



---

**Universidad de Valladolid**

**Facultad de Ciencias Económicas  
y Empresariales**

**Trabajo de Fin de Grado  
Grado en Administración y Dirección de  
Empresas**

**MEDIDAS DE RIESGO BASADAS EN  
COASIMETRÍA Y COCURTOSIS:  
APLICACIÓN AL MERCADO DE  
VALORES ESPAÑOL.**

Presentado por:

***Carlos Gandiaga Calero***

Tutelado por:

***Alfredo Martínez Bobillo  
Ana Pérez Espartero***

*Valladolid, 8 de julio de 2023*



## **RESUMEN:**

Este trabajo examina el impacto de la asimetría y la curtosis sistemáticas en la valoración de activos en el mercado financiero español. Para ello, se plantea un modelo de valoración de activos de capital (CAPM) que incorpora momentos de orden tres y cuatro y se estima dicho modelo considerando distintas carteras de activos de empresas del IBEX35 durante el periodo 2001-2023. Los resultados revelan que la prima de riesgo está relacionada con la varianza, la asimetría y la curtosis sistemáticas. Se observa un aumento en el poder explicativo del modelo al incorporar la asimetría sistemática (coasimetría), aunque los resultados no son concluyentes en cuanto a la inclusión de la curtosis sistemática (cocurtosis). Los resultados difieren de los obtenidos por otros autores para la bolsa de valores de Nueva York, pero están en sintonía con algunos resultados de otros trabajos para los mercados de futuros y algunos mercados emergentes.

## **ABSTRACT:**

This paper examines the impact of systematic asymmetry and kurtosis on asset pricing in the Spanish financial market. For this purpose, a capital asset pricing model (CAPM) incorporating moments of order three and four is proposed and the model is estimated considering different asset portfolios of IBEX35 companies during the period 2001-2023. The results reveal that the risk premium is related to systematic variance, skewness and kurtosis. An increase in the explanatory power of the model is observed when incorporating systematic skewness (co-skewness), although the results are inconclusive regarding the inclusion of systematic kurtosis (co-kurtosis). The results differ from those obtained by other authors for the New York Stock Exchange but are in line with some results of other papers for futures markets and some emerging markets.



# ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN .....	3
2. MARCO TEÓRICO .....	5
2.1 Medir el riesgo en el mercado de renta variable .....	5
2.2 Análisis de riesgo-rentabilidad. Modelo CAPM y Modelo de Markowitz .....	8
2.3 Otras medidas de riesgo: coasimetría y cocurtosis .....	15
2.4 El modelo CAPM de cuatro momentos .....	19
3. APLICACIÓN EMPÍRICA .....	24
3.1 Descripción de los datos .....	24
3.2 Análisis descriptivo y contrastes de Normalidad .....	25
3.3 Medidas de riesgo relativo .....	32
3.4 Estimación de modelos .....	36
4. CONCLUSIONES .....	44
BIBLIOGRAFÍA .....	46



## 1. INTRODUCCIÓN

Desde los primeros días de los mercados financieros, los inversores han buscado formas de comprender, aprovechar y superar los desafíos inherentes a ellos. Todos los participantes, de una forma u otra, desean maximizar sus ganancias y superar al mercado, al tiempo que minimizan los riesgos asociados. Esta dualidad plantea una pregunta fundamental: ¿cómo se puede obtener el máximo rendimiento al tiempo que se minimiza el riesgo adquirido?

El riesgo es un concepto central en la investigación financiera. Dado su papel crucial, es esencial comprenderlo a fondo y ser capaz de modelar su comportamiento y distribución subyacente de manera precisa. En esta área, la literatura ha presentado varias respuestas, y sigue siendo un campo en constante evolución con nuevos trabajos que se generan continuamente. En este contexto, es importante destacar el trabajo pionero de Markowitz (1952), quien propuso el modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), donde se relaciona el riesgo con los momentos de segundo orden. Su contribución se discute en la *Sección 2.2*. Su aporte fue revolucionario y sigue siendo estudiado en todas las escuelas de finanzas, pero también ha sido superado y complementado.

Posteriormente, los trabajos de Kraus y Litzenberg (1976), Christie-David y Chaudhry (2001), Fang y Lai (1997) y Hwang y Satchell (1999) han ampliado el modelo de Markowitz al reconocer que el binomio media-varianza es insuficiente para capturar adecuadamente la distribución de los rendimientos de los activos financieros, al no seguir éstos una distribución normal. Kraus y Litzenberg (1976) encontraron que la inclusión de momentos de tercer orden mejoraba los resultados en el mercado bursátil estadounidense. Fang y Lai (1997) incorporaron el cuarto momento, obteniendo resultados positivos, pero también planteando algunos interrogantes que se discutirán más adelante. En la misma línea, Christie-David y Chaudhry (2001) y Hwang y Satchell (1999) investigaron los mercados de futuros y emergentes respectivamente, obteniendo resultados diferentes, en algunos casos, a los dos trabajos anteriores. Sus contribuciones son necesarias para elaborar los presupuestos teóricos detallados en la *Sección 2.3* y los consecuentes modelos econométricos, cuya expresión teórica se detalla en la *Sección 2.4*.

A pesar de que estos estudios han demostrado la necesidad de considerar momentos de orden superior para modelar el riesgo en los mercados financieros, ninguno de ellos ha examinado específicamente el mercado español. Por lo tanto, este trabajo tiene como objetivo demostrar la importancia de incluir momentos de tercer y cuarto orden para modelar el riesgo de una cartera, centrándose en el mercado de valores español.

En la *Sección 3.4* discutiremos los resultados obtenidos, mostrando cómo la inclusión de modelos de tercer y cuarto orden mejora en algunos casos la capacidad explicativa del modelo para caracterizar el riesgo de un activo financiero y una cartera. Sin embargo, también se anticipa que puede haber diferencias entre los resultados esperados y los obtenidos, así como cierta multicolinealidad entre los momentos de segundo y cuarto orden, como se había ya advertido en otros trabajos. La solución a estos problemas merecería un análisis econométrico más profundo que está fuera del alcance de este trabajo.

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1 Medir el riesgo en el mercado de renta variable

Los activos que se negocian en los mercados financieros son activos de renta fija y variable. En este trabajo, nos centraremos en los activos de rentabilidad variable, en los cuales los flujos de caja son desconocidos y no se garantiza ni la rentabilidad del activo ni la devolución del capital invertido. Por tanto, son activos arriesgados. El objetivo de esta sección es explicar de forma resumida cómo se mide, estima y cuantifica ese riesgo, puesto que un cálculo óptimo del riesgo es la base de la teoría de carteras y es el marco en el que se encuadra esta investigación.

Intuitivamente, el riesgo de un activo está ligado a la diferencia entre la rentabilidad real y la esperada. Como el precio de un activo es una variable aleatoria (no podemos predecir con exactitud su valor en un momento dado), también lo van a ser su rentabilidad y riesgo asociado. Si denominamos por  $R_i$  la rentabilidad del activo  $i$ , su esperanza se va a definir como:

$$\mu_i = E(R_i) \tag{1}$$

Nosotros no vamos a conocer el valor real de esta esperanza (media poblacional), pero, tal y como se verá en el *Capítulo 3*, vamos a ser capaces de estimarlo muestralmente. Por otra parte, cuanto mayor sea la variabilidad en torno a esa media, más arriesgado será el activo bajo estudio y mayor será su volatilidad.

En matemática financiera, la volatilidad es una medida que describe la frecuencia y la intensidad de los cambios en el precio de un activo. Se utiliza la volatilidad para evaluar y cuantificar el nivel de riesgo asociado con dicho instrumento financiero. Para medir la volatilidad de un activo se utilizan dos estadísticos estrechamente relacionados: la varianza y la desviación típica (o estándar). La varianza del activo  $i$ , que denotamos como  $\sigma_i^2$ , es la media de las desviaciones cuadráticas a su media y se expresa en unidades cuadráticas, que a menudo carecen de significado real. En concreto,  $\sigma_i^2$  se define como:

$$\sigma_i^2 = \text{Var}(R_i) = E(R_i - E(R_i))^2 \quad (2)$$

La desviación típica,  $\sigma_i$ , es la raíz cuadrada de la varianza y tiene la ventaja de medirse en las mismas unidades de los datos a partir de los cuales es calculada.

La teoría de carteras se centra en las agrupaciones de activos financieros, llamadas carteras. Una cartera es, por tanto, una determinada combinación de activos financieros en los cuales se invierte. Esta cartera puede estar compuesta solo por activos de renta fija o variable, pero también de ambos a la vez (mixta), en diversas proporciones y tendrá asociado un determinado binomio rentabilidad-riesgo.

El riesgo de una cartera formada por N activos, que denotaremos como  $\sigma_p^2$ , depende de tres componentes:

- $w_i$ : es la ponderación o peso del activo  $i$  en la cartera.
- $\sigma_i^2$ : es la varianza del activo  $i$ .
- $\rho_{ij}$ : es el coeficiente de correlación entre las rentabilidades de cada par de activos  $(i, j)$ .

y se calcula con la siguiente fórmula:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i>j}^N w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (3)$$

Por tanto, la varianza de una cartera no es sólo la media ponderada de las varianzas de los activos que la integran, sino que también depende de las correlaciones entre las rentabilidades de cada par de activos. Esto se debe al efecto de la diversificación y se recoge en el segundo sumatorio de la ecuación (3). La diversificación es un fenómeno que consiste en distribuir el capital invertido en múltiples activos, logrando así aumentar la resistencia de la cartera ante la volatilidad del mercado. Para minimizar el riesgo de la cartera, se busca que el segundo sumatorio en (3) sea negativo; es decir, se busca que, al disminuir el precio de un activo, aumente el del otro (covariación negativa), paliando así la posible pérdida.

El Coeficiente de correlación entre las rentabilidades de cada par de activos  $(i, j)$ , mencionados ya en la ecuación (3), se define como:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (4)$$

donde  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$  denotan, en nuestro caso, las desviaciones típicas de las rentabilidades de los activos  $i$  y  $j$  respectivamente, y  $\sigma_{ij}$  denota la covarianza, que refleja el grado de covariación lineal conjunta de las dos variables aleatorias,  $R_i$  y  $R_j$ , respecto a sus medias y se calcula, para dos activos  $(i, j)$ , evaluando la siguiente expresión.

$$\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j) = E \left[ (R_i - E(R_i)) (R_j - E(R_j)) \right]$$

El coeficiente  $\rho_{ij}$  varía en el intervalo  $[-1, 1]$  y es independiente de la escala de medida de las variables. Cuando  $\rho_{ij} = 1$ , existe una relación lineal perfecta positiva entre la rentabilidad de los dos activos; es decir, la rentabilidad de un activo es proporcional a la del otro. Si  $\rho_{ij} = -1$ , existe una relación lineal negativa perfecta tal que, al disminuir la rentabilidad de un activo, la del otro aumentaría en la misma proporción y se reduciría así el riesgo de nuestra cartera. En la práctica,  $\rho_{ij}$  adopta valores intermedios que expresan correlaciones no perfectas.

En carteras con más de dos activos, las correlaciones se reflejan en la matriz de covarianzas. Esta matriz de covarianzas, que denotaremos  $\Sigma$ , es una matriz cuadrada, simétrica y semidefinida positiva que contiene en la diagonal principal las varianzas de la rentabilidad de cada activo financiero y, fuera de la diagonal, todas las posibles covarianzas entre los distintos pares de activos de la cartera; es decir:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

donde  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Económicamente, el hecho de que diversificar disminuya el riesgo se debe a que el riesgo tiene dos componentes (véase *Gráfico 2.1*): riesgo sistemático y riesgo no sistemático. La primera componente no es reducible, pues hace referencia al mercado donde el título cotiza y sólo se puede eliminar optando por no operar en dicho mercado. Por su parte, el riesgo no sistemático es aquel intrínseco a la empresa (depende del título en cuestión) y es reducible a través de la diversificación de la cartera.

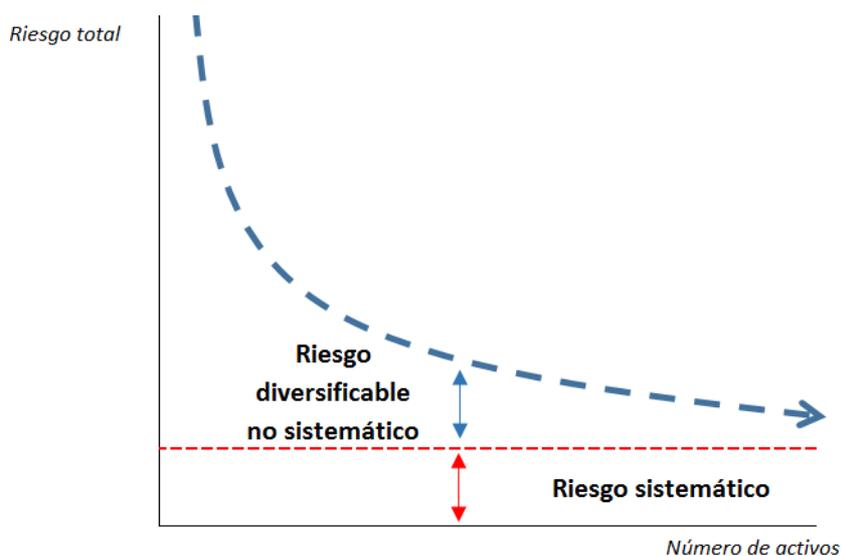


Gráfico 2.1. Riesgo sistemático y no sistemático.

Fuente: <https://economipedia.com/definiciones/riesgo-sistemico.html>

## 2.2 Análisis de riesgo-rentabilidad. Modelo CAPM y Modelo de Markowitz

En este contexto, el análisis de riesgo de un activo financiero y las interacciones derivadas de combinar varios activos exige introducir la Teoría Moderna de Carteras de Harry Markowitz (1952).

Markowitz sentó, en 1952, lo que serían las bases de la Teoría de Selección de Carteras y la consiguiente Teoría de Equilibrio en el mercado de capitales y propuso un modelo basado en datos históricos. Conforme a este modelo, se recogen y analizan datos estadísticos durante un período de tiempo y en base a las tendencias, se intenta predecir el comportamiento futuro de los mismos y, por lo tanto, determinar la cartera óptima. La rentabilidad se obtiene a partir de las esperanzas de los valores futuros de los dividendos, actualizados al presente. El

riesgo se mide a través de la matriz de covariancias de los activos que componen la cartera, dejando clara la premisa de que el riesgo de un activo concreto se debe valorar midiendo su aportación al conjunto de la cartera.

Markowitz desarrolla la técnica analítica para obtener la frontera eficiente de carteras, que consiste en construir las carteras más dirigidas posibles al noroeste del universo de valores en el binomio riesgo-rentabilidad. Es decir, hacia aquellas carteras con mayor rentabilidad y menor riesgo. Este algoritmo sería clave para, a posteriori, acabar recibiendo el Premio Nobel de Economía en 1990 junto a Merton Miller y William Sharpe gracias a sus aportaciones a la teoría de Carteras.

Las hipótesis del modelo de Markowitz son las siguientes:

- 1) Se presuponen mercados de capitales perfectos (perfectamente competitivos), con un ambiente de incertidumbre en el que los rendimientos de los activos están matemáticamente relacionados.
- 2) Existe un único horizonte temporal, es un modelo estático. En el momento inicial se forman todas las carteras y en el momento final son liquidadas.
- 3) La información es universal, instantánea y gratuita. Por lo tanto, las expectativas de rentabilidad y riesgo para cada tipo de activo son las mismas.
- 4) La oferta de activos financieros es una variable exógena, fija y conocida.
- 5) Los inversores son racionales y sus inversiones son transitivas. Es decir, si se prefiere  $R_i$  a  $R_j$  y  $R_j$  a  $R_k$ , se preferirá también  $R_i$  a  $R_k$ .
- 6) Se presupone Normalidad en las distribuciones de las rentabilidades de los activos financieros (un supuesto poco realista, como veremos más adelante).
- 7) No se permite la “venta a corto” (*short-selling*) ni existen los activos sin riesgo. No obstante, esta restricción será superada en futuros modelos.
- 8) Todos los inversores son adversos al riesgo, aunque el grado de aversión es personal y subjetivo. Por lo tanto, a igual rentabilidad, siempre se optará por la cartera que presente un menor riesgo.

Esta última hipótesis será clave para resolver el problema de optimización de una cartera. Al no existir “ventas en corto”, las diferentes combinaciones de

activos se sitúan en “arcos”. Al aumentar la cantidad de activos financieros, estas combinaciones pasarán a describir un mapa de arcos. Como se pretende maximizar la rentabilidad para un nivel de riesgo, la frontera eficiente se situará en el extremo superior del área, en la línea noroeste.

La mayor contribución de Markowitz es convertir el problema económico de maximizar la rentabilidad esperada de una cartera en el siguiente problema matemático de maximización:

$$\text{Maximizar} \rightarrow E(R_p) = \sum_{i=1}^N w_i E(R_i) \quad (5)$$

donde  $E(R_i)$  es la rentabilidad esperada de cada activo financiero que compone la cartera, con  $i = 1, \dots, N$ , siendo  $N$  el número de activos, y  $E(R_p)$  representa la rentabilidad de la cartera. Para resolver el problema de optimización se imponen ciertas restricciones que se detallan a continuación<sup>1</sup>:

1. La restricción presupuestaria (6) enuncia que la suma total de los pesos asignados a cada valor de la cartera debe ser igual a la unidad:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (6)$$

2. La condición de no negatividad es la manera matemática de prohibir las “ventas en corto”, pues por ahora ningún activo puede tener un peso negativo:

$$w_1, w_2, w_3, \dots, w_N \geq 0 \quad (7)$$

Todo esto se entiende mejor en los *Gráficos 2.2 y 2.3*. En el *Gráfico 2.2* tenemos un ejemplo de cómo varía la frontera eficiente de una cartera formada por dos activos en función del coeficiente de correlación. En el eje de abscisas se representa la desviación típica de la cartera,  $\sigma_p$ , mientras que en el eje de ordenadas podemos ver la rentabilidad media esperada de la misma,  $E(R_p)$ . En sí, tenemos distintas fronteras eficientes para diversos valores del coeficiente de correlación, que nos permiten ver el efecto de la diversificación. Como se puede ver, cuando el coeficiente de correlación entre estos dos activos financieros vale -1, obtenemos las rentabilidades más altas para un nivel de riesgo dado o, visto

---

<sup>1</sup> También se puede encontrar la formulación inversa en la que, dado un nivel de rentabilidad dado, se busca minimizar el riesgo. No obstante, se prefiere esta versión por considerarse más fiel al comportamiento común de los inversores.

de otra forma, los niveles de riesgo más bajos para una rentabilidad dada. El caso contrario sucede cuando el coeficiente de correlación es 1; es decir, que las distribuciones de rendimientos de ambos activos financieros se mueven de forma proporcional. En ese caso, tenemos las rentabilidades más bajas para un determinado nivel de riesgo, o los riesgos más elevados para una determinada rentabilidad. Entre medias tenemos un espectro infinito de combinaciones, pero se puede apreciar que está en nuestro mejor interés buscar una correlación negativa; es decir, diversificar para reducir el riesgo global.

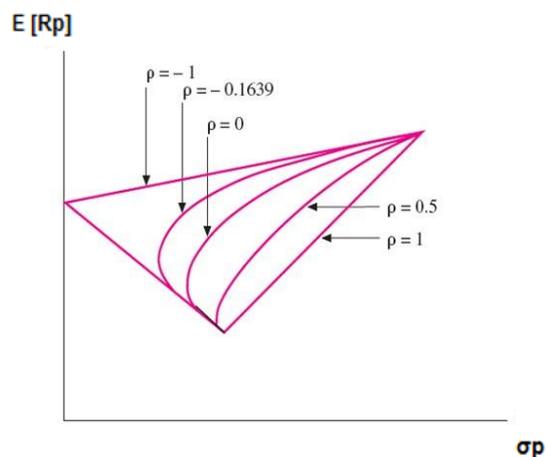


Gráfico 2.2. Frontera eficiente para una cartera de dos activos con distintos valores del coeficiente de correlación.

Fuente: <https://slideplayer.es/slide/1077612/3/images/24>

En el Gráfico 2.3, por otra parte, lo que vemos es el resultado de añadir más activos financieros a la cartera analizada. Como vemos, cada activo individual se sitúa a lo largo del plano cartesiano y es sólo a través de la combinación lineal de estos que conseguimos trazar lo que se denomina la frontera eficiente. Es decir, la línea que señala la cartera más rentable para cada nivel de riesgo, o la cartera menos arriesgada para cada nivel de rentabilidad. De este modo, ningún inversor racional elegiría cualquiera de las carteras que se encuentran en el conjunto de carteras no eficientes (el conjunto señalado con forma de paraguas). No obstante, es importante notar que, con estos presupuestos, no existe una cartera con riesgo nulo.

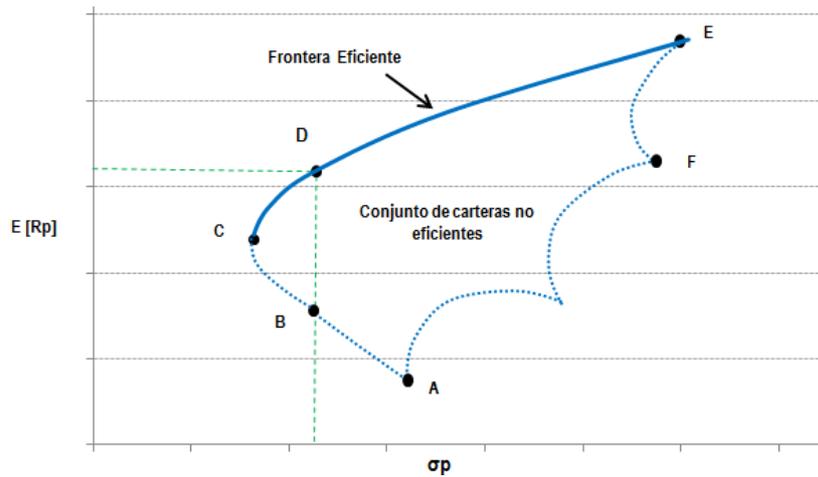


Gráfico 2.3. Conjunto factible y frontera eficiente del modelo de Markowitz.

Fuente: [https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Conjunto-Factible-y-Frontera-Eficiente-Fuente-Elaboracion-Propia\\_fig1\\_320623350](https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Conjunto-Factible-y-Frontera-Eficiente-Fuente-Elaboracion-Propia_fig1_320623350)

Además de los activos de renta variable, profundizar en el modelo CAPM supone considerar la existencia de activos libres de riesgo, cuya rentabilidad denotaremos  $R_f$ , que son aquellos que prometen una rentabilidad cierta; es decir, cuyo riesgo medido por su varianza es cero. Estos activos libres de riesgo actúan como puntos de referencia para determinar el riesgo adicional que se asume al invertir en activos más arriesgados. Tras incluir el activo libre de riesgo, esta frontera pasa a tener una parte recta y otra curva. Si además se eliminase la restricción de vender a corto plazo, el área de combinaciones será definido por dos rectas tangentes a la frontera eficiente. No obstante, será la línea superior aquella que maximizará la utilidad esperada del inversor, también denominada Línea de Mercado de Capitales (CML). De este modo, sólo existiría una cartera óptima ( $R_c$  en el Gráfico 2.4).

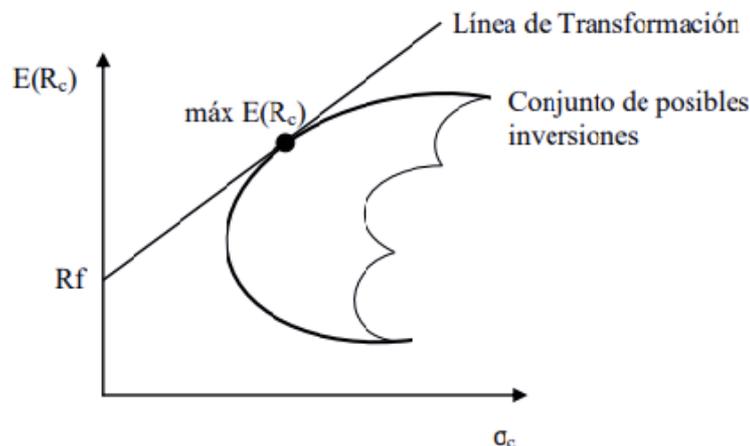


Gráfico 2.4. Frontera eficiente tras incorporar las ventas en corto y los activos libres de riesgo.  
Fuente: <https://repositorio.comillas.edu/xmlui/bitstream/handle/11531/149/TFG000037.pdf>

Asimismo, es interesante resaltar la Propiedad de Separación (Tobin 1958). Esta propiedad permite separar el problema de encontrar la cartera óptima en dos fases, siendo la primera la fase puramente analítica ya comentada. La segunda será subjetiva y consistirá en elegir la cartera óptima en función de la aversión al riesgo del inversor. Esta segunda fase dependerá del mapa de curvas de indiferencia del inversor y consistirá en encontrar el punto tangente entre una de las curvas de indiferencia y la frontera eficiente.

En este ámbito, el modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) es una herramienta de valoración de activos financieros desarrollado por William Sharpe (1964) (construido sobre los trabajos previos de otros economistas como Harry Markowitz, John Lintner, Jan Mossin o Jack L. Traynor), basado en una relación media-varianza (momentos de orden uno y orden dos, respectivamente) y en una función de utilidad cuadrática, que permite estimar la rentabilidad esperada en función del riesgo que se está asumiendo al acometer la inversión.

En el modelo CAPM, se utiliza la línea del mercado de valores (*Security Market Line, SML*) para evaluar la tasa esperada de retorno de un valor individual en relación con el riesgo sistemático. La SML se basa en el concepto *beta*, que es una medida de riesgo sistemático basada en el momento cruzado de orden dos, cuya expresión matemática se detallará en la *sección 2.3*. La SML nos permite determinar la proporción de recompensa-a-riesgo para cualquier activo en comparación con el índice de mercado. Además, al ubicar una cartera específica con relación a la SML, podemos calcular la diferencia entre la rentabilidad esperada de la cartera y la rentabilidad del activo libre de riesgo,  $E(R_p) - R_f$ , denominada prima de riesgo. Esto nos permite evaluar el riesgo asumido al perseguir una mayor rentabilidad. En el *Gráfico 2.5* se puede observar la representación gráfica de la SML.

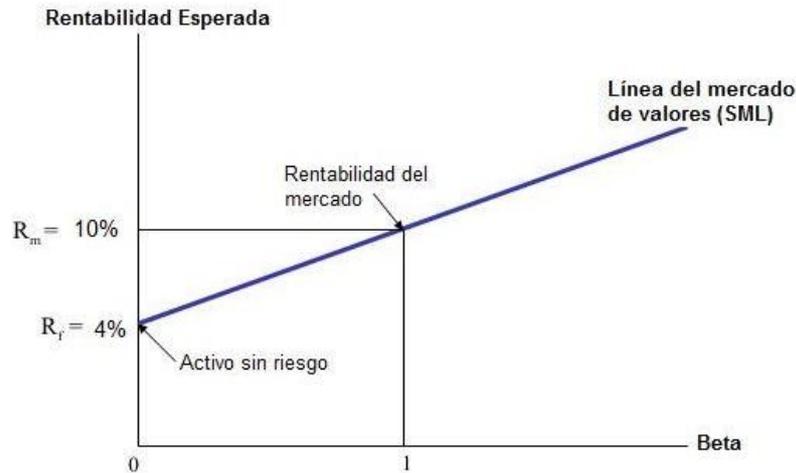


Gráfico 2.5. Modelo de valoración de activos financieros (CAPM).

Fuente: <https://economipedia.com/definiciones/modelo-valoracion-activos-financieros-capm.html>

La relación de equilibrio que describe el modelo CAPM es:

$$E(R_i) - R_f = \beta_{im}[E(R_m) - R_f] \quad (8)$$

donde:

- $E(R_i)$  es la rentabilidad esperada del activo  $i$ .
- $E(R_m)$  es la rentabilidad esperada del mercado
- $R_f$  es la rentabilidad del activo libre de riesgo (se suele utilizar un bono con vencimiento similar a la vida del activo financiero que se quiere valorar).
- $\beta_{im}$  (*beta*) es el riesgo sistemático o cantidad de riesgo del activo respecto a la Cartera del mercado o su *benchmark*, definida como:

$$\beta_{im} = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \quad (9)$$

En este contexto, la diferencia  $[E(R_m) - R_f]$  es la prima de riesgo del mercado, o el rendimiento adicional esperado por los inversores al invertir en activos arriesgados.

En equilibrio, todos los activos arriesgados deberían caer a lo largo de la SML, puesto que en condiciones de equilibrio estos títulos deberían poseer un valor de  $\beta = 1$  y ser considerados neutros en referencia al mercado. En este caso, si la rentabilidad esperada de nuestro mercado subiese un 3%, también la

rentabilidad esperada del activo financiero debería subir ese mismo incremento. Si fuese al contrario y nuestro mercado de referencia sufriese una caída hipotética del 2,5%, la rentabilidad de nuestro activo también bajaría un 2,5%. Ahora, vamos a suponer que la rentabilidad de nuestro activo presenta una  $\beta = 1,5 > 1$ . En este caso, ante un aumento del 3% del mercado, la rentabilidad de la acción debería aumentar un 4,5%. Si, por ejemplo, nuestro título presentase una  $\beta = 0,25 < 1$ , ante una caída de 2,5% de la rentabilidad del índice de mercado, se puede esperar una caída del 0,625% en la rentabilidad de nuestro activo financiero. Por lo tanto, mayores valores de beta portan a su vez un mayor riesgo y una mayor rentabilidad, medida ésta siempre en comparación a aquella del activo libre de riesgo. Por eso, la variable de interés de nuestro modelo es la prima de riesgo del mercado. De este modo, conociendo las características del riesgo de un activo (*beta*) es posible estimar su valor intrínseco e indicar, entonces, si está sobre-pagado o infra-pagado en el mercado, permitiéndonos también emitir un juicio sobre si es interesante adquirir el título en cuestión.

Aunque las ventajas de estos modelos y de incorporar el concepto de sensibilidad respecto al *benchmark* son numerosas, existen también abundantes críticas y limitaciones. Algunas de estas limitaciones son las siguientes: tratarse de un modelo estático; no tener en consideración que muchos activos financieros no son divisibles; dificultad (ya superada) de cómputo y la inocencia, incluso extravagancia (Fernández, 2014) respecto a algunas hipótesis de partida, como la igualdad y universalidad de la información y el supuesto de que las rentabilidades de los activos financieros siguen una distribución Normal. Como veremos más adelante, esta última hipótesis no es nada realista y es precisamente la que motiva el planteamiento de posibles extensiones del modelo CAPM que vayan más allá de la relación media-varianza.

### **2.3 Otras medidas de riesgo: coasimetría y cocurtosis.**

Cuando los rendimientos de un activo financiero siguen una distribución Normal, son suficientes dos parámetros,  $\mu$  que representa la esperanza (momento de orden uno) y  $\sigma$  que representa la desviación típica (momento de

orden dos), para caracterizar completamente dicha distribución, y la covarianza (o el coeficiente de correlación lineal) es suficiente para medir la relación entre dos de estos activos. Sin embargo, cuando se viola el supuesto de Normalidad, los momentos de orden 2 son insuficientes como medida de riesgo y se debe de complementar este análisis con otras medidas de riesgo relativo, además de la *beta*, como son la coasimetría y la cocurtosis, que recojan características no gaussianas de la distribución marginal de los rendimientos. Puesto que la distribución de los rendimientos de muchos activos financieros exhibe una inusual asimetría hacia la izquierda y un exceso de curtosis (mayor probabilidad de valores extremos), es necesario recurrir a contrastes de Normalidad, como el test de Jacques-Bera, para comprobar si el valor de esos parámetros es significativamente distinto de lo que cabría esperar bajo el supuesto de Normalidad (sección 3.2). Si se refuta la hipótesis de Normalidad, varios autores, como Fang y Lai (1997) y Christie-David y Chaudhry (2001) proponen extender el modelo CAPM incluyendo medidas de riesgo relativo basadas en momentos cruzados de orden superior, en concreto de orden 3 (coasimetría) y de orden 4 (cocurtosis). El objetivo de la presente sección es describir estas medidas.

Para ello, vamos a comenzar con las medidas basadas en el momento de orden 2, fundamental en el modelo CAPM tradicional de dos momentos, y vamos a utilizar las variables de interés  $R_i$  y  $R_m$ , pero lo que se presenta a continuación se podría aplicar a dos variables cualesquiera  $X$  e  $Y$ .

La *Tabla 1* presenta de forma resumida la relación entre los momentos de orden dos, tres y cuatro marginales de un activo  $i$  y los correspondientes momentos cruzados con respecto al mercado y la relación de estos con las medidas de riesgo del activo  $i$  con respecto al mercado. Los momentos marginales pueden interpretarse como un caso particular de los momentos cruzados para  $i = m$ . En ese caso, las fórmulas cruzadas se convierten en fórmulas marginales para el mercado  $m$ .

**Tabla 1. Momentos marginales y cruzados respecto al mercado**

Orden	Momento marginal	Momento cruzado	Medida de riesgo relativo
Dos	$\mu_2 = E[R_i - E(R_i)]^2 = \sigma_i^2$	$\sigma_{im} = E[(R_i - E(R_i))(R_m - E(R_m))]$	$\beta_{im} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$
Tres	$\mu_3 = E[R_i - E(R_i)]^3 = \gamma_i^3$	$\sigma_{imm} = E[(R_i - E(R_i))(R_m - E(R_m))^2]$	$\gamma_{im} = \frac{\sigma_{imm}}{\mu_3}$
Cuatro	$\mu_4 = E[R_i - E(R_i)]^4 = \kappa_i^4$	$\sigma_{immm} = E[(R_i - E(R_i))(R_m - E(R_m))^3]$	$\kappa_{im} = \frac{\sigma_{immm}}{\mu_4}$

Como hemos visto en el capítulo anterior, la primera expresión para caracterizar el riesgo a través de los momentos de segundo orden es la varianza, que es el momento marginal de orden dos con respecto a la media, denotada como  $\mu_2$  en la primera columna de la *Tabla 1*. Sin embargo, en el marco de la teoría de carteras se busca calcular el riesgo de un activo financiero en relación con el riesgo del mercado, y no de forma marginal. En concreto, se busca responder a esta pregunta: *¿qué sucede con los rendimientos de un activo financiero cuando el mercado experimenta un cambio?* Por lo tanto, se introduce como medida de riesgo el momento cruzado de orden dos con respecto a la media, en el que el rendimiento del activo se compara con el rendimiento del mercado y la medida análoga obtenida es la covarianza, denotada por  $\sigma_{im}$ , en la segunda columna de la *Tabla 1*. A partir del momento cruzado y el momento marginal de orden dos, se obtiene el coeficiente *beta* ( $\beta_{im}$  en la tercera columna) utilizado en el contexto financiero como medida de riesgo. Este  $\beta_{im}$  será también una de las variables explicativas del modelo CAPM de cuatro momentos, que describiremos en más detalle al final del presente capítulo. Nótese que cuando  $i = m$ , tenemos  $\sigma_{im} = \sigma_m^2$  y  $\beta_{im} = 1$ .

De forma análoga, se definen los momentos marginales y los momentos cruzados de orden tres y de orden cuatro, que serán fundamentales en la definición del modelo CAPM de tres y cuatro momentos.

El momento central de tercer orden, que se denota como  $\mu_3$  en la *Tabla 1*, está relacionado con el grado de asimetría de la distribución de los rendimientos con

respecto a su media. Para crear una medida de asimetría adimensional, se define el coeficiente  $\gamma_i^*$ , que reescala el coeficiente  $\mu_3$  mediante la siguiente fórmula:

$$\gamma_i^* = \frac{E[R_i - E(R_i)]^3}{\sigma_i^3} \quad (10)$$

Los valores de este coeficiente indican si una distribución presenta asimetría negativa o a la izquierda ( $\gamma_i^* < 0$ ), simetría ( $\gamma_i^* = 0$ ), o asimetría positiva o a la derecha ( $\gamma_i^* > 0$ ). También se introduce el momento cruzado de tercer orden,  $\sigma_{imm}$ , como medida de riesgo relativo con respecto al mercado en la segunda columna de la *Tabla 1*. Por último, se define el coeficiente de coasimetría o asimetría sistemática,  $\gamma_{im}$ , en la última columna de la *Tabla 1*, utilizando un razonamiento similar al utilizado para la medida de riesgo derivada de momentos de segundo orden. Este coeficiente es una de las variables explicativas del modelo de regresión múltiple CAPM de tres momentos, que explicaremos más adelante<sup>2</sup>. Nótese que si  $i = m$ , el momento cruzado se reduce al momento marginal y resulta que  $\sigma_{imm} = \mu_3$  y  $\gamma_{im} = 1$ .

El momento central de cuarto orden, que se denota como  $\mu_4$  en la *Tabla 1*, está relacionado con la curtosis de la distribución de los rendimientos con respecto a su media. Para crear una medida de curtosis adimensional, se define el coeficiente  $\kappa_i^*$ , que reescala el coeficiente  $\mu_4$  mediante la siguiente fórmula:

$$\kappa_i^* = \frac{E[R_i - E(R_i)]^4}{\sigma_i^4} \quad (11)$$

En variables con distribución Normal,  $\kappa_i^* = 3$ . Los valores de este coeficiente indican si una distribución es platicúrtica ( $\kappa_i^* < 3$ ), mesocúrtica ( $\kappa_i^* = 3$ ), o leptocúrtica ( $\kappa_i^* > 3$ ). Las distribuciones platicúrticas tienen una forma más aplanada que la distribución Normal, con colas más ligeras y menos frecuencia de valores extremos. El perfil de las distribuciones mesocúrticas se asemeja

---

<sup>2</sup> Cuando se trabaja con momentos cruzados de orden superior a 2, hay varias formas de expresarlos dependiendo de los exponentes que se utilicen; véase Illera y Mailloc López de Prado (2004) para definiciones alternativas de la coasimetría y de la cocurtosis.

mucho al de una distribución Normal. Las distribuciones leptocúrticas presentan perfiles más puntiagudos y colas más pesadas con mayor frecuencia de valores extremos. En la segunda columna de la *Tabla 1* se introduce el momento cruzado de cuarto orden,  $\sigma_{immm}$ , como medida de riesgo relativo con respecto al mercado. Por último, se define el coeficiente de cocurtosis o curtosis sistemática,  $\kappa_{im}$ , en la última columna de la *Tabla 1*, utilizando un razonamiento similar al utilizado para la medida de riesgo derivada de momentos de segundo y de tercer orden. Este coeficiente es una de las variables explicativas del modelo de regresión múltiple CAPM de cuatro momentos, que veremos más adelante. Nótese que si  $i = m$ , el momento cruzado se reduce al momento marginal y resulta que  $\sigma_{immm} = \mu_4$  y  $\kappa_{im} = 1$ .

## 2.4 El modelo CAPM de cuatro momentos.

Una vez se han explicado los momentos marginales, cruzados y las medidas de riesgo de orden dos, tres y cuatro, es posible presentar el modelo teórico CAPM de cuatro momentos en el que se incorporan la asimetría y curtosis sistemática,  $\gamma_{im}$  y  $\kappa_{im}$ , para modelizar la prima de riesgo de un activo. Véanse los trabajos de Kraus y Litzenberg (1976); Fang y Lai (1997); Christie-David y Chaudhry (2001) y Hwang y Satchell (1999). Los resultados empíricos de estimar este modelo se presentan y analizan en el tercer capítulo.

En primer lugar, vamos a sentar las bases sobre las que se sustentarán los modelos CAPM de tres y cuatro momentos, tomando como referencia el trabajo de Hwang y Satchell (1999). Se asume un mercado maduro y un único horizonte temporal. Existe un activo libre de riesgos,  $R_f$ , cuya rentabilidad es conocida con anterioridad y no presenta, *a priori*, riesgos, y  $N$  activos de renta variable. La rentabilidad del activo  $i$  se representa como  $R_i$ . Continuando la nomenclatura de las ecuaciones (6) y (7),  $w_f$  es la proporción del activo libre de riesgo en la cartera, mientras que la proporción de un activo cualquiera  $i$  se representa como  $w_i$ . El peso de todos los activos es igual a la unidad:  $w_f + \sum_{i=1}^N w_i = 1$ . Asumimos, también, que la cantidad inicial invertida es 1, por lo que la *end-of-*

*period wealth* ( $w$ , valor final de una inversión inicial de un dólar al final del periodo contemplado) es:

$$w = w_f (1 + R_f) + \sum_{i=1}^N w_i (1 + R_i) \quad (12)$$

y la rentabilidad de la cartera, generalizando la ecuación (5), viene dada por:

$$R_p = w_f R_f + \sum_{i=1}^N w_i R_i \quad (13)$$

La utilidad esperada del inversor puede ser representada por una expansión de Taylor hasta de orden cuatro de su riqueza al final del periodo, de la siguiente forma:

$$E[U(w)] = U[E(w)] + \frac{U''[E(w)] \sigma^2(w)}{2!} + \frac{U'''[E(w)] \gamma^3(w)}{3!} + \frac{U''''[E(w)] \kappa^4(w)}{4!} + \epsilon \quad (14)$$

donde  $\sigma^2$ ,  $\gamma^3$  y  $\kappa^4$  son los momentos marginales no estandarizados de orden 2, 3 y 4 respectivamente, de la variable  $w$  (véanse sus definiciones en la primera columna de la *Tabla 1*); y  $\epsilon$  hace referencia al término de error, correspondiente a momentos de órdenes superiores. Por lo tanto, el problema a resolver consiste en maximizar la ecuación (14), teniendo en cuenta la restricción presupuestaria de  $w_f + \sum_{i=1}^N w_i = 1$ .

Como discuten Hwang y Satchell (1999), para pasar de un modelo de equilibrio individual a un modelo de equilibrio de mercado es necesario el teorema de separación de carteras (TFMS, por sus siglas en inglés: *Two-Fund Money Separation*), que asume que todos los inversores tienen iguales creencias y coeficientes de riqueza; véase la fuente original, Hwang y Satchell (1999). Bajo este teorema, la existencia del activo libre de riesgo y de una cartera de mercado permiten a todos los inversores maximizar su función de utilidad. La condición de equilibrio que garantiza el cumplimiento del TFMS es que todos los inversores tengan una función de utilidad aversiva hiperbólicamente al riesgo (HARA; *Hyperbolic Absolut Risk Aversion*).

La cartera óptima para el inversor individual será la cartera de mercado, para garantizar así que el mercado está en equilibrio. Bajo estas condiciones, la solución al problema de maximizar la ecuación (14) es la ecuación del modelo CAPM de cuatro momentos, dada por la siguiente expresión (véase Hwang y Satchell (1999)):

$$E(R_i) - R_f = \alpha_1 \beta_{im} + \alpha_2 \gamma_{im} + \alpha_3 \kappa_{im}, \quad (15)$$

donde  $R_f$  representa la rentabilidad del activo libre de riesgo y los coeficientes  $\beta_{im}$ ,  $\gamma_{im}$  y  $\kappa_{im}$  actúan como proxies del riesgo de exposición de un activo a la varianza, la asimetría y la curtosis del mercado, respectivamente. Son la *beta*, la asimetría y la curtosis sistemáticas, definidos en la última columna de la *Tabla 1*. Es decir, estos coeficientes son la *beta* estándar (segundo momento) del modelo CAPM, la coasimetría (tercer momento) y la cocurtosis (cuarto momento). De este modo, en el modelo definido en (15) la asimetría y la curtosis sistemáticas también contribuyen a la valoración global del riesgo.

Los parámetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  en el modelo CAPM de cuatro momentos definido en (15) se definen como:

$$\alpha_1 = \frac{dE(w)}{d\sigma(w)} \sigma(R_m) \quad \alpha_2 = \frac{dE(w)}{d\gamma(w)} \gamma(R_m) \quad \alpha_3 = \frac{dE(w)}{d\kappa(w)} \kappa(R_m)$$

En la práctica, esperamos una prima de riesgo positiva para una beta positiva, ya que los inversores exigen una mayor rentabilidad para una beta más alta. En equilibrio, esperamos una prima de riesgo negativa para la asimetría sistemática positiva, ya que, en equilibrio, los inversores exigen una menor rentabilidad para un menor riesgo de caída. Se espera también una prima de riesgo positiva para una curtosis sistemática positiva, ya que los inversores exigen una mayor rentabilidad para un activo con mayor probabilidad de variaciones extremas de precios (Jurczenko y Maillet 2015). Es decir, esperamos que  $\alpha_1$  sea positivo, como en el modelo CAPM tradicional. Por otro lado, se espera que  $\alpha_2$  tenga el signo contrario a la asimetría del mercado,  $\gamma(R_m)$ . Por último, también se espera un  $\alpha_3$  con signo positivo.

La aplicación del modelo econométrico (15) con el objetivo de cuantificar el riesgo global de un activo financiero de manera más precisa no es una novedad en la literatura científica especializada. Christie-David y Chaudhry (2001) ya estimaron este modelo con datos del mercado de futuros y demostraron que la inclusión de los momentos de tercer y cuarto orden aumenta significativamente la capacidad explicativa del modelo, triplicando el coeficiente  $R^2$  al pasar de un modelo de 2 momentos a un modelo de 4 momentos. No obstante, sus  $R^2$  son muy bajos (desde 0,08 hasta un máximo de 0,2), lo que implica un bajo poder explicativo del modelo, y los signos de sus coeficientes calculados no concuerdan con lo esperado.

Hwang y Satchell (1999) aplicaron el modelo CAPM con los momentos cruzados de tercer y cuarto orden para medir el riesgo en los mercados emergentes. Aunque su trabajo refuerza la idea general de añadir ambos términos al modelo, se postula que la cocurtosis tiene una mayor carga explicativa que la coasimetría y el impacto de incluirla es beneficioso y más elevado. No obstante, también se encontraron con algunos problemas, como coeficientes  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  no significativos estadísticamente para niveles de significancia del 1% y del 5%, especialmente en el mercado latinoamericano, y signos para estos coeficientes contrarios a lo esperado.

En el trabajo de Fang y Lai (1997) para el mercado de valores estadounidense, el modelo CAPM de cuatro momentos se comporta de un modo razonable de acuerdo con las expectativas fijadas, aumentando la explicabilidad de los precios y devolviendo resultados positivos. Sin embargo, es en este caso el coeficiente relacionado con la asimetría el que presenta unos resultados peores, llegando a ser insignificativo estadísticamente.

Una mención especial merece el trabajo de Kraus y Litzenberg (1976) en el mercado de valores estadounidense, que ha servido como base, tanto teórica como metodológica, de muchos de los estudios comentados hasta el momento, incluyendo el presente trabajo. Se trata de un trabajo que, aunque sólo incluyó un tercer término derivado de la coasimetría, obtuvo resultados muy positivos, defendiendo así la ampliación del modelo CAPM de dos momentos tradicional al

encontrar una preferencia por la coasimetría positiva. Además, postuló que los negativos resultados preexistentes en la literatura se debían a una incompleta especificación del modelo CAPM. Finalmente, véase también Harvey y Siddique (2000) para un modelo CAPM que incorpora asimetría sistemática.

En este contexto, el objetivo del presente trabajo es analizar si, en el mercado financiero español, el binomio media-varianza de los modelos CAPM y de Markowitz es insuficiente para caracterizar la prima de riesgo de los rendimientos en el mercado, al no seguir éstos distribuciones gaussianas. Para ello, se propone incorporar al análisis clásico medidas de asimetría y curtosis sistemáticas, como son la coasimetría y la cocurtosis.

### 3. APLICACIÓN EMPÍRICA

#### 3.1 Descripción de los datos

En el presente estudio, se analizarán las cotizaciones mensuales de las empresas integrantes del índice bursátil IBEX35, que incluye a las 35 empresas con mayor liquidez cotizantes en el Sistema de Interconexión Bursátil Español. Se examinará el periodo comprendido desde enero del año 2001 hasta enero de 2023, contando con un máximo de 264 observaciones para cada valor. Los datos utilizados se obtuvieron del servidor [es.finance.yahoo.com](https://es.finance.yahoo.com), empleando el módulo de Python conocido como *pandas\_datareader.data*. Asimismo, se hizo uso del lenguaje de programación Python, en particular, la librería Pandas, para la creación, limpieza y preprocesamiento de los datos.

Con los datos de las cotizaciones, se han calculado las rentabilidades mensuales (*compound returns*). En concreto, la fórmula utilizada para obtener la rentabilidad del activo  $i$  en el mes  $t$  es la siguiente:

$$R_{i_t} = 100 \cdot \ln \frac{P_i(t)}{P_i(t-1)}$$

donde  $P_i(t)$  es el precio de la cotización del activo  $i$  en el mes  $t$ .

No todas las empresas que conforman el IBEX35 estarán presentes en nuestra base de datos final debido a la falta de cotizaciones durante el período completo. En concreto, se procederá a estimar el *Modelo (15)* para dos carteras diferentes, las cuales se describirán a continuación.

La primera cartera estará compuesta por aquellos activos financieros que ya formaban parte del IBEX35 en 2003. Esta cartera, que vamos a denominar *Cartera-2003*, contará con 240 observaciones para los siguientes 23 activos financieros: Grupo ACS (ACS), Acerinox (ACX), Acciona (ANA), BBVA (BBVA), Bankinter (BKT), CIE Automotive (CIE), Inmobiliaria Colonial (COL), Endesa (ELE), Enagás (ENG), Ferrovial (FER), Iberdrola (IBE), Indra Sistemas (IDR), Inditex (ITX), Mapfre (MAP), Meliá Hotels International (MEL), Naturgy (NTGY),

PharmaMar (*PHM*), Red Eléctrica Corporación (*REE*), Repsol (*REP*), Banco Sabadell (*SAB*), Banco Santander (*SAM*), Siemens Gamesa Renewable Energy (*SGRE*) y Telefónica (*TEF*).

Además, con el fin de tener un mayor número de observaciones para los activos de la cartera, se considerará una segunda cartera conformada por aquellos valores que ya formaban parte del IBEX35 el 1 de enero de 2001. Esta segunda cartera, que denominaremos *Cartera-2001*, estará formada por los siguientes 16 activos financieros: Acerinox (*ACX*), Acciona (*ANA*), BBVA (*BBVA*), Bankinter (*BKT*), Endesa (*ELE*), Ferrovial (*FER*), Iberdrola (*IBE*), Indra Sistemas (*IDR*), Meliá Hotels International (*MEL*), Naturgy (*NTGY*), PharmaMar (*PHM*), Red Eléctrica Corporación (*REE*), Repsol (*REP*), Banco Sabadell (*SAB*), Banco Santander (*SAM*) y Telefónica (*TEF*). Para cada uno de ellos tendremos 264 observaciones.

### 3.2 Análisis descriptivo y contrastes de Normalidad

En esta sección se describirán las características estadístico-descriptivas más significativas de las series analizadas. En el Capítulo 2 se habló de los momentos marginales poblacionales de hasta cuarto orden, a saber: la media, la varianza, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis, que son parámetros teóricos que describen la distribución de una población. Sin embargo, en la práctica, estos parámetros son desconocidos y hay que estimarlos, para lo cual se utilizarán los momentos muestrales correspondientes.

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=1}^T R_t}{T} = \bar{R}_t \quad (16)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R}_t)^2}{T}} \quad (17)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R}_t)^3}{\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R}_t)^2\right)^{3/2}} \quad (18)$$

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R}_t)^4}{\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R}_t)^2\right)^2} \quad (19)$$

La *Tabla 2* recoge, para la *Cartera-2001*, los valores de los estadísticos definidos en las ecuaciones (16), (17), (18) y (19), junto con otros estadísticos de posición (mínimo, máximo y mediana). Se incluyen también los mismos estadísticos para el índice de mercado IBEX35. La *Tabla 3* recoge los mismos valores para la *Cartera-2003*. El análisis descriptivo de ambas carteras arroja resultados muy similares. Por lo tanto, con el objetivo de mejorar la claridad y la coherencia del documento, y evitar la duplicación del contenido, se centrará la discusión en los resultados específicos de la cartera de 2003 (*Tabla 3*)

Las rentabilidades medias son muy próximas a cero, como cabe esperar teniendo en cuenta la teoría financiera. En general, para la mayoría de empresas la media es menor que la mediana, lo que sugiere que la distribución de las rentabilidades es asimétrica a la izquierda. Sin embargo, hay algunas excepciones en las que la media es un poco mayor que la mediana (por ejemplo, en las empresas *CIE*, *MAP* y *PHM*), lo que sugiere que hay algunas distribuciones que presentan asimetría a la derecha. En consonancia con lo anterior, el coeficiente de asimetría es negativo para todos los valores de la cartera, excepto para *PHM*, indicando que la distribución de las rentabilidades en estas empresas tiene una cola más larga hacia la izquierda; es decir, tiene más y mayores valores distintos a la izquierda de la media, que a la derecha.

En cuanto a la dispersión, observamos desviaciones estándar relativamente altas y grandes diferencias entre el valor mínimo y el máximo especialmente en algunos casos. En particular, destacan los resultados de *BKT* y *REE*. En primer lugar, *BKT* muestra la mayor volatilidad, con un valor de 21,105 y el mayor rango (diferencia entre máximo y mínimo), con un valor de 407.645. Esto puede explicarse teniendo en cuenta el sector en el que opera, el sector bancario. Desde 2003, la economía española ha experimentado fuertes sacudidas, especialmente la crisis financiera de 2007-2008 y los graves efectos subsiguientes en la economía del país. Esta crisis impactó considerablemente al sector bancario, que antes se consideraba bastante seguro, y muchas empresas tuvieron que ser rescatadas.

**Tabla 2. Análisis descriptivo de la rentabilidad mensual de cada uno de los activos que componen la Cartera-2001 y contraste de Normalidad**

Activo	Media	Desviación Típica	Coefficiente de Asimetría	Curtosis	Mínimo	Máximo	Mediana	Test Jarque- Bera
<i>IBEX</i>	-0.035	5.933	-0.551	5.898	-29.560	22.449	0.413	**
<i>ACX</i>	0.053	8.983	-0.401	4.459	-36.325	29.171	0.332	**
<i>ANA</i>	0.563	8.585	-0.501	4.342	-34.564	21.443	1.008	**
<i>BBVA</i>	-0.374	9.501	-0.101	6.941	-46.369	43.567	0.259	**
<i>BKT</i>	-0.639	29.811	-1.026	41.641	-205.876	208.683	0.435	**
<i>ELE</i>	-0.008	8.591	-2.622	21.453	-70.829	20.926	0.418	**
<i>FER</i>	0.224	12.306	-7.410	93.191	-153.471	30.434	1.181	**
<i>IBE</i>	0.451	6.623	-0.488	4.481	-23.760	19.389	1.164	**
<i>IDR</i>	0.027	7.899	-0.165	4.659	-31.689	30.407	0.369	**
<i>MEL</i>	-0.292	11.609	-0.022	8.238	-52.023	54.526	0.550	**
<i>NTGY</i>	0.145	7.098	-0.551	4.566	-28.176	19.520	0.368	**
<i>PHM</i>	-0.314	13.371	0.002	4.536	-51.606	46.252	-0.537	**
<i>REE</i>	0.719	5.736	-0.280	2.946	-15.257	18.169	1.006	No significativo
<i>REP</i>	-0.055	8.102	-0.054	6.466	-33.839	41.218	0.696	**
<i>SAB</i>	-0.422	10.004	-0.679	7.064	-58.259	35.051	-0.556	**
<i>SAN</i>	-0.473	9.402	-0.410	6.653	-46.778	38.4011	0.350	**
<i>TEF</i>	-0.617	7.512	-0.217	5.236	-29.746	29.936	0.188	**

\*\* : Significativo al 1%

**Tabla 3. Análisis descriptivo de la rentabilidad mensual de cada uno de los activos que componen la Cartera-2003 y contraste de Normalidad**

Activo	Media	Desviación Típica	Coefficiente de Asimetría	Curtosis	Mínimo	Máximo	Mediana	Test Jarque-Bera
IBEX	0.132	5.732	-0.602	6.708	-29.599	22.449	0.576	**
ACS	0.403	8.502	-0.870	8.169	-46.466	28.432	1.015	**
ACX	0.028	8.997	-0.450	4.559	-36.325	29.170	0.332	**
ANA	0.606	8.830	-0.493	4.189	-34.564	21.443	1.008	**
BBVA	-0.201	9.250	-0.107	7.486	-46.368	43.567	0.362	**
BKT	0.316	21.105	-0.134	72.824	-204.054	203.591	0.879	**
CIE	1.294	9.263	-0.050	5.975	-33.270	42.106	0.459	**
COL	-1.032	13.955	-0.691	6.086	-58.968	45.244	0	**
ELE	0.199	8.494	-2.842	24.205	-70.829	20.926	0.551	**
ENG	0.405	6.216	-0.407	4.956	-28.163	21.692	0.692	**
FER	0.008	12.721	-7.336	89.244	-153.471	30.434	1.007	**
IBE	0.496	6.690	-0.486	4.549	-23.760	19.389	1.117	**
IDR	0.198	7.560	-0.371	4.554	-31.688	26.763	0.498	**
ITX	0.719	6.985	-0.348	4.627	-21.957	27.110	0.962	**
MAP	0.072	8.097	-0.462	5.516	-32.771	26.190	-0.266	**
MEL	0.078	11.652	0.005	8.657	-52.023	54.526	0.597	**
NTGY	0.189	7.153	-0.623	4.713	-28.176	19.520	0.491	**
PHM	0.001	13.286	-0.021	4.723	-51.605	46.252	-0.283	**
REE	0.799	5.676	-0.278	2,954	-14.102	18.169	1.197	No significativo
REP	0.054	8.233	-0.054	6.548	-33.838	41.218	0.866	**
SAB	-0.347	10.237	-0.718	6.996	-58.258	35.051	-0.498	**
SAN	-0.290	9.040	-0.326	7.343	-46.777	38.401	0.615	**
SGRE	0.568	11.514	-0.792	6.894	-63.336	39.855	1.760	**
TEF	-0.402	6.895	-0.37979	5.019	-29.746	28.001	0.449	**

\*\* : Significativo al 1%

En segundo lugar, *REE* presenta la desviación estándar más baja de todas las calculadas en la *Tabla 2*, con un valor de 5,676 y un rango de 22.271. A pesar de la crisis energética derivada de la Guerra ruso-ucraniana y el significativo aumento de los precios y costos energéticos desde febrero de 2022, el sector energético ha mantenido una notable estabilidad. Financieramente, se considera casi como un activo seguro, sujeto principalmente a la inflación y sin grandes fluctuaciones volátiles.

Con referencia a los momentos de orden mayor, es importante destacar que existen tres activos con valores extremos de asimetría y/o curtosis (*FER*, *ELE* y *BKT*). Estas tres empresas operan en sectores estratégicos para la economía y han experimentado las consecuencias más extremas de las crisis económicas en el período 2001-2023. Esto se refleja en una alta cantidad de valores atípicos, lo cual resulta en los valores extremadamente altos de los estadísticos de orden 3 y 4 calculados. En particular, *FER* mostraba rendimientos moderados hasta 2010, momento en el que experimentó un aumento exponencial. Sin embargo, debido al impacto devastador de la crisis del COVID-19, sufrió caídas de rendimiento extraordinarias en 2020. Por otro lado, al analizar *BKT* se observan fuertes caídas en el período 2008-2012, seguidas de una posterior recuperación hasta 2018, y nuevamente una enorme caída debido a la pandemia. Por último, al analizar *Endesa* vemos que, a pesar de haber experimentado un crecimiento significativo hasta 2008, sufrió grandes desplomes en 2007 y 2014, llegando a perder la mitad de su valor bursátil en un mes. De hecho, esta serie presenta muchos más atípicos que el resto de las empresas analizadas. También es posible destacar algunas empresas que, por el contrario, muestran asimetrías positivas o cercanas a cero. Destaca especialmente *MEL* por tener una asimetría positiva. En este caso, pertenecer a un sector tan estable y esencial puede beneficiarle, ya que muestra una asimetría ligeramente positiva. Asimismo, otras empresas muy estables en el mercado, como *CIE*, *BBVA*, *REP* o *PHM*, también presentan una asimetría cercana a cero, lo cual les ha ayudado a mitigar los efectos de las crisis económicas sufridas durante el periodo 2001-2023. En concreto, *PHM*, al pertenecer al sector farmacéutico, ha podido tener un contexto incluso más favorable de lo habitual desde 2020.

Finalmente, todas las empresas, excepto *REE*, presentan una curtosis bastante elevada, lo que significa que tienen colas más pesadas que la distribución normal. Esto se traduce en una mayor cantidad de valores extremos y, por lo tanto, también en un mayor riesgo, como se explicó en la *sección 2.3*. Es importante destacar nuevamente a *MEL* y *ACS*, pero también hay otros valores, como los pertenecientes al sector financiero (*SAB*, *SAN* y *BBVA*) que presentan curtosis elevadas.

Se ha realizado el test de Normalidad de Jarque-Bera (véase la última columna de la *Tabla 2* y la *Tabla 3*), para contrastar si las rentabilidades se ajustan a una distribución Normal en base a sus coeficientes de asimetría y curtosis. Conforme a la notación anterior, el estadístico de Jarque-Bera se define como:

$$JB = \frac{T}{6} \left( \hat{\gamma}^2 + \frac{1}{4} (\hat{\kappa} - 3)^2 \right)$$

donde  $T$  es el número de observaciones,  $\hat{\gamma}$  y  $\hat{\kappa}$  son las estimaciones de los coeficientes de asimetría y curtosis, definidas en las ecuaciones (18) y (19), respectivamente. Bajo la hipótesis nula (Normalidad), la distribución asintótica del estadístico  $JB$  es una Chi-2 con 2 grados de libertad. Por tanto, valores grandes de  $JB$  indican ausencia de Normalidad. Concretamente, se rechaza la hipótesis de Normalidad al 1%, si el valor de  $JB$  es superior al percentil 99% de la Chi-2 con 2 grados de libertad, que es aproximadamente 9,210. Si particularizamos con nuestros datos, vemos elevadísimos valores para el estadístico  $JB$  (del orden de  $10^3$  y  $10^4$ ), excepto para *REE*. Esto nos permite confirmar las intuiciones que se habían adquirido tras el análisis descriptivo: nuestros rendimientos no siguen una distribución Normal para ningún nivel de significación razonable. *REE* es el único valor para el que no podemos rechazar la hipótesis de Normalidad para los niveles de confianza habitualmente utilizados en la academia, pues su p-valor calculado es de 0,21.

La relación rentabilidad-riesgo de la cartera se puede apreciar en mayor detalle en el *Gráfico 3.1*. En rojo se aprecia el IBEX35, en una posición bastante céntrica y con poco riesgo, como es lógico al tratarse del índice de mercado y estar diversificado. La mayor parte de los valores se concentra en una nube céntrica, pero destacan, como hemos explicado anteriormente, *BKT* por su elevado

riesgo, REE por su bajo riesgo, COL por su baja rentabilidad y CIE por su alta rentabilidad.

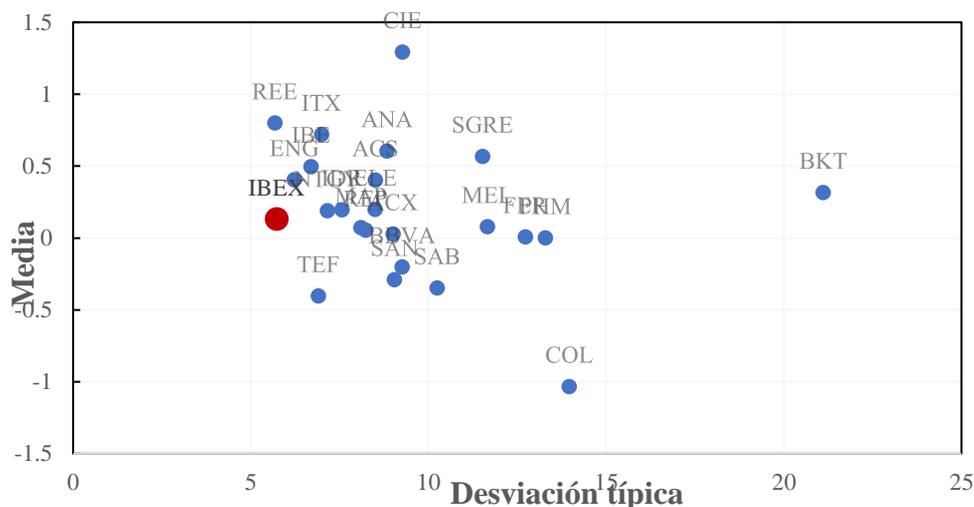


Gráfico 3.1. Media-desviación típica para todos los activos de la cartera, incluyendo el índice de mercado IBEX35.

En el Gráfico 3.2 se muestran los coeficientes de asimetría y curtosis para los activos financieros de la cartera de 2003 junto con el índice de mercado, excluyendo FER, ELE y BKT porque, al presentar valores tan elevados, impedían la correcta visibilidad del resto del conjunto. Se confirma que la mayoría de nuestras empresas (incluyendo al *IBEX*) presentan una ligera asimetría negativa o hacia la izquierda. Se destaca ACS por su coeficiente de asimetría bajo y negativo, así como a MEL, BBVA, REP, CIE y PHM por presentar valores cercanos a cero o incluso positivos. En cuanto al exceso de curtosis, MEL y ACS presentan los valores más altos y REE el más bajo, siendo el único menor que 3.

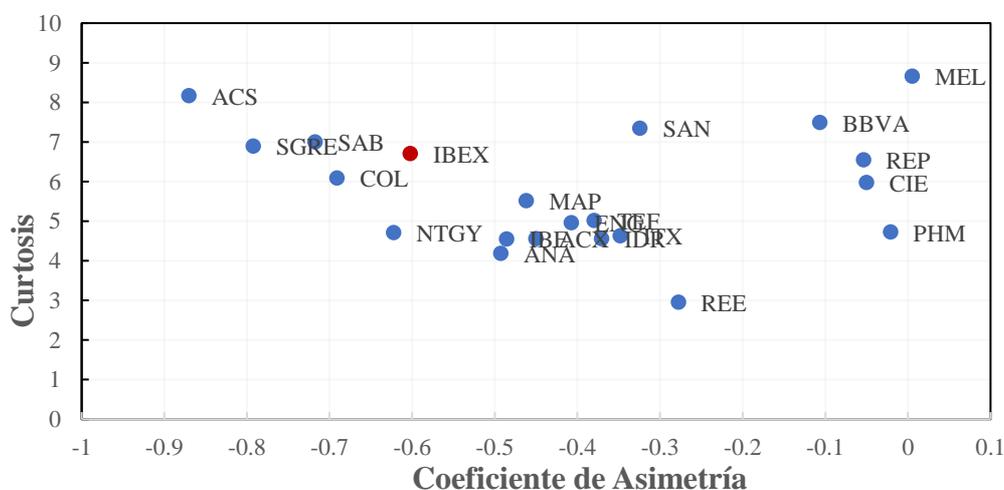


Gráfico 3.2. Curtosis-coef. de asimetría para todos los activos de la cartera, incluyendo el índice de mercado IBEX35 y excluyendo FER, ELE y BKT.

### 3.3 Medidas de riesgo relativo

En esta sección vamos a realizar un análisis similar al de la sección anterior, pero en este caso centrándonos en las medidas de riesgo relativo introducidas en la *Sección 2.3*, con respecto al índice de mercado IBEX35.

Para estimar estas medidas se han utilizado las rentabilidades deflactadas, como sugieren Kraus y Litzenberg (1976), Fang y Lai (1997); Christie-David y Chaudhry (2001); Hwang y Satchell (1999). La razón, retomando los estudios de Kraus y Litzenberg (1976), es que las tasas de rendimiento del mercado *ex post* no pueden ni deben ser consideradas como observaciones independientes de la misma población. No obstante, tal y como describe Fama (1970), cuando el conjunto de oportunidades de inversión es independiente del estado, la distribución de la riqueza per cápita al inicio y al final del periodo no varía. Del mismo modo, la distribución de las tasas de rendimiento de los valores individuales también es idéntica a lo largo del tiempo y es posible obtener estimaciones imparciales de la tasa de rendimiento esperada, de la *beta*, la coasimetría y la cocurtosis de una cartera realizando un ajuste temporal a las primas de riesgo calculadas. Ese ajuste consiste en calcular la tasa de rendimiento deflactada en base a la siguiente expresión matemática, utilizada de manera recurrente en la literatura por autores como Kraus y Litzenberg (1976), Fang y Lai (1997); Christie-David y Chaudhry (2001).

$$r_{it} = \frac{R_{it} - R_{ft}}{1 + R_{ft}} \quad (20)$$

donde  $R_{it}$  es la rentabilidad logarítmica del activo  $i$  en el mes  $t$  y  $R_{ft}$  es la rentabilidad del activo libre de riesgo para el mes  $t$ . Como *proxy* del activo financiero libre de riesgo hemos utilizado, como es habitual en la literatura especializada, la rentabilidad mensual de los Bonos del Tesoro español a 10 años, cuyos datos están disponibles en <https://es.investing.com/rates-bonds/spain-10-year-bond-yield-historical-data>.

Con estas rentabilidades deflactas obtenidas en (20) se calculan el coeficiente de correlación lineal, los coeficientes *beta*, el coeficiente de coasimetría y la cocurtosis, cuyas expresiones muestrales son:.

$$\widehat{\rho}_{im} = \frac{\widehat{\sigma}_{im}}{\widehat{\sigma}_i \widehat{\sigma}_m} = \frac{\sum_{t=1}^T (r_{i_t} - \bar{r}_i)(r_{m_t} - \bar{r}_m)}{\left(\sum_{t=1}^T (r_{i_t} - \bar{r}_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{t=1}^T (r_{m_t} - \bar{r}_m)^2\right)^{1/2}}$$

$$\widehat{\beta}_{im} = \frac{\widehat{\sigma}_{im}}{\widehat{\mu}_2} = \frac{\sum_{t=1}^T (r_{i_t} - \bar{r}_i)(r_{m_t} - \bar{r}_m)}{\sum_{t=1}^T (r_{m_t} - \bar{r}_m)^2} \quad (21)$$

$$\widehat{\gamma}_{im} = \frac{\widehat{\sigma}_{imm}}{\widehat{\mu}_3} = \frac{\sum_{t=1}^T (r_{i_t} - \bar{r}_i)(r_{m_t} - \bar{r}_m)^2}{\sum_{t=1}^T (r_{m_t} - \bar{r}_m)^3} \quad (22)$$

$$\widehat{\kappa}_{im} = \frac{\widehat{\sigma}_{immm}}{\widehat{\mu}_4} = \frac{\sum_{t=1}^T (r_{i_t} - \bar{r}_i)(r_{m_t} - \bar{r}_m)^3}{\sum_{t=1}^T (r_{m_t} - \bar{r}_m)^4} \quad (23)$$

donde  $\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i_t}$ , para  $i = 1, \dots, N$ , siendo N el número total de activos que componen la cartera. Los valores de estos momentos calculados para los activos de las dos carteras se recogen en las *Tablas 4 y 5*.

**Tabla 4. Momentos cruzados de los activos que componen la Cartera-2001**

Activo	Correlación Lineal	Beta	Coasimetría	Cocurtosis
ACX	0.6467	0.9570	1.1590	1.0252
ANA	0.6476	0.9236	1.2398	0.8885
BBVA	0.8910	1.3977	1.0822	1.5243
BKT	0.2913	1.3863	1.6857	1.3239
ELE	0.5846	0.8282	0.9781	0.6795
FER	0.3788	0.7578	0.4524	0.8262
IBE	0.6716	0.7477	0.7802	0.6847
IDR	0.6240	0.8160	1.0082	0.8924
MEL	0.7098	1.3524	1.2148	1.7313
NTGY	0.6226	0.7385	0.6010	0.7652
PHM	0.3736	0.8226	1.2824	0.4222
REE	0.5634	0.5350	0.4990	0.4601
REP	0.7068	0.9524	0.6840	1.0455
SAB	0.6221	1.0222	1.3793	1.2468
SAN	0.8789	1.3576	1.2388	1.4786
TEF	0.7708	0.9519	0.8843	1.0088

**Tabla 5. Momentos cruzados de los activos que componen la Cartera-2003**

Activo	Correlación Lineal	Beta	Coasimetría	Cocurtosis
ACS	0.7099	0.9719	0.4642	0.7721
ACX	0.5928	0.8775	1.1357	0.9272
ANA	0.6823	1.1096	1.9547	1.1335
BBVA	0.8882	1.3300	0.9860	1.3423
BKT	0.3061	1.2643	1.0657	0.9846
CIE	0.4972	0.8220	0.7159	0.8036
COL	0.3644	0.9988	3.0331	0.8400
ELE	0.5270	0.8647	0.4915	0.6998
ENG	0.6232	0.6610	0.4454	0.6125
FER	0.3452	0.8665	0.7222	1.0424
IBE	0.7667	0.9447	1.0577	1.0032
IDR	0.5381	0.6378	1.0325	0.5166
ITX	0.5542	0.6314	0.5718	0.6240
MAP	0.7827	1.1582	1.3346	1.1755
MEL	0.6613	1.2988	1.4551	1.6336
NTGY	0.6451	0.8234	0.4380	0.7069
PHM	0.4653	0.9938	1.2144	1.0046
REE	0.6324	0.6635	0.6724	0.6189
REP	0.7272	0.9662	1.5926	1.0369
SAB	0.6197	0.9833	0.7083	0.9693
SAN	0.8797	1.3097	0.9955	1.3053
SGRE	0.1470	0.3098	1.3406	0.1995
TEL	0.7857	0.8762	1.0041	0.8543

Como hicimos en las secciones anteriores, discutiremos en mayor profundidad los resultados de la *Tabla 5*, que se complementan con el *Gráfico 3.3*.

En primer lugar, cabe destacar los resultados obtenidos para los momentos de orden 2. El coeficiente de correlación denota el grado de covariación lineal conjunta de las dos variables aleatorias, en este caso el activo financiero  $i$  y el mercado  $m$ , que representa el IBEX35. Por otro lado, el coeficiente *beta* mide la sensibilidad de un activo respecto a los movimientos del mercado. Todos los activos estudiados presentan una correlación positiva respecto al mercado, especialmente las empresas más importantes como BBVA, SAN, TEF o IBE. Esta relación puede explicarse porque estas empresas representan una gran parte del mercado y, por lo tanto, se mueven a la par. Además, los factores externos a la empresa, como el contexto macroeconómico general, también son importantes para explicar su rendimiento. Exceptuando el caso de SGRE (cuya

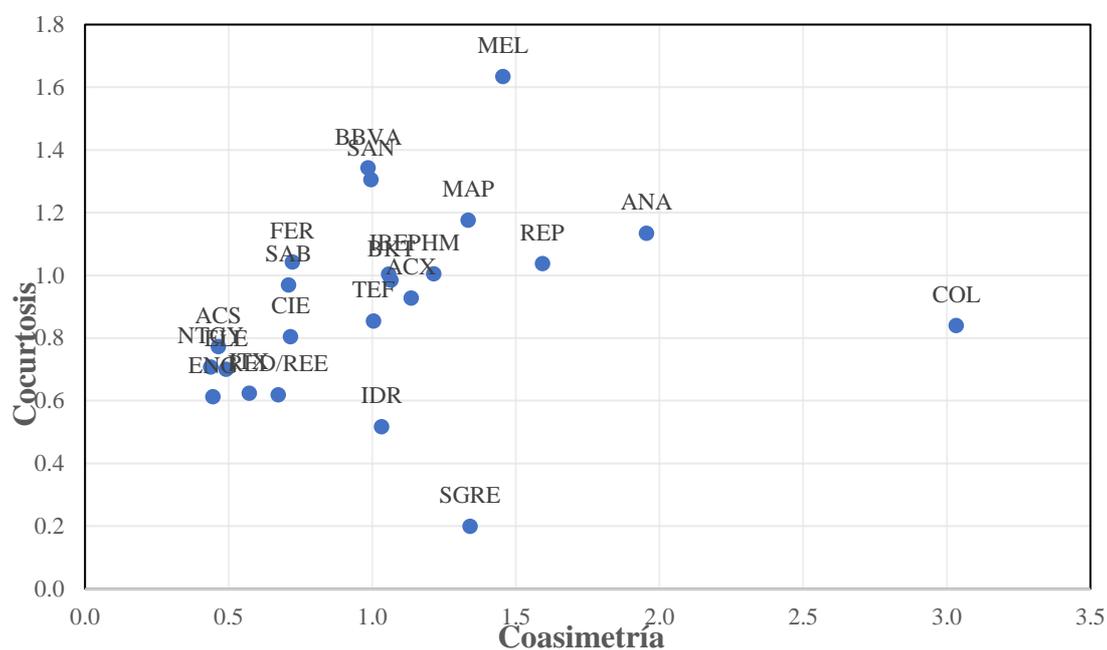
beta vale 0.2888), los valores de *beta* se encuentran concentrados en el intervalo [0,3-1,3], con una importante masa de valores próxima a la unidad, lo que sugiere que sus movimientos están en línea con el mercado de referencia IBEX35. En concreto, las betas de mercado más bajas pertenecen a activos como *ITX*, *IDR*, *ENG* o *REE*, que se han mantenido bastante estables a pesar de los diferentes shocks económicos. En el otro extremo del intervalo se presentan activos como *BBVA*, *SAN*, *MEL* o *BKT*, que como ya hemos explicado, operan en los sectores de actividad que más se han visto afectados por las crisis de las últimas tres décadas.

Incorporamos al análisis los estadísticos de coasimetría y cocurtosis que, si bien fueron introducidos en la *sección 2.3*, ahora se ha detallado cómo los estimamos empíricamente. La medida de coasimetría nos informa sobre la asimetría conjunta de los retornos de un activo y el mercado de referencia. En este estudio, se encontró que la mayoría de las asimetrías sistemáticas calculadas son positivas, destacando especialmente *COL* y *ANA* por presentar los mayores coeficientes en valor absoluto. Cuando se habla de coasimetría con el mercado positiva, significa que la distribución de rendimientos de un activo tiende a tener una cola larga hacia la derecha en comparación con la distribución del mercado. Esto sugiere que el activo puede tener un rendimiento relativamente peor que el mercado en períodos de baja volatilidad, pero un rendimiento relativamente mejor en períodos de alta volatilidad. Es decir, coasimetría positiva aumenta la rentabilidad esperada, pero incrementa también el riesgo de la cartera.

La cocurtosis es una medida que indica el grado en que los rendimientos de un activo se desvían de la media del mercado. Cuando la cocurtosis con el mercado es positiva, como es el caso de los activos financieros analizados, significa que los valores extremos de rentabilidad de los activos financieros y el mercado están estrechamente relacionados. En otras palabras, si el mercado tiene rentabilidades extremadamente altas, el activo financiero también tendrá rentabilidades extremadamente altas y viceversa. En el *Tabla 5* se puede observar que los activos financieros con los valores más llamativos son *SAN*, *BBVA* y *MEL*, los cuales pertenecen al sector financiero y hotelero. Por lo tanto,

una cocurtosis sistemática aumenta la rentabilidad esperada de la cartera, pero también su riesgo.

Finalmente, se presenta a continuación el *Gráfico 3.3*, donde se representa la cocurtosis en función de la coasimetría. Los valores que más llaman la atención son aquellos que ya hemos comentado al analizar los resultados de la *Tabla 5*. Gráficamente se puede observar la alta coasimetría de *COL*, la baja cocurtosis de *SGRE* y la alta cocurtosis de *MEL*. También se puede destacar *ANA* por presentar tanto una cocurtosis como una coasimetría elevadas.



*Gráfico 3.3. Cocurtosis-coasimetría para todos los activos de la cartera, respecto al índice de mercado IBEX35.*

### 3.4 Estimación de modelos

En esta sección se van a presentar los resultados de estimar los tres modelos CAPM, conforme a lo explicado en el *Capítulo 2*. Como hemos comentado antes, los resultados estimados se realizan utilizando los *deflated excess returns* definidos en (20). En primer lugar, estimaremos la forma tradicional del modelo CAPM (*Modelo 1*), dada por la siguiente ecuación:

$$\bar{r}_i = \alpha_0 + \alpha_1 \widehat{\beta}_{im} + \epsilon_i \quad (24)$$

para  $i = 1, \dots, N$ ; donde  $\bar{r}_i$  representa la prima de riesgo media (*average monthly deflated excess return*) del activo  $i$ , que depende del riesgo sistemático de orden 2, la *beta*  $\widehat{\beta}_{im}$  (variable explicativa), definida en (21).

En segundo lugar, vamos a estimar el modelo CAPM de tres momentos (*Modelo 2*), propuesto por Kraus y Litzenberg (1976) y definido como:

$$\bar{r}_i = \alpha_0 + \alpha_1 \widehat{\beta}_{im} + \alpha_2 \widehat{\gamma}_{im} + \epsilon_i \quad (25)$$

para  $i = 1, \dots, N$ ; donde, a diferencia del modelo anterior, la prima de riesgo depende tanto del riesgo sistemático de segundo orden recogido por  $\widehat{\beta}_{im}$  como de la asimetría sistemática (coasimetría),  $\widehat{\gamma}_{im}$ , definida en (22).

Por último, vamos a estimar también el modelo CAPM que incorpora momentos de hasta orden cuatro (*Modelo 3*), eje central de nuestra investigación, descrito en la *Sección 2.4*, cuya versión empírica viene dada por la siguiente ecuación:

$$\bar{r}_i = \alpha_0 + \alpha_1 \widehat{\beta}_{im} + \alpha_2 \widehat{\gamma}_{im} + \alpha_3 \widehat{\kappa}_{im} + \epsilon_i \quad (26)$$

donde la curtosis sistemática (cocurtosis),  $\widehat{\kappa}_{im}$ , definida en (23), también se incorpora como variable explicativa de cara a valorar el riesgo de un activo financiero.

La variable dependiente de los tres modelos enunciados en (24), (25) y (26),  $\bar{r}_i$ , representa la prima de riesgo media, que se define como la recompensa que se le concede al inversor por invertir en un activo  $i$  con riesgo en vez de invertir en el activo libre de riesgos. En otras palabras, la prima de riesgo se define como la remuneración adicional que recibe el inversor por asumir un mayor riesgo.

Antes de comentar los resultados, existe un aspecto adicional que resulta relevante mencionar. Como se ha discutido en secciones anteriores de este trabajo, nuestra base de datos abarca un período de dos décadas durante el cual la economía española ha experimentado diversas situaciones y crisis. En consecuencia, las empresas objeto de nuestro estudio también han sido afectadas por estos eventos. Específicamente, aquellos activos financieros más volátiles o pertenecientes a sectores que han sufrido mayores impactos,

muestran un número significativo de valores atípicos, como ya hemos comentado anteriormente, lo que conlleva valores extremadamente grandes de los coeficientes de curtosis, por ejemplo. Conscientes de esta situación, y como ya se ha hecho en otros estudios precedentes como los de Kraus y Litzenberg (1976), Fang y Lai (1997); Christie-David y Chaudhry (2001), hemos tomado la decisión de corregir estos valores y estimar los modelos de regresión tanto para los datos originales como para los datos corregidos, con el fin de comparar el impacto de los valores atípicos. Siguiendo a Granger y Ding (1995), hemos definido como valores atípicos aquellos que superan, en valor absoluto, cuatro veces la desviación estándar calculada durante el período analizado. Para corregirlos, hemos truncado estos valores y los hemos sustituido por el cuádruplo de la desviación estándar calculada, manteniendo el signo correspondiente.

La última cuestión que vamos a abordar antes de presentar los resultados de nuestros modelos es el argumento de las expectativas racionales de los consumidores, y como éstas se reflejan en las primas de riesgo que vamos a calcular. Los tres modelos de valoración de activos analizados anteriormente identifican tres definiciones de riesgo diferentes, incorporando progresivamente diferentes componentes del riesgo sistemático. Por lo tanto, esperamos que la tasa de rendimiento requerida derivada de dichos modelos sea diferente. Conforme a Christie-David y Chaudhry (2001), nuestras expectativas son las siguientes:

- A un inversor racional no le gusta (prefiere) la coasimetría negativa (positiva). Por lo tanto, al comparar el modelo CAPM tradicional (24) y el modelo que incorpora la coasimetría (25) esperamos que la tasa de rendimiento esperada aumente (disminuya) para aquellos activos financieros con coeficientes de coasimetría negativos (positivos) y significativos. Es decir, esperamos preferencia por coasimetría positiva.
- A un inversor racional no le gusta (prefiere) la cocurtosis positiva (negativa). Por lo tanto, al comparar los modelos (25) y (26), esperamos que la tasa de rendimiento esperada aumente (disminuya) para aquellos activos con coeficientes de cocurtosis positivos (negativos). Es decir, se espera que el inversor racional sienta aversión por la cocurtosis positiva.

A continuación, presentaremos y analizaremos los resultados obtenidos en nuestra investigación, estableciendo relaciones con la literatura existente. Los resultados se muestran en las *Tablas 6 y 7*. En la *Tabla 6*, se presentan los resultados para la cartera "*Cartera-2001*", y en la *Tabla 7*, los resultados para la cartera "*Cartera-2003*". Se incluyen dos paneles en cada tabla para comparar y discutir si la exclusión de valores atípicos mejora, empeora o no tiene un impacto significativo en los resultados.

En cada tabla se muestra el valor estimado para el coeficiente de cada variable predictora, y entre paréntesis se representa el valor p asociado al valor estadístico *t* correspondiente para contrastar la significación de dicho coeficiente. Si el valor p es inferior a un nivel de significación determinado (por ejemplo,  $\alpha = 0.05$ ), se considera que la variable predictora tiene una relación estadísticamente significativa con la variable de respuesta del modelo. En cada caso, se incluye además el coeficiente de determinación  $R^2$  para evaluar la capacidad explicativa del modelo estimado y el Test de la F, para evaluar si cada modelo es, en su conjunto, estadísticamente significativo (en general, nuestros modelos van a ser estadísticamente significativos al 5%).

**Tabla 6. Estimaciones de los tres modelos CAPM para la Cartera-2001**

Modelo de mercado	Término constante $\alpha_0$	Premio a la desviación sistemática $\alpha_1$	Premio a la asimetría sistemática $\alpha_2$	Premio a la curtosis sistemática $\alpha_3$	$R^2$ ajustado	Test de la F
<b>A) Sin corregir atípicos</b>						
<b>Modelo 1</b>	-0.5174 (0,087)	-1.1107 (0,001)	-	-	0,496	15,77 (0,001)
<b>Modelo 2</b>	-0.4851 (0,118)	-0,9131 (0,037)	-0,2219 (0,482)	-	0,478	7,881 (0,006)
<b>Modelo 3</b>	-0.4279 (0,216)	-1,3122 (0,221)	-0,1470 (0,691)	0,2548 (0,676)	0,444	4,985 (0,018)
<b>B) Tras corregir atípicos</b>						
<b>Modelo 1</b>	-0.3904 (0,251)	-1,1901 (0,003)	-	-	0,449	13.204 (0.003)
<b>Modelo 2</b>	-0.3288 (0,366)	-1.1133 (0,009)	-0.1237 (0,582)	-	0.420	6.440 (0.011)
<b>Modelo 3</b>	-0.2604 (0,509)	-1,8582 (0,211)	-0,0125 (0,968)	0,5320 (0,593)	0,387	4.163 (0.031)

**Tabla 7. Estimaciones de los tres modelos CAPM para la Cartera-2003**

Modelo de mercado	Término constante $\alpha_0$	Premio a la desviación sistemática $\alpha_1$	Premio a la asimetría sistemática $\alpha_2$	Premio a la curtosis sistemática $\alpha_3$	R <sup>2</sup> ajustado	Test de la F
<b>A) Sin corregir atípicos</b>						
<b>Modelo 1</b>	-0.4006 (0,275)	-0,7683 (0,051)	-	-	0,130	4,273 (0.051)
<b>Modelo 2</b>	-0.2480 (0,478)	-0,5807 (0,123)	-0,3076 (0,061)	-	0,236	4,400 (0,026)
<b>Modelo 3</b>	-0.2041 (0,582)	-0,9315 (0,307)	-0,3097 (0,066)	0,3140 (0,668)	0,204	2,878 (0,063)
<b>B) Tras corregir atípicos</b>						
<b>Modelo 1</b>	-0.2884 (0,424)	-0,8643 (0,030)	-	-	0,167	5,423 (0,030)
<b>Modelo 2</b>	-0.1268 (0,709)	-0,6641 (0,076)	-0,3246 (0,042)	-	0,293	5,550 (0,012)
<b>Modelo 3</b>	-0.0453 (0,902)	-1,7751 (0,094)	-0,3318 (0,037)	0,9558 (0,254)	0,306	4,232 (0,019)

Analizando los resultados de la Cartera-2001 sin corregir los valores atípicos (*Tabla 6, panel A*), encontramos que el modelo CAPM tradicional muestra el mayor poder explicativo, con un valor de R<sup>2</sup> ajustado de 0,496. Sin embargo, al incorporar los momentos cruzados de orden 3 y 4, este valor disminuye a 0,478 y 0,444 respectivamente. Además, no encontramos justificación estadística para la inclusión de la coasimetría y la cocurtosis. Tanto para el *Modelo 2* como para el *Modelo 3*, la inclusión de estos momentos no es estadísticamente significativa, incluso a niveles de significancia razonables. Los signos obtenidos para los coeficientes que recogen los efectos de la covarianza y de la coasimetría no concuerdan con nuestras expectativas iniciales.

Al analizar los resultados del Panel B de la *Tabla 6*, observamos que los resultados son bastante similares. El valor de R<sup>2</sup> ajustado, que representa el poder explicativo del modelo, disminuye ligeramente. Sin embargo, los patrones de los signos de los coeficientes se mantienen consistentes con los del panel A. De nuevo, los términos relacionados con la asimetría sistemática o la curtosis sistemática no son significativos. Esto concuerda con los resultados de otros autores, como Christie-David y Chaudhry (2001), respecto a la presencia de valores atípicos: la corrección o no de los valores atípicos no afecta a los

resultados. Obsérvese que, en ambos casos, el valor de la F del *Modelo 3* indica significación conjunta de todos los coeficientes del modelo, mientras que ninguno es individualmente significativo. Esto podría estar señalando un problema de multicolinealidad. De hecho, la correlación entre la *Beta* y la cocurtosis es 0,936 en los datos no corregidos por atípicos.

En la *Tabla 7, panel A* se presentan los resultados calculados para la Cartera de 2003 sin corregir valores atípicos. Estos resultados presentan ciertas características distintas de las mencionadas anteriormente. El poder explicativo del modelo, medido por el valor del  $R^2$  ajustado, es relativamente bajo en este caso. Los valores obtenidos son 0,13, 0,236 y 0,204 respectivamente. Es importante destacar que, aunque el modelo que incluye únicamente el término de tercer orden (*Modelo 2*) muestra mejores resultados, ambos modelos 2 y 3 superan al modelo CAPM tradicional. Al analizar los coeficientes calculados, nos encontramos con el mismo problema que en los resultados anteriores. El premio a la desviación sistemática tiene un signo negativo, al igual que el premio a la asimetría sistemática. Por otro lado, el premio a la curtosis sistemática muestra un signo positivo, en línea con las expectativas. Sin embargo, ninguno de estos términos muestra significancia estadística al nivel del 5%, aunque la asimetría sistemática se acerca a estos umbrales de significancia, con p-valores de 0,061 para el *Modelo 2* y 0,066 para el *Modelo 3*, por lo que la hayan significativa al 10%. Por otro lado, el premio a la curtosis sistemática tiene un valor p de 0,668, lo cual no justifica su inclusión en el modelo.

Por último, analizaremos los resultados presentados en el Panel B de la *Tabla 7*, para la cartera de 2003 tras la corrección de atípicos. Los valores del  $R^2$  ajustado, que reflejan el poder explicativo de los modelos, son 0,167, 0,293 y 0,306 respectivamente para los Modelos 1, 2 y 3. Es decir, el poder explicativo de los modelos mejora con la inclusión de cada nuevo término, tal como esperábamos. En cuanto al patrón de los signos, se mantiene consistente con los casos anteriores. En este caso, la inclusión de la curtosis sistemática no está respaldada por la significancia estadística, pero sí lo está la inclusión de la asimetría sistemática, con valores p de 0,042 y 0,037, respectivamente, en los

Modelos 2 y 3. Además, el premio a la desviación sistemática se rechazaría al nivel del 10% para los *Modelos 2 y 3*, pero no al nivel del 5%.

En resumen, los resultados de la *Tabla 7*, aunque no son óptimos y difieren de las expectativas, muestran un mejor cumplimiento de nuestras suposiciones. El poder explicativo de los modelos mejora con la inclusión de los términos de asimetría y curtosis sistemáticas, y se observa consistencia en los signos de los coeficientes. Sin embargo, la inclusión de la curtosis sistemática no se justifica estadísticamente, mientras que la inclusión de la asimetría sistemática muestra significancia estadística al 5% en los *Modelos 2 y 3*.

Antes de concluir este capítulo, es importante realizar una última consideración sobre nuestros resultados. Aunque es cierto que los resultados no son muy alentadores, debemos tener en cuenta que los trabajos de referencia de la literatura especializada también presentan resultados contradictorios entre sí y, en algunos casos, similares a los nuestros.

Si nos centramos en los coeficientes no significativos, podemos observar que este es un problema recurrente en la literatura especializada. Investigaciones anteriores, como las de Christie-David y Chaudhry (2001), Hwang y Satchell (1999) y Fang y Lai (1997), también encontraron que muchos de los coeficientes de los modelos CAPM de tres y cuatro momentos no eran significativos.

La presencia de signos opuestos a los esperados tampoco es algo nuevo. Christie-David y Chaudhry (2001) y Hwang y Satchell (1999) también encontraron algunos coeficientes del modelo CAPM de cuatro momentos con signos inesperados, como el término que captura los efectos de la asimetría sistemática.

Por último, Christie-David y Chaudhry (2001) obtuvieron valores de  $R^2$  muy bajos, que oscilaban entre 0,08 y un máximo de 0,20, muy inferiores a los nuestros. En nuestro caso, al examinar el *Panel B* de la *Tabla 7* con los resultados de 2003 después de corregir los valores atípicos, observamos que obtenemos valores más altos, similares a los obtenidos por Hwang y Satchell

(1999), lo que indica una mayor capacidad explicativa de los modelos propuestos. También es importante destacar que, al igual que nosotros, Hwang y Satchell (1999) encuentran cierta multicolinealidad entre los coeficientes que recogen los efectos de los momentos de orden 2 y de orden 4, lo que podría conllevar problemas de identificación.

Finalmente, cabe mencionar que, como señalan Fang y Lai (1997), en estos modelos, los estimadores de MCO podrían ser sesgados, inconsistentes y poco eficientes. Por ello, muchos autores aplican el método de momentos generalizados con variables instrumentales. Esta posibilidad no se aborda en este trabajo, pero sería deseable repetir el análisis con éste u otros métodos de estimación y comparar los resultados.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo, examinamos la relevancia de la coasimetría y la cocurtosis para explicar la prima de riesgo en carteras formadas por algunas de las empresas que componen el IBEX35. Dado que las distribuciones de los rendimientos bursátiles de estas empresas no siguen una distribución Normal (como hemos visto en la sección 3.2), buscamos superar el paradigma tradicional del modelo CAPM basado únicamente en la relación media-varianza al incorporar momentos de orden superior y aplicar un modelo CAPM de cuatro momentos al mercado español.

Nuestros resultados sugieren la inclusión de un tercer término que tenga en cuenta los efectos de la asimetría sistemática, de acuerdo con los trabajos anteriores de Kraus y Litzenberg (1976); Christie-David y Chaudhry (2001), Fang y Lai (1997) y Hwang y Satchell (1999). Al examinar los momentos de cuarto orden, encontramos que la inclusión de un cuarto término de cocurtosis no está justificada (no es estadísticamente significativa), ya que en muchos casos el valor de  $R^2$  ajustado disminuye al incluirlo, al contrario de lo mostrado en los trabajos de Christie-David y Chaudhry (2001), Fang y Lai (1997). Nuestros resultados también indican que puede existir cierta multicolinealidad entre el término de segundo orden y el de cuarto, como ya detectaron Hwang y Satchell (1999). Además, como ya observaron Christie-David y Chaudhry (2001) y Hwang y Satchell (1999), los signos obtenidos para los coeficientes del modelo no siempre siguen las expectativas racionales del consumidor planteadas a priori, en base a los trabajos de Kraus y Litzenberg (1976) entre otros.

Para evaluar la robustez de los resultados frente a valores atípicos, se llevó a cabo un análisis adicional con una corrección de estos valores extremos. Al comparar los resultados de las Carteras de 2001 y 2003, tanto antes como después de corregir los valores atípicos, se observa que no se producen diferencias significativas entre ambos conjuntos de resultados. Christie-David y Chaudhry (2001) también encuentran que la corrección de atípicos no afecta significativamente a sus resultados.

En resumen, este trabajo describe desde un punto de vista estadístico-financiero la importancia de considerar momentos de orden superior, como la coasimetría y la cocurtosis, para explicar las primas de riesgo de los mercados financieros. Sin embargo, los resultados obtenidos para el mercado español muestran algunas contradicciones respecto a los signos de los coeficientes de los modelos estimados y no respaldan la inclusión del cuarto momento. Asimismo, se puede apreciar que la corrección de los valores atípicos no genera un impacto significativo en los resultados del modelo. Sería interesante utilizar otros métodos de estimación y compararlos con los resultados aquí obtenidos, pero ese análisis excede los objetivos de este trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

- Barone-Adesi, Giovanni, Patrick Gagliardini, and Giovanni Urga. 2000. "Homogeneity Hypothesis in the Context of Asset Pricing Models: The Quadratic Market Model." *SSRN Electronic Journal*, October. <https://doi.org/10.2139/ssrn.263215>.
- Christie-David, Rohan, and Mukesh Chaudhry. 2001. "Coskewness and Cokurtosis in Futures Markets." *Journal of Empirical Finance* 8 (1). [https://doi.org/10.1016/S0927-5398\(01\)00020-2](https://doi.org/10.1016/S0927-5398(01)00020-2).
- Dittmar, Robert F. 2002. "Nonlinear Pricing Kernels, Kurtosis Preference, and Evidence from the Cross Section of Equity Returns." *The Journal of Finance* 57 (1): 369–403. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/1540-6261.00425>.
- Fama, Eugene. 1970. "Multiperiod Consumption-Investment Decisions", *Stochastic Optimization models in finance*, American Economic Review, p. 389-400.
- Fang, Hsing, and Tsong Yue Lai. 1997. "Co-Kurtosis and Capital Asset Pricing." *Financial Review* 32 (2). <https://doi.org/10.1111/j.1540-6288.1997.tb00426.x>.
- Fernandez, Pablo. 2014. "CAPM: Un Modelo Absurdo (CAPM: An Absurd Model)." *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2499455>.
- Galagedera, Don U A, Darren Henry, and Param Silvapulle. 2003. "Empirical Evidence on the Conditional Relation between Higher-Order Systematic Co-Moments and Security Returns." *Quarterly Journal of Business and Economics* 42 (1/2): 121–37. <http://www.jstor.org/stable/40473367>.
- Granger, C.W.J. and Zhuangxin Ding. 1995. "Some Properties of Absolute Return: An Alternative Measure of Risk". *Annales d'Economie et de Statistique* 40, pp. 67-91.
- Harvey, Campbell R, and Akhtar Siddique. 2000. "Conditional Skewness in Asset Pricing Tests." *The Journal of Finance* 55 (3): 1263–95. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/0022-1082.00247>.
- Hung, Chi-Hsiou, Mark Shackleton, and Xinzhong Xu. 2004. "CAPM, Higher Co-Moment and Factor Models of UK Stock Returns." *Journal of Business Finance & Accounting* 31 (January): 87–112. <https://doi.org/10.2139/ssrn.407728>.
- Hwang, S. and Satchell, S.E. 1999. Modelling emerging market risk premia using higher moments. *Int. J. Fin. Econ.*, 4: 271-296. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1158\(199910\)4:4<271::AID-IJFE110>3.0.CO;2-M](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1158(199910)4:4<271::AID-IJFE110>3.0.CO;2-M)
- Illera, Carlos Rodrigo, and Mailoc López de Prado, Marcos. 2004. "Invertir En Hedge Funds: Análisis de Su Estructura, Estrategias y Eficiencia." Ediciones Díaz de Santos.
- Jurczenko, Emmanuel, and Bertrand Maillet. 2015. "The Four-Moment Capital Asset Pricing Model: Between Asset Pricing and Asset Allocation." In *Multi-Moment Asset Allocation and Pricing Models*, 113–63. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1002/9781119201830.ch6>.
- Kraus, Alan, and Robert Litzenberger. 1976. "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets." *Journal of Finance*. 31 September. 1121-1152. (1976): 1085-1094
- Markowitz, Harry. 1952. "Portfolio Selection\*." *The Journal of Finance* 7 (1): 77–91. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>.
- Sharpe, William F. 1964. "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk" *The Journal of Finance* 19 (3): 425–42. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x>.

- Silva, André Carvalho da. 2006. "Modeling and Estimating a Higher Systematic Co-Moment Asset Pricing Model in the Brazilian Stock Market." *Latin American Business Review* 6 (4): 85–101. [https://doi.org/10.1300/J140v06n04\\_05](https://doi.org/10.1300/J140v06n04_05).
- Tobin, J. 1958. "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk." *The Review of Economic Studies* 25 (2): 65. <https://doi.org/10.2307/2296205>.