



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

PERCOLACIÓN

**Santiago Arroyo de Miguel
Felipe Cano Torres
2023**

Introducción

La palabra percolación viene del latín *percolare* «colarse a través» y hace referencia al paso de un fluido a través de un material poroso. La *Teoría de la percolación* fue introducida por Simon Broadbent y John Hammersley en 1957 con su libro «Percolation processes I. Crystals and mazes» y busca responder la siguiente pregunta: Supongamos que vertemos un fluido sobre un material poroso, ¿podrá este humedecer completamente el material y atravesarlo o por el contrario simplemente mojará la superficie dejando el interior de este completamente seco? Otros procesos físicos aleatorios que se pueden modelar mediante la teoría de la percolación son la propagación de incendios en bosques o la transmisión de enfermedades en una población.

La teoría de la percolación prueba que el proceso no es gradual, si no que hay un nivel de porosidad crítico que hace que el fluido atraviese con probabilidad 1 o que no penetre en el material con probabilidad 1 en función de si la porosidad es mayor o menor a la del nivel crítico. Para demostrar esto se utilizan poderosas herramientas estadísticas como la ley 0-1 de Kolmogorov.

El objetivo de este trabajo es dar indicaciones sobre la prueba de este teorema y calcular el nivel crítico en algunos casos concretos. Este documento se divide en dos partes. En la primera, que abarca los dos primeros capítulos, trataremos los temas necesarios para poder abordar la percolación en si, cosa que haremos en la segunda parte.

En el primer capítulo repasamos conceptos de la teoría básica de grafos ya que el medio donde se produce el proceso de percolación se representa mediante un grafo infinito. También estudiaremos algunos conceptos más avanzados que cobrarán importancia en los últimos compases del documento. En el segundo capítulo cambiamos de tema para hablar de los conceptos de teoría de la probabilidad que sustentan el teorema de la percolación crítica. En particular, hablaremos de σ -álgebras, estructuras donde se sustentan las medidas de probabilidad, y de la ley 0-1 de Kolmogorov, un importante teorema en el que se basa la demostración del teorema que nos concierne.

La primera parte del tercer capítulo es conceptual, en ella hablaremos de los procesos de percolación y definiremos y enunciaremos las definiciones y resultados importantes del tema. La segunda parte, donde hablaremos de las demostraciones importantes, es el núcleo del trabajo, ya que los capítulos previos han servido para llegar a este punto. Por último, para finalizar el trabajo, hablamos del cálculo de la percolación crítica para el grafo de Cayley de \mathbb{Z}^n y otros grafos de interés.

En la realización de este trabajo se ha seguido principalmente la tesis doctoral de María Pérez Fernández de Córdoba *Número de ramificación y percolación de un pseudogrupo* [9]. Centrándonos principalmente en la parte de teoría de grafos y los conceptos más elementales de la percolación. De esta tesis se han extraído gran parte de las imágenes de los capítulos 1 y 3. El segundo capítulo sigue la línea del libro *Probability and Measure* de Patrick Billingsley [1].

Índice general

1. Grafos	1
1.1. Conceptos elementales	1
1.2. Árboles	2
1.3. Grafos de Cayley	3
1.4. Casi-isometría	4
1.5. Tasa de crecimiento de un grafo	10
1.6. Número de ramificación	11
1.7. Tasa de crecimiento y número de ramificación	15
2. Ley 0-1 de Kolmogorov	19
2.1. El concepto de σ -álgebra	19
2.2. Espacios probabilísticos. Independencia estocástica	20
2.3. La Ley 0-1 de Kolmogorov	21
2.4. Demostración formal	21
2.5. Ejemplo	24
3. Percolación de Bernoulli	28
3.1. El proceso de percolación de Bernoulli	29
3.2. Los espacios probabilísticos $(\Omega, \sigma(\mathcal{C}), P_p)$	30
3.3. Operaciones con aristas. Inserción y borrado. Tolerancia.	36
3.4. Proceso de Standar-Coupling. Monotonía.	39
3.5. Existencia de percolación crítica	41
3.6. Cálculo de la percolación crítica	44
4. Percolación crítica en grafos de Cayley sobre los enteros	46

Capítulo 1

Grafos

En la teoría de la percolación los procesos que se quieren estudiar se interpretan como grafos aleatorios. Por lo tanto, debemos dedicar este primer capítulo a repasar algunos conceptos necesarios sobre grafos y sentar las bases para las demostraciones posteriores.

1.1. Conceptos elementales

Un *grafo* es un par ordenado $\mathcal{G} = (V, E)$ formado por un conjunto no vacío de *vértices* $V \neq \emptyset$ y un conjunto de *aristas* E dotado de una aplicación de E en $V \times V$ que envía a cada arista $e \in E$ a un par de vértices $(v_1, v_2) \in V \times V$. Se dice que v_1 es el *origen* de e ($s(e)$) y v_2 el *extremo* de e ($r(e)$). En este caso se dice que v_1 y v_2 son *vecinos*. Una arista es un *bucle* si su origen y su extremo coinciden. Se dice que el grafo no tiene *aristas múltiples* si la aplicación dada por las aristas es inyectiva. Un grafo es *simple* si no tiene bucles ni aristas múltiples. En este caso podemos identificar a cada arista por su origen y su extremo. En general trabajaremos con grafos *no dirigidos*, es decir $(v_1, v_2) = (v_2, v_1) = e$.

La *valencia* $val(v)$ de un vértice v es el número de aristas que tiene a v por extremo. Se dice que una arista es *terminal* si uno de sus extremos tiene valencia 1. Un grafo se dice *localmente finito* si la valencia de cada vértice es finita, de *geometría acotada* si la valencia de todos los vértices está acotada y *regular* si todos los vértices tienen la misma valencia.

Se denomina *camino* a una sucesión de vértices tales que cualquier par de vértices consecutivos son origen y extremo de una arista. Dos vértices están *conectados* si existe un camino que los une. La *longitud* de un camino es el número de aristas que lo forman. Un *ciclo* es un camino finito $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ con $v_1 = v_n$ y $v_i \neq v_j$ para todos $i, j \in \{2, 3, \dots, n-1\}$.

Un grafo está dotado de una *métrica natural* d de tal forma que la distancia entre dos vértices es el mínimo de las longitudes que los unen. La distancia entre vértices se puede extender al grafo completo dotando a cada arista de la métrica que la hace isomorfa al intervalo $[0, 1]$ o a la circunferencia \mathbb{S}^1 en el caso de ser un bucle.

Un grafo *con raíz* es un grafo en el que se ha fijado un vértice al que se le llama *raíz* u *origen*. La esfera S_n es el conjunto de vértices que están exactamente a distancia n del origen y $s(n)$ es el cardinal de S_n .

Un grafo $\mathcal{G}' = (V', E')$ es un *subgrafo* de $\mathcal{G} = (V, E)$ si $V' \subset V$ y $E' \subset E$.

1.2. Árboles

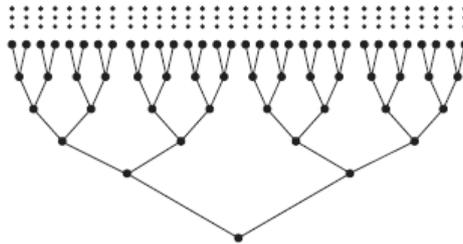
Definiciones: Un *árbol* es un grafo sin ciclos ni bucles. Generalmente, los árboles con los que trabajaremos tendrán raíz. Dos vértices v_1 y v_2 vecinos en un árbol con raíz diremos que son *padre e hijo*. Llamaremos *padre* al más cercano a la raíz e *hijo* al más alejado. Un vértice puede tener varios hijos pero cada vértice tiene un solo padre.

Un vértice v_1 es *descendiente* de otro vértice v_2 si v_2 pertenece al único camino que une v_1 con el origen.

Dado un árbol $T = G(V, E)$ y un vértice $x \in V$, definimos el subárbol T^x como el subgrafo de T formado por x y todos sus descendientes.

Vamos a ver ahora unos ejemplos de árboles que nos serán útiles más adelante.

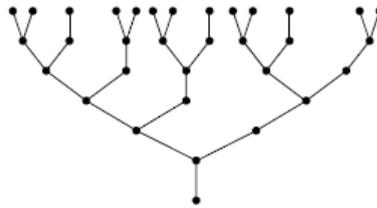
1. Árbol binario: Es un árbol donde cada vértice tiene dos hijos.



Grafo T_1 . Árbol binario.

Este árbol es de geometría acotada y todos sus vértices tienen valencia 3 salvo el origen, que tiene valencia 2.

2. Árbol de Fibonacci: Este grafo se define de forma recursiva: si un vértice tiene un hijo, su hijo tendrá dos; si un vértice tiene dos hijos, uno de ellos volverá a tener dos hijos y el otro solo tendrá uno. El origen tiene un solo hijo.



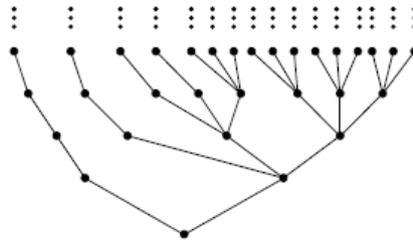
Grafo T_2 . Árbol de Fibonacci.

Este árbol recibe este nombre porque a distancia n del origen hay exactamente f_{n+1} vértices siendo f_i el i -ésimo término de la sucesión de fibonacci. Los dos

primeros términos de la sucesión de fibonacci son $f_1 = f_2 = 1$ y a partir de ahí cada termino es la suma de los dos anteriores. $s(0) = s(1) = 1$, solo queda comprobar que $s(n + 2) = s(n + 1) + s(n)$. Si vemos que cada vértice va a tener tantos “nietos” como hijos más uno, hemos terminado. Cada vértice solo puede tener un hijo o dos. Si v tiene un solo hijo, este tendrá dos, por lo tanto v tendrá dos nietos, justo igualando la cantidad de hijos más uno. Si v tiene dos hijos, su primer hijo tendrá dos y su segundo hijo uno, haciendo un total de tres nietos, igualando la cantidad de hijos más uno.

Este grafo también es de geometría acotada y todos sus vértices tienen valencia 2 o 3 salvo el origen, que tiene 1.

3. Árbol 1-3: Este es el último árbol del que hablaremos ahora y se define de la siguiente manera. Del origen nacen dos vértices, en cada esfera S_n para $n \geq 1$ dividimos los vértices en dos mitades, en la primera mitad o mitad de la izquierda cada vértice tendrá un solo hijo mientras que en la segunda mitad o mitad de la derecha los vértices tienen tres hijos cada uno. Por eso llamaremos a este grafo el árbol 1-3.



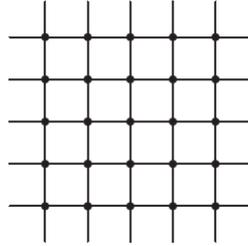
Grafo T_3 . Árbol 1-3.

1.3. Grafos de Cayley

Los grafos de Cayley son un tipo particular de grafos donde los vértices son los elementos de un grupo finitamente generado y las aristas unen vértices en función a un sistema de generadores prefijado.

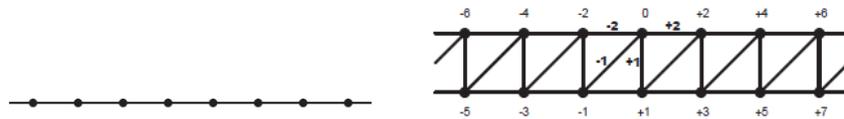
Definición: Sea G un grupo finitamente generado y S un sistema de generadores finito simétrico ($S^{-1} = \{s^{-1} | s \in S\} = S$) y que no contiene al elemento neutro. El *Grafo de Cayley* $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$ es el grafo cuyos vértices son los elementos de G y dos vértices g_1 y g_2 están unidos por una arista si y sólo si $g_1^{-1}g_2 \in S$. Los grafos de Cayley son localmente finitos, no dirigidos y sin bucles.

Por simplicidad, cuando $G = \mathbb{Z}^n$ sea la base canónica (y los opuestos correspondientes para cumplir la condición de simetría) denotaremos el grafo $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^n, S)$ por \mathcal{Z}^n .



\mathbb{Z}^2

Se llama *longitud* de un elemento g de G al número mínimo de generadores de S que hacen falta para escribir g . Se define la *distancia* de las S -palabras d_S entre dos elementos g_1 y g_2 como $d_S(g_1, g_2) = \text{long}_S(g_1^{-1}g_2)$. Un grafo de Cayley depende del sistema de generadores elegido, en este ejemplo podemos ver dos grafos de Cayley sobre el grupo de los enteros con dos sistemas de generadores diferentes.



Comparativa de \mathcal{Z} y $\mathcal{G}(\mathbb{Z}, \{\pm 1, \pm 2\})$, dos grafos de Cayley distintos sobre el mismo grupo.

Un *automorfismo* de un grafo localmente finito $\mathcal{G} = (V, E)$ es una aplicación biyectiva $\varphi : V \rightarrow V$ que respeta la relación de adyacencia, es decir,

$$(\varphi(v), \varphi(v')) \in E \Leftrightarrow (v, v') \in E.$$

Denotamos por $\text{Aut}(\mathcal{G})$ el grupo de los automorfismos de \mathcal{G} . Un grafo \mathcal{G} es *transitivo* si para todo par de vértices v, v' existe un automorfismo que envía v en v' .

Proposición Los grafos de Cayley son transitivos.

Demostración: Sea $\mathcal{G}(G, S)$ un grafo de Cayley, sean $g_1, g_2 \in G$ veamos que existe un automorfismo de \mathcal{G} que envía g_1 en g_2 . Definimos $\varphi : G \rightarrow G$ como $\varphi(g) = g_1^{-1}g_2g$. Si $g_1^{-1}g_2x = g_1^{-1}g_2y$ entonces $g_2^{-1}g_1g_1^{-1}g_2x = g_2^{-1}g_1g_1^{-1}g_2y$ y $x = y$; sea $g \in G$, $\varphi(g_2^{-1}g_1g) = g_1^{-1}g_2g_2^{-1}g_1g = g$ por lo que φ es biyectiva. Sean v_1, v_2 vértices vecinos de $\mathcal{G}(G, S)$, en otras palabras $v_1^{-1}v_2 \in S$, si $\varphi(v_1)^{-1}\varphi(v_2)$ pertenece a S hemos acabado la demostración $\varphi(v_1)^{-1}\varphi(v_2) = v_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_1^{-1}g_2v_2 = v_1^{-1}v_2 \in S$. \square

1.4. Casi-isometría

Tras ver que dos grafos de Cayley sobre el mismo grupo pero con sistemas de generadores distintos son diferentes, es natural preguntarse si tienen alguna relación. La respuesta es que son casi-isométricos.

1.4.1. Casi-isometría de espacios métricos

Tenemos varias definiciones de espacios métricos casi-isométricos que exponemos a continuación.

Definición 1.1 Sean (X, d) y (X', d') espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow X'$ es una *casi-isometría* si existen constantes $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ tales que, para todo $x, y \in X$ y para todo $x' \in X'$,

$$\frac{1}{C_1}d(x, y) - C_2 \leq d'(f(x), f(y)) \leq C_1d(x, y) + C_2, \quad (1)$$

$$d'(x', f(X)) \leq C_2. \quad (2)$$

Cuando la función existe se dice que los espacios son *casi-isométricos*. Si $C_1 = 1$ se dice que son *isométricos a gran distancia*.

Definición 1.2 (X, d) y (X', d') espacios métricos son *casi-isométricos* si existen funciones $f : X \rightarrow X'$, $g : X' \rightarrow X$ y constantes $K_1 > 0$ y $K_2 \geq 0$ que para todo $x, y \in X$; $x', y' \in X'$ verifican

$$d'(f(x), f(y)) \leq K_1d(x, y) + K_2, \quad (I)$$

$$d(g(x'), g(y')) \leq K_1d'(x', y') + K_2, \quad (II)$$

$$d(gf(x), x) \leq K_2, \quad (III)$$

$$d'(fg(x'), x') \leq K_2. \quad (IV)$$

En este caso se dice que f y g son *lipschitzianas a gran distancia*.

Para la última definición necesitamos algunos conceptos que introducimos a continuación.

Definición 1.3 Dado un número real $C \geq 0$ una *C-red* de un espacio métrico (X, d) es un subconjunto A de X donde $d(x, A) \leq C$ para todo $x \in X$. Una red es δ -separada si existe $\delta > 0$ tal que $d(a, a') \geq \delta$ para todos $a, a' \in A$, $a \neq a'$.

Dos espacios métricos (X, d) , (X', d') son *lipschitzianamente equivalentes* si existe una aplicación biyectiva $l : X \rightarrow X'$ bilipschitziana, es decir, que existe una constante $c \geq 0$ tal que para todo $x, y \in X$,

$$\frac{1}{c}d(x, y) \leq d'(l(x), l(y)) \leq cd(x, y).$$

Definición 1.4 Dos espacios métricos (X, d) y (X', d') son *casi-isométricos* si existen C-redes $A \subset X$ y $A' \subset X'$ lipschitzianamente equivalentes. Si A y A' son isométricos, entonces se dice que X y X' son *isométricos a gran distancia*.

Proposición: Las definiciones 1.1, 1.2 y 1.4 son equivalentes.

Demostración: Empecemos demostrando que la definición 1.1 implica la 1.2. Sea $f : X \rightarrow X'$ casi-isométrica según la definición 1.1, vamos a definir $g : X' \rightarrow X$ de la siguiente manera:

- Si $x' \in f(X)$ entonces podemos tomar un $x \in X$ tal que $f(x) = x'$. Definimos $g(x') = x$.

- Si $x' \notin f(X)$ sabemos por (2) que existe $\hat{x}' \in f(X)$ con $d'(x', \hat{x}') \leq C_2$. Como \hat{x}' pertenece a $f(X)$ existe un $\hat{x} \in X$ con $f(\hat{x}) = \hat{x}'$. Definimos $g(x') = \hat{x}$.

Veamos ahora que f y g cumplen las propiedades (I - IV). Es inmediato ver que f cumple la condición (I) para $K_1 \geq C_1$ y $K_2 \geq C_2$. Como $fg(x') \in f(X)$ para todo $x' \in X'$, tomando $K_2 \geq C_2$ cumplimos la propiedad (IV). Por como está definida g tenemos que $fgf(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Aplicando la primera desigualdad de (1) a $d(gf(x), x)$ tenemos que

$$\frac{1}{C_1}d(gf(x), x) - C_2 \leq (fgf(x), f(x)) = 0 \Rightarrow d(fg(x), x) \leq C_1C_2.$$

Tomando $K_2 \geq C_1C_2$ cumplimos (III). Sean $x', y' \in X'$. Aplicando la primera desigualdad de (1) a $x = g(x'), y = g(y')$ tenemos que

$$\frac{1}{C_1}d(g(x'), g(y')) - C_2 \leq d'(fg(x'), fg(y')) \Rightarrow d(g(x'), g(y')) \leq C_1d'(fg(x'), fg(y')) + C_1C_2.$$

Aplicando la propiedad (IV) y la desigualdad triangular tenemos que

$$d'(fg(x'), fg(y')) \leq d'(fg(x'), x') + d'(x', y') + d'(y', fg(y')) \leq d'(x', y') + 2C_2,$$

$$d(g(x'), g(y')) \leq C_1d'(x', y') + 3C_1C_2,$$

que verifica la propiedad (II) para $K_1 \geq C_1, K_2 \geq 3C_1C_2$. Reuniendo las condiciones que hemos obtenido para K_1 y K_2 tenemos que $K_1 \geq C_1$, por lo que podemos tomarlas iguales, para K_2 tenemos que ha de ser mayor o igual a C_2, C_1C_2 y $3C_1C_2$, tomamos $K_2 = \max\{C_2, 3C_1C_2\}$ y esto concluye la primera demostración.

Vamos ahora a demostrar que la definición 1.4 implica la 1.1. Sean $A \subset X$ y $A' \subset X'$ C-redes lipschitzianamente equivalentes, sea $l : A \rightarrow A'$ la función bilipschitziana. Definimos $f : X \rightarrow A' \subset X'$ de la siguiente manera: Si $x \in A$ entonces $f(x) = l(x)$, si $x \notin A$, por ser A una C-red, existe un $a \in A$ con $d(x, a) \leq C$, tomamos $f(x) = l(a)$. Veamos que f verifica las propiedades (1, 2). Por la condición de redes lipschitzianamente equivalentes, si $x, y \in A$ se verifica la propiedad (1) para $C_1 \geq C, C_2 \geq 0$. Tomemos ahora x, y en X y sean $\hat{x}, \hat{y} \in A$ con $f(x) = f(\hat{x}), f(y) = f(\hat{y})$ que existen por como está definida la f . Que A sea una C-red nos permite acotar $d(x, y)$ por $d(\hat{x}, \hat{y})$ y viceversa de las siguientes formas $d(x, y) \leq d(\hat{x}, \hat{y}) + 2C, d(\hat{x}, \hat{y}) \leq d(x, y) + 2C$. Encadenando este hecho con la propiedad de bilipschitziana tenemos que

$$\frac{1}{c}(d(x, y) - 2C) \leq \frac{1}{c}d(\hat{x}, \hat{y}) \leq d'(f(x), f(y)) \leq cd(\hat{x}, \hat{y}) \leq c(d(x, y) + 2C).$$

Tomando $C_1 \geq C$ y $C_2 \geq \max\{2cC, 2C/c\}$ verificamos la propiedad (1). La propiedad (2) es inmediata a partir del hecho de que $f(X) = A'$ es una C-red por lo que se verifica si $C_2 \geq C$. Para verificar las dos propiedades podemos tomar $C_1 = C$ y $C_2 = \max\{2cC, 2C/c, C\}$.

Por ultimo, demostremos que la definición 1.2 implica la 1.4. Esta es la demostración más larga de las tres y antes de abordarla necesitamos demostrar que en un espacio métrico X para todo $C \geq 0$ existe una C-red $A \subset X$ C-separada.

Sea \mathcal{S} la familia de conjuntos C-separados de X ordenada por inclusión. Como los conjuntos unipuntuales son separados \mathcal{S} es no vacía. Sea $\{B_i\}_{i \in I}$ una cadena en \mathcal{S} , $\cup_{i \in I} B_i$ es la cota superior de la cadena y es separado. Aplicando el lema de Zorn sabemos que hay un elemento $A \subset X$ maximal de \mathcal{S} . Si A no fuese una C-red existiría un $x \in X$ con $d(x, A) > C$, en otras palabras $A \cup \{x\}$ es C-separado, lo que contradice la maximalidad de A . Por lo que A es una C-red C-separada.

Vamos ahora con la demostración que nos acontece. Vamos a tomar redes separadas en X y X' y veremos que si C es lo suficientemente grande son bilipschitzianas, que la biyección es la restricción de f a A y que la constante de lipschitz se puede tomar como $c = K_1 + 1$. La demostración consta de cuatro etapas. En la primera etapa demostraremos que $f(A)$ es una K-red δ -separada de X' para ciertos valores de K y δ . En la segunda veremos que la restricción de f a A es una biyección. Por ultimo, en las etapas tres y cuatro, veremos que cumple la propiedad lipschitziana.

Primera etapa: Tomamos $C > 3K_2$ y vamos a ver que $A' = f(A)$ es una K-red δ -separada para $K = K_1C + 2K_2$ y $\delta = \frac{1}{K_1}(C - 3K_2)$. Tomamos $x' \in X'$, queremos acotar $d'(x', a')$ para algún $a' \in A'$. $d'(x', a') \leq d'(x', fg(x')) + d'(fg(x'), a')$ que por (IV) sabemos que es menor o igual a $K_2 + d'(fg(x'), a')$. Por ser A una C-red existe un $a \in A$ tal que $d(g(x'), a) \leq C$, aplicando (I) tenemos que $d'(fg(x'), f(a)) \leq K_1d(g(x'), a) + K_2 \leq CK_1 + K_2$ tomando $a' = f(a)$ tenemos que $d'(x', a') \leq CK_1 + 2K_2$ y A' es una K-red. Sean $a'_1, a'_2 \in A'$ diferentes, existen $a_1, a_2 \in A$ con $f(a_1) = a'_1$, $f(a_2) = a'_2$. Por estar A C-separada $d(a_1, a_2) \geq C$. La propiedad (III) nos garantiza que $d(g(a'_1), a_1) \leq K_2$ y $d(g(a'_2), a_2) \leq K_2$ y tenemos que $d(g(a'_1), g(a'_2)) \geq d(a_1, a_2) - d(g(a'_1), a_1) - d(g(a'_2), a_2) \geq C - 2K_2$. Aplicando (II) llegamos a $d'(a'_1, a'_2) \leq \frac{1}{K_1}(C - 3K_2)$ y A' es δ -separable.

Segunda etapa: Hay que ver que $f|_A$ es una biyección de A en A' . Esta aplicación es sobreyectiva por ser $A' = f(A)$, para ver que es inyectiva basta con considerar $a_1, a_2 \in A$ distintos con $f(a_1) = f(a_2) = a'$. Por (III) sabemos que $d(a_1, g(a')) \leq K_2$, $d(a_2, g(a')) \leq K_2$. $d(a_1, a_2) \leq 2K_2 < C$. Absurdo porque A es C-separada. \square

Ejemplo: Vamos a demostrar que \mathbb{Z} y \mathbb{R} , con la métrica usual, son espacios isométricos.

Como la métrica es la misma en \mathbb{Z} y en \mathbb{R} usaremos d para ambas distancias. Sean $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación inclusión donde $f(n) = n$ para todo n entero y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ la aplicación redondeo: Todo real x pertenece a un único intervalo $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ siendo n entero, definimos $g(x) = n$ siendo n el entero que genera el único intervalo definido de la forma anterior al que pertenece x . Si $g(x) = n$ entonces $d(x, n) \leq \frac{1}{2}$. Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $g(x) = g(y)$ se da que $d(x, y) < 1$. Veamos que f y g verifican (I - IV):

$$\text{I Sean } n, m \in \mathbb{Z}, d(f(n), f(m)) = d(n, m) \leq C_1d(n, m) + C_2 \quad \forall C_1 \geq 1, C_2 \geq 0.$$

$$\text{II Sean } x, y \in \mathbb{R}. d(g(x), g(y)) \leq d(g(x), x) + d(x, y) + d(y, g(y)) \leq \frac{1}{2} + d(x, y) + \frac{1}{2} \leq C_1d(x, y) + C_2 \quad \forall C_1, C_2 \geq 1.$$

$$\text{III Sea } n \in \mathbb{Z}, d(gf(n), n) = d(n, n) \leq C_2 \quad \forall C_2 \geq 0.$$

$$\text{IV Sea } x \in \mathbb{R}, d(fg(x), x) = d(g(x) = x) \leq C_2 \quad \forall C_2 \geq \frac{1}{2}.$$

Uniendo todas las restricciones, podemos tomar $C_1 = C_2 = 1$. \square

1.4.2. Casi-isometría de grafos

En grafos de geometría acotada, el conjunto de vértices V de un grafo $\mathcal{G}(V, E)$ forma una 1-red. Gracias a las proposiciones que veremos a continuación, veremos que dos grafos serán casi-isométricos si y solo si lo son sus conjuntos de vértices. En esencia, dos grafos de geometría acotada $\mathcal{G}(V, E)$ y $\mathcal{G}'(V', E')$ son casi-isométricos si y solo si existen C-redes $A \subset V$, $A' \subset V'$ lipschitzianamente equivalentes.

Proposición: Sea X un espacio métrico y $A \subset X$ una C-red. Entonces X y A son isométricos a gran distancia.

Demostración: Consideramos $f : A \rightarrow X$ la aplicación inclusión. Veamos que f cumple las propiedades (1)-(2) para $C_1 = 1$. $d(x, y) = d'(f(x), f(y)) \forall x, y \in A$ por lo que (1) se cumple para cualquier $C_2 \geq 0$. $f(A) = A$ y por ser A una C-red, $d'(x', A) \leq C$ para todo $x' \in X$ por lo que se cumple (2) para todo $C_2 \geq C$. \square

Proposición: La propiedad de casi-isometría genera una relación de equivalencia.

Demostración: Las propiedades reflexiva y simétrica son evidentes. Veamos que cumple la propiedad transitiva. Sean (X, d) , (X', d') , (X'', d'') espacios métricos, veamos que si X y X' son casi-isométricos y X' , X'' también lo son, entonces X y X'' también son casi-isométricos. Vamos a utilizar la definición 1.2. Por ser X y X' casi-isométricos existen funciones $f_1 : X \rightarrow X'$, $g_1 : X' \rightarrow X$ y constantes $K_1 > 0$ y $K_2 \geq 0$ que para todo $x, y \in X$, $x', y' \in X'$ verifican

$$d'(f_1(x), f_1(y)) \leq K_1 d(x, y) + K_2,$$

$$d(g_1(x'), g_1(y')) \leq K_1 d'(x', y') + K_2,$$

$$d(g_1 f_1(x), x) \leq K_2,$$

$$d'(f_1 g_1(x'), x') \leq K_2.$$

Además, por ser X y X' casi-isométricos existen funciones $f_2 : X' \rightarrow X''$, $g_2 : X'' \rightarrow X'$ y constantes $C_1 > 0$ y $C_2 \geq 0$ que para todo $x', y' \in X'$, $x'', y'' \in X''$ verifican

$$d''(f_2(x'), f_2(y')) \leq K'_1 d'(x', y') + K'_2,$$

$$d'(g_2(x''), g_2(y'')) \leq K'_1 d''(x'', y'') + K'_2,$$

$$d'(g_2 f_2(x'), x') \leq K'_2,$$

$$d''(f_2 g_2(x''), x'') \leq K'_2.$$

Definimos $f : X \rightarrow X''$ como $f(x) = f_2 \circ f_1(x)$ y $g : X'' \rightarrow X$ como $g(x'') = g_1 \circ g_2(x'')$. Veamos que existen C_1 y C_2 que verifiquen las condiciones (I - IV). Sean $x, y \in X$,

$$d''(f(x), f(y)) = d''(f_2(f_1(x)), f_2(f_1(y))) \leq K'_1 d'(f_1(x), f_1(y)) + K'_2 \leq$$

$$\leq K'_1(K_1d(x, y) + K_2) + K'_2 = K'_1K_1d(x, y) + K'_1K_2 + K'_2.$$

Por lo tanto $d''(f(x), f(y)) \leq K'_1K_1d(x, y) + K'_1K_2 + K'_2$ y se verifica (I) para $C_1 \geq K'_1K_1$ y $C_2 \geq K'_1K_2 + K'_2$. De forma análoga se comprueba que g verifica (II) para los mismos C_1 y $C_2 \geq K_1K'_2 + K_2$. $d(gf(x), x) \leq d(g_1f_1(x), gf(x)) + d(g_1f_1(x), x)$. $d(g_1f_1(x), x) \leq K_2$.

$$d(g_1f_1(x), gf(x)) = d(g_1f_1(x), g_1g_2f_2f_1(x)) \leq K_1d'(f_1(x), g_2f_2f_1(x)) + K_2 \leq K_1K'_2 + K_2.$$

Por lo tanto f, g verifican (III) para $C_2 \geq K_1K'_2 + K_2$. De forma análoga se ve que verifican (IV) para $C_2 \geq K'_1K_2 + K'_2$. Tomando $C_1 \geq K_1K'_1$ y $C_2 \geq \max\{K'_1K_2 + K'_2, K_1K'_2 + K_2\}$ f, g verifican (I - IV). \square

Ejemplo: Grafos de Cayley. El ejemplo más típico de grafos casi-isométricos es el de grafos de Cayley sobre el mismo grupo pero con distinto sistema de generadores. Recordemos que la distancia entre dos vértices en un grafo de Cayley es la menor cantidad de elementos de su sistema de generadores necesarios para escribir un vértice en función del otro. Sean $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$ y $\mathcal{G}' = \mathcal{G}(G, S')$ dos grafos de Cayley sobre el mismo grupo G . Para cada $s \in S$ definimos n_s como la menor cantidad de elementos de S' necesarios para escribir s . Definimos $n_S = \max_{s \in S} \{n_s\}$. Sean $x, y \in \mathcal{G}$, $d'(x, y) \leq n_S d(x, y)$ ya que cada elemento de S se puede escribir en n_S elementos de S' o menos. De forma análoga, definimos $n_{S'}$ para el otro grafo y tenemos que $d(x, y) \leq n_{S'} d(x', y')$ para todos $x', y' \in \mathcal{G}'$. Tomando $c = \max\{n_S, n_{S'}\}$ tenemos que las 1-redes $G \subset \mathcal{G}$ y $G \subset \mathcal{G}'$ son lipschitzianamente equivalentes.

En la figura ?? se ven dos grafos de Cayley sobre el grupo de los enteros. Escribir los elementos de S en función de los de S' es trivial ya que $S \subset S'$, $n_{+1} = n_{-1} = 1$ y $n_S = 1$. Escribir los elementos de S' en función de los de S no es mucho más complicado. Volvemos a tener que $n_{+1} = n_{-1} = 1$ pero los otros dos generadores requieren de dos elementos de S : $+2 = +1 + 1$, $-2 = -1 - 1$. Esto hace que $n_{+2} = n_{-2} = 2$, $n_{S'} = 2$ y la constante de lipschitz sea 2.

Ejemplo: Árboles Un ejemplo de dos árboles casi-isométricos es el del árbol binario con el árbol de Fibonacci. Solo hay que doblar el árbol de Fibonacci de cierta forma para adaptarse a la disposición de los vértices del árbol binario, consiguiendo que los vértices de ambos árboles sean 1-redes lipschitzianamente equivalentes con constante de lipschitz $c = 2$.

$T_1 = \mathcal{G}(V_1, E_1)$, $T_2 = \mathcal{G}(V_2, E_2)$. La biyección $l : V_2 \rightarrow V_1$ es la siguiente:

1. $l(0) = 0$.
2. Si $x \in V_2$ tiene 1 hijo x' , $l(x')$ será el primer hijo o hijo de la izquierda de $l(x)$.
3. Si $x \in V_2$ tiene 2 hijos x' y x'' , $l(x')$ volverá a ser el primer hijo de $l(x)$ y $l(x'')$ será el hermano de $l(x)$, es decir, el único vértice de V_1 que comparte padre con $l(x)$.

Veamos que esto es una biyección. La inyectividad se deduce por inducción. Si $l(x) = 0$ entonces $x = 0$ porque es el único vértice que no tiene padre y por como está definido l en el resto de vértices depende del padre de cada vértice. Sean

$x', y' \in V_2$, $x' \neq y'$ y $l(x') = l(y') = z' \in V_1$. Hay dos situaciones, que z' sea el primer hijo de un vértice o que sea el segundo hijo. No puede ser el origen porque hemos visto que solo hay un elemento cuya imagen sea el origen. Si z' es el primer hijo de su padre z , entonces $l^{-1}(z)$ tiene que ser tanto el padre de x' , x como el padre de y' , y . Además, x' tiene que ser el primogénito de x e y' el de y . Por lo tanto tenemos que $x = y$ y $x' = y'$. Si z' es el segundo hijo de z entonces $l^{-1}(z)$ tiene que ser tanto x como y siendo \bar{z} el hermano de z' . Por lo tanto volvemos a tener que $x = y$ y $x' = y'$. La sobreyectividad también sale por inducción. $l^{-1}(0) = 0$. Si $z' \in V_1$ es el primogénito de z entonces $l^{-1}(z')$ es el primogénito de $l^{-1}(z)$. Si z' es el segundo hijo de z hay que ver que la contraimagen de su hermano \bar{z} siempre va a tener dos hijos, de forma que $l^{-1}(z')$ será el segundo hijo de $l^{-1}(\bar{z})$. Por como está definida l , $l^{-1}(\bar{z})$ es o bien hijo único o bien tiene un hermano menor. Por como está definido el árbol de Fibonacci, si un vértice es hijo único tendrá dos hijos y si es el mayor de dos hermanos también. Por lo tanto l es una biyección.

Lo que falta por ver es que la biyección sea bilipschitziana. Sean $x, y \in V_2$ con $d(x, y) = 1$, es decir, x e y son padre e hijo. Por como está definida l , $l(x)$ y $l(y)$ son padre e hijo o hermanos, es decir $d'(l(x), l(y)) = 1$ o $d'(l(x), l(y)) = 2$. Por lo tanto para todos $x, y \in V_2$, $d'(l(x), l(y)) \leq 2d(x, y)$. Sean ahora $x, y \in V_1$ con $d'(x, y) = 1$. Si x e y son un padre y su primer hijo $l^{-1}(x)$ y $l^{-1}(y)$ son padre e hijo y la distancia entre ellos es 1. Si son un padre y su segundo hijo $l^{-1}(x)$ y $l^{-1}(y)$ son nieto y abuelo por lo que la distancia es 2. Es decir, si $d'(x, y) = 1$ entonces $d(l^{-1}(x), l^{-1}(y)) \leq 2$. Por lo tanto para todos $x, y \in V_2$, $d(x, y) \leq 2d'(l(x), l(y))$. Uniendo esta desigualdad a la obtenida anteriormente tenemos que

$$\frac{1}{2}d(x, y) \leq d'(l(x), l(y)) \leq 2d(x, y),$$

y los árboles son casi-isométricos.

1.5. Tasa de crecimiento de un grafo

Introducimos ahora el concepto de *tasa de crecimiento* para un grafo con raíz que nos permite medir el modo de expandirse del grafo cuando nos alejamos del origen. Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo infinito con raíz, definimos las *tasas de crecimiento exponencial inferior y superior* de \mathcal{G} :

$$\underline{gr}(\mathcal{G}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}},$$

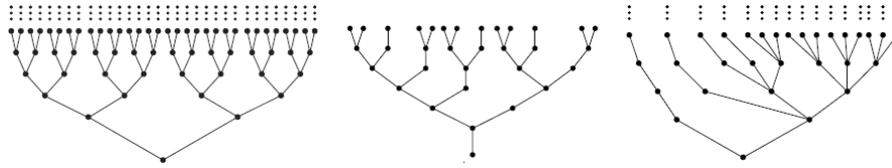
$$\overline{gr}(\mathcal{G}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}},$$

donde $s(n)$ es el cardinal de la esfera de radio n , $S_n = \{v \in V | d(v, 0) = n\}$. Cuando ambas tasas coinciden se define la *tasa de crecimiento exponencial* como

$$gr(\mathcal{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}.$$

Se dice que un grafo \mathcal{G} tiene *crecimiento exponencial* si $\underline{gr}(\mathcal{G}) > 1$ y *crecimiento subexponencial* si $\underline{gr}(\mathcal{G}) = 1$.

Ejemplos. Vamos a calcular la tasa de crecimiento de los árboles T_1 , T_2 y T_3 definidos anteriormente.



Grafos T_1 , T_2 y T_3 .

T_1 : Este grafo tiene exactamente 2^n vértices a distancia n del origen por lo que su tasa de crecimiento es 2.

T_2 : Este árbol tiene exactamente f_n vértices en la esfera n -ésima. Es sabido que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi$. Dicho de otra forma, $f_n \simeq \Phi f_{n-1} \simeq \Phi^2 f_{n-2} \simeq \dots \simeq \Phi^n$. Por lo tanto $gr(\mathcal{G}) \simeq \sqrt[n]{\Phi^n} = \Phi$.

T_3 : Este árbol tiene la misma cantidad de vértices que el árbol binario en cada esfera. Por lo tanto su tasa de crecimiento también es 2.

Por ultimo vamos a ver el caso del grafo de Cayley \mathcal{Z}^2 (Figura ??). Este grafo tiene $4n$ vértices a distancia n del origen por lo que su tasa de crecimiento es 1. Este grafo tiene un crecimiento subexponencial, por el contrario, los árboles que hemos visto antes tienen un crecimiento exponencial.

1.6. Número de ramificación

En la sección anterior hemos visto dos grafos muy diferentes con la misma tasa de crecimiento. Esto se debe a que la tasa de crecimiento solo tiene en cuenta el numero de vértices en las esferas del grafo ignorando completamente las aristas. Para solventar este inconveniente tenemos el número de ramificación. Con el cual, medimos la expansión del árbol considerando no solo la cantidad de vértices de un árbol al alejarse del origen si no también la forma en la que están conectados.

La idea intuitiva que hay tras este concepto es ver el grafo como una red de tuberías que parten del origen. Al principio esta red está formada por tuberías anchas mientras que a medida que se alejan del origen se van estrechando. Este fenómeno lo representaremos tomando un $\lambda \geq 1$, la capacidad de una arista e dependerá de la distancia de su vértice más alejado al origen mediante la expresión $\lambda^{-d(0,e)}$. La pregunta es si el grafo tiene la capacidad para expulsar el agua o si, por el contrario, este se estancará. Con valor de λ igual a 1 el agua siempre podrá fluir mientras que si λ aumenta llegará un punto en el que dejará de hacerlo.

No es necesario analizar todo el grafo a la vez, basta con analizar un conjunto aristas siempre y cuando todo el agua fluya por, al menos, una arista de este conjunto.

1.6.1. Definiciones

Primero veremos una serie de definiciones equivalentes del número de ramificación. Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo infinito, no orientado, localmente finito y enraizado con raíz 0.

Definición: Una *e-separatriz* es un subconjunto de aristas $\hat{\Pi} \subset E$ tal que la componente conexa del origen de $\mathcal{G} \setminus \hat{\Pi}$ es un subgrafo finito. La *capacidad* de una separatriz para cierto $\lambda \geq 1$ es la suma de las capacidades de todas sus aristas y se denota por $\|\hat{\Pi}\|_\lambda = \sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0,e)}$.

Definición: El numero de ramificación de \mathcal{G} se define como

$$br(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\hat{\Pi}} \sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0,e)} = 0\},$$

donde $d(0, e) = \max\{d(0, x), d(0, y)\}$ siendo x e y los extremos de e .

Si observamos el árbol como un sistema de tubos por las que fluye el agua partiendo del origen, al fijar un $\lambda \geq 1$, el valor $\lambda^{-d(0,e)}$ representa la capacidad de la arista $e \in E$. El objetivo es discernir para que valores de λ el agua atraviesa el árbol y para cuales no. Encontrar separatrices con capacidad tan pequeña como queramos nos indica que el agua no puede fluir para ese λ .

A la hora de calcular la capacidad de una separatriz nos podemos encontrar con aristas que pertenecen a la separatriz pero ninguno de sus extremos pertenece a la componenete conexa del origen, es decir, los rayos que pasan por esa arista ya han pasado previamente por otra arista de la separatriz. Para evitar estas separatrices vamos a dar una definición equivalente de numero de ramificación. Sea \mathcal{B}_0 el conjunto de los subgrafos finitos de \mathcal{G} que contienen al origen, definimos el *e-borde* de $B \in \mathcal{B}_0$ como $\hat{\partial}B = \{e \in E \mid s(e) \in B, r(e) \notin B\}$. Como cualquier rayo infinito corta $\hat{\partial}B$ por ser B un subgrafo finito el e-borde es una separatriz de \mathcal{G} .

Proposición: El numero de ramificación de \mathcal{G} es

$$br(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathcal{B}_0} \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}.$$

Demostración: Todo e-borde es separatriz por lo que

$$\inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathcal{B}_0} \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} = 0\} \geq \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\hat{\Pi}} \sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}.$$

Recíprocamente sea $\hat{\Pi}$ una separatriz y sea $C_{\hat{\Pi}}$ la componente conexa del origen en $\mathcal{G} \setminus \hat{\Pi}$. $C_{\hat{\Pi}} \in \mathcal{B}_0$ y su e-borde es una separatriz por lo que tenemos que

$$\inf_{B \in \mathcal{B}_0} \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} \leq \inf_{\hat{\Pi}} \sum_{e \in \hat{\partial}C_{\hat{\Pi}}} \lambda^{-d(0,e)} \leq \inf_{\hat{\Pi}} \sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0,e)},$$

de donde se deduce la otra desigualdad. \square

Cuando hablamos de grafos de geometría acotada ($\exists K \in \mathbb{N}$ tal que $val(v) \leq K$ para todo $v \in \mathcal{G}$) podemos encontrar una tercera definición de número de ramificación equivalente a las anteriores en función de los vértices y no de las aristas. Definimos el *v-borde* de $B \in \mathcal{B}_0$ como $\partial B = \{x \in B \mid \exists e \in E, s(e) = x, r(e) \notin B\}$.

Proposición: Si \mathcal{G} un grafo de geometría acotada entonces el numero de ramificación es

$$br(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathcal{B}_0} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} = 0\}.$$

Demostración: Sea $B \in \mathcal{B}_0$. Como cada vértice de ∂B es origen de al menos una arista de $\hat{\partial}B$ entonces $\#\partial B \leq \#\hat{\partial}B$, por otro lado como de cada vértice nacen a lo sumo $val(\mathcal{G}) = K$ aristas entonces $\#\hat{\partial}B \leq K\#\partial B$. Como $d(0, e) = \max\{d(0, v_1), d(0, v_2)\}$ siendo v_1 y v_2 los extremos de e , entonces, para toda arista con $s(e) = x$ se verifica que $d(0, x) \leq d(0, e) \leq d(0, x) + 1$ y tenemos que

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} \leq \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,s(e))-1} \leq \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} \leq \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,s(e))} \leq K \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)},$$

de donde deducimos que

$$\inf_{B \in \mathcal{B}_0} \sum_{x \in \partial B} \lambda^{-d(0,x)} = 0 \Leftrightarrow \inf_{B \in \mathcal{B}_0} \sum_{e \in \hat{\partial}B} \lambda^{-d(0,e)} = 0.$$

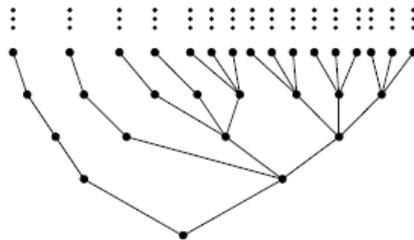
□

1.6.2. Ejemplos

Veamos ahora cuales son los números de ramificación de los grafos tratados en la sección anterior.

Árbol binario Tomemos como separatriz todas las aristas que unen la esfera S_{n-1} con la S_n . En esa separatriz hay exactamente 2^n aristas por lo que la capacidad de la separatriz es $2^n \lambda^{-n} = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^n$. De aquí se deduce que si $\lambda > 2$ podemos tomar una sucesión de separatrices cuya capacidad tienda a cero. Si λ es igual a 2 todas las separatrices tienen capacidad 1 y si $\lambda < 2$ la separatriz con menos capacidad es la formada por las dos aristas que unen el origen con sus dos hijos cuya capacidad es de $\frac{2}{\lambda}$.

Árbol 1-3 Este árbol tenía tasa de crecimiento 2 pero vamos a ver ahora que su numero de ramificación es 1.



$$br(T) = 1.$$

Si un vértice está en la primera mitad de la esfera S_n , su hijo estará entre los 2^{n-1} primeros vértices de S_{n+1} que están en la primera mitad de esta por lo tanto también engendrará un solo hijo, de esta forma se generan ramas infinitas (rayos) que a partir de cierto vértice cada padre tiene un solo hijo. Cualquier separatriz corta estas ramas y si lo hace después del primer vértice con un solo hijo de la rama podemos avanzar la arista e de la separatriz por la rama tanto como sea necesario para que $\lambda^{-d(0,e)}$ sea tan pequeño como queramos para cualquier $\lambda > 1$. Si para cierta separatriz tenemos un numero finito de estas ramas podemos despreciarlas en el calculo del numero de ramificación por lo que diremos que estos rayos son despreciables.

Proposición En el árbol T el rayo de la derecha es el único rayo no despreciable. En otras palabras, el rayo de la derecha es el único rayo cuyos vértices siempre tienen tres hijos.

Demostración: Para esta demostración vamos a numerar los vértices de cada esfera S_n , $n \geq 1$ siendo el primero el de la derecha y el ultimo el de la izquierda. Un vértice v_i tendrá tres hijos si $\frac{i}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ y tendrá un hijo si $\frac{i}{2^n} > \frac{1}{2}$. Los hijos de el vértice v_i ocuparán las posiciones $3i$, $3i-1$ y $3i-2$ si es del primer tipo de vértices y ocupará la posición $i+2^n$ si es del segundo. Sea $v_i \in S_n$ con $1 < i \leq 2^{n-1}$. Fijémonos en su hijo con numeración más alta, es decir el $v_{3i} \in S_{n+1}$. $\frac{3i}{2^{n+1}} > \frac{i}{2^n}$, es decir, su posición relativa dentro de la esfera ha aumentado. Repitiendo el proceso j veces tenemos que la posición relativa del vértice es $\frac{3^j i}{2^{n2^j}}$ que tiende a infinito cuando j tiende a infinito. En particular llegará un momento en el que $\frac{3^j i}{2^{n2^j}} > \frac{1}{2}$ y el vértice será de tipo 1, por lo tanto el rayo será despreciable. Por como está definido el árbol si un rayo es despreciable todos los de su izquierda también son despreciables, si existiera un vértice $v_h \in S_n$ con $1 < h < i$ hemos acabado. Si no existe ese v_h estamos en el caso de $i = 2$, basta con subir a la esfera S_{n+1} para solucionar el problema puesto que los hijos de $v_2 \in S_n$ son $v_6, v_5, v_4 \in S_{n+1}$ y podemos repetir el argumento con el $v_3 \in S_{n+1}$.

Gracias a esto podemos tomar una sucesión de separatrics $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ siendo $\Pi_n = \{e_n\} \cup D_n$ donde e_n es la arista que une $v_1 \in S_{n-1}$ con $v_1 \in S_n$ y D_n es un conjunto de aristas en rayos despreciables. Como solo hay una cantidad finita podemos tomarlas lo suficientemente lejos del origen para que verifican que $\sum_{e \in D_n} \lambda^{-d(0,e)} < \frac{1}{\lambda^n}$. De aquí tenemos que

$$\sum_{e \in \Pi_n} \lambda^{-d(0,e)} = \frac{1}{\lambda^n} + \sum_{e \in D_n} \lambda^{-d(0,e)} < \frac{2}{\lambda^n},$$

que tiende a 0 cuando n tiende a infinito si $\lambda > 1$. □

1.6.3. Propiedades

Veamos ahora las propiedades.

Proposición: El número de ramificación no depende de la elección del origen.

Demostración: Sean 0 y $0'$ dos raíces de \mathcal{G} y sea $d = d(0, 0')$.

Como $d(0, e) \leq d + d(0', e)$,

$$\sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0, e)} \geq \sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0', e) - d} = \lambda^{-d} \sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0', e)}.$$

Por lo que

$$\inf_{\hat{\Pi}} \sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0, e)} = 0 \Rightarrow \inf_{\hat{\Pi}} \sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0', e)} = 0.$$

Recíprocamente, como $d(0', e) \leq d + d(0, e)$ y razonando de la misma manera obtenemos la otra desigualdad. \square

Proposición: Sea \mathcal{G}' un subgrafo infinito conexo de \mathcal{G} , entonces $br(\mathcal{G}') \leq br(\mathcal{G})$.

Demostración: Podemos suponer que la raíz de \mathcal{G} coincide con la de \mathcal{G}' . Si $\hat{\Pi}$ es separatriz de \mathcal{G} entonces $\hat{\Pi}' = \hat{\Pi} \cap \mathcal{G}'$ es separatriz de \mathcal{G}' . Para cada $e \in \hat{\Pi}'$ tenemos que $d(0, e) \leq d'(0, e)$ donde la distancia d' es la distancia que estamos usando en esta sección que no coincide con la métrica inducida. Para cada λ ,

$$\sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0, e)} \geq \sum_{e \in \hat{\Pi}'} \lambda^{-d'(0, e)},$$

$$\inf_{\hat{\Pi}} \sum_{e \in \hat{\Pi}} \lambda^{-d(0, e)} = 0 \Rightarrow \inf_{\hat{\Pi}'} \sum_{e \in \hat{\Pi}'} \lambda^{-d'(0, e)} = 0,$$

con lo que obtenemos que $br(\mathcal{G}') \leq br(\mathcal{G})$. \square

Proposición: Sean \mathcal{G}_1 Y \mathcal{G}_2 dos grafos casi-isométricos. Entonces $br(\mathcal{G}_1) = 1 \Leftrightarrow br(\mathcal{G}_2) = 1$.

La demostración de esta proposición es consecuencia directa del siguiente teorema, que podemos encontrar demostrado en [9].

Teorema: Sean \mathcal{G} y \mathcal{G}' dos grafos casi-isométricos con constante de Lipschitz entre sus respectivas C-redes $c > 0$. Entonces los números de ramificación de \mathcal{G} y \mathcal{G}' se relacionan de la siguiente manera:

$$br(\mathcal{G}')^{\frac{1}{\hat{c}}} \leq br(\mathcal{G}) \leq br(\mathcal{G}')^{\hat{c}},$$

donde $\hat{c} = c(2\lfloor C \rfloor + 1)^2$.

1.7. Tasa de crecimiento y número de ramificación

Después de haber introducido esta nueva forma de medir el crecimiento de un árbol es natural preguntarse como se relaciona con la tasa de crecimiento, vista anteriormente. Ya hemos visto un ejemplo donde un grafo tenía distinta tasa de crecimiento de número de ramificación. Este grafo es el árbol T_3 con $br(T_3) = 1$

y $gr(T_3) = 2$. Pero a parte de que sabemos que no tienen por que coincidir, no sabemos nada más sobre la relación entre los dos conceptos. Lo primero que vamos a hacer es reformular la tasa de crecimiento inferior de forma que sea similar a la del número de ramificación en función de los vértices. Esto nos permitirá comparar estos conceptos, al menos en grafos de geometría acotada.

Proposición: La tasa de crecimiento exponencial inferior se puede reformular de la siguiente manera:

$$\underline{gr}(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_n \sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} = 0\},$$

donde S_n es la esfera centrada en 0 de radio n natural.

Demostración: Como es habitual, denotamos por $s(n)$ al cardinal de S_n . Por la propia definición de S_n todos sus elementos están a distancia n del origen, por lo que se da la siguiente igualdad:

$$\sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} = s(n)\lambda^{-n} = \left(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right)^n.$$

Para probar la proposición, basta con demostrar las dos implicaciones siguientes:

1. Si $\lambda > \underline{gr}(\mathcal{G})$ entonces $\inf_n \left(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right)^n = 0$.
2. Si $\lambda < \underline{gr}(\mathcal{G})$ entonces $\inf_n \left(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right)^n \neq 0$.

Por definición, $\underline{gr}(\mathcal{G}) = \lim \inf_{n \rightarrow \infty} s(n)^{\frac{1}{n}}$. Esto quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ hay una cantidad infinita de naturales para los que $s(n)^{\frac{1}{n}} < \underline{gr}(\mathcal{G}) + \varepsilon$, mientras que solo hay una cantidad finita de naturales para los que $s(n)^{\frac{1}{n}} < \underline{gr}(\mathcal{G}) - \varepsilon$.

1) Sea $\lambda > \underline{gr}(\mathcal{G})$ y fijamos $\varepsilon < \lambda - \underline{gr}(\mathcal{G})$. Por definición de límite inferior existe una subsucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ para la cual $s(n_k)^{\frac{1}{n_k}} < \underline{gr}(\mathcal{G}) + \varepsilon$. Por lo tanto

$$0 < \left(\frac{s(n_k)^{\frac{1}{n_k}}}{\lambda}\right)^{n_k} < \left(\frac{\underline{gr}(\mathcal{G}) + \varepsilon}{\lambda}\right)^{n_k} < \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^{n_k} = 1.$$

El termino $\frac{\underline{gr}(\mathcal{G}) + \varepsilon}{\lambda}$ está entre 0 y 1, por lo tanto $\left(\frac{\underline{gr}(\mathcal{G}) + \varepsilon}{\lambda}\right)^{n_k}$ tiende a 0 cuando n_k tiende a infinito. Esto implica que la sucesión de números positivos $\left\{\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge a 0, con lo que $\inf_n \left(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right)^n = 0$.

2) Sea $\lambda < \underline{gr}(\mathcal{G})$. Tomemos $\varepsilon < \underline{gr}(\mathcal{G}) - \lambda$. Por la definición de límite inferior, si n es suficientemente grande tenemos que $s(n)^{\frac{1}{n}} \geq \underline{gr}(\mathcal{G}) - \varepsilon$. Por lo tanto

$$\left(\frac{s(n)^{\frac{1}{n}}}{\lambda}\right)^n \geq \left(\frac{\underline{gr}(\mathcal{G}) - \varepsilon}{\lambda}\right)^n > \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^n = 1.$$

Al ser una sucesión de números todos ellos mayores que 1, su inferior no puede ser 0. \square

Con la formulación que acabamos de introducir para la tasa de crecimiento exponencial inferior, podemos comparar esta con el número de ramificación.

Proposición: El número de ramificación es menor o igual que la tasa de crecimiento exponencial inferior.

Demostración: La esfera S_n es una separatriz de \mathcal{G} . Por lo tanto se da la siguiente desigualdad:

$$\inf_n \sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} \geq \inf_{\Pi} \sum_{x \in \Pi} \lambda^{-d(0,x)}.$$

Repitiendo el procedimiento habitual se obtiene que

$$\underline{gr}(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_n \sum_{x \in S_n} \lambda^{-d(0,x)} = 0\} \geq \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{\Pi} \sum_{x \in \Pi} \lambda^{-d(0,x)} = 0\} = br(\mathcal{G}).$$

□

1.7.1. Condiciones suficientes para la igualdad entre la tasa de crecimiento y el número de ramificación

Si bien hemos visto que la tasa de crecimiento no tiene por que coincidir con el número de ramificación, existen ciertas condiciones bajo las cuales se da la igualdad.

Definición: Un árbol T es *esféricamente simétrico* si todos los vértices de cada esfera tienen el mismo número de hijos. Dicho de otra forma, el número de hijos de cada vértice solo depende de la distancia de este al origen.

De los árboles con los que hemos tratado hasta ahora, solo el árbol binario T_1 es esféricamente simétrico.

Proposición: Si T es esféricamente simétrico entonces $br(T) = \underline{gr}(T)$.

Demostración: Sea $B_0 \in \mathcal{B}_0$ y ∂B_0 su v-borde. Consideramos $d_0 = \min_{x \in \partial B_0} d(0, x)$ y $D = \max_{x \in \partial B_0} d(0, x)$. Para todo $x \in \partial B_0$, $d_0 \leq d(0, x) \leq D$. El objetivo de la demostración es encontrar un $d \in [d_0, D]$ tal que $\|S_d\|_\lambda \leq \|\partial B_0\|_\lambda$.

Consideramos los $s(d_0)$ subárboles idénticos T^x , $x \in S_{d_0}$ e intersecamos cada uno de ellos con el v-borde. $\partial B_0(x) = \partial B_0 \cap T^x$. Estas intersecciones son distintos v-bordes del mismo árbol. Dado un $\lambda \geq 0$ podemos calcular la capacidad $\|\partial B_0(x)\|_\lambda$ de cada v-borde y como tenemos una cantidad finita de ellos existe $y \in S_{d_0}$ tal que

$$\|\partial B_0(y)\|_\lambda = \min_{x \in S_{d_0}} \{\|\partial B_0(x)\|_\lambda\}.$$

Con este v-borde de T^y , definimos un v-borde para T aplicando $\partial B_0(y)$ a cada T^x , $x \in S_{d_0}$,

$$\partial B_1 = \bigcup_{x \in S_{d_0}} \left(\partial B_0(y) \cap T^x \right).$$

Calculamos ahora $d_1 = \min_{x \in \partial B_1} d(0, x)$ y tenemos dos opciones: $d_1 = d_0$ o $d_0 < d_1 \leq D$. Si estamos en el primer caso ya tenemos lo que queríamos puesto que $\partial B_1 = S_{d_0}$.

Si no, podemos repetir el proceso obteniendo un ∂B_2 con $\|\partial B_2\|_\lambda \leq \|\partial B_1\|_\lambda$. Este proceso recursivo no puede ser infinito ya que las d_n están acotadas por D , por lo tanto existe $d \in [d_0, D]$ con $\|S_d\|_\lambda \leq \|\partial B_0\|_\lambda$. Como este proceso es válido para cada $B \in \mathcal{B}_0$ y $\lambda \geq 1$,

$$\inf_{B \in \mathcal{B}_0} \|\partial B\|_\lambda \geq \inf_n \|S_n\|_\lambda,$$

$$br(\mathcal{G}) = \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_{B \in \mathcal{B}_0} \|\partial B\|_\lambda = 0\} \geq \inf\{\lambda \geq 1 \mid \inf_n \|S_n\|_\lambda = 0\} = \underline{gr}(\mathcal{G}).$$

Con lo que se da la igualdad. □.

Definición: Un árbol T es N -subperiódico para $N \in \mathbb{N}$ si para todo $x \in T$ existe una aplicación inyectiva $f : T^x \rightarrow T^{f(x)}$ que conserva la adyacencia con $|f(x)| \leq N$. Un árbol se dice *subperiódico* si es N -subperiódico para algún $N \in \mathbb{N}$. Un árbol es N -*periódico* si la aplicación f es biyectiva y *periódico* si es N -periódico para algún $N \in \mathbb{N}$.

Proposición: [2, 7] Si T es un árbol subperiódico, entonces $br(T) = gr(T)$.

Capítulo 2

Ley 0-1 de Kolmogorov

El objetivo de este capítulo es presentar la Ley 0-1 de Kolmogorov, un poderoso teorema de teoría de la probabilidad que será el pilar fundamental en el que se basará la existencia de la percolación crítica, concepto del que hablaremos en el próximo capítulo.

Antes de nada, debemos hablar de varios temas relacionados con la teoría de la probabilidad ya que al final la Ley 0-1 se enuncia sobre un espacio probabilístico.

2.1. El concepto de σ -álgebra

Definición: Sea X un conjunto no vacío. Una σ -álgebra σ sobre X es un subconjunto de partes de X , $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$, que cumple las siguientes condiciones:

1. $X \in \sigma$.
2. Si $A \in \sigma$, entonces $A^c \in \sigma$.
3. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de σ , entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma$.

Las σ -álgebras tienen un papel relevante en el análisis matemático y en teoría de la probabilidad como la colección de conjuntos medibles, es decir aquellos a los cuales se asigna un valor, de probabilidad o en sentido más amplio. Un ejemplo de esto es la integral de Lebesgue, en la cual los conjuntos *Lebesgue-medibles* sobre \mathbb{R}^n forman una σ -álgebra que comúnmente se denomina *σ -álgebra de Lebesgue*.

Proposición: La intersección cualquiera de σ -álgebras sobre el mismo espacio X es una σ -álgebra sobre X .

Demostración: X está en cualquier σ -álgebra sobre X así que lo está en la intersección. Si $A \subset X$ está en la intersección de σ -álgebras, A estará en cada una de ellas y también A^c ; por lo tanto A^c estará en la intersección. De la misma manera que si $A_i, i \in I$ es una familia de elementos de la intersección de las σ -álgebras estará en cada una de ellas, por lo tanto $\bigcup_{i \in I} A_i$ estará en todas las σ -álgebras y consiguientemente en su intersección. \square

Definición: Sea \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X , es decir, un subconjunto de partes de X . Definimos $\sigma(\mathcal{A})$ como la mínima σ -álgebra que contiene a \mathcal{A} . Otra forma de definir a la misma σ -álgebra es como la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a \mathcal{A} , lo cual acabamos de ver que, efectivamente, es una σ -álgebra.

2.2. Espacios probabilísticos. Independencia estocástica

Definición: Un espacio probabilístico es una terna (Ω, σ, P) donde:

- Ω es un conjunto que solemos denominar *espacio muestral*.
- σ es una σ -álgebra sobre Ω . A los elementos de σ se les llama *sucesos* o *eventos*.
- P es una *función de probabilidad* definida sobre σ , lo cual quiere decir que debe cumplir las siguientes condiciones:
 - $0 \leq P(A)$ para todo $A \in \sigma$.
 - $P(\Omega) = 1$.
 - Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta de elementos de σ , entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

De estas condiciones se deduce que $P(A) \leq 1$ para todo A y que $P(\emptyset) = 0$. En efecto, como A y A^c son disjuntos, $P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$, como $P(A^c) \geq 0$ entonces $P(A) \leq 1$. Además Ω y \emptyset son disjuntos por lo que $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$.

Definición: Sea (Ω, σ, P) un espacio probabilístico.

- Una colección finita de sucesos A_1, A_2, \dots, A_n es independiente si para todos $2 \leq j \leq n$ y $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_j \leq n$ tenemos que

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_j}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2})\dots P(A_{k_j}).$$

- Una familia infinita de sucesos \mathcal{A} es independiente si todo subconjunto finito de sucesos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ es independiente.
- Una colección finita de familias $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ son independientes si para todos $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$ tenemos que A_1, A_2, \dots, A_n son sucesos independientes.
- Una colección cualquiera de familias $\mathcal{A}_i, i \in I$ es independiente si para cada colección finita de índices $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset I$, $\mathcal{A}_{i_1}, \mathcal{A}_{i_2}, \dots, \mathcal{A}_{i_n}$ son familias independientes.

2.3. La Ley 0-1 de Kolmogorov

Definición: Sea (Ω, σ, P) un espacio probabilístico. Para cada sucesión de eventos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ podemos considerar las σ -álgebras $\sigma(A_n, A_{n+1}, \dots)$. Definimos

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n, A_{n+1}, \dots)$$

como la σ -álgebra asintótica y a sus elementos, *eventos cola*. Estos términos no son arbitrarios, ya que \mathcal{T} es independiente de cualquier suceso que solo dependa de una cantidad finita de A_n . Esta σ -álgebra está contenida en σ ya que su clase generadora está en σ .

Teorema (Ley 0-1 de Kolmogorov): En un espacio probabilístico (Ω, σ, P) , si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de eventos independientes, entonces cada elemento A de la σ -álgebra asintótica tiene probabilidad 0 o 1.

2.4. Demostración formal

La demostración de este teorema reside en el carácter independiente de todos los sucesos. Se puede demostrar que un suceso en la σ -álgebra asintótica es independiente de sí mismo. Eso quiere decir que $P(A) = P(A)^2$ y por lo tanto $P(A) = 0$ o $P(A) = 1$. Para demostrar este resultado necesitamos probar que si dos familias de conjuntos son independientes entonces las σ -álgebras generadas por estas familias también lo son. En la demostración de este resultado usaremos el teorema π - λ de Dynkin.

2.4.1. Teorema π - λ de Dynkin

Definición: Una familia \mathcal{P} de subconjuntos de Ω es una π -clase si es cerrada para intersecciones finitas. Es decir, si $A, B \in \mathcal{P}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{P}$.

Definición: Una familia \mathcal{L} de subconjuntos de Ω es una λ -clase si cumple las siguientes condiciones:

1. El espacio muestral es un elemento de \mathcal{L} . $\Omega \in \mathcal{L}$.
2. \mathcal{L} es cerrada para complementarios. $A \in \mathcal{L} \Rightarrow A^c \in \mathcal{L}$.
3. \mathcal{L} es cerrada para la unión numerable de conjuntos disjuntos. Es decir, si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de \mathcal{L} tales que para todos m, n , con $m \neq n$ se da que $A_m \cap A_n = \emptyset$ entonces $\cup_n A_n \in \mathcal{L}$.

Lema 1: Si \mathcal{P} es tanto una π -clase como una λ -clase entonces \mathcal{P} es una σ -álgebra.

Demostración: Veamos que si \mathcal{P} es tanto π -clase como λ -clase, \mathcal{P} cumple las tres condiciones que definen una σ -álgebra.

1. El conjunto vacío está en \mathcal{P} : Por las condiciones 1 y 2 de λ -clase, el conjunto vacío está en \mathcal{P} .

2. \mathcal{P} es cerrada para complementarios: Trivial ya que es la segunda condición de λ -clase.
3. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión cualquiera de elementos de \mathcal{P} , entonces la unión numerable $\cup_n A_n$ está en \mathcal{P} : Para cada elemento de la sucesión A_n definimos el elemento $B_n = A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c$. Como todos los A_n están en \mathcal{P} y es cerrado para complementarios por ser una λ -clase, todos los A_n^c están en \mathcal{P} . Por ser una π -clase es cerrado para intersecciones finitas y por lo tanto $B_n \in \mathcal{P}$ para todo n . La ventaja de los conjuntos B_n es, que a diferencia de los A_n estos son disjuntos dos a dos, además $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ y por la tercera propiedad de las λ -clases, este elemento está en \mathcal{P} .

□

Lema 2: Si a una λ -clase \mathcal{L} pertenecen A y $A \cap B$ entonces $A \cap B^c$ también pertenece a \mathcal{L} .

Demostración: Si $A \in \mathcal{L}$ entonces $A^c \in \mathcal{L}$. A^c y $A \cap B$ son disjuntos por lo tanto $A^c \cup (A \cap B) \in \mathcal{L}$. Por ultimo si está ese conjunto, también lo está su complementario.

$$(A^c \cup (A \cap B))^c = (A^c)^c \cap (A \cap B)^c = A \cap (A^c \cup B^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = A \cap B^c.$$

Por lo tanto $A \cap B^c \in \mathcal{L}$ y concluimos la demostración.

□

Teorema (π - λ de Dynkin): Sean \mathcal{P} una π -clase y \mathcal{L} una λ -clase. Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ entonces $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

Demostración: Denotamos por $\lambda(\mathcal{P})$ a la mínima λ -clase que contiene a \mathcal{P} que, a su vez, es la intersección de todas las λ -clases que contienen a \mathcal{P} . Para cada conjunto A , definimos \mathcal{G}_A como la clase de conjuntos B tales que $A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})$.

El objetivo de la demostración es probar que $\lambda(\mathcal{P})$ es una π -clase, ya que, utilizando el lema 1, si $\lambda(\mathcal{P})$ es π -clase y λ -clase, es σ -álgebra. Como $\mathcal{P} \subset \lambda(\mathcal{P})$ y $\sigma(\mathcal{P})$ es la mínima σ -álgebra que contiene \mathcal{P} . Uniendo lo anterior a que $\lambda(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ tendríamos que $\mathcal{P} \subset \sigma(\mathcal{P}) \subset \lambda(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$, lo cual concluiría la demostración.

Para eso vamos a utilizar las clases \mathcal{G}_A que acabamos de definir. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Demostrar que si $A \in \lambda(\mathcal{P})$ entonces \mathcal{G}_A es una λ -clase.
2. Utilizar \mathcal{G}_A para demostrar que si $A \in \mathcal{P}$ y $B \in \lambda(\mathcal{P})$ entonces $A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})$.
3. Por último, utilizar \mathcal{G}_B para demostrar que si $A \in \lambda(\mathcal{P})$ y $B \in \lambda(\mathcal{P})$ entonces $A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})$.

Paso 1: Ver es que si $A \in \lambda(\mathcal{P})$, entonces \mathcal{G}_A es una λ -clase. Simplemente comprobemos las condiciones que tiene que cumplir una σ -álgebra:

1. Hay que ver que $\Omega \in \mathcal{G}_A$. Como $\Omega \cap A = A$ y $A \in \lambda(\mathcal{P})$, entonces $\Omega \in \mathcal{G}_A$.

2. Para ver que \mathcal{G}_A es cerrado para intersecciones hay que utilizar la proposición 2. Para todo $B \in \mathcal{G}_A$ tenemos que A y $A \cap B$ están en una λ -clase $\lambda(\mathcal{P})$ y por el lema 2 tenemos que $A \cap B^c \in \lambda(\mathcal{P})$. Por definición de \mathcal{G}_A tenemos que $B^c \in \mathcal{G}_A$.
3. Sea $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos disjuntos dos a dos de \mathcal{G}_A . La sucesión de elementos $\{A \cap B_n\}_{n=1}^\infty$ también es disjunta dos a dos y todos sus elementos pertenecen a $\lambda(\mathcal{P})$ que por ser λ -clase $\cup_{n=1}^\infty (A \cap B_n) = A \cap (\cup_{n=1}^\infty B_n) \in \lambda(\mathcal{P})$ y por definición de \mathcal{G}_A , $(\cup_{n=1}^\infty B_n) \in \mathcal{G}_A$.

Paso 2: Sea $A \in \mathcal{P}$, entonces todo $B \in \mathcal{P}$ pertenece a \mathcal{G}_A , esta afirmación se deduce de que \mathcal{P} es una π -clase. $(A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P} \subset \lambda(\mathcal{P}) \Rightarrow B \in \mathcal{G}_A \Rightarrow \mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A)$ Por lo tanto $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$ y, como \mathcal{G}_A es una λ -clase que contiene a \mathcal{P} y $\lambda(\mathcal{P})$ es la mínima λ -clase que contiene a \mathcal{P} , $\lambda(\mathcal{P}) \subset \mathcal{G}_A$. Esto nos garantiza que si $B \in \lambda(\mathcal{P})$ entonces $B \in \mathcal{G}_A$ y, por definición de \mathcal{G}_A , $A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})$.

Paso 3: Sea $B \in \lambda(\mathcal{P})$. Una consecuencia directa de la definición de las clases \mathcal{G}_A es que $B \in \mathcal{G}_A \Leftrightarrow A \in \mathcal{G}_B$, por lo tanto si $A \in \mathcal{P}$ entonces $A \in \mathcal{G}_B$, es decir $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_B$. Utilizando otra vez que $\lambda(\mathcal{P})$ es la mínima λ -clase que contiene \mathcal{P} tenemos que $\lambda(\mathcal{P}) \subset \mathcal{G}_B$. Si $A \in \lambda(\mathcal{P})$ entonces $A \in \mathcal{G}_B$ y $A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})$. Esta es justo la definición de π -clase. \square

2.4.2. Algunos resultados sobre independencia de σ -álgebras

Teorema: Si $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ son π -clases independientes entonces $\sigma(\mathcal{A}_1), \sigma(\mathcal{A}_2), \dots, \sigma(\mathcal{A}_n)$ son independientes.

Demostración: Definimos $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}_i \cup \{\Omega\}$. Estas clases \mathcal{B}_i cumplen las mismas condiciones que los \mathcal{A}_i ya que añadir el espacio muestral no afecta ni a la independencia ni a la condición de π -clase. Sea \mathcal{L} la familia de conjuntos medibles B_1 independientes de B_2, \dots, B_n para todos B_2, B_3, \dots, B_n sucesos de $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \dots, \mathcal{B}_n$ respectivamente. Veamos que \mathcal{L} es una λ -clase. Ω es independiente de cualquier suceso por lo que $\Omega \in \mathcal{L}$. Sea $B_1 \in \mathcal{L}$ veamos que $B_1^c \in \mathcal{L}$. Hay que ver que para todos $2 \leq j \leq n$ y $2 \leq k_2 < \dots < k_j \leq n$ se da que $P(B_1^c \cap B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j}) = P(B_1^c)P(B_{k_2}) \dots P(B_{k_j})$.

$$\begin{aligned} P(B_1^c \cap B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j}) &= P(B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j}) - P(B_1 \cap B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j}) = \\ &= P(B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j}) - P(B_1)P(B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j}) = P(B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j})(1 - P(B_1)) = \\ &= P(B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j})P(B_1^c) = P(B_1^c)P(B_{k_2}) \dots P(B_{k_j}). \end{aligned}$$

Por ultimo hay que ver que si $\{B_{1_i}\}_{i=1}^\infty$ es una sucesión de elementos de \mathcal{L} disjuntos dos a dos, la unión de todos ellos también está en \mathcal{L} . Para todo $i \in \mathbb{N}$ y todos $2 \leq j \leq n$, $2 \leq k_2 < \dots < k_j \leq n$ tenemos que $P(B_{1_i} \cap B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j}) = P(B_{1_i})P(B_{k_2}) \dots P(B_{k_j})$.

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^\infty B_{1_i}\right) \cap B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^\infty (B_{1_i} \cap B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j})\right) =,$$

por ser $(B_{1_i} \cap B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j})$ y $(B_{1_l} \cap B_{k_2} \cap \dots \cap B_{k_j})$ disjuntos si $i \neq l$,

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_{1_i})P(B_{k_2})\dots P(B_{k_j}) = P(B_{k_2})\dots P(B_{k_j}) \sum_{i=1}^{\infty} P(B_{1_i}) = \\ &= P(B_{k_2})\dots P(B_{k_j})P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{1_i}\right). \end{aligned}$$

Ahora que hemos demostrado que \mathcal{L} es una λ -clase, podemos utilizar el teorema π - λ de Dynkin para ver que $\sigma(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n$ son familias de sucesos independientes, $\sigma(\mathcal{B}_1), \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n$ son familias de sucesos independientes. Razonamos de la misma manera para ver que $\sigma(\mathcal{B}_1), \sigma(\mathcal{B}_2), \mathcal{B}_3, \dots, \mathcal{B}_n$ son familias de sucesos independientes y de forma reiterada obtenemos que $\sigma(\mathcal{B}_1), \sigma(\mathcal{B}_2), \dots, \sigma(\mathcal{B}_n)$ también lo son. \square

Corolario: Sean $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n_1}, A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2n_2}, \dots, A_{m1}, A_{m2}, \dots, A_{mn_m}$ sucesos independientes para m finito o infinito y n_i finito o infinito para todo i . Sea $\mathcal{F}_i = \sigma(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in_i})$. Entonces $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_m$ son independientes.

Demostración: Sea \mathcal{A}_i la familia de todas las intersecciones finitas de elementos $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in_i}$. \mathcal{A}_i es una π -clase y $\sigma(\mathcal{A}_i) = \mathcal{F}_i$. Sea I una colección finita de índices y para cada $i \in I$ tomamos J_i otra colección finita de índices. Para cada $i \in I$ consideramos $C_i \in \mathcal{A}_i$ que será un suceso de la forma $C_i = \bigcap_{j \in J_i} A_{ij}$. Como todo subconjunto finito de elementos A_{ij} es independiente,

$$P\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) = P\left(\bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} A_{ij}\right) = \prod_{i \in I} \prod_{j \in J_i} P(A_{ij}) = \prod_{i \in I} P\left(\bigcap_{j \in J_i} A_{ij}\right) = \prod_{i \in I} P(C_i).$$

Por lo tanto las familias $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ son independientes y, aplicando el teorema anterior, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_m$ son independientes. \square

2.4.3. Fin de la prueba

Gracias al corolario anterior, tenemos que $\sigma(A_1), \sigma(A_2), \dots, \sigma(A_{n-1}), \sigma(A_n, A_{n+1}, \dots)$ son independientes. Si $A \in \mathcal{T}$, $A \in \sigma(A_n, A_{n+1}, \dots)$ y, por lo tanto, $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A$ son independientes. Como la independencia de una familia infinita de sucesos viene de la independencia de cualquier subconjunto finito de esta, $\{A\} \cup \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de sucesos independientes. Aplicando de nuevo el corolario del tenemos que $\sigma(A)$ y $\sigma(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ son σ -álgebras independientes. Ahora bien, A está en ambas σ -álgebras, por lo que se deduce que A es independiente de si misma, es decir $P(A \cap A) = P(A)P(A) \Rightarrow P(A) = P(A)^2$ y esto solo se cumple si $P(A) = 0$ o $P(A) = 1$. \square

2.5. Ejemplo

Unos ejemplos de sucesos en la σ -álgebra asintótica son el límite inferior y el límite superior de la sucesión. En teoría de conjuntos se define el límite inferior de

una sucesión como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de la sucesión salvo quizá un número finito de ellos. Es decir,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \right).$$

Análogamente se define el límite superior como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a un número infinito de conjuntos en la sucesión.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right).$$

Vamos a definir un espacio probabilístico en el que vamos a tomar sucesiones de sucesos independientes y vamos a calcular la probabilidad de los límites inferiores y superiores de estas sucesiones, aplicando la ley 0-1 cuando sea necesario.

Sea (Ω, σ, P) un espacio probabilístico definido de la siguiente manera: $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Los elementos $\omega \in \Omega$ son de la forma $\omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ donde $\alpha_i \in \{0, 1\}$ para todo i natural. Diremos que $\omega(i)$ es el i -ésimo elemento de la sucesión ω , es decir, $\omega(i) = \alpha_i$. Definimos la clase de sucesos \mathcal{U} como los conjuntos $U_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = \{\omega \in \Omega | \omega(a_i) = \alpha_i, 1 \leq i \leq n\}$. Tomamos $\sigma = \sigma(\mathcal{U})$ y $P : \sigma \rightarrow [0, 1]$ la función de probabilidad de forma que $P(U_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}) = (\frac{1}{2})^n$.

Una familia finita de conjuntos $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{U}$ ($U_i = U_{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in_i}}^{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}}$ $1 \leq i \leq m$) son independientes si para todos $1 \leq i, k \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$, $1 \leq l \leq n_j$, $ij \neq kl$ se da que $a_{ij} \neq a_{kl}$. Una familia infinita es independiente si cada subfamilia finita lo es. Tomemos una sucesión de sucesos independientes $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Caso 1: $U_i = U_i^{\alpha_i}$ para todo i natural. Es decir, el elemento i -ésimo de la sucesión solo actúa sobre la coordenada i -ésima. Al tomar la sucesión de esta forma hay un único ω_0 que pertenece a todo U_i y es justamente $\omega_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots\}$ donde para todo $j \in \mathbb{N}$ α_j es el α_i de U_i donde $i = j$.

1. Empecemos por el límite inferior.

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} U_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=i}^{\infty} U_j \right).$$

Para cada i podemos definir $\bigcap_{j=i}^{\infty} U_j$. Este conjunto, que está en σ , está formado por todos los ω que comparten con ω_0 todas las coordenadas de i en adelante.

$$\bigcap_{j=i}^{\infty} U_j = \{\omega \in \Omega | \omega(j) = \alpha_j, \forall j \geq i\}$$

Estos conjuntos formados por la intersección de una subfamilia numerable de \mathcal{U} , aunque admiten una formulación muy parecida, no pertenecen a dicha familia, ya que imponen restricciones sobre una cantidad numerable de coordenadas. Por simplicidad, vamos a expandir la notación que usábamos para los conjuntos de \mathcal{U} a este nuevo tipo de conjuntos.

$$U_{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots} = \{\omega \in \Omega | \forall i \in \mathbb{N}, \omega(a_i) = \alpha_i\}.$$

Siguiendo con el límite inferior, la unión de todos estos conjuntos es el conjunto de todos los ω que distan de ω_0 en, a lo sumo, una cantidad finita de coordenadas:

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} U_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \leq n_0, \omega(n) = \omega_0(n)\}.$$

Como, para todo $i \in \mathbb{N}$, $\cap_{j=i}^n U_j \downarrow U_{a_i, a_{i+1}, \dots, a_n, \dots}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \dots}$. Entonces la probabilidad del límite es el límite de la probabilidad y $P(U_{a_i, a_{i+1}, \dots, a_n, \dots}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n, \dots}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^{n-i} = 0$. El límite inferior es una unión numerable de estos conjuntos de probabilidad 0 y por lo tanto $P(\liminf U_i) = 0$.

2. Vamos ahora con el límite superior.

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=i}^{\infty} U_j \right).$$

Repitiendo el procedimiento realizado en el límite inferior, tomamos $\cup_{j=i}^{\infty} U_j$ para cada i . Estos conjuntos están formados por los elementos de ω que coinciden con ω_0 en, al menos, una coordenada en una posición mayor o igual a i .

$$\bigcup_{j=i}^{\infty} U_j = \{\omega \in \Omega \mid \exists j \geq i \text{ tal que } \omega(j) = \alpha_j\}.$$

Cada uno de estos conjuntos es el complementario en Ω de uno de los sucesos definidos anteriormente.

$$\bigcup_{j=i}^{\infty} U_j = \left(\bigcap_{j=i}^{\infty} U_j^c \right)^c,$$

$U_j^c = U_{a_j}^{1-\alpha}$, donde $\alpha = \omega(j)$ en todo $\omega \in U_j$. $P(U_j^c) = P(U_j) = \frac{1}{2}$ por lo que la intersección numerable tendrá probabilidad 0. $P(\cup_{j=i}^{\infty} U_j) = 1 - P(\cap_{j=i}^{\infty} U_j^c) = 1$. La intersección numerable de sucesos de probabilidad 1 también tiene probabilidad 1, es decir $P(\limsup U_i) = 1$.

Caso 2: Se puede considerar una reordenación en los términos de la sucesión. Esto no afecta al cálculo de ninguno de los dos límites.

Caso 3: La sucesión $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ no tiene por que actuar sobre todas las coordenadas. Sean $U_i = U_{a_i}^{\alpha_i}$ independientes. Consideramos $J = \mathbb{N} \setminus \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. En esta situación no hay un solo ω_0 perteneciente a todos los U_i , si no que la intersección de todos los U_i es una clase $U_0 = U_{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots}$. El límite inferior ahora son los conjuntos que distan a lo sumo una cantidad finita de coordenadas de algún ω_0 perteneciente a U_0 . El límite superior hace ahora referencia al conjunto de los ω que tienen infinitas coordenadas en común con todo $\omega_0 \in U_0$. El cálculo de la probabilidad de ambos límites no varían.

Caso 4: También se pueden considerar elementos de la sucesión que hagan referencia a más de una coordenada. Siendo $U_i = U_{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in_i}}^{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}}$ independientes. El calculo de la probabilidad del límite inferior no varía, el calculo del límite superior varía un poco ya que el complementario de U_i no tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ si no que va a tener

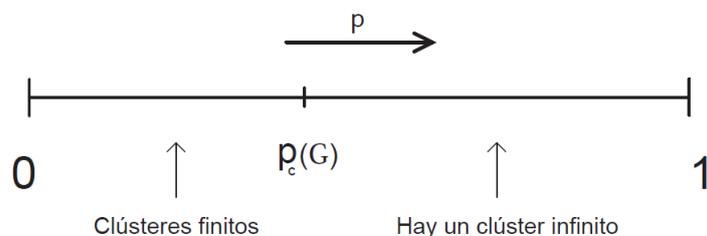
probabilidad $1 - \frac{1}{2^{n_i}}$. Aun así sigue siendo un número entre 0 y 1. Lo que quiere decir que la intersección de una infinidad numerable de sucesos independientes de este tipo sigue siendo 0. Prosiguiendo la demostración como antes se obtiene que la probabilidad del límite superior sigue siendo 1.

Caso 5: Los conjuntos con probabilidad 0 o 1 siempre son independientes de todos los conjuntos de σ . Si todos los elementos de la sucesión tienen probabilidad 0, salvo quizás una cantidad finita de ellos, tanto el límite inferior como el superior tienen probabilidad 0. Por el contrario, si todos los conjuntos, salvo quizás una cantidad finita, tienen probabilidad 1 entonces ambos límites tienen probabilidad 1. En cualquier otro caso sucede lo mismo que en los casos anteriores.

Capítulo 3

Percolación de Bernoulli

La teoría de la percolación estudia la naturaleza y propiedades de las componentes conexas (o cúmulos) de subgrafos de un grafo $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$. En particular, la *percolación de Bernoulli* es un proceso en el que, dado $p \in [0, 1]$, dotas al espacio de subgrafos de un grafo de una medida de probabilidad P_p que verifica que para cada arista $e \in E$, el conjunto de los subgrafos \mathcal{G}' con $e \in \mathcal{G}'$ tiene medida de probabilidad p . El suceso que nos interesa es la existencia de al menos un cúmulo infinito (una componente conexa con cardinal \aleph_0 , también llamada clúster) en el subgrafo. Es decir, la medida de probabilidad del conjunto de los subgrafos que tienen al menos un cúmulo infinito. Aplicando la ley 0-1 de Kolmogorov, este suceso solo puede tener probabilidad 0 o 1. Como la probabilidad de este suceso es monótona creciente respecto a p se deduce la existencia de un valor crítico p_c que separa el proceso en dos fases, la *fase subcrítica* $p < p_c$ donde todos los cúmulos son finitos con probabilidad 1 y la *fase supercrítica* $p > p_c$ donde existe al menos un cúmulo infinito.



En algunos grafos, como en los grafos transitivos, se puede definir otro valor crítico p_u que separa la fase supercrítica en dos fases. En la primera de ellas, cuando $p_c < p < p_u$ se tiene que hay una infinidad de cúmulos infinitos. Mientras que en la segunda, cuando $p_u < p \leq 1$, hay un único cúmulo infinito. Esta afirmación se menciona solo a modo de comentario, ya que no hemos ahondado en esta parte de la teoría de la percolación.

En este capítulo enunciaremos las definiciones y teoremas sobre el proceso de percolación y la percolación crítica, dejando las demostraciones y algunos conceptos auxiliares para el siguiente capítulo.

3.1. El proceso de percolación de Bernoulli

Definición: Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo infinito, numerable y localmente finito. Un *coloreado* ω es una aplicación $\omega : E \rightarrow \{0, 1\}$. Decimos que una arista e es abierta para un cierto ω si $\omega(e) = 1$ y cerrada si $\omega(e) = 0$. El *espacio de coloreados* $\Omega_{\mathcal{G}} = \{0, 1\}^E$ es el conjunto formado por todos los posibles coloreados para un grafo \mathcal{G} . Denotaremos $\Omega_{\mathcal{G}}$ simplemente por Ω si no induce a equivocación. El espacio de coloreados Ω se relaciona de forma biyectiva con el espacio de subgrafos de \mathcal{G} que tienen V por conjunto de vértices. En general, el grafo \mathcal{G}_{ω} es no conexo y llamamos *cúmulo* a cada una de sus componentes conexas. Para cada $v \in V$, denotamos $C_{\omega}(v)$ al cúmulo de \mathcal{G}_{ω} que contiene al vértice v . Dos vértices v_1, v_2 están en el mismo cúmulo si y solo si hay un camino de aristas abiertas que los une y lo denotamos por $v_1 \leftrightarrow v_2$. Definimos el *tamaño* de un cúmulo C_{ω} como la cantidad de vértices que pertenecen a C_{ω} y lo denotamos por $|C_{\omega}|$. Si un cúmulo posee una cantidad infinita de vértices diremos que $|C_{\omega}| = \infty$. Siguiendo la notación anterior, utilizaremos $v \leftrightarrow \infty$ para denotar que un vértice pertenece a un cúmulo infinito. Como los grafos con los que estamos trabajando son localmente finitos, tanto V como E son numerables. Por lo que un cúmulo no puede tener una cantidad no numerable de vértices. El conjunto de colorados de un grafo está dotado de una relación de orden parcial en la que diremos que $\omega \leq \omega'$ si y solo si toda arista abierta en ω también es abierta en ω' .

Definición: Llamamos *proceso de percolación* sobre un grafo \mathcal{G} a dotar su espacio de coloreados Ω de una medida de probabilidad P . Una percolación es *de Bernoulli* si existe $p \in [0, 1]$ tal que la probabilidad de que la arista e esté abierta es p para toda arista $e \in E$ independientemente del resto de aristas.

Dados $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$ y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$, definimos el *cilindro*

$$C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(e_i) = \alpha_i, i \in \{0, \dots, n\}\}.$$

Llamamos \mathcal{C} a la clase formada por todos los cilindros. Un proceso de percolación P será de Bernoulli si existe un $p \in [0, 1]$ tal que

$$P(C_{e_1, e_2, \dots, e_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}) = p^m (1 - p)^{n-m},$$

donde $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ para todo cilindro. Denotamos esta medida de probabilidad por P_p . Para poder trabajar de forma cómoda con estas medidas de probabilidad hay que definir una colección de espacios probabilísticos $\{(\Omega_p, \sigma_p, P_p)\}_{p \in [0, 1]}$. El espacio muestral es $\Omega = \{0, 1\}^E$ y σ va a ser la mínima σ -álgebra que nos permita trabajar con los cilindros, es decir $\sigma(\mathcal{C})$, de hecho, esta σ -álgebra coincide con la σ -álgebra de Borel para la topología producto en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Ni el espacio muestral ni la σ -álgebra dependen de p , lo cual nos simplifica la colección de espacios muestrales a $\{(\Omega, \sigma, P_p)\}_{p \in [0, 1]}$. Para que todo funcione correctamente hay que garantizar que P_p se expande correctamente a $\sigma(\mathcal{C})$, asunto que abordaremos más adelante.

Como ya hemos comentado antes, nos interesa conocer la medida de probabilidad del conjunto de los coloreados en los que existe al menos un cúmulo infinito para cada $p \in [0, 1]$. Para ello vamos a definir dos aplicaciones que nos permitirán comparar estas medidas cuando variamos la p .

Sea $v \in \mathcal{G}$, definimos la aplicación $\theta_v(p) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como la aplicación que asigna a cada parámetro $p \in [0, 1]$ la probabilidad de que v pertenezca a un cúmulo infinito:

$$\theta_v(p) = P_p[\omega \in \Omega \mid |C_\omega(v)| = \infty].$$

Definimos $\theta(p) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como la aplicación que asigna a cada parámetro $p \in [0, 1]$ la probabilidad de que exista un cúmulo infinito:

$$\theta(p) = P_p[\omega \in \Omega \mid \exists C_\omega \text{ con } |C_\omega| = \infty].$$

Son a estos sucesos, $\{\omega \in \Omega \mid \exists C_\omega \text{ con } |C_\omega| = \infty\}$, a los que queremos aplicar la ley 0-1 de Kolmogorov. Asumiendo que se pueda hacer, $\theta(p)$ solo puede ser 0 o 1. Bastaría demostrar la monotonía de θ para garantizar la existencia del valor crítico para p , al cual llamaremos *percolación crítica*.

Desde el punto de vista técnico, nos interesa utilizar las aplicaciones θ_v que acabamos de definir para calcular el valor de la percolación crítica. Como

$$\bigcup_{v \in V} \{\omega \in \Omega \mid |C_\omega(v)| = \infty\} = \{\omega \in \Omega \mid \exists C_\omega \text{ con } |C_\omega| = \infty\},$$

entonces $\theta(p) = 0 \Leftrightarrow \theta_v(p) = 0$ para todo v . Gracias a la inserción y el borrado, herramientas auxiliares que se definirán más adelante, se puede demostrar que dados dos vértices v, v' $\theta_v(p) = 0 \Leftrightarrow \theta_{v'}(p) = 0$. Esto nos permite fijarnos en un único vértice v y afirmar que $\theta(p) = 0$ si $\theta_v(p) = 0$ y $\theta(p) = 1$ si $\theta_v(p) > 0$.

Otro factor muy importante que queda por demostrar es que los sucesos con los que tratamos en este apartado son medibles, es decir, pertenecen a $\sigma(\mathcal{C})$.

Como ya hemos explicado toda la parte conceptual, ahora vamos a enunciar y demostrar los resultados importantes.

3.2. Los espacios probabilísticos $(\Omega, \sigma(\mathcal{C}), P_p)$

3.2.1. Operaciones con cilindros

Como el orden de las aristas no afecta al cálculo de probabilidades, dado un cilindro $C = C_{e_1, e_2, \dots, e_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$, se puede asumir que $e_1 < e_2 < \dots < e_n$.

Proposición: La intersección de dos cilindros es un cilindro o el conjunto vacío.

Demostración: Sean $C = C_{e_1, e_2, \dots, e_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ y $C' = C_{e'_1, e'_2, \dots, e'_{n'}}^{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n'}}$ dos cilindros. Tenemos tres situaciones:

1. $e_i \neq e'_j$ para todos $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n'$. Entonces

$$C \cap C' = C_{e_1, e_2, \dots, e_n, e'_1, e'_2, \dots, e'_{n'}}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n'}},$$

que es un cilindro.

2. Para todos i, j con $e_i = e'_j$ se tiene que $\alpha_i = \alpha'_j$. En este caso se están imponiendo la misma restricción sobre esas aristas dos veces. Podemos depurar del conjunto de aristas e' las aristas repetidas, quedandonos con $e'_{m_1}, e'_{m_2}, \dots, e'_{m_k}$ y entonces

$$C \cap C' = C \cap C_{e'_{m_1}, e'_{m_2}, \dots, e'_{m_k}}^{\alpha'_{m_1}, \alpha'_{m_2}, \dots, \alpha'_{m_k}},$$

que es un cilindro por estar en el caso 1.

3. Existen i, j con $e_i = e'_j$ y $\alpha_i \neq \alpha'_j$. Entonces la intersección es vacía.

□

Proposición: El complementario de un cilindro es una unión finita de cilindros.

Demostración: Sea $C = C_{e_1, e_2, \dots, e_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ un cilindro. Para que un coloreado ω no pertenezca a C tiene que verificar que $\omega(e_i) \neq \alpha_i$ para algún $1 \leq i \leq n$. Que $\omega(e_i) \neq \alpha_i$ quiere decir que $\omega \in C_{e_i}^{1-\alpha_i}$. Por lo tanto

$$C^c = \bigcup_{i=1}^n C_{e_i}^{1-\alpha_i}.$$

□.

3.2.2. La σ -álgebra de Borel

Definición: Dado un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , la σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ de ese espacio es la mínima σ -álgebra que contiene a los conjuntos abiertos.

Es decir $\mathcal{B}_{\mathcal{T}} = \sigma(\mathcal{T})$.

Definición: Tomamos $K_0 = [0, 1]$. Teniendo K_{n-1} tomamos K_n como la unión finita de intervalos cerrados obtenida por sustraer a cada intervalo cerrado de K_{n-1} su tercio abierto central. Por ejemplo, $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. El conjunto de Cantor es el conjunto formado por la intersección de todos los K_n .

Cada conjunto K_n es una unión disjunta de 2^n intervalos cerrados. Podemos ordenar esos intervalos de forma creciente y numerarlos siendo \hat{K}_{ni} el i -ésimo intervalo del conjunto K_n . Por simplicidad, diremos que $K_{ni} = \hat{K}_{ni} \cap T_C$.

Definición: Un espacio de Cantor es un espacio topológico homeomorfo al conjunto de Cantor con la topología de subespacio (T_c, \mathcal{T}_S) .

En [11] se encuentra una demostración de que $\Omega = \{0, 1\}^E$ con la topología producto \mathcal{T}_P es un espacio de Cantor y que el homeomorfismo es $\varphi : \Omega \rightarrow T_C$,

$$\varphi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}.$$

$\varphi(C_i^{\alpha_i}) = \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} K_{n(2i+1-\alpha_i)}$, es decir, la suma de los K_{ni} pares si $\alpha_i = 1$ y de los impares si es 0. Cada conjunto K_{ni} está relacionado por φ con un cilindro que actúa

sobre los n primeros términos de la sucesión

$$\varphi(C_{1, 2, \dots, n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}) = K_{ni}, \quad i = 1 + \sum_{j=1}^n \alpha_j 2^{n-j}.$$

Todo abierto de \mathbb{R} con la topología usual es una unión numerable de intervalos. Por lo tanto, todo abierto de T_C es una unión numerable de intervalos intersección con T_C . Esto nos garantiza que \mathcal{B} en T_C es $\sigma(\mathcal{I})$ siendo $\mathcal{I} = \{(a, b) \cap T_C \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Proposición: $\sigma(\mathcal{C})$ es homeomorfa a la σ -álgebra de Borel para la topología producto de $\Omega = \{0, 1\}^E$.

Demostración: Para demostrar que dos σ -álgebras generadas por clases, $\sigma(\mathcal{C})$ y $\sigma(\mathcal{I})$, son iguales basta con demostrar que cada una de las clases generadoras están en la otra σ -álgebra. Sea $\varphi : \Omega \rightarrow T_C$ un homeomorfismo, $\sigma(\mathcal{C}) \cong \sigma(\mathcal{I}) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathcal{I}) \subset \sigma(\mathcal{C})$ y $\varphi(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{I})$. Ver que $\varphi(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{I})$ es trivial ya que, por ser (T_C, \mathcal{T}_S) homeomorfo a (Ω, \mathcal{T}_P) y ser \mathcal{C} una base de abiertos de \mathcal{T}_P entonces $\varphi(\mathcal{C})$ es una base de abiertos de (T_C, \mathcal{T}_S) y por ser un subespacio de \mathbb{R} es unión numerable de conjuntos de \mathcal{I} .

Queremos ver que la contraimagen de un elemento de \mathcal{I} es una unión numerable de cilindros. Sea $I \in \mathcal{I}$, I es un intervalo abierto (a, b) intersección T_C , veamos que opciones hay:

1. $a < 0$ y $b > 1$. Entonces $I = T_C$ y $\varphi(I) = \Omega \in \sigma(\mathcal{C})$.
2. $a \geq 1$ o $b \leq 0$. Entonces $I = \emptyset$ y $\varphi(I) = \emptyset \in \sigma(\mathcal{C})$.
3. $a < 1$ y $b \in (0, 1]$.
4. $a \in [0, 1)$ y $b > 1$.
5. $a, b \in [0, 1]$.

Los casos 1 y 2 ya hemos visto que son triviales. En el caso 3 tenemos que $I = [0, b) \cap T_C$, se pueden dar dos situaciones: $b \in T_C$ y $b \notin T_C$.

Caso 3.1. $a < 1$, $b \in (0, 1]$ y $b \notin T_C$. Como $K_n \subset K_{n-1}$ y b no pertenece a T_C existe un n natural tal que $b \in K_{n-1}$ y $b \notin K_n$. Por lo tanto I es una unión finita de los intervalos K_{ni} menores a b y $\varphi^{-1}(I)$ es unión finita de cilindros. $\varphi^{-1}(I) \in \sigma(\mathcal{C})$. El complementario de este I en T_C es $[b, 1] \cap T_C$, como $b \notin T_C$, entonces $I^c = (b, 1] \cap T_C$. Por lo tanto los conjuntos de tipo 4 donde $a \notin T_C$ también están en $\sigma(\mathcal{C})$.

Caso 3.2. $a < 1$, $b \in (0, 1]$ y $b \in T_C$. Si b pertenece a T_C , existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que b esta en el interior de los conjuntos K_n para $n < n_0$ y b esta en la frontera de los K_n para $n \geq n_0$. Hay dos opciones, b es el extremo inferior o el extremo superior de un intervalo. Por como es la construcción de los K_n , si b es extremo inferior de un intervalo en K_n lo va a ser en todo K_m con $m > n$, lo mismo pasa si es extremo superior. Si b es extremo inferior, I es una unión finita de los K_{ni} menores que b . Si

b es extremo superior vamos a fijarnos en su complementario. $I^c = [b, 1] \cap T_C$ que es la unión de los K_{ni} mayores que b unión un punto. Es decir, es un conjunto que ya sabemos que su contraimagen está en $\sigma(\mathcal{C})$ unión un punto. Basta con ver que $\varphi^{-1}(b) \in \sigma(\mathcal{C})$. Como $\varphi^{-1}(b)$ es un $\omega \in \Omega$ y $\omega = \bigcap_i C_i^{\alpha_i}$ donde $\alpha_i = \omega(i)$ entonces $\varphi^{-1}(b) = \omega \in \sigma(\mathcal{C})$ entonces $\varphi^{-1}(I^c) \in \sigma(\mathcal{C})$. Y si está I^c está I . Para los conjuntos de tipo 4. con $a \in T_C$ seguimos el mismo razonamiento, si a es extremo superior es inmediato y si es extremo inferior tomamos complementario.

Los conjuntos de tipo 5. son intersección de un conjunto tipo 3. con un conjunto tipo 4. por lo tanto su contraimagen también está en $\sigma(\mathcal{C})$, lo cual termina la demostración. \square

3.2.3. Extensión de probabilidades

Dado $p \in [0, 1]$, vamos a definir la medida de probabilidad P_p para los cilindros tal y como lo adelantábamos en el capítulo anterior. Después vamos a ver que podemos extender esta probabilidad de forma única a $\sigma(\mathcal{C})$.

Definición: Sea $p \in [0, 1]$ y $C \in \mathcal{C}$. $C = C_{e_1, e_2, \dots, e_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$. Definimos $P_p(C)$ como

$$P_p(C) = p^m (1 - p)^{n-m},$$

donde $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Esta definición implica que dos cilindros son independientes si “actúan” sobre aristas distintas. Es decir, si $C = C_{e_1, e_2, \dots, e_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ y $C' = C_{e'_1, e'_2, \dots, e'_{n'}}^{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n'}}$ son dos cilindros, son independientes si y solo si $e_i \neq e'_j$ para todos $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n'$.

Definición: Diremos que un cilindro C es un *cilindro especial de profundidad k* si

$$C = C_{1, 2, \dots, k}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}.$$

Los coloreados se pueden ver como sucesiones de ceros y unos. Un cilindro especial de profundidad k es el conjunto de los coloreados cuyos k primeros elementos de la sucesión coinciden con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Esto quiere decir que todo coloreado pertenece a un y solo un cilindro especial de profundidad k . Por lo tanto son disjuntos dos a dos y la unión de todos es el total.

Proposición: Sea $C = C_{e_1, e_2, \dots, e_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$. Dado $k \geq e_n$ C se puede escribir como unión de cilindros especiales de profundidad k de forma única.

Demostración: Hay 2^k cilindros especiales de profundidad k que corresponden a las 2^k combinaciones posibles de k ceros o unos. El cilindro C fija n de esas k coordenadas por lo que 2^{k-n} de esas posibles combinaciones cumplan las restricciones de C y C es exactamente la unión disjunta de esos 2^{k-n} cilindros. \square

Proposición: Si $C = \cup_i C_i$ donde C_i son cilindros especiales de profundidad k , entonces $P_p(C) = \sum_i P_p(C_i)$.

Demostración: $P_p(C) = p^m(1-p)^{n-m}$. Cada C_i se corresponde con una sucesión de k ceros o unos que coincide con una dada en n posiciones. Habrá un C_i que tenga unos en todas las coordenadas salvo las prefijadas, habrá $k-n$ C_i con todo unos salvo un cero, etc. Por lo tanto $P_p(C_i) = p^m(1-p)^{n-m} P_i$ donde $P_i = p^s(1-p)^{k-n-s}$ para cierto s y

$$\begin{aligned} \sum_i P_i &= \binom{n-k}{n-k} p^{n-k} + \binom{n-k}{n-k-1} p^{n-k-1} (1-p) + \\ &+ \binom{n-k}{n-k-2} p^{n-k-2} (1-p)^2 + \dots + \binom{n-k}{0} (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Que, usando la formula del binomio de Newton su suma es $(p+1-p)^{n-k} = 1$. Por lo tanto

$$\sum_i P_p(C_i) = p^m(1-p)^{n-m} \sum_i P_i = p^m(1-p)^{n-m} = P_p(C).$$

□

Teorema: P_p define una medida de probabilidad de forma única en $\sigma(\mathcal{C})$.

Demostración: Vamos a seguir los siguientes pasos:

1. Tenemos que demostrar que la clase de las uniones finitas de cilindros \mathcal{D} es un álgebra.
2. Después demostramos que \mathcal{D} de hecho coincide con $\alpha(\mathcal{C})$.
3. Vamos a ver que P_p define una medida de probabilidad en $\mathcal{D} = \alpha(\mathcal{C})$.
4. Por último, vamos a extender P_p a $\sigma(\mathcal{C})$.

Paso 1: Definimos \mathcal{D} como la clase de las uniones finitas de cilindros. Un álgebra de sucesos sobre un espacio muestral Ω es un subconjunto de partes de Ω que cumple tres propiedades: 1) Ω pertenece al álgebra. 2) Es cerrado para complementarios. 3) Es cerrado para uniones finitas. Veamos que \mathcal{D} es un álgebra de sucesos. 1) Dado e , $C_e^0 \cup C_e^1 \in \mathcal{D}$. Este suceso está formado por todos los coloreados ω tales que $\omega(e) = 0$ o $\omega(e) = 1$. Ahora bien, $\omega(e)$ solo puede ser 0 o 1 por lo que $C_e^0 \cup C_e^1 = \Omega \in \mathcal{D}$. 2) Sea $D \in \mathcal{D}$, $D = \cup_i C_i$, C_i cilindros. $D^c = (\cup_i C_i)^c = \cap_i C_i^c$. Como hemos visto en los lemas previos, el complementario de un cilindro es una unión de cilindros. $C_i^c = \cup_{j_i} C_{ij_i}$. Entonces $D^c = \cap_i \cup_{j_i} C_{ij_i}$. Aplicando la propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión y que la intersección finita de cilindros es un cilindro, tenemos que D^c es una unión de cilindros y por lo tanto está en \mathcal{D} . 3) Trivial ya que la unión finita de uniones finitas es una unión finita.

Paso 2: \mathcal{C} está contenido en \mathcal{D} así que $\alpha(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$. Recíprocamente, todo suceso $D \in \mathcal{D}$ es una unión finita de elementos de \mathcal{C} por lo que va a estar en todas las

álgebras que contengan a \mathcal{C} , por lo que $\mathcal{D} \subset \alpha(\mathcal{C})$.

Paso 3: Conociendo P_p de un cilindro, podemos extenderlo a una unión de cilindros. Para ello, vamos a basarnos en la construcción a partir de cilindros especiales. Sean $C = C_{e_1, e_2, \dots, e_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ y $C' = C_{e'_1, e'_2, \dots, e'_{n'}}^{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n'}}$ dos cilindros. Consideramos $k \geq \max\{e_n, e'_{n'}\}$, como ya hemos visto, C y C' se pueden expresar como unión de cilindros especiales de profundidad k : $C = \sum_{i \in I} C_i$, $C' = \sum_{i' \in I'} C_{i'}$. I e I' pueden ser disjuntos o no. Sea $J = I \cup I'$, entonces $C \cup C' = \cup_{j \in J} C_j$. Definimos la p -probabilidad de la unión de dos cilindros de la siguiente manera:

$$P_p(C \cup C') = \sum_{j \in J} C_j.$$

Esta definición se puede extender a una unión finita de s cilindros. Sean $C_h = C_{e_{h1}, e_{h2}, \dots, e_{hn_h}}^{\alpha_{h1}, \alpha_{h2}, \dots, \alpha_{hn_h}}$, $h \in \{1, 2, \dots, s\}$. Consideramos $k \geq \max_h \{e_{hn_h}\}$ y sean $C_h = \cup_{i \in I_h} C_i$ sus expresiones en cilindros especiales de profundidad k . Entonces

$$P_p(\cup_h C_h) = \sum_{j \in J} C_j,$$

donde $J = \cup_h I_h$.

Para ver que P_p es medida de probabilidad en \mathcal{D} hay que ver que cumple estas tres condiciones.

1. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{D}$. Los cilindros especiales son cilindros y por lo tanto tienen probabilidad positiva. La probabilidad de cualquier cilindro es la suma de las probabilidades de cilindros especiales y por lo tanto es positiva. La probabilidad de una unión de cilindros es la suma de probabilidades de cilindros especiales y por lo tanto positiva.
2. $P(\Omega) = 1$. Dado un k , Ω es la unión de todos los cilindros especiales de profundidad k . Aplicando el binomio de Newton,

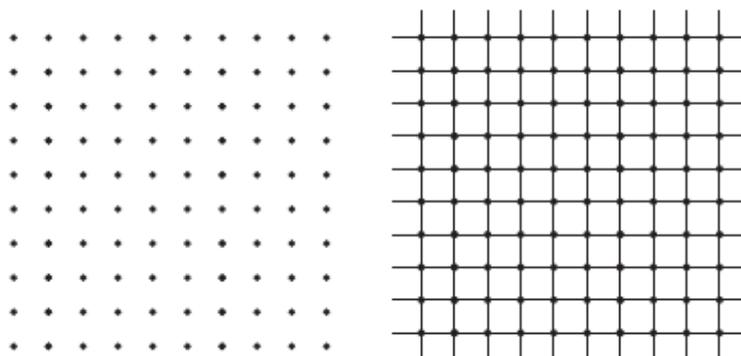
$$P_p(\Omega) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} = 1.$$

3. Sea $\{D_h\}_{h=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de \mathcal{D} disjuntos dos a dos, hay que ver que si la unión de todos los D_h está en \mathcal{D} , entonces $P(\cup_{h=1}^{\infty} D_h) = \sum_{h=1}^{\infty} P(D_h)$. Para garantizar que la unión esté en \mathcal{D} debe haber a lo sumo una cantidad finita de D_h que no sean vacíos entonces existirá n natural tal que $\cup_{h=1}^{\infty} D_h = \cup_{h=1}^n D_h$. Esto es una unión finita de cilindros así que podemos aplicar la definición. Podemos tomar un k mayor o igual a cualquier arista sobre la que actúe cualquier cilindro. Para cada D_h tenemos una colección de cilindros especiales de profundidad k C_i $i \in I_h$ tales que $D_h = \cup_{i \in I_h} C_i$. Como los D_h son disjuntos dos a dos los I_h también lo son y por lo tanto $J = \cup_h I_h$ es una unión disjunta.

Paso 4: El teorema de extensión que vamos a usar puede encontrarse en [1] y dice lo siguiente: Una medida de probabilidad en un álgebra tiene una extensión única a la σ -álgebra generada. Entonces P_p se extienden de forma única de $\alpha(\mathcal{C})$ a $\sigma(\alpha(\mathcal{C})) = \sigma(\mathcal{C})$. \square

3.2.4. Percolaciones triviales. $p=0$ y $p=1$

Cuando $p \in \{0, 1\}$, la medida de probabilidad P_p es degenerada. Eso quiere decir que un solo punto $\omega \in \Omega$ tiene probabilidad 1. En el caso de $p = 0$, este coloreado es ω_0 , que verifica que $\omega_0(e) = 0$ para todo $e \in E$. En el caso de $p = 1$ el coloreado que tiene probabilidad 1 es ω_1 que es aquel que verifica que $\omega_1(e) = 1$ para todo e .



$\omega_0.$

$\omega_1.$

La demostración de que $P_0(\omega_0) = 1$ viene de que $\omega_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{e_i}^0$, la probabilidad de todos esos cilindros es $p^0(1-p)^1 = 0^0 1^1 = 1$ y la probabilidad de la intersección de una cantidad numerable de sucesos de probabilidad 1 tiene probabilidad 1. La demostración de que $P_1(\omega_1) = 1$ es análoga.

3.3. Operaciones con aristas. Inserción y borrado. Tolerancia.

Vamos a definir ahora dos aplicaciones, la *aplicación de inserción* y la *aplicación de borrado*. Estas aplicaciones nos permiten abrir o cerrar aristas a voluntad. Después definiremos el concepto de *tolerancia* y veremos que la medida de probabilidad P_p es tolerante a estas aplicaciones en casi todos los casos.

Definición: Se define la *aplicación de inserción* de una arista $e' \in E$ como la aplicación $i_{e'} : \Omega \rightarrow \Omega$, tal que

$$i_{e'}(\omega)(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e' \\ \omega(e) & \text{si } e \neq e' \end{cases},$$

y la *aplicación de borrado*, $d_{e'} : \Omega \rightarrow \Omega$, tal que

$$d_{e'}(\omega)(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = e' \\ \omega(e) & \text{si } e \neq e' \end{cases}.$$

Definición: Se dice que una medida P es *tolerante a la inserción* (resp. *tolerante al borrado*) si para cada arista $e' \in E$ y para todo conjunto boreliano $B \subset \Omega$ con $P(B) > 0$ se tiene que $P(i_{e'}(B)) > 0$ (resp. $P(d_{e'}(B)) > 0$).

Proposición: Para cada $p \in (0, 1)$, la medida P_p es tolerante a la inserción y al borrado.

Demostración Para cada arista e y cada cilindro $C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ se pueden dar tres situaciones:

1. $e \neq e_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. $e = e_i$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ y $\alpha_i = 1$.
3. $e = e_i$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ y $\alpha_i = 0$.

Veamos que ocurre si insertamos una arista e en un cilindro $C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ con $\sum_{i=1}^n \alpha_i = m$ y $P_p(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = p^m(1-p)^{n-m}$ en cada uno de los tres casos descritos previamente.

1. Como estamos añadiendo una nueva arista abierta al cilindro, estamos generando un nuevo cilindro con $n + 1$ aristas donde $m + 1$ aristas están abiertas y $n - m$ están cerradas. Por lo tanto

$$P_p(i_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})) = p^{m+1}(1-p)^{n-m} = pP_p(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}).$$

2. En esta situación hemos abierto una arista de $C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ que ya estaba abierta por lo que el cilindro $i_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})$ coincide con el original y su medida no cambia:

$$P_p(i_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})) = p^m(1-p)^{n-m} = P_p(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}).$$

3. Por ultimo, en esta situación hemos abierto una arista que estaba cerrada, por lo tanto el cilindro $i_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})$ ahora tiene $m + 1$ aristas abiertas y $n - m - 1$ aristas cerradas. Entonces tenemos que

$$P_p(i_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})) = p^{m+1}(1-p)^{n-m-1} = \frac{p}{1-p}P_p(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}).$$

Por lo tanto, para cualquier cilindro $C \subset \mathcal{C}$ se tiene que

$$P_p(i_e(C)) > mP_p(C) > 0,$$

donde $m = \min\{1, p, \frac{p}{1-p}\}$, que es mayor que cero.

De forma similar, si queremos borrar la arista e del cilindro $C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ se dan estas tres situaciones.

1. Ahora estamos añadiendo a un cilindro una arista cerrada por lo que el nuevo cilindro $d_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})$ tiene $n+1$ aristas de las cuales m están abiertas y $n-m+1$ están cerradas:

$$P_p(d_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})) = p^m(1-p)^{n-m+1},$$

2. Nos enfrentamos a una situación similar al tercer tipo de cilindro en el caso de la aplicación de inserción, queremos cerrar una arista que está abierta, por lo tanto el cilindro $d_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})$ tendrá $m - 1$ aristas abiertas y $n - m + 1$ cerradas:

$$P_p(d_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})) = p^{m-1}(1-p)^{n-m+1} = \frac{1-p}{p}P_p(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}).$$

3. De forma análoga al caso 2 con la aplicación de inserción, queremos cerrar una arista que ya está cerrada por lo tanto, el cilindro $d_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})$ coincide con el cilindro original $C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$:

$$P_p(d_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n})) = p^m(1-p)^{n-m} = P_p(C_{e_1, \dots, e_n}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}).$$

Por lo tanto, para cualquier cilindro $C \in \mathcal{C}$ se tiene que

$$P_p(d_e(C)) > mP_p(C) > 0,$$

donde $m = \min\{1, p, \frac{1-p}{p}\}$, que es mayor que cero.

Para ver que esta propiedad se extiende a toda la σ -álgebra vamos a definir la clase \mathcal{D} de los conjuntos de σ que cumplen ambas propiedades y vamos a ver que cumple las condiciones de σ -álgebra. Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ y $\sigma(\mathcal{C})$ es la mínima σ -álgebra que contiene \mathcal{C} entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$. En realidad se da la igualdad pero con demostrar la contención nos sirve.

$$\mathcal{D} = \{D \in \sigma \mid \forall e \in E \text{ si } P_p(D) > 0 \text{ entonces } P_p(i_e(D)) > 0 \text{ y } P(d_e(D)) > 0\}.$$

Antes vamos a ver unas afirmaciones. Para todo $A \in \sigma$, $i_e(A) \subset C_e^1$ y $d_e(A) \subset C_e^0$ por lo que $P(i_e(A)) \leq p$ y $P(d_e(A)) \leq 1-p$. $i_e(D^c) = (d_e(D))^c$. $d_e(D^c) = (i_e(D))^c$. Además, todos los conjuntos de probabilidad 0 pertenecen a \mathcal{D} . Veamos que es una σ -álgebra:

1. $i_e(\Omega) = C_e^1$. $d_e(\Omega) = C_e^0$. Ambos conjuntos tienen probabilidad estrictamente positiva por lo que $\Omega \in \mathcal{D}$.
2. Sea $D \in \mathcal{D}$, tenemos 2 situaciones.
 - Si $P(D) = 1$ entonces $P(D^c) = 0$ y $D^c \in \mathcal{D}$.
 - Si $P(D) \in [0, 1)$.
$$P(i_e(D^c)) = P((d_e(D))^c) = 1 - P(d_e(D)) \geq 1 - (1-p) = p > 0.$$

$$P(d_e(D^c)) = P((i_e(D))^c) = 1 - P(i_e(D)) \geq 1 - p > 0.$$

Por lo tanto si $D \in \mathcal{D}$ entonces $D^c \in \mathcal{D}$.

3. Sea $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de \mathcal{D} . Si $P(D_i) = 0$ para todo i entonces la unión tiene probabilidad 0 y también está en \mathcal{D} . Supongamos que existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $P(D_j) > 0$, entonces $P(\cup_i D_i) \geq P(D_j) > 0$. $P(i_e(\cup_i(D_i))) = P(\cup_i(i_e(D_i))) \geq P(i_e(D_j)) > 0$. De la misma manera $P(d_e(\cup_i(D_i))) \geq P(d_e(D_j)) > 0$. Por lo tanto $\cup_{i=1}^{\infty} D_i \in \mathcal{D}$.

Con esto hemos visto que \mathcal{D} es una σ -álgebra que contiene a la σ -álgebra de Borel y entonces cualquier boreliano cumple la propiedad deseada, lo que concluye la demostración. \square

La demostración se puede generalizar a la inserción o borrado de un conjunto finito de aristas siempre que $p \neq \{0, 1\}$. Por otra parte, se deduce que P_1 no es tolerante al borrado y P_0 no lo es a la inserción. Si $p = 0$ y queremos insertar una

arista e en un cilindro $C_{e_1, \dots, e_n}^{0, \dots, 0}$ hay dos posibilidades, o la arista e no coincide con ninguna de las e_i o coincide con una y su α correspondiente es 0. De esta forma $P_0(i_e(C_{e_1, \dots, e_n}^{0, \dots, 0}))$ es igual a $p(1-p)^n$ en el primer caso o a $p(1-p)^{n-1}$ en el segundo, como $p = 0$ ambos valores son 0 con lo que se demuestra que no es tolerante para la inserción. La demostración de que P_1 no es tolerante al borrado se hace de forma análoga.

Este resultado nos permite afirmar que, dado p , solo se da una de estas tres situaciones con P_p -probabilidad 1. Todos los cúmulos son finitos, hay un único cúmulo infinito o hay una infinidad de cúmulos infinitos. Estos sucesos, al igual que los sucesos “hay exactamente n cúmulos infinitos” con $n \in \mathbb{N}$ pertenecen todos a la σ -álgebra asintótica por lo tanto podemos aplicar la ley 0-1. Si suponemos que la P_p -probabilidad de que existan exactamente n cúmulos infinitos es 1 para cierto $n \geq 2$ prefijado, podemos unir dos cúmulos infinitos con un camino finito de aristas abiertas y por la tolerancia a la inserción tenemos que la P_p -probabilidad de que haya exactamente $n - 1$ cúmulos también es 1, lo cual es absurdo. La demostración es más compleja que lo que comentamos aquí puesto que tienes que garantizar que insertando un conjunto de aristas concreto siempre unas dos o más cúmulos pero como se escapa a los objetivos de este trabajo no se ahonda en estos resultados.

3.4. Proceso de Standar-Coupling. Monotonía.

La idea subyacente a este proceso es ampliar la imagen de la aplicación ω de $\{0, 1\}$ a todo el intervalo $[0, 1]$, pasando de un coloreado en blanco y negro a toda una escala de grises.

Sea $X = [0, 1]^E$ con la medida producto μ de la medida de Lebesgue sobre $[0, 1]$, esta medida asigna a cada subconjunto $A \subset X$ con $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ donde $A_n = [0, 1]$ excepto para quizás una cantidad finita de n la medida $\mu(A) = \prod_n \hat{\mu}(A_n)$ siendo $\hat{\mu}$ la medida Lebesgue en $[0, 1]$. Los elementos x de este nuevo espacio son sucesiones de números reales entre 0 y 1. De esta forma, en un elemento x de X , cada arista del grafo se relaciona con un número real. Esto nos permite visualizar el grafo como una escala de grises, dadas dos aristas e_1 y e_2 , si $x(e_1) < x(e_2)$ querrá decir que el tono de gris de e_1 es más cercano al negro que el de e_2 . Dado un $p \in [0, 1]$ transformamos el elemento $x \in X$ en un coloreado ω tomando $\omega(e) = 1$ si $x(e) < p$ y $\omega(e) = 0$ si $x(e) \geq p$. De forma visual, sería marcar una tonalidad y abrir una arista si su gris es más oscuro que el de la tonalidad marcada y cerrarla en caso contrario.

Para cada $p \in [0, 1]$ y cada $x \in X$ definimos la aplicación $\eta_{p,x} : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ como

$$\eta_{p,x}(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(e) < p \\ 0 & \text{si } x(e) \geq p \end{cases}.$$

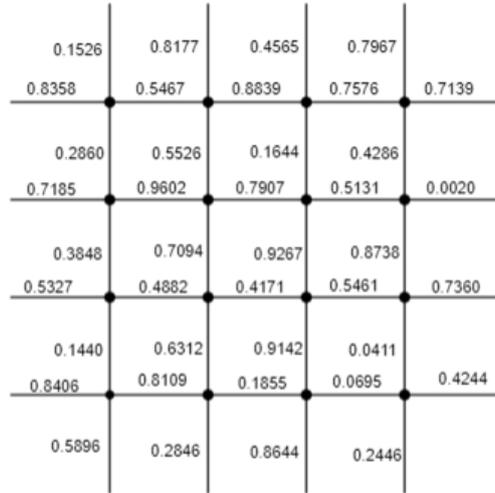
Ahora definimos la aplicación $\eta_p : X \rightarrow \Omega$ como

$$\eta_p(x) = \{\eta_{p,x}(e)\}_{e \in E}.$$

Notese que si $p_1 \leq p_2$ se tiene que $\eta_{p_1}(x) \leq \eta_{p_2}(x)$ en el sentido de que para todo $e \in E$, $\eta_{p_1,x}(e) \leq \eta_{p_2,x}(e)$. A esto es a lo que nos referimos cuando hablamos de la

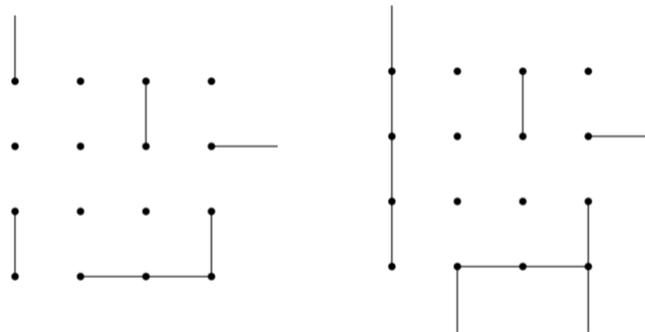
monotonía del proceso. De forma visual se interpreta como, dado un x , si $p = 0$ todas las aristas de $\eta_p(x)$ estarán cerradas y al aumentar la p se irán abriendo. Una vez que una arista se abre no se vuelve a cerrar y al llegar a $p = 1$ tenemos que todas las aristas ya están abiertas.

Vamos a ver un ejemplo de un proceso de Standar Coupling. Tomamos como grafo el grafo de Cayley sobre \mathbb{Z}^2 con el sistema de generadores usual. Tomamos un $x \in X$.



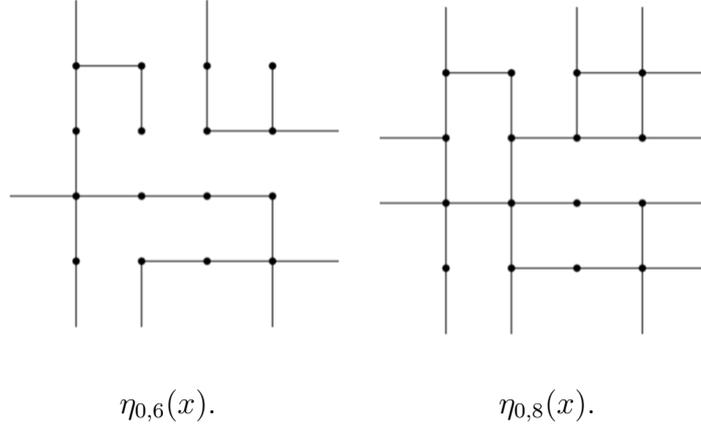
$x \in X$.

Ahora, variando p , obtenemos distintos ω .



$\eta_{0,2}(x)$.

$\eta_{0,4}(x)$.



Proposición: P_p es la *medida progrediente* (del inglés, pushforward measure) de μ a través de η_p . Es decir, para todo subconjunto B P_p -medible, $\mu(\eta_p^{-1}(B)) = P_p(B)$ y se denota por $\eta_{p*}(\mu) = P_p$.

Demostración: Como hemos visto que P_p se extiende de forma única de \mathcal{C} a $\sigma(\mathcal{C})$ basta con demostrar que la propiedad se cumple en \mathcal{C} . Sea $C = C_{e_1, e_2, \dots, e_m}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ un cilindro con $P_p(C) = p^m(1-p)^{n-m}$. Sean $\{e_{k_1}, \dots, e_{k_m}\}$ las aristas con $\alpha = 1$ y $\{e_{l_1}, \dots, e_{l_{n-m}}\}$ las aristas con $\alpha = 0$. Dado $x \in X$, $\eta_p(x) \in C$ si y solo si $x(e_{k_i}) \in [0, p)$ para $1 \leq i \leq m$ y $x(e_{l_j}) \in [p, 1]$ para $1 \leq j \leq n - m$. Por lo tanto $\eta_p^{-1}(C) = \prod_{h=1}^{\infty} A_h$ donde

$$A_h = \begin{cases} [0, p) & \text{si } h \in \{e_{k_1}, \dots, e_{k_m}\} \\ [p, 1] & \text{si } h \in \{e_{l_1}, \dots, e_{l_{n-m}}\} \\ [0, 1] & \text{si } h \notin \{e_1, \dots, e_n\} \end{cases}.$$

$\hat{\mu}([0, p)) = p$, $\hat{\mu}([p, 1]) = 1 - p$ y $\hat{\mu}([0, 1]) = 1$ por lo que $\mu(\eta_p^{-1}(C)) = p^m(1-p)^{n-m}$. \square

3.5. Existencia de percolación crítica

Recordemos las aplicaciones que habíamos definido.

Dado $v \in \mathcal{G}$, tenemos $\theta_v(p) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$\theta_v(p) = P_p[\omega \in \Omega \mid |C_\omega(v)| = \infty].$$

Generalizando la aplicación a todo el grafo tenemos $\theta(p) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$\theta(p) = P_p[\omega \in \Omega \mid \exists C_\omega \text{ con } |C_\omega| = \infty].$$

Lo primero es ver que estos conjuntos son P_p -medibles, es decir, pertenecen a $\sigma(\mathcal{C})$.

Proposición: Los conjuntos $\{\omega \in \Omega \mid \exists C_\omega \text{ con } |C_\omega| = \infty\}$ y $\{\omega \in \Omega \mid |C_\omega(v)| = \infty\}$ para todo v pertenecen a $\sigma(\mathcal{C})$.

Demostración: Vamos a ver que $\{\omega \in \Omega \mid |C_\omega(v)| = \infty\} \in \sigma(\mathcal{C})$. Para ello vamos a seguir estos pasos.

1. Sean $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. El conjunto de los ω en los que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un cúmulo es medible.

2. Para cada $v \in V$ y $n \in \mathbb{N}$, la cantidad posible de cúmulos C con $v \in C$ y $|C| = n$ es finito.
3. Para todos $v \in V$ y $n \in \mathbb{N}$, el suceso $\{\omega \in \Omega \mid |C_\omega(v)| = n\}$ es medible.
4. Para todo $v \in V$, el suceso $\{\omega \in \Omega \mid |C_\omega(v)| = \infty\}$ es medible.

Una vez demostrados 1. y 2., 3. es una consecuencia directa. En efecto, ya que solo hay una cantidad finita m de cúmulos de tamaño n a los que pertenece v , C^1, \dots, C^m y los sucesos $\{\omega \in \Omega \mid C_\omega^i \text{ es un cúmulo}\}$ son medibles. Entonces

$$\{\omega \in \Omega \mid |C_\omega(v)| = n\} = \bigcup_{i=1}^m \{\omega \in \Omega \mid C_\omega^i \text{ es un cúmulo}\},$$

y es medible por ser unión finita de medibles.

4. se deduce de 3. ya que

$$\{\omega \in \omega \mid C_\omega \text{ es infinito}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega \mid |C_\omega(v)| = n\}^c,$$

que es medible porque el complementario de un medible es medible y la intersección numerable de medibles es medible.

Paso 1: Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V'$ un subconjunto finito de V . Sea $E' = \{e = (v_{e_1}, v_{e_2}) \mid v_{e_1}, v_{e_2} \in V'\}$. Se pueden dar dos situaciones: $\mathcal{G}'(V', E')$ es conexo o no. Si no es conexo el suceso $A = \{\omega \in \Omega \mid V'_\omega \text{ es un cúmulo}\}$ es el conjunto vacío y, por lo tanto, medible.

Veamos ahora que pasa si es conexo. Consideramos \hat{E} como el conjunto de todas las aristas $e \in E$ que tienen un extremo en V' y el otro extremo en $(V')^c$. Todos los coloreados ω en el suceso que nos interesa tienen estas aristas cerradas, ya que tener una de ellas abierta implicaría añadir vértices al cúmulo. El grafo \mathcal{G} es localmente finito, sea $k = \max_{1 \leq i \leq n} \{val(v_i)\}$, entonces $\#\hat{E} \leq kn$ y por tanto finito. Sea $\hat{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$, llamamos $C_0 = C_{e_1, e_2, \dots, e_m}^{0, 0, \dots, 0}$. El suceso A es un subconjunto de C_0 . Ahora bien, no es todo C_0 ya que por ejemplo ω_0 , el coloreado con todas las aristas cerradas, pertenece a C_0 pero no a A . Tenemos que garantizar que hay suficientes aristas abiertas como para que V' siga siendo un cúmulo. Si \mathcal{G} es un árbol entonces hay que garantizar que todas las aristas de E' estén abiertas, pero si no, basta con garantizar que ciertos subconjuntos lo estén. Siguiendo el mismo razonamiento que para \hat{E} , tenemos que E' es finito y denotamos por m' su cardinal. El espacio de coloreados sobre \mathcal{G}' tiene cardinal $2^{m'}$. Consideramos los n' coloreados ω_i que siguen verificando que V' sea un cúmulo, $1 \leq i \leq n' \leq 2^{m'}$. Cada uno de ellos genera un cilindro $C_i = C_{e'_1, e'_2, \dots, e'_{m'}}^{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{im'}}$ donde $\alpha_{ij} = \omega_i(e_j)$. Todos estos sucesos son cilindros, por lo tanto son medibles. Por lo tanto el suceso A se puede expresar de la siguiente forma:

$$\{\omega \in \Omega \mid V'_\omega \text{ es un cúmulo}\} = C_0 \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n'} C_i \right),$$

que es medible por ser unión finita de medibles intersección con un medible.

Paso 2: Demostremoslo por inducción. Para $n = 1$ hay un solo cúmulo C con $|C| = 1$

que contenga a v_0 que es el cúmulo formado únicamente por el vértice v_0 . Supongamos que hay una cantidad finita m_n de cúmulos de tamaño n que contengan a v_0 , veamos que hay una cantidad finita de cúmulos de tamaño $n + 1$. En la unión de todos los cúmulos de tamaño n hay a lo sumo $m_n n$ vértices. Consideramos

$$k_n = \text{máx}\{val(v) \mid \exists C \text{ cúmulo con } |C| = n \text{ y } v, v_0 \in C\}.$$

De un cúmulo de tamaño n se pueden genera a lo sumo $k_n \times n$ cúmulos de tamaño $n + 1$. Como hay m_n cúmulos de tamaño n , hay a lo sumo $k_n \times n \times m_n$ cúmulos de tamaño $n + 1$. Finitos.

Como $\{\omega \in \Omega \mid \exists C_\omega \text{ con } |C_\omega| = \infty\} = \cup_{v \in V} \{\omega \in \Omega \mid |C_\omega(v)| = \infty\}$ entonces es medible por ser unión numerable de medibles. \square

Lema: Sea $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ y \mathcal{D}' una clase de conjuntos de Ω' . Entonces

$$\sigma(\{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{D}'\}) = \{f^{-1}(D') \mid D' \in \sigma(\mathcal{D}')\}.$$

Demostración: Llamemos σ al primer termino de la igualdad y \mathcal{A} al segundo. \mathcal{A} es una σ -álgebra porque la imagen inversa funciona bien con el total, el complementario y la unión numerable. Como $\{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{D}'\} \subset \mathcal{A}$ entonces $\sigma \in \mathcal{A}$. Recíprocamente, llamamos \mathcal{A}' a la clase formada por los conjuntos de Ω' cuya contraimagen esté en σ . $\mathcal{A}' = \{A' \in \Omega' \mid f^{-1}(A') \in \sigma\}$. Esta clase es una σ -álgebra por la misma razón que lo es \mathcal{A} . $\mathcal{D}' \subset \mathcal{A}'$ por definición de σ y por ser \mathcal{A}' σ -álgebra entonces $\sigma(\mathcal{D}') \subset \mathcal{A}'$. Es decir $\mathcal{A} \subset \sigma$. \square

Teorema (percolación crítica): Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo infinito, numerable y localmente finito. Existe una única $p_c \in [0, 1]$ tal que para todo $p > p_c$ $\theta(p) = 1$ y para todo $p < p_c$ $\theta(p) = 0$.

Demostración: La demostración es inmediata a partir de la ley 0-1 de Kolmogorov y de la monotonía de la función θ .

Veamos que θ es monótona creciente. Sean $p, p' \in [0, 1]$, $p < p'$. Llamamos A al conjunto de los ω que tienen al menos un cúmulo infinito. Si un coloreado ω está en A , si abres aristas en ω va a seguir estando en A . Como $\eta_p(x) < \eta_{p'}(x)$, $\{x \in X \mid \eta_p(x) \in A\} \subset \{x \in X \mid \eta_{p'}(x) \in A\}$ entonces

$$\mu(\{x \in X \mid \eta_p(x) \in A\}) \leq \mu(\{x \in X \mid \eta_{p'}(x) \in A\}).$$

Uniendolo esto a que P_p es la medida progrediente de μ a través de η_p obtenemos que

$$\theta(p) = P_p(A) = (\eta_{p*}(\mu))(A) \leq (\eta_{p'*}(\mu))(A) = P_{p'}(A) = \theta(p').$$

Ahora vamos a ver que el suceso A pertenece a una σ -álgebra asintótica para una sucesión de sucesos independientes. Tomamos la sucesión $\{C_n^{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$, esta sucesión es de sucesos independientes porque son cilindros actuando sobre aristas diferentes. Tomamos la σ -álgebra asintótica $\mathcal{T} = \cap_{n=1}^{\infty} \sigma_n$, $\sigma_n = \sigma(C_n^{\alpha_n}, C_{n+1}^{\alpha_{n+1}}, \dots)$. Para ver que $A \in \mathcal{T}$ vamos a tomar otras σ -álgebras \mathcal{D}_n , vamos a ver que A está en todas estas

\mathcal{D}_n y por último vamos a ver que coinciden con las σ_n .

Dado $\omega \in \Omega$, definimos los conjuntos $B_n(\omega)$ para todo n natural de la siguiente forma

$$B_n(\omega) = \{\omega' \in \Omega \mid \forall i > n, \omega'(i) = \omega(i)\}.$$

Es decir, $B_n(\omega)$ es el conjunto de todas las sucesiones de Ω que coinciden con ω de la posición $n + 1$ en adelante. Ahora definimos las clases de sucesos \mathcal{D}_n de la siguiente manera

$$\mathcal{D}_n = \{D \in \sigma \mid \forall \omega \in D, B_n(\omega) \subset D\}.$$

El suceso A pertenece a todos los \mathcal{D}_n , ya que abrir o cerrar una cantidad finita de aristas no va a cambiar la existencia o no de un cúmulo infinito.

Tomamos $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}(V, E \setminus \{1, 2, \dots, n\})$ y llamamos Ω_n a su espacio de coloreados. Definimos la aplicación $f_n : \Omega \rightarrow \Omega_n$, $f_n(\omega) = (\omega(n+1), \omega(n+2), \dots)$. Tomamos en cada Ω_n la σ -álgebra de los cilindros, que estará generada por $\{C_i^{\alpha_i}\}_{i=n+1}^{\infty}$. Por como están definidas las f_n tenemos que dados $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ tenemos que $f_n(\omega_1) = f_n(\omega_2)$ si y solo si $B_n(\omega_1) = B_n(\omega_2)$. Es decir, la contraimagen por f_n de $\sigma(\{C_i^{\alpha_i}\}_{i=n+1}^{\infty})$ es \mathcal{D}_n . Para $i > n$, $f_n^{-1}(C_i^{\alpha_i}) = C_i^{\alpha_i}$. Aplicando el lema previo tenemos que $\sigma_n = \mathcal{D}_n$ para todo n . Por lo tanto A pertenece a σ_n para todos los n y entonces pertenece a la intersección de todas ellas y por tanto a \mathcal{T} y podemos aplicar la ley 0-1 de Kolmogorov.

Uniendo los dos resultados tenemos que $\theta(p)$ es monótona creciente y solo toma los valores 0 o 1. Es decir, hay un $p_c \in [0, 1]$ para el cual $\theta(p) = 0$ para $p \in [0, p_c]$ y $\theta(p) = 1$ para $p \in (p_c, 1]$. En el punto crítico no se sabe si θ es 0 o 1. \square

3.6. Cálculo de la percolación crítica

Llamamos *percolación crítica* al valor p_c . La forma natural de definir p_c , que se deduce de la demostración del teorema de existencia de percolación crítica, es como el superior del conjunto de los $p \in [0, 1]$ con $\theta(p) = 0$ o como el inferior del conjunto complementario:

$$p_c(\mathcal{G}) = \sup\{p \in [0, 1] \mid \theta(p) = 0\} = \inf\{p \in [0, 1] \mid \theta(p) = 1\}.$$

Sin embargo, fijarse en todo el grafo puede ser complicado, por lo tanto, vamos a dar otra definición basada solo en un vértice y no en el grafo entero. Dado $v \in V$, definimos $p_{c,v}$ como

$$p_{c,v}(\mathcal{G}) = \sup\{p \in [0, 1] \mid \theta_v(p) = 0\} = \inf\{p \in [0, 1] \mid \theta_v(p) > 0\}.$$

Proposición: $p_c(\mathcal{G}) = p_{c,v}(\mathcal{G})$ para todo $v \in V$.

Demostración: Sean $v, v' \in V$, veamos que $\theta_v(p) > 0 \Leftrightarrow \theta_{v'}(p) > 0$. Si $\theta_v(p) > 0$, insertamos un camino de aristas e_0, \dots, e_n que conecten v y v' . Gracias a que P_p es tolerante a la inserción tenemos que $P_p(i_{e_0, \dots, e_n}(\{\omega \in \Omega \mid C_\omega(v) \text{ es infinito}\})) > 0$ y como $i_{e_0, \dots, e_n}(\{\omega \in \Omega \mid C_\omega(v) \text{ es infinito}\}) \subset \{\omega \in \Omega \mid C_\omega(v') \text{ es infinito}\}$ entonces $\theta_{v'} > 0$ concluyendo que $\theta_v > 0 \Rightarrow \theta_{v'} > 0$. Suponer que $\theta_{v'}(p) > 0$ y repetir la prueba demuestra el recíproco.

Como $\{\omega \in \Omega \mid \exists C_\omega \text{ con } |C_\omega| = \infty\} = \cup_{v \in V} \{\omega \in \Omega \mid |C_\omega(v)| = \infty\}$, $\theta(p) = 0$ si y solo si $\theta_v(p) = 0$ para todo v . Como acabamos de ver que $\theta_v(p) = 0$ si y solo si $\theta_{v'}(p) = 0$ para cualquier v' podemos prefijar un vértice v y afirmar que $\theta(p) = 0$ si $\theta_v(p) = 0$ y $\theta(p) = 1$ si $\theta_v(p) > 0$. \square

Proposición: Sea \mathcal{G}' un subgrafo de \mathcal{G} , entonces $p_c(\mathcal{G}) \leq p_c(\mathcal{G}')$.

Demostración: Para cada $p > p_c(\mathcal{G}')$ la P_p -probabilidad de que haya un cúmulo infinito en \mathcal{G}' es 1. Como $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$, la P_p -probabilidad de que exista un cúmulo infinito en \mathcal{G} también es 1. Por lo tanto $p_c(\mathcal{G}) \leq p_c(\mathcal{G}')$. \square

Si el grafo es un árbol T , entonces $p_c(T) = \frac{1}{br(T)}$ siendo $br(T)$ el número de ramificación del árbol. La demostración de este resultado se encuentra en [5]. Además, en la fase supercrítica existen una infinidad de cúmulos infinitos con total seguridad. Este resultado se puede encontrar en [8].

En general, la percolación crítica no es invariante por casi-isometría. Un ejemplo de esto son el árbol binario y el árbol de Fibonacci, que son casi-isométricos pero tienen distinto número de ramificación.

Teorema: Sean \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 grafos de geometría acotada casi-isométricos. Entonces

$$p_c(\mathcal{G}_1) = 1 \Leftrightarrow p_c(\mathcal{G}_2) = 1.$$

Si \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 son árboles la demostración es inmediata ya que dos árboles casi-isométricos verifican que $br(\mathcal{G}_1) = 1 \Leftrightarrow br(\mathcal{G}_2) = 1$. En [6] encontramos una demostración para el caso de grafos de Cayley. La misma demostración se puede generalizar para grafos casi-isométricos de geometría acotada.

Capítulo 4

Percolación crítica en grafos de Cayley sobre los enteros

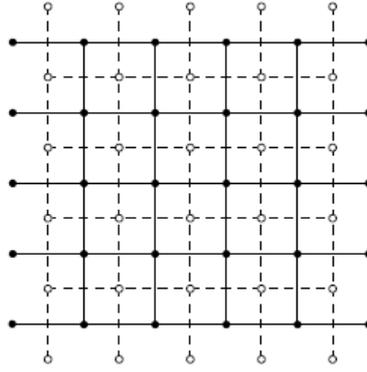
En general, el cálculo del valor crítico p_c de un grafo no es sencillo y en la mayoría de casos se desconoce su valor exacto. Un ejemplo que muestra esta afirmación son los grafos de Cayley de \mathcal{Z}^n .

Para $n = 1$ se tiene que $p_c(\mathcal{Z}) = 1$. Es fácil comprobar que para todo $p < 1$ existen infinitas aristas cerradas con probabilidad 1, por lo tanto todos los cúmulos son finitos.

No se conoce el valor exacto de p_c para $n > 2$, pero como $\mathcal{Z}^n \subset \mathcal{Z}^{n+1}$ entonces sabemos que $p_c(\mathcal{Z}^{n+1}) \leq p_c(\mathcal{Z}^n)$.

Para $n = 2$ la percolación crítica es $p_c(\mathcal{Z}^2) = \frac{1}{2}$. Además, $\theta(\frac{1}{2}) = 0$. Esta afirmación se puede encontrar en [3], algunos de los resultados utilizados se escapan a lo planteado en este trabajo así que vamos a dar las ideas principales de la demostración sin entrar demasiado en detalles. Los resultados que enunciaremos en esta sección se pueden encontrar en [3] o en [4]. Las imágenes mostradas han sido extraídas también de estos documentos.

El primer concepto clave de esta demostración es el del grafo dual de \mathcal{Z}^2 , \mathcal{Z}_d^2 , que se define de la siguiente manera: Los vértices de \mathcal{Z}_d^2 son los centros de las caras de \mathcal{Z}^2 y dos vértices de \mathcal{Z}_d^2 están unidos por una arista si y solo si las caras correspondientes en \mathcal{Z}^2 comparten una arista. Es decir, $\mathcal{Z}_d^2 = \mathcal{G}(G, S)$ con $G = \{x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) | x \in \mathbb{Z}^2\}$ y $S = \{\pm(1, 0), \pm(0, 1)\}$. Es fácil comprobar que \mathcal{Z}_d^2 es isomorfo a \mathcal{Z}^2 .



Fragmento de \mathbb{Z}^2 y su dual.

Cada arista de \mathbb{Z}_d^2 se corta con una arista de \mathbb{Z}^2 . Dado un coloreado en \mathbb{Z}^2 diremos que una arista de su coloreado dual está abierta o cerrada si así lo está la arista de \mathbb{Z}^2 con la que se corta.

En el caso particular de que $p = \frac{1}{2}$, $p = 1 - p$ y un suceso que hace referencia a aristas cerradas tiene la misma probabilidad que el mismo suceso pero haciendo referencia a aristas abiertas. Utilizaremos el término *camino cerrado* para hablar de una secuencia de aristas cerradas que “unen” dos puntos y *cúmulo cerrado* para hacer referencia a agrupaciones de vértices “unidos” mediante aristas cerradas.

La demostración de que $P_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}$ se divide en dos partes. Primero supondremos que $\theta(\frac{1}{2}) = 1$, llegaremos a un absurdo por lo que deduciremos que $p_c(\mathbb{Z}^2) \geq \frac{1}{2}$. En segundo lugar supondremos que $p_c(\mathbb{Z}^2) > \frac{1}{2}$ llegando a otro absurdo y concluyendo con la igualdad deseada.

La primera parte de la demostración se basa en la unicidad del cúmulo infinito y en un manejo apropiado de las propiedades de \mathbb{Z}^2 y su dual.

Teorema (unicidad del cúmulo infinito): En \mathbb{Z}^d , si p verifica que $\theta(p) = 1$, entonces

$$P_p(\text{Existe un único cúmulo infinito}) = 1.$$

Otro resultado necesario es la desigualdad FKG, un resultado técnico llamado así en honor a Fortuin, Kasteleyn y Ginibre, que demostraron este resultado. Este resultado es más amplio de lo que mostraremos aquí, solo nos centraremos en la parte que nos interesa. Diremos que un suceso A es *creciente* si $I_A(\omega) \leq I_A(\omega')$ para todos $\omega \leq \omega'$ donde I_A es la función característica.

Teorema (FKG inequality): Si A y B son sucesos crecientes entonces $P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B)$.

Supongamos que $\theta(\frac{1}{2}) = 1$. Sea $T(n) = [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ y tomamos N lo suficientemente grande como para que $P_{\frac{1}{2}}(T(n) \leftrightarrow \infty) > 1 - \frac{1}{84}$ para todo $n \geq N$. Tomamos un $n > N$.

Llamamos A^l , A^r , A^t y A^b respectivamente a los sucesos “el lado de la izquierda/ derecha/ arriba/ abajo de $T(n)$ está unido a ∞ mediante un camino abierto” (left, right, top, bottom). Utilizando la desigualdad FKG, tenemos que

$$P_{\frac{1}{2}}(T(n) \leftrightarrow \infty) = P_{\frac{1}{2}}(\overline{A^l} \cap \overline{A^r} \cap \overline{A^t} \cap \overline{A^b}) \geq P_{\frac{1}{2}}(\overline{A^l})P_{\frac{1}{2}}(\overline{A^r})P_{\frac{1}{2}}(\overline{A^t})P_{\frac{1}{2}}(\overline{A^b}).$$

Por simetría, tenemos que esos sucesos son equiprobables y por lo tanto, para $g = l, r, t, b$

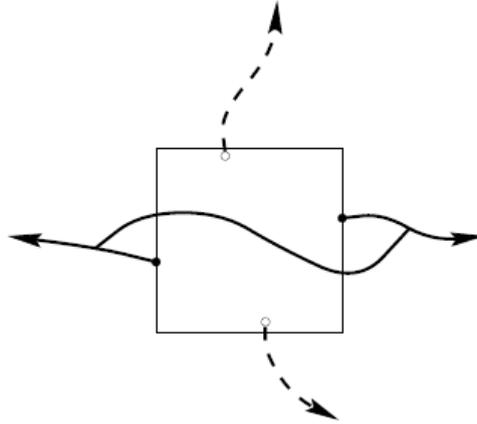
$$P_{\frac{1}{2}}(T(n) \leftrightarrow \infty) \geq P_{\frac{1}{2}}(\overline{A^g})^4.$$

Por como elegimos n , tenemos que $P_{\frac{1}{2}}(A^g) > \frac{7}{8}$.

Consideramos ahora la caja dual $T(n)_d = \{(x_1, x_2) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \mid -n \leq x_1, x_2 \leq n\}$. Sean A_d^l, A_d^r, A_d^t y A_d^b respectivamente los sucesos “el lado de la izquierda/ derecha/ arriba/ abajo de $T(n)_d$ está unido a ∞ mediante un camino cerrado.” Como $p = \frac{1}{2}$, $P_{\frac{1}{2}}(A_d^g) = P_{\frac{1}{2}}(A^g) > \frac{7}{8}$ para $g = l, r, t, b$. Consideramos el suceso $A = A^l \cap A^r \cap A_d^t \cap A_d^b$.

$$P_{\frac{1}{2}}(\overline{A}) = P_{\frac{1}{2}}(\overline{A^l} \cup \overline{A^r} \cup \overline{A_d^t} \cup \overline{A_d^b}) \leq P_{\frac{1}{2}}(\overline{A^l}) + P_{\frac{1}{2}}(\overline{A^r}) + P_{\frac{1}{2}}(\overline{A_d^t}) + P_{\frac{1}{2}}(\overline{A_d^b}) < \frac{1}{2}.$$

Por lo que $P_{\frac{1}{2}}(A) > \frac{1}{2}$. Si A ocurre tenemos dos situaciones. Puede que haya un camino de aristas abiertas que une el lado izquierdo de $T(n)$ con el lado derecho o puede que no lo haya. Si no lo hay, entonces hay dos cúmulos infinitos, lo cual tiene probabilidad 0. Si lo hay, en el dual hay dos cúmulos cerrados infinitos, lo cual también tiene probabilidad 0. Por lo tanto el suceso A , de probabilidad positiva, está contenido en la unión de dos sucesos de probabilidad 0. Absurdo.



Suceso A. Primera situación.

Hay un camino abierto que une el lado izquierdo de $T(n)$ con el lado derecho.

Veamos ahora que $p_c \leq \frac{1}{2}$. Para esta parte el único resultado que necesitamos es el siguiente teorema.

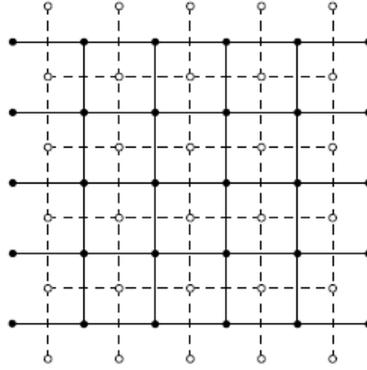
Teorema: Sea $\partial B(n)$ el conjunto de vértices de \mathcal{Z}^d a distancia n del 0 y A_n el suceso “existe un camino de aristas abiertas que unen 0 con $\partial B(n)$. Si $p < p_c$, entonces existe $\psi(p) > 0$ tal que

$$P_p(A_n) < e^{-n\psi(p)}$$

para todo n .

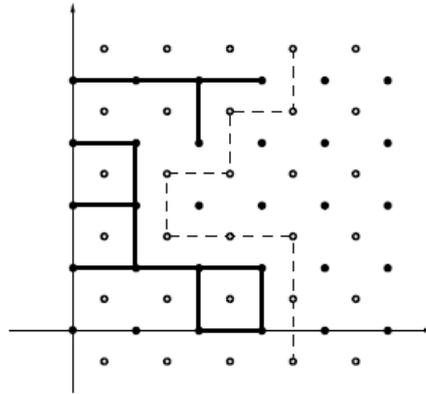
Vamos con la demostración. Sea $S(n)$ el subgrafo de \mathcal{Z}^2 cuyo conjunto de vértices es $[0, n] \times [0, n - 1]$ y el conjunto de aristas es el conjunto de aristas de \mathcal{Z}^2 que une vértices de $S(n)$ exceptuando aquellas que unen vértices x, y con $x_1 = y_1 = 0$

o $x_1 = y_1 = n$. Tomamos el grafo dual $S(n)_d$ como el subgrafo de \mathbb{Z}_d^2 con vértices $[\frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}]$ y el conjunto de aristas de igual forma pero exceptuando las que unen vértices con $x_2 = y_2 = -\frac{1}{2}$ o $x_2 = y_2 = n - \frac{1}{2}$. $S(n)$ y $S(n)_d$ son isomorfos.



$S(5)$ y su dual $S(5)_d$.

Llamamos A_n al suceso “existe un camino abierto en $S(n)$ que une su lado derecho con su lado izquierdo” y B_n al suceso “existe un camino cerrado en $S(n)_d$ que une su lado superior con su lado inferior”. A_n y B_n son sucesos complementarios, siempre ocurre uno de los dos y nunca los dos a la vez. La demostración de esta afirmación es consecuencia del lema que se utiliza para la demostración del teorema de la curva de Jordan que afirma que si tienes dos curvas en un cuadrado, una que va de arriba a abajo y otra de izquierda a derecha, las curvas se cortan.



Al suceder B_5 no sucede A_5 .

Tenemos que $P_p(A_n) + P_p(B_n) = 1$. Además, como cada arista de $S(n)_d$ es cerrada con probabilidad $1 - p$ y $S(n)$ es isomorfo a $S(n)_d$, entonces $P_p(B_n) = P_{1-p}(A_n)$ y $P_p(A_n) + P_{1-p}(A_n) = 1$. En particular $P_{\frac{1}{2}}(A_n) = \frac{1}{2}$.

Utilizando el teorema anterior sabemos que, como $\frac{1}{2} < p_c$, entonces existe un $\psi > 0$ tal que $P_{\frac{1}{2}}(0 \leftrightarrow \partial B(n)) < e^{-n\psi}$. Consideramos la línea $L_n = \{(n, k) | k \in \mathbb{Z}\}$ y $L'_n = \{n\} \times [0, n - 1]$. $L'_n \subset L_n$ y $L'_n \subset S(n)$.

$$P_{\frac{1}{2}}(A_n) = P_{\frac{1}{2}}\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} (0, i) \leftrightarrow L'_n\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} P_{\frac{1}{2}}((0, i) \leftrightarrow L'_n).$$

Sea $k = \max_i \{P_{\frac{1}{2}}((0, i) \leftrightarrow L'_n)\}$,

$$P_{\frac{1}{2}}(A_n) \leq nP_{\frac{1}{2}}((0, k) \leftrightarrow L'_n).$$

$P_{\frac{1}{2}}((0, k) \leftrightarrow \partial L'_n) \leq P_{\frac{1}{2}}((0, k) \leftrightarrow \partial L_n) \leq P_{\frac{1}{2}}((0, k) \leftrightarrow \partial B(n))$. Por lo tanto

$$P_{\frac{1}{2}}(A_n) < ne^{-n\psi}$$

que tiende a 0 cuando n tiende a ∞ . Absurdo ya que $P_{\frac{1}{2}}(A_n) = \frac{1}{2}$ para todo n .

Como $\theta(\frac{1}{2}) = 0$ tenemos que $\frac{1}{2} \leq p_c$, por otro lado hemos visto que $\frac{1}{2}$ no pertenece a la fase subcrítica por lo que $p_c \leq \frac{1}{2}$ concluyendo que $p_c = \frac{1}{2}$. \square

Bibliografía

- [1] BILLINGSLEY, P. *Probability and Measure*. United States of America: John Wiley and Sons; 1986.
- [2] FURSTENBERG, H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation. *Math. Systems Theory*, **1** (1967), 1-49.
- [3] GRIMMETT, G. *Percolation*. Berlin, Germany: Springer-Verlag; 1999.
- [4] GRIMMETT, G. Percolation and disordered systems, *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour XXVI-1996* (P. Bernard, ed.), Lecture Notes in Mathematics no. 1665, Springer, Berlin, pp. 153-300.
- [5] LYONS, R. Random walks and percolation on trees. *The Annals of Probability*, **18** (1990), 931-958.
- [6] LYONS, R., PERES, Y. *Probability on trees and networks*. Draft Version 2012.
- [7] PERES, Y. Probability on trees: An introductory climb, in *Lectures on Probability Theory and Statistics*. (Saint-Flour, 1997). *Lecture Notes in Math.* **1717**. Springer, Berlin. 1999, 193-280.
- [8] PERES, Y., STEIF, J.E. The number of infinite clusters in dynamical percolation. *Probab. Theory Related Fields*, **111** (1998), 141-165.
- [9] PÉREZ FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA, M. *Número de ramificación y percolación de un pseudogrupo* [Tesis doctoral]. Universidade de Santiago de Compostela. 2011.
- [10] VÁZQUEZ MARTÍNEZ, A. C. *Geometría ergódica y asintótica de grafos aleatorios* [Tesis doctoral]. Universidade de Santiago de Compostela. 2018.
- [11] WILLARD, S. *General Topology*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Pub. Co.; 1970.