teorema de Jordan-Schönflies.

Apliquemos la proposición 1.10 al grafo G , eligiendo como H el ciclo borde de su cara exterior. Se tiene entonces un grafo 2-conexo G_{n-1} y un camino π tal que su única intersección con G_{n-1} son sus extremos y de forma que G se obtiene al añadir π a G_{n-1} . Obviamente, π debe estar contenido en alguna cara de G_{n-1} , cuyo borde será un ciclo C , y a la que π divide en dos caras, cuyos bordes son los dos subciclos de la unión de C y π . Además, debido a la elección de H , la cara exterior de G_{n-1} es la misma que la de G .

Esta situación se traslada por el homeomorfismo g a G' , donde se tendrán un grafo G'_{n-1} de borde C' y un camino π' correspondientes por g a G_{n-1} , C y π . Aplicamos inducción a G'_{n-1} y a los subciclos de la unión de C y π para extender las restricciones de g a homeomorfismos del plano. Estos homeomorfismos convenientemente restringidos y pegados producen el homeomorfismo buscado. \square

Corolario 1.18. *Sea G un grafo plano 2-conexo. Sea C su cara exterior y H el borde de C . Existen un grafo plano G' con el mismo conjunto de vértices y la misma cara exterior que G y tal que todas sus aristas que no están en H son poligonales, y un homeomorfismo ϕ del plano tal que ϕ es la identidad en C e induce un homeomorfismo que es también isomorfismo de grafos entre G y G' que deja H invariante.*

Demostración. Aplicando la proposición 1.16 a G y H encontramos un grafo plano G' con el mismo conjunto de vértices y la misma cara exterior que G y tal que todas sus aristas que no están en H son poligonales, y además por construcción G y G' están en las condiciones del teorema 1.17. Aplicando dicho teorema, se encuentra un homeomorfismo ϕ_1 del plano que extiende al g del teorema. En particular, ϕ_1 es la identidad en H , por lo que se puede construir ϕ que coincida con ϕ_1 en el complementario de la cara exterior de G y sea la identidad en dicha cara. \square

Nota. *En las condiciones del corolario anterior, diremos que hemos obtenido G' redibujando G .*

1.3. Teorema de triangulación.

Definición 1.19. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ una curva simple y cerrada en una superficie S . Llamamos segmento de γ a algo del tipo $\gamma([a, b])$ o $\gamma([0, a] \cup [b, 1])$, con $0 \leq a < b \leq 1$. Denotaremos $[\gamma(a), \gamma(b)]_\gamma = \gamma([a, b])$ si $0 \leq a \leq b \leq 1$, y $[\gamma(b), \gamma(a)]_\gamma = \gamma([0, b]) \cup \gamma([a, 1])$ si $0 \leq b \leq a \leq 1$.

Proposición 1.20. Sea S una superficie. Sean $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$, $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow S$ y $\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow S$ tres curvas simples y cerradas tales que $\gamma_3([0, 1]) \subset \text{int}(\gamma_2([0, 1]))$. Llamemos segmento malo de γ a todo segmento de γ con extremos en $\gamma_2([0, 1])$ y tal que el resto del segmento está totalmente contenido en $\text{int}(\gamma_2([0, 1]))$. Un segmento muy malo de γ es un segmento malo de γ que corta a $\gamma_3([0, 1])$ en algún punto. Entonces hay un número finito de segmentos muy malos de γ .

Demostración. Demostrémoslo por reducción al absurdo, suponiendo que hay infinitos segmentos muy malos, $\{S_n\}_{n \geq 1}$ con $S_n = [p_n, q_n]_\gamma$, donde $p_n = \gamma(t_{2n-1})$ y $q_n = \gamma(t_{2n})$, para $n \geq 1$. Unamos las sucesiones $\{p_n\}_{n \geq 1}$, $\{q_n\}_{n \geq 1}$ de puntos comunes de γ y γ_2 en una sucesión $\{\gamma(t_n)\}_{n \geq 1}$.

Deducimos que S_n y S_m con $n \neq m$ comparten a lo sumo uno de sus extremos, dado que $\text{int}(\gamma^{-1}(S_n))$ no puede contener a ninguno de los t_m . Por tanto, cada punto de γ pertenece a lo sumo a dos de tales segmentos. Eliminando los segmentos que contengan a $\gamma(0)$ se puede suponer que $t_{2n-1} < t_{2n}$ y $S_n = \gamma([t_{2n-1}, t_{2n}])$, $\forall n$. Reordenando los segmentos S_n de tal forma que $t_{2n} < t_{2n+2} \forall n$ y usando de nuevo que no hay puntos de γ en el interior de los segmentos se deduce que $t_{2n} \leq t_{2n+1} < t_{2n+2}$, siendo así $\{t_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión creciente.

Como $[0, 1]$ es compacto, $\{t_{2n}\}_{n \geq 1}$ tiene una subsucesión que converge a $s \in [0, 1]$. Eliminando los elementos de $\{t_{2n}\}_{n \geq 1}$ que no están en la subsucesión y sus correspondientes segmentos, podemos suponer que la sucesión $\{t_{2n}\}_{n \geq 1}$ converge a s . Por ser creciente, toda la sucesión $\{t_n\}_{n \geq 1}$ converge a s . Sea $p = \gamma(s)$.

Ahora bien, como $p_n \rightarrow p$ y $p_n \in \gamma_2([0, 1])$ compacto, entonces $p \in \gamma_2([0, 1])$. Puesto que $\gamma_3([0, 1]) \subset \text{int}(\gamma_2([0, 1]))$ entonces $p \notin \gamma_3([0, 1])$ y por encontrarnos en un espacio de Hausdorff (en el que se separan puntos de compactos) y ser $\gamma_3([0, 1])$ compacto entonces existe un entorno de p , U_p , tal que $U_p \cap (\gamma_3([0, 1])) = \emptyset$.

Usando la convergencia de la sucesión y la continuidad de γ se obtiene que $S_n \subset U_p$ para todo $n \gg 0$, en contra de que $U_p \cap (\gamma_3([0, 1])) = \emptyset$, demostrando así la proposición. \square

Teorema 1.21. Toda superficie S (compacta y conexa) es triangulable.

Demostración. Para cada $p \in S$ denotemos por $D(p)$ un disco abierto del plano, homeomorfo a U_p , abierto de S , con $p \in U_p$. A este homeomorfismo lo denotaremos por $\theta_p : D(p) \rightarrow U_p$.

Sean $Q_1(p)$ y $Q_2(p)$ dos cuadriláteros en $D(p)$ tales que $Q_1(p) \subseteq \text{int}(Q_2(p))$ y $p \in \theta_p(\text{int}(Q_1(p)))$.

Al ser S compacto, existen $p_1, \dots, p_n \in S$ tales que $S = \bigcup_{i=1}^n \theta_{p_i}(\text{int}(Q_1(p_i))) = \bigcup U_{p_i}$. Fijemos $D(p_1), \dots, D(p_n)$ asumiendo que son disjuntos dos a dos. Lo que haremos será modificar θ_{p_i} y considerar nuevos $Q_1(p_i)$, $i = 1, \dots, n$, (sin cambiar $D(p_i)$ ni U_{p_i}), buscando que (poniendo como vértices las intersecciones de $\theta_i(Q_1(p_i))$) se construya un grafo que nos permita triangular S .

Supongamos, por inducción en k , que $Q_1(p_1), \dots, Q_1(p_{k-1})$ se han elegido tal que cualesquiera dos de entre $\theta_{p_1}(Q_1(p_1)), \dots, \theta_{p_{k-1}}(Q_1(p_{k-1}))$ tienen un número finito de puntos en común en S . Centrémonos en $Q_2(p_k)$. Consideremos la definición de segmento malo y de segmento muy malo de la proposición 1.20 para $\gamma^j = \theta_j(Q_1(p_j)), j = 1, \dots, k-1$, $\gamma_2 = \theta_k(Q_2(p_k))$ y $\gamma_3 = \theta_k(Q_3(p_k))$, siendo $Q_3(p_k)$ un cuadrilátero tal que $Q_1(p_k) \subseteq \text{int}(Q_3(p_k))$ y $Q_3(p_k) \subseteq \text{int}(Q_2(p_k))$. Por la proposición, llegamos a la conclusión de que hay un número finito de tales segmentos muy malos. Llamemos *segmento malo/muy malo dentro de $Q_2(p_k)$* al segmento $\theta_{p_k}^{-1}(Q_{p_j}(S)) \subseteq Q_2(p_k)$, donde S es un segmento malo/muy malo en $Q_1(p_j)$, $j = 1, \dots, k-1$. Entonces el conjunto de los segmentos muy malos en $Q_2(p_k)$, junto con $Q_2(p_k)$ forman un grafo plano 2-conexo, llamémoslo Γ . Este Γ contiene nuevos vértices obtenidos de la intersección de los segmentos muy malos, pero aún así sabemos que es un número finito de vértices, gracias a la hipótesis de inducción.

Aplicamos el corolario 1.18 a Γ , y obtenemos un homeomorfismo del plano que “redibuja” Γ sin cambiar $D(p_k)$, y lo convierte en un grafo con aristas poligonales. Este homeomorfismo se compone con θ_k para dar un nuevo homeomorfismo de $D(p_k)$ en U_{p_k} (que seguimos denotando igual). Este proceso transforma $Q_1(p_k)$ y $Q_3(p_k)$ en dos curvas cerradas y simples Q'_1 y Q'_3 tales que $\text{int}(Q'_1) \subseteq \text{int}(Q'_3)$ y $p_k \in \text{int}(\theta_{p_k}(Q'_1))$, $Q_2(p_k)$ no cambia y ahora los segmentos muy malos son poligonales.

Veamos que hay un camino poligonal, Q''_3 , en $\text{int}(Q_2(p_k))$ tal que $Q'_1 \subseteq \text{int}(Q''_3)$ y Q''_3 no corta a los segmentos malos salvo a los segmentos muy malos y en un número finito de puntos dentro de $Q_2(p_k)$. Para ello, $\forall q \in Q'_3$ sea $R(q)$ un cuadrado con q como centro tal que $R(q)$ no corta a Q'_1 y corta a los segmentos muy malos solo en un número finito de puntos. Obtenemos así un recubrimiento finito (debido a la compacidad) de Q'_3 por tales cuadrados. La unión de esos cuadrados es 2-conexa y su ciclo interior juega el papel de Q''_3 .

La unión del grafo Γ' con Q''_3 es 2-conexa, y usando igual que antes el Corolario 1.18 se puede redibujar (cambiando de nuevo θ_k) tal que Q''_3 es un rectángulo con Q_1 en su interior. Redefiniendo $Q_1(p_k) := Q''_3$ se tiene que ahora $\theta_{p_k}(Q_1(p_k))$ tiene solo un número finito de puntos en común con $\theta_{p_j}(Q_1(p_j))$ con $j = 1, \dots, k-1$, demostrando así la inducción.

Al terminar el proceso anterior, $\bigcup_{i=1}^n \theta_{p_i}(Q_1(p_i))$ es ahora un grafo, G , en S cuyos vértices son exactamente las intersecciones de los $\theta_j(Q_1(p_j))$, $j = 1, \dots, k$ y sus aristas son segmentos de algún $\theta_j(Q_1(p_j))$, $j = 1, \dots, k$. Además en cada $Q_1(p_j)$, $j = 1, \dots, k$ se ha construido un grafo plano con todos sus lados poligonales al que llamaremos Γ_j .

Si nos fijamos en una cara de G , cada una de las aristas de su borde es un segmento de algún $\theta_k(Q_1(p_k))$, y eligiendo el k máximo se obtiene que la cara es imagen por θ_k de una cara de Γ_k . Puesto que dicha cara es poligonal, se puede triangular sin cambiar los vértices, y los triángulos obtenidos se llevan por el homeomorfismo θ_k a una triangulación de la cara correspondiente de G , que no añade vértices. Si se hace esto con cada cara, se obtiene finalmente una triangulación de S . \square

Capítulo 2

Superficies como cocientes de polígonos

La aplicación $f : I \times I \rightarrow S^2$ definida como

$$f(s, t) = ((R + r \cos 2\pi s) \cos 2\pi t, (R + r \cos 2\pi s) \sin 2\pi t, r \sin 2\pi s)$$

es una aplicación cociente. Por tanto T_2 es homeomorfo al cociente de $I \times I$ donde los lados se identifican como en la figura 1.

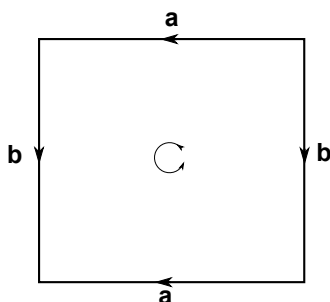


Figura 1

Para el caso de $P^2(\mathbb{R})$, es conocido que es homeomorfo al cociente de una circunferencia identificando los puntos antipodales, y por tanto es homeomorfo al cociente de $I \times I$ donde los lados se identifican como en la figura 2.

En este capítulo vamos a generalizar esta situación a cualquier superficie, lo que se va a poder hacer gracias a las triangulaciones. Antes de seguir vamos a hacer un breve repaso del grupo fundamental.

2.1. Algunos resultados sobre el grupo fundamental.

En este apartado enunciaremos conceptos y resultados básicos sobre el grupo fundamental, que se puede encontrar en Munkres [3] y Greenberg [5].

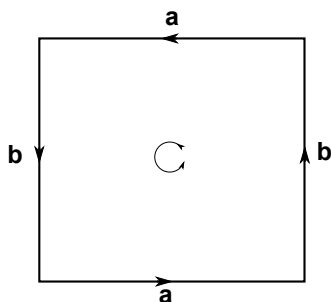


Figura 2

Definición 2.1. Sean X e Y espacios topológicos y sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas y $A \subset X$. Se dice que f y g son homótopas, y se escribe $f \simeq g$, si existe una aplicación $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que:

1. F es continua.
2. $F(x, 0) = f(x), \forall x \in X$.
3. $F(x, 1) = g(x), \forall x \in X$

Una aplicación F con estas características se llama homotopía entre f y g .

Se dice que f y g son homótopas relativamente a A , y se escribe $f \simeq g \text{ rel } A$, si existe una homotopía $F : X \times I \rightarrow Y$ entre f y g tal que además:

4. $F(a, t) = f(a) = g(a), \forall a \in A, t \in I$

Definición 2.2. Sea $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ dos caminos tales que $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = \beta(1)$ son homótopos si $\alpha \simeq \beta \text{ rel } \{0, 1\}$

Teorema 2.3. Sean Y un subespacio de \mathbb{R}^n . Dadas $f, g : X \rightarrow Y$ continuas y tales que para todo $x \in X$ el segmento de \mathbb{R}^n que une $f(x)$ con $g(x)$ está totalmente contenido en Y . Entonces se tiene $f \simeq g \text{ rel } A$, siendo $A = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$.

Definición 2.4. Sean X e Y espacios topológicos.

1. Se dice que una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica si existe una aplicación continua $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq Id_Y$ y $f \circ g \simeq Id_X$
2. Se dice que X e Y son homotópicamente equivalentes, o que tienen el mismo tipo de homotopía, si existe una equivalencia homotópica $f : X \rightarrow Y$. Se escribe $X \simeq Y$

Proposición 2.5. Dos espacios homeomorfos son también homotópicamente equivalentes.

Definición 2.6. Sea $A \subset X$. Decimos que A es un retracto de X si existe una aplicación continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r|_A$ es la aplicación identidad. A esta aplicación se la conoce como retracción de X en A . Si además r cumple que $i \circ r \simeq Id_X$, siendo $i : A \rightarrow X$ la inclusión, entonces se dice que r es una retracción por deformación, y que A es un retracto por deformación de X .

Teorema 2.7. *Si A es un retracto por deformación de X entonces $X \simeq A$.*

Ejemplo. *La aplicación $r : B - \{0\} \rightarrow S^1$ dada por $r(x) = x/\|x\|$ es una retracción por deformación, como consecuencia del teorema 2.3.*

Definición 2.8. *Se dice que un espacio X es contráctil si es homotópicamente equivalente a un punto.*

Ejemplos.

1. *Todo subespacio estrellado de \mathbb{R}^n es contráctil, como consecuencia del teorema 2.3.*
2. *Obviamente, si para algún $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es retracto por deformación de X entonces X es contráctil (de hecho, el recíproco también es cierto).*

Definición 2.9. *Dado un espacio topológico X , y fijado un punto $x_0 \in X$, se define el grupo fundamental, $\pi_1(X, x_0)$, como el conjunto de clases de homotopía de caminos cerrados (lazos), $f : [0, 1] \rightarrow X$, tales que $f(0) = f(1) = x_0$, bajo la operación, $[f] * [g] = [f \cdot g]$ inducida por la concatenación de lazos en x_0 .*

Teorema 2.10. *Si X es un espacio topológico conexo por caminos, los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$, con $x_0, x_1 \in X$, son isomorfos.*

Proposición 2.11.

1. *Dados espacios topológicos X e Y , $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, y una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x_0) = y_0$, (escribiremos $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$), entonces la aplicación $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ dada por $f_*([h]) = [f \circ h]$ para todo $[h] \in \pi_1(X, x_0)$ está bien definida y es homomorfismo de grupos.*
2. *Sean X, Y, Z espacios topológicos con $x_0 \in X, y_0 \in Y$ y $z_0 \in Z$. Dadas aplicaciones continuas $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, entonces*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Además si $i : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ es la aplicación identidad, entonces i_ es el homomorfismo identidad.*

Teorema 2.12. 1. *Si $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ son homótopas, entonces f_* es un isomorfismo si y solo si lo es g_* .*

2. *Sea $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ continua. Si f es una equivalencia homotópica entonces*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

es un isomorfismo.

Ejemplo. *Obviamente, el grupo fundamental de una bola B^2 menos un punto interior es isomorfo al grupo fundamental de la esfera S^1 .*

Definición 2.13. *Decimos que un espacio es simplemente conexo si es conexo por caminos y su grupo fundamental es trivial.*

Ejemplo. *Todo espacio contráctil, por ejemplo la bola unidad, es simplemente conexo.*

Definición 2.14. *Sea X un espacio de Hausdorff que es la unión de subespacios S_i , con $i = 1, \dots, n$, tal que cada S_i es homeomorfo a la circunferencia. Supongamos que existe un punto $p \in X$ tal que $S_i \cap S_j = \{p\}$ siempre que $i \neq j$. Entonces llamaremos a X el espacio unión por un punto de las circunferencias S_1, \dots, S_n , también se suele llamar flor de n pétalos.*

Vamos ahora a describir los grupos fundamentales de algunas figuras básicas.

Teorema 2.15. *La n -esfera $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, es simplemente conexa para $n \geq 2$.*

Teorema 2.16. *El grupo fundamental de S^1 es cíclico infinito (y por tanto isomorfo a \mathbb{Z}). De hecho, si f es un lazo en p obtenido al dar una vuelta a S^1 en sentido antihorario, entonces $[f]$ es un generador de $\pi_1(S^1, p)$.*

Teorema 2.17. *Sea X la unión por un punto de las circunferencias S_1, \dots, S_n ; sea p el punto común a las circunferencias. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo libre con n generadores. De hecho, si f_i es un lazo en S_i que representa un generador de $\pi_1(S_i, p)$, entonces las clases $[f_1], \dots, [f_n]$ son un sistema de generadores libres para $\pi_1(X, p)$.*

2.2. Superficies y polígonos.

Mostraremos en esta sección dos teoremas que serán fundamentales para el teorema de clasificación.

Teorema 2.18. *Sea X una superficie compacta triangulable. Consideremos una triangulación A_1, \dots, A_n de X . Entonces para cada arista e de un triángulo A_i , existe un único triángulo A_j tal que $A_i \cap A_j = e$.*

Demostración. Sean $h_i : T_i \rightarrow A_i$ los homeomorfismos correspondientes, siendo T_1, \dots, T_n triángulos en \mathbb{R}^2 .

Empecemos por probar que si e es arista de A_i existe al menos otro A_j , $j \neq i$, tal que $A_i \cap A_j = e$. De no ser así, eligiendo un punto del interior de e y trasladando mediante el homeomorfismo h_i y una carta local en el punto la situación a \mathbb{R}^2 , tendríamos un triángulo plano T y un punto x del interior de una de las aristas de T , tal que x tiene un entorno en T homeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^2 . Veamos que esto es imposible. Primero observemos que existen entornos $W = B(x, \epsilon) \cap T$ de x tan pequeños como se quiera, tal que $W - \{x\}$ es contráctil (pues es estrellado), y por tanto $W - \{x\}$ es simplemente conexo (Figura 3).

Sea U un entorno de x en T homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^2 (que podemos suponer la bola abierta unidad), y supongamos que el homeomorfismo lleva x en el origen 0. Veamos que no existen entornos V de 0 contenidos en U y tal que V es simplemente conexo.

Sea B la bola abierta unidad de \mathbb{R}^2 centrada en el origen, y supongamos que V es un entorno cualquiera de 0 tal que $V \subset B$. Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño

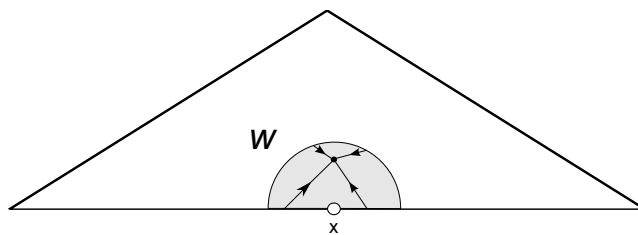


Figura 3

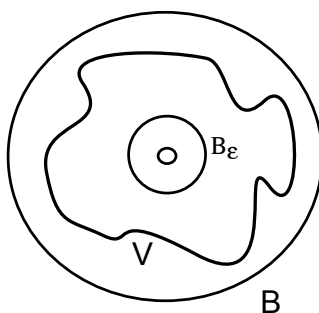


Figura 4

para que la bola abierta centrada en el origen y de radio ϵ , B_ϵ , esté contenida en V , (Figura 4), y consideremos las aplicaciones de inclusión:

$$\begin{array}{ccc}
 B_\epsilon - \{0\} & \xrightarrow{i} & B - \{0\} \\
 & \searrow j & \nearrow k \\
 & V - \{0\} &
 \end{array}$$

La inclusión i es homótopa al homeomorfismo de $B_\epsilon - \{0\} \rightarrow B - \{0\}$ dado por $h(x) = x/\epsilon$ (ya que el segmento que une x con x/ϵ está contenido en $B - \{0\}$), y esto implica que $i_* : \pi_1(B_\epsilon - \{0\}) \rightarrow \pi_1(B - \{0\})$ es un isomorfismo, por lo que $j_* : \pi_1(B_\epsilon - \{0\}) \rightarrow \pi_1(V - \{0\})$ es inyectiva y $k_* : \pi_1(V - \{0\}) \rightarrow \pi_1(B - \{0\})$ es sobreyectiva. Puesto que $\pi_1(B - \{0\}) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(V - \{0\})$ no es trivial, luego $V - \{0\}$ no es simplemente conexo, llegando así a un absurdo.

Veamos ahora que el número de triángulos A_i que tienen una misma arista en común no puede ser mayor que 2. Observemos que de lo contrario encontraríamos $k \geq 3$ triángulos en \mathbb{R}^3 con una arista común y tal que un punto x del interior de dicha arista tendría un entorno en la unión de los triángulos homeomorfo a una bola abierta.

Sea T la unión de $k \geq 3$ triángulos en \mathbb{R}^3 cada par de los cuales se corta en la arista común e . Sea x un punto del interior de e .

Primero observemos que si A es la unión de todas las aristas de los triángulos de T que son distintas de e , entonces el grupo fundamental de A no es abeliano. Esto es porque si B es la unión de tres arcos que forman A , entonces existe una retracción

r de A sobre B , que se obtiene aplicando homeomórficamente cada uno de los arcos que no están en B en uno de los arcos en B , manteniendo fijos los extremos.

Entonces $r_* : \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(B)$ es un homomorfismo sobreyectivo y como B es homotópicamente equivalente al “espacio ocho” (“unión” de dos circunferencias con un punto en común), entonces su grupo fundamental no es abeliano luego tampoco lo es el de A (ya que un cociente de un grupo abeliano no es abeliano). Además A es un retracto por deformación de $T - \{x\}$, siendo la retracción la obtenida “pegando” las aplicaciones $r_i : T_i - \{x\} \rightarrow A$ que a cada $R \in T_i - \{x\}$ le hace corresponder el único $r_i(R) = (1 - \lambda)x + \lambda R$ perteneciente a A , luego el grupo fundamental de $T - \{x\}$ no es abeliano.

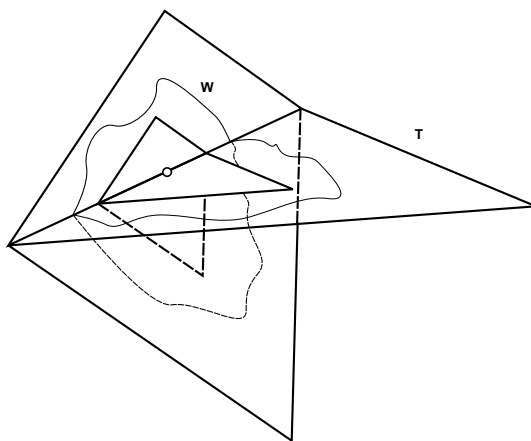


Figura 5

Supongamos que el punto x es el origen de \mathbb{R}^3 . Si W es un entorno de 0 en T , existe un ϵ tal que si $f(x) = x\epsilon$ entonces $T_{\epsilon} = f(T) \subset W$, es una copia de T contenida en W , (Figura 5). Consideremos las aplicaciones:

$$\begin{array}{ccc} T_{\epsilon} - \{0\} & \xrightarrow{f^{-1}} & T - \{0\} \\ & \searrow j & \nearrow k \\ & W - \{0\} & \end{array}$$

f^{-1} es un homeomorfismo, así que induce un isomorfismo de grupos fundamentales. Por tanto, k_* es sobreyectiva, luego el grupo fundamental de $W - \{0\}$ no puede ser abeliano y por tanto no puede ser W homeomorfo a una bola abierta, ya que el grupo fundamental de un disco menos el centro sí es abeliano. □

Lema 2.19. Sean T_1, \dots, T_n triángulos planos disjuntos de forma que existe un emparejamiento en el conjunto de sus aristas tal que dos aristas emparejadas pertenezcan a distintos triángulos y un homeomorfismo entre cada dos aristas emparejadas, es decir, existe una partición en subconjuntos de cardinal dos y un homeomorfismo entre los elementos de cada subconjunto. Dados $P_1, P_2 \in T_1 \cup \dots \cup T_n$, escribiremos

$P_1\mathcal{R}_1P_2$ si $P_1 = P_2$ o si $P_1 \neq P_2$ y P_1, P_2 pertenecen al interior de aristas diferentes pero emparejadas y P_1, P_2 se corresponden por el homeomorfismo.

Entonces, la relación \mathcal{R} definida de la siguiente manera:

$$PRQ \text{ si existe } P_1, \dots, P_n \text{ tales que } P = P_1\mathcal{R}_1P_2\dots P_{n-1}\mathcal{R}_1P_n = Q$$

es una relación de equivalencia.

Demostración. Las propiedades reflexiva y simétrica son consecuencia de la definición de la relación \mathcal{R}_1 y la propiedad transitiva de la definición de \mathcal{R} , es “transitiviza” \mathcal{R}_1 □

Definición 2.20. En las condiciones del lema anterior, diremos que el espacio cociente $T_1 \cup \dots \cup T_n / \mathcal{R}$ se ha obtenido pegando las aristas $T_1 \cup \dots \cup T_n$ por pares.

Teorema 2.21. Si X es una superficie compacta, entonces X es homeomorfo al espacio cociente obtenido de una colección de triángulos planos disjuntos pegando sus aristas por pares.

Demostración. Puesto que X es triangulable, existe una triangulación A_1, \dots, A_n de X . Sean $h_i : T_i \rightarrow A_i$ los homeomorfismos correspondientes. Suponemos que los triángulos T_i son disjuntos; entonces las aplicaciones h_i se combinan para definir una aplicación $h : E = T_1 \cup \dots \cup T_n \rightarrow X$ que al ser E compacto y X Hausdorff, es una aplicación cociente. Además, del teorema 2.18 se deduce que se tiene un emparejamiento de las aristas, estando en las condiciones del lema 2.19 (los homeomorfismos entre aristas emparejadas son las restricciones de los homeomorfismos $h_i^{-1} \circ h_j$ a las aristas).

Falta ver que $h(P) = h(Q) \Leftrightarrow PRQ$ (denotando por \mathcal{R} la relación definida en el lema); el único problema es ver que si $h(P) = h(Q)$ es un vértice de la triangulación entonces PRQ . Para probar esto probaremos que si A_i y A_j se cortan en un vértice v , entonces existe una sucesión de triángulos que tiene a v por vértice, comenzando por A_i y acabando en A_j , tal que la intersección de cada dos triángulos consecutivos de la sucesión es una arista de ambos (Figura 6).

Dado un vértice v y dos triángulos A_i y A_j que tienen a v como vértice, se dice que son equivalentes si existe una sucesión de triángulos que tienen a v por vértice, comenzando por A_i y acabando en A_j , tal que la intersección de cada dos triángulos consecutivos de la sucesión es una arista de ambos. Si existe más de una clase de equivalencia, entonces estas dos clases de equivalencia solo comparten v , ya que ningún triángulo de una clase tiene una arista en común con otro triángulo de otra clase. Entonces, para cada entorno W de v en X , el espacio $W - \{v\}$ no sería conexo (Figura 7).

Por otro lado, si X es una superficie, entonces existe un entorno W de v que es homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^2 . Así pues, $W - \{v\}$ debe ser conexo, de lo que se deduce que solo puede haber una clase de equivalencia. □

Teorema 2.22. Si X es una superficie compacta y conexa, entonces X es homeomorfa a un espacio obtenido de un polígono plano pegando sus aristas por pares (noción análoga a la ya definida para triángulos).

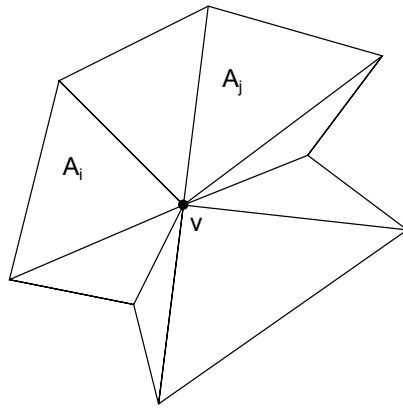


Figura 6

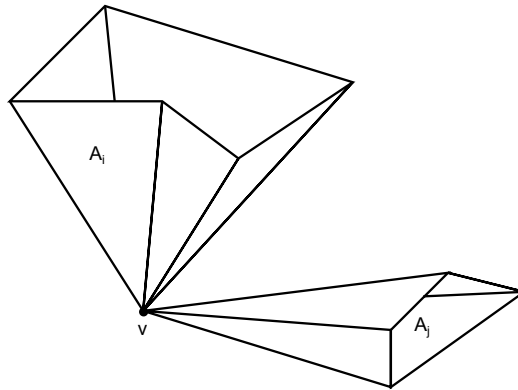


Figura 7

Demostración. Se sigue del Teorema 2.21 que existe una colección T_1, \dots, T_n de triángulos planos tal que X es homeomorfo al espacio cociente obtenido al pegar sus aristas por pares. La relación de equivalencia, \mathcal{R} , definida en el lema 2.19 pega todos los triángulos en un solo paso, pero veamos que este paso se podría descomponer en $n - 1$ pasos, obteniendo un espacio homeomorfo, de la siguiente manera:

Si dos triángulos T_1 y T_2 tienen dos aristas, una en cada uno, emparejadas, entonces nuestra relación de equivalencia restringida a $T_1 \cup T_2$ pegará los dos triángulos a lo largo de esas dos aristas obteniendo $(T_1 \cup T_2)/\mathcal{R}$ que es homeomorfo a un polígono de cuatro lados y que "contiene" a las aristas de T_1 y T_2 que no se han pegado (seguimos denotando por \mathcal{R} a la restricción de la relación). Sea ahora T_3 otro triángulo distinto de los anteriores que tenga una de sus aristas relacionada mediante \mathcal{R} con nuestro polígono $(T_1 \cup T_2)/\mathcal{R}$. Entonces de nuevo la relación de equivalencia pegará el polígono $(T_1 \cup T_2)/\mathcal{R}$ con el triángulo T_3 a lo largo de la arista relacionada, obteniendo así un polígono de cinco lados $((T_1 \cup T_2)/\mathcal{R}) \cup T_3/\mathcal{R}$ que es homeomorfo a $T_1 \cup T_2 \cup T_3/\mathcal{R}$. Llegamos así a la situación donde o bien se tiene un polígono de $n + 2$ aristas, en cuyo caso el teorema queda probado, o bien se llega al caso en el que se tiene varios polígonos de manera que una arista de uno de ellos no está emparejada con una de otro. En tal caso, el espacio que se obtiene realizando

los pegados indicados de aristas no es conexo; de hecho, cada uno de los polígonos da lugar a una componente conexa del espacio. Como X es conexo, esta situación no puede ocurrir. \square

Capítulo 3

Esquemas poligonales

Una vez visto que toda superficie es cociente de un polígono por identificación de pares de sus aristas, vamos en este capítulo a sistematizar el estudio de este tipo de espacios, con vista al teorema de clasificación.

3.1. Esquemas poligonales. Equivalencias.

Observemos que gracias al teorema de Jordan-Schönflies, dos polígonos con el mismo número de vértices son homeomorfos. Por ello nos limitaremos a considerar polígonos convexos.

Por fijar ideas, consideraremos siempre polígonos inscritos en una circunferencia. Dado puntos p_1, \dots, p_n , $n \geq 3$, en una circunferencia llamaremos *polígono determinado por* p_1, \dots, p_n a la envolvente convexa de $\{p_1, \dots, p_n\}$, es decir, el conjunto de combinaciones del tipo $\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ y $\lambda_i \geq 0$, $\forall i$. En ocasiones escribiremos $p_0 = p_n$. Obsérvese que si q_1, \dots, q_n son también puntos en una circunferencia, la correspondencia $\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n \rightarrow \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_n q_n$ define un homeomorfismo entre los polígonos determinados por ambos conjuntos de puntos. Vamos a entender siempre que escribimos los vértices ordenados en sentido antihorario.

Dado un segmento L , llamaremos *orientación* de L a una ordenación de sus extremos, al primero de la cual llamaremos *punto inicial* y al otro *punto final*. Al igual que en el caso de polígonos, dados segmentos L_1 y L_2 de extremos p_1, q_1 y p_2, q_2 , la aplicación $(1 - \lambda)p_1 + \lambda q_1 \rightarrow (1 - \lambda)p_2 + \lambda q_2$ es un homeomorfismo entre ambos que “conserva la orientación”.

Definición 3.1. *Sea P un polígono. Un etiquetado de las aristas de P es una aplicación del conjunto de las aristas de P en un conjunto llamado conjunto de etiquetas.*

Definición 3.2. *Sea P el polígono determinado por p_1, \dots, p_n , etiquetado y en el que se ha establecido una orientación en sus aristas. Sea a_{i_k} la etiqueta asignada a la arista $p_{k-1}p_k$, y sea $\epsilon_k = 1$ si el punto inicial de la arista es p_{k-1} y su punto final es p_k , en caso contrario $\epsilon = -1$. Se llama esquema de longitud n de las aristas de P a*

$$w = (a_{i_1})^{\epsilon_1} \dots (a_{i_n})^{\epsilon_n}$$

Llamaremos esquema propio a un esquema de longitud n donde cada etiqueta aparece exactamente dos veces en el esquema.

Dado un esquema poligonal en un polígono P , se define una relación de equivalencia en P con el siguiente criterio: dos puntos distintos están relacionados si pertenecen a dos aristas (distintas) con la misma etiqueta y se corresponden entre sí por el homeomorfismo entre ambas que conserva la orientación (hay que “transitivizar” esta relación al igual que se hizo en el lema 2.19 para evitar problemas en los vértices).

Definición 3.3. Diremos que el espacio cociente de P por la relación anterior se ha obtenido “pegando” las aristas de P según el esquema inicial.

Ejemplos.

1. Como ya hemos visto en el capítulo anterior, el toro y el plano proyectivo se obtienen por pegado de polígonos siguiendo un esquema. En el caso del toro, el esquema es $aba^{-1}b^{-1}$ y en el caso del plano proyectivo real $abab$, ver figura 8.

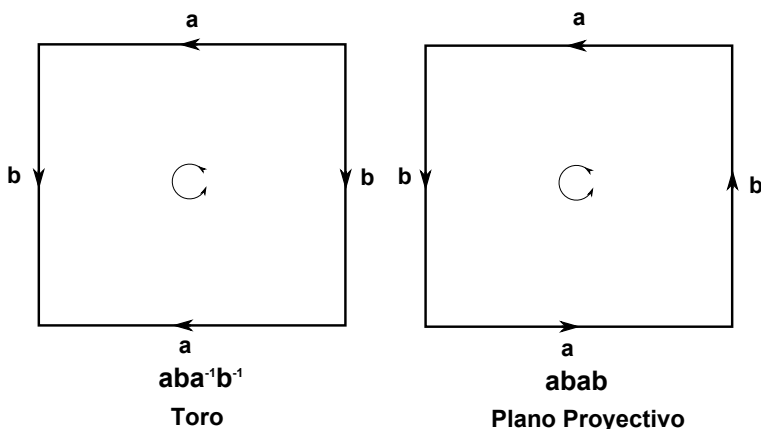


Figura 8

2. Vamos a ver que la esfera también se puede escribir como cociente de un cuadrado:

Sean $H_+ = S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}$ y $H_- = S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \leq 0\}$, ambos cerrados en S^2 . Es claro que $S^2 = H_+ \cup H_-$. Sea $f : S^2 - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección estereográfica desde el punto $(0, 0, 1)$ y sea $g : S^2 - \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección estereográfica desde el punto $(0, 0, -1)$. Entonces se tiene que H_- y H_+ son homeomorfos a la bola cerrada unidad, B^2 , por proyección estereográfica desde $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$ respectivamente. Consideremos cuadrados C_1 y C_2 disjuntos en el plano y homeomorfismos $h_1 : C_1 \rightarrow B^2$ y $h_2 : C_2 \rightarrow B^2$ tales que $h_2^{-1} \circ h_1$ es la transformación afín positiva de C_1 en C_2 . Entonces $f^{-1} \circ h_1$ y $g^{-1} \circ h_2$ se unen en una aplicación cociente $h : C_1 \cup C_2 \rightarrow S^2$, tal que la relación asociada pega cada arista de C_1 con la arista correspondiente de C_2 .

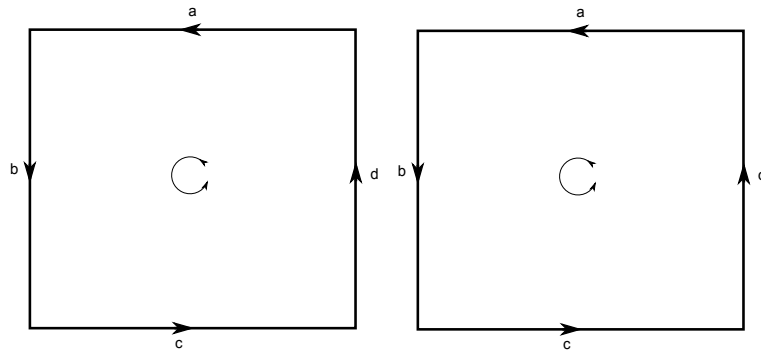


Figura 9

Es decir, se tiene el espacio cociente representado por la figura 9. Haciendo las identificaciones por pasos sucesivos (primero pegando d con d , y luego pegando a con a) se obtiene el esquema de la esfera S^2 , ver figura 10.

Dicho esquema es $b^{-1}bcc^{-1}$, y reescribimos $a = b^{-1}$ y $b = c$, es $aa^{-1}bb^{-1}$.

En el último ejemplo se ve que no tenemos por qué centrarnos solo en un polígono. Dado un número finito de polígonos disjuntos, orientados y etiquetados, podemos construir el espacio cociente pegando sus aristas al igual que en el caso de un único esquema. Separaremos por comas los esquemas de cada polígono para denotar el esquema del espacio cociente obtenido. Este espacio cociente no tiene por qué ser conexo.

Sea P un polígono con vértices sucesivos $p_0, \dots, p_n = p_0$. Sea k , con $1 < k < n - 1$, y consideremos los polígonos Q_1 , con vértices sucesivos $p_0, p_1, \dots, p_k, p_0$, y Q_2 con vértices sucesivos $p_0, p_k, \dots, p_n = p_0$. Ambos tienen en común la arista p_0p_k y P es su unión.

Definición 3.4. Sea Q'_1 el polígono obtenido al aplicar una traslación en \mathbb{R}^2 al polígono Q_1 , siendo Q'_1 y Q_2 disjuntos. Se dirá entonces que Q'_1 y Q_2 se han obtenido cortando P a lo largo de p_0p_k .

Observación. Es claro que P es homeomorfo al espacio obtenido al hacer el cociente de $Q'_1 \cup Q_2$ por la relación que pega las aristas p_0p_k de Q_2 con la trasladada de p_0p_k en Q'_1 .

Recíprocamente, supongamos que se tienen dos polígonos disjuntos Q_1 y Q_2 con n_1 y n_2 vértices y fijamos una arista, e_i en cada Q_i . Existe un homeomorfismo entre e_1 y e_2 y mediante dicho homeomorfismo se pueden “pegar” e_1 y e_2 . Es claro que el espacio cociente obtenido es homeomorfo a un polígono P con $n_1 + n_2 - 2$ vértices.

Definición 3.5. Se dirá que P se obtiene de Q_1 y Q_2 pegando Q_1 y Q_2 por las aristas e_1 y e_2 .

Teorema 3.6 (Cortar y pegar aristas). Sea X el espacio obtenido pegando las aristas de m polígonos según el esquema

$$y_0y_1, w_2, \dots, w_m. \tag{3.1}$$

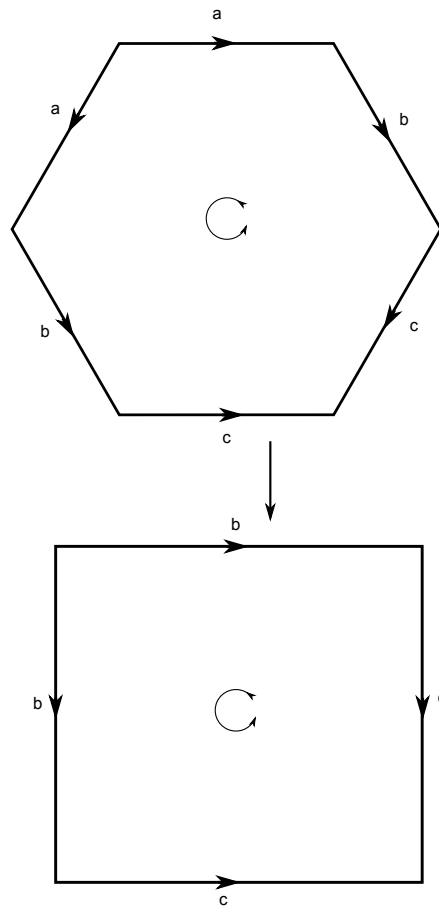


Figura 10

Sea c una etiqueta que no aparece en el esquema anterior. Si ambos y_0 e y_1 tienen longitud al menos dos, entonces X se puede obtener pegando la aristas de $m + 1$ polígonos según el esquema

$$y_0c^{-1}, cy_1, w_2 \dots w_m. \tag{3.2}$$

Recíprocamente, si X es el espacio obtenido de $m + 1$ polígonos por medio del esquema (3.2), también se puede obtener de m polígonos mediante el esquema (3.1), siempre que c no aparezca en el esquema (3.1).

Demostración. Sean P_1, \dots, P_n polígonos disjuntos con esquemas w_1, \dots, w_n donde $w_1 = y_0y_1$, siendo y_0 los k primeros términos de w_1 e y_1 los demás. Cortamos P a lo largo de la arista p_0p_k como antes, obteniendo Q'_1 y Q_2 . Asignando la etiqueta c (la cual no está en el esquema) a las aristas p_0p_k de Q'_1 y Q_2 , sus esquemas, son y_0c^{-1} y cy_1 respectivamente, y se tiene la colección de esquemas $y_0c^{-1}, cy_1, w_2, \dots, w_n$. Es inmediato que el espacio X puede ser obtenido a partir de los polígonos $Q_1, Q_2, P_2, \dots, P_m$ por medio de este esquema ya que la composición de aplicaciones cociente es de nuevo una aplicación cociente, es decir, no importa si pegamos todas las aristas de una vez o vamos haciendo este proceso por etapas sucesivas.

Por supuesto, este proceso se puede invertir. Si X está representado por un

esquema de los polígonos $Q_1, Q_2, P_2, \dots, P_m$ del tipo $y_0c, cy_1, w_2, \dots, w_n$, el esquema indica que una arista del primero se pega con una del segundo (y ninguna otra arista se pega a ellas), y podemos llevar a cabo el pegado de Q_1 y Q_2 obteniendo P , de esquema y_0y_1 , por lo que X se representa por el esquema y_0y_1, w_2, \dots, w_n . \square

El teorema anterior nos asegura que las operaciones de “cortar” y “pegar” en un esquema no cambian, salvo homeomorfismo, el espacio cociente resultante.

Hay otras “operaciones” a las que les ocurre lo mismo, que mencionaremos a continuación. Las dos primeras ya están justificadas.

Operaciones elementales con esquemas.

1. *Corte.* Se puede sustituir el esquema $w_1 = y_0y_1$ por el esquema y_0c^{-1}, cy_1 , siempre que c no aparezca en algún otro sitio en el esquema total y que y_0 e y_1 sean de longitud al menos dos.
2. *Pegado.* Se puede sustituir el esquema y_0c^{-1}, cy_1 por el esquema y_0y_1 , siempre que c no aparezca en algún otro sitio en el esquema total.
3. *Reetiquetado.* Se pueden sustituir todas las presencias de una etiqueta dada por alguna otra etiqueta que no aparezca en otro lugar del esquema. Esto es algo puramente formal que obviamente no cambia el espacio cociente.
4. *Permutación.* Se puede sustituir cualquiera de los esquemas w_i por una permutación cíclica de w_i . De nuevo es obvio que no se cambia el cociente.
5. *Inversión.* Se puede sustituir el esquema

$$w_i = (a_{i_1})_1^\epsilon \dots (a_{i_n})_n^\epsilon$$

por su inverso

$$w_i^{-1} = (a_{i_n})^{-\epsilon_n} \dots (a_{i_1})^{-\epsilon_1}$$

De esta forma lo único que se hace es cambiar la orientación en todas las aristas, lo que no cambia la relación de equivalencia.

6. *Eliminación.* Se puede sustituir el esquema $y_0aa^{-1}y_1$ por el esquema y_0y_1 , siempre que a no aparezca en algún otro sitio en el esquema total y que y_0 e y_1 sean de longitud al menos dos. Esto es debido a que el proceso equivale a realizar primero un corte, quedando $y_0ab, b^{-1}a^{-1}y_1$, ahora se combinan las dos aristas a y b renombrando a la unión como c , de donde se tiene el esquema $y_0c, c^{-1}y_1$, y después pegando ambos polígonos por c se obtiene y_0y_1 .
7. *Añadido.* Es la operación inversa de la anterior. Consiste en sustituir el esquema y_0y_1 por el $y_0aa^{-1}y_1$, siempre que a no aparezca en algún otro sitio en el esquema total y que y_0 e y_1 sean de longitud al menos dos.

Definición 3.7. *Dos esquemas de colecciones de polígonos se dicen equivalentes si uno se puede conseguir del otro mediante una sucesión de operaciones elementales con esquemas. Como la inversa de cada operación elemental es también elemental, se trata de una relación de equivalencia, que denotaremos por \sim .*

Ejemplo. Los esquemas $abba$ y $ab^{-1}ab$ son equivalentes, ya que

$$\begin{array}{ccccc}
 w & = & abba & \xrightarrow{\text{Corte}} & abc^{-1}, cba \\
 \text{Inversión} & \sim & cb^{-1}a^{-1}, cba & \xrightarrow{\text{Permutación}} & cb^{-1}a^{-1}, acb \\
 \text{Pegado} & \sim & cb^{-1}cb & \xrightarrow{\text{Reetiquetado } a := c} & ab^{-1}ab
 \end{array}$$

El proceso se representa en la figura 11. Por cierto, el espacio cociente del esquema $ab^{-1}ab$ es la botella de Klein, mientras que el de $abba$ es la suma conexa de dos planos proyectivos (definiremos este concepto más adelante).

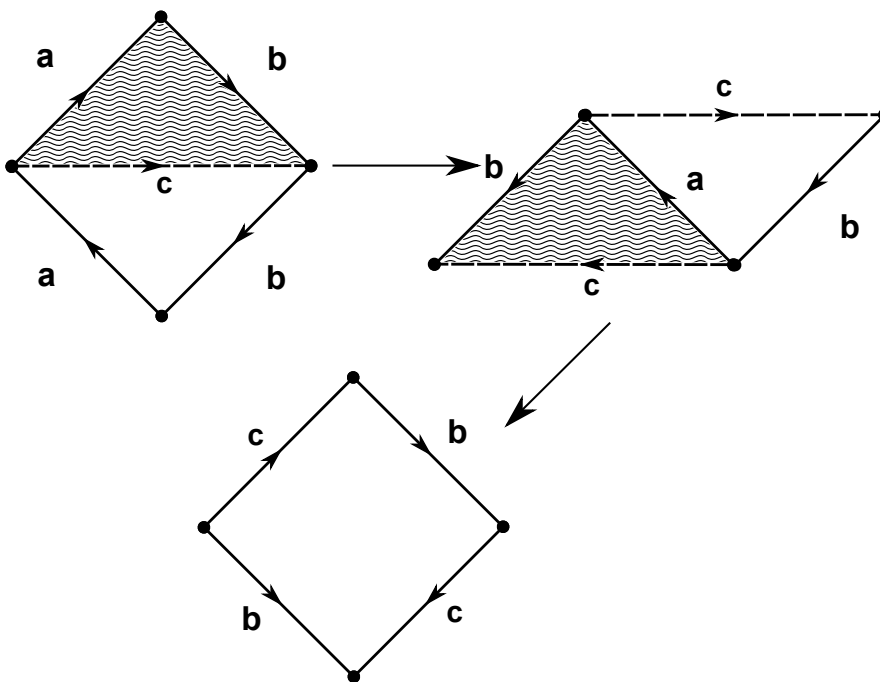


Figura 11

3.2. Clasificación de esquemas poligonales.

Definición 3.8. Sea w un esquema propio de un polígono. Diremos que w es de tipo toro si cada etiqueta aparece en w una vez con exponente $+1$ y otra vez con exponente -1 . En otro caso se dirá que w es de tipo proyectivo.

Proposición 3.9. Sea w un esquema propio de la forma

$$w = y_0 a y_1 a y_2$$

donde alguno de los y_i puede ser vacío. Entonces se tiene la equivalencia

$$w \sim a a y_0 y_1^{-1} y_2$$

Demostración.

Si y_1 es vacío, el resultado es inmediato, en caso contrario se tiene:

1. Si y_0 vacío el resultado se sigue de lo siguiente:

$$\begin{array}{rcccl}
 w & = & ay_1ay_2 & \xrightarrow{\text{Corte}} & ay_1b^{-1}, bay_2 \\
 & \xrightarrow{\text{Inversión}} & by_1^{-1}a^{-1}, bay_2 & \xrightarrow{\text{Permutación}} & by_1^{-1}a^{-1}, ay_2b \\
 & \xrightarrow{\text{Pegado}} & by_1^{-1}y_2b & \xrightarrow{\text{Permutación}} & bby_1^{-1}y_2 \\
 & \xrightarrow{\text{Reetiquetado } a := b} & aay_1^{-1}y_2 & &
 \end{array}$$

2. Si y_2 es vacío entonces el resultado se deduce de 1, ya que $y_0ay_1a \sim ay_0ay_1$.

3. Si ninguno es vacío:

$$\begin{array}{rcccl}
 w & = & y_0ay_1ay_2 & \xrightarrow{\text{Corte}} & y_1ay_2b^{-1}, by_0a \\
 & \xrightarrow{\text{Inversión}} & y_1ay_2b^{-1}, a^{-1}y_0^{-1}b^{-1} & \xrightarrow{\text{Permutación}} & y_2b^{-1}y_1a, a^{-1}y_0^{-1}b^{-1} \\
 & \xrightarrow{\text{Pegado}} & y_2b^{-1}y_1y_0^{-1}b^{-1} & \xrightarrow{\text{Permutación}} & b^{-1}y_2b^{-1}y_1y_0^{-1} \\
 & \xrightarrow{\text{Corte}} & b^{-1}y_2a^{-1}, ab^{-1}y_1y_0^{-1} & \xrightarrow{\text{Inversión}} & ay_2^{-1}b, ab^{-1}y_1y_0^{-1} \\
 & \xrightarrow{\text{Permutación}} & ay_2^{-1}b, b^{-1}y_1y_0^{-1}a & \xrightarrow{\text{Pegado}} & ay_2^{-1}y_1y_0^{-1}a \\
 & \xrightarrow{\text{Inversión}} & a^{-1}y_0y_1^{-1}y_2a^{-1} & \xrightarrow{\text{Permutación}} & a^{-1}a^{-1}y_0y_1^{-1}y_2 \\
 & \xrightarrow{\text{Reetiquetado } a := a^{-1}} & aay_0y_1^{-1}y_2 & &
 \end{array}$$

Este proceso está descrito en la figura 12.

□

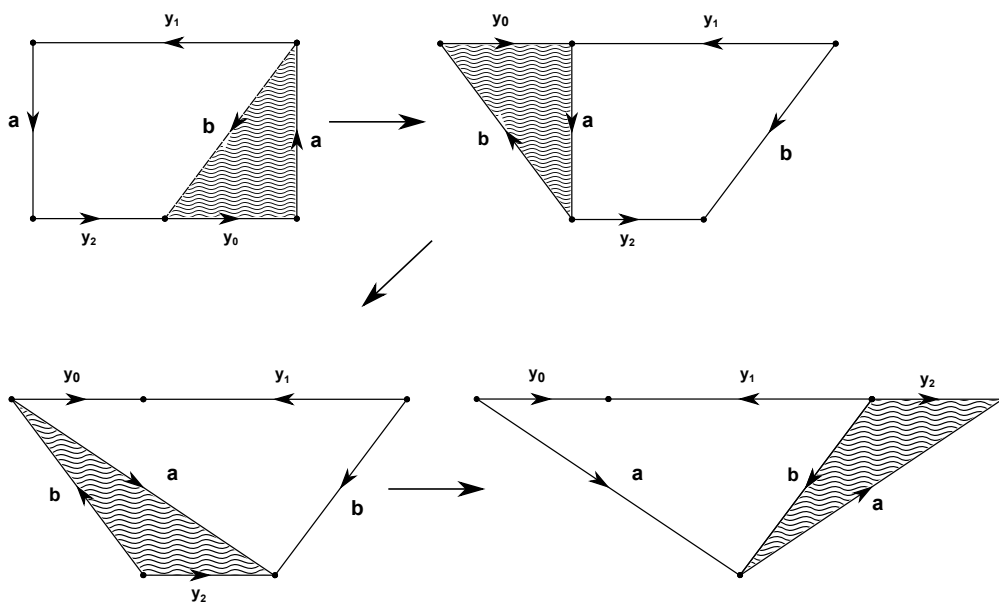


Figura 12

Corolario 3.10. *Si w es un esquema propio de tipo proyectivo, entonces w es equivalente a un esquema de la misma longitud que tiene la forma*

$$(a_1a_1)(a_2a_2)\dots(a_ka_k)w_1$$

donde $k \geq 1$ y w_1 es o bien vacío o bien de tipo toro.

Demostración. Demostrémoslo por inducción en la longitud de w . El esquema w se puede escribir de la forma

$$w = y_0ay_1ay_2$$

Donde alguno de los y_i pueden ser vacíos. Por la proposición 3.9 sabemos que w es equivalente a un esquema de la forma $w' = aaw_1$ que tiene la misma longitud de w . Entonces w_1 tiene menor longitud que w . Aplicando inducción en w_1 se demuestra el corolario. \square

De este corolario se sigue que si w es un esquema propio de un polígono, entonces puede ser:

1. w es de tipo toro.
2. w es equivalente a un esquema de la forma $(a_1a_1)(a_2a_2)\dots(a_ka_k)w_1$, con w_1 vacío o de tipo toro.

Observemos que si w contiene dos términos adyacentes con la misma etiqueta pero exponentes de signo opuesto, entonces la operación de cancelación se puede aplicar para reducir w a un esquema más corto que también es de la forma indicada arriba.

Proposición 3.11. *Sea w un esquema propio de la forma $w = w_0w_1$, donde w_1 es un esquema de tipo toro que no contiene dos términos adyacentes con la misma etiqueta. Entonces w es equivalente a un esquema de la forma w_0w_2 , donde w_2 tiene la misma longitud que w_1 y tiene la forma*

$$w_2 = aba^{-1}b^{-1}w_3$$

donde w_3 es de tipo toro o vacío.

Demostración. Entre la etiquetas que aparecen en w_1 , sea a una cuyas dos apariciones (con exponentes opuestos) sean tan próximas como sea posible. Ambas son no adyacentes, por hipótesis. Cambiando los exponentes, si fuera necesario, podemos suponer que primero encontramos la etiqueta a y luego la a^{-1} . Sea b cualquier etiqueta entre a y a^{-1} , que podemos suponer con exponente $+1$. Entonces el término b^{-1} aparece en w_1 , pero no se puede dar entre a y a^{-1} , pues éstos los hemos supuesto tan próximos como fuera posible. Si b^{-1} aparece a continuación de a^{-1} , ya hemos terminado. Podemos suponer que w es de la forma $w = w_0y_1ay_2by_3a^{-1}y_4b^{-1}y_5$ por la siguiente razón: si aparece antes de a , entonces todo lo que necesitamos hacer es cambiar los exponentes de las etiquetas b y después intercambiar las etiquetas a y b para obtener un esquema de la forma deseada.

Se tiene entonces:

$$\begin{array}{llll}
 w & = & w_0y_1ay_2by_3a^{-1}y_4b^{-1}y_5 & \text{Permutación} \\
 \sim & & & \sim \\
 \text{Corte} & & a^{-1}y_4b^{-1}y_5w_0c, c^{-1}y_1ay_2by_3 & \text{Permutación} \\
 \sim & & & \sim \\
 \text{Pegado} & & y_2by_3c^{-1}y_1y_4b^{-1}y_5w_0c & a := c \\
 \sim & & & \sim \\
 \text{Permutación} & & y_1y_4b^{-1}y_5w_0ay_2by_3a^{-1} & \text{Corte} \\
 \sim & & & \sim \\
 \text{Permutación} & & y_5w_0cy_1y_4b^{-1}, by_3a^{-1}c^{-1}ay_2 & \text{Pegado} \\
 \sim & & & \sim \\
 a := c, b := a^{-1} & & y_5w_0ay_1y_4y_3ba^{-1}b^{-1}y_2 & \text{Permutación} \\
 \sim & & & \sim \\
 \text{Corte} & & b^{-1}y_2y_5w_0c, c^{-1}ay_1y_4y_3ba^{-1} & \text{Permutación} \\
 \sim & & & \sim \\
 \text{Pegado} & & a^{-1}c^{-1}ay_1y_4y_3y_2y_5w_0c & \text{Permutación} \\
 \sim & & & \sim \\
 a := c, b := a^{-1} & & w_0aba^{-1}b^{-1}y_1y_4y_3y_2y_5 &
 \end{array}$$

Este proceso se puede ver representado en las figuras 13, 14 y 15.

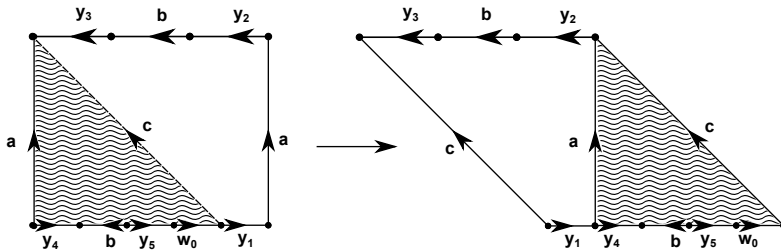


Figura 13

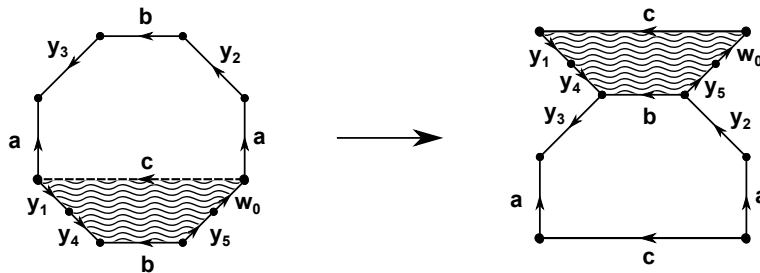


Figura 14

□

Proposición 3.12. *Sea w un esquema propio de la forma*

$$w = w_0ccaba^{-1}b^{-1}w_1$$

Entonces w es equivalente al esquema

$$w' = w_0aabbccw_1$$

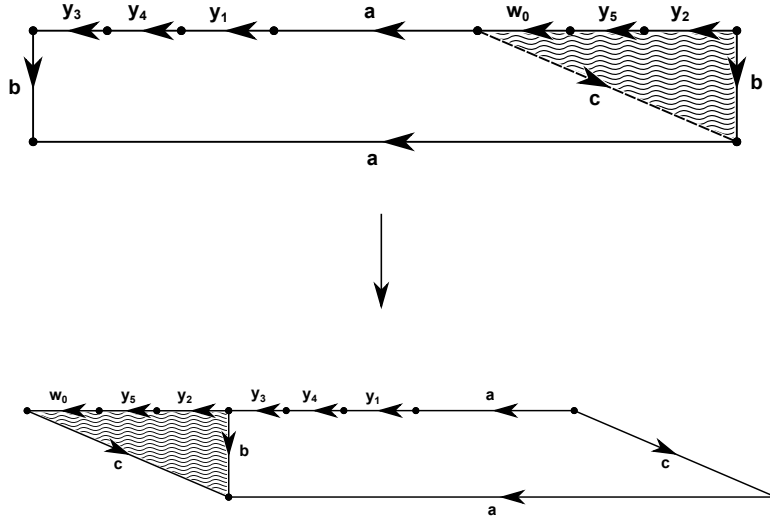


Figura 15

Demostración. Recordemos que la proposición 3.9 establece que para esquemas propios se tiene

$$y_0 a y_1 a y_2 \sim a a y_0 y_1^{-1} y_2$$

Escribimos $w = c c a b a^{-1} b^{-1} w_1 w_0 = c c a b (b a)^{-1} w_1 w_0$.

Aplicando la proposición tres veces tenemos:

$$\begin{array}{llll} y_0 = y_1 = \underbrace{ab}, y_2 = w_1 w_0 & a b c b a c w_1 w_0 & y_0 = a, y_1 = \underbrace{c}, y_2 = a c w_1 w_0 & b b a c^{-1} a c w_1 w_0 \\ y_0 = b b, y_1 = \underbrace{c^{-1}}, y_2 = c w_1 w_0 & a a b b c c w_1 w_0 & \text{Permutación} & w_0 a a b b c c w_1 \end{array}$$

□

Teorema 3.13. *Todo esquema poligonal propio de tipo toro es equivalente a uno del tipo:*

1. $aa^{-1}bb^{-1}$, o
2. $(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) \dots (a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1})$, con $n \geq 1$.

Todo esquema poligonal propio de tipo proyectivo es equivalente a uno del tipo:

3. $abab$, o
4. $(a_1 a_1)(a_2 a_2) \dots (a_m a_m)$, $m \geq 2$.

Demostración.

1. Supongamos en primer lugar que w es un esquema propio de tipo toro. Si w tiene longitud cuatro, entonces es de la forma

$$aa^{-1}bb^{-1}, \text{ o, } aba^{-1}b^{-1}$$

El primero es de tipo (1) y el segundo de tipo (2)

Procedamos por inducción sobre la longitud de w . Supongamos que w tiene longitud mayor que cuatro. Si w es equivalente a un esquema más corto de tipo toro, entonces se aplica la hipótesis de inducción. De no ser así, sabemos que w no contiene pares adyacentes de términos con la misma etiqueta, pues en otro caso se podría aplicar la operación de eliminación. Se aplica la proposición 3.11 (con w_0 vacío) para concluir que w es equivalente a un esquema, con la misma longitud que w pero de la forma

$$aba^{-1}b^{-1}w_3$$

donde w_3 es de tipo toro y no vacío, ya que w tiene longitud mayor que cuatro. Al ser la longitud de w_3 inferior a la de w , aplicando la hipótesis de inducción a w_3 obtenemos el resultado.

2. Sea ahora w un esquema propio de tipo proyectivo. Si w tiene longitud cuatro, el Corolario 3.10 implica que w es equivalente a uno de los esquemas $aabb$ o $aab^{-1}b$. El primero es de tipo (4). El segundo se puede escribir como $aay_1^{-1}y_2$ con $y_1 = y_2 = b$; entonces la proposición 3.9 implica que es equivalente al esquema $ay_1ay_2 = abab$, que es de tipo (3).

Procederemos por inducción sobre la longitud de w . Supongamos que w tiene longitud mayor que cuatro y que no es equivalente a ninguno de menos longitud. El Corolario 3.10 nos dice que w es equivalente a un esquema de la forma

$$w' = (a_1a_1)\dots(a_ka_k)w_1$$

donde $k \geq 1$ y w_1 es de tipo toro o vacío. Si w_1 es vacío, entonces ya hemos acabado; si es no vacío y $k > 1$, también, pues no hay más que aplicar inducción a $a_ka_kw_1$ (que tiene longitud ≥ 6). Supongamos por tanto $w' = aaw_1$ con w_1 de tipo toro y no vacío. Si w_1 tuviese dos términos adyacentes con la misma etiqueta, entonces w' sería equivalente a un esquema más corto de tipo proyectivo (aplicando eliminación), en contra de nuestra imposición. Por tanto, de la proposición 3.11 se deduce que w' es equivalente a un esquema de la forma

$$w'' = a_1a_1aba^{-1}b^{-1}w_2$$

donde w_2 es vacío o de tipo toro. Entonces se aplica la proposición 3.12 para concluir que w es equivalente al esquema

$$aabba_1a_1w_2.$$

Aplicando inducción a $a_1a_1w_2$ se termina.

□

Capítulo 4

Clasificación de superficies.

Finalmente en este capítulo clasificaremos todas las superficies compactas y conexas, encontrando modelos tales que cualquier superficie es homeomorfa a uno de ellos, y tales que no son homeomorfos entre sí.

Dichos modelos son la esfera S^2 , la suma conexa de n toros, T_n , y la suma conexa de m planos proyectivos P_m .

Empezaremos por definir el concepto de suma conexa y luego volveremos sobre el grupo fundamental para calcular el grupo fundamental de tales modelos.

4.1. Suma conexa de superficies.

Definición 4.1. Sean S_1 y S_2 dos superficies disjuntas y sean $D_1 \subset S_1$ y $D_2 \subset S_2$ cerrados tales que D_1 y D_2 son homeomorfos a discos cerrados en \mathbb{R}^2 . Sea S'_i el complementario del interior de D_i en S_i , $i = 1, 2$, y sea h un homeomorfismo de la frontera de D_1 en la frontera de D_2 . Entonces la suma conexa de S_1 y S_2 , designada $S_1 \# S_2$, es el espacio cociente de $S'_1 \cup S'_2$ obtenido identificando los puntos x y $h(x)$, para todo x en el borde de D_1 .

Una manera de imaginar la suma conexa es hacer dos agujeros pequeños y circulares en cada superficie y pegar ambas por el borde de estos agujeros. Se puede demostrar que $S_1 \# S_2$ es de nuevo una superficie, y que no depende de la elección de D_1, D_2 y h . Además, $(S_1 \# S_2) \# S_3 \cong S_1 \# (S_2 \# S_3)$, lo que permite definir $S_1 \# S_2 \# \dots \# S_n$.

Sean P_1 y P_2 polígonos etiquetados y orientados, con esquemas (propios) respectivamente w_1 y w_2 . Se puede obtener un esquema de la suma conexa de las superficies asociadas a w_1 y w_2 , como sigue:

En cada polígono se “duplica” un vértice e introducimos una arista r que une los dos vértices creados; obtenemos así esquemas (no propios) $w_1 r$ y $w_2 r$ para los polígonos P'_1 y P'_2 respectivamente. Mediante una inversión y un reetiquetado, el segundo esquema es equivalente al esquema (no propio) $r^{-1} w_2$, y pegando por r ambos polígonos, obtenemos el esquema $w_1 w_2$ correspondiente a la suma conexa de las superficies. Este proceso se puede generalizar para la suma conexa de n polígonos. En particular, describiremos los procesos de la suma conexa de toros y la suma conexa de planos proyectivos:

Sean T' y T'' dos toros orientados y etiquetados, cuyos esquemas son respectivamente $aba^{-1}b^{-1}$ y $cdc^{-1}d^{-1}$. Entonces la suma conexa de los dos toros se realiza como ya se ha explicado obteniendo un octógono correspondiente a la suma conexa de T' y T'' , cuyo esquema es $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ (Figura 16).

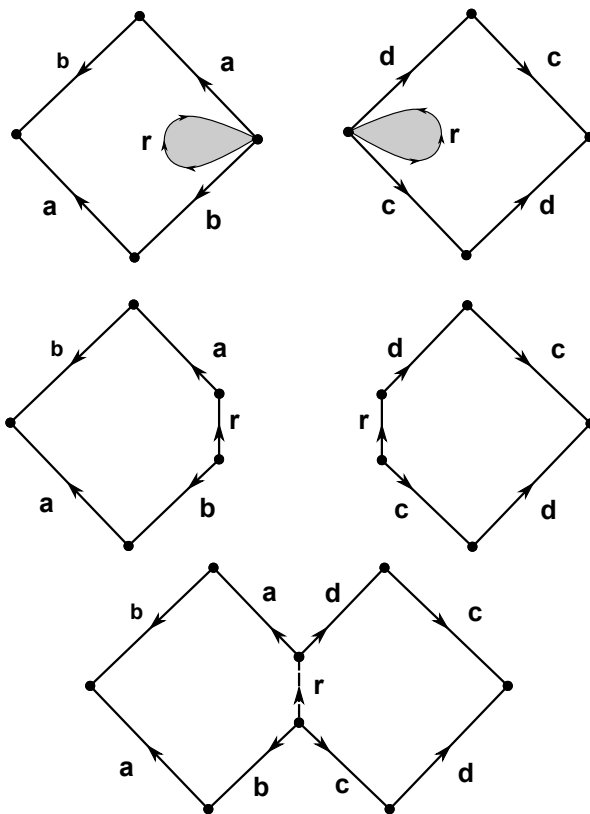


Figura 16

El procedimiento para la suma de dos planos proyectivos P' y P'' orientados y etiquetados, cuyos esquemas son $abab$ y $cdcd$ es un procedimiento análogo al anterior, obteniéndose para $P' \sharp P''$ un octógono con esquema $abcdcd$ equivalente, mediante unión de aristas y reetiquetado, al rectángulo con esquema $aabb$ (Figura 17).

Es inmediato comprobar por inducción que la suma conexa de $n \geq 1$ toros, y la suma conexa de $n \geq 1$ planos proyectivos dan lugar a los esquemas $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}, \dots, a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$ y a_1a_1, \dots, a_na_n respectivamente.

4.2. El primer grupo de homología.

Con vistas a comprobar que la esfera S^2 , el n -toro T_n , y el m -plano proyectivo P_m , son topológicamente distintas, vamos a volver sobre el grupo fundamental.

Teorema 4.2. *Sea P un polígono etiquetado y orientado. Sea $X = P/\mathcal{R}$ el espacio obtenido del pegado de las aristas según el esquema de P . Entonces X es un espacio de Hausdorff compacto y la aplicación de paso al cociente $c : P \rightarrow P/\mathcal{R}$ es cerrada.*

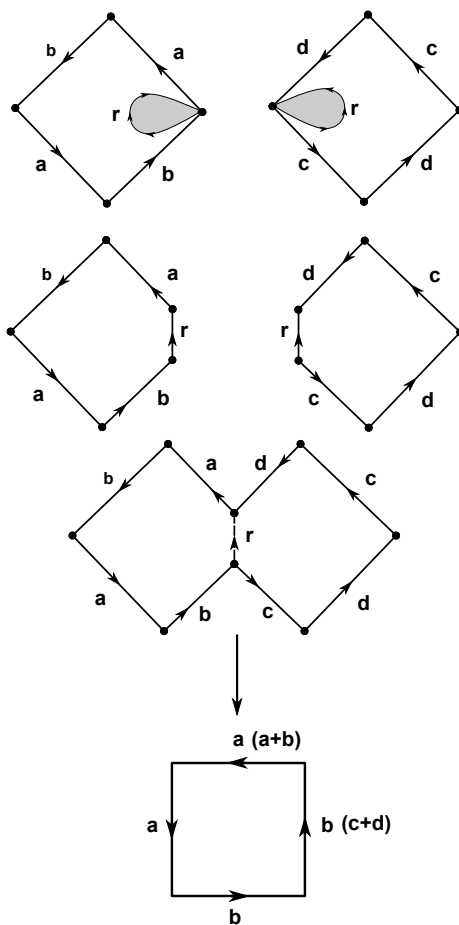


Figura 17

Demostración. Al ser P compacto y $c: P \rightarrow P/\mathcal{R}$ aplicación cociente, es obvio que X es compacto. Entonces vamos a demostrar en primer lugar que la aplicación cociente $c: P \rightarrow P/\mathcal{R}$ es cerrada.

Dado $F \subset P$ cerrado, veamos que $c(F)$ es cerrado, para ello bastará ver que el $sat(F) = c^{-1}c(F)$ es cerrado.

Si $F \subset int(P)$ entonces $F = sat(F)$ y ya estaría. En general, para toda arista e tal que $F \cap e \neq \emptyset$ el $sat(F \cap e)$ es la unión de $F \cap e$ con la imagen de $F \cap e$ en todas las aristas que se peguen con e (Figura 18). Como $F \cap e$ es compacto, estas imágenes también lo son y por tanto son cerradas, luego $sat(F \cap e)$ es cerrado, por lo tanto $sat(F) = F \cup (\bigcup_e sat(F \cap e))$ es cerrado.

Veamos ahora que X es de Hausdorff. Dado $p \in P$, $[p] = sat(\{p\})$ es cerrado luego es compacto. Dados $p, q \in P$ tal que $[p] \neq [q]$, en P se tiene los compactos disjuntos $[p]$ y $[q]$, luego existen abiertos U y V tales que, $[p] \subset U$, $[q] \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sean ahora $U_1 = X - c(P - U)$ y $U_2 = X - c(P - V)$. Es fácil comprobar que, $[p] \in U_1$, $[q] \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Por lo tanto X es Hausdorff. \square

El siguiente resultado, que no demostraremos, se obtiene por aplicación del teorema de Seifert-van Kampen.

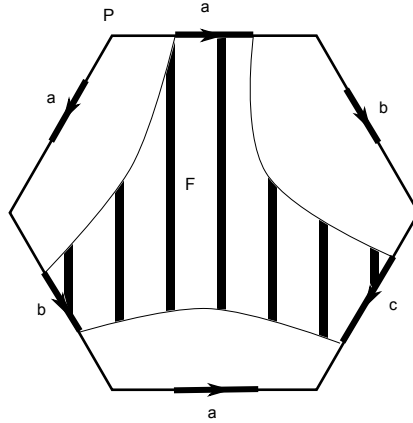


Figura 18

Proposición 4.3. Sea $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X ; supongamos que U , V y $U \cap V$ son conexos por caminos; sea $x_0 \in U \cap V$. Si V es simplemente conexo, existe un isomorfismo

$$k : \pi_1(U, x_0)/N \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

donde N es el menor subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0)$ que contiene la imagen del homomorfismo

$$i_1 : \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0).$$

Como consecuencia se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 4.4. Sea X un espacio de Hausdorff y A un subespacio de X cerrado y conexo por caminos. Supongamos que existe una aplicación continua $h : B^2 \rightarrow X$ que aplica $\text{int}(B^2)$ biyectivamente sobre $X - A$ y aplica $S^1 = \text{Fr}B^2$ sobre A . Sea $\alpha : I \rightarrow S^1$ un lazo que genera $\pi_1(S^1)$. Entonces el homomorfismo

$$i_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

es sobreyectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal de $\pi_1(A, x_0)$ que contiene a $[h \circ \alpha]$, $N([h \circ \alpha])$. Es decir, $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0)/N([h \circ \alpha])$.

Demostración. Denotemos $x_0 = h(0) \in X - A$ y sea $U = X - \{x_0\}$, abierto en X .

En primer lugar probaremos que A es un retracto de deformación de U (Figura 19).

Observemos que $h : B^2 \rightarrow X$ es una aplicación cociente (por ser B^2 compacto y X Hausdorff), y que por ser su restricción a $\text{int}B$ una biyección, las clases para la relación asociada a h de los puntos de $\text{int}(B^2)$ son unipuntuales. En particular $\text{int}B^2$ es saturado para dicha relación, y puesto que es abierto, $h : \text{int}(B^2) \rightarrow X - A$ (seguiremos denotando las restricciones igual) es cociente, luego homeomorfismo. De forma similar, se tiene que la aplicación $h \times \text{Id} : B^2 \times I \rightarrow X \times I$ es cociente y su restricción $h \times \text{Id} : B^2 - \{0\} \times I \rightarrow U \times I$ también.

Las aplicaciones continuas $\text{Id}, r : B^2 - \{0\} \rightarrow B^2 - \{0\}$ coinciden en S^1 y están en la situación del teorema 2.3, luego existe una homotopía $F : B^2 - \{0\} \times I \rightarrow$

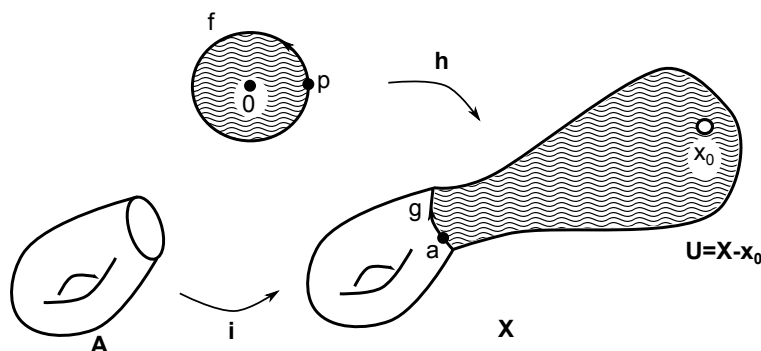


Figura 19

$B^2 - \{0\}$ relativa a S^1 entre ambas. Es decir, $F(q, t) = q$ para todo $q \in S^1$, y $F(q, 0) = q$ y $F(q, 1) = r(q) \in S^1$ para todo $q \in B^2 - \{0\}$. Componiendo dicha homotopía con $h : B^2 - \{0\} \rightarrow X - \{x_0\}$, se tiene que se puede “pasar al cociente”, ya que si $(h(q), t) = (h \times Id)(q, t) = (h \times Id)(q', t') = (h(q'), t')$ entonces $t = t'$ y $h(q) = h(q')$, de donde $q = q'$ o $q, q' \in A$. Es decir, si $(q, t) \neq (q', t')$, entonces $(h \circ F)(q, t) = h(q) = h(q') = (h \circ F)(q', t')$.

Es decir, existe $G : U \times I \rightarrow U$ tal que $G \circ (h \times Id) = h \circ F$ y es continua. Como consecuencia se tiene $G(x, 0) = x$ para todo $x \in U$, $G(x, 1) \in A$ para todo $x \in U$ y $G(x, 1) = x$ para todo $x \in A$; esto es, A es un retracts por deformación de U .

Se deduce por tanto que la inclusión de A en U induce un isomorfismo entre sus grupos fundamentales. Nuestro teorema entonces se reduce a la demostración de la siguiente afirmación:

Sea f un lazo cuya clase genera $\pi_1(S^1, p)$. Entonces la inclusión de U en X induce un epimorfismo

$$\pi_1(U, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$$

cuyo núcleo es el menor subgrupo normal que contiene a la clase del lazo $g = h \circ f$.

Para probar este resultado, empezaremos por el homomorfismo $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(X, b)$ inducido por la inclusión relativa a un punto base b que no pertenece a A .

Sea b cualquier punto de $U - A$. Entonces $X = U \cup V$, siendo $V = X - A$, y además U es conexo por caminos por ser homotópicamente equivalente a A , que lo es. Además, V es homeomorfo a $\text{int}(B^2)$, luego es simplemente conexo. El conjunto $U \cap V = V - x_0$ es homeomorfo a $\text{int}(B^2) - \{0\}$, de modo que es conexo por caminos y su grupo fundamental es cíclico infinito. Como b es un punto de $U \cap V$, el corolario 4.3 implica que el homomorfismo

$$\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(X, b)$$

inducido por la inclusión es sobreyectivo, y su núcleo es el menor subgrupo normal que contiene a la imagen del grupo cíclico infinito $\pi_1(U \cap V, b)$.

Para terminar la demostración cambiaremos el punto base.

Sea q un punto de B^2 en el segmento que une 0 con p y que no sea ninguno de los extremos (por ejemplo, el punto medio), y sea $b = h(q) \in U \cap V$. Sea f_0 un lazo en q dentro de $\text{int}(B^2) - \{0\}$, cuya clase de homotopía es un generador del grupo fundamental de $\text{int}(B^2) - \{0\}$ (Figura 20). Así, la clase del lazo $g_0 = h \circ f_0$ genera

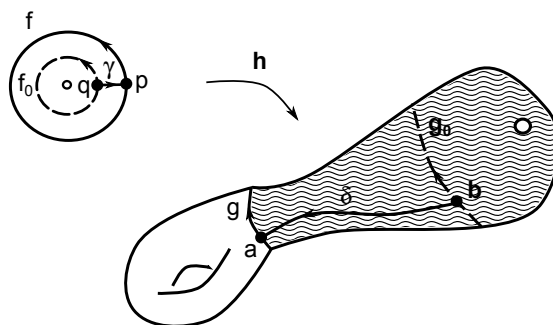


Figura 20

$\pi_1(U \cap V, b)$, y ya hemos comprobado que el homomorfismo $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(X, b)$ inducido por la inclusión es sobreyectivo, y su núcleo es el menor subgrupo normal que contiene a dicha clase. Para obtener el resultado análogo con punto base a procederemos como sigue:

Sea γ el segmento en B^2 que une q con p y sea δ el camino $\delta = h \circ \gamma$ en U que une b con a . Los isomorfismos inducidos por el camino δ (ambos serán denotados por δ') conmutan como los homomorfismos inducidos por la inclusión en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U, b) & \longrightarrow & \pi_1(X, b) \\ \delta' \downarrow & & \delta' \downarrow \\ \pi_1(U, a) & \longrightarrow & \pi_1(X, a) \end{array}$$

Por tanto, el homomorfismo de $\pi_1(U, a)$ en $\pi_1(X, a)$ inducido por la inclusión es sobreyectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal que contiene el elemento $\delta'([g_0])$.

Por otra parte, la clase del lazo $\gamma^{-1} \cdot (f_0 \cdot \gamma)$ es un generador del grupo fundamental de $B^2 - 0$ basado en p , y por tanto, el lazo es homotópico por caminos a f o a su opuesto. Componiendo la homotopía correspondiente con h , se deduce que $\delta^{-1} \cdot (g_0 \cdot \delta)$ es homotópico por caminos en U a g . Es decir, $\delta'([g_0]) = [g]$, y el teorema queda probado. \square

Observación. Obviamente, en el teorema 4.4 se puede cambiar B^2 por un polígono y S^1 por su frontera.

Teorema 4.5. Sea P un polígono y

$$w = (a_{i_1})^{\epsilon_1} \dots (a_{i_n})^{\epsilon_n}$$

un esquema para las aristas de P . Sea X el espacio cociente resultante y $\pi : P \rightarrow X$ la aplicación cociente. Si π aplica todos los vértices de P en un punto $x_0 \in X$ y si a_1, \dots, a_k son las distintas etiquetas del esquema, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al

cociente del grupo libre con k generadores, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, por el menor subgrupo normal que contiene al elemento

$$(\alpha_{i_1})^{\epsilon_1} \dots (\alpha_{i_n})^{\epsilon_n}$$

Demostración. Al ser $X = P/\mathcal{R}$ y estar en las condiciones del teorema 4.2 sabemos que X es de Hausdorff y que la aplicación $c : P \rightarrow P/\mathcal{R}$ es cerrada. Veamos que estamos en las condiciones del teorema 4.4. Sea $C = Fr(P)$ y $\alpha : I \rightarrow C$ un camino cerrado que da la vuelta a C en sentido antihorario (y genera por tanto $\pi_1(C)$). Sea $A = c(C) \subset X$, conexo por caminos y cerrado en X , y sea $h = c : P \rightarrow P/\mathcal{R}$. Es claro que:

1. $h(int(P)) = h(P - C) = X - A$ y la restricción de h , $h|_{int(P)} : int(P) \rightarrow X - A$ es biyectiva, ya que $int(P) = P - C$ es saturado y de hecho cada punto del $int(P)$ solo está relacionado con el mismo.
2. $h(C) = c(C) = A$, por definición.

Además cada arista de C da lugar a un “segmento de A ”, de forma que dos aristas con la misma etiqueta producen la misma imagen y todos estos segmentos se pegan en un mismo punto p . Esto es, A es homeomorfo a una flor de k -pétalos.

Sabemos entonces que $\pi_1(A, p)$ es el grupo libre con k generadores $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, donde α_i es precisamente la clase del lazo imagen de arista con etiqueta a_i , recorrida en sentido antihorario.

Es claro que, $[c \circ \alpha] = (\alpha_{i_1})^{\epsilon_1} \dots (\alpha_{i_n})^{\epsilon_n}$. Entonces, por el teorema 4.4, $\pi_1(X, p)$ es el cociente de $\pi_1(A)$ por el menor subgrupo normal que contiene a $[c \circ \alpha]$, de donde se obtiene el resultado. \square

Teorema 4.6. *Sea T_n el n -toro. Entonces $\pi_1(T_n)$ es isomorfo al cociente del grupo libre de $2n$ generadores, $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$, por el menor subgrupo normal que contiene al elemento*

$$(\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1}) \dots (\alpha_n \beta_n \alpha_n^{-1} \beta_n^{-1})$$

Demostración. Este teorema es inmediato aplicando el Teorema 4.5 una vez comprobado que todos los vértices del polígono correspondiente al n -toro se pegan en un solo punto. En la Figura 21 se tiene un esquema de la demostración de este hecho, y para el caso general se deduce por inducción. \square

Teorema 4.7. *Sea P_m el m -plano proyectivo. Entonces $\pi_1(P_m)$ es isomorfo al cociente del grupo libre de m generadores, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, por el menor subgrupo normal que contiene al elemento*

$$(\alpha_1)^2 \dots (\alpha_m)^2$$

Demostración. Análoga al teorema anterior (Figura 22). \square

Definición 4.8. *Si X es un espacio conexo por caminos, se define*

$$H_1(X) = \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)]$$

donde $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$, generado por $\{[a][b][a]^{-1}[b]^{-1} \text{ tal que } [a][b] \in \pi_1(X)\}$ es el subgrupo de conmutadores de $\pi_1(X)$.

Llamaremos a $H_1(X)$ primer grupo de homología de X .

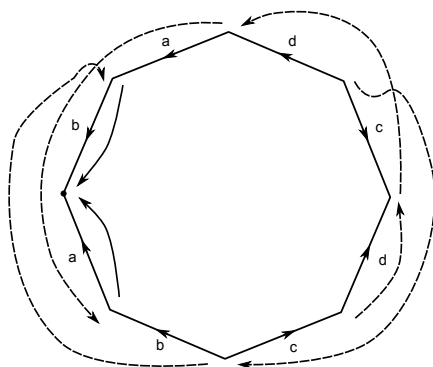


Figura 21

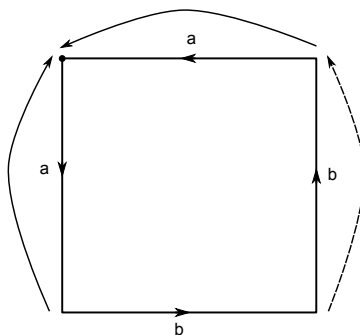


Figura 22

Observaciones.

1. Es fácil probar que si $G_1 \cong G_2$ entonces $G_1/[G_1, G_1] \cong G_2/[G_2, G_2]$, y por lo tanto en el caso de espacios conexos por caminos no hay ambigüedad en la definición de $H_1(X)$.
2. También se prueba sin dificultad que si N es un subgrupo normal de un grupo G , entonces $N \supset [G, G]$ y además, si $H = G/N$ se tiene

$$H/[H, H] \cong \frac{G/[G, G]}{N/[G, G]}.$$

3. Es conocido que si G es el grupo libre con n generadores, entonces $G/[G, G]$ es el grupo abeliano libre con n generadores.

Teorema 4.9. Si T_n es la suma conexas de n toros, entonces $H_1(T_n)$ es un grupo abeliano libre de rango $2n$.

Demostración. Sea G el grupo libre de $2n$ generadores, $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$, y sea N el menor subgrupo normal que contiene a $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\dots\alpha_n\beta_n\alpha_n^{-1}\beta_n^{-1}$. Sabemos por el teorema 4.5 que $\pi_1(T_n) \cong G/N$. Entonces, si $H = G/N$,

$$H_1(T_n) \cong H/[H, H] \cong \frac{G/[G, G]}{N/[G, G]}$$

Ahora bien, $G/[G, G]$ es el grupo abeliano libre de $2n$ generadores, \mathbb{Z}^{2n} , y puesto que es conmutativo, el elemento $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\dots\alpha_n\beta_n\alpha_n^{-1}\beta_n^{-1} + [G, G]$ es el 1, con lo que $H_1(T_n) \cong \mathbb{Z}^{2n}$. \square

Teorema 4.10. *Si P_m es la suma conexa de m planos proyectivos, entonces el subgrupo de torsión $T(P_m)$ de $H_1(P_m)$ es de orden 2 y $H_1(P_m)/T(P_m)$ es un grupo abeliano libre de rango $m - 1$.*

Demostración. Sea G el grupo libre con m generadores, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, y sea N el menor subgrupo normal que contiene a $\alpha_1\alpha_1\dots\alpha_m\alpha_m$ de forma que $\pi_1(P_m) \cong G/N$ por el teorema 4.5. Entonces, si $H = G/N$,

$$H_1(X) = H/[H, H] \cong \frac{G/[G, G]}{N/[G, G]}.$$

Ahora bien, $G/[G, G]$ es el grupo abeliano libre generado por las clases de $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, que denotamos igual. Usando notación aditiva, $G/[G, G] \cong \mathbb{Z}^m$ y $N/[G, G]$ es el subgrupo generado por $2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_m$. Considerando la base $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$ donde $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, se tiene $H_1(P_m) \cong \frac{\mathbb{Z}^m}{(0, \dots, 0, 2)} \cong \mathbb{Z}^{m-1} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. \square

Así pues los grupos fundamentales del n -toro y del m -plano proyectivo no pueden ser isomorfos porque en el primero no hay torsión y en el segundo sí.

4.3. El Teorema de Clasificación.

Teorema 4.11 (Teorema de clasificación).

1. *Toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a S^2 , o al n -toro T_n , o al m -plano proyectivo P_m .*
2. *Las superficies $S^2, T_1, T_2, \dots, P_1, P_2, \dots$, son topológicamente distintas dos a dos.*

Demostración.

1. Por el teorema 2.22 la superficie es homeomorfa a un espacio obtenido de un polígono plano pegando sus aristas por pares y por tanto se puede describir con un esquema poligonal propio. Aplicando el teorema 3.13 se tiene que dicho esquema es equivalente a uno del siguiente tipo:
 - a) $aa^{-1}bb^{-1}$, en cuyo caso, la superficie es homeomorfa a S^2 .
 - b) $(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})\dots(a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1})$, con $n \geq 1$, de esta forma la superficie sería homeomorfa al n -toro T_n .
 - c) $abab$, en cuyo caso, la superficies es homeomorfa a P_1 .
 - d) $(a_1a_1)(a_2a_2)\dots(a_ma_m)$, $m \geq 2$, por último la superficies es homeomorfa al m -plano proyectivo P_m . $m \geq 2$.

2. El grupo fundamental de la esfera es trivial, luego la esfera no puede ser isomorfa ni a T_n ni a P_m .

Los grupos fundamentales de un n -toro y un m -toro con $n \neq m$ son diferentes porque sus grupos de homología son libres conmutativos con diferente número de generadores.

Análogamente sucede con los grupos fundamentales de un n -plano proyectivo y un m -plano proyectivo con $n \neq m$, ya que sus grupos de homología tienen parte libre diferente.

Finalmente un n -plano proyectivo y un n -toro no puede ser isomorfo porque en el grupo de homología primero hay torsión y en el del segundo no.

□

Bibliografía

- [1] Carsten Thomassen and Bojan Mohar: Graphs on Surfaces. The Johns Hopkins University Press, first edition, 2001.
- [2] Carsten Thomassen: The Jordan-Schönflies Theorem and the classification of surfaces. American Mathematical Monthly, 99(2):116-131, 1992.
- [3] James R. Munkres: Topology 2ª edición. Editorial Pearson Prentice Hall. Massachusetts Institute of Technology, 2004
- [4] Jean Gallier and Dianna Xu: A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces. Editorial Springer. Philadelphia, September 2012.
- [5] Marvin J. Greenberg and John R. Harper: Algebraic Topology A First Course. Massachusetts. 1980.
- [6] William. S. Massey: Algebraic Topology: An Introduction. Editorial Harcourt, Brace and World, Inc. New York. USA, 1972.
- [7] Xambó, Delgado, Fuertes: Introducción al Álgebra *, Ed. Complutense, 1993.
- [8] August Ferdinand Möbius: Zur theorie der polyëder und der elemetarverwandtschaft. Oeuvres Complètes, Tome 2:519-559, 1861
- [9] Walther von Dyck: Beiträge zur analysis situs. Mathematische Annalen, 32:457-512, 1888.
- [10] Henry Roy Brahana. Systems of circuits on two- dimensional manifolds. The Annals of Mathematics, 23(2):144-168, 1921.
- [11] Tibor Radó: (Es Über den Begriff der Riemannschen Flächen), Acta Scientiarum Mathematicarum. Universitatis Szegediensis, 1925.