

Funciones e integrales elípticas

Héctor Zalama Alonso

Tutor:

Manuel Núñez Jiménez



Universidad de Valladolid

*Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben
können.*

Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.

David Hilbert

Prefacio

El presente documento constituye el Trabajo de Fin de Grado de Héctor Zalama Alonso, es decir, un documento original que se presenta como última responsabilidad para acceder al título de Graduado en Matemáticas por la Universidad de Valladolid, y que ha sido tutorizado por don Manuel Núñez Jiménez.

El objetivo del trabajo ha sido conectar dos objetos matemáticos relacionados de forma no evidente: las funciones elípticas, que son funciones meromorfas que presentan una doble periodicidad en el plano, y las integrales elípticas, que son integrales que involucran polinomios y que aparecen con sorprendente frecuencia en problemas tanto de índole matemática como de índole física o ingenieril. Para este propósito se suponen conocidos algunos resultados sobre funciones analíticas, que pueden encontrarse en cualquier texto de Variable Compleja, así como de Topología General, que pueden encontrarse en el Apéndice.

El texto se divide en cuatro capítulos bien diferenciados. El primero aborda cuestiones de Variable Compleja sobre la esfera de Riemann y presenta los conceptos que serán clave para el posterior estudio de las funciones elípticas. El segundo centra su estudio en estas funciones y en la función \wp de Weierstrass. En este sentido, se incluye una breve lectura de esta función desde el punto de vista de las curvas algebraicas complejas planas no singulares. El tercero constituye un acopio condensado de numerosas fórmulas que involucran una nueva familia de funciones elípticas, cuya importancia radica en su enorme utilidad. El cuarto capítulo incluye ejemplos de aplicación de estas funciones.

Espero que el lector encuentre provechoso el presente trabajo, al menos, tanto como ha sido para mí elaborarlo.

Para cualquier sugerencia, que serán bienvenidas, ya sea por presencia de erratas o por cualquier otro motivo, se facilita el contacto *hectorzalama@gmail.com*.

Índice general

Prefacio	1
1. Funciones meromorfas en la esfera de Riemann	5
1.1. Introducción. Generalidades de \mathbb{C}	5
1.2. Esfera de Riemann. Proyección estereográfica	5
1.3. Comportamiento de las funciones en ∞	8
1.4. Funciones racionales	11
2. Funciones elípticas	15
2.1. Funciones periódicas y grupos topológicos	15
2.2. Retículos y regiones fundamentales: El toro	19
2.3. Propiedades de las funciones elípticas	24
2.4. La ecuación de $\wp(z)$	27
2.5. El teorema de adición	32
2.6. Factorización de funciones meromorfas	34
2.7. Las funciones $\sigma(z)$ y $\zeta(z)$	37
3. Integrales elípticas	41
3.1. Motivación	41
3.2. Funciones θ	41
3.3. Funciones elípticas de Jacobi	45
3.4. Algunos teoremas de adición	49
3.5. Integrales elípticas	50
3.5.1. Integrales elípticas de primer tipo	50
3.5.2. Integrales elípticas de segundo tipo	52
4. Aplicaciones	55
4.1. La longitud de la elipse y la lemniscata	55
4.2. El péndulo simple	57
4.3. Órbitas en el modelo relativista	58
Bibliografía	63
A. Resultados auxiliares	65

Capítulo 1

Funciones meromorfas en la esfera de Riemann

1.1. Introducción. Generalidades de \mathbb{C}

Es bien conocida la estructura de los llamados números complejos: constituyen un enfoque muy especial de \mathbb{R}^2 , dando lugar a una extensión algebraica de \mathbb{R} que junto a la estructura topológica tomada de \mathbb{R}^2 definen sobre ese cuerpo una estructura analítica fundamental. El estudio del cuerpo complejo, en sus muchas facetas y aplicaciones es capital en las Matemáticas.

Desde otro punto de vista, el geométrico, un plano puede ser compactificado en una esfera de una forma natural incluyendo un punto, como es ampliamente conocido: la compactificación de Alexandroff. La combinación de enfoques permite incluir el punto ∞ y extender la teoría de las funciones meromorfas en el plano a funciones meromorfas en la esfera.

1.2. Esfera de Riemann. Proyección estereográfica

Consideremos la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y el plano $\{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$, que identificaremos con \mathbb{C} de forma natural:

$$(x, y, 0) \approx x + iy = z \in \mathbb{C}.$$

Llamaremos N al polo norte de la esfera, es decir, al punto de coordenadas $(0,0,1)$, como se muestra en la imagen siguiente. También distinguiremos el polo sur, S , de coordenadas $(0,0,-1)$.

Consideramos la aplicación $\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ que a cada punto $Q \in S^2$ lo envía en la intersección de la recta NQ con \mathbb{C} , $P = \pi(Q)$. Llamaremos a esta aplicación *proyección estereográfica* y será fundamental para el desarrollo del presente texto pues nos va a permitir compactificar \mathbb{C} de una forma razonable. Lo primero que hemos de comprobar es que esta está bien definida. Puesto que estamos tomando $Q \neq N$, un vector director de la recta tendrá una tercera componente necesariamente no nula y por lo tanto la intersección con \mathbb{C} está garantizada. Además, la intersección de una recta con una esfera sólo puede ser de 3 tipos:

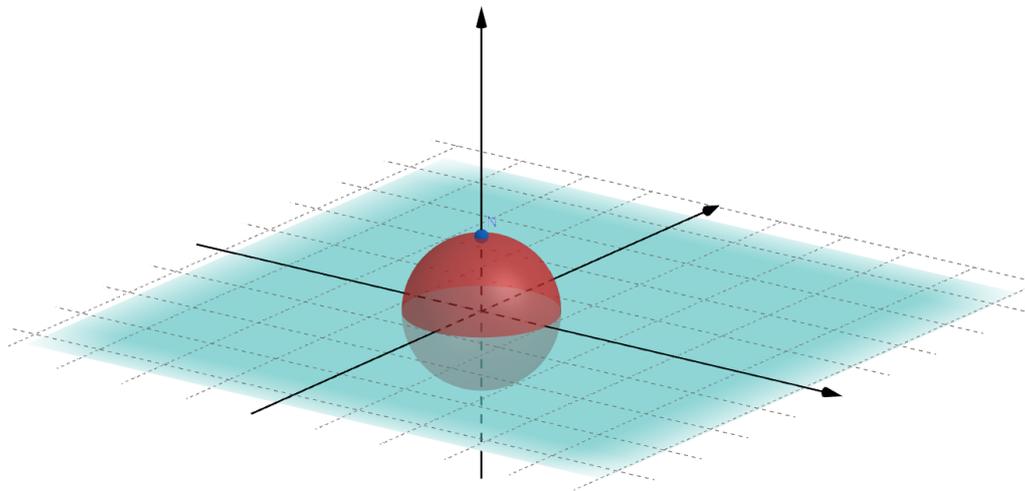


Figura 1.1: Esfera y plano en las posiciones relativas citadas.

1. Vacía: descartamos este caso porque sabemos que N pertenece tanto a la recta como a la esfera.
2. Unipuntual: este caso también está descartado puesto que siempre estamos tomando un punto Q distinto de N .
3. La última posibilidad es que la intersección se dé en 2 puntos distintos, que es precisamente nuestro caso. Esto nos asegura además que la aplicación es inyectiva. La observación con respecto a un vector director de la recta que se genera implica además la sobreyectividad.

Desde el punto de vista de las coordenadas, se tiene que si $Q = (x_1, x_2, x_3)$, $P = (x, y, 0)$ y puesto que N , Q y P están alineados:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{1}{1 - x_3},$$

de donde, tras despejar, se obtiene que:

$$z = x + iy = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Recordando que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, es sencillo comprobar que $x^2 + y^2 + 1 = \frac{2}{1 - x_3}$, de tal forma que podemos invertir π y se tiene que:

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}; \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}; \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Esto muestra que π es una aplicación biyectiva, continua y de inversa continua, luego es un homeomorfismo entre $S^2 \setminus \{N\}$ y \mathbb{C} .

Consideramos entonces el plano complejo extendido, $\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (ó $\hat{\mathbb{C}}$, dependiendo de la literatura), que no es sino el plano complejo usual junto con un punto

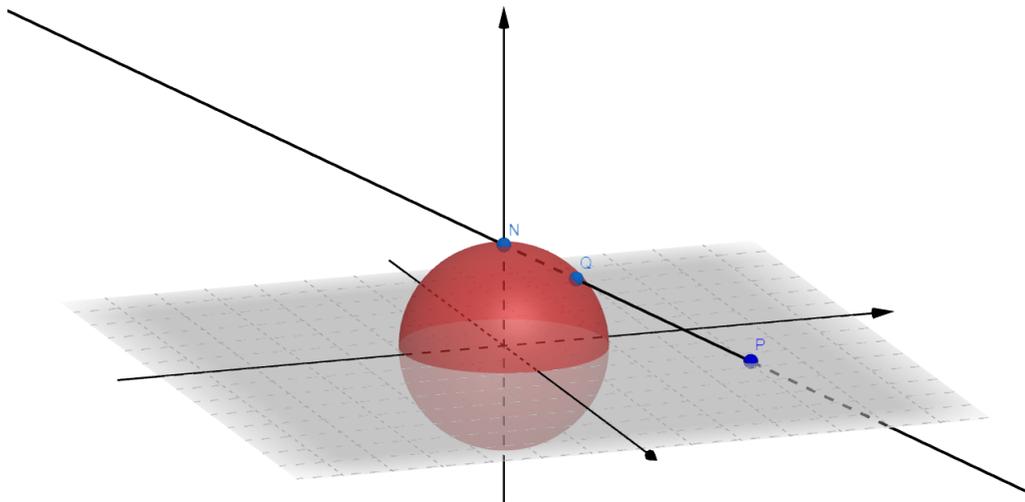


Figura 1.2: Proyección estereográfica.

añadido, el punto del infinito, cuyo sentido quedará claro al extender π a este nuevo conjunto.

Abusando de la notación, volvamos la proyección estereográfica, añadiendo N y el punto del infinito: $\pi : S^2 \rightarrow \Sigma$, que se comporta de igual forma que antes pero con el añadido de que $\pi(N) = \infty$.

Es entonces claro, a la vista de las expresiones anteriores, que π lleva los puntos cercanos a N a puntos de módulo "grande". Este aserto quedará precisado en lo sucesivo cuando analicemos las propiedades topológicas de este nuevo conjunto, Σ .

Aunque hemos construido Σ como \mathbb{C} junto a un punto, ∞ , puesto que tenemos una biyección entre éste y S^2 , consideremos en Σ la topología dada por π (cuya restricción a $S^2 \setminus \{N\}$ nos devuelve la topología que ya conocemos de \mathbb{C}). Es inmediato entonces comprobar cómo son los abiertos de Σ .

Proposición 1.1. Los abiertos de Σ son o bien abiertos de \mathbb{C} o bien de la forma $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, donde K es un compacto de \mathbb{C} .

Demostración. Los abiertos de Σ son los abiertos de S^2 vía el homeomorfismo π . En primer lugar, puesto que S^2 es Hausdorff, $S^2 \setminus \{N\}$ es un abierto de S^2 y por lo tanto \mathbb{C} es un abierto de Σ .

Si U es un abierto de S^2 tal que $\infty \notin U$, $\pi(U)$ es un abierto de Σ contenido en \mathbb{C} , luego es abierto en \mathbb{C} .

Si suponemos ahora que U es un abierto de S^2 tal que $\infty \in U$, se tiene que $S^2 \setminus U$ es un cerrado de S^2 , que por ser compacto, se tiene que $S^2 \setminus U$ es compacto y además $\infty \notin (S^2 \setminus U)$. Por lo tanto $\pi(S^2 \setminus U)$ es un compacto contenido en \mathbb{C} , que podemos llamar K . Al tomar complementarios, que se respetan por el homeomorfismo, se tiene que $\pi(U) = (\Sigma \setminus K) = (\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, ya que $K \subset \mathbb{C}$. \square

Se tienen entonces dos resultados de forma completamente directa:

Teorema 1.2. Σ es compacto.

Corolario 1.3. Para cada sucesión de elementos de Σ , existe una subsucesión convergente.

1.3. Comportamiento de las funciones en ∞

Para las funciones definidas en subconjuntos de Σ que sean a su vez subconjuntos de \mathbb{C} , podemos hablar de funciones analíticas, meromorfas, polos, desarrollos de Taylor, etc. El objetivo es poder hablar en estos términos también para funciones definidas en ∞ y entender su comportamiento en un entorno de este punto tan "singular".

Definición 1.4. Sea la función J tal que

$$J : \Sigma \rightarrow \Sigma, \quad J(z) = z^{-1}, \quad z \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}), \quad J(0) = \infty, \quad J(\infty) = 0.$$

Proposición 1.5. J así definida es continua. Es más, es un homeomorfismo de Σ en Σ .

Demostración. Para ver el efecto que tiene J sobre Σ , vayamos a S^2 . Consideremos $\hat{J} = \pi^{-1} \circ J \circ \pi : S^2 \rightarrow S^2$. Se tiene que si tomamos un punto distinto de N , $P = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$,

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \quad \text{luego } J \circ \pi(P) = \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3}.$$

Por último, volviendo con π^{-1} , se concluye que:

$$\hat{J}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, -x_3),$$

es decir, se trata de una rotación de la esfera de ángulo π en torno al eje x_1 . Puesto que $J(0) = \infty, J(\infty) = 0$, es inmediato comprobar que $\hat{J}(N) = S, \hat{J}(S) = N$, luego la expresión anterior para \hat{J} es válida para todos los puntos de S^2 .

Es claramente una aplicación biyectiva, continua y de inversa continua de S^2 en S^2 , luego es un homeomorfismo. Puesto que $J = \pi \circ \hat{J} \circ \pi^{-1}$, J es homeomorfismo de Σ en Σ por ser composición de homeomorfismos. En particular, J es continua. \square

Definición 1.6. Diremos que $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es continua, analítica, meromorfa etc. en ∞ si $f \circ J$ cumple dicha propiedad en 0.

Hemos definido cómo trabajar y dar sentido a una función "evaluada en infinito", algo que puede llevar a cierta confusión. Es conveniente señalar que ∞ es la imagen de N por la proyección estereográfica y *no es un número*. Sin embargo, la intuición de infinito como algo de gran tamaño, queda precisada en el siguiente sentido:

Proposición 1.7. Consideremos la función identidad $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$, $f(z) = z$. Se tiene que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.

Demostración. $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z = \lim_{|\frac{1}{z}| \rightarrow 0} z = \lim_{\frac{1}{z} \rightarrow 0} z = \lim_{z \rightarrow 0} J(z) = \infty$, donde se ha hecho uso de la continuidad de J y de que $w \rightarrow 0 \iff |w| \rightarrow 0$. \square

Definición 1.8. Definimos el abierto $B(\infty, r)$, $r > 0$, que llamaremos, abusando del lenguaje, bola abierta centrada en ∞ , como sigue:

$$B(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tales que } |z| > \frac{1}{r}\} \cup \{\infty\}.$$

Estas bolas abiertas centradas en ∞ constituyen una base de entornos de dicho punto por lo que serán útiles en lo que a definir conceptos de convergencia se refiere. En realidad, lo único que se ha hecho es tomar la imagen de $B(0, r)$ por J , que como es un homeomorfismo transforma una base de entornos de 0 en una base de entornos de ∞ .

Ahora, puesto que ya sabemos trabajar con funciones definidas en \mathbb{C} , queremos incluir ∞ en sus dominios de definición. Para hacerlo de forma continua, basta que exista el límite:

Corolario 1.9. Sea D entorno de ∞ , $f : (D \setminus \infty) \rightarrow \Sigma$ continua. Supongamos que existe

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f \circ J(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Entonces podemos definir $f(\infty)$ como dicho límite y se tiene que $f : D \rightarrow \Sigma$ es continua¹.

La siguiente definición formaliza los conjuntos en los que vamos a definir propiedades, y que es conveniente recordar para lo sucesivo.

Definición 1.10. Decimos que R es una región de Σ si R es un subconjunto no vacío, abierto y conexo (equivalentemente conexo por caminos).

Es en estas regiones donde vamos a poder extender demostrar ciertos resultados que son conocidos para funciones definidas en \mathbb{C} . Algunos de ellos necesitarán pequeñas adaptaciones para extender sus propiedades a Σ .

Teorema 1.11 (*de los ceros aislados*). Sea f una función analítica en una región R . Sea $\tau_f = \{z \in R \text{ tales que } f(z) = 0\}$. Entonces τ'_f , su conjunto derivado, es abierto y cerrado en R .

¹Aquí nuevamente se abusa de la notación, puesto que las dos funciones son esencialmente distintas al tener dominios de definición diferentes. Esta práctica, como ya se hizo con π , es de lo más habitual al añadir puntos al conjunto de definición.

Equivalentemente, sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de τ_f , que converge a un elemento $z \in R$. Entonces f es idénticamente nula en R .

Demostración. Que sea cerrado está claro. Para ver que es abierto, distingamos dos casos:

En primer lugar, si $w \in \tau'_f, w \neq \infty$, entonces f , por ser analítica, o bien es constante luego idénticamente nula y al ser todo R donde se anula, τ'_f es trivialmente abierto en R , o bien tiene un cero de orden k en w . En el caso no trivial,

$$f(z) = (z - w)^k g(z),$$

donde g es una función analítica en un entorno de w y no se anula en w . Pero entonces g no se anula en un entorno de w por ser continua y es absurdo que $w \in \tau'_f$.

Supongamos ahora que $\infty \in \tau'_f$. Puesto que estamos suponiendo que f es analítica en un entorno de ∞ , se tiene que $f(\frac{1}{z})$ es analítica en un entorno de 0. Basta ahora definir $\hat{f} = f(\frac{1}{z})$ (con cierta precaución en su dominio de definición) y retomar lo expuesto en el párrafo anterior para \hat{f} y $w = 0$. \square

Supongamos ahora que f es meromorfa en un punto $w \in \Sigma$, con un polo de orden $k \in \mathbb{Z}^+$ (es decir, $(z - w)^k f(z)$ es analítica en un entorno de w), entonces escribimos $f(w) = \infty$. Se tiene que los polos de f corresponden con los ceros de $J \circ f$. Hay entonces ciertas propiedades que emergen de forma natural:

1. Si f es meromorfa en Σ entonces es continua. Precisamente hemos añadido el punto ∞ para que este tipo de expresiones tengan sentido y poder dotar de continuidad a las funciones meromorfas.
2. Las funciones meromorfas forman un cuerpo, que es una extensión de los complejos, identificando $w \in \mathbb{C}$ con la función constante $f_w(z) = w, \forall z \in \Sigma$. Esto es, si f, g son meromorfas, $f + g$ es meromorfa y si $g \neq 0$, entonces f/g es meromorfa también.

Cabe destacar que las funciones constantes iguales a un valor complejo son meromorfas, pero no lo es la función $f : \Sigma \rightarrow \Sigma, f(z) = \infty$.

Los desarrollos de Laurent son conocidos para funciones meromorfas en \mathbb{C} , y queremos extender estos conceptos a funciones definidas en Σ . Si f es una función analítica no constante tal que para $w, \in \mathbb{C}, f(w) = c \in \mathbb{C}$, entonces existe un $k \in \mathbb{Z}^+$ mínimo tal que $f^{(k)}(w) \neq 0$ y f admite un desarrollo en un entorno de w de la forma

$$f(z) = c + \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - w)^n,$$

con $a_k \neq 0$. Llamamos a este valor mínimo de k la *multiplicidad* de la solución de $f(z) = c$ en w . Análogamente, si f es meromorfa en w , con un polo de orden k , decimos que $f(w) = \infty$ con multiplicidad k , y f admite un desarrollo de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n (z - w)^n$$

en un entorno de w , con $b_{-k} \neq 0$. Llamamos $\sum_{n=-k}^{-1} b_n(z-w)^n$ la parte principal de f en w .

Si ahora consideramos que $w = \infty$, se tiene que $f(\infty) = c$ con multiplicidad k si, y sólo si $f \circ J(0) = c$ admite un desarrollo en torno a 0 como el anterior, es decir, $f \circ J(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$ en un entorno de 0, o como suele escribirse,

$$f(z) = \sum_{n=k}^{-\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-k} a_{-n} z^n$$

en un entorno de ∞ . Por último, f puede poseer un polo de orden k en ∞ de tal manera que

$$f \circ J(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n z^n$$

o equivalentemente $f(z) = \sum_{n=-\infty}^k b_{-n} z^n$, y llamamos parte principal de f en ∞ a $\sum_{n=1}^k b_{-n} z^n$.

Los siguientes dos resultados ponen de manifiesto que las funciones meromorfas en Σ vienen determinadas por los polos y las partes principales en dichos puntos salvo constante aditiva o multiplicativa.

Proposición 1.12. Sean f, g funciones meromorfas en Σ con polos en los mismos puntos y con las mismas partes principales en estos polos. Entonces $f = g + c$ para alguna constante $c \in \mathbb{C}$.

Demostración. Basta considerar la función $h = f - g$, que es analítica ya que las partes principales en los polos de f, g son iguales y por lo tanto se anulan al tomar su diferencia. Pero entonces h es analítica y $h(\Sigma)$ es un compacto de \mathbb{C} , luego es acotado, y en virtud del teorema de Liouville se tiene que h es constante. \square

La versión multiplicativa es completamente análoga:

Proposición 1.13. Sean f, g funciones meromorfas con ceros y polos del mismo orden y en los mismos puntos de \mathbb{C} . Entonces $f = cg$ para algún $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración. Consideremos en este caso la función $h = f/g$, que por tener f y g ceros y polos del mismo orden en los mismos puntos, se tiene h es analítica y $h(\Sigma)$ es compacto de \mathbb{C} luego es constante, igual que en la proposición anterior. Además h no es idénticamente nula por no serlo f . \square

1.4. Funciones racionales

En lo sucesivo vamos a poder demostrar que, en definitiva, las funciones meromorfas definidas en Σ son de un solo tipo: cocientes de polinomios. Las propiedades algebraicas de éstos nos ayudarán a demostrar ciertas propiedades en cuanto a la multiplicidad de las soluciones que encontremos.

Definición 1.14. Decimos que f es una *función racional* si es de la forma p/q donde p, q son polinomios de coeficientes complejos y $q \neq 0$. Si $z \in \mathbb{C}$ y $q(z) \neq 0$, se tiene que $f(z) \in \mathbb{C}$. Si $z = \infty$ ó $q(z) = 0$, se define el valor de $f(z)$ como el límite en dicho punto, cuya existencia en Σ está garantizada. De esta manera f es una función de Σ en Σ .

Las funciones racionales forman un cuerpo que denotaremos por $\mathbb{C}(z)$. Como ocurría con las funciones meromorfas, podemos identificar las funciones racionales constantes con \mathbb{C} y se tiene que la suma y el producto de cocientes de polinomios está bien definido, así como la división siempre que el denominador sea distinto de 0.

Decimos que dos polinomios, p, q son coprimos si no existe un polinomio no constante que los divida a ambos. Podemos entonces considerar que $f = p/q$ está definido siempre como cociente de dos polinomios coprimos (basta cancelar los factores comunes, que por la continuidad de estas funciones no reportará problema alguno) y diremos que f es *irreducible*. De esta manera, en aquellos $z \in \mathbb{C}$ tales que $q(z) = 0$ se tendrá que $f(z) = \infty$.

El teorema fundamental del álgebra nos asegura además que podemos encontrar en \mathbb{C} todas las raíces de un polinomio con coeficientes en dicho cuerpo (en términos algebraicos, \mathbb{C} es algebraicamente cerrado). Podemos entonces escribir:

$$f(z) = c(z - \alpha_1)^{m_1}(z - \alpha_r)^{m_r}(z - \beta_1)^{-n_1}(z - \beta_s)^{-n_s},$$

donde $c \in \mathbb{C}$, α_i es un cero de orden m_i y β_i es un polo de orden n_i . Puesto que hemos elegido el cociente irreducible, no hay *información redundante*, en el sentido de que no hay ningún cero ni ningún polo repetido, $\alpha_i \neq \alpha_j, \beta_i \neq \beta_j$ si $i \neq j$, y los ceros y polos también son distintos.

En cuanto al comportamiento en ∞ , se tiene que existirá un cero en caso de que $\sum_{i=1}^r m_i > \sum_{i=1}^s n_i$, de orden precisamente $\sum_{i=1}^r m_i - \sum_{i=1}^s n_i$, habrá un polo en caso de que $\sum_{i=1}^r m_i < \sum_{i=1}^s n_i$, de orden $\sum_{i=1}^s n_i - \sum_{i=1}^r m_i$, y tomará el valor c cuando se dé la igualdad.

El siguiente resultado, fundamental para el estudio de las funciones meromorfas en Σ , nos da una equivalencia entre la condición algebraica de función racional y la condición de meromorfía:

Lema 1.15. Una función meromorfa y no constante $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ alcanza cada valor $c \in \mathbb{C}$ una cantidad finita de veces, contando multiplicidades.

Demostración. Dado $c \in \Sigma$ el conjunto $\{z \in \sigma\}$ tales que $f(z) = c$ es cerrado por la continuidad de f en dichos puntos. Luego es compacto y por ser también discreto, ha de ser finito. Además la multiplicidad en cada uno de estos puntos es finita. \square

Teorema 1.16. Sea $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$. Se tiene que f es racional si, y sólo si, es meromorfa.

Demostración. La discusión anterior sobre el comportamiento de f en ∞ evidencia que si f es racional, entonces es meromorfa en Σ .

Recíprocamente, supongamos que f es meromorfa. Sean $\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ sus polos en \mathbb{C} y $\{n_1, \dots, n_s\}$ sus respectivos órdenes. Se tiene entonces que:

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^s (z - \beta_i)^{n_i}$$

es analítica en \mathbb{C} y meromorfa en ∞ . Entonces g admite un desarrollo de la forma:

$$g = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots,$$

que por ser meromorfa en ∞ se deduce que ha de ser un desarrollo finito. Por lo tanto g es un polinomio y se tiene que f es racional. \square

Puesto que se ha probado que las funciones meromorfas en Σ son exactamente las funciones racionales, veremos que los grados de los polinomios que aparezcan en la representación irreducible de dicha función meromorfa juegan un papel importante en cuanto a la multiplicidad de las soluciones.

Definición 1.17. Sea f una función meromorfa, $f = p/q$ irreducible. Llamamos grado (u orden) de f al máximo de los grados de p y q . Lo denotaremos por $grad(f)$, igual que para el grado de los polinomios. Notemos que una función racional es constante si, y sólo si, su grado es 0.

Teorema 1.18. Sea $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ meromorfa de grado $d > 0$. Entonces f alcanza cada valor $c \in \Sigma$ exactamente d veces, contando multiplicidades.

Demostración. En primer lugar, denotemos $grad(q) = d_q$, $grad(p) = d_p$.

Supongamos $c = \infty$. Entonces ya sabemos que f lo alcanza en los ceros de q , que en total tienen multiplicidad d_q , y lo alcanza también en ∞ si $d_p > d_q$, con multiplicidad $d_p - d_q$. Entonces:

1. Si $d_p > d_q$, entonces $d = d_p$ y f alcanza ∞ d_q veces (contando multiplicidades) en \mathbb{C} y una vez con multiplicidad $d_p - d_q$ en ∞ , luego $d_p - d_q + d_q = d_p$ veces en Σ , que es precisamente d .
2. Si $d_q \geq d_p$, f sólo alcanza ∞ en los ceros de q , precisamente d_q veces, que es d .

Supongamos ahora que $c \neq \infty$, y consideremos la función racional

$$g = \frac{1}{f - c} = \frac{q}{p - cq}$$

que tiene polos precisamente en los puntos en los que f alcanza c del orden correspondiente al orden del cero.

Se tiene que $p - cq, q$ siguen siendo coprimos. Esto se debe a que si existiera un divisor común, h , entonces $p - cq = ah$, $q = bh$, de modo que $p = (a + bc)h$, luego p, q no serían coprimos. Luego $grad(f) = grad(g)$ y lo explicado anteriormente es aplicable a g . Se sigue que f alcanza c un total de d veces, contando multiplicidades. \square

Corolario 1.19. Sea $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ meromorfa y no constante. Entonces $f(\mathbb{C})$ es o bien todo \mathbb{C} o, a lo sumo, excluye un punto.

Corolario 1.20. Sea $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ racional de grado $d > 0$. Entonces f tiene una cantidad finita de puntos múltiples en Σ y $\#\{f^{-1}(c)\} = d, \forall c \in \Sigma$ salvo para dichos puntos, en los que $1 \leq \#\{f^{-1}(c)\} < d$.

Demostración. La primera parte es consecuencia de que la derivada de una función racional es racional, y tiene por tanto una cantidad finita de ceros y de polos en Σ . Puesto que los puntos múltiples son aquellos en los que se alcanza un cero de orden mayor o igual a 2, o aquellos polos de orden también mayor o igual a 2, la primera parte queda probada.

La segunda parte es consecuencia de que, puesto que sabemos que la cantidad de puntos donde se alcanza un determinado valor $c \in \Sigma$ es finita y las multiplicidades son finitas, se tiene que si $\{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ son dichos puntos con multiplicidades $\{k_1, k_2, \dots, k_p\}, k_i \geq 1$, se cumple que $\sum_{i=1}^p k_i = d$. Entonces $\#\{f^{-1}(c) = p\}$, que es menor que d siempre que haya algún $k_i \geq 2$. \square

Supongamos que tenemos una función meromorfa en $z \in \Sigma$. Definimos el *orden* de f en z como sigue:

$$\nu_z = \left\{ \begin{array}{l} k \text{ si } f \text{ posee un cero de orden } k \text{ en } z \\ -k \text{ si } f \text{ posee un polo de orden } k \text{ en } z \\ 0 \text{ en otro caso} \end{array} \right\}$$

Se tiene que para los valores $z \in \mathbb{C}$, el orden corresponde con el menor exponente en su desarrollo de Laurent en dicho valor, mientras que para ∞ corresponde al menor valor del desarrollo de $f \circ J$ en un entorno de 0. Puesto que sabemos que cualquier polinomio con coeficientes complejos puede ser factorizado totalmente en $\mathbb{C}[z]$, se tiene que $f(z) = c \prod_{w \in \mathbb{C}} (z - w)^{\nu_w}$.

Se tiene por último que si $f = p/q$, entonces $\nu_\infty = \deg(q) - \deg(p)$, de tal forma que $\nu_\infty = -\sum_{w \in \mathbb{C}} \nu_w$ o equivalentemente $\sum_{w \in \Sigma} \nu_w = 0$. Esto es importante en tanto que es una igualdad que se cumple en otras superficies compactas como el toro, del que nos ocuparemos más adelante.

Capítulo 2

Funciones elípticas

Habiendo contemplado y estudiado las funciones meromorfas en la esfera es el turno de otra superficie compacta de interés: el toro. Se verá que las funciones doblemente periódicas en \mathbb{C} son precisamente las funciones elípticas, y el espacio cociente de \mathbb{C} vía esta doble periodicidad es precisamente el toro, de ahí su estrecha relación.

2.1. Funciones periódicas y grupos topológicos

Es natural pensar en funciones periódicas en el dominio real: $\sin(x)$, $\cos(x)$ son los ejemplos más naturales de funciones periódicas y ambas tienen período 2π . En realidad, a partir de ellas es sencillo construir otras funciones de período no nulo: a saber, si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se tiene que $\sin(\frac{2\pi x}{a})$ es una función periódica de período a .

Nuestro interés es generalizar esta idea para el cuerpo complejo. El ejemplo más sencillo de función compleja periódica es e^z , de período $2\pi i$. La principal diferencia es que, puesto que \mathbb{C} tiene estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión 2, vamos a poder distinguir periodicidad en varias direcciones. Además, estos períodos llevan incorporada de forma natural una estructura de grupo que nos permitirá clasificarlos en 3 categorías distintas.

Definición 2.1. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que $w \in \mathbb{C}$ es un *período* de f si

$$f(z) = f(z + w) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Decimos entonces que f es periódica si $w \neq 0$. Llamaremos Ω_f al conjunto de todos los períodos de f .

El conjunto Ω_f posee algunas propiedades evidentes: $0 \in \Omega_f$ y si $\Omega_f = \mathbb{C}$ entonces f ha de ser constante. Además, si $\Omega_f = \{0\}$, f no es periódica.

Teorema 2.2. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función y Ω_f el conjunto de sus períodos. Entonces Ω_f es un subgrupo de $(\mathbb{C}, +)$.

Demostración. Comprobemos que se cumplen todas las propiedades de grupo:

- $0 \in \Omega_f$, ya que $f(z) = f(z + 0)$.

- Sean $w_1, w_2 \in \Omega_f$. Entonces $f(z + w_1 + w_2) = f((z + w_1) + w_2) = f(z + w_1) = f(z)$. Luego Ω_f es cerrado para la suma.
- Sea $w \in \Omega_f$. Entonces $f(z - w) = f((z - w) + w) = f(z - w + w) = f(z)$. Luego $-w \in \Omega_f$.

□

En lo sucesivo, vamos a trabajar con el grupo Ω_f y con el grupo cociente $(\mathbb{C}, +)/\Omega_f$ y el espacio que la relación de equivalencia módulo Ω_f genera: el toro. Por ello, es conveniente desarrollar un poco más algunos resultados que combinan esta estructura de grupo con la estructura topológica presente. Estos grupos se conocen como *grupos topológicos*.

Definición 2.3. Sea G un grupo y e su elemento neutro. Decimos que G es un grupo topológico si las aplicaciones de producto e inverso son continuas, es decir:

- $p : G \times G \rightarrow G, p(x, y) = xy$, p continua.
- $i : G \rightarrow G, i(x) = x^{-1}$, i continua.

Esta definición implica directamente que la aplicación i es un homeomorfismo por ser i^2 la identidad en G . Es más, fijado un punto y , podemos definir

$$p_y^d : G \rightarrow G, p_y^d(x) = xy.$$

Tanto esta aplicación *producto por y*, *y por la derecha* como $p_y^i(x) = yx$ por la izquierda son homeomorfismos. Esto nos permite concluir que en un grupo topológico, *todos los puntos son topológicamente equivalentes a cualquier otro*. Cada entorno abierto de cada punto es homeomorfo a un entorno abierto del elemento neutro de G . En resumidas cuentas, podemos remitirnos a los entornos de e e intentar explotar las propiedades que el elemento neutro posee.

Dado un grupo G , definimos entonces \mathbb{O} como el conjunto de todos los abiertos que contienen a e . De esta manera, si $x \in G$, $\{p_x(U), U \in \mathbb{O}\}$ es el conjunto de todos los abiertos que contienen a x . Además, \mathbb{O} posee otras buenas propiedades:

- Si $U, V \in \mathbb{O}$, entonces $UV \in \mathbb{O}$, entendiendo que $UV = \{u \cdot v, u \in U, v \in V\}$.
- Si $U \in \mathbb{O}$, entonces $U^{-1} = \{u^{-1}, u \in U\}$ pertenece a \mathbb{O} . Además, si $U = U^{-1}$, decimos que U es simétrico.

Estos conjuntos abiertos son interesantes porque permiten estudiar topológicamente el grupo topológico fijándonos solamente en lo que ocurre en torno al elemento neutro. De entre estos conjuntos, son especialmente interesantes los simétricos. El siguiente resultado da cuenta de cómo podemos "leer" los abiertos del grupo topológico en términos de estos abiertos simétricos de \mathbb{O} :

Definición 2.4. Decimos que $A \subset \mathbb{C}$ es un *subespacio discreto* si $\forall z \in A$ existe un abierto U_z de \mathbb{C} tal que $A \cap U_z = \{z\}$. Decimos que A es *aislado* si su conjunto derivado, (el dado por los puntos de acumulación) $A' = \emptyset$.

Teorema 2.5. Sea $A \subset \mathbb{C}$. A es aislado si, y sólo si, es discreto y cerrado.

Demostración. Supongamos que $A' = \emptyset$. Sea $x \in \bar{A}$. Para cada U abierto, $x \in U$, $U \cap A \neq \emptyset$. Puesto que $x \notin A'$, existe un abierto V , $x \in V$ tal que $V \cap A \subset \{x\}$. Puesto que la intersección es no vacía, $x \in A$ luego es cerrado. Que sea discreto es inmediato.

Recíprocamente supongamos A es discreto y cerrado. Sea $x \in A'$. Por lo tanto para cada U abierto que contenga a x , $(U \cap A) \setminus \{x\}$ es no vacío. Por ser A cerrado, $x \in A$ y por ser discreto, existe V abierto que contiene a x tal que $V \cap A = \{x\}$ en contra de que $x \in A'$. □

Este concepto de subespacio topológico discreto es importante porque los grupos de períodos de funciones meromorfas no constantes son discretos. Además, por la propiedad de los ceros aislados para funciones meromorfas no constantes, veremos que Ω_f es hecho un subespacio aislado.

Lema 2.6. Sea $U \in \mathbb{O}$. Entonces existe un $V \in \mathbb{O}$ simétrico tal que $VV \subset U$.

Demostración. De la definición de grupo topológico, se sigue que $p^{-1}(U)$ es abierto en $G \times G$ y $(e, e) \in p^{-1}(U)$. Esto implica que existen dos abiertos, W_1, W_2 , entornos de e tales que

$$W_1 \times W_2 \subset p^{-1}(U), \quad W_1 W_2 \subset U.$$

Llamando $W = W_1 \cap W_2$ y tomando $V = W \cap W^{-1}$, se tiene que $V \in \mathbb{O}$, es simétrico y $VV \subset U$. Es claramente no vacío porque $e \in V$. □

Teorema 2.7. Sea G un grupo topológico de Hausdorff y H un subgrupo de G . Supongamos además que H es discreto como subespacio del espacio G . Entonces H es cerrado. Por lo tanto, la intersección de H con conjuntos compactos es finita.

Demostración. Por ser H subgrupo, $e \in H$. Existe U abierto tal que $U \cap H = \{e\}$. Existe además V entorno de e , simétrico y tal que $VV \subset U$. Sea $z \in \bar{H}$. Veamos que $p_z(V) \cap H$ es unipuntual.

Si hubiera dos elementos en esa intersección, h_1, h_2 , verificarían:

$$h_1 = zv_1, h_2 = zv_2 \Rightarrow h_1^{-1}h_2 = v$$

donde v_1, v_2 y $v = v_1^{-1}v_2$ pertenecen a V . Pero $H \cap V = \{e\}$ luego $h_1 = h_2$. Por ser G de Hausdorff, podemos tomar un entorno W de z disjunto con h . Entonces $W \cap p_z(V)$ es abierto, contiene a z y puesto que la intersección de ese entorno con H es no vacía ($z \in \bar{H}$) se concluye que $z \in H$ luego H es cerrado.

Además $\{p_x(V)\}_{x \in H}$ es una familia de abiertos disjuntos que recubre H . La intersección con un compacto es compacta y necesariamente es finita. □

Corolario 2.8. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa y Ω_f el conjunto de sus períodos. Entonces Ω_f es un subespacio aislado de \mathbb{C} si, y sólo si, f es no constante.

Corolario 2.9. En un grupo topológico compacto, cualquier subgrupo discreto es finito.

En definitiva, tenemos que el grupo asociado a los períodos de una función f meromorfa y no constante es un subgrupo discreto y cerrado de \mathbb{C} . Esto nos va a permitir clasificar todas las posibilidades para Ω_f :

Teorema 2.10. Sea G un subgrupo discreto de $(\mathbb{C}, +)$. Entonces G es isomorfo a alguno de los siguientes grupos:

1. $\{0\}$.
2. \mathbb{Z} , es decir, existe $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $G = \{nw, n \in \mathbb{Z}\}$.
3. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, es decir, existen $w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y linealmente independientes¹ sobre \mathbb{R} tales que $G = \{nw_1 + mw_2, n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Demostración. El resultado contempla la posibilidad de que G sea el grupo trivial. Supongamos entonces que existe un $w \in G \setminus \{0\}$. Nuestro primer paso será demostrar que existe un elemento de $G \setminus \{0\}$ de módulo mínimo. Llamaremos $G' := G \setminus \{0\}$ a fin de agilizar la notación.

La bola $\overline{B}(0, |w|)$ es compacta y por lo tanto la intersección con G' es finita y no vacía. Podemos entonces tomar un elemento de módulo mínimo: w_0 . Hay que tener presente que esta elección no es única ya que al menos $-w_0$ también es un candidato válido.

Consideramos a continuación $L = \{\mu w_0, \mu \in \mathbb{R}\}$, la recta generada por w_0 . Está claro que $\{nw_0, n \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo contenido en L y en G . Existen entonces dos posibilidades:

1. $G \subset L$, en cuyo caso $G = \{nw_0, n \in \mathbb{Z}\}$. Esto se sigue de que si existiera un $w \in G, w \notin \{nw_0, n \in \mathbb{Z}\}$, existe un n tal que $w = \lambda w_0$, y $|\lambda - n| \leq \frac{1}{2}$, luego $w - nw_0$ pertenecería a G' pero

$$|w - nw_0| = |\lambda w_0 - nw_0| \leq \frac{1}{2}|w_0|,$$

yendo en contra de la minimalidad de su módulo.

2. Si $G \not\subset L$ tomamos $w \in G \setminus L$ y razonamos ahora con

$$(\overline{B}(0, |w|) \cap G') \setminus L$$

que es finito y no vacío. Podemos seleccionar un nuevo w_1 de módulo mínimo, que necesariamente es linealmente independiente de w_0 ya que hemos eliminado precisamente L . En este caso, veamos que necesariamente

$$G = \{nw_0 + mw_1, n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Nuevamente, supongamos que existe un $w \in G, w \notin \{nw_0 + mw_1, n, m \in \mathbb{Z}\}$. De la independencia lineal de w_0, w_1 , sabemos que $w = \alpha w_0 + \beta w_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Podemos entonces tomar los valores n, m tales que

¹La condición de independencia lineal sobre \mathbb{R} puede expresarse como sigue: w_1, w_2 son linealmente independientes sobre \mathbb{R} si, y sólo si, son no nulos y $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$.

$$|\alpha - n| \leq \frac{1}{2} \text{ y } |\beta - m| \leq \frac{1}{2}.$$

Se tiene que $w - nw_0 - mw_1$ que pertenece a G' , pero

$$|w - nw_0 - mw_1| = |\alpha w_0 + \beta w_1 - nw_0 - mw_1| < \frac{1}{2}|w_0| + \frac{1}{2}|w_1|,$$

donde el menor estricto se sigue de la independencia lineal. Por último, por la selección de w_0, w_1 se cumple que $|w_0| \leq |w_1|$ y podemos acotar finalmente $|w - nw_0 - mw_1| < |w_1|$, llegando a una contradicción como en el caso anterior.

Los isomorfismos con $\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ respectivamente son los dados por los conjuntos $\{nw_0, n \in \mathbb{Z}\}$ y $\{nw_0 + mw_1, n, m \in \mathbb{Z}\}$. \square

Hemos por tanto clasificado todos los posibles grupos asociados a la periodicidad de las funciones meromorfas. Esto a su vez nos va a permitir clasificar a dichas funciones:

Definición 2.11. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \Sigma$ una función meromorfa. Diremos que f es *no periódica* si Ω_f es el grupo trivial, que f es *simplemente periódica* si Ω_f es isomorfo a \mathbb{Z} y que f es *doblemente periódica* o *elíptica* si Ω_f es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. En este último caso diremos que Ω_f es un retículo, y cualquier par de $w_0, w_1 \in \mathbb{C}$ tales que $\Omega_f = \{nw_0 + mw_1, n, m \in \mathbb{Z}\}$ diremos que forman una base de Ω_f .

Estos resultados serán útiles y de interés para las secciones siguientes, en las que los subgrupos de \mathbb{C} son esenciales.

2.2. Retículos y regiones fundamentales: El toro

Habiendo hecho un breve estudio de las regiones en donde es natural restringir los dominios de funciones simplemente periódicas, las bandas verticales, centramos ahora nuestra atención en las regiones para las funciones elípticas.

Hemos definido retículo como el conjunto Ω_f para funciones elípticas, es decir, cuando $\Omega_f \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Queremos entonces estudiar a qué subconjuntos de \mathbb{C} podemos restringirnos a la hora de estudiar estas funciones. A diferencia de lo que pasaba con las funciones simplemente periódicas, cuyas bandas eran esencialmente todas iguales, podemos encontrar distintos tipos de regiones donde esta identificación sea posible. Antes de eso, debemos estudiar las bases de estos retículos.

Dada una función elíptica y una base de su retículo, $\{w_1, w_2\}$, es claro que $\{w_1, w_1 + w_2\}$ también es una base. Esto se deduce de que para cada $z \in \Omega_f$, si z admite una expresión de la forma $z = nw_1 + mw_2$, entonces también puede escribirse como $z = (n - m)w_1 + m(w_1 + w_2)$. En general, si s_1, s_2 es otra base de Ω_f , debe existir una transformación de la forma:

$$s_1 = aw_1 + bw_2$$

$$s_2 = cw_1 + dw_2$$

Además, a, b, c, d han de ser enteros. El siguiente teorema muestra cuáles son los posibles cambios de base:

Teorema 2.12. Con la notación anterior, $\{s_1, s_2\}$ definen una nueva base de Ω_f si, y sólo si, $ad - bc = \pm 1$.

Demostración. Es conveniente escribir esta transformación matricialmente:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

donde, claro,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, si el $\det(M) = \pm 1$, entonces la transformación es invertible y

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto ambos conjuntos se pueden expresar como combinaciones lineales con coeficientes en \mathbb{Z} de elementos del otro conjunto, luego son iguales.

Recíprocamente, supongamos que dada la transformación

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

define efectivamente una nueva base. Entonces, ha de existir otra transformación que podemos resumir matricialmente en N tal que

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

Pero entonces se deduce que $NM = MN$ e iguales a la matriz identidad.

De aquí se deduce que el determinante de estas matrices ha de ser una unidad de \mathbb{Z} , que sólo son ± 1 , luego $ad - bc = \pm 1$. □

Estudiadas las bases para el retículo, definimos a continuación una relación que nos permitirá identificar \mathbb{C} vía el cociente por el subgrupo Ω .

Definición 2.13. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, diremos que son congruentes si $z_1 - z_2 \in \Omega$. La relación de congruencia es de equivalencia. Escribiremos las clases indistintamente por $[z]$ ó $z + \Omega$. Diremos que dos elementos congruentes están en la misma órbita de Ω y las órbitas son por tanto iguales que las clases $z + \Omega$.

Dada la relación de equivalencia definida, se define a continuación un tipo de subconjuntos de \mathbb{C} en los que vamos a tener toda la información resumida, poseyendo un único elemento de cada clase salvo en el borde:

Definición 2.14. Decimos que un subconjunto P de \mathbb{C} es una región fundamental si:

- Es cerrado y conexo.
- Para cada clase de \mathbb{C}/Ω existe algún representante en P .
- En el interior de P los puntos pertenecen a clases disjuntas.²

Proposición 2.15.

Son especialmente interesantes las regiones fundamentales que geoméricamente son polígonos. La más inmediata resulta ser la definida por el paralelogramo que se forma con una base de Ω .

Las condiciones anteriores fuerzan a que la acción de Ω sobre \mathbb{C} natural que respeta las clases, dada por $\{t_w(z) = z + w, w \in \Omega\}$ recubra el plano al aplicarse sobre P recorriendo todo Ω , de forma disjunta salvo por los bordes, que se solapan. Esta forma de recubrir el plano se conoce como teselación.

Otra manera de construir regiones fundamentales consiste en seccionar partes del borde junto con parte del interior de la región fundamental y "pegarlo" por el lado equivalente del borde.

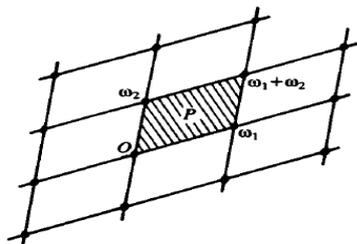


Figura 2.1: Teselación de \mathbb{C} .

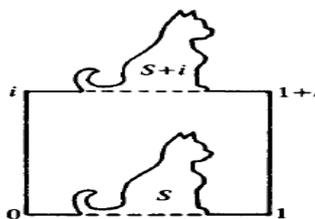


Figura 2.2: Paralelogramo fundamental modificado.

Otro ejemplo de regiones fundamentales son las *regiones de Dirichlet*, que dan lugar a polígonos. Estas regiones se caracterizan por ser las que se definen en torno al origen, minimizando la distancia al 0:

Definición 2.16. Llamamos región de Dirichlet asociada al retículo Ω a

$$D(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tales que } |z| \leq |z - w| \forall w \in \Omega\}.$$

Proposición 2.17. $D(\Omega)$ es un polígono fundamental.

Demostración. En primer lugar veamos que es convexo y cerrado. Eso es fruto de ser intersección de conjuntos convexos y cerrados. En efecto, para $w = 0, |z| \leq |z - 0|$ trivialmente. Para cualquier otro valor de $\Omega \setminus \{0\}$ la desigualdad define un semiplano cerrado, que es convexo y cerrado. Las intersecciones definen por tanto un conjunto convexo y cerrado.

Para ver que es un polígono, falta ver que estamos considerando una cantidad finita de semiplanos. La desigualdad planteada es equivalente a lo siguiente:

$$|z| \leq |z - w| \iff \langle z, w \rangle \leq \frac{1}{2}|w|^2,$$

²Esto no quiere decir que haya un único elemento de cada clase en el interior de P, es menos restrictivo: indica que las clases que aparezcan en el interior lo hagan una única vez.

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar de los vectores $z, w \in \mathbb{R}^2$.

Esto ocurre siempre si $|z| \leq |w|/2$ para todo $w \in \Omega'$, que define un entorno de 0 por tener Ω' cota inferior positiva. Fijada una base w_1, w_2 , cada $w = nw_1 + mw_2$ verifica

$$|w|^2 = |n|^2|w_1|^2 + |m|^2|w_2|^2 + 2mn\langle w_1, w_2 \rangle.$$

Puesto que w_1, w_2 no están alineados, existe $\alpha < 1$ tal que $|\langle w_1, w_2 \rangle| \leq \alpha|w_1||w_2|$. Entonces

$$|w|^2 \geq (1 - \alpha)(n^2|w_1|^2 + m^2|w_2|^2).$$

Además $|\langle z, w \rangle| \leq |z|(|n||w_1| + |m||w_2|)$ luego si

$$|z| \leq \frac{1 - \alpha}{2} \frac{n^2|w_1|^2 + m^2|w_2|^2}{|n||w_1| + |m||w_2|}$$

la desigualdad que define el semiplano se cumple. Podemos afinar más, ya que $(|n||w_1| + |m||w_2|)^2 \leq 2(n^2|w_1|^2 + m^2|w_2|^2)$ luego tomando z tal que

$$|z| \leq \frac{1 - \alpha}{4} (|n||w_1| + |m||w_2|)$$

se verifica la desigualdad. Pero si esto se cumple para n_0, m_0 entonces se verifica también para cada pareja m, n tal que $|m| \geq |m_0|, |n_0| \geq |n|$ por lo que basta que se cumpla para una cantidad *finita* de puntos del retículo.

Consideremos ahora un $z \in \mathbb{C}$ y sea z_0 el elemento de módulo mínimo en la órbita de z . Entonces $|z_0| \leq |z_0 - w|$ para cualquier $w \in \Omega$ y por lo tanto $z_0 \in D(\Omega)$. Luego existe al menos un representante de cada clase en $D(\Omega)$. De hecho, si se da la igualdad, entonces o bien z_0 pertenece al borde de $D(\Omega)$ y $-z_0$ también pertenece a $D(\Omega)$, o bien no pertenece ninguno.

Además, si consideramos un punto del interior, los que aparecen con la desigualdad estricta, no puede haber otro relacionado con él y por lo tanto es el único representante de su clase.

Por lo tanto es cerrado, convexo y cumple las condiciones sobre los representantes de las clases y se tiene que $D(\Omega)$ es una región fundamental. Por la construcción, es un polígono fundamental. \square

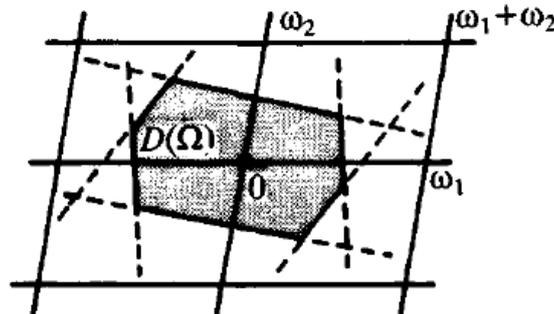


Figura 2.3: Ejemplo de región de Dirichlet.

A continuación y tras haber visto algunos ejemplos de regiones fundamentales y cómo construirlas, veamos otro resultado importante sobre las regiones fundamentales,

sobre el área que encierran. Denotaremos por $\mu(A)$ al área de un subconjunto A de \mathbb{C} .

El resultado es verdadero para una amplia variedad de regiones fundamentales *que se comporten razonablemente bien*. Por simplicidad, se incluye la demostración sólo para polígonos:

Proposición 2.18. Sean P_1, P_2 dos polígonos fundamentales para Ω . Entonces $\mu(P_1) = \mu(P_2)$, donde μ denota la medida de Lebesgue.

Demostración. Lo primero que debemos notar es que para cada $w \in \Omega$, si denotamos por $t_w(z) = z + w$, entonces t_w es una isometría biyectiva. Por lo tanto dada una teselación, todas las "teselas" son necesariamente de igual medida.

Denotemos por A_1, A_2 a los interiores de P_1, P_2 respectivamente. Es claro, dado que estamos trabajando con polígonos, que $\mu(P_i) = \mu(A_i)$. Entonces $\cup_{w \in \Omega} P_1 \cap t_w(A_2) \subset P_1$ y puesto que A_2 es el interior de una región fundamental, se tiene que los conjuntos $P_1 \cap t_w(A_2)$ son disjuntos. Luego, dadas las contenciones:

$$\mu(P_1) \geq \sum_{w \in \Omega} \mu(P_1 \cap t_w(A_2)).$$

Puesto que t_w es una isometría para cada $w \in \Omega$, podemos aplicar t_{-w} y obtener $t_{-w}(P) \cap A_2$. Además, puesto que se recorren todos los elementos de Ω ,

$$\mu(P_1) \geq \sum_{w \in \Omega} \mu(t_w(P_1) \cap A_2).$$

Hemos por tanto llevado las transformaciones vía t_w a la región P_1 , que por ser región fundamental cumple que $\cup_{w \in \Omega} t_w(P_1) = \mathbb{C}$, luego $\cup_{w \in \Omega} (t_w(P_1) \cap A_2) = A_2$. Se tiene finalmente que $\mu(P_1) \geq \sum_{w \in \Omega} \mu(t_w(P_1) \cap A_2) \geq \mu(A_2) = \mu(P_2)$. Sin más que invertir los papeles de P_1, P_2 , se obtiene el resultado buscado. \square

Habiendo estudiado ya algunas propiedades de estas regiones fundamentales y haciendo especial énfasis en los polígonos, podemos estudiar el dominio natural para las funciones elípticas: el toro.

Sabemos que si una función es doblemente periódica y conocemos su retículo Ω , entonces es suficiente conocer el comportamiento de dicha función en el paralelogramo dado por los extremos $0, w_1, w_2, w_1 + w_2$, donde w_1, w_2 son los de módulo mínimo que se definieron apropiadamente en 2.10. En los bordes de esta región fundamental han de tenerse en cuenta además las condiciones de periodicidad que definen además una orientación determinada así como la equivalencia de los 4 vértices. El cociente en este paralelogramo consistente en identificar los bordes como se ha indicado es el toro, \mathbb{T} .

Teorema 2.19. \mathbb{T} es homeomorfo a \mathbb{C}/Ω , donde en \mathbb{C}/Ω se considera la topología de subespacio heredada de \mathbb{C} .

Demostración. Denotemos por $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ la aplicación de paso al cociente y sea P el paralelogramo fundamental dado por $0, w_1, w_2, w_1 + w_2$. Identifiquemos \mathbb{T} con el cociente en este paralelogramo, vía el homeomorfismo evidente con el cuadrado unidad sobre el que se suele definir \mathbb{T} . Notemos que \mathbb{T} lo estamos viendo como un espacio cociente.

\mathbb{T} por tanto es compacto y también lo es \mathbb{C}/Ω porque $\mathbb{C}/\Omega = c(P)$. Basta por lo tanto que exista una aplicación biyectiva y continua entre ellos. Consideremos

$$\Phi : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{T}, \quad \Phi(z) = \bar{z}^{\mathbb{T}}.$$

Está bien definida pues la relación de equivalencia en P con que identificamos \mathbb{T} es la restricción de la relación módulo Ω en \mathbb{C} a P . Es por tanto sobreyectiva. Además es inyectiva porque si $[z] \neq [w]$ entonces tienen representantes distintos en P y por lo tanto $z^{\mathbb{T}} \neq w^{\mathbb{T}}$. □

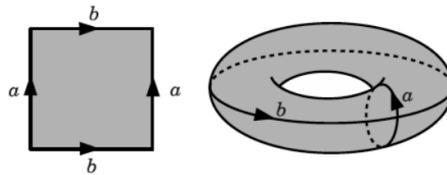


Figura 2.4: Construcción habitual de \mathbb{T} desde el cuadrado unidad.

2.3. Propiedades de las funciones elípticas

Tras lo comentado en el apartado anterior, podemos entender las funciones elípticas no sólo como funciones meromorfas de Σ en Σ equipadas con la condición de periodicidad que las define, sino directamente como funciones de \mathbb{T} en Σ . La compacidad del toro nos permitirá recuperar ciertos resultados sobre funciones meromorfas en la esfera.

Definición 2.20. Llamaremos $E(\Omega)$ al cuerpo de las funciones elípticas con retículo Ω . Este cuerpo es una extensión natural de \mathbb{C} que se puede identificar con las funciones elípticas constantes.

El siguiente teorema nos ofrece una información similar a la que se probó para funciones meromorfas en la esfera sobre funciones elípticas. En definitiva, nos indica que hay ciertas condiciones que determinan las funciones elípticas.

Teorema 2.21. Sean f, g funciones elípticas con respecto del mismo retículo Ω . Entonces, se verifica:

- Si tienen los mismos polos y las mismas partes principales en torno a dichos polos entonces $f(z) = g(z) + c, c \in \mathbb{C}$.
- Si tienen polos y ceros del mismo orden en los mismos puntos respectivamente entonces $f = cg, c \in \mathbb{C}$.

Demostración. Basta darse cuenta de que $f - g, f/g$ son elípticas y por las hipótesis en cada caso son analíticas luego son constantes. En el segundo apartado ha de notarse que por hipótesis, si g fuera idénticamente nula también lo sería f y el enunciado se cumpliría trivialmente. □

Consideremos entonces f una función elíptica con respecto de un retículo Ω y sea $c \in \Sigma$. Sabemos que las soluciones de $f(z) = c$ son aisladas y que cada solución tiene la misma multiplicidad, finita. En este sentido sólo estamos fijándonos en el carácter meromorfo de f . Ahora, dado P un paralelogramo fundamental para f , por ser compacto ha de tener una cantidad finita de estas soluciones y al menos un representante de cada una de las soluciones. Queremos además que estas soluciones estén en el interior de un polígono para poder recorrer el borde, que llamaremos ∂P , y que sea un camino sin polos ni ceros. Esto viene garantizado por el siguiente resultado:

Lema 2.22. Sean $[\alpha_1], [\alpha_2], \dots, [\alpha_n], [\beta_1], [\beta_2], \dots, [\beta_s]$ respectivamente las clases de ceros y polos de una función elíptica f . Entonces existe un polígono que contiene un representante de cada clase en su interior y por lo tanto ninguno en la frontera.

Demostración. Consideremos el polígono fundamental dado por los vértices $0, w_0, w_1, w_0 + w_1$. Por ser polígono, contiene al menos a un representante de cada clase. Tomemos un único representante de cada clase y excluyamos aquellos que están en el borde. Los puntos restantes en el interior definen un conjunto compacto, por ser finito, y por lo tanto existe un punto de éstos que minimiza la distancia al borde. Sea esta distancia $\epsilon > 0$ ya que hemos excluido los puntos del borde precisamente. Entonces el polígono

$$P + \frac{\epsilon}{2} \frac{w_0 + w_1}{|w_0 + w_1|}$$

contiene a todos los anteriores y a un único representante de cada uno de los que estaban en el borde. \square

Trasladando P a $P + t$ para algún $t \in \mathbb{C}$ podemos suponer que no hay soluciones en el borde de P , que denotaremos por ∂P . Por lo tanto todas las soluciones están en el interior de P . Denotemos por z_1, z_2, \dots, z_n a dichas soluciones y por k_1, k_2, \dots, k_n sus multiplicidades. Puesto que hemos llevado las soluciones al interior del paralelogramo, no hay ninguna "repetida", en el sentido de que $[z_i] \neq [z_j]$ si $i \neq j$. Si $\sum_{i=1}^n k_i = m$, diremos que $f(z) = c$ tiene m soluciones, contando multiplicidades. Definimos asimismo el *orden* de f como el número de soluciones de $f(z) = \infty$. *Esta elección de polos y multiplicidades, paralelogramo fundamental y la notación empleada serán comunes en lo sucesivo, salvo que se indique lo contrario.*

Teorema 2.23. Sea f una función elíptica y m su orden. Entonces f es constante si, y sólo si, $m = 0$.

Demostración. Si f es elíptica es meromorfa y si además es constante entonces no tiene polos y $m = 0$. Recíprocamente, supongamos que f no tiene polos. Se tiene que $f(\mathbb{C}) = f(P)$, pero P es compacto luego su imagen es un compacto de Σ , pero al no tener polos ese compacto está contenido en \mathbb{C} luego f es acotada y por el teorema de Liouville es constante. \square

Corolario 2.24. Una función elíptica y analítica es constante.

Podemos incluso dar condiciones sobre los residuos de funciones elípticas:

Teorema 2.25. La suma de los residuos de f en P es 0.

Demostración. Hemos elegido P de forma adecuada para poder asegurar que f es meromorfa en P pero analítica en un entorno de ∂P . Se tiene entonces que $\int_{\partial P} f(z)dz$ es la suma de los residuos de f en los polos que haya en P . Pero basta darse cuenta de que los lados opuestos de P recorren puntos equivalentes con orientación opuesta y por lo tanto la integral vale 0. □

Corolario 2.26. No hay funciones elípticas con orden igual a 1.

Demostración. Si hay un único polo de orden 1 la suma de los residuos no puede anularse por tener un sólo sumando no nulo, pero la integral de línea ha de valer 0 y se llega a una contradicción. □

Los resultados anteriores nos alejan la posibilidad de construir funciones elípticas "sencillas". Es de hecho un problema construir funciones elípticas puesto que las exigencias son elevadas. A continuación se incluyen resultados sobre la multiplicidad de las soluciones y el orden de una función elíptica, similares a los que se probaron para funciones meromorfas en el primer capítulo.

Teorema 2.27. Sea f una función elíptica con orden $m > 0$. Entonces alcanza cada $c \in \Sigma$ exactamente m veces contando multiplicidades.

Demostración. Si tomamos $c = \infty$ entonces el aserto es cierto puesto que es la definición de orden de f . Por lo tanto, supongamos $c \in \mathbb{C}$.

En un paralelogramo la cantidad de polos de f es finita y la cantidad de puntos tales que $f = c$ también. Podemos entonces desplazar P para suponer que $f - c$ es analítica y no nula en δP luego $f'/(f - c)$ es también analítica en ∂P . Se tiene además que por ser f elíptica, lo son f' y $f'/(f - c)$. Podemos entonces aplicar el teorema A.1 y concluir que

$$\int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z) - c} dz = 0.$$

Basta ahora atender a que $f'/(f - c)$ tiene polos allí donde $f - c$ tiene polos o ceros. Sabemos que con esta construcción el cociente tiene de hecho un residuo de valor k allí donde tuviera un cero de ese orden y tiene un residuo de $-k$ donde tuviera un polo de ese orden. Puesto que la suma ha de ser 0, el cociente tiene m ceros contando multiplicidades. □

Lema 2.28. Sea f una función meromorfa. Sea u una función analítica y sea γ un camino cerrado y simple en \mathbb{C} tal que f es analítica en γ . Sean Z_γ, P_γ respectivamente las clases de ceros y polos de f contenidos en el dominio que tiene por borde la imagen de γ . Si denotamos por m_z el orden de un $z \in Z_\gamma$ y por n_w el orden de un polo de un $w \in P_\gamma$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma u(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \in Z_\gamma} m_z u(z) - \sum_{w \in P_\gamma} n_w u(w).$$

Demostración. Lo que aparece en la integral es una función meromorfa y analítica en δP . Estudiemos los residuos de esa función.

Puesto que u es analítica, sólo habrá polos en los puntos en los que presente f'/f . Estos puntos son los polos y los ceros de f . Si z_0 es un cero de orden $m \geq 1$ entonces $f(z) = g(z)(z - z_0)^m$ en un entorno de z_0 con g analítica y no nula en un entorno de z_0 . Por lo tanto

$$u(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = u(z) \frac{g'(z)}{g(z)} + u(z) \frac{m}{(z - z_0)^{-1}}.$$

Por ser u, g analíticas g distinta de 0 en un entorno de z_0 , el primer sumando no presenta residuo en z_0 mientras que el segundo presenta un residuo igual a $mu(z_0)$.

Razonando de forma análoga con un polo w_0 de orden $n \geq 1$, se obtiene un residuo igual a $-nu(w_0)$. Reuniendo todos estos puntos se deduce el resultado. \square

Teorema 2.29 (de congruencia de órdenes de ceros y polos). Sean $[\alpha_1], \dots, [\alpha_s], [\beta_1], \dots, [\beta_t]$ respectivamente las clases de los ceros y los polos de una función elíptica f , de órdenes $n_1, \dots, n_s, m_1, \dots, m_t$. Entonces $\sum_{i=1}^{i=s} n_i \alpha_i \sim \sum_{i=1}^{i=t} m_i \beta_i \pmod{\Omega}$.

Demostración. Podemos aplicar el resultado anterior a $u(z) = z$ en un polígono adecuado. Este polígono encerrará unos representantes de los polos y ceros $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s$. Por otro lado, utilizando las propiedades de periodicidad de f se obtiene que la integral se anula, luego $\sum_{i=1}^{i=t} m_i \beta_i - \sum_{i=1}^{i=s} n_i \alpha_i = 0$ y, cambiando α_i ó β_j por cualquier otro representante, se obtiene que $\sum_{i=1}^{i=s} n_i [\alpha_i] \sim \sum_{i=1}^{i=t} m_i [\beta_i]$. \square

2.4. La ecuación de $\wp(z)$

Se ha mostrado que no es sencillo construir funciones elípticas no constantes. De hecho, se ha probado que cualquier función elíptica ha de tener orden al menos 2. Siguiendo tal vez esta idea, Karl Weierstrass encontró una función elíptica particular para cada retículo Ω , de orden 2 y con la que será posible construir todas las demás.

Para esta sección será necesario también disponer de herramientas sobre la convergencia de series. Algunos de los resultados necesarios, por generales sobre la convergencia de series de funciones, se incluyen en el Apéndice A. El problema de ordenar los elementos de Ω se aborda a continuación.

Consideremos una base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ de Ω . Notemos además que por ser $\Omega \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se tiene que Ω es numerable. Aunque poco intuitivo, se procede como sigue: $w_0 = 0$. Ahora, consideramos los puntos de "una capa exterior", es decir, aquellos que pueden escribirse como $nw_1 + mw_2, n, m \in \mathbb{Z}, \max(|n|, |m|) = 1$, es decir aquellos que se pueden escribir como combinación de enteros de módulo 1 como mucho y ambos no nulos. La siguiente "capa" será aquella en la que $\max(|n|, |m|) = 2$ y en general, para $k \geq 1, \mathcal{C}_k = \{nw_1 + mw_2, n, m \in \mathbb{Z}, \max(|n|, |m|) = k\}$. Cada una de estas capas tiene una cantidad finita de elementos de Ω por ser compacta. De hecho, puesto que todos los puntos de la capa \mathcal{C}_k pueden expandirse hacia la siguiente \mathcal{C}_{k+1} sin más que tomar $n + 1$ en los puntos $(n, m)_{\mathcal{B}}, n = k$ ó $n - 1$ si $n = -k$, y lo mismo para m , se tiene que los puntos que no eran esquinas³ se expanden hacia uno sólo y las esquinas se expanden hacia dos posibles, luego se añaden 4 puntos. La inclusión

³Las esquinas son los puntos $(n, m) \in \mathcal{C}_k$ tales que $|n| = |m| = k$. Es claro viendo la figura.

de las nuevas esquinas incluye otros 4 puntos y en total $\#\mathcal{C}_{k+1} = \#\mathcal{C}_k + 8$, dando lugar a la secuencia 8, 16, 24, ... que empezaría en 1 si tomamos $\mathcal{C}_0 = \{0\}$. Luego $\#\mathcal{C}_k = 8k, k > 0$.

Hemos ordenado por tanto el conjunto de las capas y ahora, en cada una, podemos ordenar los puntos recorriendo el siguiente orden, desde la esquina $(n, m) = (k, k)$:

$$\begin{array}{llll}
 w_{k,1} = (k, k)_{\mathcal{B}}, & w_{k,2} = (k, k-1)_{\mathcal{B}}, & \dots & w_{k,2k} = (k, -k+1)_{\mathcal{B}} \\
 w_{k,2k+1} = (k, -k)_{\mathcal{B}} & w_{k,2k+2} = (k-1, -k) & \dots & w_{k,4k} = (-k+1, -k)_{\mathcal{B}} \\
 w_{k,4k+1} = (-k, -k)_{\mathcal{B}} & w_{k,4k+2} = (-k, -k+1)_{\mathcal{B}} & \dots & w_{k,6k} = (-k, k-1)_{\mathcal{B}} \\
 w_{k,6k+1} = (-k, k)_{\mathcal{B}} & w_{k,6k+2} = (-k+1, k)_{\mathcal{B}} & \dots & w_{k,8k} = (k-1, k)_{\mathcal{B}}.
 \end{array}$$

Esto define un orden para los elementos de Ω .

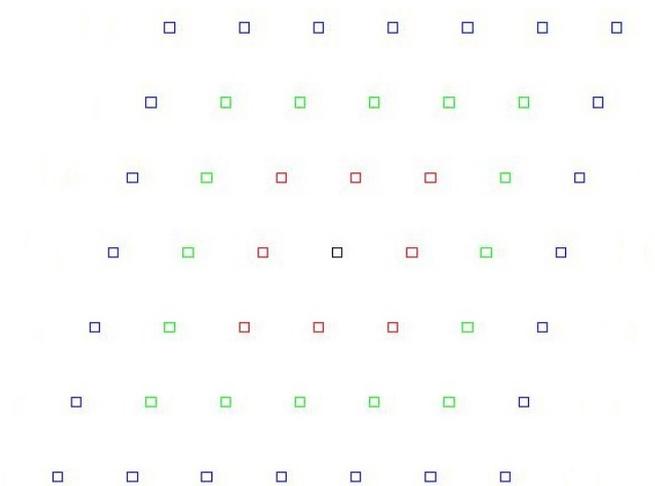


Figura 2.5: Representación de C_k para $k = 0, 1, 2, 3$.

Definición 2.30. Sea Ω un retículo, $\Omega' = \Omega \setminus \{0\}$. Definimos la función de Weierstrass

$$\wp_{\Omega}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Omega'} \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}.$$

Proposición 2.31. Sea \wp la función de Weierstrass asociada al retículo Ω . Entonces, se verifican:

1. \wp está bien definido para $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, converge en los compactos contenidos en $\mathbb{C} \setminus \Omega$ y presenta polos de orden 2 en los puntos de Ω y $\wp'(z)$ los presenta en los mismos puntos y de orden 3.
2. \wp es par y $\wp'(z)$ es impar.
3. $\wp, \wp'(z)$ son elípticas y su retículo es precisamente Ω .

Demostración. 1. Sea z un elemento de un compacto K contenido en $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Sean $M = \max\{|z|, z \in K\}$, $m = \min\{|z|, z \in K\} \neq 0$. Basta advertir que

$$\frac{1}{(z - w_{nk})^2} - \frac{1}{w_{nk}^2} = \frac{z(2w_{nk} - z)}{w_{nk}^2(z - w_{nk})^2} = f_{nk}(z)$$

y cada f_{nk} es meromorfa. Suponiendo $|w_1| \geq |w_2|$, se tiene que $n|w_2| \leq |w_{nk}| \leq 2n|w_1|$. Además, existe un n_0 tal que $C_n \cap K = \emptyset$, $n \geq n_0$ luego, para $n \geq n_0$:

$$|f_{nk}(z)| \leq \frac{4n|z||w_1| + |z|^2}{n^2|w_2|^2(n|w_2| - |z|)^2},$$

de donde

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{8n} |f_{nk}(z)| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} 8n \frac{4n|z||w_1| + |z|^2}{n^2|w_2|^2(n|w_2| - |z|)^2} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{32nM|w_1| + 8M^2}{n|w_2|^2(n|w_2| - m)^2}$$

que converge por ser esencialmente una serie de Riemann de la forma $\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-s}$ con $s = 2$.

1. es entonces consecuencia de la convergencia de la serie anterior. Existe una única clase de polos de \wp que son de orden 2 y éstos son a su vez polos de orden 3 de \wp' . Se tiene además que $\wp'(z) = -2 \sum_{w \in \Omega} (z - w)^{-3}$.

Para 2., 3. observemos que el carácter elíptico y par (o impar) es fruto de poder reordenar los términos porque la serie converge absolutamente y $\Omega \subset \Omega_{\wp}$. Ahora bien, si existiera un punto en el retículo de \wp que no estuviera en Ω , \wp debería exhibir un polo de orden 2 allí ya que lo posee en el 0. Pero esto va en contra de la convergencia $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

4. es consecuencia de la discusión anterior ya que existe una única clase de polos de \wp que son de orden 2 y éstos son a su vez polos de orden 3 de \wp' . Se tiene además que $\wp'(z) = -2 \sum_{w \in \Omega} (z - w)^{-3}$. □

Lema 2.32. La serie

$$\sum_{w \in \Omega'} w^{-\alpha}$$

converge absolutamente si, y sólo si, $\alpha > 2$. Se define $G_n = \sum_{w \in \Omega'} w^{-n}$, $n \geq 3$ conocido como la serie de Eisenstein de orden n para Ω .

Demostración. Tomemos una base w_1, w_2 tal que $|w_1| \geq |w_2|$. $n|w_2| \leq |w| \leq 2n|w_1|$ para $w \in C_n$, como en la demostración anterior. Tomando $\alpha > 0$ (ya que en otro caso contrario la convergencia es imposible) se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} 8n(n|w_2|)^{-\alpha} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{8n} |w_{n,k}|^{-\alpha} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 8n(2n|w_1|)^{-\alpha}$$

y por lo tanto la serie converge absolutamente si, y sólo si, $1 - \alpha < -1$, es decir, $\alpha > 2$. □

Habiendo probado ciertas propiedades de \wp , desarrollemos su serie de Laurent en torno a 0, $\wp(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} a_n z^n$. Los primeros coeficientes son claros a la vista de

la expresión de \wp , $a_{-2} = 1$ y $a_{-1} = 0$. Tengamos en cuenta que si $w \neq 0$, entonces para z tal que $|z| < |w|$, $(z - w)^{-2} = w^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} n (z/w)^{n-1}$, de tal modo que para z en la zona de Dirichlet, que es un entorno de 0, se verifica

$$\frac{1}{(z - w)^2} = \frac{w^{-2}}{(1 - z/w)^2} = \frac{d}{dz} \frac{w^{-1}}{(1 - z/w)} = \frac{1}{w} \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z^n}{w^{n+2}}\right) + \frac{1}{w^2}$$

en virtud del Teorema A.3. Volviendo a \wp , usando de nuevo el mismo teorema y reordenando sumatorios ya que la serie converge absolutamente:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Omega'} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n / w^{n+2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\sum_{w \in \Omega'} \frac{1}{w^{n+2}} \right) z^n,$$

donde las sumas para n impar desaparecen ya que $w^{-n-2} + (-w)^{-n-2} = 0$. Reescribiendo en términos de las series de Eisenstein, obtenemos finalmente

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2n+2} z^{2n} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}, n \text{ par}} (n+1) G_{n+2} z^n.$$

Derivando y desarrollando, se obtienen en un entorno de 0:

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots$$

$$\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24}{z^2} G_4 - 80G_6 + z^2 \delta_1$$

$$60\wp(z) = \frac{60}{z^2} G_4 + z^2 \delta_2$$

$$4\wp(z)^3 = \frac{4}{z^6} + \frac{36}{z^2} G_4 + 60G_6 + z^2 \delta_3$$

Las funciones δ_i que aparecen son analíticas. Tomando $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ y reorganizando términos se obtiene un polinomio en $(\wp(z), \wp'(z))$ igualado a una función analítica y elíptica que ha de ser constante. Pero además se anula en 0 y por lo tanto:

Teorema 2.33 (*Ecuación fundamental de $\wp(z)$*).

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6.$$

Esto nos lleva a la deseada conexión entre funciones *elípticas* e integrales *elípticas*.

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3 = Q(z)$$

con las identificaciones evidentes y entonces, formalmente

$$t = \wp^{-1}(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}.$$

De este tipo de integrales nos ocuparemos en el tercer capítulo. De momento, veamos que las raíces de este polinomio $Q(z)$ son todas distintas. El teorema siguiente nos proporciona información explícita sobre los ceros de $\wp'(z)$:

Teorema 2.34. Dada una base $w_{1,2}$ de un retículo y $\wp(z)$ su función de Weierstrass asociada, las clases de los ceros de $\wp'(z)$ son

$$[w_i/2] \in \mathbb{C}/\Omega : w_i \in \{w_1, w_2, w_1 + w_2\}.$$

Se deduce que Q tiene tres raíces distintas.

Demostración. Sea P un polígono fundamental de \wp tal que

$$0, \frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_1 + w_2}{2} \in \mathbf{int}(P).$$

Sabemos que $\wp'(z)$ es de orden $m = 3$. Por ser elíptica para ese retículo y ser además impar,

$$\wp' \left(\frac{w_i}{2} \right) = \wp' \left(\frac{-w_i}{2} \right) = -\wp' \left(\frac{-w_i}{2} \right)$$

con $w_i \in \{w_1, w_2, w_1 + w_2\}$. Estos valores pueden ser por tanto 0 ó ∞ . Puesto que \wp es analítica en estos puntos, $\wp'(w_i) = 0$. Por último, los puntos en los que se anula $\wp'(z)$ son precisamente los mismos que anulan $Q(z)$. □

Corolario 2.35. Sean

$$e_i = \wp(w_i/2), w_i \in \{w_1, w_2, w_1 + w_2\}, e_0 = \infty.$$

$\wp(z) = c$ tiene ceros de orden 1 para $c \neq e_j$ y de orden 2 en estos puntos. Además, $e_j \neq e_i$ para $i \neq j$. Se deduce que $\wp(z) = \wp(w)$ si, y sólo si $[z] = \pm[w]$.

Demostración. La primera parte es inmediata porque \wp tiene ceros de orden 2 allí donde \wp' se anula con orden 1.

Para ver que son distintos, definamos $f_i(z) = \wp(z) - e_i$ para los e_i finitos. f_i tiene un cero de orden 2 precisamente en w_i y es de orden 2 luego es distinta de cero para cualquier punto de una clase distinta a w_i :

$$f_i(w_j) \neq 0 \text{ si } i \neq j.$$

Por último, si suponemos $[z] = \pm[w]$ entonces $\wp(z) = \wp(w)$ por ser \wp elíptica y par. Recíprocamente, supongamos que $\wp(z) = \wp(w)$. Necesariamente $\wp(w) = \wp(-z)$. Puesto que es de orden 2, tiene como máximo dos raíces distintas, de modo que $[w] = \pm[z]$. Se verifica $[z] = [-z] = [w]$ precisamente cuando la raíz es doble, es decir,

$$w \in \{w_1/2, w_2/2, (w_1 + w_2)/2\}.$$

□

Definamos ahora $L(\Omega)$ como el cuerpo de las funciones elípticas pares. Entonces $\wp(z) \in L(\Omega) \subset E(\Omega)$. Se tiene que las funciones racionales de $\wp(z)$ están por lo tanto contenidas en $L(\Omega)$. Veamos que de hecho toda función elíptica es reconstruible en términos de $\wp(z), \wp'(z)$. Denotemos por $\mathbb{C}(\wp)$ el mínimo subcuerpo de $E(\Omega)$ que contiene a \mathbb{C}, \wp . Análogamente para $\mathbb{C}(\wp')$ y $\mathbb{C}(\wp, \wp')$. Denotemos también por $R(x)$ el conjunto de las funciones racionales con variable x .

Teorema 2.36. Sea f una función elíptica con respecto de un retículo Ω , \wp la función de Weierstrass asociada.

- Si f es una función elíptica par entonces $f = Q(\wp)$, $Q \in R(x)$. Luego, puesto que se cumple trivialmente la contención contraria, $L(\Omega) = R(\wp)$.
- Si f es elíptica, con la notación anterior, se tiene que $f = Q_1(\wp) + Q_2(\wp)\wp'$. Se deduce entonces que $E(\Omega) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$.

Demostración. Sea f una función elíptica par. Elijamos $c, d \in \mathbb{C}$ distintos tales que $f(z) = c$, $f(z) = d$ tengan raíces simples y distintas y no congruentes a 0 ni a $w_i/2$. Si a_i (resp. b_i) verifica $f(a_i) = c$ (resp. $f(b_i) = d$) también se verifica para $-a_i$ (resp. $-b_i$), $1 \leq i \leq m$ y m es el orden de f . Definamos la función g por

$$g(z) = \frac{f(z) - c}{f(z) - d}$$

$\wp(z) - \wp(a_i)$ tiene ceros de orden 1 de modo que

$$h(z) = \frac{\prod_{i=1}^n \wp(z) - \wp(a_i)}{\prod_{i=1}^n \wp(z) - \wp(b_i)}$$

tiene ceros y polos del mismo orden y en los mismos puntos que g de modo que $g = \lambda h$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $(f - c)/(f - d)$ es una función racional de \wp .

Supongamos ahora que f es una función elíptica impar. Entonces f/\wp' es elíptica y par luego $f(z) = \wp'(z)Q(\wp(z))$.

Por último, toda función elíptica f puede escribirse como

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{f(z) - f(-z)}{2}$$

donde el primer sumando es una función elíptica par y el segundo es una función elíptica impar. La discusión previa sobre las funciones elípticas pares e impares permite concluir que existen $Q_1, Q_2 \in R(x)$ tales que

$$f = Q_1(\wp) + \wp'Q_2(\wp).$$

□

En definitiva, todo elemento de $L(\Omega)$ cumple una determinada ecuación algebraica. Conocido el retículo de una determinada función elíptica, podemos obtener una expresión en términos de \wp y \wp' , cuyos coeficientes podemos calcular y dependen exclusivamente del retículo.

2.5. El teorema de adición

Las curvas elípticas son un tipo de curvas algebraicas de la forma $y^2 = x^3 + ax + b$ cuyo determinante no se anule: $\Delta = 4a^3 + 27b^2 \neq 0$. Podemos entonces estudiar la curva proyectiva

$$\gamma(z) = (1 : \wp(z) : \wp'(z)) = (1 : x : y),$$

y denotemos por U_γ los puntos de la curva proyectiva. Sea

$$H(x : y : z) = y^2 z^3 - 4x^3 z^2 - g_2 x z^4 - g_3 z^5$$

un polinomio, cuyas soluciones podemos estudiar también en el plano proyectivo complejo y son precisamente los puntos de la forma $(1 : \wp(z) : \wp'(z))$. Tenemos entonces una biyección

$$\Gamma : \mathbb{C}/\Omega \setminus \{[0]\} \rightarrow U_\gamma \setminus \{\infty\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

Γ es una biyección porque para cada $c \in \mathbb{C}$, $\wp([z]) = c$ tiene al menos un cero y como mucho dos luego \wp toma todos los valores en \mathbb{C} . \wp' separa los puntos en los que \wp tiene ceros simples dando lugar a la biyección, como se deduce del corolario 2.35. Claramente podemos ampliar el dominio incluyendo $[0]$ y tomando $\Gamma([0]) = \infty$, el punto del infinito de la curva.

Sean $v_1, v_2 \notin \Omega$ y tales que $[v_1] \neq \pm[v_2]$. Sean $t, s \in \mathbb{C}$ tales que

$$\wp'(v_1) = t\wp(v_1) + s ; \wp'(v_2) = t\wp(v_2) + s,$$

es decir $y = tx + s$ es la recta que pasa por los puntos $(\wp(v_1), \wp'(v_1))$ y $(\wp(v_2), \wp'(v_2))$. Puesto que $[v_1] \neq \pm[v_2]$ tenemos $\wp(v_1) \neq \wp(v_2)$ luego

$$t = \frac{\wp'(v_1) - \wp'(v_2)}{\wp(v_1) - \wp(v_2)}.$$

$\wp'(z) - (t\wp(z) + s)$ tiene un polo de orden 3 en 0, luego tiene 3 ceros. Dos de ellos son respectivamente v_1, v_2 y llamemos al tercero v_3 . Necesariamente es de clase distinta a los anteriores ya que $v_3 \sim -(v_1 + v_2) \text{ mod } \Omega$ en virtud de la proposición 2.29. De esta manera,

$$\wp(v_3) = \wp(-(v_1 + v_2)) = \wp(v_1 + v_2).$$

Entonces las raíces de $4x^3 - g_2x - g_3 - (tx + s)^2$ son precisamente $\wp(v_i)$, $i = 1, 2, 3$ y son distintas dos a dos. Tenemos entonces

$$4(x - \wp(v_1))(x - \wp(v_2))(x - \wp(v_3)) = 4x^3 - g_2x - g_3 - (tx + s)^2.$$

Comparando los coeficientes de x^2 :

$$\wp(v_1) + \wp(v_2) + \wp(v_3) = \frac{t^2}{4}.$$

Reuniendo todo lo anterior se llega a la ecuación algebraica siguiente:

$$\wp(v_3) = \wp(v_1 + v_2) = -\wp(v_1) - \wp(v_2) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(v_1) - \wp'(v_2)}{\wp(v_1) - \wp(v_2)} \right)^2$$

que, escrito en función de las coordenadas proyectivas:

$$x_3 = -x_1 - x_2 + \frac{1}{4} \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)^2.$$

Tomando el límite cuando $v_1 \rightarrow v_2$ podemos también escribir

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2.$$

Podemos definir entonces una suma de elementos de U_γ como

$$(1 : x_1 : y_1) + (1 : x_2 : y_2) = (1 : x_3 : y_3).$$

Tomando como elemento neutro $(0 : 1 : 0)$ se verifican las propiedades de un grupo, compatible con \wp y esta estructura de grupo es importante para el estudio de las curvas algebraicas planas no singulares.

Desde un punto de vista geométrico, la transformación consiste en trazar una recta que pase por los dos puntos P_1, P_2 dados y tomar la intersección de esta con la curva. La reflexión de este punto sobre el eje x nos da la imagen $P_3 = P_1 + P_2$.

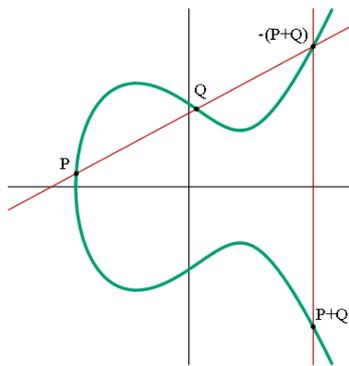


Figura 2.6: Ejemplo de suma de puntos en la curva $y^2 = x^3 - 2x + 2$.

2.6. Factorización de funciones meromorfas

Sabemos que los ceros y los polos de funciones meromorfas son aislados y que, dados un número finito de puntos y unos órdenes asociados, podemos construir una función racional que tenga ceros y polos en los puntos que hayamos elegido. Esta situación no es tan sencilla cuando están involucrados infinitos puntos y requiere de nociones de convergencia de productos infinitos que se abordan a continuación.

Definición 2.37. Sea $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de números complejos y denotemos por $P_k = \prod_{k=1}^n z_k$ el producto parcial k -ésimo. Decimos que el producto infinito $\prod_{n=1}^\infty z_n$ converge si la sucesión $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ converge:

$$\prod_{n=1}^\infty z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n.$$

El problema de la convergencia de productos infinitos se puede abordar de distintas maneras. La que se expone parece ser la más natural si tomamos como referencia la definición de serie pero presenta algunos inconvenientes frente a otras alternativas. En el desarrollo se resuelven sin hacer referencia explícita.

Proposición 2.38. Sea $\{z\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos tal que existe su producto infinito y además $\prod_{n=1}^{\infty} z_n \neq 0$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$.

Demostración. Si el límite existe y es no nulo, entonces cada $z_n \neq 0$ y se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = 1.$$

□

Observación 2.39. El resultado anterior es el análogo al criterio necesario de convergencia para series: para que se pueda sumar, los sumandos tienen que aproximarse a 0. Para que el producto tenga sentido y sea no nulo es necesario que los multiplicandos tiendan a 1.

Definición 2.40. Dado $\phi \in \mathbb{R}$, para cada $z \in \mathbb{C}$ existe un único $\theta \in [\phi, \phi + 2\pi)$ tal que $z = |z|e^{i\theta}$. De esta manera puede definirse un logaritmo complejo

$$\log_{\phi}(z) = \ln(|z|) + i\theta.$$

\log_{ϕ} es continuo en todo el plano menos la semirrecta que parte del origen y forma un ángulo ϕ con el eje real. Se verifica además

$$e^{\log_{\phi}(z)} = z, \quad \forall \phi \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Llamamos *Log* a la rama principal del logaritmo complejo, es decir, aquella tal que $\phi = -\pi$ y $-\pi \leq \text{Im}(\text{Log}(z)) < \pi$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Proposición 2.41. Sea $\{z\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos no nulos. $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a un límite no nulo si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(z_n)$ converge.

Demostración. Denotemos respectivamente por P_n, S_n a los productos parciales y a las sumas parciales. Se verifica que $P_n = e^{S_n}$. Si $S_n \rightarrow S$, por la continuidad de la exponencial, $P \rightarrow e^S$.

Recíprocamente, supongamos $P_n \rightarrow P$. Tomemos ϕ tal que \log_{ϕ} sea continuo en un entorno de P . Para n suficientemente grande, los P_n están en dicho entorno. Entonces

$$\log_{\phi}(P_n) = \ln(|P_n|) + i\theta_n \rightarrow \log_{\phi}(P) = \ln(|P|) + i\theta_P$$

con las identificaciones evidentes para los argumentos. Puesto que $P_n = e^{S_n}$, se tiene que $S_n = \log_{\phi}(P_n) + 2\pi i k_n$ con $k_n \in \mathbb{Z}$. Además $S_n - S_{n-1} = \text{Log}(z_n) \rightarrow 0$ luego k_n es constante de un término en adelante. Llamando k_P a esta constante, $S_n \rightarrow \log_{\phi}(P) + 2\pi i k_P$. □

Lema 2.42. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos. Se verifica que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x_n)$ converge si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Demostración. Teniendo en cuenta que $1 + x \leq e^x$, $x \in \mathbb{R}$ y que $a + b \leq (1 + a)(1 + b)$ para $a, b \geq 0$, que se puede extender sin dificultad por inducción:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq (1 + x_1)(1 + x_2)\dots(1 + x_n) \leq e^{x_1 + x_2 + \dots + x_n}.$$

□

Definición 2.43. Decimos que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + c_n)$ converge absolutamente si $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |c_n|)$ converge o equivalentemente, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ converge.

Proposición 2.44. Si $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + c_n)$ converge absolutamente entonces converge.

Demostración. Veamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(1 + c_n)$ converge.

De la convergencia absoluta de $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + c_n)$ se deduce la convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Sabemos que en un entorno de 0

$$\text{Log}(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = zh(z)$$

con h analítica y $h(z) \rightarrow 1$ si $z \rightarrow 0$. Por lo tanto $M = \sup\{h(z) : |z| < 1\} < \infty$. Existe N tal que $|c_n| < 1$ si $n \geq N$. Tomando $N \geq m \geq p$ podemos escribir

$$\left| \sum_{n=m}^p \text{Log}(1 + z_n) \right| \leq M \sum_{n=m}^p |z_n|.$$

La serie del segundo miembro converge y por lo tanto es de Cauchy, luego el primer miembro de la desigualdad está acotado y se tiene que $\sum_{k=1}^n \text{Log}(1 + c_k)$ es de Cauchy luego converge. \square

Habiendo estudiado la convergencia de productos infinitos de números complejos se abordan a continuación dos resultados relativos a la convergencia de productos de funciones. Este es realmente el problema con el que debemos lidiar para definir correctamente $\sigma(z)$ y $\zeta(z)$.

Teorema 2.45. Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en una región R . Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge uniformemente en los compactos de R entonces $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n(z))$ converge en los compactos de R , es analítica y $F(z) = 0$ si, y sólo si, $1 + g_n(z) = 0$ para algún n .

Demostración. La convergencia absoluta del producto es consecuencia de la convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$. Consideremos K compacto de R . Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n(z)| < 1$ para $n \geq N$. Tomando entonces $n \geq N$ podemos escribir

$$\prod_{k=1}^n (1 + u_k(z)) = \prod_{k=1}^{N-1} (1 + u_k(z)) \prod_{k=N}^n (1 + u_k(z)).$$

El primer factor es acotado por ser K compacto. El segundo podemos acotarlo como en la proposición anterior de modo que para $N \leq m \leq p$,

$$\left| \sum_{n=m}^p \text{Log}((1 + u_n(z))) \right| \leq \sum_{n=m}^p |u_n(z)| |h(u_n(z))|.$$

El segundo miembro converge uniformemente a 0 en K si $m, p \rightarrow \infty$. Por lo tanto la serie $\prod_{n=N}^{\infty}(1 + u_n(z))$ converge uniformemente en K .

La analiticidad de F se sigue de ser límite uniforme de meromorfas que convergen uniformemente en compactos. Puesto que la convergencia uniforme implica la puntual, $F(z) = 0$ si, y sólo si, $g_n(z) = -1$ para algún $n \leq N$. \square

Corolario 2.46. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones analíticas en una región R . Si $\sum_{n=1}^\infty |f_n(z) - 1|$ converge uniformemente en los compactos de R entonces

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

está bien definido y f es analítica. Además $f(z) = 0$ si, y sólo si, $f_n(z) = 0$ para algún n .

Teorema 2.47 (de derivación logarítmica). Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones analíticas en una región R cuyo producto converge uniformemente a f en los compactos de R . Entonces $\sum_{n=1}^\infty f'_n/f_n$ converge uniformemente en los compactos de R hacia f'/f .

Demostración. Sea K un compacto de R . La convergencia uniforme implica que existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $|f_n(z) - 1| < 1$ para $n > N$ y para cada $z \in K$ luego f_n no tiene ceros en K . De esta manera podemos separar el producto y escribir f como producto de dos funciones analíticas:

$$g = \prod_{n=1}^N f_n ; h = \prod_{n=N+1}^{\infty} f_n$$

y $f = gh$. Puesto que h no tiene ceros (porque no los tiene ningún f_n de los que definen h) podemos escribir

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} + \frac{h'}{h} = \sum_{n=1}^N \frac{f'_n}{f_n} + \frac{h'}{h}.$$

De la convergencia del producto para $n > N$ hacia un límite no nulo se deduce la convergencia de $\sum_{n=N+1}^\infty \text{Log}(f_n) = \phi$ de modo que $h = e^\phi$. Por lo tanto $h'/h = \phi'$. Puesto que ϕ está definida como una serie uniformemente convergente, podemos derivar término a término y obtener

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n=1}^N \frac{f'_n}{f_n} + w' = \sum_{n=1}^N \frac{f'_n}{f_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f'_n}{f_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n}{f_n}.$$

□

Habiendo formalizado los conceptos de producto infinito y producto infinito absolutamente convergente estudiemos una familia de funciones definidas de este modo que serán útiles para definir σ y ζ .

2.7. Las funciones $\sigma(z)$ y $\zeta(z)$

Después de haber introducido \wp y haber desarrollado las herramientas necesarias sobre la convergencia de productos infinitos se introducen otras dos funciones, también debidas a Weierstrass: $\sigma(z)$ y $\zeta(z)$.

Definición 2.48. Definamos $E_0(z) = 1 - z$ y para $m \geq 0$,

$$E_m(z) = (1 - z) \exp\left(\sum_{n=1}^m \frac{z^n}{n}\right).$$

Esta sucesión de funciones converge a $(1 - z)e^{-\text{Log}(1-z)}$ en el disco abierto unidad. Poseen todas ellas un único cero de orden 1 en 0.

Proposición 2.49.

Se verifica que $|1 - E_m(z)| \leq |z|^{m+1}$.

Demostración. El resultado es inmediato para $m = 0$. Tomando m mayor, tenemos:

$$E'_m(z) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} z^k(1 - z) - 1\right) \exp\left(\sum_{n=1}^m \frac{z^n}{n}\right) = -z^m \exp\left(\sum_{n=1}^m \frac{z^n}{n}\right).$$

Posee un cero de orden m en 0. Consideremos entonces el desarrollo de Taylor de $(1 - E_m(z))/z^{m+1}$ que es analítica en un entorno de 0. A la vista de la expresión de E'_m los coeficientes del desarrollo de $(1 - E_m(z))$ son mayores o iguales que 0 y por tanto también los de $(1 - E_m(z))/z^{m+1}$. Entonces, para $|z| \leq 1$

$$\left|\frac{1 - E_m(z)}{z^{m+1}}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1 - E(1)}{1} = 1.$$

□

Lema 2.50. Consideremos un retículo Ω . Se definen $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ como sigue:

$$\sigma(z) = z \prod_{w \in \Omega'} \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2} = z \prod_{w \in \Omega'} E_2\left(\frac{z}{w}\right)$$

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{w \in \Omega'} \frac{1}{w} + \frac{1}{z - w} + \frac{z}{w^2}.$$

Estas funciones están bien definidas, convergen absolutamente en $\mathbb{C} \setminus \Omega$ y uniformemente en sus compactos. Además σ es impar.

Demostración. La convergencia del producto que define σ es equivalente a la de la serie $\sum_{w \in \Omega'} (1 - E_2(z/w))$. De la desigualdad anterior se tiene que

$$|1 - E_2(z/w)| \leq \left|\frac{z}{w}\right|^3.$$

En el lema 2.32 se probó la convergencia para ese tipo de series para $\alpha > 2$. La imparidad de σ se sigue de la convergencia uniforme del producto: podemos reordenarlo. Tomando w y $-w$,

$$E_2(z/w)E_2(z/(-w)) = (1 - (z/w)^2)e^{(z/w)^2}$$

de modo que el producto da lugar a una función par que, junto al factor z fuera del producto deducimos que σ es impar.

Por otro lado, escribiendo $\sigma = zh$ tenemos

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{h + zh'}{zh} = \frac{1}{z} + \frac{h'}{h}.$$

La derivada logarítmica nos permite escribir

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{w \in \Omega'} \frac{1}{w} \frac{E_2'(z/w)}{E_2(z/w)} = \sum_{w \in \Omega'} \frac{(z/w)^2}{z-w} = \sum_{w \in \Omega'} \frac{1}{w} + \frac{1}{z-w} + \frac{z}{w^2}.$$

□

Derivando término a término en la expresión de $\zeta(z)$ se concluye que

$$-\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Omega'} \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \wp(z).$$

Esta es la manera habitual de llegar hasta $\wp(z)$ partiendo de $\sigma(z)$. Algunas propiedades de estas funciones se recogen a continuación:

Proposición 2.51. Para $\lambda \neq 0$ se verifica:

- $\sigma_{\lambda\Omega}(\lambda z) = \lambda\sigma_{\Omega}(z)$
- $\zeta_{\lambda\Omega}(\lambda z) = \frac{1}{\lambda}\zeta_{\Omega}(z)$

donde $\lambda\Omega = \{\lambda w, w \in \Omega\}$.

Teorema 2.52. Definamos la función ψ tal que $\psi(w) = 1$ si $w/2 \in \Omega$ y $\psi(w) = -1$ en otro caso. Existe una función $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con ν \mathbb{Z} -lineal sobre Ω tal que

$$\zeta(z+w) - \zeta(z) = \nu(w) = \nu_w$$

y

$$\sigma(z+w)/\sigma(z) = \psi(w)e^{\nu_w(z+w/2)}.$$

Demostración. $\wp(z+w) - \wp(z) = 0$ y por lo tanto $\zeta(z+w) - \zeta(z)$ es una constante que depende de $w \in \Omega$. Por lo tanto

$$\frac{d}{dz} \text{Log} \left(\frac{\sigma(z+w)}{\sigma(z)} \right) = \zeta(z+w) - \zeta(z) = \nu_w$$

luego

$$\sigma(z+w) = \sigma(z)e^{\nu_w z + c_w}.$$

La linealidad de ν_w, c_w se deduce de

$$\frac{\sigma(z+w_1+w_2)}{\sigma(z)} = e^{\nu_{w_1+w_2}z + c_{w_1+w_2}} = \frac{\sigma(z+w_1+w_2)}{\sigma(z+w_1)} \frac{\sigma(z+w_1)}{\sigma(z)} = e^{\nu_{w_2}z + c_{w_2}} e^{\nu_{w_1}z + c_{w_1}}.$$

Supongamos $-w/2 \notin \Omega$. Teniendo en cuenta que σ es impar y evaluando en $z = -w/2$ se obtiene $e^{-\nu_w w/2 + c_w} = -1$, es decir, $c_w = \nu_w w/2 + (2k+1)\pi i$. Teniendo

en cuenta que en estas condiciones $\psi(w) = -1 = e^{i(2k+1)\pi}$ y tomando $k = 0$ llegamos a

$$\sigma(z+w) = -\sigma(z)e^{\nu_w(z+w/2)} = \psi(w)\sigma(z)e^{\nu_w(z+w/2)}.$$

Supongamos ahora que $w/2 \in \Omega$. Consecuentemente,

$$\frac{\sigma(z+w)}{\sigma(z)} = \frac{\sigma(z+w)}{\sigma(z+w/2)} \frac{\sigma(z+w/2)}{\sigma(z)}$$

y por lo tanto $\psi(w) = \psi^2(w/2)$. Esto podemos repetirlo hasta que $w/2^n \notin \Omega$ de modo que $\psi(w) = (-1)^{2^n} = 1$. □

Proposición 2.53. Consideremos ahora una base $\{w_1, w_2\}$ y correspondientes ν_1, ν_2 . Entonces $\nu_2 w_1 - \nu_1 w_2 = 2\pi i$.

Demostración. Basta tomar un polígono $P + t$ con los ceros de ζ y con 0 en el interior, ya que 0 es su único polo con residuo $a_{-1} = 1$.

$$\int_{\delta P} \zeta(z) dz = 2\pi i$$

y las integrales por lados opuestos agrupadas, verifican

$$\int_0^1 \zeta(z + tw_1 + w_2) - \zeta(z + tw_1) dt = \nu_2 w_1 ; \int_0^1 \zeta(z + tw_2 + w_1) - \zeta(z + tw_2) dt = \nu_1 w_2.$$

□

Veamos que la función σ puede ser utilizada para factorizar funciones elípticas. Para esto, primero notemos que

$$\frac{\sigma(z+a+w)}{\sigma(z+a)} = \psi(w)e^{\nu_w(z+w/2)} e^{\nu_w a}$$

y por lo tanto dados $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}, \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ tales que $\sum_{k=1}^r \alpha_k \sim \sum_{i=1}^r \beta_i \pmod{\Omega}$, la función

$$F(z) = \frac{\prod_{i=1}^r \sigma(z - \alpha_i)}{\prod_{i=1}^r \sigma(z - \beta_i)}$$

es elíptica con respecto a Ω . Por lo tanto podemos construir funciones elípticas a través de σ . Podemos entonces reconstruir \wp .

Teorema 2.54. Para cada $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se verifica

$$\wp(z) - \wp(a) = -\frac{\sigma(z+a)\sigma(z-a)}{\sigma^2(z)\sigma^2(a)}.$$

Demostración. La función $\wp(z) - \wp(a)$ tiene ceros en a y $-a$ y tiene un polo doble en 0. Por el principio de los ceros aislados ha de verificarse

$$\wp(z) - \wp(a) = C \frac{\sigma(z-a)\sigma(z+a)}{\sigma^2(z)}$$

puesto que tienen polos y ceros del mismo orden en los mismos puntos. Multiplicando ambos miembros por z^2 y haciendo tender $z \rightarrow 0$ se obtiene $C = -1/\sigma^2(a)$. □

Corolario 2.55. Toda función elíptica pertenece a $\mathbb{C}(\sigma, \sigma')$, el cuerpo de funciones meromorfas engendrado por σ y σ' .

Capítulo 3

Integrales elípticas

3.1. Motivación

Aunque hasta ahora se han estudiado las propiedades de las funciones elípticas desde un punto de vista analítico y geométrico, es conveniente señalar que además, este tipo de funciones resultan tener un amplio rango de aplicaciones tanto dentro de las Matemáticas como en otras disciplinas, por ejemplo, la Física. Esta ha sido también una de las motivaciones más importantes para su estudio.

Una manera de ilustrar el problema, que lo relaciona directamente con el nombre *elípticas*, consiste en intentar calcular la longitud de una elipse E de semiejes a, b , lo que nos lleva a una integral de la forma:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2(t)} dt$$

que no posee primitiva elemental. Notemos que para $a = b$ sí tiene y toma el valor $2\pi a$, la longitud de la circunferencia.

Existe toda una familia de integrales de este y otros tipos que podemos estudiar desde un marco más general, el de las funciones meromorfas, que resulta ser increíblemente variado y útil para resolver problemas, tanto de interés puramente matemático como aplicado en ramas como la Física o la Ingeniería.

3.2. Funciones θ

Existe una familia de 4 funciones, llamadas funciones θ , que guardan estrechas relaciones entre ellas y que, aunque no son realmente elípticas, satisfacen una cierta *pseudo*-periodicidad que resultará fundamental para la definición de las funciones elípticas de Jacobi.

Definición 3.1. Sea $q \in \mathbf{C}$, $|q| < 1$. Se definen respectivamente $\theta_i(z, q)$, para $i = 1, 2, 3, 4$ como sigue:

$$\begin{aligned}
 \theta_1(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i(-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)z} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin((2n+1)z), \\
 \theta_2(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{i(2n+1)z} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos((2n+1)z), \\
 \theta_3(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2nz} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz), \\
 \theta_4(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{i2nz} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nz).
 \end{aligned}$$

La convergencia de estas series de Fourier puede establecerse en términos del criterio el cociente, Teorema A.5. Tomando por ejemplo la serie que define θ_1 y llamando $a_n(z)$ a su término general,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |q^{2n+2} e^{2iz}| = \lim_{n \rightarrow \infty} |q^{2n+2}| e^{-2Im(z)} = 0$$

para cada $z \in \mathbb{C}$, por lo que la serie tiene radio de convergencia infinito. Para $q \neq 0$ definimos $\tau = -i \text{Log}(q)/\pi$ de modo que $q = e^{i\pi\tau}$. τ ha de tener parte imaginaria mayor que 0 ya que $|q| < 1$. Además, cuando q sea real τ será imaginario puro.

θ_1 y θ_2 son periódicas de período 2π mientras que θ_3 y θ_4 son periódicas de período π . Además, se verifica que

$$\theta_1(z + \pi\tau) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{(n+1/2)^2 i\pi\tau} e^{i(2n+1)(z+\pi\tau)} = -(qe^{2iz})^{-1} \theta_1(z).$$

Tomando $\rho = qe^{2iz}$, podemos obtener relaciones análogas para las demás:

$$\theta_2(z) = \rho\theta_2(z + \pi\tau) ; \theta_3(z) = \rho\theta_3(z + \pi\tau) ; \theta_4(z) = -\rho\theta_4(z + \pi\tau).$$

Podemos asimismo obtener relaciones entre estas funciones incrementando z por $\pi/2$ ó $\pi\tau/2$ y comparando con sus definiciones, obteniendo:

$$\theta_1(z) = -\theta_2(z + \pi/2) = -i\mu\theta_4(z + \pi\tau/2) = -i\mu\theta_3(z + \pi/2 + \pi\tau/2) \quad (3.0)$$

donde $\mu = q^{1/4} e^{iz}$.

Las funciones θ poseen un periodicidad simple con π y una *pseudo*-periodicidad con $\pi\tau$. Definiremos a partir de ellas otras funciones que son estrictamente elípticas, gracias a las numerosas relaciones estas funciones que verifican entre ellas. Se define la función

$$f(x, y) = \frac{\theta_3(x + y, q^2)\theta_2(x - y, q^2) - \theta_2(x + y, q^2)\theta_3(x - y, q^2)}{\theta_1(x, q)\theta_1(y, q)}.$$

Las propiedades de estas funciones, recogidas en (3,0) nos permiten concluir que f es de hecho elíptica de períodos $\pi, 2\pi\tau$ en cada una de sus variables y no tiene polos: θ_1 se anula en $\bar{0}$, de modo que contemplada como función de x , se anula en 0

y el numerador toma el valor $\theta_3(y, q^2)\theta_2(-y, q^2) - \theta_2(y, q^2)\theta_3(-y, q^2) = 0$. Este cero ha de ser de orden al menos 1 y por lo tanto no presenta un polo. Análogamente f es constante con respecto de y . Por lo tanto, f es constante.

Notemos ahora que $\theta_1(\pi/2, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}$ y además

$$\begin{aligned}\theta_2(0, q^2) &= -\theta_2(\pi, q^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2(n+1/2)^2} \\ \theta_3(0, q^2) &= \theta_3(\pi, q^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2}\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}f(\pi/2, \pi/2) &= \frac{\theta_3(\pi, q^2)\theta_2(0, q^2) - \theta_2(\pi, q^2)\theta_3(0, q^2)}{\theta_1^2(\pi/2, q)} \\ &= \frac{2 \left(\sum_k q^{2k^2} \right) \left(\sum_l q^{2(l+1/2)^2} \right)}{\sum_{n,m} q^{(n+1/2)^2 + (m+1/2)^2}}.\end{aligned}$$

En el exponente del denominador, notemos que podemos reescribir $(n+1/2)^2 + (m+1/2)^2 = (m+n+1)^2/2 + (m-n)^2/2$. Se toman entonces las variables $r = m+n$, $s = m-n$. Este cambio de variable hay que hacerlo con precaución ya que si tanto m como n son pares o impares, r y s serán pares. En caso de paridad cruzada entre m y n , las nuevas variables serán ambas impares. Así, para poder recorrer todos los pares de enteros, r y s han de recorrer los pares de enteros simultáneamente pares o impares. De esta manera,

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2 + (m+1/2)^2} = \sum_{r,s} q^{(r+1)^2/2 + s^2/2} = \sum_{r=0}^{\infty} q^{(r+1)^2/2} \sum_{s \in \mathbb{Z}, s+r \text{ par}} q^{s^2/2}$$

con las restricciones impuestas. Esta doble serie se puede separar en dos, respectivamente para (r, q) pares e impares obteniendo

$$\sum_{n,m} q^{(n+1/2)^2 + (m+1/2)^2} = \sum_{r'=-\infty}^{\infty} q^{2(r'+1/2)^2} \left(\sum_{s'=-\infty}^{\infty} q^{2s'^2} \right) + \sum_{r''=-\infty}^{\infty} q^{2r''^2} \sum_{s''=-\infty}^{\infty} 2q^{2(s''+1/2)^2}$$

que es precisamente $2\theta_2(0, q^2)\theta_3(0, q^2)$ y por lo tanto se verifica

$$\theta_1(x, q)\theta_1(y, q) = \theta_3(x+y, q^2)\theta_2(x-y, q^2) - \theta_2(x+y, q^2)\theta_3(x-y, q^2) \quad (3.1)$$

Consideraciones y manipulaciones análogas se pueden hacer para llegar a otras igualdades, que se incluyen a continuación resumidas:

$$\theta_1(x, q)\theta_2(y, q) = \theta_1(x+y, q^2)\theta_4(x-y, q^2) + \theta_4(x+y, q^2)\theta_1(x-y, q^2) \quad (3.2)$$

$$\theta_2(x, q)\theta_2(y, q) = \theta_3(x+y, q^2)\theta_2(x-y, q^2) + \theta_2(x+y, q^2)\theta_3(x-y, q^2) \quad (3.3)$$

$$\theta_3(x, q)\theta_3(y, q) = \theta_3(x+y, q^2)\theta_3(x-y, q^2) + \theta_2(x+y, q^2)\theta_2(x-y, q^2) \quad (3.4)$$

$$\theta_3(x, q)\theta_4(y, q) = \theta_4(x+y, q^2)\theta_4(x-y, q^2) - \theta_1(x+y, q^2)\theta_1(x-y, q^2) \quad (3.4)$$

$$\theta_4(x, q)\theta_4(y, q) = \theta_3(x+y, q^2)\theta_3(x-y, q^2) - \theta_2(x+y, q^2)\theta_2(x-y, q^2) \quad (3.6)$$

Elevando al cuadrado (3.1) y (3.6) y restando, se obtiene

$$\theta_4^2(x)\theta_4^2(y) - \theta_1^2(x)\theta_1^2(y) = \left(\theta_3^2(x+y, q^2) - \theta_2^2(x+y, q^2)\right) \left(\theta_3^2(x-y, q^2) - \theta_2^2(x-y, q^2)\right).$$

Tomando $y = 0$ en (3.6) se tiene

$$\theta_3^2(z, q^2) - \theta_2^2(z, q^2) = \theta_4(z, q)\theta_4(0, q)$$

que junto a la anterior igualdad nos lleva a

$$\theta_4^2(x, q)\theta_4^2(y, q) - \theta_1^2(x, q)\theta_1^2(y, q) = \theta_4(x+y, q)\theta_4(x-y, q)\theta_4^2(0, q). \quad (3.7)$$

Manipulando la ecuación anterior según las relaciones (3.0), obtenemos

$$\theta_4(x+y)\theta_4(x-y)\theta_4^2(0) = \theta_3^2(x)\theta_3^2(y) - \theta_2^2(x)\theta_2^2(y)$$

y

$$\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_4^2(0) = \theta_4^2(x)\theta_3^2(y) - \theta_1^2(x)\theta_2^2(y)$$

lo que nos lleva a $\theta_3^4(0) = \theta_2^4(0) + \theta_4^4(0)$ y $\theta_4^2(0)\theta_3^2(0) = \theta_1^2(0)\theta_3^2(0) + \theta_2^4(0)$ que resultan ser identidades *clave* para definir las funciones elípticas de Jacobi. Otra transformación desde (3.7), o alternativamente elevando al cuadrado (3.2) y (3.4) y restando, nos lleva a

$$\theta_1(x+y)\theta_4(x-y)\theta_2(0)\theta_3(0) = \theta_1(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_3(y) + \theta_1(y)\theta_4(y)\theta_2(x)\theta_3(x). \quad (3.8)$$

A continuación se darán algunas propiedades relativas a las derivadas de las funciones θ y de sus cocientes. Con estas identidades, podremos estudiar las derivadas de las funciones elípticas de Jacobi.

Derivando con respecto de x en (3.2) y tomando $x = y = 0$ obtenemos

$$\theta_1'(0, q)\theta_2(0, q) = 2\theta_1'(0, q^2)\theta_4(0, q^2). \quad (3.9)$$

Por otro lado, tomando $x = y = 0$ en (3.3) y (3.4) y teniendo en cuenta que $\theta_1(0) = 0$, se obtienen respectivamente

$$\theta_2^2(0, q) = \theta_2(0, q^2)\theta_3(0, q^2) ; \theta_3(0, q)\theta_4(0, q) = \theta_4^2(0, q^2).$$

Dividiendo (3.9) entre estas dos últimas ecuaciones, se obtiene

$$\frac{\theta_1'(0, q)}{\theta_2(0, q)\theta_3(0, q)\theta_4(0, q)} = \frac{\theta_1'(0, q^2)}{\theta_2(0, q^2)\theta_3(0, q^2)\theta_4(0, q^2)}$$

que podemos iterar para obtener

$$\frac{\theta_1'(0, q)}{\theta_2(0, q)\theta_3(0, q)\theta_4(0, q)} = \frac{\theta_1'(0, q^{2^n})}{\theta_2(0, q^{2^n})\theta_3(0, q^{2^n})\theta_4(0, q^{2^n})}$$

para $n \geq 0$. Puesto que $|q| < 1$, $q^{2^n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Notemos entonces que las funciones θ verifican

$$\theta_1(z, q) = 2q^{1/4} \sin(z) + O(q^{9/4}) ; \theta_3(z, q) = 1 + O(q)$$

$$\theta_2(z, q) = 2q^{1/4} \cos(z) + O(q^{9/4}) ; \theta_4(z, q) = 1 + O(q)$$

de modo que el cociente tiende a 1 cuando $n \rightarrow \infty$ y se tiene $\theta_1'(0) = \theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)$. Este resultado también es de especial importancia en el desarrollo de la teoría.

Estudiemos por último algunas identidades que involucren cocientes de estas funciones. Derivando con respecto de y en (3.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \theta_1'(x+y)\theta_4(x-y) - \theta_1(x+y)\theta_4'(x-y)\theta_2(0)\theta_3(0) = \\ = \theta_1(x)\theta_4(x) (\theta_2'(y)\theta_3(y) + \theta_2(y)\theta_3'(y)) + \theta_2(x)\theta_3(x) (\theta_1'(y)\theta_4(y) + \theta_1(y)\theta_4'(y)) \end{aligned}$$

Tomando $y = 0$, teniendo en cuenta que $\theta_1(0) = \theta_2'(0) = \theta_3'(0) = \theta_4'(0) = 0$ y reordenando obtenemos

$$\frac{\theta_1'(0)\theta_4(0)}{\theta_2(0)\theta_3(0)} \frac{\theta_2(x)\theta_3(x)}{\theta_4^2(x)} = \frac{\theta_4(x)\theta_1'(x) - \theta_4(x)\theta_1'(x)}{\theta_4^2(x)} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\theta_1(x)}{\theta_4(x)} \right)$$

que, haciendo uso de la identidad $\theta_1'(0) = \theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)$ se resume en

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\theta_1(x)}{\theta_4(x)} \right) = \theta_4^2(0)\theta_2(x)\theta_3(x)/\theta_4^2(x).$$

Identidades similares pueden encontrarse en el citado libro de Lawden. Se resumen las probadas anteriormente en el teorema siguiente.

Teorema 3.2. Se verifica:

- $\theta_3^4(0) = \theta_2^4(0) + \theta_4^4(0)$ y $\theta_4^2(0)\theta_3^2(0) = \theta_1^2(0)\theta_3^2(0) + \theta_2^4(0)$.
- $\theta_1'(0) = \theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)$.
- $\frac{d}{dx}(\theta_1(x)/\theta_4(x)) = \theta_4^2(0)\theta_2(x)\theta_3(x)/\theta_4^2(x)$.

3.3. Funciones elípticas de Jacobi

Habiendo estudiado algunas de las propiedades de las funciones θ , definamos a partir de ellas unas funciones elípticas, cuyas propiedades se deducirán del estudio de las funciones θ .

Definición 3.3. Sea $q \neq 0$, $|q| < 1$. Para $z \in \mathbb{C}$, escribamos $u = z\theta_3^2(0)$. Se definen las funciones de Jacobi sn, cn, dn:

$$\operatorname{sn}(u) = \frac{\theta_3(0)\theta_1(z)}{\theta_2(0)\theta_4(z)} ; \operatorname{cn}(u) = \frac{\theta_4(0)\theta_2(z)}{\theta_2(0)\theta_4(z)} ; \operatorname{dn}(u) = \frac{\theta_4(0)\theta_3(z)}{\theta_3(0)\theta_4(z)},$$

donde la dependencia con q es implícita. Puesto que θ_1 es impar y las demás son pares, se tiene que sn es impar mientras que cn y dn son pares.

En virtud del Teorema 3.2, se verifica $\operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u) = 1$, que resulta ser una identidad análoga a la conocida para \sin, \cos . Podemos entonces definir los parámetros $k = \theta_2^2(0)/\theta_3^2(0)$, $k' = \theta_4^2(0)/\theta_3^2(0)$ que verifican $k^2 + k'^2 = 1$, como también se recoge en dicho teorema y operándolos con las funciones recién definidas se obtienen las identidades

$$\operatorname{dn}^2(u) + k^2 \operatorname{sn}^2(u) = 1 ; \operatorname{dn}^2(u) - k^2 \operatorname{cn}^2(u) = k'^2. \quad (3.10)$$

Hemos de interpretar estas funciones en términos de otras funciones conocidas. Notemos que se ha omitido la dependencia de estas funciones con q , implícito en las funciones θ . Alternativamente, podemos indicar la dependencia con k , ya que

$$k = \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)} = \frac{4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \right)^2}{\left(1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \right)^2}.$$

De esta manera $k \rightarrow 0$ si $q \rightarrow 0$. Recordemos además que

$$\theta_1(z) = 2q^{1/4} \sin(z) + O(q^{9/4}) ; \theta_3(z) = 1 + O(q)$$

$$\theta_2(z) = 2q^{1/4} \cos(z) + O(q^{9/4}) ; \theta_4(z) = 1 + O(q)$$

luego, comparando con las definiciones de $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ y tomando $q \rightarrow 0$ se obtiene

$$\operatorname{sn}(u, k) \rightarrow \sin(u) ; \operatorname{cn}(u, k) \rightarrow \cos(u) ; \operatorname{dn}(u) \rightarrow 1.$$

Por lo tanto, podemos entender $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}$ como generalizaciones de las funciones \sin, \cos con un parámetro añadido que les otorga nuevas propiedades. Son, en un cierto sentido que no se pretende precisar, una generalización analítica que permite ir desde las funciones trigonométricas hasta las hiperbólicas.

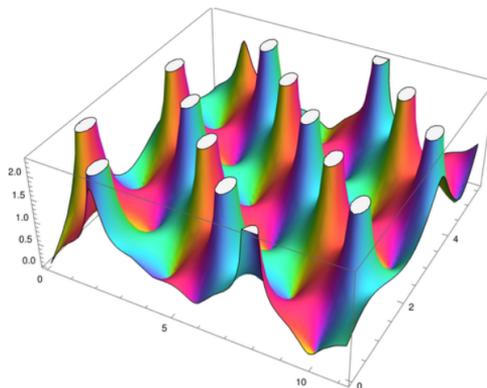


Figura 3.1: Representación de $\operatorname{sn}(z, (1+i)/2)$.

Teorema 3.4. Las funciones $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}$ y dn son elípticas.

Demostración. Llamemos $K = \pi\theta_3^2(0)/2$, $iK' = \tau K$ (y por lo tanto K y K' serán reales y positivos cuando q sea real). Recordemos que las funciones θ verifican la

relación $\theta_i(z + \pi\tau) = \pm\rho\theta_i(z)$. Notemos que K, iK' son linealmente independientes ya que $iK'/K = \tau$ y $Im(\tau) > 0$.

De la definición de sn se deduce que $sn(u) = sn(u + 2\pi\theta_3^2(0)) = sn(u + \tau\pi\theta_3^2(0))$ por lo que sus períodos son $4K$ y $2iK'$. Es rutinario comprobar que $4K, 4iK'$ son períodos de cn y $2K, 4iK'$ lo son de dn. □

Para homogeneizar estos tres pares de períodos, usaremos $4K, 4iK'$ como períodos de referencia de estas funciones, ya que son comunes a todas ellas, aunque no primitivos para sn y dn. Estaremos interesados en manipular productos y sumas de estas funciones y es por lo tanto conveniente estudiarlas desde un retículo común. En este sentido, se definen las siguientes funciones, también conocidas como funciones elípticas de Jacobi:

$$\begin{aligned} ns(z) &= 1/sn(z) & nc(z) &= 1/cn(z) & nd(z) &= 1/dn(z) \\ sc(z) &= sn(z)/cn(z) & cd(z) &= cn(z)/dn(z) & ds(z) &= nd(z)/sn(z) \\ cs(z) &= cn(z)/sn(z) & dc(z) &= dn(z)/cn(z) & sd(z) &= sn(z)/dn(z) \end{aligned}$$

Manipulando estas funciones y teniendo en cuenta (3.0), podemos obtener relaciones como

$$sn(u + iK') = \frac{\theta_3(0)\theta_1(z + \tau\pi/2)}{\theta_2(0)\theta_4(z + \tau\pi/2)} = \frac{\theta_3(0)\theta_4(z)}{\theta_2(0)\theta_1(z)} = \frac{1}{k} \frac{1}{sn(u)} = \frac{1}{k} ns(u).$$

Junto a la anterior, se recogen otras relaciones:

$$sn(u) = -sn(u + 2K) = sn(u + 2iK') \tag{3.11}$$

$$sn(u + iK') = \frac{1}{k} ns(u) ; sn(u + K) = cd(u) ; sn(u + K + iK') = \frac{1}{k} dc(u) \tag{3.12}$$

Para poder utilizar estas funciones, necesitamos relacionarlas en términos de sus derivadas. Derivando directamente sn con respecto de u y utilizando la identidad $\frac{d}{dx}(\theta_1(x)/\theta_4(x)) = \theta_4^2(0)\theta_2(x)\theta_3(x)/\theta_4^2(x)$ obtenemos

$$\frac{d}{du} sn(u) = \frac{\theta_4^2(0)}{\theta_2(0)\theta_3(0)} \frac{\theta_2(z)\theta_3(z)}{\theta_4^2(z)} = cn(u)dn(u)$$

lo que justifica la transformación $u = z\theta_3^2(0)$. Análogamente podemos derivar las expresiones que relacionan sn, cn y dn para obtener

$$\frac{d}{du} cn(u) = -sn(u)dn(u) ; \frac{d}{du} dn(u) = -k^2 sn(u)cn(u).$$

Las derivadas de las demás funciones elípticas se deducen de las de sn, cn y dn. Puesto que las derivadas de estas funciones dependen de otras de ellas, podemos calcular derivadas sucesivas sin dificultad. Teniendo en cuenta que $sn(0) = 0, cn(0) =$

1 y $\operatorname{dn}(0) = 1$, podemos derivar hasta 3 veces y evaluar en $u = 0$ para obtener un desarrollo de estas funciones:

$$\operatorname{sn}(u) = u - \frac{1}{3!}(1+k^2)u^3 + o(u^4)$$

$$\operatorname{cn}(u) = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + o(u^4)$$

$$\operatorname{dn}(u) = 1 - \frac{1}{2!}k^2u^2 + o(u^4)$$

En cuanto a los polos y el orden de estos, estas funciones presentan una singularidad aislada allí donde θ_4 presente un 0. Recordemos que θ_4 es π -periódica y $\pi\tau$ -pseudo-periódica. Puesto que $\theta_4(\pi\tau) = \theta_1(0) = 0$ se deduce que θ_4 se anula para la clase $u = \theta_3^2(0)(m\pi + (n+1/2)\pi\tau) = 2mK + i(2n+1)K'$. Por lo tanto, en el paralelogramo fundamental dado por los vértices $-K, 3K, -K + 2iK', 3K + 2iK'$, $\operatorname{sn}(u)$ presenta dos polos, $u = iK'$ y $u = 2K + iK'$. En virtud de (3.12) se tiene

$$\operatorname{sn}(iK' + u) = \frac{1}{k\operatorname{sn}(u)} = \frac{1}{ku} \frac{1}{(1 - 1/6(1+k^2)u^2 + o(u^3))}$$

que tiene residuo $1/k$ en 0 y por lo tanto sn tiene residuo $1/k$ en iK' . Puesto que $\operatorname{sn}(2K + iK' + u) = -\operatorname{sn}(iK' + u)$, presenta otro polo en $2K + iK'$ con residuo $-1/k$. Además cn presenta polos en los mismos puntos de modo que, tomando el mismo paralelogramo, podemos escribir:

$$\operatorname{cn}(iK' + u) = \frac{\theta_4(0)\theta_2(z + \tau\pi/2)}{\theta_2(0)\theta_4(z + \tau\pi/2)} = \frac{1}{ik} \frac{\operatorname{dn}(u)}{\operatorname{sn}(u)} = \frac{1}{iku} \frac{1 - k^2u^2/2 + o(u^4)}{1 - (1+k^2)u^2/6 + o(u^3)}$$

luego cn posee residuo $1/ik$ en iK' y puesto que $\operatorname{cn}(2K + iK' + u) = -\operatorname{cn}(iK' + u)$ presenta en el otro polo un residuo de valor i/k . Por último, tomemos el paralelogramo dado por $-K, K, -K + 4iK', K + 4iK'$ en el que dn tiene polos en $iK', 3iK'$. En torno a iK' tenemos

$$\operatorname{dn}(iK' + u) = \frac{\operatorname{cn}(u)}{i\operatorname{sn}(u)} = \frac{1}{iu} \frac{1 - u^2/2 + o(u^4)}{1 - (1+k^2)u^2/6 + o(u^3)}$$

y por lo tanto el residuo es $-i$. Puesto que $\operatorname{dn}(3iK' + u) = -\operatorname{dn}(iK' + u)$, presenta un polo en $3iK'$ con residuo i .

Los cálculos anteriores se resumen en la siguiente tabla:

Función	Polos	Residuos
sn	$iK', 2K + iK'$	$1/k, -1/k$
cn	$iK', 2K + iK'$	$-i/k, i/k$
dn	$iK', 3iK'$	$-i, i$

y por lo tanto estas funciones son *sencillas* en tanto que las funciones elípticas han de ser al menos de orden 2 y estas funciones lo son.

3.4. Algunos teoremas de adición

La periodicidad de las funciones θ y de las funciones elípticas de Jacobi permite deducir relaciones algebraicas entre ellas que son de gran utilidad e interés. Algunas de estas relaciones elementales, que recuerdan a las conocidas para las funciones \sin y \cos , se recogen a continuación.

Dividiendo (3.8) entre (3.7) y tomando $x = u/\theta_3^2(0)$, $y = v/\theta_3^2(0)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u+v) &= \frac{\theta_1(x+y)\theta_2(0)\theta_3(0)}{\theta_4(x+y)\theta_4(0)} \\ &= \frac{\theta_4^2(0)}{\theta_2^2(0)} \frac{\theta_1(x)\theta_2(y)\theta_3(y)/\theta_4(y) + \theta_1(y)\theta_2(x)\theta_3(x)/\theta_4(x)}{(\theta_4(x)\theta_4(y) - \theta_1(x)\theta_1(y))/(\theta_4(x)\theta_4(y))} \\ &= \frac{\frac{\theta_3(0)\theta_1(x)}{\theta_2(0)\theta_4(x)} \frac{\theta_4(0)\theta_2(y)}{\theta_2(0)\theta_4(y)} \frac{\theta_4(0)\theta_3(y)}{\theta_3(0)\theta_4(y)} + \frac{\theta_3(0)\theta_1(y)}{\theta_2(0)\theta_4(y)} \frac{\theta_4(0)\theta_2(x)}{\theta_2(0)\theta_4(x)} \frac{\theta_4(0)\theta_3(x)}{\theta_3(0)\theta_4(x)}}{1 - \frac{\theta_4^4(0)}{\theta_2^4(0)} \frac{\theta_3^2(0)\theta_1^2(x)}{\theta_4^2(x)} \frac{\theta_4^2(0)\theta_2^2(y)}{\theta_2^2(0)\theta_4^2(y)}} \\ &= \frac{\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(v) + \operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{cn}^2(v)}. \end{aligned}$$

Haciendo uso de las relaciones entre estas funciones, podemos deducir también fórmulas análogas para cn y dn :

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u+v) &= \frac{\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v) - \operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{sn}^2(v)} \\ \operatorname{dn}(u+v) &= \frac{\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v) - k^2\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{dn}(v)\operatorname{dn}(u)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{sn}^2(v)} \end{aligned}$$

y tomando $u = v$ deducimos las fórmulas

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(2u) &= \frac{2\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u)}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(u)} \\ \operatorname{cn}(2u) &= \frac{2\operatorname{cn}^2(u)}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(u)} - 1 = \frac{2\operatorname{cn}^2(u) + k^2\operatorname{sn}^4(u) - 1}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(u)} = 1 - \frac{2\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{dn}^2(u)}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(u)} \\ \operatorname{dn}(2u) &= \frac{2\operatorname{dn}^2(u)}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(u)} - 1 = \frac{2\operatorname{dn}^2(u) + k^2\operatorname{sn}^4(u) - 1}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(u)} = 1 - \frac{2k^2\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{cn}^2(u)}{1 - k^2\operatorname{sn}^4(u)}. \end{aligned}$$

Tomando la última expresión para $\operatorname{cn}(2u)$ y la primera para $\operatorname{dn}(u)$ deducimos que

$$\operatorname{sn}^2(u) = \frac{1 - \operatorname{cn}(2u)}{1 + \operatorname{dn}(2u)}.$$

Podemos entonces concluir que $\operatorname{sn}(K/2) = 1/\sqrt{1+k'}$. Transformando de acuerdo a (3.10) obtenemos $\operatorname{cn}(K/2) = \sqrt{k'}/\sqrt{1+k'}$ y $\operatorname{dn}(K/2) = \sqrt{k'}$.

3.5. Integrales elípticas

A partir de este momento se restringe el estudio de algunas integrales al caso en que tanto u como k son reales y $0 < k < 1$, que se corresponde con el caso q real ya que

$$k = \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)} = 4q^{1/2} \frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+2n}\right)^2}{\left(1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}\right)^2}.$$

Bajo estas hipótesis, se tiene que u es real si, y sólo si, lo es z , de modo que sn , cn y dn son reales si lo es u . También se verifica $K \in \mathbb{R}$. Se tiene $\operatorname{sn}(0) = 0$ y $\operatorname{sn}(K) = 1$ y además $\operatorname{sn}'(u) = \operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u) > 0$ si $u \in [0, K]$, de modo que podemos elegir la rama de sn^{-1} en la que $\operatorname{sn} : [0, K] \rightarrow [0, 1]$ es biyectiva. Consideraciones análogas sobre cn , teniendo en cuenta que $\operatorname{cn}(0) = 1$, $\operatorname{cn}(K) = 1$ y $\operatorname{cn}^2(u) + \operatorname{sn}^2(u) = 1$, se tiene que $\operatorname{cn} : [0, K] \rightarrow [0, 1]$ es una aplicación biyectiva que invierte la orientación.

Del teorema de la aplicación inversa, junto a las propiedades y profundas relaciones que las funciones elípticas de Jacobi poseen, podemos obtener primitivas de algunas integrales de la forma

$$I_{2n} = \int \frac{t^{2n}}{\sqrt{(A + Bt^2)}\sqrt{(C + Dt^2)}} dt$$

donde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. La aplicación de la regla de la cadena nos permite reducir estas integrales a combinaciones lineales de I_0, I_2 . Se estudiarán estos dos tipos de integrales, que pueden encontrarse en la literatura como *integrales elípticas de primer tipo* e *integrales elípticas de segundo tipo*.

3.5.1. Integrales elípticas de primer tipo

Tomando $u = \operatorname{sn}^{-1}(x, k)$ en la rama elegida, obtenemos

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u) = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}$$

ya que $\operatorname{cn}^2(u) = 1 - \operatorname{sn}^2(u)$ y $\operatorname{dn}^2(u) = 1 - k^2\operatorname{sn}^2(u)$. Por lo tanto, podemos escribir

$$\operatorname{sn}^{-1}(x, k) = u = \int_0^x \left((1 - t^2)(1 - k^2t^2)\right)^{-\frac{1}{2}} dt \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

y, en particular, $K(k) = \int_0^1 \left((1 - t^2)(1 - k^2t^2)\right)^{-1/2} dt$, lo que nos da una relación entre estos parámetros. Este tipo de integrales son conocidas como *integrales elípticas de primer tipo*. Siguiendo este marco, existe toda una familia de funciones que podemos llevar a una forma similar a esta a través de un cambio de variable sencillo:

$$\int_0^x \left((a^2 - t^2)(b^2 - t^2)\right)^{-1/2} dt = \frac{1}{a} \operatorname{sn}^{-1}(x/b, b/a) \quad \text{para } 0 \leq x \leq b < a.$$

Podemos también tomar $t = \sin(\phi)$ para escribir esta integral en la llamada *forma de Legendre*:

$$\operatorname{sn}^{-1}(\sin(\phi), k) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta.$$

Esta forma de escribirlo motiva considerar una primitiva de $\operatorname{dn}(u)$, que resulta ser

$$\int \operatorname{dn}(u)du = \sin^{-1}(\operatorname{sn}(u))$$

cuya comprobación es inmediata. Se define la función $\operatorname{am}(u, k)$, conocida como *amplitud*, como la integral

$$\operatorname{am}(u, k) = \int_0^u \operatorname{dn}(v)dv.$$

Esta nueva función resulta ser importante ya que posibilita una lectura de sn , en nuevamente en términos de \sin y \cos , ya que en virtud de estas expresiones, se verifica

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u) &= \sin(\operatorname{am}(u)), \\ \operatorname{cn}(u) &= \cos(\operatorname{am}(u)), \\ \operatorname{dn} &= \frac{d}{du}(\operatorname{am}(u)).\end{aligned}$$

En la Ciencia y la Técnica es habitual encontrarse con integrales de este tipo y podemos obtener soluciones analíticas. Al igual que con sn , podemos estudiar el cambio de variable $x = \operatorname{cn}(u)$:

$$\frac{dx}{du} = -\operatorname{sn}(u)\operatorname{dn}(u) = -\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}.$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{cn}(0) = 1$, $\operatorname{cn}(K) = 0$ y $\operatorname{cn}([0, u]) = [x, 1]$, se deduce

$$\operatorname{cn}^{-1}(x, k) = \int_x^1 \left((1-t^2)(k'^2+k^2t^2) \right)^{-1/2} dt \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Con un cambio de variable sencillo, podemos dar solución a toda una familia de integrales, que podemos expresar tanto en términos de cn como de sn , usando que $\operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u) = 1$ y escribiendo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\int_x^b \left((a^2+t^2)(b^2-t^2) \right)^{-1/2} dt = \frac{1}{r} \operatorname{cn}^{-1} \left(\frac{x}{b}, \frac{b}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}, \frac{b}{r} \right)$$

para $0 \leq x \leq b$.

Para completar las combinaciones posibles de t^2 sumando y/o restando, contemplemos la integral

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} dt, \quad 0 < b < a, \quad x \geq 0.$$

Es posible compararla con la función $\operatorname{sc}(u) = \operatorname{sn}(u)/\operatorname{cn}(u) = x$, cuya derivada toma el valor

$$\begin{aligned}\frac{dx}{du} &= \frac{\operatorname{cn}^2 \operatorname{dn} + \operatorname{sn}^2 \operatorname{dn}}{\operatorname{cn}^2} = \operatorname{cn}^{-2} \operatorname{dn} = (x^2+1) \sqrt{1 - k^2 \frac{\operatorname{sn}^2}{\operatorname{cn}^2} \operatorname{cn}^2} = (x^2+1) \sqrt{1 - k^2 \frac{x^2}{x^2+1}} = \\ &= \sqrt{(x^2+1)(x^2+1-k^2x^2)} = \sqrt{(x^2+1)(1+k'^2x^2)}.\end{aligned}$$

Comparando con la integral previa y tomando $s = t/b$, obtenemos

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}} dt = \frac{1}{a} \operatorname{sc}^{-1} \left(\frac{x}{b}, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right).$$

Los casos cubiertos se resumen en una tabla a continuación:

Integral	Primitiva
$\int_0^x ((a^2 - t^2)(b^2 - t^2))^{-1/2} dt$	$= \frac{1}{a} \operatorname{sn}^{-1}(x/b, b/a)$
$\int_x^b ((a^2 + t^2)(b^2 - t^2))^{-1/2} dt$	$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{cn}^{-1}(x/b, b/\sqrt{a^2 + b^2})$
$\int_0^x ((a^2 + t^2)(b^2 + t^2))^{-1/2} dt$	$= \frac{1}{a} \operatorname{sc}^{-1}(x/b, \sqrt{a^2 - b^2}/a)$

3.5.2. Integrales elípticas de segundo tipo

A partir de las integrales elípticas de primer tipo, podemos estudiar otra familia de integrales, de la forma

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2 \pm t^2} \sqrt{b^2 \pm t^2}} dt$$

Partiendo del caso en el que el tomamos la suma en ambos miembros del denominador, fijándose en la expresión de la derivada de cn^{-1} y multiplicando por t^2 se verifica

$$\frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2} \sqrt{b^2 - t^2}} = \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{d}{dt} \operatorname{cn}^{-1} \left(\frac{t}{b}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

y por lo tanto, tomando $t = b \operatorname{cn}(u)$ podemos reescribir la integral de la que partíamos como

$$\frac{b^{-1}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{b^2 \operatorname{cn}^2(u) (-b \operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u))}{\sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{cn}^2(u)} \sqrt{1 - \operatorname{cn}^2(u)}} du = \frac{-b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \operatorname{cn}^2 \left(u, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) du$$

tras sustituir el denominador por $\operatorname{dn}(u) \operatorname{sn}(u)$, para el valor de k dado. Análogamente, podemos dar soluciones a otras integrales, en términos de $\operatorname{sn}^2(u)$ y $\operatorname{dn}^2(u)$, como queda recogido en la tabla siguiente:

I_2	Primitiva
$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2 - t^2}\sqrt{b^2 - t^2}} dt$	$= \frac{b^2}{a} \int \operatorname{sn}^2(u) du$
$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}\sqrt{b^2 - t^2}} dt$	$= \frac{-b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \operatorname{cn}^2(u) du$
$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2 - t^2}\sqrt{t^2 - b^2}} dt$	$= -a \int \operatorname{dn}^2(u) du$

Es conveniente notar que estas integrales, y en general todas las integrales cuyo integrando es una función elíptica de Jacobi elevada al cuadrado, pueden reducirse a una integral en términos de una sola función de Jacobi elevada al cuadrado. Para las 3 integrales de este tipo aquí incluidas, se cumple que

$$\int \operatorname{dn}^2(u) du = u - \int k^2 \operatorname{sn}^2(u) du = k'^2 u - k^2 \int \operatorname{cn}^2(u) du.$$

La posibilidad de reducir el estudio de estas expresiones al estudio de, por ejemplo, $\int \operatorname{dn}^2(u) du$ motiva la definición de una función específica para ella. Se define la función $E(u, k)$ por

$$E(u, k) = \int_0^u \operatorname{dn}^2(v) dv = \int_0^{\operatorname{sn}(u)} \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt.$$

Podemos obtener una forma de Legendre para esta función, tomando el cambio de variable $\theta = \sin^{-1}(\operatorname{sn}(v))$ y $\psi = \sin^{-1}(\operatorname{sn}(u))$, obteniendo

$$L(\psi, k) = \int_0^\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)} d\theta$$

de modo que $E(u, k) = L(\operatorname{am}(u), k)$. Para $\psi = \pi/2$ se define $L(\pi/2, k) = E(k)$.

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. La longitud de la elipse y la lemniscata

El ejemplo que motivó originalmente la búsqueda de estas primitivas fue la longitud de la elipse. Este objeto geométrico resultó ser de especial interés para Johannes Kepler¹ pues enunció que las órbitas planetarias eran elípticas.

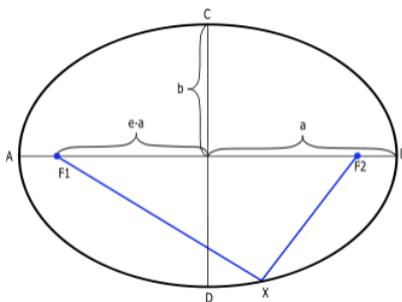


Figura 4.1: Elipse de semiejes a, b con los focos identificados.

Una parametrización habitual de este objeto es

$$\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$. El que el cálculo de la longitud de la curva se resume en

$$L_\gamma = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)} dt$$

con $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, parámetro que habitualmente es llamado *excentricidad*. En la integral anterior puede escogerse un ángulo menor que 2π para calcular la longitud de un arco. Esta integral ha sido cubierta en el apartado anterior y se obtiene

$$L_\gamma = 4aL(\pi/2, e) = 4aE(e).$$

Otra familia de objetos geométricos de interés es la de la lemniscata. Una representación gráfica de esta figura se incluye a continuación:

¹(1571-1630) Fue un matemático, físico y astrónomo del Sacro Imperio Romano Germánico célebre por sus tres leyes que describen el movimiento de los planetas en el Sistema Solar.

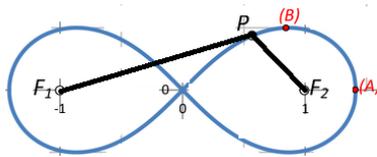


Figura 4.2: Ejemplo de lemniscata con los focos identificados.

Una parametrización de este tipo de curvas, en coordenadas polares, viene dada por

$$r^2 = a^2 \cos(2\theta).$$

Obtenemos entonces una nueva integral en estas coordenadas, para calcular su longitud, medida desde el punto (r, θ) con $r > 0$ y orientada en el sentido en que r crece hasta a :

$$\int_r^a \sqrt{1 + r^2 (d\theta/dr)^2} dr = a^2 \int_r^a \frac{1}{\sqrt{a^4 - r^4}} dr = a^2 \int_r^a \frac{1}{\sqrt{(a^2 - r^2)(a^2 + r^2)}} dr$$

lo que nos lleva a una integral elíptica de primer tipo, cuya evaluación es inmediata para $a = b$ y se sigue que

$$C_r = a^2 \int_r^a \frac{1}{\sqrt{a^4 - t^4}} dt = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{cn}^{-1}(r/a, \sqrt{2}/2).$$

Tomando $r = 0$ obtenemos $C_0 = (a/\sqrt{2})K(\sqrt{2}/2)$ y por lo tanto la longitud total buscada toma el valor $L = 2\sqrt{2}aK(\sqrt{2}/2)$.

Alternativamente, podemos encontrar una relación entre la longitud de la lemniscata y las funciones Γ y B de Euler. Para ello basta notar que

$$4a \int_0^1 (1 - t^4)^{-1/2} dt = a \int_0^1 s^{-3/4} (1 - s)^{-1/2} ds = aB(1/4, 1/2) = \frac{a\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)}$$

ya que se verifica $B(z, w) = \Gamma(z)\Gamma(w)/\Gamma(z + w)$. Además, es conocido que

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

de donde se deduce que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Sustituyendo entonces

$$\Gamma(3/4) = \frac{\pi}{\sin(3\pi/4)\Gamma(1/4)} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma(1/4)}$$

se obtiene

$$C_0 = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\Gamma^2(1/4).$$

Por lo tanto, se verifica $4K(1/\sqrt{2}) = \Gamma^2(1/4)/\sqrt{\pi}$.

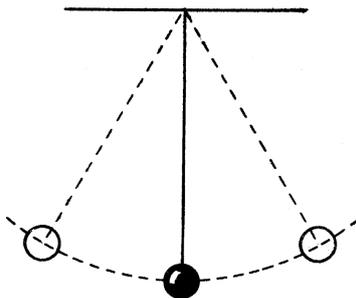


Figura 4.3: Abstracción geométrica de un péndulo.

4.2. El péndulo simple

En esta sección se pretende resolver un problema clásico de mecánica: describir la trayectoria de un péndulo, es decir, una masa puntual suspendida con una cuerda de masa despreciable y longitud l , sometida exclusivamente a la acción de la gravedad, g . La disposición geométrica se ilustra a continuación:

La formulación hamiltoniana resulta ser muy adecuada para estudiar este problema por la sencillez y elegancia de las ecuaciones a las que se llegan, y puede encontrarse en Thornton *et al.*, 2004. Para resolver el problema adecuadamente, hemos de identificar sus grados de libertad. En este caso sólo presenta 1, que podemos describir a través del ángulo que la cuerda define con la vertical. El hamiltoniano H viene definido por la suma de su energía potencial y su energía cinética. Eligiendo un sistema de referencia adecuado, podemos resumirlo en

$$H(\theta, p_\theta) = T + V = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos(\theta).$$

Este hamiltoniano, por ser independiente del tiempo, resulta ser una constante del movimiento. Esta constante, desde un punto de vista físico, es la energía del sistema y define una ecuación implícita $H(\theta, p_\theta) = E$. La derivación del hamiltoniano con respecto de sus variables permite obtener las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{dp_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = mgl \sin(\theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}. \end{aligned}$$

Escribiendo $d\theta/dt = \dot{\theta}$, de la segunda de las ecuaciones se deduce que $p_\theta = \dot{\theta}ml^2$. Tomando $w^2 = g/l$ podemos finalmente escribir

$$\dot{\theta}^2 = 2w^2 \cos(\theta) + e$$

donde $e = E/(ml^2)$. Se llega entonces a una ecuación de la forma

$$wt = \int_{\theta_0}^{\theta_t} \frac{d\theta}{\sqrt{2w^2 \cos(\theta) + e}} = \int_{\theta_0}^{\theta_t} \frac{d\theta}{\sqrt{2w^2 + e - 4w^2 \sin^2(\theta/2)}}$$

que es una integral elíptica de primer tipo. Tomando por sencillez $\theta_0 = 0$ deducimos directamente que

$$wt = \frac{2}{\sqrt{2w^2 + e}} \operatorname{sn}^{-1} \left(\sin(2\theta_t), 2w/\sqrt{2w^2 + e} \right).$$

Se tiene entonces que a partir de

$$K(2w/\sqrt{2w^2 + e}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{2w^2 + e}}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{2w^2 + e - 4w^2 t^2}} dt$$

el período de la oscilación es $T = 4K/w$. Heurísticamente, para valores de energía pequeños, podemos suponer unos valores de θ controlados. Un desarrollo de Taylor en 0 hasta orden 2 de $\sin(\theta) \approx \theta$ permite transformar la primera ecuación del movimiento en

$$\ddot{\theta} = -w^2 \theta$$

que tiene por solución general $C_1 e^{iwt} + C_2 e^{-iwt}$ y resulta ser por tanto una oscilación habitual.

Es de notar cómo la diferencia entre sn y \sin resulta ser sensiblemente mayor cuanto mayor es el parámetro k , como se recoge en la siguiente gráfica.

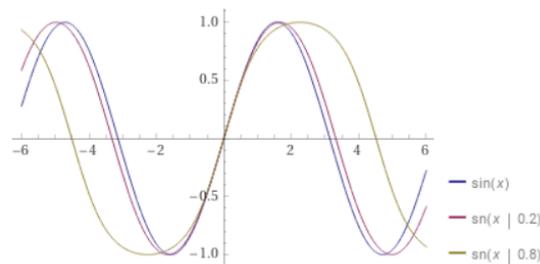


Figura 4.4: Representación \sin y sn para distintos valores de k .

La utilidad de este tipo de integrales reside en que proporcionan soluciones analíticas de ecuaciones que aparecen en modelos físicos con mejor grado de precisión en sus predicciones. Poder abarcar un mayor tipo de ecuaciones y funciones que las verifiquen resulta ser enormemente útil.

En este sentido se incluye el último ejemplo, que desarrolla un modelo físico que describe con extraordinaria bondad las órbitas de los planetas.

4.3. Órbitas en el modelo relativista

En 1687 sir Isaac Newton publicó el célebre *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. La trascendencia de la obra ha sido indiscutible por la variedad y profundidad de los temas que trata. Entre ellos, se recoge la formulación de la interacción gravitatoria entre dos cuerpos, vía un potencial proporcional al producto de sus masas y a $1/r$, que da lugar a órbitas elípticas. El acuerdo entre las predicciones de esta teoría y las observaciones de los astrónomos fue un éxito sin precedentes. Tal era el grado de precisión que en 1846 Urbain Le Verrier predijo la existencia de un

planeta desconocido en el Sistema Solar: Neptuno. Escasos días más tarde, Neptuno fue avistado en la posición predicha.

Sin embargo, existía un planeta cuya órbita escapaba a las predicciones newtonianas: Mercurio. Las órbitas planetarias deberían seguir elipses cuyos ejes permanecieran fijos en el tiempo, pero Mercurio exhibe una trayectoria aparentemente elíptica, pero cuyos ejes se mueven a una tasa fija de unos pocos segundos de arco cada siglo.

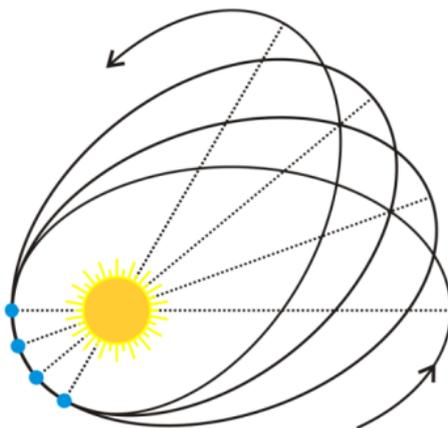


Figura 4.5: Representación de la evolución de la órbita de Mercurio. Es de notar que ésta está contenida en un plano.

Numerosas soluciones *ad hoc* fueron propuestas, desde la presencia de planetas nuevos que corrigieran la trayectoria² hasta polvo no detectable con los instrumentos de la época. Fue motivado por esta anomalía que Albert Einstein propuso una corrección al modelo newtoniano que resultó ser enormemente satisfactoria para explicar la órbita de Mercurio.

De acuerdo a la teoría de la relatividad, es posible estudiar la interacción gravitatoria entre dos cuerpos, de masas M y m respectivamente y que supondremos puntuales, a través de una modificación al potencial newtoniano. Definamos en primer lugar la masa reducida del sistema como

$$\mu = \frac{mM}{m + M}.$$

La interacción ocurre a lo largo de la recta que une los centros de masas, como en el modelo newtoniano. Es decir, es una fuerza central, de modo que el momento angular total \vec{L} se conserva, como puede encontrarse nuevamente en Thornton *et al.*, 2004. Esto fuerza a que el movimiento se restrinja a un plano perpendicular a \vec{L} . Debido a este tipo de interacción, se sigue $m\ddot{\vec{r}}_1 + M\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{0}$, y por lo tanto, tomando $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, el problema puede reducirse al estudio de una partícula de masa μ a una distancia r del sistema de referencia. Se verifica

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{m + M}{M} \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{\mu} \vec{F}_1 = -\frac{1}{\mu} \vec{F}_2$$

²Le Verrier propuso en 1859 la existencia de un nuevo planeta, Vulcano, del que no hubo nunca evidencia experimental.

donde \vec{F}_i es la fuerza a la que está sometida la masa respectiva. El momento angular toma el valor $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ y por lo tanto, en coordenadas polares, $L = \mu r^2 \dot{\theta}$. Denotaremos $l = L/\mu$. El hamiltoniano final en el modelo relativista, tomado por unidad de masa, adopta la forma

$$H(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{2} - \mu \left(\frac{1}{r} + \frac{l^2}{c^2 r^3} \right) = E$$

donde se han sustituido $p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} = l$ y $p_r = m\dot{r}$. p_θ permanece constante³ ya que $\partial H/\partial \theta = 0$. Esto permite deducir que $r^2 \dot{\theta}^2 = l^2/r^2$. Por último, efectuando el cambio de variable $s = 1/r$ y teniendo en cuenta que

$$\frac{ds}{d\theta} = -\frac{1}{s^2} \frac{\dot{s}}{\dot{\theta}}$$

podemos reescribir la ecuación del hamiltoniano para obtener

$$\left(\frac{ds}{d\theta} \right)^2 = \frac{2\mu}{l^2} s - s^2 + \frac{2\mu}{c^2} s^3 + \frac{2E}{l^2}.$$

Por una cuestión de simplicidad, se realiza un cambio de escala de modo que tomando $s = \mu\epsilon/l^2$, $\gamma = 2(\mu/c^2)l^2$ y $\lambda = -2El^2/\mu^2$ obtenemos

$$\left(\frac{d\epsilon}{d\theta} \right)^2 = 2\epsilon - \epsilon^2 + \gamma\epsilon^3 - \lambda = g(\epsilon).$$

Experimentalmente, se puede comprobar que γ toma valores positivos muy pequeños comparados con λ , de ahí que la corrección relativista pueda ser despreciable para casos en los que las distancias sean suficientemente grandes. Además, λ ha de ser mayor que 0 si suponemos que la energía es suficientemente baja como para que el sistema esté efectivamente ligado y las masas no puedan separarse distancias arbitrariamente grandes. Estas consideraciones, habituales en la resolución de problemas en Física que requieren de restricciones matemáticas impuestas por la naturaleza del problema en cuestión, permiten deducir que los ceros de este polinomio son todos ellos distintos, sin más que aplicar las fórmulas correspondientes a los ceros de un polinomio de grado 3. Por lo tanto,

$$g(\epsilon) = \gamma(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2)(\epsilon - \epsilon_3)$$

ordenando ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 en orden creciente. La evaluación con las fórmulas explícitas permite concluir que

$$0 < \epsilon_1 < 1 < \epsilon_2 < 2 < \epsilon_3.$$

Dado que $g(\epsilon) \geq 0$, $\epsilon \in [\epsilon_1, \epsilon_2]$. El intervalo $[\epsilon_3, +\infty)$ no es físicamente aceptable ya que eso conduciría a $r \rightarrow 0$ si $\theta \rightarrow \infty$, lo que ocurriría en el caso de que el sistema tuviera poca energía y tendiera a colapsar gravitatoriamente. Obtenemos de esta manera la ecuación

$$\sqrt{\gamma}\theta = \int \frac{d\epsilon}{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2)(\epsilon - \epsilon_3)}.$$

³Ésta es otra manera de deducir la conservación del módulo de \vec{L} .

Un último cambio de variable, de la forma $\epsilon = \epsilon_1 + \tau^2$ transforma la integral anterior en

$$\sqrt{\gamma}\theta = \int \frac{2 d\tau}{\sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1) - \tau^2} \sqrt{(\epsilon_3 - \epsilon_1) - \tau^2}}$$

que resulta ser una integral elíptica de primer tipo, que podemos evaluar directamente y obtener

$$\sqrt{\gamma}\theta = \frac{2}{\sqrt{\epsilon_3 - \epsilon_1}} \operatorname{sn}^{-1} \left(\tau / \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1}, \frac{\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_3 - \epsilon_1}} \right).$$

Por lo tanto, despejando τ y deshaciendo el cambio de variable, se obtiene una ecuación para la trayectoria de la forma

$$\frac{l^2}{\mu r} = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\sqrt{\gamma(\epsilon_3 - \epsilon_1)}}{2} \theta \right). \quad (4.1)$$

Los ciclos se completan a intervalos $\Delta\theta = 4K/\sqrt{\gamma(\epsilon_3 - \epsilon_1)}$. Por lo tanto, el desfase del perihelio con cada ciclo completo es

$$\Delta\Phi = \frac{4K}{\sqrt{\gamma(\epsilon_3 - \epsilon_1)}} - 2\pi.$$

En el caso del Mercurio, este desfase es aproximadamente $\Delta\Phi_M \approx 43''$ / siglo.

Por último, si se desarrollan las raíces ϵ_i del polinomio g en función de γ y tomando $e^2 = 1 + 2El^2/\mu^2 = 1 - \lambda$ se obtienen

$$\epsilon_1 = 1 - e - \frac{\gamma(1 - e)^3}{2e} + O(\gamma^2)$$

$$\epsilon_2 = 1 + e + \frac{\gamma(1 + e)^3}{2e} + O(\gamma^2)$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{\gamma} - 2 + O(\gamma)$$

de modo que la ecuación (4.1) puede ser resumida en

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{l^2} (\rho + \sigma \operatorname{sn}^2(\zeta\theta))$$

y donde se verifica

$$\rho = 1 - e - \frac{\gamma(1 - e)^3}{2e} + O(\gamma^2),$$

$$\sigma = 2e + \gamma(3e + 1/e) + O(\gamma^2),$$

$$\zeta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4}(3 - e) + O(\gamma^2).$$

De esta manera, en el caso particular de $\gamma = 0$ y por lo tanto $k = 0$ (ya que el denominador tiende a ∞), se obtienen $\rho = 1 - e$, $\sigma = 2e$, $\zeta = 1/2$ y la ecuación (4.1) se reduce a

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{l^2} (1 - e \cos(\theta))$$

que representa una órbita clásica de excentricidad e .

Bibliografía

- ASH, Robert B, 2014. *Complex variables*. Academic Press.
- BRIZARD, Alain J., 2007. A primer on elliptic functions with applications in classical mechanics. Disp. desde DOI: 10.48550/ARXIV.0711.4064.
- GALINDO SOTO, Félix; GÓMEZ PÉREZ, Javier; SANZ GIL, Javier y TRISTÁN VEGA, Luis Alberto, 2019. *Guía práctica de variable compleja y aplicaciones*. Universidad de Valladolid.
- JONES, Gareth y SINGERMAN, David, 1987. *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*. ISBN 0521308933. Disp. desde DOI: 10.2307/3617101.
- LANG, Serge, 1987. *Elliptic functions*. Springer.
- LAWDEN, Derek F, 1989. *Elliptic functions and applications*. Springer, Applied Mathematical Sciences (Volumen 80).
- MARKUSHEVICH, A. I., 1974. *Teoría de las Funciones Analíticas*. (2 tomos), Mir, Moscú.
- PASTRAS, Georgios, 2017. Four lectures on Weierstrass elliptic function and applications in classical and quantum mechanics. *arXiv preprint arXiv:1706.07371*.
- SNAPÉ, Jamie, 1991. Application of Elliptic Functions in Classical and Algebraic Geometry. *Collingwood College University of Durham, Inggris*.
- THORNTON, S.T. y MARION, J.B., 2004. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Brooks/Cole. ISBN 9780534408961.
- VILLANUEVA, Jay, [s.f.]. Elliptic integrals and some applications, Florida Memorial University.
- ZHAI, Hong-Cun; CAO, Jian y ARJIKA, Sama, 2023. On Some Expansion Formulas for Products of Jacobi's Theta Functions. *Mathematics*. Vol. 11, n.º 3. ISSN 2227-7390. Disp. desde DOI: 10.3390/math11030588.

Apéndice A

Resultados auxiliares

Teorema A.1 (*principio del argumento*). Sea f una función meromorfa y sea γ un camino en \mathbb{C} cerrado tal que f es analítica y no nula en γ . Denotemos por Z_f los ceros de f y m_z el orden de cada cero. Denotemos por P_f sus polos y por n_z el orden de cada polo. Si denotamos por $n(\gamma, a)$ al orden de γ en torno al punto a entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z_f} n(\gamma, a) m_a - \sum_{a \in P_f} n(\gamma, a) n_a$$

Lema A.2 (*criterio M de Weierstrass*). Sea $A \subset \mathbb{C}$, $f_n(z)$ una sucesión de funciones $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ tales que:

- Para cada n , existe un $M_n > 0$ tal que $\|f_n\|_{\infty} < M_n$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en A y absolutamente para $z \in A$.

Teorema A.3 (*de convergencia de series de funciones analíticas*). Sea R un dominio de \mathbb{C} , $f_n(z)$ una sucesión de funciones analíticas en R tales que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ en los compactos de R . Entonces $f(z)$ es analítica y $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$ converge a $f'(z)$ en los compactos de R .

Teorema A.4 (*de la aplicación abierta*). Sea R un dominio y $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación analítica. Entonces es abierta.

Teorema A.5 (*criterio del cociente*). Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie formal. Llamando

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

supuesto que éste existe, la serie converge absolutamente si $L < 1$ y diverge para $L > 1$.

Teorema A.6 (*radio de convergencia*). Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie formal. Llamando

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n},$$

la serie converge absolutamente en $B(z_0, 1/\rho)$, admitiendo que $1/\rho$ pueda ser finito o infinito.