Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

SUCESIONES ENTERAS AUTOGENERADAS Y AUTODEFINIDAS

Autor/a: Álvaro Casas Zan
Tutor/es/as: José Enrique Marcos Naveira
2022/2023

Índice general

Introducción

La *On-line Encyclopedia of Integer Sequences* [OEIS] es una base de datos en línea de sucesiones de números enteros lanzada por Neil J. A. Sloane en 1996. La OEIS almacena miles de sucesiones así como distintas propiedades destacables de las mismas. También incluye referencias a libros y artículos en los que se tratan las sucesiones. Es el principal recurso disponible para hallar información acerca de cualquier sucesión de enteros.

La motivación principal de este trabajo es, haciendo uso de la información proporcionada por la OEIS, hablar de un tipo de sucesiones muy curioso y particular: las sucesiones autogeneradas o autodefinidas. Llamamos sucesión autogenerada a aquella sucesión que hace uso de sí misma para definirse. Este concepto puede resultar confuso, aunque esto no es ningún problema. Podemos hacer un pequeño adelanto de las sucesiones que veremos durante el trabajo, y así quizá con ejemplos se entienda a qué tipo de sucesiones nos referimos.

El Capítulo 1 se centra en la sucesión de Kolakoski. Esta sucesión está formada únicamente por unos y doses. Se define de la siguiente forma: el n-ésimo término de la sucesión es la longitud de la n-ésima racha (entendiendo racha como segmento de la sucesión en el que se repite el mismo número). A esto nos referimos con "autogenerada" o "autodefinida". Los términos de la sucesión toman un valor u otro en función de las rachas de la propia sucesión. A mí me resulta una definición sencilla y elegante, pero a su vez bastante difícil de visualizar mentalmente. Por ello, observemos cómo empieza esta sucesión.:

$$\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2,2}^{2},\dots$$

He señalado sobre los término de la sucesión las longitudes de las rachas para mayor claridad. Vemos que el n-ésimo término, en efecto, es igual a la longitud de la n-ésima racha (por ejemplo, el cuarto término es un 1 y la cuarta racha tiene longitud 1). De hecho, la sucesión coincide con la sucesión de las longitudes de sus rachas. Esto es un hecho cuanto menos sorprendente. ¿Quién una hubiera imaginado que algo así sería posible? Y sin embargo, esta no es la única sucesión que coincide con la sucesión de las longitudes de sus rachas.

En el Capítulo 3 se hablará sobre la sucesión Golomb. Esta sucesión es parecida a la de Kolakoski: aquí el n-ésimo término es también la longitud de la n-ésima racha de la sucesión. Sin embargo, la sucesión de Golomb estña definida sobre el conjunto de todos los números naturales. La sucesión empieza con el 1 y cada vez que termina una racha pasa al siguiente número natural.

$$\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{3,3}^{2},\overbrace{4,4,4}^{3},\overbrace{5,5,5}^{3},\overbrace{6,6,6,6}^{4},\overbrace{7,7,7,7}^{4},\overbrace{8,8,8,8}^{4},\dots$$

Podemos comprobar que, por ejemplo, el sexto término es un 4 y la sexta racha tiene longitud 4. Y tal y como le ocurre a la sucesión de Kolakoski, la sucesión de Golomb también coincide con la sucesión de las longitudes de sus rachas. Aunque estos hechos resultan muy interesantes, esto no es más que la punta del iceberg. A lo largo de los capítulos veremos más sucesiones autogeneradas y más propiedades llamativas que estas cumplen.

Cabe destacar que, aunque algunas de las sucesiones que veremos parecen ser difíciles de predecir, ninguna de ellas es uan sucesión pseudoaleatoria. Evidentemente, la sucesión de Golomb que acabamos de mencionar no lo es, ya que es una sucesión estrictamente creciente, lo cual destruye cualquier atisbo de pseudoaleatoriedad. Ni siquiera lo es la sucesión de Kolakoski, que parece tener un carácter más errático, pues hemos comentado anteriormente que hay ciertas secuencias de números que es imposible que aparezcan en ella. Sin embargo, estas sucesiones sí que pueden ser de interés para campos como la criptografía, a pesar de no ser pseudoaleatorias.

Para este trabajo se han consultado artículos de diversos autores, dado que hablaremos de distintas sucesiones que no tienen por qué ser estudiadas conjuntamente. Todos los textos utilizados pueden encontrarse en la bibliografía. En ella también se han incluido algunos artículos que no se han consultado pero que se han incluido por su valor histórico. Estas son [Bir], [Eu], [Had], [Thu] y [Thu2].

Sin duda, lo que a mi parecer es lo más destacable del contenido de este trabajo no es tanto la utilidad que se pueda dar a las sucesiones que veremos, sino la belleza del carácter autorreferencial de sus definiciones y las peculiaridades que aparecen en estas sucesiones debido a esa misma autorreferencialidad. Ese es el verdadero objetivo del trabajo: observar qué hace especial y única a cada una de las sucesiones autogeneradas que he escogido. Espero que este viaje a través de estas fascinantes sucesiones le sea de agrado al lector.

Capítulo 1

La sucesión de Kolakoski

1.1. Nociones básicas de la sucesión

La sucesión de Kolakoski recibe su nombre del matemático William G. Kolakoski, quien la describió en 1965 [Kol, pág 674]. Sin embargo, esta ya había sido descrita por Rufus Oldenburger en 1939 [Old], por lo que a veces es nombrada como la sucesión de Oldenburger-Kolakoski.

Es necesario explicar unos conceptos previos que utilizaremos en este capítulo y en capítulos posteriores.

Definición 1. *Llamamos* ***palabra*** *a un segmento o conjunto (finito o infinito) de elementos consecutivos de una sucesión.*

Definición 2. *Llamamos* ***racha*** *a una palabra de números iguales consecutivos dentro de una sucesión.*

Ahora estamos en condiciones de definir la sucesión de Kolakoski.

Definición 3. *La* ***sucesión de Kolakoski*** $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es la sucesión sobre el alfabeto* $\{1,2\}$ *definida de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} &K_1 = 1 \\ &K_n = \textit{longitud de la } n\textit{-ésima racha de la sucesión, para todo } n \geq 2 \end{aligned}$$

Notación. Durante todo el documento, consideraremos que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Al escribir los primeros términos de la sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es observable el comportamiento que describe esta definición:

$$\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1}^{1},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1}^{1},\dots$$

Esto pone de manifiesto lo maravillosa que es esta sucesión. Tanto es así, que *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences* [OEIS] denota la sucesión de Kolakoski como la A000002 de todo su compendio de sucesiones.

Cabe destacar que si aplicamos la misma definición pero con un 2 como primer elemento del que partir, obtenemos la sucesión de Kolakoski aunque sin su primer término.

Por otro lado, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión que resulta de aplicar de manera alternada dos sustituciones σ_1 (para los elementos en posiciones impares) y σ_2 (para los elementos en posiciones pares) definidas de la siguiente forma [BaSi]:

$$\sigma_1 : \begin{array}{c} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 11 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \sigma_2 : \begin{array}{c} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 22 \end{array}$$

Para ver esto, definimos una sustitución τ a partir de σ_1 y σ_2:

$$\tau(a_n) = \begin{cases} \sigma_1(a_n) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sigma_2(a_n) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \tag{1.1}$$

Tomando 12 como punto de partida, podemos generar la sucesión de Kolakoski aplicando τ repetidas veces:

$$12 \mapsto 122 \mapsto 12211 \mapsto 1221121 \mapsto 1221121221 \mapsto 122112122122112 \mapsto \dots$$

Debido a que la sucesión de Kolakoski está formada únicamente por unos y doses y que empieza con un 1, las rachas impares (la primera racha, la tercera, la quinta, etc.) serán de unos y las pares (la segunda racha, la cuarta la sexta, etc.) serán de doses. En esencia, cuando se aplica τ sobre a_n, τ interpreta dicha número como la longitud de la racha n-ésima, que será de unos si n es impar y de doses si n es par. Este comportamiento es exactamente la definición de la sucesión de Kolakoski, luego si partimos de 12 podemos generar de esta forma la sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2. Propiedades de la sucesión de Kolakoski

En esta sección nos dedicaremos al estudio de ciertas propiedades que presenta la sucesión de Kolakoski, fruto de su peculiar definición, y que la dotan de cierto interés.

Tal y como está definida la sucesión de Kolakoski, hay ciertas palabras que no pueden darse en ella [BorClo].

Lema 4. *La sucesión de Kolakoski $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no presenta en ella ninguna de las siguientes palabras:*

1. $(1,1,1,\dots)$ *y* $(2,2,2,\dots)$.
2. $(1,2,1,2,1)$, $(2,1,2,1,2)$, $(1,1,2,2,1,1)$ *y* $(2,2,1,1,2,2)$.
3. $(1,1,2,1,1,2,1,1,2)$, $(2,2,1,2,2,1,2,2,1)$, $(1,2,2,1,2,2,1,2,2)$ *y* $(2,1,1,2,1,1,2,1,1)$.
4. $(2,1,2,1,1,2,1,1,2,1,2)$ *y* $(2,1,2,1,1,2,2,1,2,1,2)$.
5. $(2,1,2,2,1,1,2,1,2,2,1,1,2,1,1,2,2)$ *y* $(2,1,2,1,1,2,2,1,2,2,1,1,2,1,1,2,2)$.
6. $(2,1,2,2,1,1,2,1,1,2,2,1,2,2,1,1,2)$ *y* $(2,1,2,2,1,1,2,1,1,2,2,1,2,1,1,2,2)$.
7. $(2,1,2,2,1,1,2,1,1,2,2,1,2,2,1,1,2,1,1,2,2)$.

Demostración. Es obvio que las palabras de (*1.*) no pueden aparecer, puesto que la sucesión está formada por unos y doses, luego las rachas de números iguales deben tener longitud 1 o 2.

Como las palabras de (*2.*) tienen 3 rachas de longitud 1, no pueden aparecer en la sucesión de Kolakoski. Si esto ocurriera, entonces también debería aparecer la palabra $(1,1,1)$, lo cual hemos visto que no es posible.

De igual manera, no puedan aparecer las palabras de (*3.*), porque las longitudes de sus rachas forman las palabras de (*2.*). Aplicando este razonamiento de forma similar, probamos que tampoco pueden aparecer las palabras de (*4.*), (*5.*), (*6.*) y (*7*). □

Los siguientes corolarios son consecuencia directa del Lema 4.

Corolario 5. *La sucesión de Kolakoski $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sólo puede presentar las siguientes palabras de 3 números: 112, 121, 122, 211, 212 y 221.*

Demostración. Las palabras 111 y 222 no puede aparecer en la sucesión como consecuencia del Lema 4. □

Corolario 6. *La sucesión de Kolakoski $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sólo puede los siguientes 18 palabras de 6 números: 112112, 121121, 122122, 211211, 212212, 221221, 112122, 112212, 121122, 121221, 211212, 211212, 122112, 212112, 122121, 221121, 212211 y 212211.*

Demostración. Las 6 primeras palabras no son más que repetir cada una de las palabras de 3 números del Corolario 5.

Las 12 palabras siguientes son consecuencia de concatenar dos palabras de 3 números del Corolario 5 de tal forma que no aparezca ninguna de las palabras imposibles descritas en Lema 4.2. De hecho, las 6 últimas palabras no son más que las 6 palabras anteriores, pero concatenando las palabras de 3 números en orden inverso (122112 corresponde a 112122, ...). □

Si la sucesión de Kolakoski fuera una sucesión aleatoria de unos y doses, podríamos encontrar tres unos seguidos o tres doses seguidos con relativa facilidad, por ejemplo. Sin embargo, no es el caso. De hecho, vemos que hay multitud de palabras diferentes que no llegan a aparecer en la sucesión. El conocer que hay palabras que no pueden aparecer en la sucesión de Kolakoski nos indica que esta sucesión no es pseudo-aleatoria y la hace merecedora de estudiar su comportamiento.

Otro aspecto muy interesante acerca de la sucesión de Kolakoski es su no periodicidad. Uno podría llegar a pensar que con todas las restricciones sobre la aparición de palabras que hemos visto, llegaría un punto en el que la sucesión de Kolakoski empezaría a repetirse. Sin embargo, podemos demostrar que no es el caso.

Definición 7. *Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es* ***eventualmente periódica*** *si existen $p, m \in \mathbb{N}$ tales que $x_{i+1}\dots x_{i+p} = x_{i+p+1}\dots x_{i+2p}$ para todo $i \geq m$. En ese caso, se dice que p es el periodo de la sucesión si es el mínimo número natural que cumple la anterior propiedad.*

Teorema 8. *La sucesión de Kolakoski no es eventualmente periódica.*

Demostración. Supongamos que la sucesión de Kolakoski $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente periódica con período mínimo p. Entonces los términos de la sucesión a partir de cierto término en adelante son una palabra de longitud p que se repite infinitamente. Sea esta palabra A.

Por definición de la sucesión de Kolakoski, la palabra formada por las longitudes de las rachas de A también debe aparecer en la sucesión. Denotemos esta palabra como B y sea su longitud q. Como A se repite en la sucesión a partir de cierto término , B también debe repetirse a partir de cierto término. Además, se cumple que $q < p$, luego hemos encontrado un período menor que p y hemos llegado a un absurdo. □

Cabe destacar que la no eventual periodicidad es obviamente una condición más fuerte que la no periodicidad. Este es un teorema con una demostración muy sencilla, pero que nos proporciona una información muy poderosa acerca de la sucesión de Kolakoski. La no periodicidad es una muestra más de que esta sucesión posee un carácter extraño y poco esperable de una sucesión con una definición muy sencilla y formada únicamente por unos y doses.

La Figura 1.1 representa los primeros 3300 términos de la sucesión de Kolakoski, identificando los unos como giros de 90º en sentido horario y los doses como giros de 90º en sentido antihorario. Esta figura ha sido generada mediante el Programa 1. Podemos observar cómo la sucesión no empieza a repetirse en ningún momento (dentro de esos 3300 primeros términos), tal y como indica el Teorema 8.

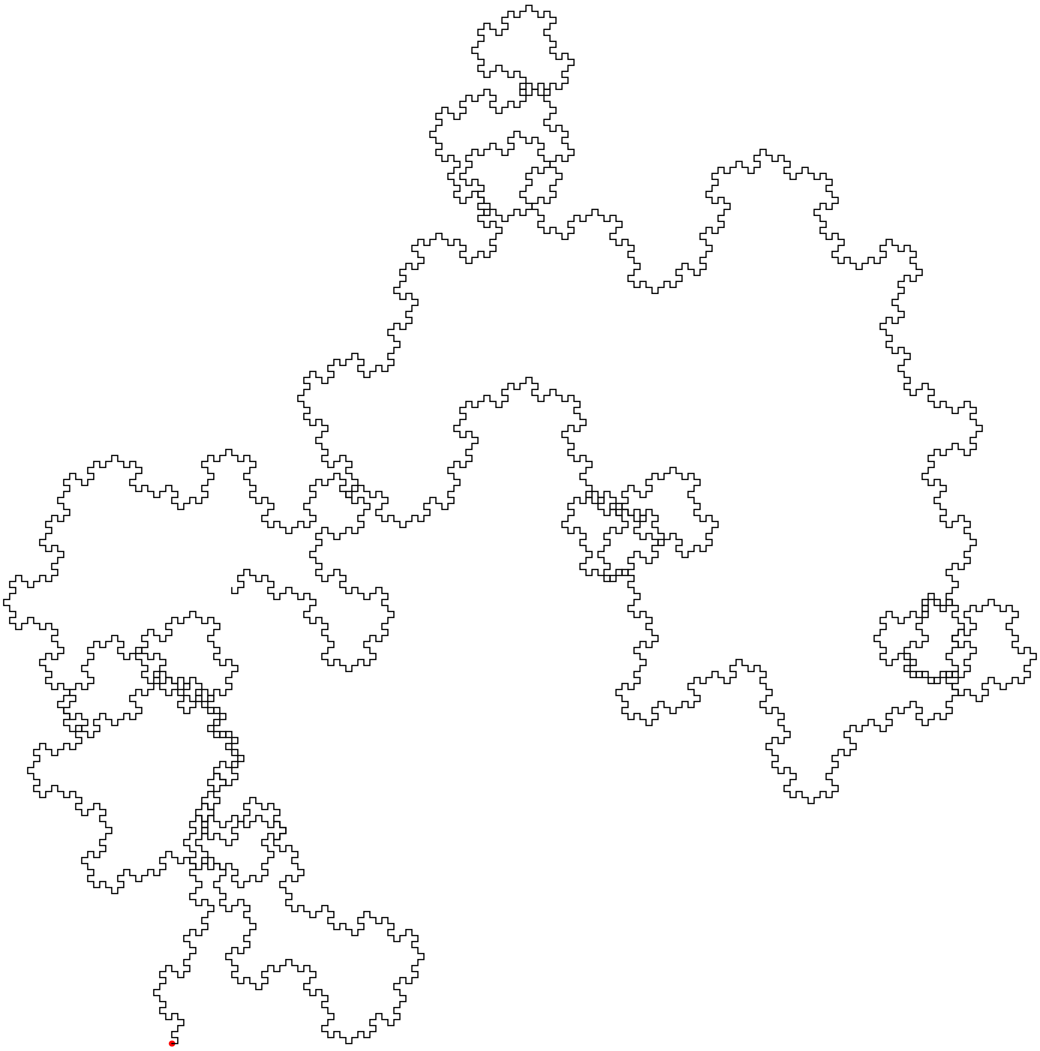

Figura 1.1: Representación de los primeros 3300 términos de la sucesión de Kolakosky

1.3. Fórmula recursiva

Muchas de las sucesiones más famosas de las matemáticas resultan ser recursivas (como la sucesión de Fibonacci o los números de Lucas) y por tanto tienen una fórmula recursiva que las define. La sucesión de Kolakoski es también una sucesión recursiva y puede ser encontrar una fórmula recursiva para ella. Sin embargo, veremos que esta fórmula resulta ser más compleja que las fórmulas correspondientes a las dos sucesiones que acabamos de mencionar como ejemplos.

La búsqueda de esta fórmula viene perfectamente detallada en el artículo escrito por Bertran Steinsky [Ste]. Para ello, es necesario definir unas sucesiones asociadas a la de Kolakoski y demostrar unos resultados previos que nos van a ser necesarios.

La sucesión de Kolakoski tiene dos sucesiones estrechamente ligadas a ella. Estas son las siguientes:

Definición 9. *Sea $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Kolakoski.*

- *La sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste en las sumas parciales de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, $S_n = \sum_{i=1}^{n} K_n$.*
- *La sucesión $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se define como $k_n = \text{mín}\{1 \leq k \leq n : S_n \geq n\}$.*

La sucesión $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es especialmente útil para estudiar el comportamiento y las propiedades de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, como veremos más adelante.

Ahora pasamos a formular unos resultados sobre estas dos nuevas sucesiones que usaremos para encontrar la fórmula recursiva que deseamos.

Lema 10. *Para todo $n \geq 2$, $k_n = k_{n-1} + n - S_{k_{n-1}}$.*

Demostración. Primero, podemos ver que se cumple las siguientes desigualdades:

$$n - 1 \leq S_{k_{n-1}} \leq n.$$

La primera desigualdad es cierta por definición de k_{n-1}. Falta probar la otra desigualdad. Si $S_{k_{n-1}} \geq n+1$, tendríamos que $S_{k_{n-1}-1} \geq n-1$, lo que contradice el hecho de que $k_{n-1} = \text{mín}\{j : S_j \geq n-1\}$. Por tanto, la segunda desigualdad es también cierta.

Ahora bien, si $S_{k_{n-1}} = n - 1$, entonces $k_n = k_{n-1} + 1$ necesariamente, y sustituyendo obtenemos $k_n = k_{n-1} + 1 = k_{n-1} + n - S_{k_{n-1}}$.

Si por el contrario $S_{k_{n-1}} = n$, entonces es obvio que $k_n = k_{n-1}$ y entonces $k_n = k_{n-1} = k_{n-1} + n - S_{k_{n-1}}$. En ambos caso se cumple la igualdad que queríamos probar.

□

Lema 11. *Para $n \geq 2$, $k_n = k_{n-1} + |K_n - K_{n-1}| = 1 + \sum_{i=2}^{n} |K_i - K_{i-1}|$.*

Demostración. Definamos la siguiente construcción: empezamos con K_1 unos, luego K_2 doses, después K_3 unos y así sucesivamente. Esta construcción es la definición de la propia sucesión de Kolakoski. Además, al igual que en la demostración del Lema 10, tras realizar k_{n-1} pasos de esta construcción pueden darse dos situaciones.

El primer caso es que $S_{k_{n-1}} = n-1$, lo que significa que tras k_{n-1} pasos de la construcción habremos obtenido $n-1$ términos de la sucesión de Kolakoski. Como hemos construido hasta el término K_{n-1} y hemos utilizado rachas para realizar dicha construcción, entonces K_n debe ser distinto de K_{n-1}. Por tanto, $k_n - k_{n-1} = 1 = |K_n - K_{n-1}|$.

El segundo caso es que $S_{k_{n-1}} = n$. Si $K_{k_{n-1}}$ fuera igual a 1, entonces $S_{k_{n-1}-1} = S_{k_{n-1}} - K_{k_{n-1}} = n-1$, lo que contradeciría que $k_{n-1} = \text{mín}\{j : S_j \geq n-1\}$. Entonces tenemos $K_{k_{n-1}} = 2$, lo cual significa que en la construcción que hemos definido previamente hemos añadido 2 números iguales en el paso k_{n-1}, así que podemos deducir que $K_n = K_{n-1}$. Por tanto, $k_n - k_{n-1} = 0 = |K_n - K_{n-1}|$.

La segunda igualdad es el resultado de sustituir la primera igualdad en ella misma sucesivas veces:

$$k_n = k_{n-1} + |K_n - K_{n-1}| = k_{n-2} + \sum_{i=n-1}^{n} |K_i - K_{i-1}| = \cdots = 1 + \sum_{i=2}^{n} |K_i - K_{i-1}|.$$

□

n	K_n
1	1
2	2
3	2
4	1
5	1
6	2
7	1
8	2
9	2
10	1
11	2
12	2
13	1
14	1
15	2
16	1
17	1
18	2
19	2
20	1
21	2
22	1
23	1
24	2
25	1
26	2
27	2
28	1
29	1
30	2
31	1
32	1
33	2
34	1
35	2
36	2
37	1
38	2
39	2
40	1
$\vdots$	$\vdots$

Tabla 1.1: Primeros términos de la sucesión de Kolakoski $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

n	S_n
1	1
2	3
3	5
4	6
5	7
6	9
7	10
8	12
9	14
10	15
11	17
12	19
13	20
14	21
15	23
16	24
17	25
18	27
19	29
20	30
21	32
22	33
23	34
24	36
25	37
26	39
27	41
28	42
29	43
30	45
31	46
32	47
33	49
34	50
35	52
36	54
37	55
38	57
39	59
40	60
$\vdots$	$\vdots$

Tabla 1.2: Primeros términos de la sucesión de sumas parciales de la sucesión de Kolakoski.

n	k_n
1	1
2	2
3	2
4	3
5	3
6	4
7	5
8	6
9	6
10	7
11	8
12	8
13	9
14	9
15	10
16	11
17	11
18	12
19	12
20	13
21	14
22	15
23	15
24	16
25	17
26	18
27	18
28	19
29	19
30	20
31	21
32	21
33	22
34	23
35	24
36	24
37	25
38	26
39	26
40	27
$\vdots$	$\vdots$

Tabla 1.3: Primeros términos de la sucesión $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ahora vamos a probar las siguientes fórmulas introducidas por Bordellès y Cloitre [BorClo], que nos serán necesarias para alcanzar la fórmula recursiva que buscamos.

Proposición 12. *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$K_{S_n} = \frac{3 + (-1)^n}{2} \quad y \quad K_{1+S_n} = \frac{3 + (-1)^{n+1}}{2}.$$

Demostración. Primero, hemos de darnos cuenta de que la primera racha de la sucesión de Kolakoski es $\{1\}$ y después se van alternando rachas de doses y de unos. Con lo cual, la n-ésima racha es $\{1\}$ o $\{1,1\}$ si n es impar, y es $\{2\}$ o $\{2,2\}$ si es par.

Ahora vamos a probar que S_n es el índice del último número de la n-ésima racha, para todo n. Vamos a probarlo por inducción.

Esto es obvio para $n = 1$. Ahora suponemos que esto se cumple para un cierto n.

$$S_{n+1} = S_n + K_{n+1} = \begin{cases} S_n + 1 \\ \text{o} \\ S_n + 2 \end{cases} = \begin{cases} \text{índice del único elemento de la } (n+1)\text{-ésima racha} \\ \text{o} \\ \text{índice del último elemento de la } (n+1)\text{-ésima racha} \end{cases}$$

La anterior igualdad es cierta por lo siguiente: si $K_{n+1} = 1$, la $(n+1)$-ésima racha tiene longitud 1, luego $S_{n+1} = S_n + 1$ es el índice del único elemento de la $(n+1)$-ésima racha; y si $K_{n+1} = 1$, la $(n+1)$-ésima racha tiene longitud 2 y $S_{n+1} = S_n + 1$ es el último elemento de la $(n+1)$-ésima racha.

Ya estamos en condiciones de probar el resultado. Sabemos entonces que K_{S_n} es el valor del último elemento de la n-ésima racha de la sucesión de Kolakoski. Por la observación que hemos al inicio de la demostración, $K_{S_n} = 1$ si n es impar y $K_{S_n} = 2$ si es par, lo que nos da la fórmula que queríamos probar. Para el caso de K_{1+S_n} el razonamiento es similar: $K_{1+S_n} = 1$ si n es par y $K_{1+S_n} = 2$ si es impar, luego tenemos nuestra fórmula. □

Gracias a la Proposición 12, podemos obtener una fórmula que relaciona de forma inequívoca las sucesiones $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Corolario 13. *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$K_n = \frac{3 + (-1)^{k_n}}{2}.$$

Demostración. Aplicando el Lema 10, vemos que $S_{k_n} = n$ si $k_n \neq k_{n+1}$, o por el contrario $S_{k_n} = n+1$ si $k_n = k_{n+1}$. Por lo tanto, en el caso de que $k_n \neq k_{n+1}$:

$$K_n = K_{S_{k_n}} = \frac{3 + (-1)^{k_n}}{2}.$$

Y en el caso de que $k_n = k_{n+1}$:

$$K_{n+1} = K_{S_{k_n}} = \frac{3 + (-1)^{k_n}}{2} = \frac{3 + (-1)^{k_{n+1}}}{2}.$$

□

Esta fórmula nos será muy útil, pues para llegar la fórmula recursiva de la sucesión de Kolakoski, nos va a interesar poner esta en términos de la sucesión $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Del Lema 11 y la fórmula del Corolario 13 podemos deducir el siguiente corolario:

Corolario 14. $K_n = \frac{(-1)^{k_n}+1}{2} + 1$, *luego* $K_n \equiv k_n \pmod 2$.

Del Lema 10 y el Corolario 14 se deduce este nuevo corolario:

Corolario 15. *Para* $n \geq 2$, $k_n = n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k_{n-1}}((-1)^{k_i}+1)$.

Finalmente, este último corolario es consecuencia del Corolario 15.

Corolario 16. *Para* $n \geq 3$, $k_n = k_{n-1} + 1 - \frac{1}{2}(k_{n-1}-k_{n-2})((-1)^{k_{k_{n-1}}}+1)$.

Por fin estamos en condiciones de demostrar la fórmula recursiva para la sucesión de Kolakoski.

Teorema 17. *Para* $n \geq 3$, *tenemos*

$$K_n = K_{n-1} + (3-2K_{n-1})\left(n - \sum_{i=1}^{1+\sum_{j=2}^{n-1}|K_j-K_{j-1}|} K_i\right) \tag{1.2}$$

$$= K_{n-1} + (3-2K_{n-1})\left(n - \sum_{i=1}^{1+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{K_j-K_{j-1}}{3-2K_{j-1}}} K_i\right) \tag{1.3}$$

$$= K_{n-1} + (3-2K_{n-1})\left(1 - \frac{1}{2}\frac{K_{n-1}-K_{n-2}}{3-2K_{n-2}}\left(1+(-1)^{\left(K_{1+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{K_j-K_{j-1}}{3-2K_{j-1}}}\right)}\right)\right). \tag{1.4}$$

Demostración. De la fórmula del Corolario 13 obtenemos la siguiente igualdad:

$$|K_n - K_{n-1}| = \frac{K_n - K_{n-1}}{3-2K_{n-1}}.$$

Usando los Lemas 10 y 11, podemos deducir que

$$|K_n - K_{n-1}| = n - \sum_{i=1}^{1+\sum_{j=2}^{n-1}|K_j-K_{j-1}|} K_i,$$

lo que nos permite probar, junto con la igualdad anterior, las igualdades (1.2) y (1.3) del teorema. Para demostrar la igualdad (1.4), basta con aplicar el Lema 11 y el Corolario 16.

□

Finalmente hemos conseguido representar la sucesión de Kolakoski mediante no sólo una, sino tres fórmulas recursivas equivalentes. Es evidente que son fórmulas complejas y no demasiado prácticas. Sin embargo, esto nos da una noción del comportamiento caprichoso de la sucesión a pesar de su sencilla definición.

1.4. Densidad de unos

El foco de esta sección es el estudio de la densidad de unos dentro de la sucesión de Kolakoski $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 18. *Definimos la sucesión $(o_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como la sucesión de las frecuencias de unos en la sucesión de Kolakoski $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, $o_n = |\{1 \le i \le n : K_i = 1\}|$.*

Parece una suposición razonable el pensar que la densidad de unos en $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de $\frac{1}{2}$, es decir, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Sin embargo, esto no es más que una conjetura. No obstante, ha habido ciertos intentos para probarla y algunos autores han tratado de conseguir una cota superior lo más ajustada posible para $\lim_{n\to\infty} |\frac{o_n}{n} - \frac{1}{2}|$. Cabe destacar el acercamiento empleado por Chvátal [Chv] y Nilsson [Nil] para hallar una cota superior de la densidad de unos, el cual vamos a comentar en profundidad.

Primero veamos la siguiente construcción:

$$d = 3 \left\{ \begin{array}{lcccccccccccccccc} K = & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2\ldots \\ K = & 1 & & 2 & & 2 & 1 & 1 & & 2 & 1 & & 2 & & 2 & 1\ldots \\ K = & 1 & & & & 2 & & 2 & & 1 & 1 & & & & 2 & 1\ldots \end{array} \right.$$

Figura 1.2: Construcción obtenida escribiendo la sucesión de Kolakoski en varias filas, de tal forma que cada número indica la longitud de la racha que tiene justo encima

Lo que hemos hecho es escribir la sucesión de Kolakoski varias veces de tal forma de que cada número indica la longitud de la racha que tiene justo encima. Debido a la definición de la sucesión de Kolakoski (Definición 3), es obvio que esta construcción podemos hacerla para cualquier $d \in \mathbb{N}$.

Fijemos un $d \in \mathbb{N}$. Ahora usaremos la construcción de la Figura 1.2 como punto de partida para construir un grafo dirigido. Para ello, usaremos como vértices las columnas que tienen altura d, es decir, aquellas que que tienen un número en cada fila. De cada vértice saldrá una arista hacia el vértice que corresponda a la columna de altura d inmediatamente posterior. En esa arista escribiremos la palabra de la primera fila que separa las dos columnas que representan ambos vértices, incluyendo el primer elemento de la columna posterior y excluyendo el primer elemento de la columna anterior. A este grafo lo denotaremos por G_d, con $d \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, estos serían los grafos G_1, G_2 y G_3. En la Figura 1.2 están señaladas dos columnas de altura 1, dos de altura 2 y tres de altura 3, junto con las palabras de la primera fila que las separan. En cada grafo está marcada su correspondencia en términos de vértices y aristas.

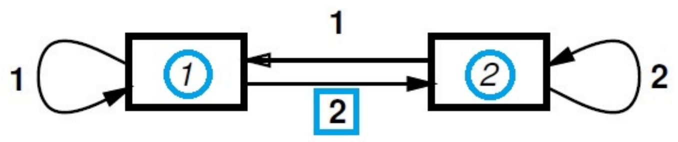

Figura 1.3: Grafo G_1 [Chv]

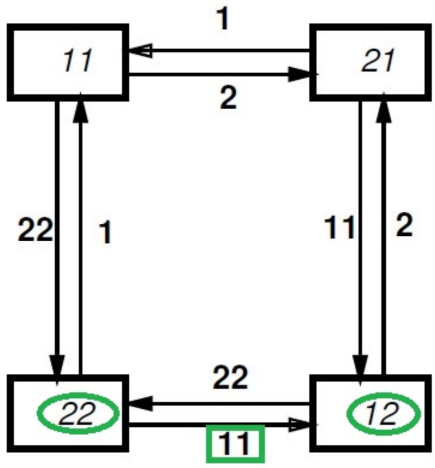

Figura 1.4: Grafo G_2 [Chv]

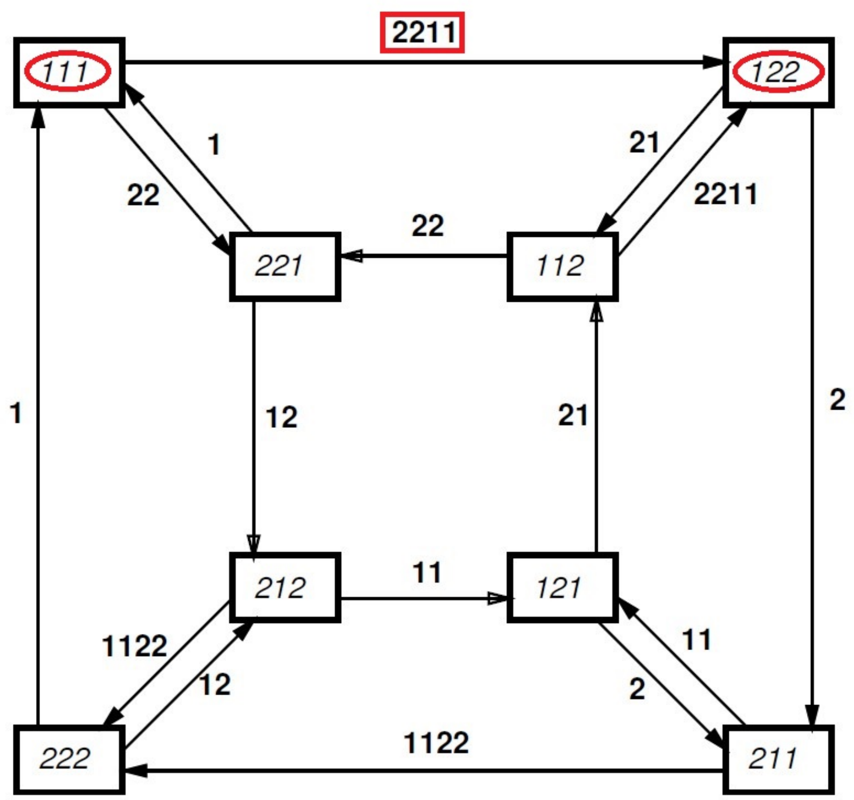

Figura 1.5: Grafo G_3 [Chv]

La construcción de la Figura 1.2 define un camino dentro del grafo G_d, para cualquier $d \in \mathbb{N}$, de tal forma que si vamos anotando las palabras que dan nombre a las aristas por las que vamos pasando, obtenemos la sucesión de Kolakoski.

Además, se puede probar que se puede construir G_{d+1} a partir de G_d. Chvátal [Chv] utiliza el siguiente razonamiento para ello. Denotamos con $u \xrightarrow{\alpha} v$ que existe una arista desde el vértice u hasta el vértice v cuyo peso es la palabra α. Si u, v son vértices de G_d, tenemos 4 casos posibles:

1. v acaba con un 2 (que denotaremos por $v = B2$, siendo B una palabra de longitud $d-1$) y ese 2 pertenece a una racha de longitud 1 dentro de la sucesión de Kolakoski $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Viendo la construcción de la Figura 1.2, como ese 2 es de una racha de longitud 1 en la sucesión que hemos escrito en la fila d, deducimos que u debe acabar en 1, luego $u = A1$ con A una palabra de longitud . Si lo extendemos a $d+1$, debajo del 2 de $B2$ sólo puede ir un 1, pues en la Figura 1.2 cada número indica la longitud de la racha que tiene justo encima. Luego

   $$A1 \xrightarrow{\alpha} B2 \text{ en } G_d \text{ genera } A11 \xrightarrow{\alpha} B21 \text{ y } A12 \xrightarrow{\alpha} B21 \text{ en } G_{d+1}. \tag{1.5}$$

2. v acaba con un 1 ($v = B1$) y ese 1 pertenece a una racha de longitud 1 dentro de la sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Este caso es análogo a 1, luego siguiendo un razonamiento similar llegamos a que $u = A2$ y que

   $$A2 \xrightarrow{\alpha} B1 \text{ en } G_d \text{ genera } A21 \xrightarrow{\alpha} B11 \text{ y } A22 \xrightarrow{\alpha} B11 \text{ en } G_{d+1}. \tag{1.6}$$

3. v acaba con un 2 y ese 2 pertenece a una racha de longitud 2 dentro de la sucesión de Kolakoski $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Este último elemento 2 de v puede ser el primero o el segundo de la racha.

   - Si fuese el primero, entonces $u = A1$ y la columna de altura d inmediatamente posterior a $v = B2$ debería tener el segundo 2 de la racha, luego sería de la forma $C2$.
   - Si fuese el segundo, entonces u tendría el primer 2 de la racha ($u = B2$) y la columna de altura d inmediatamente anterior a u debe acabar en 1, es decir, es de la forma $A1$.

   En cualquier caso tenemos una estructura de la forma $A1 \xrightarrow{\alpha} B2 \xrightarrow{\beta} C2$. Como el último 2 de $B2$ y el último 2 de $C2$ forman una racha en la sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escrita en la fila d, entonces en la fila $d+1$ habrá un 2 debajo de $C2$ indicando la longitud de la racha y habrá un hueco debajo de $B2$. Esto quiere decir que

   $$A1 \xrightarrow{\alpha} B2 \xrightarrow{\beta} C2 \text{ en } G_d \text{ genera } A11 \xrightarrow{\alpha\beta} C22 \text{ y } A12 \xrightarrow{\alpha\beta} C22 \text{ en } G_{d+1}. \tag{1.7}$$

4. v acaba con un 1 y ese 1 pertenece a una racha de longitud 2 dentro de la sucesión de Kolakoski $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Mediante un razonamiento análogo al del caso 3, deducimos que

   $$A2 \xrightarrow{\alpha} B1 \xrightarrow{\beta} C1 \text{ en } G_d \text{ genera } A21 \xrightarrow{\alpha\beta} C12 \text{ y } A22 \xrightarrow{\alpha\beta} C12 \text{ en } G_{d+1}. \tag{1.8}$$

Aplicando las reglas (1.5), (1.6), (1.7) y (1.8) sobre el grafo G_d, obtenemos pues el grafo G_{d+1}. Con este método, podemos realizar cálculos sobre G_1 y hallar después esos mis cálculos sobre un G_d aplicando iterativamente estas cuatro reglas.

Sólo queda un último paso. Recordemos que nuestro objetivo es hallar una cota superior para $\lim_{n\to\infty} |\frac{o_n}{n} - \frac{1}{2}|$. Es decir, queremos una cota para el número de unos de la sucesión de Kolakoski. Hemos visto que dicha sucesión es un camino dentro de todos los posibles que hay dentro del grafo G_d. Por tanto, en el peor de los casos, el camino sería un bucle infinito con la mayor cantidad de unos posible, y la densidad de unos en ese bucle infinito sería una cota superior de la densidad de unos en la sucesión de Kolakoski. Sea entonces

$$u_d := \max_{c \text{ ciclo en } G_d} \frac{\text{número de unos en } c}{\text{número total de números en } c}.$$

Gracias a esta construcción de grafos que hemos conseguido y al hecho de que podemos generar G_{d+1} a partir de G_d, podemos usar un ordenador para computar u_d. Los cálculos realizados por Nilsson [Nil] y por Rao [Rao] llegan hasta $d = 34$ y son los siguientes:

$$\begin{array}{lcll}
u_2 & = & 2/3 & \approx & 0{,}666667 \\
u_3 & = & 2/3 & \approx & 0{,}666667 \\
u_4 & = & 5/9 & \approx & 0{,}555556 \\
u_5 & = & 8/15 & \approx & 0{,}533333 \\
u_6 & = & 36/69 & \approx & 0{,}521739 \\
 & \vdots & & \vdots & \\
u_{32} & = & 3688655/7375520 & \approx & 0{,}500121 \\
u_{33} & = & 3845003/7688497 & \approx & 0{,}500098 \\
u_{34} & = & 455920839/911696379 & \approx & 0{,}500080
\end{array}$$

Gracias a estos cálculos, podemos asegurar el siguiente teorema.

Teorema 19. *Existe un $N \geq 1$ tal que*

$$\sup_{n\geq N} \left| \frac{o_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq \left| \frac{455920839}{911696379} - \frac{1}{2} \right| \leq 0{,}000080.$$

Cabe destacar que en el Teorema 19 usamos el superior y no el límite ya que así no estamos asumiendo la existencia del límite de $\frac{o_n}{n}$. Resulta sorprendente que se pueda obtener una cota tan baja, pero que aún así, de momento, no se haya podido demostrar formalmente que la densidad de unos es $\frac{1}{2}$.

1.5. Otras versiones de la sucesión de Kolakoski

Hasta ahora hemos tratado la que comúnmente se conoce como la sucesión de Kolakoski. Aún así, podemos aplicar la definición de la sucesión de Kolakoski sobre otro conjunto de números naturales distinto de $\{1, 2\}$ para obtener diferentes sucesiones. De entrada, demos una definición de la versión generalizada de la sucesión de Kolakoski.

Definición 20. *Sea S un conjunto finito no vacío de números naturales. La* ***sucesión de Kolakoski sobre*** *S, o $(K_n^S)_{n\in\mathbb{N}}$, es la sucesión sobre el alfabeto S definida de la siguiente forma:*

$$K_n^S = \textit{longitud de la } n\textit{-ésima racha de la sucesión, para todo } n \geq 1.$$

Si el conjunto sobre el que se construye la sucesión contiene tan sólo dos elementos (es decir, $S = \{p, q\}$, $p, q \in \mathbb{N}$), entonces podemos definir una versión generalizada de la sustitución τ (1.1) de la manera siguiente:

$$\sigma_1^S : \begin{array}{l} p \mapsto p^p \\ q \mapsto p^q \end{array} \qquad\qquad \sigma_2^S : \begin{array}{l} p \mapsto q^p \\ q \mapsto q^q \end{array}$$

$$\tau^S(a_n) = \begin{cases} \sigma_1^S(a_n) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sigma_2^S(a_n) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Aquí, la expresión a^b se refiere a la palabra que se obtiene concatenando b veces a. La sustitución τ^S genera $(K_n^S)_{n\in\mathbb{N}}$ al igual que ocurría con τ y $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y la explicación de esto es la misma que en el caso original. Si $(K_n^S)_{n\in\mathbb{N}}$ comienza con p, entonces las rachas impares serán rachas de p y las pares serán rachas de q. La sustitución τ^S reemplaza a_n por una racha de longitud a_n, que será una racha de p si n es impar o de q si n es par. Como esto que acabamos de describir es la definición de la sucesión $(K_n^S)_{n\in\mathbb{N}}$, concluimos que τ^S genera $(K_n^S)_{n\in\mathbb{N}}$.

Por ejemplo, consideremos la sucesión de Kolakoski sobre $\{1, 3\}$ (también llamada sucesión de Kolakoski-(1,3)):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
r_n	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	1	3	1	3	3	3	1	1	1	3	$\cdots$

Tabla 1.4: Primeros términos de la sucesión de Kolakoski sobre $\{1, 3\}$.

La sustitución $\tau^{\{1,3\}}$ que la genera es esta:

$$\sigma_1^{\{1,3\}} : \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 111 \end{array} \qquad\qquad \sigma_2^{\{1,3\}} : \begin{array}{l} 1 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 333 \end{array}$$

$$\tau^{\{1,3\}}(a_n) = \begin{cases} \sigma_1^{\{1,3\}}(a_n) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sigma_2^{\{1,3\}}(a_n) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Podemos ver, si tomamos 13 como punto de partida, cómo $\tau^{\{1,3\}}$ genera la sucesión de Kolakoski-(1,3):

$$13 \mapsto 1333 \mapsto 1333111333 \mapsto 1333111333131333111333 \mapsto \ldots$$

Con la sucesión de Kolakoski-(1,3) ocurre un fenómeno curioso: si dividimos la sucesión en palabras de longitud 2 comenzando por el principio (es decir, las palabras de la forma $K_n^{\{1,3\}}K_{n+1}^{\{1,3\}}$, siendo n impar), estas palabras son 13, 33 o 11, pero ninguna puede ser 31. Es muy sencillo ver por qué.

Supongamos que una de estas palabras de longitud dos resulta ser 31. En la sucesión de Kolakoski-(1,3), las rachas impares son de unos y las pares son de treses. Como las longitudes posibles de las rachas son 1 o 3 (ambas cantidades impares), si $K_n^{\{1,3\}}$ es el último elemento de una racha de unos, entonces n será impar, pero si por el contrario $K_n^{\{1,3\}}$ es el último elemento de una racha de treses, n será par. Esto es debido a que la suma de un número impar de números impares es impar, mientras que la suma de un número par de números impares es par. Entonces, en nuestra palabra 31 ocurre el final de una racha de treses, luego ese 3 estará en una posición par en la sucesión. No obstante, tal y como hemos dividido la sucesión en palabras de longitud 2, ese 3 pertenece a una posición impar de la sucesión, lo cual es una contradicción.

Cabe destacar que este fenómeno ocurre en toda sucesión de Kolakoski sobre un conjunto de la forma $\{p, q\}$, donde p y q son números impares. Debido a que la sucesión de Kolakoski-(1,3) puede dividirse en palabras que sean 13, 33 o 11 de la forma que acabamos de ver, podemos definir otra sustitución que también la genera. Sean $A = 11$, $B = 13$ y $C = 33$. Tomemos la sustitución ρ tal y como se describe a continuación:

$$\rho : \begin{array}{l} A \mapsto B \\ B \mapsto BC \\ C \mapsto ABC \end{array}$$

Podemos comprobar que ρ genera la sucesión de Kolakoski-(1,3), dado que coincide con $\tau^{\{1,3\}}$ si se aplica sobre A, B y C. Nótese que la división de la sucesión de Kolakoski-(1,3) en palabras de longitud 2 que hemos hecho asegura que, en cada una de esas palabras de longitud 2, el primer elemento ocupa una posición impar en la sucesión y el segunda una posición par.

$$\begin{array}{ccccccc} \rho(A) & = & B & = & 13 & = & \tau^{\{1,3\}}(11) \\ \rho(B) & = & BC & = & 1333 & = & \tau^{\{1,3\}}(13) \\ \rho(C) & = & ABC & = & 111333 & = & \tau^{\{1,3\}}(33) \end{array}$$

Esta sustitución nos es de gran utilidad para probar un interesante resultado sobre la sucesión de Kolakoski-(1,3). Mientras que hallar la densidad de unos en la sucesión de Kolakoski sigue siendo un problema sin resolver a día de hoy, la densidad de unos en las sucesión de Kolakoski-(1,3) es bien conocida. La demostración de esto es larga y requiere de multitud de resultados previos, así que daremos la idea de la demostración de Baake y Sing [BaSi].

Teorema 21. *La densidad de unos en la sucesión de Kolakoski-(1,3) es aproximadamente 0,39722.*

Idea de la demostración. Sean $A = 11$, $B = 13$ y $C = 33$. Sea ρ la sustitución definida de la siguiente manera:

$$\rho : \begin{array}{l} A \mapsto B \\ B \mapsto BC \\ C \mapsto ABC \end{array}$$

Podemos construir la matriz de sustitución M asociada a ρ, donde M_{ij} es el número de veces que aparece j en $\rho(i)$, siendo $i, j \in \{A, B, C\}$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que M genera la sucesión de Kolakoski-(1,3) (porque ρ la genera). El polinomio característico de M es $P(x) = \det(xI_3 - M) = x^3 - 2x^2 - 1$, que tiene una raíz real $\alpha \approx 2,20557$ y dos raíces complejas $\beta \approx -0,10278 + 0,66546i$ y $\overline{\beta} \approx -0,10278 - 0,66546i$. Vemos que α es un autovalor de M real mayor que 1 y que el resto de autovalores β y $\overline{\beta}$ son menores que 1 en módulo. La matriz M además es primitiva, puesto que M^3 es una matriz positiva. Entonces, ρ es lo que se conoce como una sustitución de Pisot. [BaSi]

Bajo estas condiciones, las densidades de A, B y C en la sucesión de Kolakoski-(1,3), que denotamos como υ_A, υ_B y υ_C, son las coordenadas del autovector $(\upsilon_A, \upsilon_B, \upsilon_C)$ de M por la izquierda asociado al autovalor α [Lu], escogido de tal forma que $\upsilon_A + \upsilon_B + \upsilon_C = 1$. Este autovector escogido de esta forma es el siguiente:

$$(\upsilon_A, \upsilon_B, \upsilon_C) = \left(\frac{1}{\alpha^2 + 1}, \frac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha^2 + 1}, \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \right) \approx (0,17052, 0,45339, 0,37609)$$

Entonces la densidad de unos es $\upsilon_1 = \upsilon_A + \frac{1}{2}\upsilon_B \approx 0,39722$ y la de treses es $\upsilon_3 = \upsilon_C + \frac{1}{2}\upsilon_B \approx$ 0,60278. $\square$

Observación. Si la sucesión de Kolakoski se construye sobre $\{p, q\}$, con p y q siendo dos números naturales impares tales que $2{\cdot}(p{+}q) \geq (p{-}q)^2$, la sustitución asociada ρ resulta ser una sustitución de Pisot. Por tanto, bajo esas condiciones, podemos utilizar el método de la demostración para calcular la densidad de p y q en la sucesión [BaSi].

Capítulo 2

La sucesión de Prouhet-Thue-Morse

El matemático noruego Axel Thue (1863-1922) publicó dos artículos ([Thu] y [Thu2]) donde trataba el tema de las sucesiones de enteros. En ellos se planteaba varias preguntas:

- ¿Existe una sucesión infinita formada con sólo tres números sin cuadrados, es decir, tal que no se puede encontrar la misma palabra dos veces seguidas?
- ¿Existe una sucesión infinita formada con sólo dos números sin cubos, es decir, tal que no se puede encontrar la misma palabra tres veces seguidas?
- ¿Existe una sucesión infinita formada con sólo dos números sin solapamientos, es decir, tal que no se puede encontrar la palabra $awawa$, siendo w una palabra de longitud mayor o igual que 0 y a un número?

Thue no tenía en mente ninguna aplicación en particular, pero que estos problemas eran suficientemente interesantes como para planteárselos. Él demostró que la respuesta a estas tres preguntas es afirmativa utilizando una sucesión en concreto para ello, la que más tarde pasaría a conocerse como la sucesión de Prouhet-Thue-Morse.

El trabajo de Thue no se dio a conocer demasiado, ya que fue publicado una revista noruega poco reconocida. Sin embargo, sus ideas y resultados serían rescatados por distintos autores que los salvarían de caer en el olvido.

2.1. Nociones básicas de la sucesión

Definición 22. *Definimos la* ***sucesión de Prouhet-Thue-Morse*** $(t_n)_{n\geq 0}$ *sobre* $\{0,1\}$ *(A010060) de forma recursiva como* $t_0 = 0$ *y* $t_{2n} = t_n$, $t_{2n+1} = 1 - t_n$ *para* $n \geq 0$.

Observemos cómo las igualdades $t_{2n} = t_n$ y $t_{2n+1} = 1 - t_n$ se cumplen en los primeros términos de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse:

$$\uparrow\ t_1{=}1,\ t_2{=}1,\ t_3{=}0,\ t_4{=}1,\ t_5{=}0,\ t_6{=}0,\ t_7{=}1,\ t_8{=}1,\ t_9{=}0,\ t_{10}{=}0,\ t_{11}{=}1,\ t_{12}{=}0,\ t_{13}{=}1,\ t_{14}{=}1,\ t_{15}{=}0,\ t_{16}{=}1$$

$$0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ldots$$

$$\downarrow\ t_0{=}0,\ t_1{=}1,\ t_2{=}1,\ t_3{=}0,\ t_4{=}1,\ t_5{=}0,\ t_6{=}0,\ t_7{=}1,\ t_8{=}1,\ t_9{=}0,\ t_{10}{=}0,\ t_{11}{=}1,\ t_{12}{=}0,\ t_{13}{=}1,\ t_{14}{=}1,\ t_{15}{=}0,\ t_{16}{=}1$$

En el esquema superior, de los términos de índice par t_{2n} sale una flecha hacia arriba que indica el valor del término t_n, y de los términos de índice impar t_{2n+1} sale una flecha hacia abajo mostrando el valor de t_n. Arriba vemos que se da la igualdad $t_{2n} = t_n$ y abajo que se cumple que $t_{2n+1} = 1 - t_n$.

Cabe destacar el hecho de que normalmente al primer término de la sucesión se le da el índice 0. Esto se hace por convenio para que la anterior definición tenga sentido.

Sea $s_2(n)$ la suma de los dígitos de la representación en base 2 de $n \in \mathbb{N}$. Vemos que $s_2(2n) = s_2(n)$ y que $s_2(2n+1) = s_2(n)+1$. Entonces, tenemos la siguiente definición alternativa de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse [AllSha]:

Proposición 23. *La sucesión de Prouhet-Thue-Morse* $(t_n)_{n\geq 0}$ *es igual a la sucesión* $(s_2(n) \pmod 2)_{n\geq 0}$.

Incluso podemos caracterizar la sucesión de una tercera forma. Para esto, y de ahora en adelante, denotaremos como AB la concatenación de dos palabras A y B en ese orden.

Proposición 24. *Sea* A_k *la palabra compuesta por los primeros* 2^k *términos de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse. Entonces* $A_0 = 0$*, y para* $k \geq 0$*,* $A_{k+1} = A_k B_k$*, donde* B_k *se obtiene de cambiar los ceros de* A_k *por unos y los unos por ceros.*

Demostración. Si $k = 0$, A_0 no es más que el primer término de la sucesión, que es $t_0 = 0$.

Ahora probaremos el caso de $k \geq 0$. Los 2^k primeros términos de A_{k+1} son, evidentemente, A_k, así que nos falta probar que los 2^k últimos términos de A_{k+1}, a los cuales llamaremos A'_k, son B_k. La palabra A'_k está formada por los 2^k términos siguientes a los primeros 2^k términos de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse, es decir, los términos con índices del 2^k al $2^{k+1}-1$, ambos incluidos. Aplicando la Proposición 23, comprobamos lo siguiente:

$$t_{2^k+i} \equiv s_2(2^k+i) \equiv s_2(i)+1 \equiv 1-s_2(i) \equiv 1-t_i \pmod 2, \text{ para } i = 0, \ldots, 2^k-1.$$

Sabiendo que se cumple esta equivalencia, podemos ver que se cumple la siguiente igualdad:

$$A'_k = t_{2^k} t_{2^k+1} \ldots t_{2^{k+1}-2} t_{2^{k+1}-1} = (1-t_0)(1-t_1)\ldots(1-t_{2^k-2})(1-t_{2^k-1}) = B_k.$$

Por tanto, $A_{k+1} = A_k A'_k = A_k B_k$ y la proposición queda demostrada.

□

Cualquiera de estas tres caracterizaciones es una forma válida y correcta de definir la sucesión de Prouhet-Thue-Morse. De ahora en adelante, usaremos las tres definiciones indistintamente en función de la que nos resulte más útil en cada momento.

2.2. El morfismo μ

El morfismo μ es el definido de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \{0,1\} & \to & \{0,1\}^2 \\ & 0 & \mapsto & 01 \\ & 1 & \mapsto & 10 \end{array}$$

Este morfismo está estrechamente relacionado con la sucesión de Prouhet-Thue-Morse. En esta sección se hablará de esta relación y de las implicaciones que se deducen de ella. Para simplificar todo, vamos a cometer un abuso de notación y vamos a considerar $\mu : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{2n}$ el morfismo que aplica μ a cada dígito de la manera intuitiva.

Proposición 25. *El morfismo* μ *genera la sucesión de Prouhet-Thue-Morse.*

Demostración. Vamos a demostrar, utilizando un razonamiento por inducción, que el morfismo μ genera la sucesión de Prouhet-Thue-Morse al aplicarlo sobre 0 sucesivamente. Dado que $\mu(0) = 01$, la sucesión resultante comenzará por 0 sin importar el número de veces que apliquemos μ.

Denotamos por μ^n la composición n-veces del morfismo μ. También definimos $\overline{a} = 1 - a$, siendo a una sucesión de ceros y unos. Además, por definición de μ, podemos ver que se cumple:

$$\mu(\overline{a}) = \mu(\overline{a_1}) \ldots \mu(\overline{a_n}) = \overline{a_1}a_1 \ldots \overline{a_n}a_n = \overline{a_1\overline{a_1} \ldots a_n\overline{a_n}} = \overline{\mu(a_1) \ldots \mu(a_n)} = \overline{\mu(a)}$$

Suponiendo que $\mu^n(0) = \mu^{n-1}(0)\overline{\mu^{n-1}(0)}$, vamos ahora a probar que $\mu^{n+1}(0) = \mu^n(0)\overline{\mu^n(0)}$:

$$\mu^{n+1}(0) = \mu\left(\mu^n(0)\right) = \mu\left(\mu^{n-1}(0)\overline{\mu^{n-1}(0)}\right) = \mu(\mu^{n-1}(0))\mu(\overline{\mu^{n-1}(0)}) = \mu^n(0)\overline{\mu(\mu^{n-1}(0))} = \mu^n(0)\overline{\mu^n(0)}$$

Luego podemos concluir que $\mu^n(0) = \mu^{n-1}(0)\overline{\mu^{n-1}(0)}$ para todo n. Esta construcción es idéntica a la que se especifica en la Proposición 24, lo que demuestra que este morfismo genera la sucesión de Prouhet-Thue-Morse.

□

De la anterior proposición se puede deducir fácilmente el siguiente corolario:

Corolario 26. *La sucesión de Prouhet-Thue-Morse $(t_n)_{n\geq 0}$ y la sucesión $(1 - t_n)_{n\geq 0}$ son puntos fijos del morfismo μ.*

2.3. Propiedades de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse

Comenzaremos esta sección viendo que la sucesión de Prouhet-Thue-Morse presenta otra propiedad curiosa: es un fractal.

Definición 27. *Se dice que una sucesión es un fractal si presenta autosimilitud, esto es, si se puede encontrar una subsucesión que sea la sucesión original.*

La demostración de que la sucesión de Prouhet-Thue-Morse es una sucesión fractal posee cierta elegancia, ya que resulta casi elemental por la definición de la sucesión.

Teorema 28. *La sucesión de Prouhet-Thue-Morse $(t_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión fractal. La subsucesión que resulta de escoger sólo los términos con índice par es la propia sucesión de Prouhet-Thue-Morse.*

Demostración. Consideremos la subsucesión $(t_{2n})_{n\geq 0}$. De acuerdo a la Definición 22, $t_{2n} = t_n$, para $n \geq 0$.
Luego la subsucesión $(t_{2n})_{n\geq 0}$ es exactamente la sucesión $(t_n)_{n\geq 0}$, lo que significa que $(t_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión fractal.

□

Una forma de visualizar el comportamiento fractal de la sucesión es mediante un sencillo programa (Programa 2). El programa interpreta los ceros de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse como avanzar hacia adelante y los unos como girar 60º en sentido antihorario. De esta forma, obtenemos la Figura 2.1.

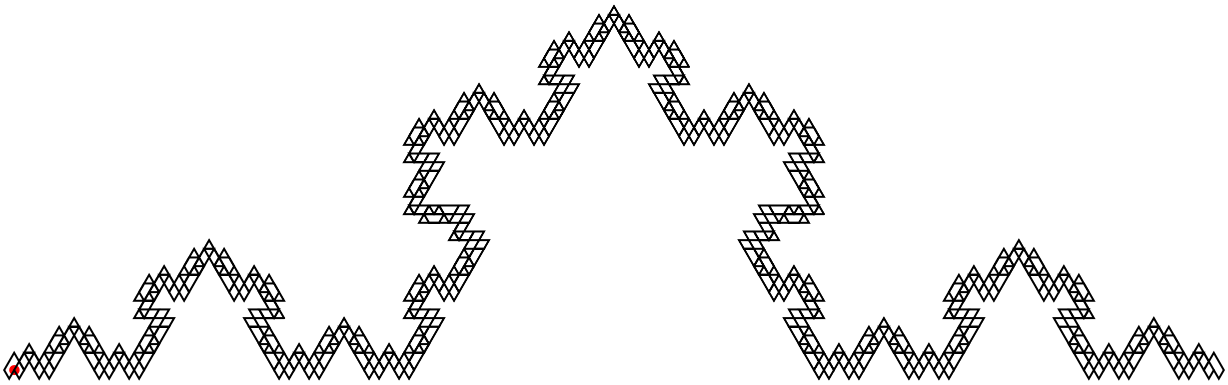

Figura 2.1: Fractal obtenido a partir de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse

Dado que podemos escoger cómo interpretar los ceros y los unos de la forma que queramos, podemos crear una gran variedad de fractales diferentes a partir de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse. De hecho, si asociamos los ceros con avanzar hacia adelante y luego girar 60º en sentido antihorario y los unos con girar 180º (Programa 3), la figura resultante es uno de los fractales más conocidos: el copo de nieve o estrella de Koch [Ab].

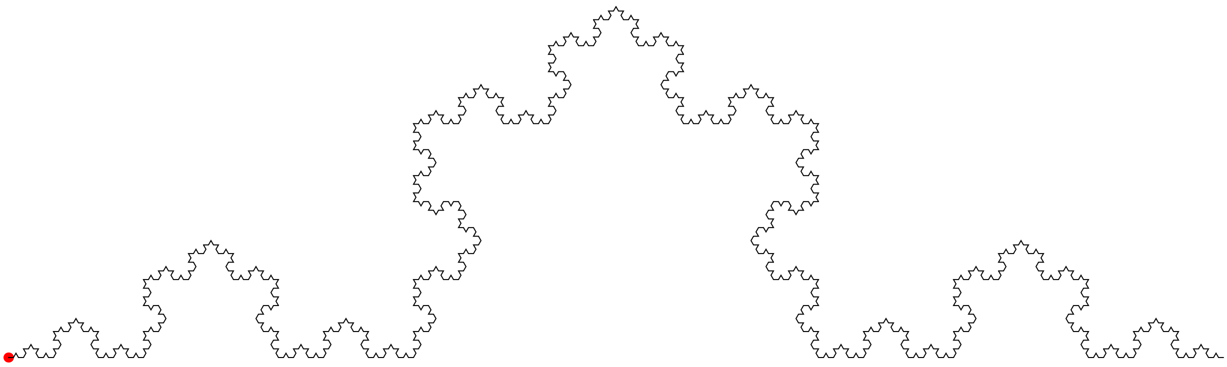

Figura 2.2: Fractal obtenido a partir de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse

En sus inicios, la sucesión de Prouhet-Thue-Morse fue definida por Thue como ejemplo para dar respuesta a las preguntas que él mismo se planteó (y que hemos comentado en la introducción de este capítulo). Ahora veremos precisamente esos resultados que desarrolló en sus artículos [Thu][Thu2] y que dieron respuesta a sus incógnitas.

En primer lugar, comentaremos su propiedad de no solapamiento. Recordemos que una sucesión no presenta solapamiento si no existe una palabra del tipo $awawa$ en de la sucesión, siendo w una palabra de longitud mayor o igual que 0 y a un dígito. Aunque fue Thue quién probó primero este teorema, a continuación se da la demostración de Allouche y Shallit [AllSha2], que es quizá más elegante y fácil de comprender.

Teorema 29. *La sucesión de Prouhet-Thue-Morse* $(t_n)_{n\geq 0}$ *no tiene solapamiento.*

Demostración. Supongamos que la sucesión de Prouhet-Thue-Morse $(t_n)_{n\geq 0}$ tiene solapamiento. Entonces, la sucesión puede representarse como $uawawav$, siendo u y w palabras de longitud mayor o igual que 0, v una palabra de longitud infinita y a un dígito. Llamaremos k a la longitud de u y m a la longitud aw. Es evidente que se cumple que $k \geq 0$ y $m \geq 1$. También vemos que un solapamiento como el descrito equivale a $t_{k+j} = t_{k+j+m}$, para $0 \leq j \leq m$. Podría haber más de un solapamiento, así que tomaremos m el mínimo posible. Veremos que podemos encontrar una contradicción debido a esto examinando cada uno de los posibles casos que pueden ocurrir.

- **Caso 1: k y m son pares**

  Sean $k = 2k'$ y $m = 2m'$. Como $t_{k+j} = t_{k+j+m}$ para $0 \leq j \leq m$, tenemos que $t_{2k'+2j'} = t_{2k'+2j'+2m'}$ para $0 \leq j' \leq m'$. Según la Definición 22, $t_{2n} = t_n$, luego se cumple que $t_{k'+j'} = t_{k'+j'+m'}$ para $0 \leq j' \leq m'$, lo que contradice que m sea el menor posible.

- **Caso 2: k es impar y m es par**

  Sean $k = 2k' + 1$ y $m = 2m'$. De forma similar al Caso 1, $t_{2k'+2j'+1} = t_{2k'+2j'+2m'+1}$ para $0 \leq j' \leq m'$. Según la Definición 22, $t_{2n+1} = 1 - t_n$, por lo que $1 - t_{k'+j'} = 1 - t_{k'+j'+m'}$ para $0 \leq j' \leq m'$. Hemos llegado a una contradicción: $t_{k'+j'} = t_{k'+j'+m'}$ para $0 \leq j' \leq m'$, que contradice que m sea el menor posible.

Antes de tratar el resto de casos, vamos a definir la sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$, con $b_n \equiv t_n + t_{n-1} \pmod 2$. Fijémonos en el caso particular de $b_{4i+2} \equiv t_{4i+2} + t_{4i+1} \pmod 2$ para $i \geq 0$. Los números $4i + 2$ y $4i+1$ tienen la misma cantidad de unos en su representación en base 2, luego por la Proposición 23, tenemos que $t_{4i+2} = t_{4i+1}$ y entonces $b_{4i+2} = 0$ para $i \geq 0$. Siguiendo un razonamiento similar, para $i \geq 0$, el número $2i+1$ tiene un uno más es su representación en base 2 que $2i$, luego $t_{2i+1} = 1 - t_{2i}$ y $b_{2i+1} = 1$. En resumen, $b_n = 0$ si $n \equiv 2 \pmod 4$ y $b_n = 1$ si $n \equiv 1 \pmod 2$.

- **Caso 3: m es impar y mayor o igual que 5**

  Sabiendo que $t_{k+j} = t_{k+j+m}$ para $0 \leq j \leq m$, podemos ver que

  $$b_{k+j} = t_{k+j} + t_{k+j-1} = t_{k+j+m} + t_{k+j+m-1} = b_{k+j+m}, \text{ para } 1 \leq j \leq m.$$

  Como $m \geq 5$, j tiene 4 posibles valores como mínimo, luego podemos elegir un j tal que $k + j \equiv 2 \pmod 4$. Para ese j que hemos elegido, se cumple que $b_{k+j} = 0$ y que $k + j$ es par. Al ser m impar, entonces $k + j + m$ es impar. Eso quiere decir que $b_{k+j+m} = 1$. Esto es una contradicción, puesto que habíamos visto que $b_{k+j} = b_{k+j+m}$.

- **Caso 4: m es igual a 3**

  Si $m = 3$, entonces $b_{k+j} = b_{k+j+3}$ para $1 \leq j \leq 3$. por los mismos motivos que en el Caso 3. Como $1 \leq j \leq 3$, podemos escoger un j tal que $k + j$ sea congruente con 2 o con 3 módulo 4 (incluso podría ocurrir que hubiera un valor de j para el que $k + j \equiv 2 \pmod 4$ y otro valor para el que $k + j \equiv 3 \pmod 4$). Si $k + j \equiv 2 \pmod 4$ para un cierto j, el razonamiento del Caso 3 nos lleva a una contradicción. Si $k+j \equiv 3 \pmod 4$ para un cierto j, entonces $k+j \equiv 1 \pmod 2$, lo que significa que $b_{k+j} = 1$. Además, eso también quiere decir que $k + j + 3 \equiv 2 \pmod 4$, luego $b_{k+j+3} = 0$. Esto contradice el hecho de que $b_{k+j} = b_{k+j+3}$.

- **Caso 5: m es igual a 1**

  Si $m = 1$, entonces $t_{k+j} = t_{k+j+1}$ para $0 \leq j \leq 1$, es decir, que $t_k = t_{k+1} = t_{k+2}$. Si k es par ($k = 2k'$), entonces $t_{2k'} = t_{2k'+1}$. Pero por la Definición 22, $t_{2k'} = t_{k'}$ y $t_{2k'+1} = 1 - t_{k'}$, lo cual nos lleva a una contradicción. Si por el contrario k es impar ($k = 2k' + 1$), tenemos que $t_{2k'+2} = t_{2k'+3}$. De nuevo, por la Definición 22, $t_{2k'+2} = t_{k'+1}$ y $t_{2k'+3} = 1 - t_{k'+1}$, lo que es una contradicción.

□

El hecho de que la sucesión de Prouhet-Thue-Morse no tenga solapamiento nos proporciona los siguientes corolarios cuyas demostraciones son bastantes inmediatas.

Corolario 30. *La sucesión de Prouhet-Thue-Morse es una sucesión sin cubos.*

Demostración. Supongamos que la sucesión presenta un cubo, es decir, que existe una palabra w tal que la sucesión de Prouhet-Thue-Morse puede representarse como $uwwwv$, siendo u una palabra de longitud mayor o igual que 0 y v una palabra de longitud infinita. Si llamamos a al primer dígito de w, entonces $w = a\tilde{w}$ para una cierta palabra $\tilde{w}$ (cuya longitud puede ser 0). Por tanto, $uwwwv = ua\tilde{w}a\tilde{w}a\tilde{w}v$. La palabra $a\tilde{w}a\tilde{w}a$ es un solapamiento, lo cual contradice el Teorema 29. □

Corolario 31. *La sucesión de Prouhet-Thue-Morse es una sucesión no periódica.*

Demostración. Supongamos que la sucesión fuera eventualmente periódica. Entonces podemos representarla como $uwwww\ldots$, siendo u y w palabras de longitud finita (u podría ser de longitud 0, en cuyo caso la sucesión sería periódica). Sea a el primer dígito de w y entonces $w = a\tilde{w}$. Entonces $uwwww\cdots = ua\tilde{w}a\tilde{w}a\tilde{w}a\tilde{w}\ldots$. $a\tilde{w}a\tilde{w}a$ es un solapamiento, con lo que llegamos a una contradicción con el Teorema 29. □

Llegados a este punto, ya hemos dado respuesta a las preguntas sobre los solapamientos y sobre los cubos que habíamos planteado en la introducción de este capítulo. Pero Thue también concluyó otro corolario a partir del Teorema 29, que le sirvió para responder a esa tercera pregunta sobre los cuadrados que nos queda por resolver.

Definimos ahora v_n como el número de unos entre los n-ésimo y $(n+1)$-ésimo ceros de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse, para $n \geq 1$. Entonces, la sucesión $(v_n)_{n\geq 1}$ es de la forma siguiente:

$$2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 0, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 1, 0, \ldots$$

Esta es la conocida como **sucesión ternaria de Thue-Morse**, catalogada como la sucesión A036577 en la OEIS. Del Teorema 29 se puede deducir que la sucesión ternaria de Thue-Morse cumple la siguiente propiedad.

Corolario 32. *La sucesión ternaria de Thue-Morse $(v_n)_{n\geq 1}$ no presenta cuadrados.*

Demostración. Como vimos en la introducción de este capítulo, un cuadrado es la repetición de una misma palabra de forma consecutiva. Supongamos que existe una palabra w que es un cuadrado de $(v_n)_{n\geq 1}$, es decir, que en algún punto de la sucesión aparece una palabra que es ww. Si $w = w_1 \ldots w_n$, eso quiere decir en la sucesión de Prouhet-Thue-Morse debe aparecer una palabra de la forma:

$$01\overset{w_1}{\cdots}10\cdots01\overset{w_n}{\cdots}101\overset{w_1}{\cdots}10\cdots01\overset{w_n}{\cdots}10.$$

Claramente, esto es un solapamiento, lo cual no puede aparecer en la sucesión de Prouhet-Thue-Morse por el Teorema 29. □

La sucesión ternaria de Thue-Morse es el ejemplo que utilizó Thue para demostrar la existencia de sucesiones de tres números que no presenten cuadrados. Uno podría pensar que la sucesión de Prouhet-Thue-Morse no es más que una mera curiosidad matemática y que no tiene mayor utilidad. Pero nada más lejos de la realidad: podemos discutir largo y tendido sobre el tema.

Muchos autores han estudiado la sucesión de Prouhet-Thue-Morse en mayor profundidad a lo largo de los años. Uno de los aspectos más estudiados es la generalización de esta sucesión y las propiedades que esta versión presenta. Antes de ver dicha generalización, conviene dar una definición previa para evitar confusiones.

Definición 33. *Denotamos como $s_k(n)$ la suma de los dígitos de la representación de n en base k.*

Por ejemplo, $s_3(16)$ es la suma de los dígitos de la representación del número 16 en base 3. La representación de 16 en base 3 es 121, luego $s_3(16) = 1+2+1 = 4$. Con esta aclaración, ya podemos discutir la versión generalizada de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse.

Definición 34. *La sucesión de Prouhet-Thue-Morse generalizada es la sucesión definida como* $(t_n^{k,m})_{n\geq 0} = (s_k(n) \pmod{m})_{n\geq 0}$, *para* $k \geq 2$ *y* $m \geq 1$.

Esta definición es claramente una versión generalizada de la definición alternativa de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse que dimos en la Proposición 23. Por ejemplo, la sucesión $(t_n^{2,3})_{n\geq 0}$ (la cual está catalogada como la sucesión A071858 en la OEIS) es de la forma siguiente:

$$0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 2, 0, 2, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 0, 2, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 2, 1, \ldots$$

En este ejemplo, $t_n^{2,3}$ es el número de unos en la representación en base 2 de n (al igual que en la sucesión de Prouhet-Thue-Morse), pero esta vez en módulo 3 en lugar de en módulo 2.

Una pregunta que podría plantearse es si la versión generalizada de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse comparte características con la versión original y cuáles son. Allouche y Shallit son dos de los autores que más han trabajado sobre este tema en particular y sobre otros relacionados también con la sucesión de Prouhet-Thue-Morse. De entre sus aportaciones sobre la versión generalizada destaca el siguiente teorema [AllSha3]:

Teorema 35. *Sean* $k \geq 2$ *y* $m \geq 1$. *La sucesión de Prouhet-Thue-Morse generalizada* $(t_n^{k,m})_{n\geq 0}$ *no presenta solapamiento si y sólo si* $m \geq k$.

La demostración de una de las implicaciones de este teorema ("si $m \geq k$, entonces no hay solapamiento") es larga y laboriosa. Probemos la otra implicación que resulta más sencilla de ver: si no hay solapamiento entonces debe ocurrir que $m \geq k$. La demostración se realiza por reducción al absurdo, lo cual nos ayuda a visualizar el comportamiento de la sucesión cuando $k > m$ y así comprender por qué aparecen solapamientos en este caso.

Demostración. Supongamos $k > m$. Entonces la representación en base k de $k^m - i$, para $1 \leq i \leq m + 1$, es de la siguiente forma:

$$(k-1)\overbrace{\cdots}^{m-1}(k-1)(k-i).$$

Es decir, la representación en base k de $k^m - i$ es el dígito $k - 1$ repetido $m - 1$ veces, seguido del dígito $k - i$. Entonces

$$t_{k^m-i}^{k,m} \equiv s_k(k^m - i) \equiv (m-1)(k-1) + k - i \equiv 1 - i \pmod{m}, \text{ para } 1 \leq i \leq m + 1.$$

Por tanto, la palabra $t_{k^m-(m+1)}^{k,m} \ldots t_{k^m-1}^{k,m}$ es de la forma $012\ldots(m-1)0$. Siguiendo un razonamiento similar, vemos que la representación en base k de $k^m + i$, para $0 \leq i \leq m - 1$, es de la forma siguiente:

$$10 \overset{m}{\cdots} 0i.$$

Entonces

$$t_{k^m+i}^{k,m} \equiv s_k(k^m + i) \equiv 1 + i \pmod{m}, \text{ para } 0 \leq i \leq m - 1.$$

Eso quiere decir que la palabra $t_{k^m}^{k,m} \ldots t_{k^m+m-1}^{k,m}$ es de la forma $12\ldots(m-1)0$. En resumen, tenemos la siguiente igualdad:

$$t_{k^m-(m+1)}^{k,m} \ldots t_{k^m+m-1}^{k,m} = 012\ldots(m-1)012\ldots(m-1)0,$$

lo cual es claramente un solapamiento. $\square$

De hecho, no sólo se puede generalizar la sucesión de Prouhet-Thue-Morse, sino también el morfismo μ que está tan ligado a ella.

Proposición 36. *Sean $k \geq 2$, $m \geq 1$. Consideremos el operador $+$ como la suma módulo m. Entonces, la sucesión de Prouhet-Thue-Morse generalizada $(t_n^{k,m})_{n\geq 0}$ es generada por el morfismo generalizado $\mu_{k,m}$, el cual devuelve una palabra de longitud k a partir de cada uno de los elementos del conjunto $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rccc} \mu_{k,m}: & \{0,1,\ldots,m-1\} & \longrightarrow & \{0,1,\ldots,m-1\}^k \\ & a & \longmapsto & a(a+1)(a+2)\ldots(a+k-1) \end{array}$$

Además, la sucesión es un punto fijo de $\mu_{k,m}$.

La demostración de este resultado es muy similar a la de la Proposición 25, sólo que en el caso general de $k \geq 2$ y $m \geq 1$. Lo importante de estos resultados que acabamos de ver es que podemos crear una sucesión sobre cualquier conjunto de dígitos que queramos y que comparte muchas de las propiedades características de la sucesión original de Prouhet-Thue-Morse.

n	t_n
0	0
1	1
2	1
3	0
4	1
5	0
6	0
7	1
8	1
9	0
10	0
11	1
12	0
13	1
14	1
15	0
16	1
17	0
18	0
19	1
20	0
21	1
22	1
23	0
24	0
25	1
26	1
27	0
28	1
29	0
30	0
31	1
32	1
33	0
34	0
35	1
36	0
37	1
38	1
39	0
$\vdots$	$\vdots$

Tabla 2.1: Primeros términos de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse $(t_n)_{n\geq 0}$.

n	v_n
1	2
2	1
3	0
4	2
5	0
6	1
7	2
8	1
9	0
10	1
11	2
12	0
13	2
14	1
15	0
16	2
17	0
18	1
19	2
20	0
21	2
22	1
23	0
24	1
25	2
26	1
27	0
28	2
29	0
30	1
31	2
32	1
33	0
34	1
35	2
36	0
37	2
38	1
39	0
40	1
$\vdots$	$\vdots$

Tabla 2.2: Primeros términos de la sucesión ternaria de Thue-Morse $(v_n)_{n\geq 1}$.

n	$t_n^{2,3}$
0	0
1	1
2	1
3	2
4	1
5	2
6	2
7	0
8	1
9	2
10	2
11	0
12	2
13	0
14	0
15	1
16	1
17	2
18	2
19	0
20	2
21	0
22	0
23	1
24	2
25	0
26	0
27	1
28	0
29	1
30	1
31	2
32	1
33	2
34	2
35	0
36	2
37	0
38	0
39	1
$\vdots$	$\vdots$

Tabla 2.3: Primeros términos de la sucesión $(t_n^{2,3})_{n\geq 0}$.

n	$t_n^{3,3}$
0	0
1	1
2	2
3	1
4	2
5	0
6	2
7	0
8	1
9	1
10	2
11	0
12	2
13	0
14	1
15	0
16	1
17	2
18	2
19	0
20	1
21	0
22	1
23	2
24	1
25	2
26	0
27	1
28	2
29	0
30	2
31	0
32	1
33	0
34	1
35	2
36	2
37	0
38	1
39	0
$\vdots$	$\vdots$

Tabla 2.4: Primeros términos de la sucesión $(t_n^{3,3})_{n\geq 0}$.

2.4. El problema de la partida infinita en ajedrez

En las siguientes secciones de este capítulo nos dedicaremos a mostrar distintas apariciones de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse en diversos campos de estudio. En esta sección en concreto veremos un curioso uso de la sucesión en la teoría del ajedrez.

En ajedrez, podría ocurrir una partida infinita, donde ninguno de los dos jugadores llegara a hacer jaque mate al rey del otro. Para tratar de evitar este posible desenlace, existen diversas reglas en el ajedrez que tratan de limitar la duración de una partida. Una de la reglas más conocidas son las tablas por repetición (la llamada *German rule*): la partida termina en tablas cuando se repita una misma palabra de movimientos tres veces seguidas.

El jugador profesional y experto en ajedrez Machgielis Euwe utilizó la sucesión de Prouhet-Thue-Morse y su propiedad de carecer de cubos (Corolario 30) para probar que la *German rule* no era suficiente para garantizar la imposibilidad de que ocurra una partida infinita y que son necesarias reglas adicionales para este fin [Eu].

Por ejemplo, podríamos asociar la secuencia de cuatro movimientos (Ng1-f3, Ng8-f6, Nf3-g1, Nf6-g8) a los ceros de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse y (Nb1-c3, Nb8-c6, Nc3-b1, Nc6-b8) a los unos [AllSha]. La sucesión de movimientos que obtenemos como resultado representa una partida de ajedrez infinita y donde nunca se dan tablas por repetición, dado que la sucesión de Prouhet-Thue-Morse no presenta cubos.

La demostración de que podían existir partidas infinitas aún aplicando la *German rule* fue el catalizador para la eliminación de dicha regla y la adopción de dos nuevas reglas que limitaran la duración de una partida de ajedrez [Ab]:

- La partida acaba en tablas si la misma situación del tablero ocurre tres veces.
- Ningún peón es movido y ninguna pieza es comida durante 50 turnos seguidos (un turno se compone de un movimiento por parte de cada uno de los jugadores).

Estas dos reglas ya no permiten la existencia de partidas infinitas. De hecho, cualquiera de las dos por sí sola ya es condición suficiente para que no pueda haber partidas infinitas. No obstante, estas reglas sólo se aplican si uno de los dos jugadores se percata y decide declarar tablas, luego técnicamente dos jugadores podrían tener una partida infinita si quisieran, y las matemáticas poco pueden hacer con respecto a esa situación.

2.5. Aplicaciones en geometría diferencial

A pesar de que Thue había descubierto y estudiado la sucesión de Prouhet-Thue-Morse años antes, se puede decir que Morse la redescubrió, dado que los artículos de Thue no recibieron atención. Morse hizo uso de la sucesión aplicándola a la geometría diferencial. Más concretamente, vinculó la sucesión a las geodésicas en superficies de curvatura negativa [Mor].

Morse considera una superficie S con curvatura negativa que tenga al menos dos embudos. Un embudo es una región de la superficie que sea topológicamente equivalente a una de las dos superficies obtenidas al cortar un cilindro no acotado por un plano perpendicular a su eje. Un ejemplo de este tipo de superficies que considera Morse es un hiperboloide de revolución de una hoja.

En su trabajo, Morse utiliza varios resultados probados por Hadamard [Had] para elegir una geodésica cerrada para cada embudo tal que al cortar S por esta geodésica, esta actúa de borde del embudo y tal que estas geodésicas no tienen puntos en común entre ellas. Llamemos a estas geodésicas cerradas $g_1, g_2, \ldots, g_v$. Ahora, Morse escoge un punto arbitrario P de g_v y considera las geodésicas $h_1, h_2, \ldots, h_{v-1}$ que empiezan en P y acaban cada una en la geodésica cerrada g_i con el índice correspondiente. Después, tomamos todas las geodésicas cerradas que empiezan y acaban en P y que no tienen ningún otro punto en común entre sí o con $g_1, g_2, \ldots, g_v, h_1, h_2, \ldots, h_{v-1}$. Llamaremos a estas geodésicas cerradas $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$. Morse considera estas geodésicas con sentido. Eso significa que por cada geodésica existe otra con el mismo recorrido pero que viaja en sentido opuesto. Por eso sabemos que $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$ son un número par de geodésicas. Morse llama *segmentos normales* las geodésicas $g_1, g_2, \ldots, g_{v-1}, c_1, c_2, \ldots c_{2p}$.

Con todo esto, Morse fue capaz de probar el siguiente teorema [Mor]:

Teorema 37. *En una superficie de curvatura negativa con al menos dos segmentos normales distintos, existe un conjunto de geodésicas que son recurrentes sin ser periódicas y este conjunto tiene la potencia del continuo.*

La demostración de este teorema resulta larga y tediosa, así que simplemente proporcionaremos las ideas principales de la demostración.

Idea de la demostración. Sea S una superficie de curvatura negativa con al menos dos segmentos normales. Elegimos dos segmentos normales N_0, N_1 distintos de forma arbitraria. Como hemos visto anteriormente, la sucesión de Prouhet-Thue-Morse $(t_n)_{n\geq 0}$ es recurrente, es decir, los términos se obtienen a partir de los anteriores (Definición 22), pero no es periódica (Corolario 31). Entonces, podemos definir la siguiente sucesión que será recurrente pero no periódica:

$$N_{t_0}, N_{t_1}, \ldots, N_{t_n}, \ldots \tag{2.1}$$

Esta sucesión representa una geodésica que es la unión de los segmentos normales N_0 y N_1 en el orden que dicta la sucesión. Esta unión se realiza de la forma evidente si los segmentos normales son del tipo c_i, c_j porque comparten el punto P. Si uno del tipo c_i y el otro del tipo g_j, se unen usando h_j a modo de "puente". Y si ambos segmentos normales son del tipo g_i, g_j, se unen usando h_i y h_j como puente.

Morse demuestra que si la sucesión (2.1) es recurrente, entonces la geodésica que representa es recurrente pero no periódica [Mor]. Por último, Morse utiliza que la existencia de una geodésica recurrente pero no periódica es condición suficiente para establecer que el conjunto de geodésicas recurrentes no periódicas tiene la potencia del continuo. Este resultado fue probado por Birkhoff en uno de sus artículos [Bir]. □

Como podemos ver en este resumen de la demostración, Morse se sirvió de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse para, a partir de ella, construir una geodésica que fuera recurrente pero carente de periodicidad. Esto es otro ejemplo más de las aplicaciones de la sucesión en diversos campos de las matemáticas.

2.6. Aplicaciones en teoría de números

A estas alturas del capítulo, uno podría preguntarse por qué nos referimos a la sucesión que estamos discutiendo como "sucesión de Prouhet-Thue-Morse". Ya hemos tratado algunas de las aportaciones de Thue y Morse, pero queda hablar del trabajo de Eugène Prouhet.

Prouhet estaba interesado en dar respuesta al conocido como "problema de Prouhet-Tarry-Escott": si escogemos dos enteros N y t, siendo N mayor o igual que 1 y t mayor o igual que 0, ¿se puede encontrar una partición del conjunto $\{0, 1, \ldots, 2^N - 1\}$ en dos subconjuntos disjuntos I y J tal que $\sum_{i \in I} i^k = \sum_{j \in J} j^k$ para todo $k = 0, 1, \ldots, t$? Aquí se supone que $0^0 = 1$, lo que permite que el caso de $k = 0$ muestre que los subconjuntos I y J deben tener el mismo número de elementos.

En su resolución del problema [Pr, pág. 225], Prouhet se encontró con la sucesión de Prouhet-Thue-Morse. Él propuso que el problema tiene solución si $N = t+1$ y que, en ese caso, la forma de realizar dicha partición viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 38. *Sea $(t_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de Prouhet-Thue-Morse. Para $N \in \mathbb{N}$, se definen los conjuntos I y J como*

$$I = \{i \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\} : t_i = 0\},$$
$$J = \{j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\} : t_j = 1\}.$$

Entonces para todo $0 \leq k \leq N - 1$ se cumple que

$$\sum_{i \in I} i^k = \sum_{j \in J} j^k.$$

Este resultado es magnífico, pues nos enseña cómo resolver el problema de Prouhet-Tarry-Escott haciendo uso de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse, a pesar de que a primera vista no parece haber relación entre esta sucesión y el problema. Veamos un ejemplo de esto. Tomemos $N = 4$, es decir, consideremos el conjunto $A = \{0, 1, \ldots, 15\}$. El Teorema 38 nos dice que debemos partir A en los subconjuntos $I = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$ y $J = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$. Comprobamos que, en efecto, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcccl}
0^0 + 3^0 + 5^0 + 6^0 + 9^0 + 10^0 + 12^0 + 15^0 & = & 8 & = & 1^0 + 2^0 + 4^0 + 7^0 + 8^0 + 11^0 + 13^0 + 14^0 \\
0^1 + 3^1 + 5^1 + 6^1 + 9^1 + 10^1 + 12^1 + 15^1 & = & 60 & = & 1^1 + 2^1 + 4^1 + 7^1 + 8^1 + 11^1 + 13^1 + 14^1 \\
0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 9^2 + 10^2 + 12^2 + 15^2 & = & 620 & = & 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 11^2 + 13^2 + 14^2 \\
0^3 + 3^3 + 5^3 + 6^3 + 9^3 + 10^3 + 12^3 + 15^3 & = & 7200 & = & 1^3 + 2^3 + 4^3 + 7^3 + 8^3 + 11^3 + 13^3 + 14^3
\end{array}$$

Vemos que $\sum_{i \in I} i^k = \sum_{j \in J} j^k$ para todo $k = 0, 1, \ldots, N - 1$, tal y como indica el teorema. También podemos observar que esto no se cumple para $k \geq N$.

$$\begin{array}{rcccl}
\sum_{i \in I} i^4 & = & 89924 \neq 88388 & = & \sum_{j \in J} j^4 \\
\sum_{i \in I} i^5 & = & 1178400 \neq 1120800 & = & \sum_{j \in J} j^5 \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

Prouhet no sólo resolvió el problema de Prouhet-Tarry-Escott, sino también el problema más general: fijando dos enteros N y t, con N mayor o igual que 1 y mayor o igual que 0, encontrar una partición de $\{0, 1, \ldots, q^N - 1\}$ en q subconjuntos disjuntos $I_0, I_1, \ldots, I_{q-1}$ tal que $\sum_{i \in I_0} i^k = \cdots = \sum_{i \in I_{q-1}} i^k$ para todo $k = 0, 1, \ldots, t$. La solución, de nuevo, sólo existe si $N = t + 1$. En ese caso, la solución se obtiene de una manera similar al problema original anterior, salvo que ahora haciendo uso de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse generalizada.

Teorema 39. *Para $q \geq 2$, sea $(t_n^{q,q})_{n\geq 0}$ la sucesión de Prouhet-Thue-Morse generalizada, es decir, $t_n^{q,q} = s_q(n) \pmod{q}$. Sea $N \in \mathbb{N}$. Para $0 \leq j \leq q-1$, se define*

$$I_j = \{i \in \{0, 1, 2, \ldots, q^N - 1\} : t_i^{q,q} = j\}$$

Entonces para todo $0 \leq k \leq N-1$ se cumple que

$$\sum_{i\in I_0} i^k = \sum_{i\in I_1} i^k = \cdots = \sum_{i\in I_{q-1}} i^k.$$

Es decir, además de que el problema de Prouhet-Tarry-Escott original se resuelve utilizando la sucesión de Prouhet-Thue-Morse, resulta que podemos dar solución al caso general de dicho problema mediante el uso de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse generalizada. Por ejemplo, si tomamos $q = 3$ y $N = 3$, debemos entonces considerar la sucesión $(t_n^{3,3})_{n\geq 0}$ (la cual está catalogada como la A053838 en la OEIS). Recordemos que los términos de esta sucesión los hemos definido anteriormente como $t_n^{3,3} = s_3(n) \pmod{3}$ para todo $n \geq 0$ (Definición 34). Dado que queremos dividir el conjunto $\{0, 1, \ldots, 26\}$, necesitamos los primeros 27 términos de la sucesión $(t_n^{3,3})_{n\geq 0}$:

$$0, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 0, 1, 0, 1, 2, 2, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 0$$

Por tanto, este teorema nos dice que podemos partir el conjunto $\{0, 1, \ldots, 26\}$ en los conjuntos $I_0 = \{0, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 21, 26\}$, $I_1 = \{1, 3, 8, 9, 14, 16, 20, 22, 24\}$ y $I_2 = \{2, 4, 6, 10, 12, 17, 18, 23, 25\}$ y que en ese caso se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{ccccccc}
\sum_{i\in I_0} i^0 & = & \sum_{i\in I_1} i^0 & = & \sum_{i\in I_2} i^0 & = 9 \\
\sum_{i\in I_0} i^1 & = & \sum_{i\in I_1} i^1 & = & \sum_{i\in I_2} i^1 & = 117 \\
\sum_{i\in I_0} i^2 & = & \sum_{i\in I_1} i^2 & = & \sum_{i\in I_2} i^2 & = 2067
\end{array}$$

Igual que en el ejemplo del Teorema 38, vemos que si usamos exponentes mayores que 2, estas igualdades dejan de cumplirse.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\sum_{i\in I_0} i^3 & = & 41067 & \neq & \sum_{i\in I_1} i^3 & = & 40581 & \neq & \sum_{i\in I_2} i^3 & = & 41553 \\
\sum_{i\in I_0} i^4 & = & 878631 & \neq & \sum_{i\in I_1} i^4 & = & 840723 & \neq & \sum_{i\in I_2} i^4 & = & 891267 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Prouhet nunca dejó por escrito una demostración. En su artículo [Pr, pág. 225], tan sólo se limitó a plantear el problema y a dar ejemplos de su solución. La prueba que se incluye a continuación es una demostración del Teorema 39 que se debe a Wright [Wri].

Demostración. Sea b un entero no negativo. Para cualquier polinomio $\phi(x)$, definimos el operador $E(b)$ tal que $E(b)\phi(x) = \phi(x+b)$. Es evidente que se cumple que $E(a)E(b) = E(a+b)$, siendo a, b enteros no negativos.

Para todo $n \geq 0$, definamos $v(n) = t_n^{q,q} = s_q(n) \pmod{q}$. Sea $\rho \in \mathbb{C}$ una raíz q-ésima de la unidad distinta de 1, es decir, $\rho^q = 1$ y $\rho \neq 1$.

Para $0 \leq l \leq N-1$, definimos el siguiente operador:

$$\Lambda_l = 1 + \rho E(q^l) + \rho^2 E(2q^l) + \cdots + \rho^{q-1} E((q-1)q^l).$$

Se cumple entonces esta igualdad:

$$\prod_{l=0}^{N-1} \Lambda_l = \sum_{n=0}^{q^N-1} \rho^{v(n)} E(n). \tag{2.2}$$

Sea $\phi(x)$ un polinomio cuyo término de mayor grado es αx^m. Entonces, el coeficiente del término x^m del polinomio $\Lambda_l \phi(x)$ es $\alpha(1+\rho+\rho^2 \cdots + \rho^{N-1})$, para $l = 0, \ldots, N-1$. Dado que ρ es una raíz q-ésima de la unidad, sabemos que $1+\rho+\rho^2 \cdots + \rho^{N-1} = 0$. Por tanto, deducimos que el coeficiente del término de grado m de $\Lambda_l \phi(x)$ es nulo, para $l = 0, \ldots, N-1$. Es decir, Λ_l reduce el grado de cualquier polinomio en uno, para $l = 0, \ldots, N-1$. Podemos deducir entonces que $\left(\prod_{i=0}^{N-1} \Lambda_l\right) \phi(x) = 0$, para todo polinomio $\phi(x)$ de grado menor o igual a $N-1$, ya que el operador $\prod_{i=0}^{N-1} \Lambda_l$ reduce el grado de $\phi(x)$ en N.

Ahora tomemos $\phi(x) = x^k$, con $0 \leq k \leq N-1$ fijo. Entonces, utilizando la igualdad (2.2) y la definición del operador E, vemos que se cumplen las siguientes igualdades:

$$0 = \left(\prod_{i=0}^{N-1} \Lambda_l\right) x^k = \left(\sum_{n=0}^{q^N-1} \rho^{v(n)} E(n)\right) x^k = \sum_{n=0}^{q^N-1} \rho^{v(n)} (x+n)^k. \tag{2.3}$$

Sustituyendo $x = 0$ en (2.3), tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{q^N-1} \rho^{v(n)} n^k = 0. \tag{2.4}$$

Para todo $j = 0, \ldots, q-1$, definamos los siguientes conjuntos(considerando $0^0 = 1$):

$$I_j = \{i \in \{0,1,2,\ldots,q^N-1\} : t_i^{q,q} = j\} = \{i \in \{0,1,2,\ldots,q^N-1\} : s_q(i) = j \pmod{q}\}$$

También definimos $H_j = \sum_{i \in I_j} i^k$, para todo $j = 0, \ldots, q-1$. Aplicando (2.4), comprobamos que se cumple lo siguiente:

$$\sum_{j=0}^{q-1} \rho^j H_j = \sum_{j=0}^{q-1} \rho^j \left(\sum_{i \in I_j} i^k\right) = \sum_{n=0}^{q^N-1} \rho^{v(n)} n^k = 0. \tag{2.5}$$

Ahora sea $G_j = H_j - H_{q-1}$, para $0 \leq j \leq q-2$. Gracias a la igualdad (2.5) y al hecho de que $1+\rho+\rho^2 \cdots + \rho^{q-1} = 0$ por ser ρ una raíz q-ésima de la unidad, deducimos esta igualdad:

$$\sum_{j=0}^{q-2} \rho^j G_j = \sum_{j=0}^{q-2} \rho^j H_j - \sum_{j=0}^{q-2} \rho^j H_{q-1} = -\rho^{q-1} H_{q-1} - \sum_{j=0}^{q-2} \rho^j H_{q-1} = -\sum_{j=0}^{q-1} \rho^j H_{q-1} = 0, \tag{2.6}$$

Si tomamos τ una raíz q-ésima de la unidad, entonces la igualdad (2.6) se cumple para $\rho = \tau^m$, para todo $m = 1, \ldots, q-1$. De esta forma construimos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=0}^{q-2} \tau^{mj} G_j = 0, \quad \forall m = 1, \ldots, q-1.$$

La matriz de coeficientes de este sistema es una matriz de Vandermonde. Por consiguiente, sabemos que su determinante es no nulo, y que por tanto debe ocurrir que $G_0 = \cdots = G_{q-2} = 0$. Dado que la definición de G_j es $G_j = H_j - H_{q-1}$, para $0 \leq j \leq q-2$, deducimos que se deben cumplir las siguientes igualdades:

$$H_0 = H_1 = \cdots = H_{q-1}.$$

Por definición de los H_j, esto equivale a que

$$\sum_{i \in I_0} i^k = \sum_{i \in I_1} i^k = \cdots = \sum_{i \in I_{q-1}} i^k, \text{ para todo } 0 \leq k \leq N-1.$$

$\square$

El problema de Prouhet-Tarry-Escott ha sido abordado en diferentes escritos a lo largo de los años, y que su solución pase por hacer uso de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse resulta cuanto menos interesante. Tanto es así, que estos resultados le valieron a Prouhet el que esta sucesión lleve su nombre junto con los de Thue y Morse.

Capítulo 3

La sucesión de Golomb

Otra sucesión autogenerada de gran interés es la sucesión de Golomb, llamada así porque apareció en un problema planteado por Solomon Wolf Golomb [Gol, pág. 674]. También es conocida como la sucesión de Silverman debido a que Richard K. Guy en la primera edición de su libro *Unsolved Problems in Number Theory* [Guy, pág. 126] atribuyó la sucesión a David Silverman. Guy corrigió este error en posteriores ediciones, llamándola de ahí en adelante la sucesión de Golomb.

3.1. Definición de la sucesión y problema de Golomb

Definición 40. *La **sucesión de Golomb** $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (A001462) es la sucesión creciente que contiene a todos los números naturales y que cumple que G_m es el número de veces que aparece $m \in \mathbb{N}$ en la sucesión. La sucesión empieza con $G_1 = 1$.*

Debido a que la sucesión es creciente y que debe contener a todos los números naturales, ocurre que cada término es igual o mayor en 1 que el término inmediatamente anterior. Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, o bien $G_{n+1} = G_n$, o bien $G_{n+1} = G_n + 1$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
G_n	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	$\cdots$

Tabla 3.1: Primeros términos de la sucesión de Golomb.

Podemos observar que, tal y como dice la Definición 40, el término G_n indica el número de veces que aparece el número n en la sucesión. Por ejemplo, el 6 aparece 4 veces en la sucesión dado que $G_6 = 4$. Siguiendo esta definición, podemos deducir que la fórmula de la sucesión de Golomb es la siguiente:

$$G_1 = 1,\ G_n = \#\{m : G_m = n\},\ \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como la sucesión es creciente, uno puede darse cuenta de que las apariciones de cada número deben ser consecutivas, es decir, que si un número aparece m veces entonces lo hará en forma de una racha de longitud m. Podemos comprobar que se cumple el siguiente resultado.

Lema 41. *La n-ésima racha de la sucesión de Golomb está compuesta por el número n. Además, la longitud de la n-ésima racha es G_n.*

Demostración. La construcción de la sucesión de Golomb consiste añadir un número n tantas veces como este deba aparecer en la sucesión (es decir, G_n veces), a continuación hacer lo mismo con el número $n + 1$, luego con $n + 2$, etc. Por tanto, dado que la sucesión empieza con el 1, la primera racha es de unos, la segunda racha entonces debe ser de doses, la tercera de treses, etc.

La segunda parte del lema también es bastante evidente. Según la definición de la sucesión de Golomb (Definición 40), G_n es el número de veces que aparece el número n en la sucesión. Todas las apariciones del número n son consecutivas, luego forman una racha de longitud G_n. Y esta racha debe ser la n-ésima según la primera parte del lema. $\square$

Este resultado nos indica la que es quizá la cualidad importante de la sucesión de Golomb: coincide con la sucesión de las longitudes de sus rachas.

Teorema 42. *La sucesión de Golomb* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *coincide con la sucesión formada por las longitudes de la rachas de* $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En efecto, si la longitud de la n-ésima racha es G_n para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión está compuesta por las longitudes de sus rachas. Abajo podemos observar este comportamiento en sus primeros términos.

$$\overbrace{1}^{1}, \overbrace{2,2}^{2}, \overbrace{3,3}^{2}, \overbrace{4,4,4}^{3}, \overbrace{5,5,5}^{3}, \overbrace{6,6,6,6}^{4}, \overbrace{7,7,7,7}^{4}, \overbrace{8,8,8,8}^{4}, \overbrace{9,9,9,9,9}^{5}, \overbrace{10,10,10,10,10}^{5}, \overbrace{11,11,11,11,11}^{5}, \ldots$$

El problema planteado por Golomb en el que apareció esta sucesión es el siguiente. Sea $f(n)$ una función cuyos dominio e imagen sean $\mathbb{N}$, y sea $g(n)$ el número de valores de m para los cuales se cumple que $f(m) = n$. Si $f(n)$ es monótona y no decreciente y cumple que $f(n) = g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(n)$ está determinada de forma única. Encontrar una expresión asintótica para $f(n)$ cuando $n \to \infty$.

Un año después de que Golomb planteara el problema en *American Mathematical Monthly*, se publicaron en la misma revista una idea de Daniel Marcus sobre cómo podría hallarse la solución y una solución formal al problema redactada por N. J. Fine [GoMaFi]. La demostración de Fine es larga y enrevesada, así que comentaremos solamente la idea de la demostración de Marcus.

Idea de la demostración. Primero observemos que $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ por la Definición 40. Hemos visto en la observación anterior que la longitud de la n-ésima racha es G_n. Sea h una función continua y diferenciable definida para todo x positivo tal que h coincide con f al final de cada racha, es decir, tal que $h(k) = f(k)$ para todo k que satisfaga que $k = \sum_{i=1}^{f(k)} f(i)$ (es decir, k debe ser la suma de las longitudes primeras $f(k)$ rachas). Por el teorema del valor medio, deducimos que existe, para cada k, ξ_k en el intervalo abierto entre dos finales de racha $(a,b) = \left(\sum_{i=1}^{f(k)-1} f(i), \sum_{i=1}^{f(k)} f(i)\right)$ tal que

$$h'(\xi_k) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{f(f(k))}.$$

Si consiguiéramos ver que $h'(\xi_k) = h'(k)$, podríamos sospechar que la expresión asintótica F de f cumpliría la ecuación diferencial $F'(x) = \frac{1}{F(F(x))}$. Podemos obtener una solución para dicha ecuación. Si escribimos la solución de la forma $F(x) = cx^r$, encontramos que se debe cumplir que $c = \phi^{2-\phi}$ y $r = \phi - 1$, donde ϕ es el número áureo ($\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$). Entonces, $f(n)$ puede ser aproximada por

$$F(n) = \phi^{2-\phi} n^{\phi-1}.$$

$\square$

La demostración de Fine parte de la idea de Marcus y consigue probar que sus asunciones están justificadas, aunque eso dota a la demostración de bastante longitud. Además, Ilan Vardi [Var] dio la mejor estimación hasta la fecha para el término de error de $F(n)$.

Teorema 43. *Sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Golomb. Se cumple lo siguiente:*

$$G_n = F(n) + E(n), \ \textit{para todo } n \in \mathbb{N},$$

donde $F(n) = \phi^{2-\phi} n^{\phi-1}$, $E(n) = O(\frac{n^{\phi-1}}{\log n})$ y $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

El significado de O grande de Landau es que $f(n) = O(g(n))$ si y sólo si $|f(n)|$ está superiormente acotada por g (multiplicada por una constante) de forma asintótica, o lo que es lo mismo,

$$f(n) = O(g(n)) \quad \text{si y sólo si} \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} < \infty.$$

Aquí asumimos que $g(n)$ es estrictamente positiva. Existen otras notaciones similares a la O grande de Landau, como por ejemplo la notación de omega grande o Big-Omega [Ten, pág. 111], la cual es muy utilizada en teoría analítica de números. Concretamente nos interesa la notación $\Omega_\pm$.

$$f(n) = \Omega_\pm(g(n)) \quad \text{si y sólo si} \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0 \text{ y } \liminf_{x\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < 0$$

En su artículo, Vardi [Var] conjetura que $E(n) = \Omega_\pm(\frac{n^{\phi-1}}{\log n})$, lo que significaría que la estimación $E(n) = O(\frac{n^{\phi-1}}{\log n})$ es óptima [PeRe]. Este resultado fue probado por Jean-Luc Rémy [Rem].

Proposición 44. *Sean $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Golomb, $F(n) = \phi^{2-\phi} n^{\phi-1}$, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $E(n) = G_n - F(n)$. Entonces,*

$$E(n) = \Omega_\pm(\frac{n^{\phi-1}}{\log n}).$$

3.2. Propiedades de la sucesión de Golomb

En esta sección vamos a discutir algunas propiedades que cumple la sucesión de Golomb y que la dotan de interés. Para empezar, veamos un resultado sencillo de probar: la sucesión de Golomb no presenta ninguna clase de periodicidad.

Teorema 45. *La sucesión de Golomb $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmente periódica.*

Demostración. Supongamos que la sucesión de Golomb fuera eventualmente periódica. Eso significa que existen ciertos $n_0, t \in \mathbb{N}$ tales que $G_{n_0} = G_{n_0+t} = G_{n_0+2t} = \cdots$, lo cual no es posible, ya que entonces el número G_{n_0} aparecería infinitas veces en la sucesión y el término $G_{G_{n_0}}$ no sería un número natural (ya que es número de veces que aparece G_{n_0} por la Definición 40). □

Otra propiedad interesante de la sucesión de Golomb $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es que puede definirse mediante la siguiente fórmula recursiva:

$$G_{n+1} = 1 + G_{n+1-G_{G_n}}.$$

Dado que el exceso de subíndices en la fórmula puede llevar a confusión, vamos a introducir una notación alternativa: la notación funcional. Denotaremos como $G(n)$ el n-ésimo término de la sucesión de Golomb. Es decir, $G(n) = G_n$. Por tanto, la fórmula recursiva anterior escrita con la nueva notación sería la siguiente:

$$G(n+1) = 1 + G(n+1-G(G(n))).$$

Colin Mallows da esta fórmula en la página sobre la sucesión de Golomb en la OEIS [OEIS]. Puesto que no he encontrado ninguna demostración para esta fórmula, he desarrollado y escrito una prueba de la misma.

Proposición 46. *Sea $(G(n))_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Golomb. Entonces se cumple lo siguiente:*

$$G(1) = 1, G(n+1) = 1 + G(n+1-G(G(n))), \text{ para todo } n \geq 2.$$

Demostración. Por definición de la sucesión de Golomb, es cierto que $G(1) = 1$. Luego sólo tenemos que demostrar la fórmula recursiva. Según el Lema 41, el elemento $G(n+1)$ pertenece a la racha $G(n+1)$-ésima. Vamos a distinguir los dos posibles casos que se pueden dar.

- Caso 1: $G(n+1)$ es el primer elemento de su racha

  Por el Lema 41, la longitud de la $G(n)$-ésima racha es $G(G(n))$. Luego como $G(n+1)$ es el primer elemento de la $G(n+1)$-ésima racha, entonces $G(n+1-G(G(n)))$ debe ser el primer elemento de la $G(n)$-ésima racha. Por tanto, $G(n+1) = 1 + G(n+1-G(G(n)))$.

- Caso 2: $G(n+1)$ no es el primer elemento de su racha

  Entonces, debe ocurrir que $G(n) = G(n+1)$. Eso quiere decir $G(n)$ pertenece a la misma racha que $G(n+1)$: la racha $G(n)$-ésima, cuya longitud es $G(G(n))$ (debido al Lema 41). Aquí podemos encontrarnos con dos posibles casos:

  - Caso 2.1: la racha $G(n-1)$-ésima tiene la misma longitud que la racha $G(n)$-ésima
    En este caso, como la longitud de ambas rachas es $G(G(n))$, tenemos que el elemento $G(n+1-G(G(n)))$ debe pertenecer a la racha $G(n-1)$-ésima, luego $G(n+1) = 1 + G(n+1-G(G(n)))$.
  - Caso 2.2: la racha $G(n-1)$-ésima tiene longitud menor que la racha $G(n)$-ésima
    Dado que cada elemento de la sucesión de Golomb es la longitud de una de sus rachas y que cada elemento de la sucesión es igual al elemento anterior o mayor que él en 1, podemos concluir que la longitud de la racha $G(n)$-ésima es mayor que la longitud de la racha $G(n-1)$-ésima en 1. Como $G(n+1)$ no es el primer elemento de la racha $G(n)$-ésima, debe ser como poco el segundo elemento. Por tanto, $G(n+1-G(G(n)))$ debe pertenecer a la racha $G(n-1)$-ésima, luego $G(n+1) = 1 + G(n+1-G(G(n)))$.

□

Esta fórmula recursiva permite obtener cualquier elemento de la sucesión de Golomb mediante el cálculo de los elementos que lo preceden. Puede ser muy útil, pero no permite obtener elementos con índices muy grandes de forma eficiente. Vardi [Var] elaboró una serie de igualdades que permiten un cálculo más eficiente de términos con índices grandes. A continuación, veamos cómo podrían llevarse a cabo estos cálculos.

Definición 47. *Sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Golomb. Llamamos $R(n)$ al índice en el que n aparece por última vez en la sucesión de Golomb. Es decir,*

$$R(n) = \max\{m \in \mathbb{N} : G_m = n\}.$$

También se puede definir $R(n)$ como la suma de longitudes de las n primeras rachas de la sucesión de Golomb [Var], luego

$$R(n) = \sum_{k=1}^{n} G_k. \tag{3.1}$$

Lema 48. *Se cumple que $G_{R(n)} = n$.*

Demostración. Dado que $R(n)$ es el mayor m tal que $G_m = n$, es evidente que $G_{R(n)} = n$. □

Como podemos usar (3.1) para computar $R(n)$, la igualdad del Lema 48 nos permite obtener elementos de la sucesión de Golomb sin tener que recurrir a la fórmula recursiva de la Proposición 46. De hecho, podemos ir más allá y ahorrarnos más tiempo de computación si hacemos uso de la siguiente igualdad [Var].

Proposición 49. *Se cumple que* $R(R(n)) = \sum_{k=1}^{n} kG_k$.

Demostración. Aplicando la igualdad (3.1), deducimos que

$$R(R(n)) = \sum_{k=1}^{R(n)} G_k. \tag{3.2}$$

Por definición, $R(n)$ es el índice en el que n aparece por última vez en la sucesión de Golomb, lo que significa $1 \leq G_k \leq n$, para $1 \leq k \leq R(n)$. También quiere decir que $R(n)$ es el índice donde termina la n-ésima racha de la sucesión de Golomb. Por tanto, podemos deducir que en el sumatorio de (3.2) aparece cada j (con $1 \leq j \leq n$) un número de veces igual a la longitud de la j-ésima racha, es decir, G_j veces (por la definición de la sucesión de Golomb). Entonces, podemos establecer la siguiente igualdad:

$$R(R(n)) = \sum_{k=1}^{R(n)} G_k = \sum_{j=1}^{n} jG_j = \sum_{k=1}^{n} kG_k.$$

$\square$

La Proposición 49 permite computar $G_{R(R(n))} = R(n)$ con más o menos la misma complejidad que $G_{R(n)} = n$, pero incrementando los dígitos del índice de G_k por un factor de ϕ [Var]. De hecho, uno puede continuar este procedimiento para computar elementos de la sucesión de Golomb con índices más altos. Sólo se necesita encontrar fórmulas para $R(R(R(n)))$, $R(R(R(R(n))))$, etc. Vardi da las siguientes fórmulas [Var]:

Proposición 50. *Son ciertas las siguientes igualdades:*

$$R(R(R(n))) = n\frac{R(n)[R(n)+1]}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{R(k)[R(k)+1]}{2},$$

$$\begin{aligned} R(R(R(R(n)))) &= \sum_{k=1}^{n} \Big\{ G_k\left[R(k-1)+1\right]\left(kR(R(k-1)) + \tfrac{k(k+1)}{2}\right) \\ &+ \tfrac{[G_k-1]G_k}{2}\left(kR(R(k-1)) + \tfrac{k(k+1)}{2} + k^2[R(k-1)+1]\right) \\ &+ \tfrac{k^2[G_k-1]G_k[2G_k-1]}{6} \Big\}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, bastaría con calcular $R(R(R(100000)))$ y $R(R(R(R(100000))))$ para obtener que

$$G_{1113262375131190812624733117309095} = G_{R(R(R(R(100000))))} = R(R(R(100000))) = 31895648580638856178 3.$$

De esta forma, la computación de elementos de la sucesión con índice muy grande resulta significativamente menos costosa.

3.3. Sucesiones de tipo Golomb

Llamamos sucesión de tipo Golomb a una sucesión que está formada por las longitudes de las rachas de ella misma. En esta sección discutiremos distintos ejemplos de sucesiones de tipo Golomb.

Los ejemplos más sencillos de sucesiones de tipo Golomb son las construidas sobre los pares y sobre los impares. Definimos una sucesión creciente que contiene a todos los números impares y tal que el n-ésimo término sea el número de veces que aparece el número $2n-1$ en la sucesión, obteniendo la sucesión de tipo Golomb sobre los impares (A080605).

$$\overbrace{1}^{1},\overbrace{3,3,3}^{3},\overbrace{5,5,5}^{3},\overbrace{7,7,7}^{3},\overbrace{9,9,9,9,9}^{5},\overbrace{11,11,11,11,11}^{5},\overbrace{13,13,13,13,13}^{5},\overbrace{15,15,15,15,15,15,15}^{7},\dots$$

Por el contrario, si hacemos que la sucesión contenga a todos los pares y que el n-ésimo término sea el número de veces que aparece el número $2n$ en la sucesión, tenemos la sucesión de tipo Golomb sobre los pares (A080606):

$$\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{4,4}^{2},\overbrace{6,6,6,6}^{4},\overbrace{8,8,8,8}^{4},\overbrace{10,10,10,10,10,10}^{6},\overbrace{12,12,12,12,12,12}^{6},\overbrace{14,14,14,14,14,14}^{6},\dots$$

Ambas sucesiones coinciden con las sucesiones de las longitudes de sus rachas, al igual que la sucesión de Golomb original.

Siguiendo este procedimiento, podemos definir sucesiones de tipo Golomb sobre una gran variedad de conjuntos, como por ejemplo los múltiplos de 3 (la sucesión creciente que contiene a todos los múltiplos de 3 y tal que el n-ésimo término es el número de veces que aparece el número $3n$) (A080607):

$$\overbrace{3,3,3}^{3},\overbrace{6,6,6}^{3},\overbrace{9,9,9}^{3},\overbrace{12,12,12,12,12,12}^{6},\overbrace{15,15,15,15,15,15}^{6},\overbrace{18,18,18,18,18,18}^{6},\dots$$

En general, se puede definir una sucesión de tipo Golomb sobre cualquier conjunto de números enteros no negativos, dado que estos deben ser las longitudes de las rachas de la sucesión. Dos ejemplos son la construida sobre los números primos (A169682) y la construida sobre los cuadrados (A013189):

$$\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{3,3}^{2},\overbrace{5,5,5}^{3},\overbrace{7,7,7}^{3},\overbrace{11,11,11,11,11}^{5},\overbrace{13,13,13,13,13}^{5},\overbrace{17,17,17,17,17}^{5},\overbrace{19,19,19,19,19,19,19}^{7},\dots$$

$$\overbrace{1}^{1},\overbrace{4,4,4,4}^{4},\overbrace{9,9,9,9}^{4},\overbrace{16,16,16,16}^{4},\overbrace{25,25,25,25}^{4},\overbrace{36,36,36,36,36,36,36,36,36}^{9},\dots$$

De nuevo, todas estas sucesiones cumplen la propiedad de coincidir con la sucesión de longitudes de sus rachas.

Uno puede darse cuenta de que ya hemos visto anteriormente una sucesión cuyos términos son las longitudes de sus rachas: la sucesión de Kolakoski. Recordemos que la sucesión de Kolakoski es la sucesión compuesta por unos y doses tal que el n-ésimo término es la longitud de la n-ésima racha. En efecto, la sucesión de Kolakoski es la sucesión de tipo Golomb construida sobre el conjunto $\{1,2\}$:

$$\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1}^{1},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1,1}^{2},\overbrace{2}^{1},\overbrace{1}^{1},\overbrace{2,2}^{2},\overbrace{1}^{1},\dots$$

De hecho, todas las versiones de la sucesión de Kolakoski construidas sobre diferentes conjuntos son también sucesiones de tipo Golomb, ya que también cumplen que el n-ésimo término de la sucesión es la longitud de la n-ésima racha.

Capítulo 4

Sucesiones autogeneradas siguiendo el ejemplo de Aronson

En este capítulo hablaremos brevemente sobre la sucesión de Aronson. En verdad, el interés del capítulo reside en las sucesiones "similares" a ella, que resultan ser cuanto menos curiosas. Primero discutiremos la sucesión de Aronson y más adelante pasaremos a tratar las sucesiones "similares" a ella y a qué nos referimos con esto.

Durante este capítulo haremos un uso frecuente de la notación funcional para sucesiones. Es decir, utilizaremos $s(n)$ para referirnos al término s_n de una sucesión $(s_n)_{n \geq n_0}$.

4.1. La sucesión de Aronson

Lo primero que debemos es explicar qué es la sucesión de Aronson. Esta sucesión aparece por primera vez en un libro de D. R. Hofstadter [Hof, pág. 44] sobre oraciones autoreferenciales, donde relata como J. K. Aronson le envió varias oraciones de este tipo, entre las cuales se encontraba la que define a la sucesión de Aronson.

Definición 51. *La* ***sucesión de Aronson*** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(A005224) se define mediante la siguiente frase en inglés:*

"t is the first, fourth, eleventh,... letter in this sentence (not counting spaces or commas)." (4.1)

La definición es un poco confusa, así que veámosla en profundidad. La sucesión de Aronson es aquella formada por las posiciones de las letras "t" en la frase de arriba. Por ejemplo, dado que la frase empieza con una "t", el primer elemento de la sucesión es 1. La siguiente "t" es la que está en "the", que ocupa la posición 4 en la frase, la siguiente "t" es la de "first", que ocupa la posición 11, etc. Entonces, la sucesión de Aronson tiene este aspecto:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
A_n	1	4	11	16	24	29	33	35	39	45	47	51	56	58	62	64	69	73	78	80	$\cdots$

Tabla 4.1: Primeros términos de la sucesión de Aronson $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dado que los términos son las posiciones de las letras "t" dentro de la frase, es evidente que la sucesión de Aronson es estrictamente creciente. La frase que define la sucesión realmente es infinita, pues hay que ir añadiendo todas las posiciones que ocupan las letras "t" en ella. Es decir, la frase (4.1) se va alargando según añadimos los sucesivos elementos de la sucesión de Aronson como ordinales en inglés: "t is the first, fourth, eleventh, sixteenth, twentyfourth, twentyninth, thirtythird, thirtyfifth, thirtyninth,... letter in this sentence (not counting spaces or commas)".

Cabe destacar que esta definición resulta un poco ambigua debido a los nombres ingleses para los números superiores al 100 [ClSlVa]. Por ejemplo, el ordinal correspondiente al 104 puede decirse como "hundred and fourth", como "one hundred and fourth" o como "one hundred fourth". El convenio es utilizar el formato de "one hundred fourth", que es el que se utiliza en la página de la OEIS sobre la sucesión de Aronson.

Existe otra sucesión que se obtiene de una manera análoga a la sucesión de Aronson: la llamada versión "mentirosa" de la sucesión de Aronson (A081023) [ClSlVa]. Consiste en suponer que que la siguiente frase escrita en inglés es falsa:

"t is the second, third, fifth,... letter of this sentence (not counting commas or spaces)." (4.2)

Es decir, la versión mentirosa de la sucesión de Aronson está compuesta por las posiciones de la letras de la frase de arriba que no son "t". Esta sucesión es la siguiente:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
A'_n	2	3	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18	19	20	22	23	24	$\cdots$

Tabla 4.2: Primeros términos de la versión mentirosa de la sucesión de Aronson.

Al igual que la sucesión de Aronson, esta sucesión también es estrictamente creciente (por el mismo motivo: los términos son las posiciones de las letras que no son "t" dentro de la frase). Dado que la frase (4.2) empieza por "t", los dos primeros términos de la sucesión son 2 y 3, que son las posiciones de la "i" y la "s" de "is". Después nos saltamos la "t" de "the" y añadimos las posiciones de la "h" y la"e": 5 y 6. Y continuamos así, añadiendo sólo las posiciones de las letras que no son "t".

La sucesión de Aronson y su versión mentirosa no son más que una mera curiosidad. Sin embargo, sirven como motivación para estudiar algunas sucesiones similares a ellas que sí merecen más discusión. Con sucesiones "similares" nos referimos a sucesiones donde los términos vienen dados por la pertenencia a un conjunto dado. Por ejemplo, en la sucesión de Aronson, un número pertenece a la sucesión si, en la frase (4.1), la letra en la posición correspondiente a ese número es una "t". En la siguiente sección veremos algunas sucesiones de este tipo que son dignas de estudio.

4.2. Sucesiones autogeneradas al estilo de Aronson

La primera de las sucesiones que veremos en esta sección es la catalogada como la A079000 dentro de la OEIS, a la cual denotaremos como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 52. *La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la definida de tal forma que a_n es el menor entero positivo mayor que a_{n-1} que es consistente con la condición "n pertenece a la sucesión si y sólo si a_n es impar".*

Veamos qué significa esta definición mediante la construcción de la sucesión. Podemos tomar $a_1 = 1$, dado que se cumpliría que "1 pertenece a la sucesión si y sólo si $a_1 = 1$ es impar". También podríamos tomar $a_1 = 2$, ya que 1 no pertenecería a la sucesión y $a_1 = 2$ es par, pero debemos escoger el menor entero positivo posible, así que $a_1 = 1$. Ahora, si probamos con $a_2 = 2$, vemos que 2 está en la sucesión pero $a_2 = 2$ es par, luego este valor de a_2 no es posible. Tampoco valdría que $a_2 = 3$, dado que $a_2 = 3$ sería impar pero 2 no pertenecería a la sucesión. El valor que debemos tomar es $a_2 = 4$, ya que de esta forma 2 no pertenece a la sucesión y $a_2 = 4$ es par. Ahora, como el 3 no está en la sucesión, a_3 debe ser par y mayor que 4, así que escogemos $a_3 = 6$. Y como 4 pertenece a la sucesión ($a_2 = 4$), entonces a_4 debe ser impar y mayor que 6, por lo que podemos escoger $a_4 = 7$. Si continuamos con este procedimiento, obtenemos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$a_1{=}1 \quad a_6{=}9 \quad a_8{=}13 \quad a_{11}{=}17 \quad a_{15}{=}21 \quad a_{17}{=}25 \quad a_{19}{=}29 \quad a_{21}{=}33 \quad a_{25}{=}37 \quad a_{29}{=}41 \quad a_{33}{=}45 \quad a_{35}{=}49 \quad a_{37}{=}53$

$$1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 34, 35, 36, 37, \ldots$$

$a_4{=}7 \quad a_7{=}11 \quad a_9{=}15 \quad a_{13}{=}19 \quad a_{16}{=}23 \quad a_{18}{=}27 \quad a_{20}{=}31 \quad a_{23}{=}35 \quad a_{27}{=}39 \quad a_{31}{=}43 \quad a_{34}{=}47 \quad a_{36}{=}51$

Arriba podemos ver cómo se cumple la condición "n pertenece a la sucesión si y sólo si a_n es impar". Debido a que en la Definición 52 se incluye la condición de que $a_n > a_{n-1}$, es evidente que la sucesión resultante es estrictamente creciente.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
a_n	1	4	6	7	8	9	11	13	15	16	17	18	19	20	21	23	25	27	29	31	$\cdots$

Tabla 4.3: Primeros términos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es lo que llamamos una sucesión similar a la sucesión de Aronson, en el sentido de que un elemento está en la sucesión o no en función de la pertenencia a un conjunto. En este caso, n está en la sucesión si y sólo si a_n pertenece al conjunto de los números impares.

Una característica destacable es que, a partir de a_2, las diferencias entre términos consecutivos de la sucesión son iguales a 1 o a 2. De hecho, podemos saber si esta diferencia es 1 o 2 fácilmente [ClSlVa].

Proposición 53. *La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que $a_n = a_{n-1} + \epsilon$ para $n \geq 3$, donde el valor de ϵ viene dado por la tabla*

	a_{n-1} es par	a_{n-1} es impar
n pertenece a la sucesión	1	2
n no pertenece a la sucesión	2	1

Demostración. Veamos los cuatro casos posibles.

- Caso 1: n pertenece a la sucesión y a_{n-1} es par

  Si n pertenece a la sucesión, a_n debe ser impar. Por tanto, tomamos $a_n = a_{n-1} + 1$.

- Caso 2: n pertenece a la sucesión y a_{n-1} es impar

  Si n pertenece a la sucesión, entonces a_n es impar. Es decir, debemos tomar el siguiente número impar, que es $a_n = a_{n-1} + 2$.

- Caso 3: n no pertenece a la sucesión y a_{n-1} es par

  Si n no pertenece a la sucesión, a_n es par. Entonces, el valor de a_n es $a_n = a_{n-1} + 2$.

- Caso 4: n no pertenece a la sucesión y a_{n-1} es impar

  Si n no pertenece a la sucesión, a_n debe ser par. Por tanto, hay que tomar $a_n = a_{n-1} + 1$.

$\square$

Otra propiedad interesante es que todos los números impares mayores o iguales que 7 aparecen en la sucesión [ClSlVa].

Proposición 54. *La sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *incluye a todos los números impares mayores o iguales que 7.*

Demostración. Supongamos que $2t+1$ es un número impar mayor o igual que 7 que no pertenece a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por la Proposición 53, la diferencia entre dos términos consecutivos no puede ser superior a 2 (a partir del segundo término). Por tanto, existe un $j \geq 4$ tal que $a_{j-1} = 2t$ y $a_j = 2t+2$ ($j \geq 4$ porque el 7 es el cuarto término de la sucesión, luego $a_j = 2t+2$ tiene que ser como poco el cuarto término). Como $2t$ y $2t+2$ son números pares, ni $j-1$ ni j pueden pertenecer a la sucesión. Eso implica que existen dos términos consecutivos con una diferencia entre ellos de al menos 3, lo que es una contradicción. □

Aunque la condición "n pertenece a la sucesión si y sólo si a_n es impar" hace razonable pensar que este resultado es cierto, esta demostración formal nos lo confirma. Lo siguiente que veremos es que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sigue una estructura determinada.

Los términos tercero, cuarto y quinto son tres números consecutivos: 6, 7 y 8. Los siguientes tres términos son tres números impares consecutivos: 9, 11 y 13. Y los seis términos siguientes son números consecutivos: $a_9 = 15$, $a_{10} = 16$, $a_{11} = 17$, $a_{12} = 18$, $a_{13} = 19$ y $a_{14} = 20$. Y tras esto vienen seis números impares consecutivos: $a_{15} = 21$, $a_{16} = 23$, $a_{17} = 25$, $a_{18} = 27$, $a_{19} = 29$ y $a_{20} = 31$. Este curioso comportamiento se repite infinitamente [ClSlVa]. De hecho, esto es observable en las diferencias entre términos consecutivos. Si denotamos a una racha del número x de longitud m como x^m, entonces las diferencias entre términos consecutivos forman la siguiente sucesión (la cual es catalogada como la A079948 en la OEIS):

$$3, 2, 1^3, 2^3, 1^6, 2^6, 1^{12}, 2^{12}, 1^{24}, 2^{24}, 1^{48}, 2^{48}, \ldots$$

Las rachas de unos son fruto de las zonas de números consecutivos y las rachas de doses nacen de las zonas de números consecutivos impares. Además, comprobamos que este patrón va duplicando su longitud a medida que se repite (las primeras rachas son de longitud 3, las segundas son de longitud 6, las terceras de longitud 12,...).

Llamemos segmento k-ésimo (para $k \geq 0$) a la palabra formada por los términos a_n tales que $n = 9\cdot 2^k - 3 + j$, con $-3\cdot 2^k \leq j \leq 3\cdot 2^k - 1$. Los dos primeros elementos de la sucesión $a_1 = 1$ y $a_2 = 4$ no se tienen en cuenta para esta división en segmentos. La primera mitad de cada segmento es una secuencia de números consecutivos de longitud $3\cdot 2^k$ y la segunda mitad es una secuencia de números impares consecutivos también de longitud $3\cdot 2^k$ [ClSlVa]. Por ejemplo, si $k = 0$, obtenemos el segmento formado por los términos con índices desde el 3 hasta el 8, es decir, el segmento es 6, 7, 8, 9, 11, 13.

La primera mitad de cada segmento (donde $j < 0$) se compone de números consecutivos y se cumple que estos números son $a_n = 12\cdot 2^k - 3 + j$. La segunda mitad (donde $j \geq 0$) se compone de números impares consecutivos, los cuales son $a_n = 12\cdot 2^k - 3 + 2j$, lo cual se puede resumir en la siguiente fórmula [ClSlVa]:

$$a(9\cdot 2^k - 3 + j) = \begin{cases} 12\cdot 2^k - 3 + j & si \quad -3\cdot 2^k \leq j < 0 \\ 12\cdot 2^k - 3 + 2j & si \quad 0 \leq j < 3\cdot 2^k \end{cases}, \text{ para todo } k \geq 0, \ldots \tag{4.3}$$

De hecho, podemos combinar ambas igualdades para obtener una fórmula para la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1,\\
&a_2 = 4,\\
&a_{9\cdot 2^k-3+j} = 12\cdot 2^k - 3 + \tfrac{3}{2}j + \tfrac{1}{2}|j|, \text{ para } \ k\geq 0,\ -3\cdot 2^k \leq j \leq 3\cdot 2^k - 1.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Por ejemplo, si tomamos $k = 0$, entonces $-3 \leq j \leq 2$. En ese caso, la fórmula (4.4) nos da los términos de la sucesión pertenecientes al segmento 0 (es decir, el segmento 6,7,8,9,11,13):

$$
\begin{aligned}
a_3 &= a_{9\cdot 2^0-3-3} &&= 12\cdot 2^0 - 3 + \tfrac{3}{2}(-3) + \tfrac{1}{2}|-3| = 6\\
a_4 &= a_{9\cdot 2^0-3-2} &&= 12\cdot 2^0 - 3 + \tfrac{3}{2}(-2) + \tfrac{1}{2}|-2| = 7\\
a_5 &= a_{9\cdot 2^0-3-1} &&= 12\cdot 2^0 - 3 + \tfrac{3}{2}(-1) + \tfrac{1}{2}|-1| = 8\\
a_6 &= a_{9\cdot 2^0-3+0} &&= 12\cdot 2^0 - 3 + \tfrac{3}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}|0| = 9\\
a_7 &= a_{9\cdot 2^0-3+1} &&= 12\cdot 2^0 - 3 + \tfrac{3}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}|1| = 11\\
a_8 &= a_{9\cdot 2^0-3+2} &&= 12\cdot 2^0 - 3 + \tfrac{3}{2}\cdot 2 + \tfrac{1}{2}|2| = 13
\end{aligned}
$$

La fórmula (4.4) resulta interesante por sí misma, dado que nos permite calcular cualquier término de la sucesión de una manera sencilla. Sin embargo, también nos permite ver otra propiedad de la sucesión. La Proposición 54 nos indica cuáles de los números impares aparecen en la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pero todavía no sabemos nada acerca de los números pares que pertenecen a la sucesión. La fórmula (4.4) nos permite aclarar esta cuestión.

Proposición 55. *La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ incluye a los números 4, 6, 8 y a los números pares $2m$ que cumplen que*

$$9\cdot 2^{k-1} - 1 \leq m \leq 6\cdot 2^k - 2,\ k\geq 1.$$

Demostración. Es evidente que 4, 6 y 8 pertenecen a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: son los términos a_2, a_3 y a_5 respectivamente. Entonces queda probar que el resto de pares descritos en el enunciado también están en la sucesión. Dado que la sucesión se divide en segmentos cuya primera mitad son números consecutivos y cuya segunda mitad son números impares consecutivos, sabemos que sólo pueden aparecer números pares en la primera mitad de cada segmento, es decir, en los elementos $a_n = 12\cdot 2^k - 3 + j$, con $k\geq 0$ y $-3\cdot 2^k \leq j \leq 0$.

El segmento con $k = 0$ es 6, 7, 8, 9, 11, 13, donde los únicos pares que aparecen son 6 y 8, los cuales ya hemos dicho que pertenecen a la sucesión. Luego nos queda considerar los segmentos con $k \geq 1$. El primer elemento de la primera mitad de un segmento es $12\cdot 2^k - 3 - 3\cdot 2^k = 9\cdot 2^k - 3$, que observamos que es un número impar. El primer elemento de la primera mitad de un segmento es $12\cdot 2^k - 3 - 1 = 12\cdot 2^k - 4$, el cual es un número par. Entonces los números pares $2m$ deben ser aquellos dentro del intervalo

$$9\cdot 2^k - 2 \leq 2m \leq 12\cdot 2^k - 4,\ k\geq 1.$$

De las desigualdades anteriores se deduce que

$$9\cdot 2^{k-1} - 1 \leq m \leq 6\cdot 2^k - 2,\ k\geq 1.$$

□

Por ejemplo, tomemos $k = 2$. Según la Proposición 55, los números pares $2m$ tales que $17 = 9\cdot 2^{2-1} - 1 \leq m \leq 6\cdot 2^2 - 2 = 22$ deberían estar incluidos en la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es decir, hablamos de los números 34, 36, 38, 40, 42 y 44. Si cogemos el segmento con $k = 2$ de la sucesión, vemos que efectivamente dichos números pares aparecen:

$$33, \underline{34}, 35, \underline{36}, 37, \underline{38}, 39, \underline{40}, 41, \underline{42}, 43, \underline{44}, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67$$

Con esto, ya sabemos exactamente qué números pares y qué números impares son los que conforman la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Lo siguiente que veremos es que podemos caracterizar esta sucesión de una manera completamente diferente a la que aparece en la Definición 52. Para ello, debemos explicar un concepto que Cloitre, Sloane y Vandermast llaman "cuadrado" de una sucesión [ClSlVa], pero que nosotros le daremos el nombre de "composicional" de una sucesión para no provocar confusiones.

Definición 56. *Llamamos **composicional** de una sucesión $(s_n)_{n\geq n_0}$ a la sucesión compuesta consigo misma $(s_{s_n})_{n\geq n_0}$. Para evitar dobles subíndices, denotamos esta composicional de la sucesión como $(s_n^{(2)})_{n\geq n_0}$.*

Una observación inmediata que podemos hacer es que si $(s_n)_{n\geq n_0}$ es monótona creciente, $(s_n^{(2)})_{n\geq n_0}$ también lo es.

Lema 57. *Sea $(s_n)_{n\geq n_0}$ una sucesión estrictamente creciente. Entonces su composicional $(s_n^{(2)})_{n\geq n_0}$ también es estrictamente creciente.*

Demostración. Supongamos que $(s_n^{(2)})_{n\geq n_0}$ no es estrictamente creciente. Eso significa que existe un $n \geq n_0$ para el que $s_n^{(2)} \geq s_{n+1}^{(2)}$. Entonces $s_{s_n} = s_n^{(2)} \geq s_{n+1}^{(2)} = s_{s_n+1}$. Esto es una contradicción, dado que $(s_n)_{n\geq n_0}$ es estrictamente creciente y observamos que un término de la sucesión (s_{s_n}) es mayor o igual que un término posterior s_{s_n+1}. □

También podemos saber qué términos componen $(s_n^{(2)})_{n\geq n_0}$ en relación con $(s_n)_{n\geq n_0}$[ClSlVa].

Lema 58. *Sea $(s_n)_{n\geq n_0}$ una sucesión estrictamente creciente. Entonces m pertenece a la sucesión $(s_n)_{n\geq n_0}$ si y sólo si s_m pertenece a la sucesión $(s_n^{(2)})_{n\geq n_0}$.*

Demostración. Si m pertenece a la sucesión $(s_n)_{n\geq n_0}$, entonces existe un $i \geq n_0$ tal que $m = s_i$. Por tanto, $s_m = s_{s_i}$ pertenece a la sucesión $(s_n^{(2)})_{n\geq n_0}$.

Por otro lado, si s_m pertenece a la sucesión $(s_n^{(2)})_{n\geq n_0}$, entonces existe un cierto $j \geq n_0$ tal que $s_m = s_j^{(2)} = s_{s_j}$. Como $(s_n)_{n\geq n_0}$ es estrictamente creciente, debe ocurrir que $m = s_j$, luego m pertenece a la sucesión $(s_n)_{n\geq n_0}$. □

Por ejemplo, la composicional de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que denotamos como $(a_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$) es la siguiente:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
$a_n^{(2)}$	1	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	$\cdots$

Tabla 4.4: Primeros términos de la composicional de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Vemos que la sucesión es estrictamente creciente, como indica el Lema 57. Además, podemos comprobar que también se cumple el Lema 58. Dado que el 4 está en la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_4 = 7$ aparece en la sucesión $(a_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$. Por otra parte, dado que el 5 no está en la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_5 = 8$ no aparece en la sucesión $(a_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Podemos observar que la sucesión $(a_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ se corresponde con $\{1\} \cup \{2n+3 : n \in \mathbb{N}, n > 1\}$. Es decir, que se cumple la igualdad $a(a(n)) = 2n+3$, para todo $n \geq 2$ [ClSlVa]. Esta es la otra caracterización de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la que hablábamos antes. Veámosla en detalle.

La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede definirse como: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, y para $n \geq 4$, a_n es el menor entero positivo que hace que la sucesión sea estrictamente creciente y que $a_{a_n} = 2n+3$ para $n \geq 2$. Una vez se definen los tres primeros términos de la sucesión, la regla de $a_{a_n} = 2n+3$ determina el resto de términos de forma única [ClSlVa]. Por ejemplo, a_4 debe ser 7 porque $a_4 = a_{a_2} = 2{\cdot}2{+}3 = 7$. Y como se debe cumplir que $a_6 = a_{a_3} = 2 \cdot 3 + 3 = 9$, el término a_5 debe ser 8 para que la sucesión sea estrictamente creciente.

De hecho, aunque no definamos inicialmente $a_2 = 4$, este término toma igualmente el valor 4. Esto es debido a que a_2 no puede ser 2 porque entonces vemos que $a_2 = a_{a_2} \neq 2 \cdot 2 + 3 = 7$. Tampoco puede ocurrir que a_2 sea 3, ya que entonces $a_3 = a_{a_2} = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ y $a_7 = a_{a_3} = 2 \cdot 3 + 3 = 9$, lo que hace que la sucesión no sea estrictamente creciente (entre a_3 y a_7 hay otros tres términos pero entre los números 7 y 9 sólo está el 8). Sin embargo, en esta nueva caracterización de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos los tres primeros términos porque la regla de $a_{a_n} = 2n + 3$ y el exigir que sea estrictamente creciente no determinan por sí solos que $a_3 = 6$. De hecho, la sucesión catalogada como la A080596 en la OEIS también satisface estas reglas:

$$1, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 46, \ldots$$

Vemos que a_3 puede ser 5 y de esa forma se determina que el quinto término debe ser $2{\cdot}3{+}3 = 9$, pero aún así se mantiene el crecimiento estricto. Por eso es necesario definir los tres primeros términos para obtener la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de esta forma. De lo contrario, conseguiríamos la sucesión A080596.

A partir de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos encontrar otras sucesiones similares a ella. Por ejemplo, podemos eliminar la condición de crecimiento estricto y simplemente pedir que los términos no aparezcan más de una vez en la sucesión. En ese caso, nos encontramos con otra sucesión completamente diferente.

Definición 59. *La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (A079313) es la definida de tal forma que b_n es el menor entero positivo que no está aún en la sucesión y que es consistente con la condición "n pertenece a la sucesión si y sólo si b_n es impar".*

Esta sucesión es de la forma siguiente:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
b_n	1	3	5	2	7	8	9	11	13	12	15	17	19	16	21	23	25	20	27	29	$\cdots$

Tabla 4.5: Primeros términos de la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La sucesión empieza con $b_n = 1$. El término b_2 no puede ser igual a 2, dado que entonces este sería par, impidiendo que el 2 estuviera en la sucesión. Por eso $b_2 = 3$. Ahora bien, ya que el 3 está en la sucesión, b_3 debe ser impar, y como el 1 y el 3 ya está en la sucesión, tenemos que $b_3 = 5$. Si continuamos con el término b_4, observamos que puede ser 2, con lo que satisface que el número 2 esté en la sucesión, ya que $b_2 = 3$ es impar. Si continuamos aplicando estas reglas, obtenemos el resto de los términos de la sucesión. En el esquema siguiente podemos comprobar cómo la condición "n pertenece a la sucesión si y sólo si b_n es impar" se cumple en los primeros términos de la sucesión:

$$b_1{=}1 \quad b_5{=}7 \quad b_7{=}9 \quad b_9{=}13 \quad b_{13}{=}19 \quad b_{15}{=}21 \quad b_{19}{=}27 \quad b_{21}{=}31 \quad b_{25}{=}37 \quad b_{27}{=}39 \quad b_{31}{=}45 \quad b_{33}{=}49 \quad b_{37}{=}55$$
$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$
$$1,\ 3,\ 5,\ 2,\ 7,\ 8,\ 9\ , 11, 13, 12, 15, 17, 19, 16, 21, 23, 25, 20, 27, 29, 31, 24, 33, 35, 37, \ldots$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$b_3{=}5 \quad b_2{=}3 \quad b_8{=}11 \quad b_{11}{=}15 \quad b_{12}{=}17 \quad b_{17}{=}25 \quad b_{16}{=}23 \quad b_{23}{=}33 \quad b_{20}{=}29 \quad b_{29}{=}43 \quad b_{24}{=}35 \quad b_{35}{=}51$$

El comportamiento que presenta la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también resulta curioso como el de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en el sentido de que la sucesión sigue una cierta estructura. Observamos que a partir del sexto término, se repite en la sucesión un patrón de un número par seguido de tres números impares consecutivos. De hecho, podemos saber cuáles son esos números mediante las siguientes fórmulas [ClSlVa].

Proposición 60. *Sea $t \geq 2$. Entonces se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} b_{4t-2} &= 4t, \\ b_{4t-1} &= 6t-3, \\ b_{4t} &= 6t-1, \\ b_{4t+1} &= 6t+1. \end{aligned}$$

Demostración. Haremos la demostración mediante un razonamiento inductivo. Para $t = 2$, es evidente que las igualdades se cumplen:

$$\begin{aligned} b_{4t-2} = b_6 &= 8 = 4t, \\ b_{4t-1} = b_7 &= 9 = 6t-3, \\ b_{4t} = b_8 &= 11 = 6t-1, \\ b_{4t+1} = b_9 &= 13 = 6t+1. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que las fórmulas se cumplen para $2 \leq t \leq t_0$ para un cierto $t_0 \geq 2$ y veamos que también se cumplen para $t_0 + 1$.

En los primeros $4t_0 + 1$ términos, los únicos números pares que han aparecido son el $b_4 = 2$ y los pares $4t$ con $2 \leq t \leq t_0$. Como el número $4(t_0 + 1) - 2 = 4t_0 + 2$ no está entre ellos, el término $b_{4(t_0+1)-2}$ debe ser par. Este no puede ser 2 (porque ya ha aparecido en la sucesión), ni 4 (porque $b_4 = 2$ es par), ni cualquier número $4t - 2$ con $2 \leq t \leq t_0$ (porque $b_{4t-2} = 4t$ es par), ni cualquier número $4t$ con $2 \leq t \leq t_0$ (porque los números $b_{4t-2} = 4t$ ya han aparecido en la sucesión), ni $4t_0+2$ (porque entonces el término $b_{4t_0+2} = b_{4(t_0+1)-2} = 4t_0 + 2$ sería par, luego $4t_0 + 2$ no podría estar en la sucesión). Por tanto, el número par más pequeño posible es $b_{4(t_0+1)-2} = 4t_0 + 4 = 4(t_0 + 1)$, con lo que obtenemos la primera igualdad.

Además, en los primeros $4t_0 + 1$ términos de la sucesión, han aparecido los números impares 1, 3, 5, 7 y los impares $6t-3$, $6t-1$ y $6t+1$, con $2 \leq t \leq t_0$. Es decir, aparecen todos los números impares menores o iguales que $6t_0+1$. En particular, los números $4(t_0+1)-1 = 4t_0+3$ y $4(t_0+1)+1 = 4t_0+5$ ya han aparecido, luego $b_{4(t_0+1)-1}$ y $b_{4(t_0+1)+1}$ deben ser números impares. Además, el número $4(t_0+1)$ también ha aparecido ya en la sucesión: es el término $b_{4t_0+2} = b_{4(t_0+1)-2} = 4(t_0+1)$ que resulta de la primera igualdad. Por tanto, como el número $4(t_0 + 1)$ está en la sucesión, $b_{4(t_0+1)}$ debe ser impar. Eso significa que debemos tomar los tres números impares que sean lo más pequeños posible y que no estén aún en la sucesión, es decir, $b_{4(t_0+1)-1} = 6t_0+3 = 6(t_0+1)-3$, $b_{4(t_0+1)} = 6t_0+5 = 6(t_0+1)-1$ y $b_{4(t_0+1)+1} = 6t_0 + 7 = 6(t_0 + 1) + 1$.

□

Estas fórmulas nos permiten observar este patrón de un número par seguido de tres números impares consecutivos. Además, nos indican qué números son estos. Es por esto que podemos obtener dos corolarios análogos a las Proposiciones 54 y 55 a partir de la Proposición 60.

Corolario 61. *La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ incluye a todos los números impares.*

Demostración. Observamos que el 1, el 3, el 5 y el 7 están en los primeros términos de la sucesión. Y según la Proposición 60, los números impares $6t-3$, $6t-1$ y $6t+1$, para todo $t \geq 2$, también aparecen en la sucesión. Es evidente que estos son todos los números impares mayores o iguales que 9. □

Corolario 62. *La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ incluye al 2 y a todos los números pares $4t$, para todo $t \geq 2$.*

Demostración. El 2 es el cuarto término de la sucesión. Por la Proposición 60, los números pares $4t$, para todo $t \geq 2$, también están en la sucesión. $\square$

Vemos que, en general, la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ presenta unas propiedades bastante similares a las de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a pesar de que le hemos quitado la cualidad de ser estrictamente creciente.

Otra sucesión que podemos construir partiendo de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la que surge de cambiar la palabra "impar" por la palabra "par" en la definición de la sucesión.

Definición 63. *La sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ (A079253) es la definida de tal forma que c_n es el menor entero no negativo mayor que c_{n-1} que es consistente con la condición "n pertenece a la sucesión si y sólo si c_n es par".*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\cdots$
c_n	0	3	5	6	7	8	10	12	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28	30	$\cdots$

Tabla 4.6: Primeros términos de la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$.

Es decir, la sucesión empieza en $c_0 = 0$. No puede ser que $c_1 = 1$, dado que entonces el 1 estaría en la sucesión pero $c_1 = 1$ sería impar. Tampoco puede ser que $c_1 = 2$, ya que si $c_1 = 2$ es par, entonces el 1 tendría que aparecer en la sucesión. Por tanto, debemos quedarnos con $c_1 = 3$. De esta forma se va construyendo la sucesión:

$$c_0{=}0 \quad c_5{=}8 \quad c_7{=}12 \quad c_{10}{=}16 \quad c_{14}{=}20 \quad c_{16}{=}24 \quad c_{18}{=}28 \quad c_{20}{=}32 \quad c_{24}{=}36 \quad c_{28}{=}40 \quad c_{32}{=}44 \quad c_{34}{=}48 \quad c_{36}{=}52$$

$$0,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, \ldots$$

$$c_3{=}6 \quad c_6{=}10 \quad c_8{=}14 \quad c_{12}{=}18 \quad c_{15}{=}22 \quad c_{17}{=}26 \quad c_{19}{=}30 \quad c_{22}{=}34 \quad c_{26}{=}38 \quad c_{30}{=}42 \quad c_{33}{=}46 \quad c_{35}{=}50$$

Vemos que la condición "n pertenece a la sucesión si y sólo si c_n es par" se cumple en la sucesión. Además, la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ resulta ser muy interesante. Dado que esta es una versión análoga de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es razonable pensar que ambas sucesiones tengan muchas propiedades en común. En realidad, no sólo poseen propiedades similares, sino que ambas sucesiones son en esencia la misma [ClSlVa]. Veamos a qué nos referimos con esto.

Proposición 64. *La sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ cumple que $c_n = c_{n-1} + \epsilon$ para $n \geq 2$, donde el valor de ϵ viene dado por la tabla*

	c_{n-1} es impar	c_{n-1} es par
n pertenece a la sucesión	1	2
n no pertenece a la sucesión	2	1

Demostración. Comprobemos los cuatro casos que aparecen en la tabla.

- Caso 1: n pertenece a la sucesión y c_{n-1} es impar

  Si n pertenece a la sucesión, c_n debe ser par. Eso quiere decir que podemos tomar $c_n = c_{n-1}+1$.

- Caso 2: n pertenece a la sucesión y c_{n-1} es par

  Si n pertenece a la sucesión, entonces c_n es par. Es decir, debemos tomar el siguiente número par, el cual es $c_n = c_{n-1} + 2$.

- Caso 3: n no pertenece a la sucesión y c_{n-1} es impar

  Si n no pertenece a la sucesión, c_n es impar. Por tanto, el número a_n debe ser el siguiente número par, es decir, $c_n = c_{n-1} + 2$.

- Caso 4: n no pertenece a la sucesión y c_{n-1} es par

  Si n no pertenece a la sucesión, c_n es impar. Luego tenemos que $c_n = c_{n-1} + 1$.

$\square$

Proposición 65. *La sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ cumple que $c_n = a_{n+1} - 1$, para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Demostraremos el resultado mediante un proceso de inducción. Dado que $c_0 = 0$, $c_1 = 3$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 4$, es evidente que $c_0 = a_1 - 1$ y $c_1 = a_2 - 1$. Ahora supongamos que, para un cierto número entero no negativo N, se cumple que $c_n = a_{n+1} - 1$ para todo $n \leq N$. Veamos que entonces ocurre que $c_{N+1} = a_{N+2} - 1$.

Si aplicamos la igualdad de la Proposición 64, obtenemos que $c_{N+1} = c_N + \epsilon = a_{N+1} + \epsilon - 1$, donde el valor de ϵ viene dado por la tabla de dicha proposición. Veremos a continuación que $a_{N+1} + \epsilon = a_{N+2}$. Observemos primero que, debido a que las diferencias entre términos de la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ son de 1 o de 2 a partir de c_2 (Proposición 64), se cumple que $n < c_n$ para todo $n \geq 1$. Ahora, si comparamos las dos tablas de las Proposiciones 53 y 64, vemos que son la misma tabla salvo por el hecho de que los casos de las columnas están intercambiados (en la Proposición 53 la columna de la izquierda es el caso de "a_{n-1} es par", mientras que en la Proposición 64 la columna de la izquierda es "c_{n-1} es impar"). Podemos hacer dos observaciones importantes:

- Como $c_N = a_{N+1} - 1$, si c_N es impar, entonces a_{N+1} será par y viceversa.

- Como $N + 1$ pertenece a la sucesión y $N + 1 < c_{N+1}$, se cumple que si $N + 1$ pertenece a la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$, entonces $N+2$ pertenece a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esto es debido a que si existe un i tal que $c_i = N + 1$, nuestra hipótesis de inducción nos dice que $N + 1 = c_i = a_{i+1} - 1$, luego $a_{i+1} = N + 2$. Y análogamente, si $N + 1$ no pertenece a la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$, entonces $N + 2$ tampoco pertenece a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dado que si $N + 2$ apareciera en $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se cumpliría que $c_i = a_{i+1} - 1 = N + 2 - 1 = N + 1$ para un cierto i.

Las dos observaciones anteriores nos garantizan que el mismo ϵ que tenemos en la igualdad $c_{N+1} = c_N + \epsilon = a_{N+1} + \epsilon - 1$ (que está determinado por la tabla de la Proposición 64) también hace que se cumpla la igualdad $a_{N+2} = a_{N+1} + \epsilon$ (Proposición 53). Por tanto, tenemos que

$$c_{N+1} = c_N + \epsilon = a_{N+1} + \epsilon - 1 = a_{N+2} - 1.$$

$\square$

La Proposición 65 nos revela que las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\geq 0}$ son realmente la misma: la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ es la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sustrayendo 1 de cada uno de sus términos. Este fascinante hecho nos permite ver que cualquier característica de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también la cumple $(c_n)_{n\geq 0}$ pero traducida mediante la igualdad $c_n = a_{n+1} - 1$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\cdots$
a_{n+1}	1	4	6	7	8	9	11	13	15	16	17	18	19	20	21	23	25	27	29	31	$\cdots$
c_n	0	3	5	6	7	8	10	12	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28	30	$\cdots$

Tabla 4.7: Comparativa entre la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$.

Por ejemplo, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ incluye a todos los números impares, al 4, al 6, al 8 y a los números pares $2m$ tales que $9 \cdot 2^{k-1} - 1 \leq m \leq 6 \cdot 2^k - 2$, para todo $k \geq 1$ (Proposiciones 54 y 55), la Proposición 65 nos indica que la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ incluye a todos los números pares, al 3, al 5, al 7 y a los números impares $2m-1$ tales que $9 \cdot 2^{k-1} - 1 \leq m \leq 6 \cdot 2^k - 2$, para todo $k \geq 1$.

También podemos comprobar que la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ posee una estructura prácticamente idéntica a la de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La estructura que sigue $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste en alternar segmentos de números consecutivos y segmentos de números impares consecutivos, donde cada vez estos segmentos van duplicando su longitud. Entonces, ya que $c_n = a_{n+1} - 1$, la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ sigue esa misma estructura, con la salvedad de que los segmentos de números impares consecutivos ahora son de números pares consecutivos.

Por último, también vale la pena observar que, puesto que $a_{a_n} = 2n + 3$ para todo $n \geq 2$, la composicional de $(c_n)_{n\geq 0}$ cumple lo siguiente:

$$c_{c_n} = c(c(n)) = a(c(n)+1) - 1 = a(a(n+1)) - 1 = 2(n+1) + 3 - 1 = 2n + 4, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Por tanto, tenemos que $(c_{c_n})_{n\geq 0}$ se corresponde $\{0\} \cup \{2n+4 : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ [ClSlVa]. Esto significa que podemos dar una caracterización alternativa de la sucesión $(c_{c_n})_{n\geq 0}$ tal y como hicimos con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $c_0 = 0$, $c_1 = 3$ $c_2 = 5$, y para $n \geq 3$, c_n es el menor entero positivo que hace que la sucesión sea estrictamente creciente y que $c_{c_n} = 2n + 4$ para $n \geq 1$.

Vemos que el hecho de cambiar la condición "n pertenece a la sucesión si y sólo si a_n es impar" por "n pertenece a la sucesión si y sólo si c_n es par" no nos lleva a nada nuevo, dado que $(c_n)_{n\geq 0}$ es esencialmente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y posee las mismas características, tan sólo que transportadas mediante la igualdad $c_n = a_{n+1} - 1$. Parecía razonable suponer que la condición "n pertenece a la sucesión si y sólo si c_n es par" iba a definir una sucesión similar a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en algunos aspectos, pero resulta sorprendente que, en la práctica, una sucesión sea una copia de la otra.

Capítulo 5

Sucesiones caracterizadas por su composicional

Vamos a dedicar este capítulo a hablar sobre las sucesiones caracterizadas por su composicional y a dar algunos ejemplos. Las sucesiones a las que nos referimos son aquellas que se definen mediante la forma o la estructura que presenta su composicional (recordemos la Definición 56: la composicional de una sucesión es esa sucesión compuesta con ella misma). Por ejemplo, en el capítulo anterior anterior vimos que las sucesiones estrictamente crecientes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\geq 0}$ podían ser definidas haciendo uso de su composicional (concretamente, cumplen que $a(a(n)) = 2n+3$ y que $c(c(n)) = 2n+4$ respectivamente). La idea es tratar de encontrar sucesiones que queden determinadas de una forma similar a estas dos. Además, veremos lo estrechamente relacionadas que están estas sucesiones que vamos a tratar.

5.1. Sucesiones cuya composicional es $2n$

Observando las igualdades $a(a(n)) = 2n+3$ y $c(c(n)) = 2n+4$, una primera pregunta que podríamos hacernos es si existe una sucesión $(s_n)_{n\geq n_0}$ estrictamente creciente que cumple $s(s(n)) = 2n$, y si es así, qué aspecto tiene dicha sucesión. Si estuviéramos hablando de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente, la solución al problema resulta trivial: la función $f(x) = \sqrt{2}x$ cumple que $f(f(x)) = 2x$. No obstante, estamos buscando una sucesión de números enteros. Afortunadamente, podemos comprobar que existe una sucesión que cumple las condiciones que pedimos: la sucesión catalogada como la A007378 en la OEIS.

Definición 66. *La sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$ (A007378) se define de la siguiente manera: d_n, para $n \geq 2$, es el menor entero positivo mayor que d_{n-1} y que es consistente con la condición "n está en la sucesión si y sólo si d_n es un par mayor o igual que 4".*

Una definición alternativa es la siguiente: d_n, para $n \geq 2$, es el menor entero positivo mayor que d_{n-1} que hace que la sucesión satisfaga $d(d(n)) = 2n$ para todo $n \geq 2$.

La primera forma de definir la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$ la dota de ese carácter autogenerado qu e estamos discutiendo en este trabajo. La segunda forma de definirla es más relevante para este capítulo en concreto, pues no muestra cómo la sucesión también puede definirse en términos de su composicional. Estos son los primeros términos de la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	$\cdots$
d_n	3	4	6	7	8	10	12	13	14	15	16	18	20	22	24	25	26	27	28	29	$\cdots$

Tabla 5.1: Primeros términos de la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$.

Lo primero que llama la atención es que la sucesión necesita que su primer término tenga índice 2 para que se cumple la condición de que $d_{d_n} = 2n$ para todo $n \geq 2$. Es decir, $d_2 = 3$, $d_3 = 4$, $d_4 = 6$, etc. Si denotáramos el primer término de la sucesión como d_1, no conseguiríamos definir el resto de términos de forma satisfactoria. Por ejemplo, si $d_1 = 1$, entonces se debería cumplir la igualdad $d_1 = d_{d_1} = 2 \cdot 1 = 2$, lo cual no es posible. Si $d_1 = 2$, entonces $d_2 = d_{d_1} = 2 \cdot 1 = 2$, luego no se cumpliría la condición de que $d_1 < d_2$. Y si $d_1 > 2$, entonces $d_{d_1} = 2 \cdot 1 = 2$, lo que haría que $d_1 > d_{d_1}$. Por tanto, debemos hacer ese pequeño sacrificio de empezar con índice 2 para que encontrar una sucesión de estas características.

La construcción de la sucesión ocurre de la siguiente manera: d_2 no puede ser 1, dado que en la sucesión no existe el término $d_1 = d_{d_2}$. Tampoco puede ser $d_2 = 2$, ya que entonces la igualdad $d_2 = d_{d_2} = 2 \cdot 2 = 4$ debería ser cierta, lo cual no es posible. Así que debemos tomar $d_2 = 3$, que no presenta ningún problema. Esto nos determina $d_3 = d_{d_2} = 2 \cdot 2 = 4$, que a su vez determina $d_4 = d_{d_3} = 2 \cdot 3 = 6$. Esto nos obliga a que $d_6 = d_{d_4} = 2 \cdot 4 = 8$, así que d_5 debe tomar el valor 7 para que se mantenga el crecimiento estricto en la sucesión. Siguiendo este razonamiento podemos obtener el resto de términos de la sucesión.

Una pregunta que podríamos plantearnos es: ¿existe alguna otra sucesión $(s_n)_{n\geq n_0}$ a parte de $(d_n)_{n\geq 2}$ que cumpla la condición $s_{s_n} = 2n$? La respuesta es afirmativa (veremos un ejemplo más adelante), aunque si nos limitamos a sucesiones monótonas crecientes de números enteros positivos, entonces resulta que $(d_n)_{n\geq 2}$ es la única con estas características. La siguiente demostración está basada en la solución del problema 474 de *Crux Mathematicorum* [Pa, pág. 198].

Proposición 67. *La sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$ es la única sucesión monótona creciente que cumple que $d_{d_n} = 2n$ para todo $n \geq 2$.*

Demostración. Sea una sucesión $(s_n)_{n\geq n_0}$ una sucesión monótona creciente de números enteros positivos tal que se cumple que $s_{s_n} = 2n$ para todo n. Asumimos que $n_0 > 0$, ya que entonces $s_0 = s_{s_0} = 2 \cdot 0 = 0$ no sería un entero positivo. Veamos que esta sucesión $(s_n)_{n\geq n_0}$ está definida de forma única. Si $s(m) = s(n)$ para ciertos m, n, entonces $2m = s(s(m)) = s(s(n)) = 2n$, luego necesariamente $m = n$. Esto significa que la sucesión $(s_n)_{n\geq n_0}$ debe ser estrictamente creciente.

Ahora, si $s(n) \leq n$ para un cierto n, entonces la monotonía creciente estricta de la sucesión hace que $2n = s(s(n)) \leq s(n) \leq n$, lo cual no es posible. Por tanto, tenemos que $n < s(n) < s(s(n)) = 2n$. En particular, observamos que esto significa que $1 < s(1) < s(s(1)) = 2$. Si suponemos que la sucesión no tiene término $s(1)$ y que empieza con $s(2)$, este problema desaparece. Tenemos que $2 < s(2) < s(s(2)) = 4$, con lo que deducimos que $s(2) = 3$ y $s(3) = 4$.

Es evidente que se cumple la igualdad $s(2n) = s(s(s(n))) = 2s(n)$. Si aplicamos esta igualdad repetidamente, podemos observar que se cumplen las siguientes dos igualdades:

$$s(2^k) = 2^{k-1}s(2) = 3 \cdot 2^{k-1} \;\text{ y }\; s(3 \cdot 2^{k-1}) = 2^{k-1}s(3) = 2^{k+1}, \text{ para todo } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Observemos que los conjuntos $A_k = \{n : 2^k \leq n < 3 \cdot 2^{k-1}\}$ y $B_k = \{n : 3 \cdot 2^{k-1} \leq n < 2^{k+1}\}$ tienen 2^{k-1} elementos distintos cada uno, para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$ También podemos ver que B_k es el resultado de sumar 2^{k-1} a los elementos de A_k. Como hemos visto que la sucesión $(s_n)_{n\geq 2}$ es estrictamente creciente y que cumple que $s(2^k) = 3 \cdot 2^{k-1}$ y $s(3 \cdot 2^{k-1}) = 2^{k+1}$, entonces debe darse que $s(A_k) = B_k$, para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$ Además, eso significa que $s(B_k) = s(s(A_k)) = 2A_k$. Por tanto, tenemos que la sucesión debe cumplir la siguiente fórmula:

$$s(n) = \begin{cases} n + 2^{k-1} & si \quad 2^k \leq n < 3 \cdot 2^{k-1} \\ 2(n - 2^{k-1}) & si \quad 3 \cdot 2^{k-1} \leq n < 2^{k+1} \end{cases}, \ k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.1}$$

Es decir, que la única sucesión de números enteros positivos monótona creciente $(s_n)_{n \geq n_0}$ tal que $s(s(n)) = 2n$ es aquella definida por la fórmula (5.1). Dado que la sucesión $(d_n)_{n \geq 2}$ cumple dichas características, deducimos que $(d_n)_{n \geq 2}$ es la única sucesión de números enteros positivos monótona creciente tal que $d(d(n)) = 2n$.

□

Es decir, que por más que uno busque, es imposible encontrar otra sucesión creciente de enteros positivos (que no sea $(d_n)_{n \geq 2}$) tal que su composicional sea $2n$. Esto ya es un hecho sorprendente, y además la anterior demostración nos indica que la sucesión $(d_n)_{n \geq 2}$ está determinada por la fórmula (5.1). Podemos reescribir la fórmula si utilizamos que $n = 3 \cdot 2^{k-1} + j$, con $k = 1, 2, 3, \ldots$ y $-2^{k-1} \leq j < 2^{k-1}$:

$$d(3 \cdot 2^{k-1} + j) = \begin{cases} 2^{k+1} + j & si \quad -2^{k-1} \leq j < 0 \\ 2^{k+1} + 2j & si \quad 0 \leq j < 2^{k-1} \end{cases}, \text{ para todo } k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.2}$$

Esta fórmula resulta muy similar a la fórmula (4.3) para la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la cual estudiamos en el capítulo anterior. Una similitud que presenta es que divide la sucesión $(d_n)_{n \geq 2}$ en segmentos que van doblando su longitud (al igual que ocurre con $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y con $(c_n)_{n \geq 0}$). En concreto, el segmento k-ésimo queda definido como el conjunto de términos de la sucesión cuyos índices son $3 \cdot 2^{k-1} + j$, con $-2^{k-1} \leq j < 2^{k-1}$. La fórmula (5.2) también nos permite ver que cada segmento está dividido en dos mitades distintas (representadas por las dos ramas de la fórmula). La primera mitad está compuesta por los números consecutivos $2^{k+1} + j$, mientras que la segunda mitad está formada por los números pares consecutivos $2^{k+1} + 2j$. En resumen, la sucesión $(d_n)_{n \geq 0}$ presenta una estructura muy similar a la de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y a la de $(c_n)_{n \geq 0}$. Esto se debe a que las tres son sucesiones estrictamente crecientes y están perfectamente determinadas por su composicional:

$$a(a(n)) = 2n + 3, \ c(c(n)) = 2n + 4 \text{ y } d(d(n)) = 2n.$$

La fórmula (5.2) también puede utilizarse para observar qué números enteros conforman la sucesión $(d_n)_{n \geq 2}$.

Proposición 68. *La sucesión $(d_n)_{n \geq 2}$ incluye a todos los números pares mayores o iguales que 4.*

Demostración. La sucesión cumple que $d(d(m)) = 2m$ para todo $m \geq 2$, luego $(d_n)_{n \geq 2}$ incluye a todos los pares mayores que 4. □

Proposición 69. *La sucesión $(d_n)_{n \geq 2}$ incluye al 3 y a los números impares $2m + 1$ tales que*

$$3 \cdot 2^{k-2} \leq m \leq 2^k - 1, \ \textit{para } k = 2, 3, \ldots$$

Demostración. Es evidente que el 3 pertenece a la sucesión: es el primer término ($d_2 = 3$). Si observamos la fórmula (5.2), es evidente que cualquier número impar que pertenezca a la sucesión debe hallarse en la primero mitad de un segmento (las segundas mitades de los segmentos están formadas por números pares consecutivos). En la primera mitad del segmento k-ésimo, para $k = 2, 3, \ldots$, los números impares que aparecen son $2^{k+1} + j$, con j impar y $-2^{k-1} < j < 0$. Es decir, estos son los números impares $2^{k+1} + 2i + 1$, con $-2^{k-2} \leq i \leq -1$. Dado que $2^{k+1} + 2i + 1 = 2(2^k + i) + 1$, deducimos que aparecen en la sucesión los números impares $2m + 1$ tales que

$$3 \cdot 2^{k-2} = 2^k - 2^{k-2} \leq m \leq 2^k - 1, \text{ para } k = 2, 3, \ldots$$

□

Otra similitud con respecto a las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\geq 0}$ es la siguiente: la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$ contiene a todos los pares y a un subconjunto de los impares, que son fácilmente calculables. De nuevo, la semejanza de sus propiedades es fruto de que estas sucesiones poseen definiciones muy parecidas.

Anteriormente habíamos adelantado que existían más sucesiones distintas a $(d_n)_{n\geq 2}$ que cumplían que $d(d(n)) = 2n$ (prescindiendo del carácter monótono creciente como bien indica la Proposición 67). La sucesión catalogada como la A002516 en la OEIS es un perfecto ejemplo de esto, la cual podemos entender como una versión no monótona de $(d_n)_{n\geq 2}$.

Definición 70. *La sucesión $(e_n)_{n\geq 0}$ (A002516) se define de la siguiente forma: e_n es el menor entero no negativo que aún no ha aparecido en la sucesión y que hace que se satisfaga que $e(e(n)) = 2n$ para todo $n \geq 0$.*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\cdots$
e_n	0	3	6	2	12	7	4	10	24	11	14	18	8	15	20	26	48	19	22	34	$\cdots$

Tabla 5.2: Primeros términos de la sucesión $(e_n)_{n\geq 0}$.

La sucesión $(e_n)_{n\geq 0}$ empieza tomando $e_0 = 0$, dado que hace que se cumpla que $e(e(0)) = e(0) = 0 = 2\cdot 0$. Ahora pasamos a elegir un valor para e_1. Observamos que este no puede ser 1, ya que no se satisface la igualdad $e(e(1)) = e(1) = 1 \neq 2 \cdot 1$. Tampoco puede ser 2, porque entonces tendríamos que $e(2) = e(e(1)) = 2 \cdot 1 = 2$ coincide con el propio término e_1. Así pues, el valor que debe tomar es $e_1 = 3$, de tal forma que $e(3) = e(e(1)) = 2 \cdot 1 = 2$. Mediante este razonamiento se construye de forma progresiva la sucesión $(e_n)_{n\geq 0}$.

Podemos encontrar una fórmula sencilla que representa el comportamiento de la sucesión $(e_n)_{n\geq 0}$ [OEIS, A002516].

Proposición 71. *La sucesión $(e_n)_{n\geq 0}$ cumple las siguientes igualdades para todo $m = 0, 1, 2, \cdots$:*

$$\begin{aligned} e_{4m} &= 2e_{2m}, \\ e_{4m+1} &= 4m + 3, \\ e_{4m+2} &= 2e_{2m+1}, \\ e_{4m+3} &= 8m + 2. \end{aligned}$$

Es decir, que los términos de índice par $2i$ serán el doble del término con índice igual a i. Y para los términos con índice impar $2j + 1$ depende: si $2j + 1$ es congruente con 1 módulo 4, entonces $e_{2j+1} = 2j + 1 + 2$. Si por el contrario es congruente con 3 módulo 4, entonces $e_{2j+1} = 2(2j + 1 - 2)$. Además, esta fórmula nos muestra que los términos con índice congruente con 1 módulo 4 son los únicos impares y que el resto de términos serán pares. Esas propiedades son observables en la Tabla 5.1.

5.2. Sucesiones cuya composicional es $3n$

Una vez vistas las sucesiones cuya composicional $2n$, uno no puede evitar hacerse la siguiente pregunta: ¿existen sucesiones cuya composicional es, por ejemplo, $3n$? Y de existir, ¿estas sucesiones son similares a las discutidas en la sección anterior en cuanto a sus propiedades? Durante esta sección veremos hasta que ambas cuestiones tienen respuesta afirmativa. La primera sucesión que trataremos es la siguiente:

Definición 72. *La sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$ (A003605) se define de la siguiente forma: f_n es el menor entero no negativo mayor que f_{n-1} y que es consistente con la condición "n pertenece a la sucesión si y sólo si f_n es un múltiplo de 3".*

Esta sucesión acepta otra definición: f_n es el menor entero no negativo mayor que f_{n-1} que hace que se satisfaga $f(f(n)) = 3n$ para todo $n \geq 0$.

Al igual que ocurría con la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$ (Definición 66), la primera definición permite observar que $(f_n)_{n\geq 0}$ es definitivamente una sucesión autogenerada. La segunda definición es la que usaremos para comentar las características de la sucesión.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\cdots$
f_n	0	2	3	6	7	8	9	12	15	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	30	$\cdots$

Tabla 5.3: Primeros términos de la sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$.

Observación. En algunos textos se considera que el primer término de la sucesión es $f_1 = 2$. No obstante, nosotros consideraremos que la sucesión comienza $f_0 = 0$ ya que también cumple $f(f(0)) = f(0) = 0 = 3 \cdot 0$. Este es un detalle menor que no afecta a las propiedades que mencionaremos en esta sección.

Veamos la definición de esta sucesión en acción. Para empezar, tomamos $f_0 = 0$ ya que cumple $f(f(0)) = f(0) = 3 \cdot 0$. Ahora bien, el valor de f_1 no podría ser 1, dado que entonces ocurre que $f(f(1)) = f(1) \neq 3 \cdot 1$. Por tanto, el término f_1 debe ser 2, que no presenta problemas. Sin embargo, esto nos condiciona a que $f_2 = 3$, ya que se da la igualdad $f(2) = f(f(1)) = 3 \cdot 1 = 3$. A su vez, que f_2 sea 3 hace que necesariamente $f_3 = 6$, debido a que $f(3) = f(f(2)) = 3 \cdot 2 = 6$. Nótese que la construcción de la sucesión muy similar a la de $(d_n)_{n\geq 2}$, lo cual tiene sentido por las similitudes entre las definiciones de ambas sucesiones (Definiciones 66 y 72).

La sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$ es estrictamente creciente por definición, y de forma similar a lo que hicimos con la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$, podemos preguntarnos si esta es la única sucesión creciente tal que ella compuesta consigo mismo más es $3n$. La respuesta a esta cuestión es afirmativa (al igual que para la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$ según la Proposición 67). La demostración está extraída de la solución del problema 474 de *Crux Mathematicorum* [Pa, pág. 198].

Proposición 73. *La sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$ es la única sucesión monótona creciente que cumple que $f_{f_n} = 3n$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Sea $(s_n)_{n\geq n_0}$ una sucesión monótona creciente tal que $s(s(n)) = 3n$ para todo $n \geq n_0$. Entonces la sucesión debe ser estrictamente creciente, dado que si $s(m) = s(n)$, entonces $3m = s(s(m)) = s(s(n)) = 3n$, lo que significa que $m = n$.

Supongamos que $s_n \leq n$ para un cierto n. Entonces $3n = s(s(n)) \leq s(n) \leq n$, lo cual sólo es posible si $n \leq 0$. Por tanto, podemos concluir que, para $n \geq 1$, se cumple que $n < s(n) < s(s(n)) = 3n$. En particular, si $n = 1$, tenemos que $1 < s(1) < s(s(1)) < 3$. Luego eso significa que $s_1 = 2$ y $s_2 = 3$.

Ahora, haciendo uso de la igualdad $s(3n) = s(s(s(n))) = 3s(n)$ repetidas veces, vemos que $s(3^k n) = 3^k s(n)$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$. Sustituyendo $n = 1$ y $n = 2$, obtenemos las siguientes dos igualdades:

$$s(3^k) = 3^k s(1) = 2 \cdot 3^k \ \text{ y } \ s(2 \cdot 3^k) = 3^k s(2) = 3^{k+1}, \text{ para todo } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Los conjuntos $A_k = \{m : 3^k \leq m < 2 \cdot 3^k\}$ y $B_k = \{m : 2 \cdot 3^k \leq m < 3^{k+1}\}$ contienen 3^k elementos cada uno. Dado que la sucesión es estrictamente creciente y se cumple que $s(3^k) = 2 \cdot 3^k$ y $s(2 \cdot 3^k) = 3^{k+1}$, entonces s debe transformar cada elemento de A_k en un elemento distinto de B_k, luego $s(A_k) = B_k$. Además, eso significa que $s(B_k) = s(s(A_k)) = 3A_k$. Es decir, que se cumple la siguiente igualdad:

$$s(n) = \begin{cases} n + 3^k & si \quad 3^k \leq n < 2 \cdot 3^k \\ 3(n - 3^k) & si \quad 2 \cdot 3^k \leq n < 3^{k+1} \end{cases}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots \tag{5.3}$$

Por tanto, sólo existe una única sucesión $(s_n)_{n \geq n_0}$ creciente que cumple que $s(s(n)) = 3n$: aquella que viene definida por la fórmula (5.3). Puesto que por definición la sucesión $(f_n)_{n \geq 0}$ es creciente y satisface que $f(f(n)) = 3n$, entonces $(f_n)_{n \geq 0}$ debe ser esa única sucesión que cumple dichas condiciones.

□

Dado que hemos visto que existen un única sucesión creciente que compuesta consigo misma es $2n$ (es decir, la sucesión $(d_n)_{n \geq 2}$) y una única sucesión creciente que compuesta consigo misma es $3n$ (es decir, $(f_n)_{n \geq 0}$), cabe preguntarse si esta unicidad se mantiene para $4n$, $5n$, $6n$, etc. Como curiosidad, Allouche, Rampersad y Shallit [AllRamSha] demostraron que, para $d \geq 4$, existe una infinidad no numerable de sucesiones crecientes que cumplen $s(s(n)) = dn$.

Volvamos a la sucesión $(f_n)_{n \geq 0}$. La demostración de la Proposición 73 nos indica que la sucesión cumple la fórmula (5.3), es decir:

$$f_n = \begin{cases} n + 3^k & si \quad 3^k \leq n < 2 \cdot 3^k \\ 3(n - 3^k) & si \quad 2 \cdot 3^k \leq n < 3^{k+1} \end{cases}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots \tag{5.4}$$

Si dividimos la sucesión en segmentos, llamando segmento k-ésimo al trozo de la sucesión donde se encuentran los términos f_n con $3^k \leq n < 3^{k+1}$ (para todo $k = 0, 1, 2, \dots$), observamos una cierta estructura dentro de la sucesión. La rama superior de la fórmula (5.4) nos indica que en la primera mitad del segmento k-ésimo está formado por 3^k números consecutivos. Y la rama inferior significa que la segunda mitad del segmento la componen 3^k múltiplos de 3 consecutivos. Nótese que únicamente el término $f_0 = 0$ no pertenece a ningún segmento. Esta tipo de estructura debería resultarnos familiar a estas alturas: las sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \geq 0}$ y $(d_n)_{n \geq 2}$ poseen una estructura muy similar. Esto se debe a que estas cuatro sucesiones están definidas de forma muy parecida: las cuatro son sucesiones estrictamente crecientes determinadas por cómo es su composicional ($a(a(n)) = 2n + 3$, $c(c(n)) = 2n + 4$, $d(d(n)) = 2n$ y $f(f(n)) = 3n$).

Una propiedad bastante sencilla de ver es que $(f_n)_{n \geq 0}$ contiene a todos los múltiplos de 3.

Proposición 74. *La sucesión $(f_n)_{n \geq 0}$ incluye a todos los múltiplos de 3.*

Demostración. Sea $n \geq 0$ un múltiplo de 3 cualquiera. Existe un $m \geq 0$ tal que $n = 3m$. Sabemos que $f(f(m)) = 3m = n$, luego n es el término f_m-ésimo de la sucesión. □

Esta propiedad es bastante evidente, así que tratemos otra algo más interesante: ¿cuáles son los números que no son múltiplos de 3 y que forman parte de la sucesión?

Proposición 75. *La sucesión $(f_n)_{n \geq 0}$ incluye al 2 y todos los números $3m + 1$ y $3m + 2$ con $2 \cdot 3^{k-1} \leq m < 3^k$, para todo $k = 1, 2, \dots$*

Demostración. Recordemos la estructura de segmentos de $(f_n)_{n \geq 0}$ que hemos discutido antes. Dado que la segunda mitad de cada segmento son múltiplos de 3 y el único término que no está en ningún segmento es $f_0 = 0$, sólo podemos encontrar números que no sean múltiplos de 3 en la primera de cada segmento. Es decir, según la fórmula (5.4), los números que no son múltiplos de 3 se hallan entre los términos f_n con $3^k \leq n < 2 \cdot 3^k$, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ Los términos de la primera mitad de cada segmento están definidos como $f_n = n + 3^k$. Si $k = 0$, tenemos que la primera mitad del segmento es solamente el término $f_1 = 1 + 3^0 = 2$.

Tomemos $k > 0$. Dado que $f_n = n + 3^k$, no serán múltiplos de 3 aquellos términos f_n de la primera mitad del segmento tales que n no sea múltiplo de 3. Es decir, que los números que no son múltiplos de 3 que aparecen son $3i + 1 + 3^k$ y $3i + 2 + 3^k$ con $3^{k-1} \leq i < 2 \cdot 3^{k-1}$. Debido a que $3i + 1 + 3^k = 3(3^{k-1} + i) + 1$ y $3i + 2 + 3^k = 3(3^{k-1} + i) + 2$, si tomamos $m = 3^{k-1} + i$ podemos concluir que en la sucesión aparecen los números $3m + 1$ y $3m + 2$ con $2 \cdot 3^{k-1} \leq m < 3^k$. □

Estas dos proposiciones nos permiten conocer con exactitud qué números forman parte de la sucesión. Con esto, ya no nos queda mucho más por comentar sobre esta sucesión. Como curiosidad, cabe mencionar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$ fue el centro de un problema de la 27ª *British Mathematical Olympiad* de 1992 [Gar]. Concretamente, el enunciado del quinto problema decía así:

Sea f una función que transforma enteros positivos en enteros positivos. Supongamos que $f(n+1) > f(n)$ y $f(f(n)) = 3n$ para todo entero positivo n. Determinar $f(1992)$.

En efecto, la función de la que habla el enunciado es en realidad la sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$. El problema se resuelve mediante un razonamiento similar al de la demostración de la Proposición 73 con el que se obtiene una fórmula que permite calcular $f(1992)$.

De forma similar a lo que vimos que ocurría con la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$, aunque la sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$ sea la única sucesión creciente que satisface que $f(f(n)) = 3n$, podemos encontrar otras sucesiones tales que compuestas consigo mismas sean $3n$ si nos deshacemos de la condición de monotonía. Como ejemplo, veamos la siguiente sucesión.

Definición 76. *La sucesión $(g_n)_{n\geq 0}$ (A002517) es la sucesión tal que g_n es el menor entero no negativo que aún no ha aparecido en la sucesión y que hace que se satisfaga $g(g(n)) = 3n$ para todo $n \geq 0$.*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\cdots$
g_n	0	2	3	6	5	12	9	8	21	18	11	30	15	14	39	36	17	48	27	20	$\cdots$

Tabla 5.4: Primeros términos de la sucesión $(g_n)_{n\geq 0}$.

La definición de esta sucesión es muy similar a la de la sucesión $(e_n)_{n\geq 0}$ (Definición 70). Y al igual que lo que ocurre con $(e_n)_{n\geq 0}$, la sucesión $(g_n)_{n\geq 0}$ es un ejemplo de cómo la Proposición 73 sin la condición de monotonía creciente deja ser cierta.

Además, como ocurre con $(e_n)_{n\geq 0}$, la sucesión $(g_n)_{n\geq 0}$ posee una fórmula sencilla que permite ver qué valores toman sus términos [OEIS, A002517].

Proposición 77. *La sucesión $(e_n)_{n\geq 0}$ cumple las siguientes igualdades para todo $m = 0, 1, 2, \ldots$:*

$$\begin{aligned} g_{3m} &= 3g_m, \\ g_{3m+1} &= 3m + 2, \\ g_{3m+2} &= 9m + 3. \end{aligned}$$

Vemos que los términos cuyo índice $3m$ es múltiplo de 3 son iguales al triple del término con índice m. Los términos cuyo índice es de3 la forma $3m + 1$ son iguales a $3m + 2$, luego estos son los únicos términos pares de la sucesión, ya que los términos con índice de la forma $3m + 2$ son impares (son iguales a $9m + 3$).

5.3. Sucesiones cuya composicional es $2n + 1$

Recordemos que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podía definirse como la sucesión estrictamente creciente tal que satisface $a(a(n)) = 2n + 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, uno puede plantearse la siguiente cuestión: ¿qué sucesión obtendríamos si sustituyéramos $2n + 3$ por $2n + 1$? Veremos la respuesta en esta sección.

Definición 78. *La sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (A079905) se define de la siguiente manera: $h_1 = 1$ y h_n es el menor entero positivo mayor que h_{n-1} que hace que la sucesión satisfaga $h(h(n)) = 2n + 1$ para $n > 1$.*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
h_n	1	3	5	6	7	9	11	12	13	14	15	17	19	21	23	24	25	26	27	28	$\cdots$

Tabla 5.5: Primeros términos de la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Esta sucesión se construye de forma similar a las sucesiones crecientes que ya hemos visto en este capítulo. Sabemos que $h_1 = 1$ por definición. No puede ocurrir que $h_2 = 2$ puesto que $h(h(2)) = h(2) = 2 \neq 2 \cdot 2 + 1$, así que tomamos $h_2 = 3$, que no presenta problemas. Esto nos condiciona a que $h(3) = h(h(2)) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, así que $h_3 = 5$. Podemos tomar $h_4 = 6$ sin problema, lo que nos indica que $h_6 = h(h(4)) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$. A su vez, al tomar $h_5 = 7$, estamos obligados a que $h_7 = h(h(5)) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$. Continuando este procedimiento podemos ir escribiendo el resto de términos de la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nótese que esta sucesión tiene una peculiaridad: no se satisface $h(h(n)) = 2n + 1$ para $n = 1$. Sin embargo, en todas las sucesiones de este tipo que hemos visto hasta ahora se cumplía la condición sobre su composicional para todos los índices. Para que la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pueda comenzar por 1, debe hacerse esta pequeña excepción.

A pesar de esta excepción, dado que $h(h(1)) = h(1) = 1$, eso significa que también podemos definir la sucesión de la forma siguiente: la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión tal que h_n es el menor entero positivo mayor que h_{n-1} que hace que la condición "$h(h(n))$ es impar para todo $n \geq 1$" se satisfaga.

Aún así, si queremos que se cumpla $h(h(n)) = 2n + 1$ también para $n = 1$, entonces debemos renunciar a que la sucesión empiece en 1 y obtenemos la siguiente sucesión.

Definición 79. *La sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (A080637) es la sucesión tal que i_n es el menor entero positivo mayor que i_{n-1} que hace que se cumpla que $i(i(n)) = 2n + 1$ para $n \geq 1$.*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
i_n	2	3	5	6	7	9	11	12	13	14	15	17	19	21	23	24	25	26	27	28	$\cdots$

Tabla 5.6: Primeros términos de la sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Observación. Vemos que el primer término de esta nueva sucesión es $i_1 = 2$. De hecho, con la salvedad del primer término, observamos que los primeros términos de esta sucesión y de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coinciden. Podemos deducir entonces que $h_n = i_n$ para todo $n > 1$, porque la condición $h(h(n)) = 2n + 1$ (o $i(i(n)) = 2n+1$) generará los mismos términos para ambas sucesiones partiendo de estos primeros términos.

Como i_1 no puede ser 1 (porque $2 \cdot 1 + 1 = 3 \neq 1 = i(1) = i(i(1))$), entonces tomamos $i_1 = 2$, lo cual nos obliga a que $i_2 = i(i(1)) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. A partir de ahí, la sucesión se va generando de forma idéntica a la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Resulta cuanto menos curiosa la sutil diferencia entre estas dos sucesiones. Si queremos la menor sucesión estrictamente creciente que satisfaga la condición "$s(s(n))$ es impar para todo n", entonces la sucesión que buscamos es $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por el contrario, si además queremos que $s(s(n))$ sea exactamente el impar $2n+1$ (para todo n), entonces la respuesta es la sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Lo más fascinante de todo es que esa diferencia de matiz se consiga cambiando únicamente el primer término de la sucesión.

Lo cierto es que la sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ técnicamente ya ha aparecido anteriormente (o al menos una extremadamente parecida). En la página de la OEIS dedicada a esta sucesión [OEIS, A080637], Sloane y Cloitre indican que esta sucesión es esencialmente la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$ (Definición 66).

Proposición 80. *Las sucesiones $(d_n)_{n\geq 2}$ y $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumplen que $i_n = d_{n+1} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Podemos observar cómo se satisface la Proposición 80 en la siguiente tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\cdots$
d_{n+1}	3	4	6	7	8	10	12	13	14	15	16	18	20	22	24	25	26	27	28	29	$\cdots$
i_n	2	3	5	6	7	9	11	12	13	14	15	17	19	21	23	24	25	26	27	28	$\cdots$

Tabla 5.7: Comparativa entre la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$ y la sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si recordamos, esta situación también ocurría con las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\geq 0}$, tal y como indica la Proposición 65. Al igual que ocurría también en ese caso, aquí la Proposición 80 nos permite tomar cualquier propiedad que habíamos demostrado para $(d_n)_{n\geq 2}$ y traducirla en términos de $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por ejemplo, la veracidad de la Proposición 67 hace que la sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la única sucesión con sus características. Esto también lo mencionan Sloane y Cloitre [OEIS, A080637].

Proposición 81. *La sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la única sucesión monótona creciente que satisface $i(i(n)) = 2n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Además, la igualdad $i_n = d_{n+1} - 1$ nos brinda la posibilidad de tomar la fórmula (5.1) de la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$ y reescribirla para la sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$i(n) = \begin{cases} n + 2^{k-1} & si \quad 2^k \leq n < 3 \cdot 2^{k-1} \\ 2(n - 2^{k-1}) + 1 & si \quad 3 \cdot 2^{k-1} \leq n < 2^{k+1} \end{cases}, \text{ para todo } k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.5}$$

Otro detalle que se nos revela mediante la Proposición 80 (y que es observable también en la fórmula (5.5)) es la estructura de la sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$ estaba divida en segmentos, la sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también presenta dichos segmentos, de tal forma que el k-ésimo segmento lo conforman los términos i_n con $2^k \leq n < 2^{k+1}$ para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$ Además, como la primera mitad de cada segmento de $(d_n)_{n\geq 2}$ estaba formada por números consecutivos, en la sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ocurre exactamente lo mismo. Y como la segunda mitad de cada segmento de $(d_n)_{n\geq 2}$ eran números pares consecutivos, en el caso de $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ahí aparecen números impares consecutivos (debido a que $i_n = d_{n+1} - 1$),

Por último, la Proposición 80 también nos permite conocer qué números aparecen en la sucesión $i_n = d_{n+1} - 1$. Como la Proposición 68 nos dice que en la sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$ aparecen todos los números pares mayores o iguales que 4, aplicando $i_n = d_{n+1} - 1$ tenemos que en la sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deben aparecer todos los números impares mayores o iguales que 3. Y según la Proposición 69, en

$(d_n)_{n\geq 2}$ aparecen el 3 y todos los números impares $2m+1$ tales que $3\cdot 2^{k-2}\leq m\leq 2^k-1$ para $k=2,3,\ldots$ Por tanto, deducimos que la sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ incluye al 2 y a todos los números pares $2m$ que cumplen que

$$3\cdot 2^{k-2}\leq m\leq 2^k-1, \text{ para } k=2,3,\ldots$$

5.4. Sucesiones cuya composicional es n^2

Hasta este punto en el capítulo, tan sólo hemos contemplado sucesiones cuya composicional sigue una fórmula lineal ($2n$, $2n+1$, $2n+3$, $2n+4$, $3n$, etc.). Por tanto, vamos a cerrar este capítulo viendo qué sucesiones aparecen si forzamos a que compuestas consigo mismas sean n^2. Si estuviéramos tratando con funciones reales, este problema resulta trivial: la función real, que compuesta consigo misma es x^2, es $f(x)=x^{\sqrt{2}}$. Sin embargo, encontrar una sucesión que cumpla esto no parece tan sencillo a priori. Durante esta sección, trataremos la existencia sucesiones cuya composicional es n^2 y nos daremos cuenta de que estas sucesiones carecen de muchas de las propiedades que presentaban las sucesiones cuya composicionales se rigen por fórmulas lineales.

Definición 82. *La sucesión $(p_n)_{n\geq 0}$ (A079258) se define de la siguiente forma: p_n es el menor entero no negativo mayor que p_{n-1} y que es consistente con la condición "n pertenece a la sucesión si y sólo si p_n es un cuadrado".*

Otra manera de definir la sucesión es esta: p_n es el menor entero no negativo mayor que p_{n-1} que hace que se satisfaga que $p(p(n))=n^2$ para todo $n\geq 0$.

De nuevo, tenemos una sucesión con dos definiciones posibles: una que resalta el carácter autogenerado de la sucesión y otra que permite observar cómo es su composicional. Podemos ver los primeros términos de la sucesión $(p_n)_{n\geq 0}$ en esta tabla:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\cdots$
p_n	0	1	3	4	9	10	11	12	13	16	25	36	49	64	65	66	81	82	83	84	$\cdots$

Tabla 5.8: Primeros términos de la sucesión $(p_n)_{n\geq 0}$.

Observamos que $p_0=0$ y $p_1=1$ debido a que de esta forma se cumple que $p(0)=p(p(0))=0^2=0$ y $p(1)=p(p(1))=1^2=1$. No puede ocurrir que $p_2=2$, porque $p(2)=p(p(2))=2^2=4\neq 2$. Por tanto, tenemos que $p_2=3$, lo que significa que $p_3=p(p(2))=2^2=4$. Eso nos obliga a que $p_4=p(p(3))=3^2=9$. Deducimos que $p_9=p(p(4))=4^2=16$, y que entonces p_5, p_6, p_7 y p_8 no vana tener restricciones, así que elegimos los enteros menores posibles: $p_5=10$, $p_6=11$, $p_7=12$ y $p_8=13$. Si continuamos, iremos construyendo progresivamente la sucesión $(p_n)_{n\geq 0}$.

Por definición, esta sucesión es estrictamente creciente. Si uno observa detenidamente los primeros términos de la sucesión, puede hacerse una idea de que la sucesión carece de una propiedad que ya hemos visto muchas veces: la sucesión $(p_n)_{n\geq 0}$ no presenta la estructura de segmentos que hemos observado en el resto de sucesiones crecientes del capítulo. Si recordamos, las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\geq 0}$ del Capítulo 5 y las sucesiones $(d_n)_{n\geq 2}$, $(f_n)_{n\geq 0}$ y $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de este capítulo presentan esta estructura de segmentos divididos en dos mitades con un patrón diferente en cada mitad. Sin embargo, en la sucesión que nos ocupa es imposible identificar una estructura similar. Por ejemplo, los términos p_3 y p_4 son cuadrados consecutivos, a los cuales les siguen cuatro números consecutivos (p_5, p_6, p_7 y p_8), tras los que van cuatro cuadrados consecutivos (p_9, p_{10}, p_{11} y p_{12}), y después van tres números consecutivos (p_{13}, p_{14} y p_{15}) y un único cuadrado (p_{16}). No parece haber una estructura que se repita durante toda la sucesión. Además, la ausencia de una estructura es lo que nos hace imposible hallar una fórmula para los términos de la sucesión.

Otra propiedad de la que $(p_n)_{n\geq 0}$ carece es la unicidad. Durante este capítulo, hemos ido comprobando cómo las sucesiones crecientes con las que nos íbamos encontrando eran las únicas que eran crecientes y cumplían la condición impuesta sobre su composicional (Proposiciones 67, 73 y 81). Sin embargo, este no es el caso con la sucesión $(p_n)_{n\geq 0}$. La clave está en que, a la hora de construir la sucesión, no sea necesario escoger siempre el menor entero que cumpla las condiciones de monotonía y $p(p(n)) = n^2$ para todo $n \geq 0$. Por ejemplo, a la hora de elegir p_8, nada nos impide escoger $p_8 = 14$. Eso simplemente hará que $p_{14} = p(p(8)) = 8^2 = 64$, lo que significa que al p_{13} habrá que asignarle otro número entre $p_{12} = 49$ y $p_{14} = 64$ (por ejemplo, el 50). De esta forma se genera otra sucesión que también es creciente y que también cumple que $p(p(n)) = n^2$ para todo $n \geq 0$.

La gráfica de la sucesión $(p_n)_{n\geq 0}$ presenta una forma un tanto interesante. Esta gráfica está creada mediante el Programa 4.

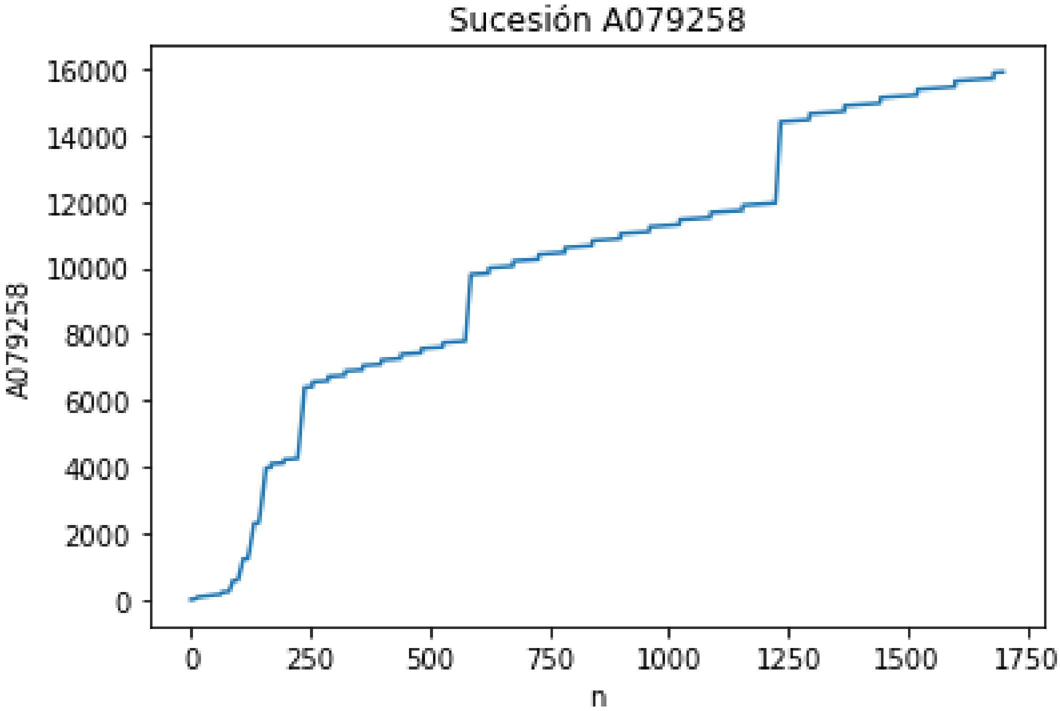

Figura 5.1: Gráfica de las sucesión $(p_n)_{n\geq 0}$ (A079258).

En la gráfica vemos cómo la sucesión se conforma de tramos formados por números consecutivos separados por saltos donde aparecen los cuadrados en la sucesión. Eso crea esta gráfica con forma escalonada.

Al igual que ocurría en las secciones anteriores, podemos obtener otra sucesión si reemplazamos en la Definición 82 la condición de monotonía creciente por simplemente que no se repitan términos. Lo curioso es que podemos obtener dos sucesiones diferentes de esta forma, las cuales se diferencian en variar ligeramente la condición de que la sucesión compuesta consigo misma sea n^2. Veamos la primera de ellas.

Definición 83. *La sucesión $(q_n)_{n\geq 0}$ (A054791) se define de la siguiente forma: q_n es el menor entero no negativo que no ha aparecido aún en la sucesión y que hace que se cumpla $q(q(n)) = n^2$ para todo $n \geq 0$.*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\cdots$
q_n	0	1	3	4	9	6	25	8	49	16	11	100	13	144	15	196	81	18	289	20	$\cdots$

Tabla 5.9: Primeros términos de la sucesión $(q_n)_{n\geq 0}$.

En esta sucesión sólo hemos prescindido de la monotonía y en su lugar pedimos que no haya repetición de términos. Para empezar, seguimos teniendo que $q_0 = 0$ y $q_1 = 1$ ya que así se cumple que $q(0) = q(q(0)) = 0^2 = 0$ y $q(1) = q(q(1)) = 1^2 = 1$. No puede ocurrir que $q_2 = 2$ (porque entonces $q(2) = q(q(2)) = 2^2 = 4 \neq 2$), luego $q_2 = 3$ y entonces $q_3 = q(q(2)) = 2^2 = 4$ y $q_4 = q(q(3)) = 3^2 = 9$. Ahora bien, al llegar a q_5, no puede ser que $q_5 = 2$ (porque entonces $q_2 = q(q(5)) = 5^2 = 25 \neq 3$) ni que $q_5 = 5$ (porque $q_5 = q(q(5)) = 5^2 = 25 \neq 5$). Por tanto, tomamos $q_5 = 6$.

Una observación sencilla es que si n es un cuadrado, entonces $q_n = q(\sqrt{n})^2$. Esto es porque si existe m tal que $n = m^2$, entonces

$$q(n) = q(m^2) = q(q(q(m))) = q(m)^2 = q(\sqrt{n})^2.$$

De hecho, este hecho causa que en la sucesión se repita un patrón cuanto menos curioso. Exceptuando los q_n con n siendo un cuadrado (que ya tienen su valor fijado por al observación anterior), los términos q_n, tales que la diferencia entre n y el mayor cuadrado menor que n sea impar, cumplen que $q_n = n + 1$ (esto es lo que ocurría con q_5 cuando construíamos los primeros términos de la sucesión). Sin embargo, si esa diferencia es par, como $q_{n-1} = n$ por $n-1$ tener una diferencia impar con el mayor cuadrado menor que él, entonces $q_{n+1} = q(q(n)) = n^2$ (salvo que n fuera un cuadrado, en cuyo caso $q_n = q(\sqrt{n})^2$).

Abajo aparecen los primeros términos de la sucesión $(q_n)_{n\geq 0}$, donde hemos señalado los términos q_n donde n es un cuadrado y hemos indicado debajo de cada término la distancia entre n y el mayor cuadrado menor que n. Se puede observar cómo los términos siguen este patrón que acabamos de describir.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ n=0=0^2}}{0}, \overset{\substack{n=1=1^2 \\ \uparrow}}{1}, \underset{1}{3}, \overset{\substack{n=4=2^2 \\ \uparrow}}{\underset{2}{4}}, 9, \underset{1}{6}, \underset{2}{25}, \underset{3}{8}, \overset{\substack{n=9=3^2 \\ \uparrow}}{\underset{4}{49}}, 16, \underset{1}{11}, \underset{2}{100}, \underset{3}{13}, \underset{4}{144}, \underset{5}{15}, \overset{\substack{n=16=4^2 \\ \uparrow}}{\underset{6}{196}}, 81, \underset{1}{18}, \underset{2}{289}, \underset{3}{20}, \underset{4}{361}, \underset{5}{22}, \underset{6}{441}, \underset{7}{24}, \overset{\substack{n=25=5^2 \\ \uparrow}}{\underset{8}{529}}, 36, \ldots$$

De hecho, dado que la distancia entre dos números cuadrados consecutivos es $(m+1)^2 - m^2 = 2m+1$, vemos que, tras un q_n con n cuadrado, habrá $2\sqrt{n}$ términos entre medias de él y el siguiente $q_{n'}$ cuyo n' sea un cuadrado. Esto es observable en el esquema superior.

La sucesión $(q_n)_{n\geq 0}$ es una versión no monótona de $(p_n)_{n\geq 0}$, aunque podemos encontrar otra versión no monótona si a la Definición 83 le sustituimos la condición de $q(q(n)) = n^2$ para todo $n \geq 0$, y sólo exigimos que $q(q(n))$ sea un cuadrado (no necesariamente n^2). Haciendo esto, nos queda la siguiente sucesión.

Definición 84. *La sucesión $(r_n)_{n\geq 0}$ (A168341) se define de la siguiente manera: r_n es el menor entero no negativo que no ha aparecido aún en la sucesión y que hace que $r(r(n))$ sea un cuadrado para todo $n \geq 0$.*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\cdots$
r_n	0	1	3	4	9	6	16	8	25	36	11	49	13	64	15	81	100	18	121	20	$\cdots$

Tabla 5.10: Primeros términos de la sucesión $(r_n)_{n\geq 0}$.

Vemos que la sucesión comienza igual que $(q_n)_{n\geq 0}$, hasta que llega al r_6. Dado que $r_6 = r(r(5))$, este debe ser un cuadrado, pero como ahora no necesariamente tiene que ser $5^2 = 25$, tomamos el menor cuadrado que aún no haya aparecido en la sucesión: el 16.

Nótese que, como cada vez que llegamos a un término que debe ser un cuadrado elegimos el menor cuadrado que no haya aparecido aún, esto hace que los cuadrados aparezcan en orden de menor a mayor en la sucesión.

Curiosamente, en la sucesión $(r_n)_{n\geq 0}$ aparece el mismo patrón que se repetía en la sucesión $(q_n)_{n\geq 0}$ pero modificándolo un poco, dado que $r(r(n))$ ya no tiene por qué ser exactamente n^2. Si n es un cuadrado, entonces r_n es también un cuadrado (aunque puede que no sea n^2). Si r_n es tal que la diferencia entre n y el mayor cuadrado menor que n es impar, entonces $r_n = n + 1$. Y por el contrario, si la diferencia es par, $r_{n+1} = r(r(n))$ debe ser un cuadrado.

Bibliografía

[Ab] Z. Abel, Tag Archives: Thue-Morse sequence, Three-Cornered Things, 11 de febrero de 2020, http://blog.zacharyabel.com/tag/thue-morse-sequence/, visitado el 25 de junio de 2022.

[AllRamSha] J. P. Allouche, N. Rampersad, & J. Shallit, On integer sequences whose first iterates are linear, Aequationes Mathematicae, Vol. 69, 2005, pág. 114–127.

[AllSha] J. P. Allouche, J. Shallit, The Ubiquitous Prouhet-Thue-Morse Sequence, Sequences and Their Applications, Springer, 1999, pág. 1–16.

[AllSha2] J. P. Allouche, J. Shallit, Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations, Cambridge University Press, 2003.

[AllSha3] J. P. Allouche, J. Shallit, Sums of Digits, Overlaps, and Palindromes, Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science, Vol. 4 nº 1, 2000, pág. 1-10.

[BaSi] M. Baake, B. Sing, Kolakoski-(3,1) is a (deformed) model set, Canadian Mathematical Bulletin, Vol. 47 nº 2, 2004, pág. 168–190.

[Bir] D. Birkoff, Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques, Bulletin De La Société Mathématique De France, 2, 1912, pág. 303–323.

[BorClo] O. Bordellès, B. Cloitre, Bounds for the Kolakoski Sequence, Journal of Integer Sequences, Vol. 14, Article 11.2.1., 2011.

[Chv] V. Chvátal, Notes on the Kolakoski sequence, DIMACS Technical Report 93-84, 1994.

[ClSlVa] B. Cloitre, N. J. A. Sloane and M. J. Vandermast, Numerical analogues of Aronson's sequence, J. Integer Seq., Vol. 6, Article 03.2.2, 2003.

[Eu] M. Euwe, Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel, Proc. Konin. Akad. Wetenschappen, Amsterdam 32, 1929, pág. 633-642.

[Gar] A. Gardiner, The Mathematical Olympiad Handbook: An Introduction to Problem Solving, Oxford University Press, 1997, pág. 113-114.

[Gol] S. W. Golomb, Problem 5407, Amer. Math. Monthly, Vol. 73, No. 6, 1966.

[GoMaFi] S. W. Golomb, Daniel Marcus, N. J. Fine, Problem 5407, Amer. Math. Monthly, Vol. 74, No. 6, 1967, pág 740-743.

[Guy] R. K. Guy, Unsolved problems in number theory, Springer-Verlag, 1981.

[Had] J. Hadamard, Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodésiques, Journal de Mathématiques pures et appliquées, vol. 4, 1898, pág. 27-74.

[Hof] D. R. Hofstadter, Metamagical Themas, Basic Books, 1985.

[Kol] William Kolakoski, Problem 5304, Amer. Math. Monthly, Vol. 72, No. 8, 1965.

[Lu] J. M. Luck et al, The nature of the atomic surfaces of quasiperiodic self-similar structures, Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol. 26, 1993, pág. 1951–1999.

[Mor] M. Morse, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc. 22, 1921, pág. 84-100.

[Nil] J. Nilsson, Letter Frequencies in the Kolakoski Sequence, Acta Physica Polonica A, Vol. 126, 2014, pág. 549-552.

[Old] Rufus Oldenburger, Exponent trajectories in symbolic dynamics, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 46, 1939, pág. 453-466.

[Pa] G. Patruno, Solution to Problem 474, Crux Mathematicorum, Vol. 6, No. 6, 1980.

[PeRe] Y.-F. Pétermann, J.-L. Rémy, Golomb's Self-described Sequence and Functional Differential Equations, Illinois Journal of Mathematics, Vol. 42, No. 3, 1998, pág. 420-440.

[Pr] E. Prouhet, Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 33, 1851.

[Rao] Michael Rao, Trucs et bidules sur la séquence de Kolakoski, 1 de octubre de 2012, https://www.arthy.org/kola/kola.php, visitado el 18 de diciembre de 2021.

[Rem] J.-L. Rémy, Sur la suite autodécrite de Golomb, Journal of Number Theory, Vol. 66, No. 1, 1997, pág. 1–28.

[Ste] B. Steinsky, A Recursive Formula for the Kolakoski Sequence A000002, Journal of Integer Sequences, Vol. 9, 2006, Article 06.3.7.

[Ten] G. Tenenbaum, Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory, American Mathematical Society, 2015.

[Thu] A. Thue, Über unendliche Zeichenreihen, Norske vid. Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl. 7, 1906, pág. 1-22. Reimpreso en "Selected mathematical papers of Axel Thue", T. Nagell, ed., Universitetsforlaget, Oslo, 1977, pág. 139-158.

[Thu2] A. Thue, Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen, Norske vid. Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl. 1, 1912, pág. 1-67. Reimpreso en "Selected mathematical papers of Axel Thue", T. Nagel, ed., Universitetsforlaget, Oslo, 1977, pág. 413-478.

[Var] I. Vardi, The Error Term in Golomb's Sequence, Journal of Number Theory, Vol. 40, 1992, pág. 1-11.

[Wri] E. M. Wright, Prouhet's 1851 Solution of the Tarry-Escott Problem of 1910, The American Mathematical Monthly, Vol. 66, No. 3, 1959, pág. 199-201.

Listado de sucesiones

[OEIS] OEIS Foundation Inc, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, 2022. Publicado electrónicamente en https://oeis.org.

- Sucesión de Kolakoski (A000002): https://oeis.org/A000002
- Sucesión de los mínimos k tales que las sumas parciales de la sucesión de Kolakoski son mayores o iguales que n (A156253): https://oeis.org/A156253
- Sucesión de las frecuencias de unos en la sucesión de Kolakoski (A156077): https://oeis.org/A156077
- Sucesión de las sumas parciales de la sucesión de Kolakoski (A054353): https://oeis.org/A054353
- Sucesión de Kolakoski-(1,3) (A064353): https://oeis.org/A064353
- Sucesión de Prouhet-Thue-Morse (A010060): https://oeis.org/A010060
- Sucesión ternaria de Prouhet-Thue-Morse (A036577): https://oeis.org/A036577
- Sucesión generalizada de Prouhet-Thue-Morse $(t_n^{2,3})_{n\geq 0}$ (A071858): https://oeis.org/A071858
- Sucesión generalizada de Prouhet-Thue-Morse $(t_n^{3,3})_{n\geq 0}$ (A053838): https://oeis.org/A053838
- Sucesión de Golomb (A001462): https://oeis.org/A001462
- Sucesión de tipo Golomb sobre los números impares (A080605): https://oeis.org/A080605
- Sucesión de tipo Golomb sobre los números pares (A080606): https://oeis.org/A080606
- Sucesión de tipo Golomb sobre los múltiplos de 3 (A080607): https://oeis.org/A080607
- Sucesión de tipo Golomb sobre los números primos (A169682): https://oeis.org/A169682
- Sucesión de tipo Golomb sobre los números cuadrados (A013189): https://oeis.org/A013189
- Sucesión de Aronson (A005224): https://oeis.org/A005224
- Versión mentirosa de la sucesión de Aronson (A081023): https://oeis.org/A081023
- Sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente que satisface "n pertenece a la sucesión si y sólo si a_n es impar" (A079000): https://oeis.org/A079000
- Diferencias de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente que satisface "n pertenece a la sucesión si y sólo si a_n es impar" (A079948): https://oeis.org/A079948

- Sucesión estrictamente creciente que cumple que $s_{s_n} = 2n + 3$ (A080596): https://oeis.org/A080596
- Sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sin repetición de términos que satisface "n pertenece a la sucesión si y sólo si b_n es impar" (A079313): https://oeis.org/A079313
- Sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ estrictamente creciente que satisface "n pertenece a la sucesión si y sólo si c_n es par" (A079253): https://oeis.org/A079253
- Sucesión $(d_n)_{n\geq 2}$ estrictamente creciente que satisface $d(d(n)) = 2n$ (A007378): https://oeis.org/A007378
- Sucesión $(e_n)_{n\geq 0}$ sin repetición de términos que satisface $e(e(n)) = 2n$ (A002516): https://oeis.org/A002516
- Sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$ estrictamente creciente que satisface $f(f(n)) = 3n$ (A003605): https://oeis.org/A003605
- Sucesión $(g_n)_{n\geq 0}$ sin repetición de términos que satisface $g(g(n)) = 2n$ (A002517): https://oeis.org/A002517
- Sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente que satisface $h_1 = 1$ y $h(h(n)) = 2n + 1$ para $n > 1$ (A079905): https://oeis.org/A079905
- Sucesión $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente que satisface $i(i(n)) = 2n + 1$ para $n \in \mathbb{N}$ (A080637): https://oeis.org/A080637
- Sucesión $(p_n)_{n\geq 0}$ estrictamente creciente que satisface $p(p(n)) = n^2$ para $n \geq 0$ (A079258): https://oeis.org/A079258
- Sucesión $(q_n)_{n\geq 0}$ sin repetición de términos que satisface $q(q(n)) = n^2$ para $n \geq 0$ (A054791): https://oeis.org/A054791
- Sucesión $(r_n)_{n\geq 0}$ sin repetición de términos que satisface $r(r(n))$ es un cuadrado para $n \geq 0$ (A168341): https://oeis.org/A168341

Anexo: Programas en Python

Programa 1: Representación de la sucesión de Kolakoski

```
from svg_turtle import SvgTurtle

# Generar los primeros 3300 términos de la sucesión de Kolakoski
num_rachas=2201
sucesion=[1,2,2]
for i in range(2,num_rachas):
    sucesion+=[1+i%2]*sucesion[i]
longitud=len(sucesion)
print('Se han generado los primeros ' + str(longitud)
   + ' términos de la sucesión de Kolakoski.')


# Inicializar el lienzo para el gráfico
t = SvgTurtle(2500, 2500)
t.color('red')
t.dot(5)
t.color('black')
t.left(90)

# Por cada término de la sucesión
for i in range(0,longitud):
    # Si es un 1, gira 90 grados a la derecha y avanza
    if sucesion[i]==1:
        t.right(90)
    # Si es un 2, gira 90 grados a la izquierda y avanza
    if sucesion[i]==2:
        t.left(90)
    t.forward(5)

# Guarda el gráfico
t.save_as('kolakosky.svg')
```

Programa 2: Visualización del comportamiento fractal de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse

```
from svg_turtle import SvgTurtle

# Generar los primeros 4096 términos de la sucesión de
# Prouhet-Thue-Morse
sucesion = [0]
for i in range(12):
    sucesion += [1-d for d in sucesion]
longitud=len(sucesion)
print('Se han generado los primeros ' + str(longitud)
    + ' términos de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse.')

# Inicializar el lienzo para el gráfico
t = SvgTurtle(2500, 2500)
t.color('red')
t.dot(5)
t.color('black')
t.right(120)

# Por cada término de la sucesión
for i in range(0,longitud):
    # Si es un 0, avanza
    if sucesion[i]==0:
        t.forward(5)
    # Si es un 1, gira 90 grados a la derecha
    if sucesion[i]==1:
        t.right(60)

# Guarda el gráfico
t.save_as('prouhet.svg')
```

Programa 3: Visualización de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse como un copo de nieve de Koch

```
from svg_turtle import SvgTurtle

# Generar los primeros 2048 términos de la sucesión de
# Prouhet-Thue-Morse
sucesion = [0]
for i in range(11):
    sucesion += [1-d for d in sucesion]
longitud=len(sucesion)
print('Se han generado los primeros ' + str(longitud)
    + ' términos de la sucesión de Prouhet-Thue-Morse.')

# Inicializar el lienzo para el gráfico
t = SvgTurtle(2500, 2500)
t.color('red')
t.dot(5)
t.color('black')

# Por cada término de la sucesión
for i in range(0,longitud):
    # Si es un 1, avanza y gira 90 grados a la izquierda
    if sucesion[i]==0:
        t.forward(5)
        t.left(60)
    # Si es un 2, gira 180
    if sucesion[i]==1:
        t.left(180)

# Guarda el gráfico
t.save_as('prouhet_koch.svg')
```

Programa 4: Representación de la sucesión $(p_n)_{n\geq 0}$ (A079258)

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Función para calcular los m primeros término de la sucesión A079258
def cua(m):
    # Partimos de los 3 primeros términos
    QQ = [1,3,4]
    # Queremos obtener el término n-ésimo, con 3 < n <= m
    for n in range(4,m+1):
        # Si n no está en entre los términos anteriores,
        # el término n-ésimo es el término (n-1)-ésimo más 1
        if not(n in QQ):
            QQ.append(QQ[n-2]+1)
        # Si n está en la sucesión,
        # el término n-ésimo es el cuadrado del índice de n
        else:
            b=QQ.index(n)
            QQ.append((b+1)**2)
    return QQ

# Calculamos los 1700 primeros términos de la sucesión
liQ = cua(1700)

# Y los dibujamos en un gráfico
plt.plot(liQ)
plt.title('Sucesión A079258')
plt.xlabel('Índice n')
plt.ylabel('Valor de A079258')
plt.show()
```