Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Comportamiento de las funciones definidas mediante series de potencias complejas en la frontera de su abierto de convergencia

Autora:

Lucía Trapote Reglero

Tutor:

Javier Sanz Gil

A Javi Sanz, por aceptar tutorizarme este trabajo y confiar en mí en todo momento. Por la dedicación, la paciencia y el esfuerzo para que haya salido lo mejor posible en las mejores condiciones. Por ver siempre el lado bueno de las cosas y tener una sonrisa que ilumina, sin él esta memoria no hubiera sido posible.

A Philippe, Ana y Mari Paz por estar siempre dispuestos a ayudar. Por la preocupación e implicación constante. Por ser personas que te hacen seguir creyendo que todo va a mejorar.

A mi familia, por regalarme una educación y enseñarme el valor del esfuerzo. Por apoyar mis decisiones y confiar en mí incondicionalmente.

A mis amigos, por haber elegido compartir esta etapa conmigo, por amenizar y hacer más divertido el camino. En especial, a Marta, por haber sido el mayor descubrimiento que me ha regalado esta etapa universitaria. Por el tiempo compartido, el cariño, la paciencia y la confianza estos cuatro años de carrera.

Índice general

Resumen **7**

Introducción **9**

1. Terminología y primeros resultados **13**
1.1. Prolongación analítica 14
1.2. Existencia de puntos barrera 18
1.3. Frontera natural 23
1.3.1. Un primer ejemplo 23
1.3.2. Un segundo ejemplo 26

2. Convergencia en la frontera **33**
2.1. Un lema de M. Riesz 34
2.2. Teoremas clave 40
2.3. Un criterio de no prolongación 46

3. Teoría de sobreconvergencia **49**
3.1. Series de potencias sobreconvergentes 49
3.1.1. Un primer ejemplo 50
3.2. Teorema de sobreconvergencia de Ostrowski 54
3.3. Teorema de la brecha de Hadamard 58
3.4. Construcción de Porter de series sobreconvergentes 62
3.5. Teorema de la brecha de Fabry 64

4. Teorema de Fatou-Hurwitz-Pólya **81**
4.1. Revisión de la convergencia normal 81
4.2. Teorema de Fatou-Hurwitz-Pólya 82

5. Una extensión del Teorema de Szegö **85**
5.1. Preliminares 86
5.2. Teorema de Szegö 92
5.3. Una aplicación del Teorema de Szegö 95

A. Convergencia de series funcionales **99**

B. Teorema de Vitali **103**

C. Biholomorfía. Dominios de holomorfía. Aplicaciones finitas. **109**
C.1. Aplicaciones biholomorfas 109
C.2. Conjuntos frontera bien distribuidos 113
C.3. Dominios de holomorfía 114
C.4. Aplicaciones finitas 118

D. El Pequeño Teorema de Runge **129**
D.1. Fórmula integral de Cauchy para compactos 129
D.2. Aproximación mediante funciones racionales 132
D.3. Teorema del cambio de polos 133
D.4. Teoría de Runge para conjuntos compactos 134
D.5. Consecuencias del Teorema de Runge 136

Bibliografía **139**

Resumen

Se considera una función analítica, definida mediante una serie de potencias cuyo radio de convergencia es finito y positivo. Se presentarán algunos de los resultados clásicos acerca del comportamiento de la función cuando uno se aproxima a la frontera del disco abierto de convergencia. Se introducirán los conceptos de sobreconvergencia, series lagunares y dominios de holomorfía, entre otros, y se discutirán numerosos resultados relativos a la existencia de puntos singulares en la frontera, posibilidad de prolongación analítica, arcos de holomorfía en la frontera, etc. Se mostrará también cómo ciertas propiedades de los coeficientes de la serie de potencias (la anulación de parte de ellos, su signo, su carácter entero, etc.) tienen consecuencias, a veces sorprendentes, sobre la posibilidad de prolongar analíticamente la función suma más allá del disco de convergencia.

Abstract: An analytic function is considered, defined by a power series whose radius of convergence is finite and positive. Some of the classical results about the behavior of the function when one approaches the boundary of the open disk of convergence will be presented. The concepts of overconvergence, lacunary series and domains of holomorphy, among others, will be introduced, and numerous results related to the existence of singular points on the boundary, the possibility of analytic continuation, arcs of holomorphy on the boundary, etc. will be discussed. We will also show how certain properties of the coefficients of the power series (the vanishing of part of them, their sign, their integer character, etc.) have consequences, sometimes surprising, on the possibility of analytically continuing the sum function beyond the disk of convergence.

Introducción

Recordamos, de la asignatura de Variable Compleja, que dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ se define su radio de convergencia, que suele denotarse por ρ, como sigue:

(1) Si la serie converge únicamente en el punto z_0, entonces $\rho = 0$.

(2) Si la serie converge en cada punto de $\mathbb{C}$, se dice que $\rho = \infty$.

(3) En otro caso, su radio de convergencia se define como el superior del conjunto de los números reales positivos r tales que la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ es convergente.

Además, estudiamos que en estas condiciones, el disco abierto $B(z_0, \rho)$ se denomina abierto de convergencia de la serie (en el caso de que $\rho = \infty$ se entiende que dicho disco coincide con $\mathbb{C}$).

En este contexto, es bien conocido que la serie de potencias converge absolutamente en $B(z_0, \rho)$ y, además, converge normalmente en los conjuntos compactos contenidos en el abierto de convergencia. Sin embargo, del comportamiento en la frontera del abierto de convergencia, a priori, no tenemos ningún tipo de información.

En esta línea, en el presente trabajo trataremos de dar respuesta a la siguiente cuestión:

¿Qué relación hay entre los coeficientes y las sumas parciales de una serie de potencias y la posibilidad de que la correspondiente función pueda extenderse holomórficamente a ciertos puntos del disco de convergencia?

mediante el desarrollo de los teoremas de Fatou, Hadamard, Hurwitz, Ostrowski, Pólya, Porter, M. Riesz, y Szëgo.

Con este objetivo, siguiendo principalemente el libro de Sansone y Gerretsen [6, págs 419-425], empezamos con un primer capítulo introductorio en el que exponemos, entre otros, los conceptos de prolongación analítica y punto barrera de una serie de potencias, seguidos de algunos resultados básicos relativos a la existencia y caracterización, para acabar desarrollando un par de ejemplos ilustrativos.
Aunque la principal referencia bibliográfica ha sido la antes mencionada, para las pruebas de la existencia de puntos barrera y del teorema de Pringsheim-Vivanti han sido utilizadas ideas similares a las expuestas en el primer libro de Remmert [4, págs 234-235].

El segundo capítulo se inicia introduciendo la noción de arco de holomorfía de una serie de potencias, para posteriormente estudiar la relación existente entre la sucesión de coeficientes y el comportamiento (acotación y convergencia uniforme) de la sucesión de sumas parciales de la correspondiente serie de potencias en sus arcos de holomorfía. Los principales teoremas que resolverán esta cuestión serán el de acotación de M. Riesz, el de convergencia de Fatou y M. Riesz y, el de convergencia de Ostrowski. Finalizaremos el capítulo con un criterio de no prolongación que, como veremos más adelante, quedará englobado, junto con el teorema de la brecha de Hadamard, en el teorema de la brecha de Fabry. La referencia seguida a lo largo de este capítulo ha sido principalmente el texto más avanzado de Remmert [5, págs 244-248], y además ha sido fundamental el uso del teorema de Vitali cuyo enunciado y prueba se encuentran desarrollados en el segundo apéndice, siguiendo la exposición realizada en [5, págs 148-151].

En la misma línea, de manera natural, se puede plantear la idea de que la sucesión de sumas parciales converja de manera uniforme en los compactos de un dominio que contenga estrictamente al abierto de convergencia correspondiente. Sobre este fenómeno, denominado sobreconvergencia, trabajamos en el tercer capítulo, que resulta estar muy ligado a los saltos en la sucesión de exponentes de la correspondiente serie de potencias (esto es, los intervalos de coeficientes nulos de la sucesión de coeficientes de la correspondiente serie de potencias). Los denominados teoremas de la brecha serán nuestros resultados claves en esta sección. Para el desarrollo de los teoremas de sobreconvergencia de Ostrowski y de la brecha de Hadamard seguimos como principal referencia [5, págs 249-256]; mientras que el desarrollo relativo al teorema de la brecha de Fabry lo realizamos vía la teoría de Turán siguiendo el libro de Montgomery [3, págs 85-91]. Además, se presentará una posible construcción de series sobreconvergentes, para la cual ha sido necesario hacer un estudio (al que se dedica el tercer apéndice del trabajo) sobre los conceptos de dominios de holomorfía, biholomorfía, aplicaciones finitas y singularidades en el infinito; para este asunto hemos seguido las referencias [5, págs 112-118], [4, págs 281-284], [5, págs 211-213] y el texto de Galindo *et al.* [2, págs 269-270], respectivamente.

El teorema de la brecha de Hadamard nos asegura que las series lagunares de Hadamard tienen a su abierto de convergencia como dominio de holomorfía, este conocimiento nos puede llevar a pensar que, realmente, este tipo de series no son en absoluto necesarias para especificar una cantidad no numerable de funciones cuyo disco de convergencia coincide con su dominio de holomorfía. Esta cuestión se desarrolla durante el capítulo 4 del trabajo, que se centra en la exposición y prueba del teorema de Fatou-Hurwitz-Pólya. Nuevamente la principal referencia bibliográfica que se ha seguido es [5, págs 257-259].

Para finalizar, el quinto y último capítulo del trabajo lo dedicamos al estudio de series de potencias que tienen tan solo una cantidad finita de coeficientes distintos. Nuestro principal objetivo será probar que la función suma de este tipo de series, o bien tiene al abierto de convergencia como dominio de holomorfía, o bien admite una prolongación analítica en forma de función racional con polos en las raíces k-ésimas de la unidad para un cierto k natural. Este resultado se recoge en el teorema de Szegö, que requiere de la Teoría de Aproximacion de Runge para su prueba. Como referencia bibliográfica seguimos de nuevo el texto avanzado de Remmert, tanto para el desarrollo del teorema de Szegö [5, págs 260-264] como para introducir lo necesario de la Teoría de Runge [5, págs 267-275].

Capítulo 1

Terminología y primeros resultados

El principal objetivo de este capítulo es introducir e ilustrar mediante ejemplos los conceptos de prolongación analítica, estrella principal, punto barrera, prolongación analítica radial y frontera natural relativos a una serie de potencias con radio de convergencia finito, así como presentar tres resultados fundamentales concernientes a puntos barrera de una serie de potencias.

En el primero de estos se muestra la imposibilidad de prolongar de manera analítica y radial una serie de potencias a través de un punto barrera. El segundo nos garantiza la existencia de, al menos, un punto barrera en la frontera del abierto de convergencia de la serie sobre la que se trabaja. Por otro lado, restringiéndonos únicamente al estudio de series de potencias centradas en el origen de coordenadas que tienen radio de convergencia igual a la unidad, el tercer resultado nos proporciona un criterio suficiente para asegurar que el punto $z = 1$ sea barrera.

Para desarrollar la nociones teóricas anteriormente expuestas trabajaremos, por comodidad, con series de potencias centradas en el origen de coordenadas, siempre teniendo en cuenta que el estudio realizado se puede generalizar a series de potencias centradas en un punto arbitrario del plano complejo sin más que realizar una traslación.

1.1. Prolongación analítica

Sea f una función holomorfa en un abierto $\mathcal{R}$ que contiene al origen de coordenadas. Por lo tanto, f admite un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

teniendo un radio de convergencia r positivo.

En virtud del principio de identidad, sabemos que f es la única función holomorfa en $\mathcal{R}$ que coincide con la serie de potencias (1.1) en un entorno del origen. Por tanto, las propiedades de f están íntegramente determinadas por las de la serie (1.1).

Definición 1.1. En estas condiciones se dice que f es una **prolongación analítica** de la serie (1.1) en el abierto $\mathcal{R}$.

Definición 1.2. Se define la **estrella principal de la serie** (1.1) (o de la correspondiente prolongación analítica f) como el mayor abierto estrellado respecto del origen de manera que existe una función holomorfa en dicho abierto que coincide con la suma de la serie dentro del disco abierto de convergencia.

Observación 1. Es evidente, de la definición anterior que la estrella principal de la serie de potencias (1.1) contiene al disco abierto de convergencia de la misma.

Definición 1.3. Dado un punto $a \in \mathbb{C}$ se denomina **punto barrera de la serie** (1.1) (o de la correspondiente prolongación analítica f) si se verifican las siguientes afirmaciones:

- El punto a no pertenece a la estrella principal de la serie (1.1).
- Todos los puntos de la semirrecta que une a con el origen de coordenadas, $\{ta \ : \ t \in [0,1)\}$, pertenecen a la estrella principal de la serie (1.1).

Definición 1.4. Sea $z_0 \neq 0$. Se denomina **prolongación analítica radial** de la serie (1.1) a través del segmento $[0, z_0] := \{z = \lambda z_0 \ : \ \lambda \in [0,1]\}$ a una función holomorfa en todos los puntos del expuesto segmento (esto es, en un abierto que lo contiene) que coincide con la suma de la serie (1.1) en un entorno del origen de coordenadas.

Nota. En lo que resta de trabajo, siempre que hablemos de holomorfía en un conjunto arbitrario nos referiremos a holomorfía en un abierto que lo contiene.

Notación. Denotaremos por $B(c, r)$ a la bola centrada en el punto $c \in \mathbb{C}$ y de radio $r > 0$ y por $C(c, r)$ a su frontera, esto es, la circunferencia centrada en c con radio r.

Una vez conocido el concepto de prolongación analítica radial, vamos a demostrar la imposibilidad de realizar este tipo de prolongación a través de un punto barrera.

Notación. Sea D un dominio de $\mathbb{C}$, esto es un conjunto abierto y conexo, denotaremos por $\mathcal{H}(D)$ al conjunto de las funciones holomorfas en D.

Proposición 1.5. *Dada una serie de potencias, no es posible realizar una prolongación anlítica radial a través de un punto barrera de la misma.*

Demostración. Sea z_0 un punto barrera de la serie de potencias (1.1), y sea f la correspondiente prolongación analítica cuyo dominio de holomorfía $\mathcal{R}$ coincide con la estrella principal de la serie sobre la que estamos trabajando. Veamos que no es posible prolongar radialmente la serie expuesta a través del punto z_0.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe una función ϕ holomorfa en un conjunto abierto U que contiene al segmento $[0, z_0]$, y que coincide con la función f en un entorno del origen, esto es, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f|_{B(0,\varepsilon)} = \phi|_{B(0,\varepsilon)}$.

En estas condiciones, estamos trabajando con dos funciones holomorfas en el abierto $U \cap \mathcal{R}$ que coinciden en $B(0, \varepsilon)$, que se trata de un conjunto que tiene, al menos, un punto de acumulación. En virtud del principio de identidad, se sigue que las funciones f y ϕ coinciden en el abierto $U \cap \mathcal{R}$.

Llegados a este punto, podemos definir una función g holomorfa en $U \cup \mathcal{R}$ como sigue

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad z \in \mathcal{R}, \\ \\ \phi(z) & \text{si} \quad z \in U. \end{cases}$$

En primer lugar, observamos que la función g está bien definida, pues si $z \in U \cap \mathcal{R}$ tenemos que $f(z) = \phi(z)$ y, por lo tanto, el valor de $g(z)$ coincide en ambas ramas de la definición. Por otro lado, la holomorfía de la función g es evidente por tratarse de una propiedad local. Es decir, si $z \in U \cup \mathcal{R}$ tenemos dos opciones (no excluyentes), $z \in U$ ó $z \in \mathcal{R}$. En el primer caso, teniendo en cuenta que ϕ es holomorfa en U, que es un conjunto abierto, existe $r_z > 0$ tal que $B(z, r_z) \subset U$ de manera que $\phi \in \mathcal{H}(B(z, r_z))$ y, en consecuencia de la holormorfía de la función ϕ en z, se deduce la de g. Análogamente se razonaría para el caso en el que $z \in \mathcal{R}$.

Ahora bien, podemos considerar un disco centrado en el punto z_0 con radio δ suficientemente pequeño de manera que $B(z_0, \delta) \subset U$. Teniendo en cuenta que los conjuntos $\mathbb{C} \setminus U$ y $[0, z_0]$ tienen intersección vacía y son, respectivamente, un conjunto cerrado y un conjunto compacto, la distancia entre ambos es estrictamente positiva. Sea $\delta_0 := \operatorname{dist}(\mathbb{C} \setminus U, [0, z_0]) > 0$, entonces es evidente que $B(z_0, \delta_0) \subset U$.

A continuación, consideramos el conjunto

$$V := \bigcup_{z \in B(z_0, \delta_0)} [0, z] = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} B(\lambda z_0, \lambda \delta_0),$$

donde la igualdad de conjuntos expuesta es evidente. De la primera definición es claro que V es un conjunto estrellado respecto del origen y contenido en U, mientras que de la segunda expresión, es evidente que V se trata de un conjunto abierto.

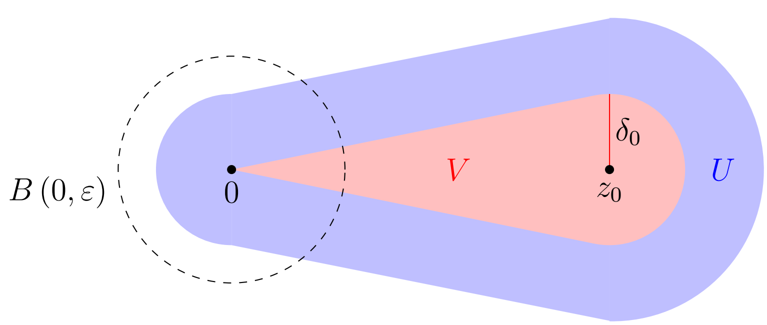

Figura 1.1: Esquema gráfico.

En consecuencia, como $U_1 := V \cup B(0, \varepsilon) \subset U \cup \mathcal{R}$, g se trata de una prolongación analítica de f en U_1. Además, como U_1 es un conjunto abierto y estrellado respecto del origen, de la definición de estrella principal, se sigue que $U_1 \subset \mathcal{R}$. En particular $z_0 \in \mathcal{R}$, lo cual es absurdo pues z_0 es un punto barrera de f y, por lo tanto, no puede pertenecer a la estrella principal de la misma.

Esto concluye la prueba de que no se puede prolongar de manera analítica radial una serie de la forma (1.1) a través de un punto barrera. $\square$

Observación 2. En lo que sigue de trabajo, teniendo en cuenta la definición de estrella principal y el resultado anterior, cuando razonemos con puntos que no son barrera de una prolongación analítica f afirmaremos, sin más detalle, que existen $\varepsilon > 0$ y una función holomorfa g en un disco centrado en el punto de interés y de radio ε que coincide con la prolongación analítica f en la intersección del dominio de holomorfía de f con el disco anteriormente mencionado.

Para ilustrar las nociones introducidas, a continuación, desarrollamos el estudio de la estrella principal y los puntos barrera de una serie de potencias concreta.

Ejemplo 1.6. Un ejemplo sencillo sería considerar la serie geométrica, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Es bien sabido que dicha serie tiene radio de convergencia igual a la unidad y que su suma coincide con la función

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

en el interior del abierto de convergencia, es decir, en $B(0,1)$. Además, es evidente que f es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, por lo tanto, f es una prolongación analítica de la serie geométrica en el abierto $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Vamos a probar que el punto $z = 1$ es un punto barrera de la serie geométrica para concluir que la estrella principal de dicha serie es, por definición, todo el plano complejo menos la semirrecta de números reales $[1, \infty)$ (el segmento $[0,1)$ está contenido en el abierto de convergencia y, por tanto, pertenece a la estrella principal).

Razonando por reducción al absurdo, si $z = 1$ no fuese un punto barrera de la serie geométrica, existirían $\varepsilon > 0$ y una función g, holomorfa en $B(1, \varepsilon)$, que coincide con f en $B(0,1) \cap B(1,\varepsilon)$. Entonces, tomando una sucesión creciente de números reales positivos, $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$, tendiendo hacia 1 tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{r\to 1} f(r) = \lim_{r\to 1} g(r) = g(1) \in \mathbb{C},$$

lo cual es absurdo, pues se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-r_n} = \infty.$$

Por lo tanto, el punto $z = 1$ es un punto barrera de la serie geométrica y, en consecuencia, la estrella principal de dicha serie es todo el plano complejo excluyendo la semirrecta de números reales $[1,\infty)$ (ver Figura 1.2).

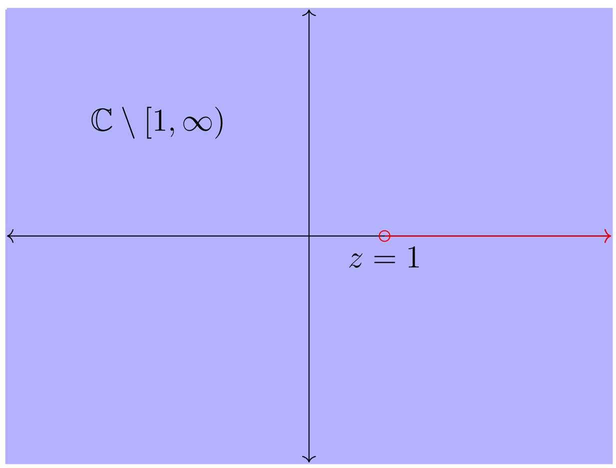

Figura 1.2: Estrella principal de la serie geométrica.

1.2. Existencia de puntos barrera

Dada una serie de potencias de la forma (1.1), que suponemos tiene radio de convergencia r finito y positivo, vamos a probar la existencia de, al menos, un punto barrera en la frontera del disco abierto de convergencia de la misma.

Proposición 1.7. *Una serie de potencias de la forma* (1.1) *tiene, al menos, un punto barrera en la frontera de su disco de convergencia.*

Demostración. Denotemos por f a la suma de la serie (1.1). Vamos a razonar por reducción al absurdo, suponiendo que no hay ningún punto barrera en la frontera del disco de convergencia, es decir, ningún punto z con $|z| = r$ es barrera.

Con la suposición realizada, para cada $z_0 \in C(0,r)$ existen $r_{z_0} > 0$ y una función g_{z_0}, holomorfa en $B(z_0, r_{z_0})$, que coincide con la función f en $B(0,r) \cap B(z_0, r_{z_0})$.

Como consecuencia, tenemos la circunferencia frontera del abierto de convergencia cubierta por una unión infinita de bolas abiertas. Dado que una circunferencia es un conjunto compacto, sabemos que existen un número finito de las mencionadas bolas que siguen formando un recubrimiento de la circunferencia frontera del abierto de convergencia, digamos $B_1 = B(z_1, r_{z_1}), \ldots, B_n = B(z_n, r_{z_n})$.

A continuación, vamos a definir la función g, como sigue:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad z \in B(0,r), \\ \\ g_{z_i}(z) & \text{si} \quad z \in B_i. \end{cases}$$

En primer lugar, vamos a probar que la función g está bien definida en el conjunto $D := B(0,r) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$, separando dos casos:

- Caso 1: $z \in \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \cap B(0,r)$ para algún $I \subset \{1, \ldots, n\}$.
  Es evidente, por definición de las funciones g_{z_i}, que $f(z) = g_{z_i}(z)$ para todo $i \in I$ (pues $f|_{B(0,r)\cap B_i} = g_{z_i}|_{B(0,r)\cap B_i}$ luego, en particular, $f|_{B(0,r)\cap\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)} = g_{z_i}|_{B(0,r)\cap\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)}$ para todo $i \in I$).

- Caso 2: $z \in \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \setminus B(0,r)$ para algún $I \subset \{1, \ldots, n\}$.
  Observamos que $V_I := \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \cap B(0,r) \neq \emptyset$, entonces existe $\tilde{z} \in V_I$. Teniendo en cuenta que V_I es un conjunto abierto, se sigue que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\tilde{z}, \varepsilon) \subset V_I$.
  De esta manera, para todo par de índices $i, j \in I$ tenemos que g_{z_i} y g_{z_j} son dos funciones holomorfas definidas en $\bigcap_{i\in I} B_i$ que coinciden en el conjunto $B(\tilde{z}, \varepsilon)$ (conjunto que contiene, al menos, un punto de acumulación). En estas condiciones para todo par de índices $i, j \in I$, el Principio de Identidad, nos asegura que g_{z_i} y g_{z_j} coinciden en $\bigcap_{i\in I} B_i$. Luego hemos probado que $g_{z_i}(z) = g_{z_j}(z)$ para todo $i, j \in I$.

Por otro lado, razonando de manera similar a la Proposición 1.5 se prueba la holomorfía de la función g en $B(0,r) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$. En particular, como el disco cerrado $\overline{B}(0, r)$ está contenido en el dominio de definición de g, que se trata de un conjunto abierto, sabemos que existe $r' > r$ de manera que $B(0, r') \subset D$ (ver Figura 1.3) y por tanto, la función g es holomorfa en $B(0, r')$.

Para concluir, como las funciones f y g coinciden en el conjunto $B(0, r)$, tenemos que los desarrollos de Taylor centrados en el origen de ambas funciones son idénticos. Teniendo en cuenta que el desarrollo de Taylor de la función f coincide con la serie de potencias (1.1) y, que la función g es holomorfa en $B(0, r')$, se deduce que la serie de potencias (1.1) tiene radio de convergencia mayor o igual que $r' > r$, en contra de la hipótesis. En consecuencia, tenemos que debe existir, al menos, un punto barrera en la frontera del abierto de convergencia de la serie (1.1). $\square$

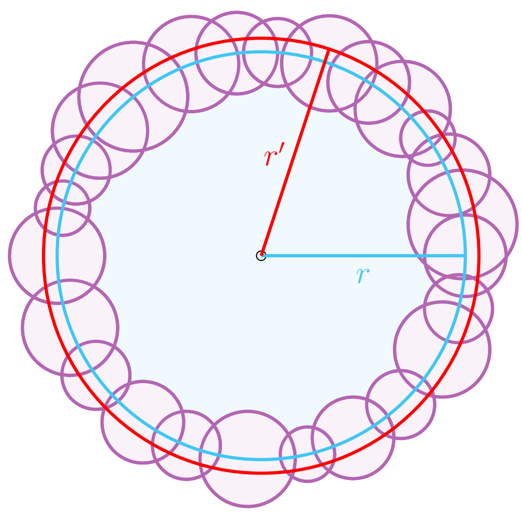

Figura 1.3: Esquema gráfico.

Una consecuencia muy interesante del resultado anterior, es el denominado teorema de Pringsheim-Vivanti que, en el caso de que la serie (1.1) tenga radio de convergencia igual a la unidad, proporciona un criterio suficiente para afirmar que el punto $z = 1$ sea un punto barrera de la misma.

Teorema 1.8 (de Pringsheim-Vivanti)**.** *Si el radio de convergencia de una serie de la forma* (1.1) *es igual a uno y todos los coeficientes de la misma son números reales no negativos, entonces* $z = 1$ *es un punto barrera de dicha serie.*

Demostración. Denotemos por f a la suma de la serie (1.1). Vamos a razonar por reducción al absurdo, suponiendo que $z = 1$ no es un punto barrera de dicha serie.

Entonces, existen $\varepsilon > 0$ y una función h, holomorfa en $B(1, \varepsilon)$, que coincide con f en los puntos del conjunto $B(0,1) \cap B(1, \varepsilon)$.

Por lo tanto, la serie (1.1) tiene una prolongación analítica, que vamos a denotar g, en $B(0,1) \cup B(1, \varepsilon)$ definida como sigue

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad z \in B(0,1), \\ \\ h(z) & \text{si} \quad z \in B(1, \varepsilon). \end{cases}$$

El estudio de la buena definión y holomorfía de la prolongación analítica g en el conjunto $B(0,1) \cup B(1, \varepsilon)$, se razona de manera análoga al realizado en la Proposición 1.5.

Ahora bien, observamos que existe $R > \frac{1}{2}$ de manera que se verifica $B\left(\frac{1}{2}, R\right) \subset B(0,1) \cup B(1, \varepsilon)$ (ver Figura 1.4). Por tanto, el desarrollo de Taylor de g centrado en $z_0 = \frac{1}{2}$ tiene radio de convergencia $\rho \geq R > \frac{1}{2}$.

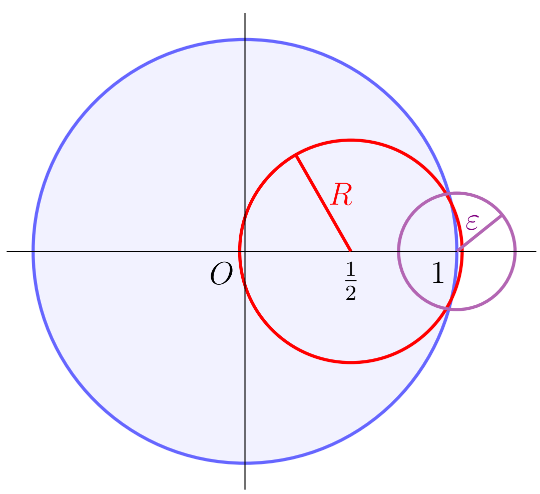

Figura 1.4: Esquema gráfico.

Como $\frac{1}{2} \in B(0,1)$ observamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica la igualdad $g^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$. En consecuencia, se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)}{n!}\left(z-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)}{n!}\left(z-\frac{1}{2}\right)^n,$$

de donde se deduce que la serie de Taylor de f centrada en $\frac{1}{2}$ tiene radio de convergencia $\rho > \frac{1}{2}$.

A continuación, vamos a probar que para cada $z_0 \in C\left(0,\frac{1}{2}\right)$ el radio de convergencia de la serie de Taylor de la función centrada en z_0 es, al menos, $\rho > \frac{1}{2}$.

Observamos que para todo z_0 se verifica la siguiente igualdad

$$f^{(n)}(z_0) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-(n-1))\,a_k z_0^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k z_0^{k-n} \tag{1.2}$$

por tanto, se sigue que si $|z_0| = \frac{1}{2}$,

$$\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k z_0^{k-n}\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right); \tag{1.3}$$

donde se ha tenido en cuenta que $a_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Como consecuencia de la desigualdad (1.3) se deduce que

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\right|\right)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right)^{\frac{1}{n}}$$

y, en virtud de la fórmula de Cauchy-Hadamard, tenemos que el radio de convergencia de la serie de Taylor de f centrada en el punto z_0 es mayor o igual que ρ.

En consecuencia, para todo $z_0 \in C\left(0,\frac{1}{2}\right)$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$ tiene radio de convergencia, al menos, ρ luego es convergente en el abierto $B(z_0,\rho)$ donde $\rho > \frac{1}{2}$. Esto implicaría que la frontera del abierto de convergencia de la serie (1.1) no presentaría ningún punto barrera, lo cual entra en contradicción con la Proposición 1.7. $\square$

1.3. Frontera natural

Cuando la circunferencia frontera del abierto de convergencia de una serie está íntegramente formada por puntos barrera, se dice que dicha circunferencia es la **frontera natural** de la correspondiente serie.

En los siguientes subapartados, con la intención de ilustrar el nuevo concepto introducido, así como los resultados del apartado anterior, desarrollamos dos ejemplos de series de potencias cumpliendo que las fronteras de sus discos de convergencia están formadas, únicamente, por puntos barrera.

1.3.1. Un primer ejemplo

Como primer ejemplo ilustrativo, vamos a trabajar con la serie de potencias siguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \tag{1.4}$$

con el objetivo de, como ya se ha comentado, mostrar que toda la frontera del abierto de convergencia de la misma está formada, en exclusiva, por puntos barrera.

En primer lugar, dado que la sucesión de coeficientes de la serie es, excluyendo los casos nulos, la sucesión constante igual a 1, en virtud de la fórmula de Cauchy-Hadamard, sabemos que el radio de convergencia de la serie (1.4) es exactamente igual a la unidad. En estas condiciones, podemos aplicar el teorema de Pringsheim-Vivanti que nos asegura que $z = 1$ es un punto barrera de la serie (1.4).

A continuación, denotamos por $f(z)$ a la suma de la serie (1.4) e introducimos un par de propiedades de la misma.

Lema 1.9. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica la igualdad*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^k} + f\left(z^{2^n}\right), \quad z \in B(0,1). \tag{1.5}$$

Demostración. En efecto, si $n \in \mathbb{N}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^k} + \sum_{k=n}^{\infty} z^{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^{k+n}} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^n 2^k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{2^n}\right)^{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^k} + f\left(z^{2^n}\right),$$

como se quería probar. □

Lema 1.10. *La función f verifica* $\lim_{r\to 1^-} f(r) = \infty$.

Demostración. Observamos que $f|_{(0,1)}$ es una función positiva y estrictamente creciente, de modo que existe, finito o infinito, $L = \lim_{r\to 1^-} f(r)$.

Ahora bien, tomando límites cuando $z \in \mathbb{R}$, $z \to 1^-$, en la igualdad (1.5) se obtiene que $L = n + L$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que no puede ser si fuera $L \in (0, \infty)$. Por lo tanto, $L = \infty$. □

A continuación, vamos a probar que existe un conjunto denso en $C(0,1)$ formado por puntos barrera de la serie (1.4).

Lema 1.11. *Sea n un número entero positivo, entonces todos los puntos de la forma $z = e^{i\theta}$, con $\theta = \frac{2k\pi}{2^n}$ para $k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}$; son puntos barrera de la serie* (1.4).

Demostración. Sean n un entero positivo y $k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-1}\}$. Vamos a razonar por reducción al absurdo, suponiendo que $z_0 = e^{i\theta}$ no es un punto barrera de la serie (1.4).

Dado que z_0 no es punto barrera, sabemos que existen $\varepsilon > 0$ y una función h, holomorfa en $B(z_0, \varepsilon)$, que coincide con f en $B(0,1) \cap B(z_0, \varepsilon)$. Por lo tanto, tomando r suficientemente próximo a 1 se tendría que $rz_0 \in B(z_0, \varepsilon)$ y, en consecuencia, se verificaría

$$\lim_{r\to 1} f(rz_0) = \lim_{r\to 1} h(rz_0) = h(z_0) \in \mathbb{C}.$$

Sin embargo, en virtud de los Lemas 1.9 y 1.10 y, teniendo en cuenta que $z_0^{2^n} = 1$, se deduce que

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 1} f(rz_0) &= \lim_{r\to 1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(rz_0)^{2^k} + f\left((rz_0)^{2^n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} z_0^{2^k} + \lim_{r\to 1} f\left(r^{2^n}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z_0^{2^k} + \lim_{r\to 1}\left(-\sum_{k=0}^{n-1} r^{2^k} + f(r)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(z_0^{2^k} - 1\right) + \lim_{r\to 1} f(r) = \infty\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto, z_0 es un punto barrera de la serie (1.4). □

Para poder concluir que toda la circunferencia de convergencia está formada por puntos barrera, vamos a probar que el conjunto de los puntos barrera es denso en la circunferencia de convergencia.

Lema 1.12. *El conjunto* $PB := \{z : z = e^{i\frac{2\pi k}{2^{n-1}}}, k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}; n \in \mathbb{N}\}$ *es denso en la circunferencia unidad.*

Demostración. Como el conjunto $D = \{\frac{2k}{2^n} : k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}; n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0, 1]$ y la aplicación $h : [0, 1] \to [0, 2\pi]$ definida por $h(z) = 2\pi z$ es sobreyectiva y continua, entonces, sabemos que el conjunto $D' = h(D) = \{\frac{2\pi k}{2^{n-1}} : k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}; n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0, 2\pi]$.

Análogamente, como el conjunto $D' = \{\frac{2\pi k}{2^{n-1}} : k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}; n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0, 2\pi]$ y la aplicación $g : [0, 2\pi] \to C(0, 1)$ definida por $g(z) = e^{iz}$ es sobreyectiva y continua, entonces, sabemos que el conjunto $PB = g(D') = \{z : z = e^{i\frac{2\pi k}{2^{n-1}}}, k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}; n \in \mathbb{N}\}$ es denso en la circunferencia unidad. □

Por último, teniendo en cuenta que el conjunto de puntos barrera es denso en la frontera del abierto de convergencia, vamos a probar que no existe ningún punto en dicha frontera que no sea punto barrera.

Proposición 1.13. *Todos los puntos de la frontera del abierto de convergencia de la serie* (1.4) *son puntos barrera de la misma.*

Demostración. Razonando por reducción al absurdo, suponiendo que existe $z_1 \in C(0,1)$ que no es punto barrera, existirían $\varepsilon > 0$ y una función h, holomorfa en $B(z_1, \varepsilon)$, que coincide con f en $B(0,1) \cap B(z_1, \varepsilon)$.

Sin embargo, por densidad existe $z_0 \in PB \cap B(z_1, \varepsilon)$, y es claro que entonces z_0 no sería punto barrera. □

Una vez hecho todo el desarrollo anterior, por definición, sabemos que la estrella principal de la serie (1.4) es el disco abierto centrado en el origen y de radio 1, y la circunferencia unidad es la frontera natural de la misma serie.

1.3.2. Un segundo ejemplo

En este caso, con el mismo objetivo que en el subapartado anterior, vamos a trabajar con la denominada serie de Laurent definida por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}. \tag{1.6}$$

En primer lugar, veamos que la serie de Laurent converge uniformemente en los compactos del disco unidad.

Lema 1.14. *La serie* (1.6) *converge uniformemente en los compactos de* $B(0,1)$.

Demostración. Sea K un conjunto compacto contenido en $B(0,1)$, entonces se verifica que $K \cap (\mathbb{C} \setminus B(0,1)) = \emptyset$. Dado que la intersección entre K (que es un conjunto compacto) y $\mathbb{C} \setminus B(0,1)$ (que es un conjunto cerrado) es vacía, sabemos que $d(K, \mathbb{C} \setminus B(0,1)) > 0$. En consecuencia, existe $r \in (0,1)$ tal que $K \subset \overline{B}(0,r)$.

Ahora bien, si $z \in K$ observamos que se verifica la desigualdad

$$\left| \frac{z^n}{1 - z^n} \right| \leq \frac{r^n}{1 - r^n}$$

pues, en efecto, $|z^n| \leq r^n$ y $|1 - z^n| \geq |1 - |z|^n| = 1 - |z|^n \geq 1 - r^n$.

En virtud del criterio de comparación, el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1-r^n}$ es el mismo que el $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{r^n}{1-r^n}}{r^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-r^n} = 1 \in (0,\infty).$$

Por lo tanto, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es convergente (dado que $r \in (0,1)$), también converge la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1-r^n}$ y; en virtud del criterio M-Weierstrass, la serie funcional (1.6) converge normalmente en K. $\square$

A continuación, introducimos un resultado que nos permitirá reescribir la serie (1.6) como una serie en potencias de z.

Teorema 1.15 (de las series dobles de Weierstrass)**.** *Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de series de potencias convergentes en un disco común B centrado en el punto c, definidas por $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} (z-c)^k$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Supongamos que la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge normalmente en B. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que la serie $b_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_n^{(m)}$ es convergente en $\mathbb{C}$ y, también, que la función f es representada en B por la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n.$$

Demostración. Consideramos la sucesión de funciones $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por $g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, es evidente que se trata de una sucesión de funciones holomorfas en B que converge normalmente hacia la función f.

En estas condiciones podemos aplicar el teorema de Weierstrass, que nos garantiza que la función f es holomorfa en B y, además, afirma que para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{g_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de B hacia la función $f^{(k)}$. Esto es, para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} g_n^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f_i^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z). \tag{1.7}$$

Ahora bien, dado que la función f es holomorfa en B, puede representarse en dicho conjunto por su serie de Taylor centrada en el punto c, es decir, para todo $z \in B$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n, \tag{1.8}$$

donde en la segunda igualdad se ha substituido $f^{(n)}(c)$ por la evaluación de (1.7) en el punto c.

A continuación, teniendo en cuenta que, por hipótesis, tenemos que se verifica

$$f_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(k)}(z-c)^j$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, derivando en la expresión anterior se sigue que

$$f_k^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+j)!}{j!} a_{n+j}^{(k)}(z-c)^j$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ y; por último, evaluando en el punto c se obtiene que

$$f_k^{(n)}(c) = n! a_n^{(k)} \tag{1.9}$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

En conclusión, substituyendo (1.9) en (1.8) se verifica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} n! a_n^{(k)}}{n!}(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n^{(k)}\right)(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n$$

para todo $z \in B$, como se quería demostrar. □

Observación 3. En las condiciones del resultado anterior, la función f puede ser representada en B por la serie doble

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_k^{(n)}(z-c)^n\right)$$

y, lo realmente interesante, es que el teorema afirma que los sumatorios pueden ser intercambiados sin alterar la convergencia en B, ni el valor del límite. Esto es, la función f también puede ser representada como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)}\right)(z-c)^n.$$

Una vez conocido el teorema de las series dobles de Weierstrass y denotando por f a la suma de la serie (1.6), podemos abordar el siguiente resultado que nos porporciona una representación de la misma en potencias de z.

Lema 1.16. *Sea n un número entero positivo. Denotando por τ_n al número de divisores de n se verifica la siguiente igualdad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n z^n. \tag{1.10}$$

Demostración. Es evidente que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple la igualdad

$$\frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{\mu=1}^{\infty} z^{\mu n} \tag{1.11}$$

y, en virtud del teorema de las series dobles de Weierstrass, sabemos que podemos escribir la serie (1.6) en potencias de z sumando las series que aparecen en (1.11) término a término.

Observamos que una potencia z^k aparece en la serie $\sum_{\mu=1}^{\infty} z^{\mu n}$ si, y sólo si, n es un divisor de k. Teniendo en cuenta que τ_k es el número de divisores de k, se verifica, trivialmente, la igualdad (1.10). □

En lo que inmediatamente sigue, vamos a probar que existe un conjunto denso en $C(0,1)$ formado por puntos barrera.

Lema 1.17. *Sean q un número entero mayor que 1 y p un número natural coprimo de q. Entonces $z_0 = e^{2\pi i p/q}$ es un punto barrera de la serie* (1.6)-(1.10).

Demostración. Sea q un entero positivo mayor que 1 y p un número natural coprimo con q. Razonando de manera análoga al ejemplo anterior, para demostrar que $z_0 = e^{2\pi i p/q}$ es un punto barrera de la serie (1.6), vamos a probar que $\lim_{r\to 1} f(rz_0) = \infty$ y; para ello, en particular, vamos a probar que $\lim_{r\to 1}(1-r) f(rz_0) = \infty$.

Escribimos f como $f(z) = f(z^q) + g(z)$ donde g involucra los términos de (1.6) que corresponden a índices n que no son divisibles por q.

En primer lugar analizamos el término $(1-r)\, f\left((rz_0)^q\right)$ para $0 < r < 1$. Dado que $z_0^q = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}(1-r)\, f\left((rz_0)^q\right) = (1-r)\, f\left(r^q\right) = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{qn}}{1-r^{qn}} \\ = \frac{1-r}{1-r^q} \sum \frac{1-r^q}{1-r^{qn}} r^{qn} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{q-1} r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{nq}}{\sum_{k=0}^{n-1} r^{qk}} \\ > \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{nq}}{n} = \frac{1}{q} \log\left(\frac{1}{1-r^q}\right) \xrightarrow{r\to 1} \infty\end{aligned} \tag{1.12}$$

Por otro lado, si n no es divisible por q tenemos

$$\begin{aligned}\left|1-(rz_0)^n\right|^2 &= \left(1 - r^n \cos\left(\frac{2\pi np}{q}\right)\right)^2 + \left(r^n \sin\left(\frac{2\pi pn}{q}\right)\right)^2 \\ &= 1 - 2r^n \cos\left(\frac{2\pi np}{q}\right) + r^{2n}\left(\cos^2\left(\frac{2\pi np}{q}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi np}{q}\right)\right) \\ &= 1 - 2r^n \cos\left(\frac{2\pi np}{q}\right) + r^{2n} + \left(-2r^n + 2r^n\right) \\ &= \left(1-r^n\right)^2 + 2r^n\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi np}{q}\right)\right) > 4r^n \sin^2\left(\frac{\pi np}{q}\right)\end{aligned} \tag{1.13}$$

donde en la desigualdad estricta se ha tenido en cuenta que $(1-r^n)^2 > 0$ y se ha aplicado la igualdad trigonométrica que relaciona el seno cuadrado de un ángulo con el coseno del ángulo doble.

Ahora, podemos encontrar un número entero λ_n tal que $np = \lambda_n q + t$ con $t \in \{1, \ldots, q-1\}$ y, teniendo en cuenta que $\sin(\lambda_n \pi) = 0$ y $\cos(\lambda_n \pi) = \pm 1$, se sigue que

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{\pi np}{q}\right) &= \left(\sin\left(\lambda_n \pi + \frac{\pi t}{q}\right)\right)^2 \\ &= \left(\sin(\pi\lambda_n)\cos\left(\frac{\pi t}{q}\right) + \cos(\lambda_n\pi)\sin\left(\frac{\pi t}{q}\right)\right)^2 \\ &= \left(\pm \sin\left(\frac{\pi t}{q}\right)\right)^2 = \sin^2\left(\frac{\pi t}{q}\right) \geq \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right).\end{aligned} \tag{1.14}$$

donde, la última desigualdad se deduce del hecho de que los valores $t = 1$ y $t = q - 1$ minimizan la expresión $\sin^2(\pi t/q)$; valiendo, en ambos casos, exactamente $\sin^2(\pi/q)$.

Por tanto, teniendo en cuenta (1.13) y (1.14), para el término $(1-r)\,g\,(rz_0)$ se verifica

$$|\,(1-r)\,g\,(rz_0)\,| \leq |1-r| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\,(rz_0)^n\,|}{|1-(rz_0)^n|} < \frac{1-r}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{q}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{r}\right)^n$$
$$= \frac{1-r}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{q}\right)} \frac{\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{r}\,(1+\sqrt{r})}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{q}\right)} \leq \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{q}\right)} < \infty. \tag{1.15}$$

En conclusión, de (1.12) y (1.15), se deduce que $\lim_{r\to 1}(1-r)\,f\,(rz_0) = \infty$ y, por tanto, sabemos que z_0 es un punto barrera de la serie (1.6)-(1.10). □

En estas condiciones, razonando de manera análoga al ejemplo anterior, tenemos que el conjunto de puntos barrera de la serie (1.6)-(1.10) es denso en la circunferencia unidad y por tanto, todos los puntos z con $|z| = 1$ son puntos barrera de dicha serie.

Esto concluye la prueba de que la estrella principal de la serie (1.6)-(1.10) es el disco abierto centrado en el origen de coordenadas y de radio uno, y la circunferencia unidad es su frontera natural.

Capítulo 2

Convergencia en la frontera

Trabajando con funciones holomorfas en el disco unidad (que sabemos que admiten una representación en serie de potencias en el mismo), el objetivo fundamental de este capítulo es estudiar la relación existente entre la sucesión de coeficientes de la correspondiente serie de potencias y la posibilidad de que la sucesión de sumas parciales de la misma esté uniformemente acotada o converja hacia una prolongación analítica en arcos de holomorfía.

En la primera sección de este capítulo se expone el concepto de arco de holomorfía de una función y, además, se presenta la prueba del lema de M. Riesz, que pese a su carácter más técnico, nos resultará de gran ayuda para realizar las pruebas de los tres teoremas principales de la siguente sección y de este capítulo; que son los teoremas de acotación de M. Riesz, de convergencia de Fatou y M. Riesz, y de convergencia de Ostrowski. En todos ellos se presentan criterios suficientes, relativos a la sucesión de coeficientes de la correspondiente serie de potencias, para garantizar diferentes propiedades sobre la sucesión de sumas parciales de la mencionada serie. El primero de ellos asegura la acotación uniforme en arcos de holomorfía, y el segundo y tercer resultados garantizan la convergencia hacia una prolongación analítica en arcos de holomorfía, con la única diferencia de que, el último de los resultados se restringe exclusivamente a series de potencias lagunares.

La última sección se dedicará a presentar un criterio de “no convergencia”.

2.1. Un lema de M. Riesz

Como se ha comentado en la introducción del capítulo, vamos a centrar nuestro estudio en funciones holomorfas

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2.1}$$

en el disco unidad, esto es, la serie que define a la función f está desarrollada en potencias de $z - 0$ y tiene radio de convergencia igual a la unidad.

Empezamos introduciendo el concepto de arco de holomorfía para una serie de potencias de la forma (2.1).

Nota. A lo largo de este capítulo, vamos a referirnos como arco de una circunferencia a un conjunto L conexo de forma que existe un intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ con $0 \leq b - a < 2\pi$, de modo que $L = \{e^{it} : t \in I\}$.

Definición 2.1. En las condiciones anteriores, un arco cerrado $L \subset C(0,1)$ se denomina **arco de holomorfía de *f*** si la función f puede ser prolongada de manera holomorfa a todo punto de L.

Observación 4. Sabemos que $L \neq C(0,1)$ puesto que existe, al menos, un punto barrera en la frontera del disco abierto de convergencia de la serie (2.1).

Una vez conocida la noción de arco de holomorfía, exponemos el siguiente resultado que nos garantiza la existencia de una prolongación analítica de la función f a todos los puntos de un arco de holomorfía de la misma.

Proposición 2.2. *Para todo arco de holomorfía $L \subset C(0,1)$ de una serie de la forma* (2.1)*, que tiene radio de convergencia igual a uno, existe un sector circular S cerrado con vértice en el origen de coordenadas tal que $L \subset \mathring{S}$ y f tiene una prolongación holomorfa $\hat{f}$ en S.*

Demostración. Por definición de arco de holomorfía, f puede prolongarse de manera holomorfa a todo punto de L. Por lo tanto, para todo punto $\omega \in L \subset C(0,1)$ existe un disco $B(\omega, r_\omega)$ y una función $g_\omega \in \mathcal{H}(B(\omega, r_\omega))$ tal que f y g_ω coinciden $B(0,1) \cap B(\omega, r_\omega)$.

Ahora bien, es evidente que $L \subset \bigcup_{\omega \in L} B(\omega, r_\omega)$. En consecuencia, tenemos el arco de holomorfía L (que se trata de un conjunto compacto) recubierto por una infinidad de discos abiertos. Teniendo en cuenta la definición de compacidad, sabemos que existe un número finito de discos $B(\omega, r_\omega)$, que siguen formando un subrecubrimiento de L. Vamos a denotar a los correspodientes discos por $B_1 = B(\omega_1, r_{\omega_1}), \ldots, B_l = B(\omega_l, r_{\omega_l})$ y, a su unión por B, es decir, $B := B_1 \cup \cdots \cup B_l$.

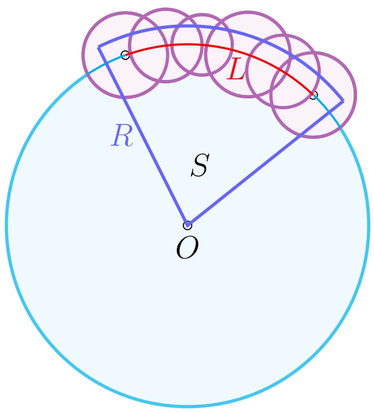

Figura 2.1: Existencia sector circular.

En estas condiciones, es evidente, que existe un sector circular S centrado en el origen de coordenadas con radio $R > 1$ tal que

- $L \subset \mathring{S}$,
- $S \subset B(0,1) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l} B_i \right)$.

A continuación, pasamos a probar la existencia de la prolongación holomorfa $\hat{f}$ de f.

Definimos la prolongación analítica $\hat{f}$ en $U := B(0,1) \cup \left(\cup_{i=1}^{l} B_i \right)$ (que es un conjunto abierto que contiene a S) como sigue:

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad z \in B(0,1), \\ \\ g_{\omega_j}(z) & \text{si} \quad z \in B_j. \end{cases}$$

Solo resta verificar que la función $\hat{f}$ está bien definida y es holomorfa en U (abierto que sabemos que contiene al conjunto S). Atendiendo a la construcción de la misma, ambas propiedades se prueban de manera análoga al razonamiento realizado en la Proposición 1.7. $\square$

Observación 5. En lo que resta de capítulo, dada una función f definida por (2.1) y un arco de holomorfía L de la misma, consideraremos siempre el sector circular S y la correpondiente prolongación analítica $\hat{f}$ como los construidos en la proposición inmediatamente anterior.

Antes de seguir avanzando en la teoría que concierne este apartado, realizamos un pequeño inciso de notación.

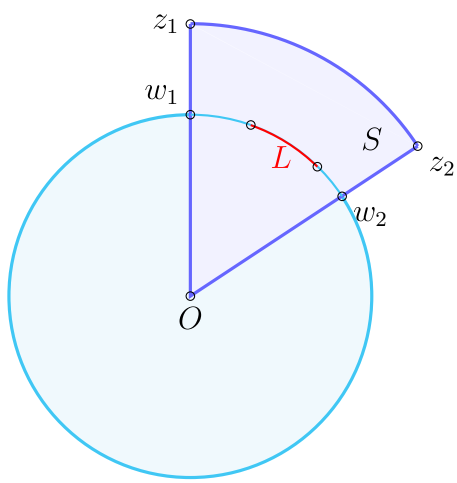

Figura 2.2: Esquema gráfico.

Notación. Sean f una función holomorfa de la forma (2.1), L un arco de holomorfía de la misma y S el sector circular correspondiente. Denotaremos:

- z_1 y z_2 a los vértices de S (distintos del origen).
- ω_1 al punto de intersección de $C(0,1)$ con el segmento $[0, z_1]$.
- ω_2 al punto de intersección de $C(0,1)$ con el segmento $[0, z_2]$.

Luego $|\omega_1| = |\omega_2| = 1$, y denotamos $s := |z_1| = |z_2| > 1$, es decir, el radio del sector circular S.

Para lo que resta de capítulo, vamos a considerar las siguientes funciones auxiliares:

$$g_n(z) := \frac{\hat{f}(z) - s_n(z)}{z^{n+1}} (z - w_1)(z - w_2) \tag{2.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $s_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ representa la n-ésima suma parcial de la serie de potencias (2.1) que define a la función f. Lo primero que vamos a comprobar es la holomorfía en S de la sucesión de funciones g_n.

Proposición 2.3. *Toda función g_n, con $n \in \mathbb{N}$, es holomorfa en S.*

Demostración. En primer lugar, observamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la n-ésima suma parcial de la serie (2.1) es una función holomorfa en S, pues al tratarse de un polinomio, es de hecho una función entera.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, la función $\left(\hat{f}(z) - s_n(z)\right)(z - w_1)(z - w_2)$ es holomorfa en S, por ser producto de funciones holomorfas en el mencionado conjunto. Además, es evidente, que la función z^{n+1} también es holomorfa en S para todo $n \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, sabemos que el único punto que podría dar problemas a la hora de discutir la holomorfía de la función g_n es aquel en el que se anula su denominador, es decir, el punto $z = 0$.

Con el objetivo de probar la holomorfía de las funciones g_n en el origen de coordenadas, vamos a probar la holomorfía de las mismas en el disco unidad. Teniendo en cuenta que las funciones $\hat{f}$ y f coinciden en el conjunto $B(0,1)$, y que f es representada en el mismo por la serie de potencias (2.1), para cada $z \in B(0,1)$ las funciones g_n pueden ser reescritas como sigue:

$$\begin{aligned} g_n(z) &= \frac{\hat{f}(z) - s_n(z)}{z^{n+1}} (z - w_1)(z - w_2) \\ &= \frac{(z - w_1)(z - w_2)}{z^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \\ &= \frac{(z - w_1)(z - w_2)}{z^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+1+k} z^{n+1+k} \\ &= (z - w_1)(z - w_2) \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+1+k} z^k. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Es evidente que las funciones $(z - \omega_1)$ y $(z - \omega_2)$ son enteras por tratarse de polinomios, por tanto, para probar la holomorfía de g_n en el disco unidad basta con demostrar la holomorfía de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+1+k} z^k$ en el mismo (esto es, probar que tiene radio de convergencia mayor o igual a uno). Llamamos ρ_n a su radio de convergencia. Entonces, se sigue que

$$\begin{aligned} 1 = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} &= \limsup_{k\to\infty} |a_{n+1+k}|^{\frac{1}{n+1+k}} \\ &= \limsup_{k\to\infty} \left(|a_{n+1+k}|^{\frac{1}{k}} \right)^{\frac{k}{n+1+k}} = \limsup_{k\to\infty} |a_{n+1+k}|^{\frac{1}{k}} = \rho_n^{-1}. \end{aligned}$$

En consecuencia, el radio de convergencia de la serie $\sum_{k=}^{\infty} a_{n+1+k} z^k$ es igual a la unidad y, por lo tanto, hemos probado que las funciones g_n son holomorfas en el disco unidad, luego en particular son holomorfas en el punto $z = 0$. $\square$

Con la notación establecida y los resultados expuestos, estamos en condiciones de enunciar y probar el lema de M. Riesz. Este resultado nos proporciona un criterio para garantizar la acotación de la sucesión de funciones $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el conjunto S; además, nos resultará de gran ayuda en el siguiente apartado para realizar las demostraciones de los teoremas de acotación de M. Riesz y de convergencia de M. Riesz y Fatou.

Lema 2.4 (de M. Riesz)**.** *Sea f una función de la forma* (2.1) *con sucesión de coeficientes acotada, y supongamos también que $\hat{f}$ es una prolongación analítica de f en S. Entonces la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada en S.*

Demostración. En virtud del teorema del módulo máximo sabemos que basta con probar que la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada en ∂S.

Por hipótesis, la sucesión de coeficientes de la serie (2.1) está acotada, luego vamos a denotar $A := \sup\{|a_n| \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ que sabemos que se trata de una cantidad finita.

Por otro lado, como $\hat{f}$ es una función holomorfa en S, en particular, es continua en el mismo conjunto que se trata de un compacto; luego del teorema de Weierstrass se sigue que existe una constante $M > 0$ tal que $|\hat{f}(z)| \leq M$ para todo $z \in S$.

Vamos a separar en tres casos el estudio de la acotación de la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ en la frontera de S.

<u>Caso 1</u>: z perteneciente al segmento de extremos 0 y ω_1.

- Si $z = r\omega_1$ con $0 < r < 1$ entonces para todo número natural n se tiene

$$\begin{aligned} |\hat{f}(z) - s_n(z)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k z^k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} A r^k = A \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k = A \frac{r^{n+1}}{1-r}. \end{aligned}$$

  Como, además, se verifica que

$$|z - \omega_1| = |r\omega_1 - \omega_1| = |r-1||\omega_1| = 1 - r$$

  y

$$|z - \omega_2| \leq |z| + |\omega_2| = r|\omega_1| + |\omega_2| < 1 + 1 = 2,$$

  se sigue que

$$\begin{aligned} |g_n(z)| &= |\hat{f}(z) - s_n(z)| \frac{1}{|z|^{n+1}} |z - \omega_1||z - \omega_2| \\ &\leq A \frac{r^{n+1}}{1-r} \frac{1}{r^{n+1}} (1-r)\, 2 = 2A, \; n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- Si $z = r\omega_1$ con $1 < r \leq s$ entonces para todo número natural n se tiene

$$\begin{aligned} |\hat{f}(z) - s_n(z)| = |\hat{f}(z)| + |s_n(z)| &\leq M + \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \\ &\leq M + \sum_{k=0}^{n} |a_k||z|^k \leq M + \sum_{k=0}^{n} A r^k \\ &= M + A\frac{r^{n+1}-1}{r-1} < M + A\frac{r^{n+1}}{r-1}. \end{aligned}$$

Como, además, se verifica que

$$|z - \omega_1| = |r\omega_1 - \omega_1| = |r-1||\omega_1| = r - 1$$

y

$$|z - \omega_2| \leq |z| + |\omega_2| = r|\omega_1| + |\omega_2| < 1 + s,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} |g_n(z)| &= |\hat{f}(z) - s_n(z)| \frac{1}{|z|^{n+1}} |z-\omega_1||z-\omega_2| \\ &\leq \left(M + A\frac{r^{n+1}}{r-1}\right) \frac{1}{r^{n+1}} (r-1)(1+s) \\ &= \left(M\frac{r-1}{r^{n+1}} + A\right)(1+s) < (M+A)(1+s),\ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

donde en la desigualdad estricta se ha tenido en cuenta que, como $r > 1$, se verifican las desigualdades $r - 1 < r$ y $r^{n+1} > r$ y, por lo tanto, $\frac{r-1}{r^{n+1}} < 1$.

- Si $z = 0$ se tiene que $|g_n(0)| = |a_{n+1}\omega_1\omega_2| \leq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si $z = \omega_1$ se tiene que $g_n(\omega_1) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego tenemos que la sucesión $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ está uniformemente acotada por la constante $C_1 := \max\{0, (M+A)(1+s), 2A\}$ en el segmento de extremos 0 y z_1.

Caso 2: z perteneciente al segmento de extremos 0 y ω_2.
Es análogo al caso anterior cambiando ω_1 por ω_2 y viceversa.

Caso 3: z perteneciente al arco circular que une z_1 y z_2.
En este último caso, teniendo en cuenta que $|z| = s$ se verifica, de manera análoga al primer caso, la desigualdad

$$|g_n(z)| < M + A\frac{s^{n+1}}{s-1},$$

válida para todo número n natural y, además, también se verifica

$$|(z-\omega_1)(z-\omega_2)| \leq (|z| + |\omega_1|)(|z| + |\omega_2|) = (s+1)(s+1) = (1+s)^2.$$

Con las acotaciones anteriores, para todo $n \in \mathbb{N}$ se sigue que

$$|g_n(z)| \leq \left(M + A\frac{s^{n+1}}{s-1}\right)\frac{1}{s^{n+1}}(1+s)^2 < \left(M + \frac{A}{s-1}\right)(1+s)^2 =: C_2.$$

Por tanto, hemos probado que la sucesión de funciones $\{g_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada uniformemente en ∂S por la constante $C := \max\{C_1, C_2\}$. $\square$

2.2. Teoremas clave

En este apartado vamos a enunciar y demostrar los tres teoremas fundamentales de este segundo capítulo del trabajo.

Antes de abordar su estudio, realizamos un inciso de notación e introducimos un lema previo que nos será tremendamente útil para, posteriormente, realizar las pruebas.

Notación. Denotaremos $|f|_S = \sup\{|f(z)| : z \in S\}$.

Observemos que, si S es un sector cerrado de radio finito, es un compacto, y toda función f holomorfa en S cumple que $|f|_S < \infty$.

Lema 2.5. *Sea f una función de la forma (2.1) y sea L un arco de holomorfía de la misma. Considerando el sector circular S y la correpondiente prolongación analítica $\hat{f}$ como en el apartado anterior, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$|\hat{f} - s_n|_L \leq a^{-1}|g_n|_L \tag{2.4}$$

donde $a = \min\{|(z-\omega_1)(z-\omega_2)| : z \in L\} > 0$.

Demostración. Sea $z \in L$, en consecuencia, $|z| = 1$ y se sigue que

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}(z) - s_n(z)| &= \frac{|g_n(z)||z^{n+1}|}{|(z-\omega_1)(z-\omega_2)|} = \frac{|g_n(z)|}{|(z-\omega_1)(z-\omega_2)|} \\
&\leq \frac{|g_n(z)|}{\text{mín}\{|(z-\omega_1)(z-\omega_2)| \,:\, z \in L\}} = \frac{|g_n(z)|}{a}
\end{aligned}
$$

Dado que la desigualdad anterior es cierta para todo $z \in L$, se sigue que

$$|\hat{f} - s_n|_L \leq a^{-1}|g_n|_L.$$

□

Con el objetivo de motivar y destacar la importancia del primer teorema que se estudiará en este apartado, exponemos un ejemplo introductorio.

Ejemplo 2.6. En el capítulo anterior, el Ejemplo 1.6 se dedicó al estudio de la estrella principal y puntos barrera de la serie geométrica y, como conclusión, obtuvimos que el único punto barrera era, precisamente, el punto $z = 1$. De manera análoga, se puede tratar el caso de su serie derivada, llegando a la misma conclusión. En consecuencia, se tiene que todo arco cerrado contenido en $C(0,1) \setminus \{1\}$ es un arco de holomorfía de ambas series.

Pese a compartir el abierto de convergencia y el conjunto de puntos barrera, la acotación uniforme de las sucesiones de sumas parciales de ambas series en los arcos de holomorfía presenta comportamientos muy diferentes.

En el caso de la serie geométrica, la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ viene dada, para todo $n \in \mathbb{N}$, por:

$$s_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Vamos a probar que se trata de una sucesión uniformemente acotada en todo arco de holomorfía $L \subset C(0,1) \setminus \{1\}$.
Sea $L \subset C(0,1) \setminus \{1\}$. Es evidente que $L \cap \{1\} = \emptyset$ y, teniendo en cuenta que L y $\{1\}$ son conjuntos compactos, sabemos que existe $d > 0$ tal que $d = dist(L, \{1\}) = \text{ínf}\{|z-1| \,:\, z \in L\}$. En consecuencia, para todo número natural n y para todo punto z del arco L, se sigue que

$$|s_n(z)| = \frac{|1 - z^{n+1}|}{|1-z|} \leq \frac{1 + |z|^{n+1}}{d} = \frac{2}{d},$$

cota que nos asegura la acotación uniforme de la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ en el arco de holomorfía L.

Sin embargo, la sucesión de sumas parciales de la serie derivada no está, necesariamente, uniformemente acotada en todo arco de holomorfía de la misma. Por ejemplo, considerando un arco de holomorfía L tal que $-1 \in L$, tenemos que la subsucesión $\{t_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ evaluada en el punto $z = -1$ viene dada por $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$ que sabemos que es una serie no acotada superiormente.

La razón por la que, en el ejemplo anterior, la acotación uniforme de las sucesiones de sumas parciales de ambas series en los arcos de holomorfía presentan comportamientos diferentes se debe a que la sucesión de coeficientes es acotada para la serie geométrica, pero no para la serie derivada. Este resultado se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 2.7 (de acotación de M. Riesz)**.** *Sea f una función de la forma* (2.1)*, cuya serie de potencias tiene sucesión de coeficientes acotada. Entonces, la sucesión de sumas parciales $\{s_n(z)\}_{n=0}^{\infty} = \{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\}_{n=0}^{\infty}$ está uniformemente acotada en cada arco de holomorfía L de f.*

Demostración. Sea L un arco de holomorfía de la función f, en virtud del lema de M. Riesz (Lema 2.4), existe una constante $B > 0$ tal que $|g_n|_S \leq B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que la prolongación analítica $\hat{f}$ es holomorfa en S, sabemos que, en particular, $\hat{f}$ es continua en el arco de holomorfía L, que se trata de un conjunto compacto. En estas condiciones el clásico teorema de Weierstrass garantiza la existencia de una constante $M > 0$ tal que $|\hat{f}(z)| < M$ para todo $z \in L$.

Ahora bien, tomando $z \in L$ y haciendo uso, tanto de la desigualdad triangular como de la acotación (2.4), se sigue que

$$\begin{aligned} |s_n(z)| &= |\hat{f}(z) - \hat{f}(z) - s_n(z)| \\ &\leq |\hat{f}(z)| + |\hat{f}(z) - s_n(z)| \\ &\leq |\hat{f}(z)| + a^{-1}B \leq M + a^{-1}B \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, cota que no depende del punto z en cuestión. $\square$

Del ejemplo previo también se deduce que el simple hecho de que la sucesión de coeficientes sea acotada no es suficiente para garantizar la convergencia de la sucesión de las sumas parciales en L. Pues en efecto, para el ejemplo de la serie geométrica la sucesión $\{s_n(-1)\}_{n=0}^{\infty}$ no converge.

En el siguiente teorema se recoge una condición suficiente para garantizar dicha convergencia.

Teorema 2.8 (de convergencia de Fatou y M. Riesz)**.** *Sea f una función de la forma* (2.1)*, cuya serie de potencias tiene sucesión de coeficientes verificando* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*. Entonces la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente en cada arco de holomorfía L de f (hacia la prolongación analítica de f en L).*

Demostración. Sea L un arco de holomorfía de la función f. Teniendo en cuenta (2.4), basta con probar que la sucesión $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a cero en los compactos de $\mathring{S}$.

En virtud del lema de M. Riesz (Lema 2.4) sabemos que la sucesión $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ está uniformemente acotada en S. En estas condiciones, si probamos que el conjunto $A := \{z \in \mathring{S} : \lim_n g_n(z) \in \mathbb{C}\}$ tiene, al menos, un punto de acumulación en $\mathring{S}$, podemos aplicar el teorema de Vitali (ver Apéndice B, Teorema B.8) que nos asegura que la sucesión $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de $\mathring{S}$, y en particular en L.

Fijamos $q \in (0,1)$. Vamos a probar que para todo $z \in S$ con $|z| = q$ se verifica

$$\lim_{m\to\infty} g_m(z) = 0, \tag{2.5}$$

esto es, el conjunto $\{z \in \mathring{S} : 0 < |z| < 1\}$ está contenido en A. En consecuencia, del teorema de Vitali (Teorema B.8), se deduciría la convergencia uniforme de la sucesión $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ en los compactos de $\mathring{S}$ hacia una función g que, por tanto, sería holomorfa en $\mathring{S}$. Del hecho de que la función g coincida con la función idénticamente nula en $\{z \in \mathring{S} : 0 < |z| < 1\}$ (conjunto que tiene al menos un punto de acumulación), siendo ambas funciones holomorfas en $\mathring{S}$, se sigue, en virtud del Principio de Identidad, que las dos funciones coinciden en el conexo $\mathring{S}$. Es decir, la función límite g sería la función idénticamente nula.

A continuación, pasamos a verificar (2.5). Con este objetivo, definimos $\varepsilon_m :=$

$\sup_{n\geq m}|a_n|$ y observamos que se cumple

$$|\hat{f}(z) - s_m(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| q^n \leq \varepsilon_m \frac{q^{m+1}}{1-q} \tag{2.6}$$

para todo $z \in S$ tal que $|z| = q$ y para todo $m \in \mathbb{N}$. Combinando, en la definición de la función g_m, tanto (2.6) como la desigualdad

$$|(z-\omega_1)(z-\omega_2)| \leq (|z| + |\omega_1|)(|z| + |\omega_2|) = (1+q)^2, \tag{2.7}$$

se obtiene que, para todo número natural m y para todo z con $|z| = q$,

$$|g_m(z)| \leq \varepsilon_m \frac{q^{m+1}}{1-q} \frac{1}{q^{m+1}} (1+q)^2 = \varepsilon_m \frac{(1+q)^2}{1-q}, \quad \forall\, |z| = q,\ m \in \mathbb{N}$$

Por hipótesis se verifica $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, lo cual implica $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$ y, en consecuencia, para todo z con $|z| = q$, tenemos

$$|g_m(z)| \leq \varepsilon_m \frac{(1+q)^2}{1-q} \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

o, lo que es equivalente,

$$\lim_{m\to\infty} g_m(z) = 0,$$

para todo z con $|z| = q$. □

Este teorema tiene una consecuencia inmediata que recogemos en el siguiente corolario. Se trata de un resultado muy interesante, pues asegura que la clásica condición necesaria de convergencia para una serie numérica es, bajo ciertas hipótesis, una condición necesaria y suficiente.

Corolario 2.9. *Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ puede ser prolongada de manera holomorfa al punto $z = 1$, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ es convergente } \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Demostración. La implicación a la derecha es la condición necesaria de convergencia clásica.

La implicación restante es consecuencia del teorema de convergencia de Fatou y M. Riesz tomando $L = \{1\}$; puesto que tenemos que la sucesión de sumas parciales converge hacia la prolongación holomorfa en L, es decir, en $z = 1$:

$$s_n(1) = \sum_{m=0}^{n} a_m \xrightarrow{n\to\infty} \hat{f}(1) \in \mathbb{C}$$

por tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente. □

Para poder tratar el tercer teorema clave precisamos de introducir la noción de serie lagunar.

Definición 2.10. Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ se denomina **serie lagunar** si existe una subsucesión $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ de la sucesión de los números naturales que verifique las dos siguientes condiciones:

(L1) $a_j = 0$ si $m_n < j < m_{n+1}$ para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(L2) $\lim\limits_{n\to\infty} (m_{n+1} - m_n) = \infty$.

En este último resultado que se va a tratar, se recoge otra condición suficiente, relativa a series lagunares, para garantizar la convergencia de la sucesión de sumas parciales hacia una prolongación analítica en arcos de holomorfía.

Teorema 2.11 (de convergencia de Ostrowski)**.** *Si la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m_n} z^{m_n}$ es lagunar con la sucesión de coeficientes acotada, entonces la sucesión de sumas parciales $\{s_{m_n}\}_{n=0}^{\infty}$, definida por $s_{m_n}(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{m_k} z^{m_k}$, converge uniformemente en cada arco de holomorfía L de f (hacia la correspondiente prolongación analítica $\hat{f}$).*

Demostración. Nuestro objetivo es probar que $\lim_{n\to\infty} |\hat{f} - s_{m_n}|_L = 0$. Teniendo en cuenta la desigualdad (2.4), basta con probar que la sucesión $\{g_{m_n}\}_{n=0}^{\infty}$ converge a 0 en los compactos de $\mathring{S}$.

Fijamos $q \in (0, 1)$, razonando de manera análoga a la prueba del resultado anterior, sabemos que; en virtud del teorema de Vitali (Teorema B.8), es suficiente con demostrar que se verifica (2.5)

Definimos $A := \sup_n\{|a_{m_n}\} < \infty$ y; observamos que, en este caso, se tiene

$$|\hat{f}(z) - s_{m_n}(z)| \leq \sum_{k=m_{n+1}}^{\infty} Aq^k = A\frac{q^{m_{n+1}}}{1-q} \tag{2.8}$$

para todo $z \in S$ tal que $|z| = q$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$. Combinando, en la definición de la función g_{m_n} las desigualdades (2.7) y (2.8), se sigue que

$$|g_{m_n}(z)| \leq A\frac{q^{m_{n+1}}}{1-q}\frac{1}{q^{m_n+1}}(1+q)^2 = A\frac{(1+q)^2}{(1-q)\,q}q^{m_{n+1}-m_n} \tag{2.9}$$

para todo $z \in S$ tal que $|z| = q$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, teniendo en cuenta que $0 < q < 1$ y que estamos trabajando con una serie lagunar que, por lo tanto, verifica la condición (L2), se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} q^{(m_{n+1}-m_n)} = 0. \tag{2.10}$$

En consecuencia, enlazando (2.9) y (2.10), para todo z con $|z| = q$, se deduce que

$$|g_{m_n}(z)| \leq A\frac{(1+q)^2}{q\,(1-q)}q^{m_{n+1}-m_n} \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

o, lo que es equivalente

$$\lim_{m\to\infty} g_m(z) = 0,$$

para todo z verificando $|z| = q$ como queríamos. □

2.3. Un criterio de no prolongación

Para concluir este segundo capítulo, estudiamos dos resultados de no prolongación de series. El teorema de convergencia de Ostrowski jugará un papel fundamental a la hora de demostrar dichos resultados.

Definición 2.12. Un dominio G en $\mathbb{C}$ es denominado **dominio de holomorfía** de una función f holomorfa en G si, para cada punto $c \in G$, el disco centrado en c en el cual la serie de Taylor de f converge está contenido en G.

De la definición anterior es inmediato que si G es el dominio de holomorfía de f, entonces si $\hat{G} \supset G$ es un dominio en el cual existe una función $\hat{f}$ holomorfa en $\hat{G}$ tal que $\hat{f}\Big|_G = f$, entonces $\hat{G}$ coincide con G.

Proposición 2.13. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_{m_n} z^{m_n}$ una serie lagunar con sucesión de coeficientes acotada y que diverge en todos los puntos de $C\,(0,1)$. Entonces su dominio de holomorfía es $B\,(0,1)$.*

Demostración. Si $B\,(0,1)$ no fuese su dominio de holomorfía, la suma f de la serie admitiría una prolongación analítica en algún punto $z_0 \in C\,(0,1)$, y esto implicaría que f admite un arco de holomorfía L. Por el teorema de convergencia de Ostrowski, $\{s_{m_n}\}_{n=1}^{\infty}$ convergería entonces puntualmente en cada punto de L, en contra de la hipótesis. □

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Corolario 2.14. *Toda serie lagunar $\sum_{n=0}^{\infty} z^{m_n}$ tiene $B\,(0,1)$ como dominio de holomorfía.*

Demostración. Basta observar que si $z \in C\,(0,1)$, la serie no satisface la condición necesaria de convergencia. □

Para ilustrar un ejemplo de aplicación de los resultados expuestos, podemos considerar la serie de potencias dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Considerando la sucesión $\{m_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n\}_{n=0}^{\infty}$ se verifican, de manera trivial, las condiciones (L1) y (L2) de la definición de serie lagunar. En estas condiciones podemos aplicar el corolario anterior y deducir que el dominio de holomorfía de esta serie es $B(0,1)$ y, en consecuencia, su forntera natural es $C\,(0,1)$.

Este mismo ejemplo fue estudiado en el primer capítulo del trabajo, requiriéndonos un mayor esfuerzo llegar a las mismas conclusiones. Gracias al estudio realizado en este segundo capítulo, el análisis del comportamiento en la frontera del abierto de convergencia de ciertas failias de series de potencias se reduce de manera considerable.

Capítulo 3

Teoría de sobreconvergencia

El objeto de estudio de este capítulo se centra en la noción de sobreconvergencia de una serie de potencias. Esto consiste, a grandes rasgos, en el estudio de la existencia de subsucesiones de la sucesión de sumas parciales (de la correspondiente serie) que converjan en los compactos de un dominio que contenga estrictamente al abierto de holomorfía de la serie con la que trabajamos.

En el primer apartado del capítulo introducimos el concepto de serie sobreconvergente y analizamos un primer ejemplo. Los tres apartados restantes los dedicamos al estudio de los denominados teoremas de las brechas que son los resultados en los que centramos nuestro interés. Por su parte, en el cuarto capítulo se expone una posible construcción de series sobreconvergentes.

3.1. Series de potencias sobreconvergentes

Comenzamos introduciendo el concepto de serie de potencias sobreconvergente y analizando un primer ejemplo.

Definición 3.1. Una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.1}$$

con radio de convergencia finito $R > 0$ se denomina **sobreconvergente** si existe una subsucesión de sumas parciales

$$s_{m_k}(z) = \sum_{n=0}^{m_k} a_n z^n \quad \text{con} \quad m_0 < m_1 < \cdots < m_k < \cdots$$

de la serie (3.1) que converge en los compactos de un dominio que contiene estrictamente al abierto de convergencia $B(0, R)$.

3.1.1. Un primer ejemplo

En este primer apartado, vamos a desarrollar uno de los ejemplos más sencillos de series sobreconvergentes. Este ejemplo se debe a Ostrowski que consideró la siguiente serie polinomial

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \left[z(1-z)\right]^{4^n} \tag{3.2}$$

donde $d_n^{-1} = \text{máx}_{0 \leq j \leq 4^n} \binom{4^n}{j}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Antes de abordar el resultado que garantiza la sobreconvergencia de la serie polinomial (3.2) realizamos una serie de observaciones que nos ayudarán a definir formalmente la serie polinomial (3.2) como una serie de potencias propia.

Lema 3.2. *El coeficiente del polinomio $[z(1-z)]^{4^n}$ que tiene mayor valor absoluto es d_n^{-1}. Además, ese mismo polinomio está formado únicamente por monomios $c_j z^j$ donde $4^n \leq j \leq 2 \cdot 4^n$.*

Demostración. Como $[z(1-z)]^{4^n} = z^{4^n}(1-z)^{4^n}$, haciendo uso del binomio de Newton podemos desarrollar el polinomio dado en el enunciado de la siguente manera:

$$[z(1-z)]^{4^n} = z^{4^n} \sum_{k=0}^{4^n} \binom{4^n}{k} (-1)^k z^{4^n - k} = \sum_{k=0}^{4^n} \binom{4^n}{k} (-1)^k z^{2 \cdot 4^n - k}.$$

Vista la definición de d_n^{-1}, es evidente que d_n^{-1} es el coeficiente del polinomio $[z(1-z)]^{4^n}$ con mayor valor absoluto. Por otro lado, la mayor potencia de z que aparece en dicho polinomio es $z^{2 \cdot 4^n}$ (caso en el que $j = 0$) y la menor potencia es $z^{2 \cdot 4^n - 4^n} = z^{4^n}$ (caso en el que $j = 4^n$). $\square$

Con el resultado expuesto, ya podemos definir formalmente la serie polinomial (3.2) como serie de potencias de la siguiente manera. Denotaremos por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n z^n \tag{3.3}$$

a la serie de potencias que deriva de la serie polinomial (3.2) y que queda definida por

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \notin \cup_{k=0}^{\infty} \left[4^k, 2 \cdot 4^k\right], \\ \\ (-1)^j \binom{4^k}{j} d_k & \text{si} \quad n = 2 \cdot 4^k - j \text{ con } j \in \left[0, 4^k\right]. \end{cases}$$

Además, su correspondiente suma parcial de orden $2 \cdot 4^k$ viene dada por

$$s_{2 \cdot 4^k}(z) = \sum_{j=0}^{2 \cdot 4^k} \sigma_j z^j = \sum_{j=0}^{k} d_j \left[z(1-z)\right]^{4^j} \tag{3.4}$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y no cambia hasta la suma de orden 4^{k+1}.

Una vez definida la serie de potencias (3.3) ya podemos hablar del concepto de sobreconvergencia, en el siguiente resultado se prueba que mencionada serie es sobreconvergente.

Proposición 3.3. *La serie* (3.3) *es sobreconvergente. Su radio de convergencia es 1, pero la sucesión de sumas parciales* $\{s_{2 \cdot 4^k}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ *converge uniformente en los compactos del dominio de Cassini*

$$W := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z(1-z)| < 2\} \supset \left(\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}\right) \cup \left(\overline{B(1,1)} \setminus \{2\}\right).$$

Demostración. En primer lugar, observamos que los coeficientes del polinomio $d_n \left[z(1-z)\right]^{4^n}$ tienen valor absoluto menor o igual que la unidad, cumpliéndose la igualdad, al menos, una vez para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (esto es consecuencia directa del Lema 3.2).

Ahora bien, como $2 \cdot 4^n < 2 \cdot 2 \cdot 4^n = 4^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se sigue que los conjuntos $E_n = \{m \ : \ 4^n \leq m \leq 2 \cdot 4^n\}$ son disjuntos dos a dos. Esto, teniendo en cuenta la igualdad (3.4), implica que el coeficiente σ_j de la serie (3.3) proviene del único monomio de grado j del correspondiente polinomio $d_n \left[z(1-z)\right]^{4^n}$ (es decir, aquel que tiene n tal que $4^n \leq j \leq 2 \cdot 4^n$).

En consecuencia, tenemos que $|\sigma_n| \leq 1$ cumpliéndose la igualdad una infinidad de veces, de lo que se sigue que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\sigma_n|} = 1$. En virtud de la fórmula de Cauchy-Hadamard, sabemos que el radio de convergencia de la serie (3.3) es la unidad.

Por otro lado, vamos a probar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[4^n]{|d_n|} = \frac{1}{2}$. Usando la siguiente notación

$$\binom{4^n}{J} = \max_{0\leq j\leq 4^n} \binom{4^n}{j},$$

observamos que se verifican las desigualdades

$$\binom{4^n}{J} \leq \sum_{j=0}^{4^n} \binom{4^n}{j} = 2^{4^n} = \sum_{j=0}^{4^n} \binom{4^n}{j} \leq (4^n+1)\binom{4^n}{J},$$

de donde se sigue que

$$\frac{2^{4^n}}{4^n+1} \leq \binom{4^n}{J} \leq 2^{4^n}.$$

Ahora bien, por definición $d_n^{-1} = \binom{4^n}{J}$, en consecuencia

$$2^{-4^n} \leq d_n \leq (4^n+1)\,2^{-4^n},$$

luego tomando raíces 4^n-ésimas y límites cuando n tiende a infinito se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4^n]{2^{-4^n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[4^n]{|d_n|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[4^n]{(4^n+1)\,2^{-4^n}}$$

de donde se deduce que

$$2^{-1} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[4^n]{|d_n|} \leq 2^{-1}$$

con lo que tenemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[4^n]{|d_n|} = \frac{1}{2}$ como pretendíamos probar.

En virtud, nuevamente, de la fórmula de Cauchy-Hadamard se tiene que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} d_n w^{4^n}$ tiene radio de convergencia igual a 2. Consecuentemente, tenemos que su sucesión de sumas parciales $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por $t_n(w) = \sum_{k=0}^{n} d_k w^{4^k}$ converge uniformemente en los compatos del conjunto $B(0,2) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 2\}$.

Si probamos que se cumple la contención de conjuntos

$$W := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z(1-z)| < 2\} \subset B(0,2)$$

se tendría que la sucesión $\{t_n(z(1-z))\}_{n=0}^{\infty} = \{s_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ convergería uniformemente en los conjuntos compactos de W, lo que probaría la sobreconvergencia de la serie (3.3).

Para finalizar la demostración, probamos a continuación que $W \subset B(0,2)$. Si $|z| \geq 2$, es obvio que $|z-1| \geq 1$ y, por tanto, $|z| \cdot |1-z| \geq 2$, en consecuencia $\mathbb{C} \setminus B(0,2) \subset \mathbb{C} \setminus W$, y tomando complementarios $W \subset B(0,2)$.

Ahora bien, dado un compacto $K \subset W$ consideramos la función entera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = z(1-z)$, y deducimos que $f(K) \subset B(0,2)$ es compacto. En consecuencia, de la convergencia uniforme de la sucesión $\{t_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ en $f(K)$ se deduce la convergencia uniforme de la sucesión $\{s_{2\cdot 4^n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ en K.

Luego hemos probado que la sucesión $\{s_{2\cdot 4^n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de W, y por tanto, queda probada la sobreconvergencia de la serie (3.3). $\square$

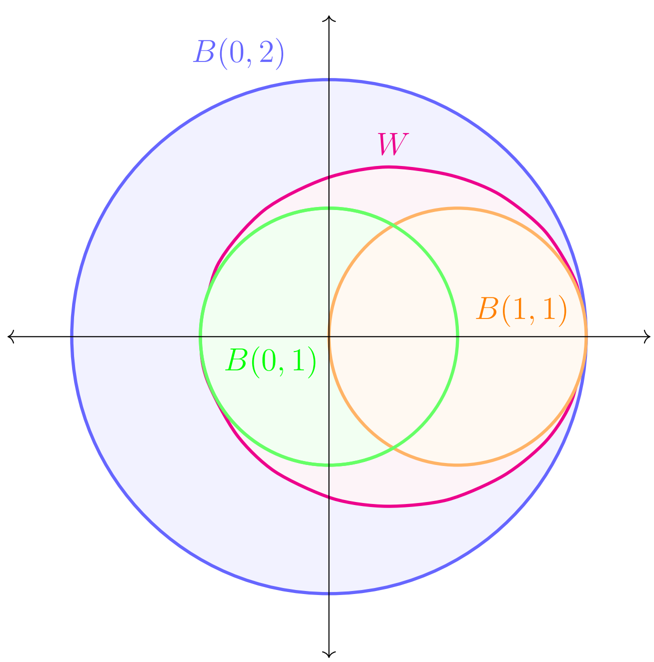

Figura 3.1: Dominio de Cassini.

3.2. Teorema de sobreconvergencia de Ostrowski

Comenzamos introduciendo la noción de serie de potencias de Ostrowski, que será el objeto de estudio a lo largo de este apartado.

Definición 3.4. Una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ se denomina **serie de Ostrowski** si existen $\delta > 0$ y dos sucesiones de números naturales, $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, verificando las siguientes condiciones:

(O1) $0 \leq m_0 < n_0 \leq m_1 < n_1 \leq \ldots \leq m_k < n_k \leq \ldots$, con $n_k - m_k > \delta m_k$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(O2) $a_j = 0$ si $m_k < j < n_k$ para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Observamos que este tipo de series tienen infinitas brechas entre m_k y n_k (brechas en el sentido de intervalos de coeficientes nulos), que crecen uniformemente. Sin embargo, entre dos de estas brechas puede haber una cantidad finita de elementos no nulos (los coeficientes con índices entre n_k y m_{k+1}).

Observación 6. Teniendo en cuenta que, en la definición de serie de potencias lagunar se pedía que entre dos brechas hubiera un único elemento no nulo, tenemos que no toda serie de Ostrowski es necesariamente una serie lagunar.

Ejemplo 3.5. El ejemplo introducido en el apartado anterior, relativo a la serie de potencias (3.3), es también un ejemplo de serie de Ostrowski. Considerando $m_k = 2 \cdot 4^k$ y $n_k = 4^{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y $\delta \in (0,1)$ se tiene que:

- $0 \leq m_0 < n_0 \leq m_1 < n_1 \leq \cdots \leq m_k < n_k \leq \cdots$ verificando, además, $n_k - m_k = 4^{k+1} - 2 \cdot 4^k = 2 \cdot 4^k = m_k > \delta m_k$.

- $\sigma_j = 0$ si $m_k < j < n_k$ para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Luego, por definición, la serie (3.3) es de Ostrowski.

Teorema 3.6 (de sobreconvergencia de Ostrowski)**.** *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de Ostrowski con radio de convergencia R mayor que cero, y sea $A \subset C(0,R)$ un conjunto de puntos de la frontera de f que no son barrera.*

Entonces la sucesión de sumas parciales $s_{m_k}(z) = \sum_{n=0}^{m_k} a_n z^n$ *converge en los compactos de un entorno de* $B(0,R) \cup A$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, vamos a considerar $R = 1$ y; además, vamos a tomar un punto $c \in C(0,1)$.

Dado que, por hipótesis, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es de Ostrowski, existen $\delta > 0$ y dos sucesiones de números naturales $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ verificando las condiciones (O1) y (O2).

Además, vamos a considerar el polinomio

$$q(\omega) = \frac{1}{2} c \left(\omega^p + \omega^{p+1}\right)$$

donde $p \in \mathbb{N}$ y $p \geq \delta^{-1}$; y definimos la fución

$$g(\omega) := f(q(\omega)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q(\omega)^n$$

que, por ser composición de $f \in \mathcal{H}(B(0,1))$ con $q \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, claramente es holomorfa en el conjunto $q^{-1}(B(0,1)) = \{\omega \in \mathbb{C} \ : \ |q(\omega)| < 1\}$.

Denotamos por $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n$ a la serie de Taylor de la función g centrada en el punto $0 \in q^{-1}(B(0,1))$, y por $s_n(z)$ y $t_n(z)$ las n-ésimas sumas parciales de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q(\omega)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n$, respectivamente.

Antes de seguir con la demostración del resultado introducimos un lema técnico.

Lema 3.7. *Para todo* $\omega \in \mathbb{C}$ *y para todo* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *se verifica la siguiente igualdad*

$$s_{m_k}(q(\omega)) = t_{(p+1)m_k}(\omega).$$

Demostración. En primer lugar, en virtud del teorema de las series dobles de Weierstrass, sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n$ proviene de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q(\omega)^n$ desarrollando los polinomios $q(\omega)^n$ y agrupando la serie resultante en potencias de ω.

Gracias a lo anterior y, teniendo en cuenta que la $((p+1)\, m_k)$-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n$ tiene grado menor o igual que $(p+1)\, m_k$, basta con probar que la m_k-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n$ tiene grado menor o igual que $(p+1)\, m_k$ y que si $\mu > m_k$ entonces el grado de los monomios que forman el polinomio $a_\mu q(\omega)^\mu$ es estrictamente mayor que $(p+1)\, m_k$ (pues, en ese caso, los polinomios expuestos no aportarían ningún término a la suma parcial $t_{(p+1)m_k}(\omega)$ y, por tanto, tendríamos la igualdad deseada).

Observamos que la mayor potencia de ω en el polinomio

$$s_{m_k}(q(\omega)) = \sum_{n=0}^{m_k} a_n q(\omega)^n = \sum_{n=0}^{m_k} a_n \frac{1}{2^n} c^n \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega^{(p+1)n-j} \right)$$

se alcanza en el caso que $n = m_k$ y $j = 0$. Por tanto, el grado del polinomio $s_{m_k}(q(\omega))$ es menor igual que $(p+1)\, m_k$.

Ahora bien, de la condición (O2) se tiene que cada polinomio $a_\mu q(\omega)^\mu$ con $\mu > m_k$ sólo contiene monomios $\alpha_j \omega^j$ con $j \geq p n_k$. Esto es consecuencia de que:

(i) Si $m_k < \mu < n_k$ se tiene que $a_\mu = 0$.

(ii) Si $n_k \leq \mu$, dado que el polinomio $a_\mu q(\omega)^\mu$ lo podemos reescribir en la forma

$$\frac{a_\mu c^\mu}{2^\mu} \sum_{j=0}^{\mu} \binom{\mu}{j} \omega^{(p+1)\mu-j},$$

observamos que sólo contiene monomios $\alpha_j \omega^j$ con $p\mu \leq j \leq (p+1)\,\mu$.

Por lo tanto, cada polinomio $a_\mu q(\omega)^\mu$ con $\mu > m_k$ solo contiene monomios $\alpha_j \omega^j$ con $j \geq p\mu \geq p n_k$.

Además, también de la condición (O2), se sigue que

$$n_k - m_k > \delta m_k \iff n_k > m_k + \delta m_k.$$

Por lo tanto, multiplicando a ambos lados de la desigualdad por p y teniendo en cuenta que $p \geq \delta^{-1}$ implica $p \cdot \delta \geq 1$, obtenemos que

$$p \cdot n_k > (p+1)\, m_k\,.$$

En conclusión, por la observación ya expuesta al inicio de la prueba, como el polinomio $t_{(p+1)m_k}$ es de grado menor o igual que $(p+1)\, m_k$ entonces, ningún polinomio de la forma $a_\mu (q(\omega))^\mu$ con $\mu > m_k$ contribuye a la suma parcial $t_{(p+1)m_k}$ (pues sólo contienen monomios $\alpha_j \omega^j$ con $p \cdot n_k > (p+1)\, m_k$).

En consecuencia, queda probada la igualdad $s_{m_k}(q(\omega)) = t_{(p+1)m_k}(\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{C}$ y para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Un vez probado el lema técnico proseguimos con la demostración del teorema principal.

En primer lugar, teniendo en cuenta que $c \in C(0,1)$, por lo que $|c| = 1$, observamos que:

- Si $\omega \in B(0,1)$ entonces, se sigue que

$$|q(\omega)| = \frac{1}{2}|c||\omega|^p|\omega+1| = \frac{1}{2}|\omega|^p|\omega+1| < \frac{1}{2}|\omega+1| \leq \frac{1}{2}(1+|\omega|) < 1$$

  donde en ambas desigualdades estrictas se ha utilizado que $|\omega| < 1$ y, en la desigualdad restante, se ha aplicado la clásica desigualdad triangular.

- Si $\omega \in C(0,1) \setminus \{1\}$ entonces, se sigue que

$$|q(\omega)| = \frac{1}{2}|\omega|^p|\omega+1| = \frac{1}{2}|\omega+1| = \frac{1}{2}|\omega-(-1)| < 1$$

  donde, en la desigualdad estricta, se ha utilizado que la máxima distancia entre dos puntos de la circunferencia unidad que no son pareja de antipodales es siempre estrictamente menor que el diámetro de la misma, que en nuestro caso es 2.

En consecuencia, se sigue que $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\} \subset q^{-1}(B(0,1))$. Ahora bien, como la función g es holomorfa en el conjunto $q^{-1}(B(0,1))$, en particular, también lo será en el conjunto $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$.

Por otro lado, hemos considerado $c \in C(0,1)$ de manera general. Si, en particular, tomamos $c \in A \subset C(0,1)$, al tratarse de un punto que no es barrera de la función f, sabemos que f puede prolongarse de manera holomorfa al punto c, denotamos a dicha prolongación por $\hat{f}$.

Teniendo en cuenta que $q(c) = 1$, si consideramos la función $\hat{g} = \hat{f} \circ q$, que es una prolongación analítica de g holomorfa en el punto 1, tenemos que $\hat{g}$ es holomorfa en $\overline{B}(0,1)$ (esto es, en un abierto que lo contiene), entonces existe

$r > 1$ tal que $\hat{g}$ es holomorfa en $B(0, r)$. En consecuencia la serie de Taylor de $\hat{g}$ centrada en 0 tiene radio de convergencia mayor o igual que $r > 1$.

Ahora bien, las series de Taylor de $\hat{g}$ y g centradas en el origen son idénticas, y por lo tanto, la serie de Taylor de g centrada en 0 tiene radio de convergencia mayor estrictamente que la unidad.

Por lo tanto, la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n$ de la función g y, en consecuencia, la sucesión de sumas parciales $\{t_{(p+1)m_k}(\omega)\}_{k=0}^{\infty}$ converge en los compactos de un disco abierto $B(0, r)$ que contiene a $\overline{B(0, 1)}$.

En virtud del Lema 3.7, tenemos que $s_{m_k}(q(\omega)) = t_{(p+1)m_k}(\omega)$. Entonces, la sucesión de sumas parciales $s_{m_k}(\omega)$ converge de forma compacta en $q(B)$. Dado que $q(B)$ es un dominio que contiene al punto $c = q(1)$, la sucesión de sumas parciales $s_{m_k}(\omega)$ converge de manera compacta en un entorno del punto $c \in A$.

Este razonamiento es válido para todo $c \in A$, luego la sucesión de sumas parciales $s_{m_k}(\omega)$ converge en los compactos de un entorno de $B(0, 1) \cup A$. $\square$

3.3. Teorema de la brecha de Hadamard

Empezamos introduciendo la noción de serie lagunar de Hadamard y realizando algunas observaciones iniciales.

Definición 3.8. Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ se denomina **serie lagunar de Hadamard** si existen $\delta > 0$ y una sucesión $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números naturales verificando las siguientes condiciones

(H1) $m_{n+1} - m_n > \delta m_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(H2) $a_j = 0$ si $m_n < j < m_{n+1}$ para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(H3) $a_{m_j} \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Observamos que este tipo de series tienen infinitas brechas entre m_n y m_{n+1}, que crecen uniformemente. Sin embargo, a diferencia de las series de Ostrowski, en este caso entre dos brechas hay un único elemento no nulo.

Observación 7. De lo expuesto inmediatamente antes, se deduce que no toda serie de Ostrowski es necesariamente una serie lagunar de Hadamard.

Por el contrario, el recíproco sí que se verifica, recogemos el resultado en el siguiente lema.

Lema 3.9. *Toda serie lagunar de Hadamard es también serie de Ostrowski.*

Demostración. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie lagunar de Hadamard, entonces existen $\delta > 0$ y una sucesión $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ de números naturales verificando las condiciones (H1), (H2) y (H3).

Basta tomar $n_k = m_{k+1}$ y, por tanto, tenemos $\delta > 0$ y dos sucesiones de números naturales $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ que, evidentemente, verifican las condiciones (O1) y (O2) de la definición de serie de Ostrowski. □

Además, podemos analizar si se verifican las mismas implicaciones pero, en este caso, entre series lagunares y series lagunares de Hadamard. Parece evidente, por los nombres de los dos conceptos, que toda serie lagunar de Hadamard será también serie lagunar.

Lema 3.10. *Toda serie lagunar de Hadamard es también serie lagunar.*

Demostración. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie lagunar de Hadamard, entonces existen $\delta > 0$ y una sucesión $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ de números naturales verificando las condiciones (H1), (H2) y (H3). Para probar que también se trata de una serie lagunar, basta verificar las condiciones (L1) y (L2).

La condición (L1) se verifica trivialmente, pues expone lo mismo que la condición (H2). Por otro lado, de la condición (H1) se sigue

$$\lim_{n\to\infty} (m_{n+1} - m_n) \geq \delta \lim_{n\to\infty} m_n = \infty \implies \lim_{n\to\infty} (m_{n+1} - m_n) = \infty$$

que es exactamente la condición (L2). □

Sin embargo, el recíproco no se verifica, observamos que de la condición (H1) se deduce

$$m_{n+1} - m_n > \delta m_n \implies \frac{m_{n+1}}{m_n} > \delta + 1 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{m_{n+1}}{m_n} \geq \delta + 1 > 1. \quad (3.5)$$

Por tanto, si consideramos una serie lagunar cuya sucesión $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ no verifique (3.5) no cumplirá la condición (H1) y, en consecuencia, no será una serie lagunar de Hadamard.

Ejemplo 3.11. Un ejemplo sencillo sería considerar la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}. \tag{3.6}$$

En este caso concreto, $m_n = n^2$ y escribiendo la serie como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ se verifican:

(L1) $a_j = 0$ si $m_n < j < m_{n+1}$ para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(L2) $\lim\limits_{n\to\infty} (m_{n+1} - m_n) = \lim\limits_{n\to\infty} ((n+1)^2 - n^2) = \lim\limits_{n\to\infty} (2n+1) = \infty$.

Luego queda probado que la serie (3.6) es una serie lagunar. Sin embargo, como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_{n+1}}{m_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1,$$

no se verifica la desigualdad (3.5) y, en consecuencia, no cumple la condición (H1), de donde se deduce que la serie (3.6) no es una serie lagunar de Hadamard.

Observación 8. En el apartado anterior expusimos que no toda serie de Ostrowski era necesariamente una serie lagunar, pero no analizamos el recíproco. Con las implicaciones vistas en este apartado, podemos asegurar que el recíproco tampoco se cumple. Dado que el concepto de serie lagunar no implica el de serie lagunar de Hadamard, pero serie lagunar de Hadamard implica serie de Ostrowski, podemos deducir que no toda serie lagunar es necesariamente serie de Ostrowski.

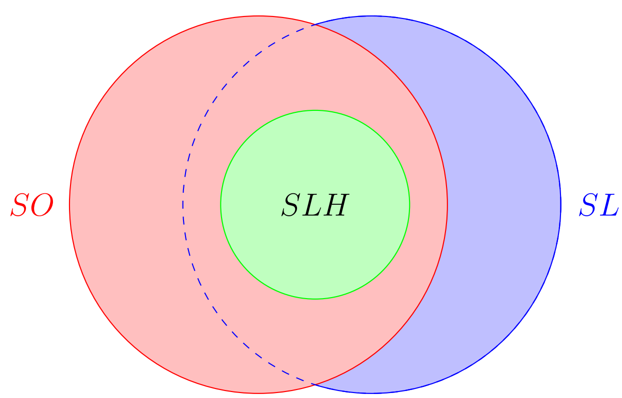

Figura 3.2: Esquema gráfico. Familias de series.

Denotando por:

- SL a las series lagunares,
- SO a las series de potencias de Ostrowski,
- SLH a las series lagunares de Hadamard;

en la Figura 3.2 se representan las contenciones entres las distintas familias de series que se han introducido.

Tras estas observaciones y ejemplos, pasamos al resultado de real importancia de este apartado.

Teorema 3.12 (de la brecha de Hadamard)**.** *Toda serie lagunar de Hadamard $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia $R > 0$ tiene el disco $B(0, R)$ como dominio de holomorfía.*

Demostración. Dado que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es lagunar de Hadamard por hipótesis, sabemos que existen $\delta > 0$ y una sucesión de números naturales $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ verificando las condiciones (H1), (H2) y (H3).

Denotamos por $\{s_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ a la sucesión de sumas parciales de f. Observamos que, en esencia, las sucesiones $\{s_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{s_{m_n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ son iguales (en la segunda de ellas se eliminan las repeticiones, debidas a las brechas, que aparecen en la primera).

En virtud de la definición de radio de convergencia, sabemos que la sucesión $\{s_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ diverge en todo punto $\xi \notin \overline{B(0, R)}$.

En consecuencia, del teorema de sobreconvergencia de Ostrowski, se sigue que $A = \emptyset$, donde A nuevamente denota el conjunto de puntos que no son barrera de la serie de potencias con la que estamos trabajando. En caso contrario, si $A \neq \emptyset$, existiría $z_0 \in A$ tal que la sucesión $\{s_{m_n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de $B(0, 1) \cup B(z_0, \varepsilon)$. Sea $\omega \in B(z_0, \varepsilon) \setminus \overline{B(0, 1)}$ ($\{\omega\}$ es un conjunto compacto), entonces sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_{m_n} \omega^{m_n} < \infty$. Sin embargo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m_n} z^{m_n}$ y, en contra de la definición de radio de convergencia se tendría, que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n < \infty$.

Por lo tanto $A = \emptyset$, entonces todos los puntos de $C(0, R)$ son puntos barrera de f. Esto es, la frontera del abierto de convergencia es la frontera natural de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y, por tanto, su dominio de holomorfía es el disco abierto $B(0, R)$. $\square$

3.4. Construcción de Porter de series sobreconvergentes

A lo largo de este apartado vamos a trabajar con:

- un polinomio $q \neq 0$ de grado d que tiene al cero como raíz y, además, tiene al menos otra raíz distinta de cero,
- una serie lagunar $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m_n} z^{m_n}$ con radio de convergencia R y verificando $m_{n+1} > dm_n$.

Además, consideramos

$$\begin{aligned} g(z) &:= f(q(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m_n} q(z)^{m_n}, \\ V &:= \{z \in \mathbb{C} : |q(z)| < R\}, \\ r &:= d(0, \partial V) \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Con la consideraciones hechas, estamos en condiciones de enunciar y demostrar la construcción de Porter de series sobreconvergentes.

Proposición 3.13 (Construcción de Porter)**.** *La serie de Taylor* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *centrada en* $0 \in V$ *de la función* $g \in \mathcal{H}(V)$ *es sobreconvergente. En particular, tiene radio de convergencia* r *y su sucesión de sumas parciales* $t_{dm_k}(z) = \sum_{k=0}^{dm_k} b_{m_k} z^{m_k}$ *converge uniformemente en los compactos de* V*.*

Además, la componente conexa $\hat{V}$ *de* V *que contiene al conjunto* $B(0, r)$ *es el dominio de holomorfía de* $g|_{\hat{V}}$*.*

Demostración. Antes de nada, observamos que $g = f \circ q$ y, teniendo en cuenta que la serie f tiene radio de convergencia R, es evidente que la función g es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : q(z) \in B(0, R)\} = V$.

Al igual que en el teorema de sobreconvergencia de Ostrowski, la clave para realizar la prueba de este resultado es tener en cuenta que se verifica

$$t_{dm_k}(z) = \sum_{n=0}^{k} a_{m_n} q(z)^{m_n}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Teniendo en cuenta que el polinomio t_{dm_k} tiene grado $\leq dm_k$ basta con probar que los polinomios $q\left(z\right)^{m_j}$ con $0 \leq j \leq k$ tienen grado $\leq dm_k$, mientras que si $j > m_k$ se trata de polinomios formados por monomios de grado estrictamente mayor que dm_k (y por tanto no aportan nada a la correspondiente suma parcial). Dado que $q\left(0\right) = 0$, sabemos que el polinomio q no tiene término independiente.

- Si $0 \leq j \leq m_k$, basta con probar que el polinomio $q\left(z\right)^{m_k}$ tiene grado menor o igual que dm_k pues, para el resto de valores de j es evidente que el grado del correspondiente polinomio será menor.

  La mayor potencia de z que aparece en el polinomio $q\left(z\right)^{m_k}$ se obtiene al multiplicar los monomios dominantes (que, por hipótesis tiene grado d) entre ellos, obteniendo como resultado un monomio de grado $d \cdot m_k$, como se quería probar.

- Si $j > m_k$, basta probar que para $j = m_{k+1}$ el polinomio $q\left(z\right)^{m_{k+1}}$ está formado por monomios de grados estrictamente mayores que dm_k.

  Teniendo en cuenta la observación que se ha comentado antes (q no tiene término independiente), la menor potencia que puede aparecer en el polinomio $q\left(z\right)^{m_{k+1}}$ se obtiene al multiplicar entre sí los monomios de grado 1, que se correspondería con un monomio de grado $m_{k+1} > dm_k$ (por hipótesis).

Por lo tanto, queda probada la igualdad (3.7).

Del hecho de que la función g sea holomorfa en V, se sigue que la sucesión de sumas parciales de la su serie de Taylor en 0 converge uniformemente en los conjuntos compactos de su abierto de convergencia.

Ahora bien, la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de la función g converge en $B\left(0, r\right)$ pues, por definición de r se tiene $B\left(0, r\right) \subset V$. Si el radio de convergencia fuera mayor que $r = d\left(0, \partial V\right)$, existirían puntos $v \notin \overline{V}$ tales que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n v^n$ sería convergente y, de la igualdad (3.7), se deduciría que la serie $\sum_{n=0}^{k} a_{m_n} q\left(v\right)^{m_n}$ es convergente. Sin embargo, esto último no es posible puesto que $v \notin \overline{V}$ implica que $\left|q\left(v\right)\right| > R$ (y sabemos que la serie f tiene radio de convergencia igual a R, luego en particular, dicha serie diverge en el punto $q\left(v\right)$). En conclusión, tenemos que r es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Es evidente que $B(0,r) \subset \hat{V}$ y, como el polinomio q tiene al menos dos raíces distintas, en virtud del Corolario C.26 se tiene $\hat{V} \neq B(0,r)$. Además, del teorema de la brecha de Hadamard, se tiene que $B(0,R)$ es el dominio de holomorfía de f, entonces del Teorema C.14 se deduce que $\hat{V}$ es el dominio de holomorfía de g. $\square$

3.5. Teorema de la brecha de Fabry

El objetivo de este último apartado es enunciar y demostrar el Teorema de la brecha de Fabry. Para realizar la prueba de dicho resultado precisamos tres resultados auxiliares que estudiaremos a continuación.

Observación 9. Si P es un polinomio de grado $n \geq 2$, entonces la suma de los residuos de $1/P(z)$ en todos los ceros de P es cero.

Demostración. Consideramos $R_0 > 0$ de manera que todos los ceros del polinomio P están contenidos en la bola abierta $B(0,R_0)$.

Denotando $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$, observamos que

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{z^2}{P(z)} = \begin{cases} c_2 & \text{si} \quad n = 2 \\ 0 & \text{si} \quad n > 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{|z|\to\infty} \frac{z^2}{P(z)} \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, existe $M > 0$ tal que si $|z_0| > R_0$ se verifica

$$\left| \frac{z^2}{P(z)} \right| \leq M \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

Ahora bien, para $R > R_0$ y teniendo en cuenta la cota anterior, es evidente que

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{C(0,R)} \frac{1}{P(z)} dz = 0$$

pues, en efecto, se tiene

$$\left| \oint_{C(0,R)} \frac{1}{P(z)} \right| \leq 2\pi R \frac{M}{R^2} = \frac{2\pi M}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Denotamos por $Z(P)$ al conjunto de ceros del polinomio P. Como aplicando el teorema de los residuos se deduce que si $R > R_0$,

$$\sum_{\omega \in Z(P)} \operatorname{Res}(1/P, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,R)} \frac{1}{P(z)} dz,$$

de lo anterior se deduce que sólo puede ser $\sum_{\omega \in Z(P)} \operatorname{Res}(1/P, \omega) = 0$. □

Teorema 3.14 (Primer teorema principal de Turán)**.** *Sean $b_1, \ldots, b_N$ números complejos arbitrarios y $z_1, \ldots, z_N$ números complejos verificando $|z_n| \geq 1$ para $1 \leq n \leq N$. Para $v \in \mathbb{N}$ definimos la suma de potencias s_v como*

$$s_v = \sum_{n=1}^{N} b_n z_n^v \,. \tag{3.8}$$

Entonces para cualquier entero no negativo M existe un índice v en el intervalo $M + 1 \leq v \leq M + N$ verificando

$$|s_v| \geq c(M, N) |s_0| \tag{3.9}$$

donde

$$c(M, N) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} 2^k \right)^{-1} . \tag{3.10}$$

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los z_n son distintos dos a dos; en otro caso, basta con agrupar los que sean iguales y reducir el número de sumandos N.

Vamos a considerar números complejos $a_0, \ldots, a_{N-1}$ que serán determinados más adelante. Trabajando con módulos y haciendo uso de la desigualdad triangular es claro que se verifica

$$\left| \sum_{v=0}^{N-1} a_n s_{M+1+v} \right| \leq \left(\sum_{v=0}^{N-1} |a_v| \right) \max_{M+1 \leq v \leq M+N} |s_v|. \tag{3.11}$$

La suma de la parte izquierda es

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{N-1} a_v s_{M+1+v} &= \sum_{v=0}^{N-1} a_v \sum_{n=1}^{N} b_n z_n^{M+1+v} \\ &= \sum_{n=1}^{N} b_n z_n^{M+1} \sum_{v=0}^{N-1} a_v z_n^v = \sum_{n=1}^{N} b_n z_n^{M+1} p(z_n) \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $p(z) = \sum_{v=0}^{N-1} a_v z^v$.

Elegimos los números complejos $a_0, \ldots, a_{N-1}$ verificando

$$p(z_n) = z_n^{-M-1} \quad \text{para} \quad 1 \leq n \leq N. \tag{3.13}$$

De esta manera, sustituyendo (3.13) en (3.12), se sigue que

$$\sum_{v=0}^{N-1} a_v s_{M+1+v} = \sum_{n=1}^{N} b_n z_n^{M+1} p(z_n) = \sum_{n=1}^{N} b_n = s_0$$

y; teniendo en cuenta (3.11), para finalizar la prueba basta con demostrar que

$$\sum_{v=0}^{N-1} |a_v| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} 2^k = (C(M,N))^{-1}. \tag{3.14}$$

Escribimos el polinomio p de la siguiente manera:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \prod_{n=1}^{k} (z - z_n).$$

Mediante el cálculo de residuos y teniendo en cuenta la Observación 9, tomando $\tilde{R} > |z_k|$ para $1 \leq k \leq N$, se verifica que

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,\tilde{R})} \frac{p(z)}{\prod_{n=1}^{k+1} (z - z_n)} dz. \tag{3.15}$$

Por otro lado, observamos que las singularidades de la función definida por

$$\frac{z^{-M-1}}{\prod_{n=1}^{k+1} (z - z_n)}$$

están contenidas en $B\left(0, \tilde{R}\right)$; en virtud del teorema de los residuos, sabemos que para todo $R \geq \tilde{R}$,

$$\oint_{C(0,\tilde{R})} \frac{z^{-M-1}}{\prod_{n=1}^{k+1} (z - z_n)} dz = \oint_{C(0,R)} \frac{z^{-M-1}}{\prod_{n=1}^{k+1} (z - z_n)} dz$$

para todo $R \geq \tilde{R}$. Ahora bien, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\oint_{C(0,R)} \frac{z^{-M-1}}{\prod_{n=1}^{k+1}(z-z_n)}dz\right| &\leq 2\pi R \max_{C(0,R)} \left|\frac{z^{-M-1}}{\prod_{n=1}^{k+1}(z-z_n)}\right| \\ &= \frac{1}{R}\frac{R^{-M-1}}{\delta} = \frac{1}{R^{M+2}\delta}\end{aligned} \tag{3.16}$$

donde

$$\delta = \min_{C(0,R)} \left|\prod_{n=1}^{k+1}(z-z_n)\right|.$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\delta = \min_{C(0,R)} \left|\prod_{n=1}^{k+1}(z-z_n)\right| &\geq \tilde{\delta} = \min_{C\left(0,\tilde{R}\right)} \left|\prod_{n=1}^{k+1}(z-z_n)\right| \\ &\geq \prod_{n=1}^{k+1} \operatorname{dist}\left(\{z_n\}, C\left(0,\tilde{R}\right)\right) > 0\end{aligned} \tag{3.17}$$

pues los conjuntos $\{z_n\}$ y $C\left(0,\tilde{R}\right)$ son compactos para todo $1 \leq n \leq k+1$. En consecuencia, combinando las desigualdades (3.16) y (3.17) se deduce que

$$\left|\oint_{C(0,R)} \frac{z^{-M-1}}{\prod_{n=1}^{k+1}(z-z_n)}dz\right| \leq \frac{1}{R^{M+2}\tilde{\delta}} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

y, por tanto, tenemos que para todo $R \geq \tilde{R}$ se verifica

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(0,R)} \frac{z^{-M-1}}{\prod_{n=1}^{k+1}(z-z_n)}dz = 0. \tag{3.18}$$

Ahora bien, restando (3.18) a la igualdad (3.15) obtenemos que

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(0,R)} \frac{p(z) - z^{-M-1}}{\prod_{n=1}^{k+1}(z-z_n)}dz.$$

Teniendo en cuenta (3.13) sabemos que el integrando es holomorfo en cada punto z_n para $1 \leq n \leq N$; por lo tanto, la única singulariadad del integrando es el polo de orden $M+1$ en el punto $z=0$. Del teorema de los residuos se sigue que podemos reemplazar el conjunto de integración anterior por una circunferencia $C\left(0,r\right)$ con $0<r<1$. De este modo, como la función definida por

$$\frac{p\left(z\right)}{\prod_{n=1}^{k+1}\left(z-z_n\right)}$$

es holomorfa en $B\left(0,r\right)$, concluímos que

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{-1}{2\pi i}\oint_{C(0,r)}\frac{z^{-M-1}}{\prod_{n=1}^{k+1}\left(z-z_n\right)}dz \\ &= \frac{\left(-1\right)^k}{2\pi i z_1\cdots z_{k+1}}\oint_{C(0,r)}\prod_{n=1}^{k+1}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{-1}z^{-M-1}dz \\ &= \frac{\left(-1\right)^k}{z_1\cdots z_{k+1}}C_{M,k} \end{aligned}$$

donde

$$\prod_{n=1}^{k+1}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}C_{m,k}z^m \quad \text{para} \quad |z|<1.$$

Para $|z|<1$ podemos escribir

$$\frac{1}{1-z/z_n}=\sum_{m=0}^{\infty}z_n^{-m}z^m$$

y, por tanto, tenemos

$$\sum_{m=0}^{\infty}C_{m,k}z^m=\prod_{n=1}^{k+1}\sum_{m=0}^{\infty}z_n^{-m}z^m;$$

de donde se deduce que los coeficientes $C_{m,k}$ de la serie anterior vienen dados por:

$$C_{m,k}=\sum_{\substack{m_1,\dots,m_k\in\mathbb{N}\\ m_1+\cdots+m_k=m}}z_1^{-m_1}z_2^{-m_2}\dots z_k^{-m_k}.$$

Teniendo en cuenta que $|z_i|>1$ para todo $i=1,\dots,k+1$, se sigue que

$$\begin{aligned} |C_{m,k}| &\leq \sum_{\substack{m_1,\dots,m_k\in\mathbb{N}\\ m_1+\cdots+m_k=m}}1=\binom{k+m-1}{k}=\frac{(k+m-1)!}{k!\,(m-1)!} \\ &= \frac{(k+m)!}{k!\,(m)!}\cdot\frac{m}{k+m}\leq\frac{(k+m)!}{k!\,(m)!}=\binom{k+m}{k} \end{aligned}$$

para todo m y para todo k. En particular, aplicando la desigualdad anterior para $m = M$ deducimos que

$$|C_{M,k}| \leq \binom{M+k}{k} \quad \Longrightarrow \quad |c_k| \leq \frac{\binom{M+k}{k}}{|z_1 \cdots z_{k+1}|}.$$

A continuación, vamos a considerar los polinomios

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \prod_{n=1}^{k} (z - z_n) = \sum_{v=0}^{N-1} a_v z^v \\ P(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} (z+1)^k = \sum_{v=0}^{N-1} A_v z^v \end{aligned}$$

y, comparando coeficientes, concluiremos que $|a_v| \leq A_v$.

En primer lugar, para hallar una expresión de los coeficientes a_v relativos al polinomio p, observamos que:

$$\begin{aligned} a_0 =& c_0 - c_1 z_1 + c_2 z_1 z_2 - c_3 z_1 z_2 z_3 + \cdots + (-1)^{N-1} c_{N-1} z_1 z_2 \ldots z_{N-1} \\ a_1 =& c_1 - c_2 (z_1 + z_2) + c_3 (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) \\ & - c_4 (z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4) \\ & + \cdots + (-1)^{N-2} c_{N-1} (z_1 z_2 \ldots z_{N-2} + \cdots + z_2 z_3 \ldots z_{N-1}) \\ & \vdots \\ a_v =& c_v - c_{v+1} (z_1 + z_2 + \cdots + z_{v+1}) + c_{v+2} (z_1 z_2 + \cdots + z_{v+1} z_{v+2}) \\ & + \cdots + (-1)^{N-1-v} c_{N-1} (z_1 \ldots z_{N-1-v} + \cdots + z_v \ldots z_{N-1}) \\ & \vdots \\ a_{N-1} =& c_{N-1}. \end{aligned}$$

Ahora bien, tomando módulos en la expresión general para el coeficiente a_v y usando la desigualdad triangular, se sigue que:

$$\begin{aligned} |a_v| &\leq |c_v| + |c_{v+1}| \binom{v+1}{1} + |c_{v+2}| \binom{v+2}{2} + \cdots + |c_{N-1}| \binom{N-1}{N-1-v} \\ &= \sum_{k=0}^{N-v-1} |c_{v+k}| \binom{v+k}{k} \leq \sum_{k=0}^{N-v-1} \binom{v+k}{k} \binom{M+v+k}{v+k} \end{aligned} \tag{3.19}$$

para todo $v = 0, \ldots, N-1$, donde hemos tenido en cuenta que $|z_i| > 1$ para todo $i = 0, \ldots, N-1$.

Análogamente, para hallar una expresión de los coeficientes A_v relativos al polinomio P, observamos que:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} (z+1)^k = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k-1}{j} z^j$$

de donde se deduce que:

$$\begin{aligned}
A_0 =& \binom{M}{0} + \binom{M+1}{1} + \cdots + \binom{M+N-1}{N-1}, \\
A_1 =& \binom{M+1}{1} + \binom{2}{1}\binom{M+2}{2} + \cdots + \binom{N-1}{1}\binom{M+N-1}{N-1}, \\
&\vdots \\
A_v =& \binom{M+v}{v} + \binom{v+1}{v}\binom{M+v+1}{v+1} + \cdots + \binom{N-1}{v}\binom{M+N-1}{N-1} \\
=& \sum_{k=v}^{N-1} \binom{k}{v}\binom{M+k}{k} = \sum_{k=0}^{N-v-1} \binom{v+k}{v}\binom{M+v+k}{v+k}, \\
&\vdots \\
A_{N-1} =& \binom{M+N-1}{N-1}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, de la desigualdad (3.19) y de la expresión general para los coeficientes A_v, se deduce que:

$$|a_v| \leq \sum_{k=0}^{N-v-1} \binom{v+k}{k}\binom{M+v+k}{v+k} = \sum_{k=0}^{N-v-1} \binom{v+k}{v}\binom{M+v+k}{v+k} = A_v$$

para todo $v = 0, \ldots, N-1$. En conclusión:

$$\sum_{v=0}^{N-1} |a_v| \leq \sum_{v=0}^{N-1} A_v = P(1) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{M+k}{k} 2^k$$

como se quería probar. $\square$

Debido a la compleja estructura de la constante (3.10), en la práctica suele sustituirse por

$$\tilde{c}\,(M,N) = \left(\frac{N}{2e\,(M+N)}\right)^{N-1}. \tag{3.20}$$

Antes de demostrar que $c\,(M,N) \geq \tilde{c}\,(M,N)$ para probar que utilizar esta nueva cota es lícito, exponemos algunas propiedades y acotaciones básicas.

Lema 3.15. *Sean M y N números naturales, entonces:*

(i) Para todo número natural $K > 1$ se tiene

$$\sum_{l=0}^{K-1} \binom{M+l}{l} = \binom{M+K}{K-1}.$$

(ii) Se verifica la desigualdad

$$\binom{M+N}{N-1} \leq \frac{(M+N)^{N-1}}{(N-1)!}.$$

(iii) Se verifica la desigualdad

$$(N-1)! \geq \left(\frac{N}{e}\right)^{N-1}.$$

Demostración.

(i) La prueba es trivial razonando por inducción sobre K.

(ii) La prueba se realiza de forma directa haciendo uso de la definición de número combinatorio, y teniendo en cuenta que $M+N-k \leq M+N$ para todo $k = 1,\ldots,N-2$.

(iii) La prueba resulta inmediata razonando por inducción sobre N y haciendo uso de la clásica desigualdad

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N} \leq e \tag{3.21}$$

válida para todo número natural N. □

Con los resultados expuestos se sigue que:

$$\begin{aligned}
c\,(M,N)^{-1} &= \sum_{k=0}^{N-1}\binom{M+k}{k}2^k \leq 2^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{M+k}{k} \\
&= 2^{N-1}\binom{M+N}{N-1} \leq 2^{N-1}\frac{(M+N)^{N-1}}{(N-1)!} \\
&\leq 2^{N-1}\frac{(M+N)^{N-1}}{\left(\frac{N}{e}\right)^{N-1}} = \left(\frac{2e\,(M+N)}{N}\right)^{N-1} = \tilde{c}\,(M,N)^{-1},
\end{aligned}$$

y en consecuencia, se tiene que $c\,(M,N) \geq \tilde{c}\,(M,N)$, como queríamos probar.

Lema 3.16. *Supongamos que $T\,(x)$ es un polinomio exponencial de N términos de periodo 1, digamos*

$$T\,(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{2\pi i \lambda_n x} \tag{3.22}$$

donde $\lambda_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n = 1, \ldots, N$. Sea I un arco cerrado en $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y denotemos por L a la longitud de I. Entonces

$$\max_I |T\,(x)\,| \geq \left(\frac{L}{2e}\right)^{N-1} \max_{\mathbb{T}} |T\,(x)\,|.$$

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el polinomio $T\,(x)$ alcanza su máximo en $x = 0$.

- Si $x = 0 \in I$ la desigualdad se verifica de manera trivial.
- Si $x = 0 \notin I$ supongamos que $I = [\alpha, \beta]$ con $0 < \alpha < \beta < 1$. Vamos a considerar
$$\delta = \tfrac{\beta-\alpha}{N} \quad \text{y} \quad M = \lfloor \tfrac{\alpha}{\delta} \rfloor,$$
de esta manera, $v\delta \in I$ para $M+1 \leq v \leq M+N$.
Ahora bien, considerando $z_n = e^{2\pi i \lambda_n \delta}$, s_v definido como en (3.8) y atendiendo a (3.22), observamos que $s_v = T\,(v\delta)$. En virtud del primer teorema principal de Turán, aplincándolo con la constante $\tilde{c}\,(M,N)$, se deduce que
$$\begin{aligned}
\max_I |T\,(x)\,| &\geq \max_{M+1\leq v\leq M+N} |T\,(v\delta)\,| = \max_{M+1\leq v\leq M+N} |s_v| \\
&\geq \tilde{c}\,(M,N)\,|T\,(0)\,| \overset{0\in\mathbb{T}}{=} \tilde{c}\,(M,N)\max_{\mathbb{T}} |T\,(x)\,|,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

donde la segunda desigualdad se debe al teorema mencionado y la primera se debe a que el conjunto $\{v\delta \ : \ M+1 \leq v \leq M+N\} \subset I$. Además, teniendo en cuenta

$$M \leq \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha N}{\beta - \alpha} \implies M + N \leq \frac{\beta N}{\beta - \alpha}$$
$$\implies \frac{N}{M+N} \geq \frac{\beta - \alpha}{\beta} \overset{0<\beta<1}{\geq} \beta - \alpha = L$$

observamos que:

$$\tilde{c}\,(M, N) = \left(\frac{N}{2e\,(M+N)}\right)^{N-1} \geq \left(\frac{L}{2e}\right)^{N-1}. \tag{3.24}$$

Combinando las desigualdades (3.23) y (3.24) se sigue que

$$\max_{I} |T\,(x)\,| \geq \left(\frac{L}{2e}\right)^{N-1} \max_{\mathbb{T}} |T\,(x)\,|.$$

como se quería probar.

Con esto se concluye la demostración del lema. □

Lo realmente interesante de la acotación probada es que no depende del tamaño de los enteros λ_n.

Supongamos que f es una serie de potencias de la forma

$$f\,(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

con $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. El teorema de Fabry afirma que la circunferencia frontrea del abierto de convergencia de f es su frontera natural, si

$$\frac{\lambda_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Para probarlo, aplicaremos el Lema 3.16 a la serie de potencias de una prolongación analítica adecuada de f. Sin embargo, dicha serie tiene infinitos términos y el lema de interés se aplica sólo a sumas finitas. En consecuencia, introducimos el siguiente resultado que nos ayudará a "truncar" dicha serie para, posteriormente, poder aplicar el Lema 3.16.

Lema 3.17. *Sea f una función holomorfa en el disco unidad. Si consideramos $0 < r < 1$, entonces existe un número positivo $C = C(r)$ tal que*

$$\sum_{n>Ck} \binom{n}{k} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| r^{n-k} < 1$$

para k suficientemente grande, digamos $k > k_0(f, r)$.

Demostración. Observamos que

$$\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!} < \left(\frac{en}{k} \right)^k, \tag{3.25}$$

la primera desigualdad equivale al Lema 3.15 (ii) y la segunda se debe al Lema 3.15 (iii).

Por otro lado, aplicando las desigualdades de Cauchy para las derivadas en la bola cerrada de centro 0 y radio $r^{1/3}$, se sigue que

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| < \frac{\text{máx}\{|f(z)| \ : \ z \in \overline{B}(0, r/3)\}}{r^{n/3}} \tag{3.26}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, teniendo en cuenta que $0 < r < 1$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^{n/6}} = \infty,$$

por tanto, para $n > n_0(f, r)$ (esto es, para n suficientemente grande) se verifica

$$\text{máx}\{|f(z)| \ : \ z \in \overline{B}(0, r/3)\} < \frac{1}{r^{n/6}}, \tag{3.27}$$

puesto que, en virtud del teorema de Weierstrass sabemos que $\text{máx}\{|f(z)| \ : \ z \in \overline{B}(0, r/3)\} < \infty$. Por lo tanto, combinando las desigualdades (3.26) y (3.27) se tiene que

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| < \frac{1}{r^{n/2}} \tag{3.28}$$

para todo $n > n_0(f, r)$.

Teniendo en cuenta (3.25) y (3.28) se sigue que

$$\sum_{n>Ck} \binom{n}{k} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| r^{n-k} < \sum_{n>Ck} \left(\frac{en}{k} \right)^k r^{(n-2k)/2}.$$

El cociente entre dos términos consecutivos de la serie de numeros positivos anterior es

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{e\,(n+1)}{k}\right)^k r^{((n+1)-2k)/2}}{\left(\frac{en}{k}\right)^k r^{(n-2k)/2}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^k r^{3/2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k r^{1/2} \\ &= \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^{k/n} r^{1/2} < e^{k/n} r^{1/2}\end{aligned} \tag{3.29}$$

y, por tanto, tomando $C > 6/\log(1/r)$ y $n > Ck$ se sigue que

$$\begin{aligned}e^{k/n} r^{1/2} &< e^{k/Ck} r^{1/2} = e^{1/C} r^{1/2} \\ &= e^{\log(1/r)/6} r^{1/2} = (1/r)^{1/6} r^{1/2} = r^{1/3}.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Considerando $C > 6/\log(1/r)$, $n > Ck$ y enlazando las desigualdades (3.29) y (3.30), tenemos

$$\left(\frac{e\,(n+1)}{k}\right)^k r^{((n+1)-2k)/2} < r^{1/3}\left(\frac{en}{k}\right)^k r^{(n-2k)/2},$$

y razonando por inducción, se prueba que

$$\left(\frac{e\,(n+m)}{k}\right)^k r^{((n+m)-2k)/2} < \left(r^{1/3}\right)^m \left(\frac{en}{k}\right)^k r^{(n-2k)/2}.$$

En consecuencia, considerando $C \in \mathbb{N}$ tal que $C > 6/\log(1/r)$ tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n>Ck}\binom{n}{k}\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| r^{n-k} &< \sum_{n>Ck}\left(\frac{en}{k}\right)^k r^{(n-2k)/2} < \sum_{n\geq Ck}\left(\frac{en}{k}\right)^k r^{(n-2k)/2} \\ &< \left(\left(\frac{eCk}{k}\right)^k r^{(Ck-2k)/2}\right)\sum_{n\geq Ck}\left(r^{1/3}\right)^{n-Ck} \\ &= \left(eCr^{(C-2)/2}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty}\left(r^{1/3}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-r^{1/3}}\left(eCr^{(C-2)/2}\right)^k.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{C\to\infty} eCr^{(C-2)/2} = 0$, eligiendo C suficientemente grande tendríamos que

$$eCr^{(C-2)/2} < \frac{1}{2}. \tag{3.32}$$

Enlazando las cotas (3.31) y (3.32), y eligiendo k suficientemente grande, concluiríamos

$$\sum_{n>Ck} \binom{n}{k} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| r^{n-k} < 1.$$

□

Después del estudio realizado, estamos en condiciones de enunciar y probar el teorema de la brecha de Fabry, comenzamos introduciendo la noción de serie de Fabry.

Definición 3.18. Sea $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$ se denomina **serie de Fabry** si verifica $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \infty$.

Notación. En la prueba del siguiente resultado denotaremos $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}$.

Teorema 3.19 (de la brecha de Fabry)**.** *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$ una serie de Fabry con radio de convergencia igual a la unidad. Entonces el disco $B(0,1)$ es el dominio de holomorfía de f, esto es, la circunferencia centrada en el origen de radio 1 es la frontera natural de f.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo suponiendo que existe $z_0 \in C(0,1)$ tal que f puede ser prolongada de manera analítica al punto z_0.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $z_0 = 1$. Entonces existen $\delta > 0$ y una función g holomorfa en $B(1, 3\pi\delta)$ que coincide con f en $B(0,1) \cap B(1, 3\pi\delta)$. Consideramos, como es habitual, $\hat{f}$ la prolongación holomorfa de f en $B(0,1) \cup B(1, 3\pi\delta)$ definida por:

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad z \in B(0,1), \\ \\ g(z) & \text{si} \quad z \in B(1, 3\pi\delta). \end{cases}$$

Fijamos $0 < r < 1$ y consideramos δ' verificando $|r - e(\delta/2)| = 1 - r + \delta'$. Observamos que $\delta' \geq 0$ pues, en efecto:

$$1 - r + \delta' = |r - e(\delta/2)| \geq |e(\delta/2)| - |r| = 1 - r \implies \delta' \geq 0.$$

A continuación, consideramos el conjunto

$$S := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq 1 - \delta'/2\} \cup \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-1| \leq 2\pi\delta\}.$$

Observamos que el conjunto S está contenido en el dominio de holomorfía de la función $\hat{f}$ (en la definición de dicho conjunto la primera componente está contenida en el disco unidad y la segunda en la bola abierta de centro 1 y radio $3\pi\delta$).

Como S es un conjunto compacto y $\hat{f}$ es continua en S, en virtud del teorema de Weierstrass, se sigue que $\mu = \max\{|\hat{f}\,(z)\,| \,:\, z \in S\} < \infty$.

Eligiendo δ suficientemente pequeño se tiene que el disco

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - re\,(\alpha)| \leq 1 - r + \delta'/3\}$$

está contenido en S siempre que $|\alpha| \leq \delta/2$.

En consecuencia, en virtud de las desigualdades de Cauchy para las derivadas, se sigue que

$$\left|\frac{\hat{f}^{(k)}\,(re\,(\alpha))}{k!}\right| \leq \frac{\mu}{(1 - r + \delta'/3)^k}$$

para $|\alpha| \leq \delta/3 < \delta/2$.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\hat{f}^{(k)}\,(z)}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{\hat{f}^{(n)}\,(0)}{n!} z^{n-k},$$

aplicando el Lema 3.20 se deduce que

$$\left|\frac{\hat{f}^{(k)}\,(re\,(\alpha))}{k!} - \sum_{n=0}^{Ck} \binom{n}{k} \frac{\hat{f}^{(n)}\,(0)}{n!} r^{n-k} e\,((n-k)\,\alpha)\right| < 1 \tag{3.33}$$

para k suficientemente grande, uniformemente en α.

Denotamos por $N\,(X)$ al número de enteros λ_n que son menores o iguales que X, esto es, $N\,(X)$ es el número de $m \leq X$ tal que $\hat{f}^{(m)}\,(0) \neq 0$. Luego, en virtud del Lema 3.19, se sigue que:

$$\begin{aligned}
&\max_{\alpha}\left|\sum_{n=0}^{Ck}\binom{n}{k}\frac{\hat{f}^{(n)}(0)}{n!}r^{n-k}e\left(\left(-k\right)\alpha\right)\right| \\
&\leq\left(\frac{2e}{\delta}\right)^{N(Ck)}\max_{|\alpha|<\delta/2}\left|\sum_{n=0}^{Ck}\binom{n}{k}\frac{\hat{f}^{(n)}(0)}{n!}r^{n-k}e\left(\left(n-k\right)\alpha\right)\right|.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Ahora bien, haciendo uso de las desigualdades (3.33) y (3.34), observamos que:

$$\begin{aligned}
\max_{\alpha}\left|\frac{\hat{f}^{(k)}(re(\alpha))}{k!}\right| &\leq \max_{\alpha}\left|\sum_{n=0}^{Ck}\binom{n}{k}\frac{\hat{f}^{(n)}(0)}{n!}r^{n-k}e\left(\left(n-k\right)\alpha\right)\right| \\
&+\max_{\alpha}\left|\frac{\hat{f}^{(k)}(re(\alpha))}{k!}-\sum_{n=0}^{Ck}\binom{n}{k}\frac{\hat{f}^{(n)}(0)}{n!}r^{n-k}e\left(\left(n-k\right)\alpha\right)\right| \\
&\leq 1+\left(\frac{2e}{\delta}\right)^{N(Ck)}\max_{|\alpha|<\delta/2}\left|\sum_{n=0}^{Ck}\binom{n}{k}\frac{\hat{f}^{(n)}(0)}{n!}r^{n-k}e\left(\left(n-k\right)\alpha\right)\right| \\
&\leq 1+\left(\frac{2e}{\delta}\right)^{N(Ck)}\left(\max_{|\alpha|<\delta/2}\left|\frac{\hat{f}^{(k)}(re(\alpha))}{k!}\right|\right. \\
&\left.+\max_{|\alpha|<\delta/2}\left|\frac{\hat{f}^{(k)}(re(\alpha))}{k!}-\sum_{n=0}^{Ck}\binom{n}{k}\frac{\hat{f}^{(n)}(0)}{n!}r^{n-k}e\left(\left(n-k\right)\alpha\right)\right|\right) \\
&\leq 1+\left(\frac{2e}{\delta}\right)^{N(Ck)}\left(1+\frac{\mu}{\left(1-r+\delta'/3\right)^{k}}\right).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que, por hipótesis, tenemos que $N(X)=o(X)$ cuando $X\to\infty$ observamos que

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-r+\delta'/4\right)^{k}\left[1+\left(\frac{2e}{\delta}\right)^{N(Ck)}\left(1+\frac{\mu}{\left(1-r+\delta'/3\right)^{k}}\right)\right]=0$$

pues

$$(1-r+\delta'/4)^k\left[1+\left(\frac{2e}{\delta}\right)^{N(Ck)}\left(1+\frac{\mu}{(1-r+\delta'/3)^k}\right)\right]$$

$$=\underbrace{(1-r+\delta'/4)^k}_{\xrightarrow{k\to\infty}0}+\left(\underbrace{\left(\frac{2e}{\delta}\right)^{\frac{N(Ck)}{k}}}_{\xrightarrow{k\to\infty}1}\right)^k\left(\underbrace{(1-r+\delta'/4)^k+\frac{\mu(1-r+\delta'/4)^k}{(1-r+\delta'/3)^k}}_{\xrightarrow{k\to\infty}0}\right).$$

Así, tenemos que

$$\left|\frac{\hat{f}^{(k)}(re(\alpha))}{k!}\right|\leq\frac{1}{(1-r+\delta'/4)^k} \tag{3.35}$$

para k suficientemente grande, uniformemente en α.

Considerando raíces k-ésimas y límites superiores cuando $k\to\infty$ en (3.35) deducimos que

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{\hat{f}^{(k)}(re(\alpha))}{k!}\right|}\leq\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{(1-r+\delta'/4)^k}}=\frac{1}{1-r+\delta'/4}$$

o, lo que es equivalente, la serie de potencias de $\hat{f}$ centrada en $re(\alpha)$ tiene radio de convergencia mayor o igual que $1-r+\delta'/4$ para todo α.

Teniendo en cuenta que la serie de $\hat{f}$ centrada en $re(\alpha)$ coincide con la de f y que r es arbitario en $(0,1)$, deducimos que la serie de potencias de f centrada en 0 tiene radio de convergencia mayor $1+\delta'/4$, lo cual contradice la hipótesis de que f tenga radio de convergencia igual a la unidad. En consecuencia, $C(0,1)$ es la frontera natural de f. □

Aunque no lo vamos a desarrollar, en el artículo publicado por P. Erdos [1] se recoge una prueba directa del recíproco del teorema de la brecha de Fabry que fue enunciado y probado Pólya en 1939, cuyo enunciado es:

"Sea $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales, para la cual $\lim_{n\to\infty} m_n/n=\infty$. Entonces existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{m_n}$ cuyo abierto de convergencia es la bola unidad y para la cual la circunferencia unidad es su frontera natural."

Capítulo 4

Teorema de Fatou-Hurwitz-Pólya

Se dedica este breve capítulo a la prueba de un resultado muy peculiar. Se trata de probar que, dada una serie de potencias con su disco de convergencia B, se tiene que el conjunto de las series que se obtienen a partir de ella cambiando los signos de parte de sus términos, y para las que B es su dominio de holomorfía, es equipotente con el de todos los posibles cambios de signos de los coeficientes, es decir, tiene la potencia del continuo.

4.1. Revisión de la convergencia normal

Empezamos recordando el concepto de convergencia normal de una serie.

Definición 4.1. Una serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, donde $f_n : X \to \mathbb{C}$, se denomina **normalmente convergente** en X si para cada punto $x \in X$ existe un entorno U tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|_U < \infty$.

A continuación enunciamos algunas propiedades relativas a la convergencia normal que nos resultan familiares.

- Toda serie normalmente convergente en X es localmente uniformemente convergente en X.
- Si f_n es continua en X para todo número natural n y $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalmente en X, entonces la función f es continua en X.

- Toda subserie de una serie que converge normalmente en X, también converge normalmente en X.

El resultado en el que centramos nuestra atención, pues se utiliza en el siguiente apartado para probar el teorema clave de este capítulo, es el siguiente.

Teorema 4.2 (Teorema de reordenación)**.** *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge normalmente en* X *hacia la función* f*, entonces para toda biyección,* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, la serie reordenada* $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\tau(n)}$ *también converge normalmente.*

Demostración. Por definición, cada punto $x \in X$ tiene un entorno U tal que $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|_U < \infty$. En virtud del teorema de reodenación para series de números complejos se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|f_{\tau(n)}\right|_U = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|_U < \infty.$$

Aplicando el mismo teorema se tiene que, para $x \in X$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{\tau(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x).$$

De lo anterior se concluye que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_{\tau(n)}$ converge normalmente a la función f en X. $\square$

A modo de generalización surge la siguiente proposición, que es consecuencia del resultado anterior.

Proposición 4.3. *Sea* $\mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ *una partición disjunta del conjunto de los números naturales. Supongamos que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge normalmente en* X *hacia la función* f*.*

Entonces la serie $\sum_{n\in N_k} f_n$ *converge normalmente en* X *hacia una función* $g_k : X \to \mathbb{C}$ *para todo número natural* k*, y la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ *converge normalmente en* X *hacia* f*.*

4.2. Teorema de Fatou-Hurwitz-Pólya

Estamos ya en condiciones de probar el teorema central de este capítulo.

Teorema 4.4 (de Fatou-Hurwitz-Pólya)**.** *Sea B el disco de convergencia de la serie de potencias definida por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Entonces, el conjunto de todas las funciones de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n z^n,$$

con $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, cuyo dominio de holomorfía es B tiene el cardinal del continuo, esto es, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, $B = B(0,1)$. En virtud de la fórmula de Cauchy-Hadamard, se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Ahora bien, consideramos una subserie $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m_n} z^{m_n}$ de f verificando

- $m_{n+1} > 2m_n$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m_n]{|a_{m_n}|} = 1$.

En estas condiciones, es evidente que h se trata de una serie lagunar de Hadamard con radio de convergencia igual a la unidad. Luego, en virtud del teorema de la brecha de Hadamard, sabemos que $B(0,1)$ es el dominio de holomorfía de h y, además, la serie h converge normalmente en $B(0,1)$.

A continuación, a partir de la serie $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m_n} z^{m_n}$ construimos una infinidad de series h_k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, holomorfas en $B(0,1)$ de manera que:

- Toda serie h_k es infinita.
- Cada término $a_{m_n} z^{m_n}$ aparece únicamente en una de las series h_k.

Esto es, realizamos una partición del conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$, de manera que todos los conjuntos de la misma sean infinitos y disjuntos dos a dos, así tenemos

$$\mathbb{N} \cup \{0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k \quad \text{y} \quad h_k = \sum_{n\in N_k} a_{m_n} z^{m_n},$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De esta manera, en virtud de la Proposición 4.3, tenemos que $h = h_0 + h_1 + \ldots$ en $B(0,1)$.

Consideramos $g := f - h$ y asignamos a cada sucesión $\eta : \mathbb{N} \to \{-1, +1\}$, $n \to \eta_n$, la serie

$$f_\eta := g + \eta_0 h_0 + \eta_1 h_1 + \ldots + \eta_n h_n + \ldots$$

que resulta ser holomorfa en la bola unidad. Además, la serie de Taylor centrada en 0 para cada función f_η es de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n z^n$$

donde $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Llegados a este punto basta con probar que, a lo sumo existe una infinidad numerable de funciones f_η que no tienen el conjunto $B(0,1)$ como dominio de holomorfía. En ese caso, el conjunto de todas las funciones de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n z^n$ donde $\varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ cuyo dominio de holomorfía es $B(0,1)$ tiene el cardinal del continuo.

Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que lo anterior no es cierto. Esto es, supongamos que existe un conjunto no numerable de sucesiones $\delta = \{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que cada función f_δ puede ser extendida de manera holomorfa a una raíz de la unidad (recordamos que el conjunto de raíces de la unidad es denso en la cirunferencia unidad).

Del hecho de que el conjunto de las raíces de la unidad sea numerable, se deduce que existen dos sucesiones distintas δ y δ' de manera que las funciones f_δ y $f_{\delta'}$ pueden ser prolongadas analíticamente a la misma raíz de la unidad. Entonces la función

$$f_\delta - f_{\delta'} = \alpha_0 h_0 + \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n + \cdots$$

donde $\alpha_k = \delta_k - \delta'_k \in \{-2, 0, +2\}$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, no tiene el disco unidad como dominio de holomorfía.

Sin embargo, sabemos que no todos los α_k se anulan pues, por hipótesis, las sucesiones δ y δ' son distintas y, por construcción, las series h_n son infinitas. Entonces la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ de la función $f_\delta - f_{\delta'}$ centrada en 0 es una serie lagunar de Hadamard. Además, sabemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m_n]{|a_{m_n}|} = 1$ y, en consecuencia del teorema de la brecha de Hadamard, se deduce que $B(0,1)$ es el dominio de holomorfía de $f_\delta - f'_{\delta'}$ lo cual nos conduce a una contradicción. $\square$

Capítulo 5

Una extensión del Teorema de Szegö

Trabajaremos a continuación con series de potencias que tienen tan sólo una cantidad finita de coeficientes distintos. El objetivo fundamental de este capítulo es demostrar que para la correspondiente función suma f, o bien la circunferencia unidad se trata de su frontera natural, o bien admite una prolongación analítica en forma de función racional con polos en las raíces de la unidad. Esto es lo que se recoge en el Teorema de Szegö, resultado en el que centraremos nuestra atención.

En el primer apartado se introduce la notación que se utilizará a lo largo del capítulo, y además, se presentan dos resultados auxiliares. El primero de ellos versa sobre aproximación de funciones, y para su prueba resulta crucial la teoría de aproximación de Runge que se ha presentado en el Apéndice D. Además, se presenta una variante del lema de M. Riesz (Lema 2.4), resultado que fue estudiado en el segundo capítulo.

Teniendo en cuenta los dos resultados previos, el segundo apartado se centra en demostrar un lema que será utilizado en la siguiente sección para probar una proposición de la que se deduce el teorema de Szegö.

En el tercer apartado se motiva el desarrollo del teorema clave de este capítulo mediante una analogía con las series geométricas y lagunares de Hadamard. Una vez conocido el teorema de Szegö, en la última sección se presenta una interesante aplicación del mismo, en la cual se obtiene una caracterización para las raíces de la unidad.

5.1. Preliminares

Fijamos números reales ϕ, ψ, s verificando $0 < \psi - \phi < 2\pi$ y $s > 1$, y consideramos una variable $\delta \in [0, 1)$. Denotamos por G_δ al dominio estrellado centrado en el origen cuya frontera $\Gamma(\delta)$ está formada por dos arcos circulares concéntricos, γ_1 y γ_3, y dos segmentos γ_2 y γ_4 que conectan los puntos finales de los distintos arcos. A continuación, presentamos un parametrización de la frontera $\Gamma(\delta)$:

$$\Gamma(\delta) = \begin{cases} \gamma_1(t) = se^{it} & \text{si} \quad \phi \leq t \leq \psi, \\ \gamma_2(t) = te^{i\psi} & \text{si} \quad 1 - \delta \leq t \leq s, \\ \gamma_3(t) = (1 - \delta) e^{it} & \text{si} \quad \psi \leq t \leq 2\pi + \phi, \\ \gamma_4(t) = te^{i\phi} & \text{si} \quad 1 - \delta \leq t \leq s. \end{cases}$$

En la Figura 5.1 se representa un posible dominio G_δ con su frontera $\Gamma(\delta)$ orientada de acuerdo a la parametrización expuesta.

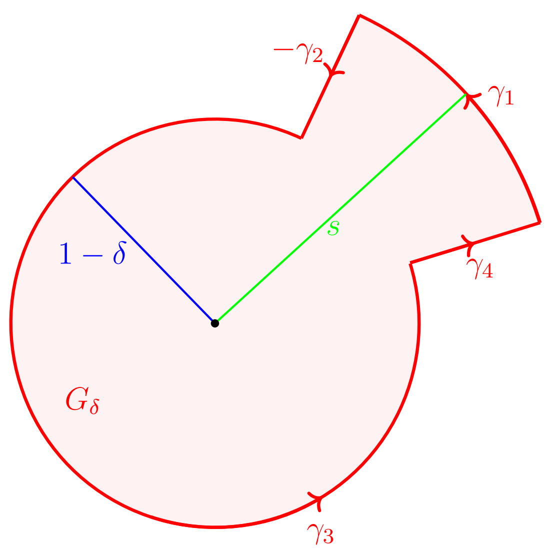

Figura 5.1: Dominio G_δ y frontera $\Gamma(\delta)$.

Se observa que, al hacer tender δ hacia 0, la bola centrada en 0 y encerrada por $\Gamma(\delta)$ se expande y tiende hacia $B(0,1)$.

A continuación, pasamos a introducir dos resultados auxiliares que nos serán de gran ayuda para posteriormente realizar la demostración del Lema 5.3 que, como se ha adelantado en la introducción, resulta de vital importancia para probar el teorema clave de este quinto capítulo.

Teorema 5.1 (de aproximación)**.** *Existe un número real $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta > 0$, existe una función (que depende del η considerado)*

$$R(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_{q-1}}{z^{q-1}} + \frac{1}{z^q}, \quad q \in \mathbb{N},$$

de manera que $|R|_{\Gamma(\delta)} \leq \eta$ para todo δ con $0 \leq \delta \leq \delta_0$.

Demostración. Como $\Gamma(0) \cap C(0,1)$ es un conjunto compacto distinto de la circunferencia unidad entonces, aplicando el Corolario D.11, existe un entorno U de $\Gamma(0) \cap C(0,1)$ y una función

$$Q(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{z^{k-1}} + \frac{1}{z^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

de manera que $|Q|_U < 1$.

A continuación, consideramos $r > 1$ de forma que $\Gamma(0) \cap B(0,r) \subset U$. Además, fijamos $l \in \mathbb{N}$ tal que para $\tilde{Q}(z) := z^{-l}Q(z)$ se verifique $|\tilde{Q}(z)| < 1$ para todo $z \in \Gamma(0)$ con $|z| \geq r$. Así tenemos $|\tilde{Q}|_{\Gamma(0)} < 1$.

Ahora bien, sea V un entorno de $\Gamma(0)$ con $|\tilde{Q}|_V < 1$. Para todo $\eta > 0$ existe un número natural m tal que $|R|_V < \eta$ donde $R := \tilde{Q}^m$. Para concluir, basta con tomar $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeño de manera que $\Gamma(\delta) \subset V$ para todo $\delta \leq \delta_0$. □

Antes de seguir con el siguiente resultado auxiliar realizamos una pequeña observación.

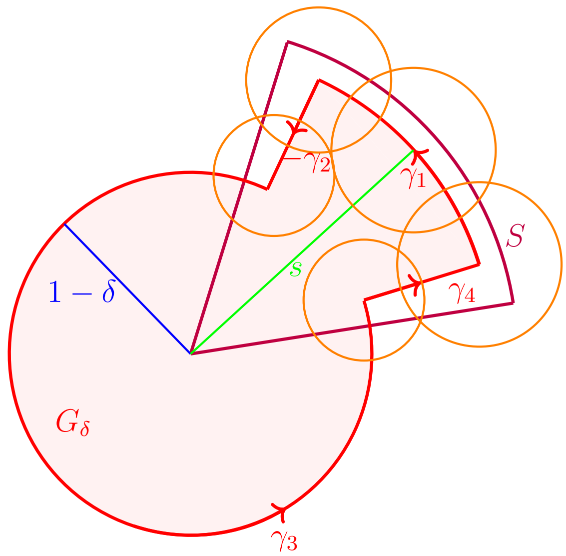

Figura 5.2: Existencia sector circular.

Observación 10. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias holomorfa en el dominio G_δ. Supongamos que f admite una prolongación analítica $\hat{f}$ en un entorno U de $G_\delta \cup \Gamma(\delta)$. Entonces, para cada $z \in \Gamma(\delta)$ existe $r_z > 0$ tal que $B(z, r_z) \subset U$. De esta manera, se tiene que

$$\Gamma(\delta) \subset \bigcup_{z \in \Gamma(\delta)} B(z, r_z) \subset U.$$

Como $\Gamma(\delta)$ se trata de un conjunto compacto, existe una cantidad finita de las anteriores bolas abiertas que lo siguen recubriendo. Si nos centramos únicamente en las bolas abiertas cuyos centros se encuentran sobre las curvas γ_1, γ_2 y γ_4, es evidente que tenemos un margen para elegir las dos rectas y el arco de un sector circular de manera que esté contenido en la unión del dominio G_δ y la cantidad finita de bolas abiertas mencionada (ver Figura 5.2, se puede ver también la analogía con la Proposición 2.2).

Ahora bien, en las condiciones anteriores, es evidente que el sector circular S se puede elegir de manera que su radio sea exactamente s. Así lo vamos a considerar en lo que resta de capítulo (ver Figura 5.3).

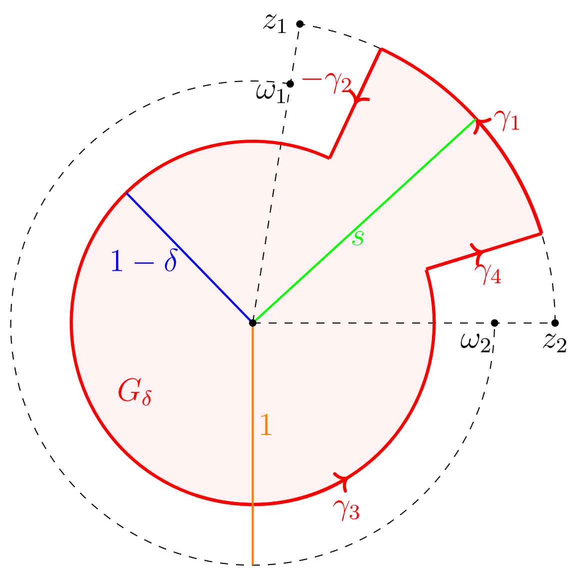

Figura 5.3: Sector circular. Notación.

Notación. En el contexto expuesto sobre el sector circular S, vamos a denotar:

- z_1 y z_2 a las esquinas del sector circular S,
- ω_1 y ω_2 a los puntos de intersección entre la circunferencia unidad y la frontera del sector circular S.

Lema 5.2 (Variante del lema de M.Riesz)**.** *Supongamos que la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene la sucesión de coeficientes acotada, y además, supongamos que existe $\delta > 0$ tal que f tiene una prologanción analítica $\hat{f}$ en un entorno de $G_\delta \cup \Gamma(\delta)$. Entonces, existe una constante $M > 0$ tal que*

$$\left| \frac{\hat{f}(z) - s_{n-1}(z)}{z^{n+1}} \right|_{\Gamma(\delta)} \leq M \tag{5.1}$$

para todo $n \geq 1$.

Demostración. Como se ha comentado en la observación previa, existe un sector circular S con vértice en el origen de coordenadas y esquinas z_1, z_2 tal que γ_1, γ_2 y γ_4 están contenidas en S y la prolongación analítica $\hat{f}$ es holomorfa en el mismo. En virtud del lema de M. Riesz (Lema 2.4), la sucesión de funciones

$$\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{\hat{f}(z) - s_n(z)}{z^{n+1}} (z - \omega_1)(z - \omega_2) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

está acotada en S.

Pongamos $A := \sup\{|a_n| \ : \ n \in \mathbb{N}\} < \infty$, entonces para todos los puntos $z \in \gamma_3$, teniendo en cuenta que

$$|z - \omega_i| \leq |z| + |\omega_i| = 1 - \delta + 1 \leq 2$$

para $i \in \{1, 2\}$, se deduce que

$$\begin{aligned} |g_n(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+1+k} z^k \right| |z - \omega_1| \, |z - \omega_2| \leq 4A \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \\ &= 4A \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \delta)^k = \frac{4A}{1 - (1 - \delta)} = \frac{4A}{\delta}. \end{aligned}$$

Con lo que queda probado que la sucesión $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada en $\Gamma(\delta)$.

Ahora bien, observamos que

$$\frac{\hat{f}(z) - s_{n-1}(z)}{z^{n+1}} = \frac{g_{n-1}(z)}{z(z - \omega_1)(z - \omega_2)}.$$

Del hecho de que la función $|z(z - \omega_1)(z - \omega_2)|$ tiene mínimo mayor que cero en $\Gamma(\delta)$, se concluye que la sucesión

$$\left\{ \frac{\hat{f}(z) - s_{n-1}(z)}{z^{n+1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

está acotada en $\Gamma(\delta)$ o, lo que es equivalente, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\left| \frac{\hat{f}(z) - s_{n-1}(z)}{z^{n+1}} \right|_{\Gamma(\delta)} \leq M$$

para todo $n \geq 1$, como se quería probar. $\square$

Terminamos esta sección con un resultado auxiliar.

Lema 5.3. *Sea* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *una serie de potencias con sucesión de coeficientes acotada y radio de convergencia igual a la unidad, cuyo dominio de holomorfía no es* $B(0,1)$. *Entonces, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un número natural* q *y números complejos* $c_0, c_1, \ldots, c_{q-1}$ *tales que*

$$|c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + c_2 a_{n+2} + \ldots + c_{q-1} a_{n+q-1} + a_{n+q}| \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq 1$.

Demostración. Consideramos δ_0 como en el Teorema 5.1.

Como, por hipótesis, $B(0,1)$ no es el dominio de holomorfía de f, existe un dominio G_δ (de la forma descrita anteriormente) de manera que f tiene una prolongación analítica $\hat{f}$ en un entorno de $G_\delta \cup \Gamma(\delta)$.

Sin pérdida de generalidad suponemos que $\delta < \delta_0$. Consideramos la constante M como en el Lema 5.2, y determinamos la función

$$R(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_{q-1}}{z^{q-1}} + \frac{1}{z^q}$$

como en el Teorema 5.1 de manera que, denotando por L a la longitud de la curva $\Gamma(\delta)$, verifique

$$|R|_{\Gamma(\delta)} \leq \frac{2\pi\varepsilon}{ML}. \tag{5.2}$$

En consecuencia, para todo número natural n se verifica la desigualdad

$$\left| R(z) \frac{\hat{f}(z) - s_{n-1}(z)}{z^{n+1}} \right|_{\Gamma(\delta)} \leq |R|_{\Gamma(\delta)} \left| \frac{\hat{f}(z) - s_{n-1}(z)}{z^{n+1}} \right|_{\Gamma(\delta)} \leq \frac{2\pi\varepsilon}{L}, \tag{5.3}$$

donde en la desigualdad se han combinado (5.1) y (5.2).

Ahora bien, observamos que

$$\begin{aligned} & R(z) \frac{\hat{f}(z) - s_{n-1}(z)}{z^{n+1}} \\ &= \left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_{q-1}}{z^{q-1}} + \frac{1}{z^q} \right) \left(\frac{a_n}{z} + a_{n+1} + a_{n+2} z + \cdots \right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

y, por tanto, de (5.4) resulta evidente que

$$\operatorname{Res}\left(R(z) \frac{\hat{f}(z) - s_{n-1}(z)}{z^{n+1}}, 0 \right) = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{q-1} a_{n+q-1} + a_{n+q},$$

donde denotamos por $\operatorname{Res}\left(\tilde{f}, \tilde{z}\right)$ al residuo de la función $\tilde{f}$ en el punto $\tilde{z}$.

Teniendo en cuenta que la función con la que estamos trabajando es holomorfa en G_δ, y que $\Gamma(\delta)$ es una curva simple y cerrada, estamos en condiciones de aplicar el teorema de los residuos, del que se deduce

$$c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + a_{n+q} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\delta)} R(\xi) \frac{\hat{f}(\xi) - s_{n-1}(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi. \tag{5.5}$$

Para finalizar, basta con tomar módulos en la igualdad (5.5) y combinar la clásica desigualdad para la integral de un módulo con (5.3) para concluir

$$\begin{aligned} |c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + a_{n+q}| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(\delta)} \left| R(\xi) \frac{\hat{f}(\xi) - s_{n-1}(\xi)}{\xi^{n+1}} \right| d\xi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} L \left| R(z) \frac{\hat{f}(z) - s_{n-1}(z)}{z^{n+1}} \right|_{\Gamma(\delta)} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} L \frac{2\pi\varepsilon}{L} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

5.2. Teorema de Szegö

Las series geométricas de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} (z^m)^n$ (donde $m \geq 1$) y las series lagunares de Hadamard $\sum_{n=0}^{\infty} z^{m_n}$ tienen todas radio de convergencia igual a 1. Sin embargo, tienen comportamientos muy distintos en la circunferencia unidad.

En el caso de las series lagunares de Hadamard, el teorema de la brecha de Hadamard nos asegura que el disco unidad se trata de su dominio de holomorfía, esto es, la circunferencia unidad resulta ser su frontera natural.

Por el contrario, en el caso de las series geométricas, sabemos que pueden ser prolongadas de manera analítica a una función racional holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^m = 1\}$. Es bien conocido que dicha prolongación holomorfa es la suma de la serie, que viene dada por la siguiente función

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z^m)^n = \frac{1}{1 - z^m}.$$

En el caso de series de potencias que tienen sólo un número finito de coeficientes distintos se observa una cierta analogía en cuanto a que, o bien el dominio de holomorfía es el disco unidad, o bien existe una prolongación racional holomorfa de la correspondiente serie (esto es lo que se expone en el teorema de Szegö). Antes de pasar al estudio del teorema principal, introducimos un resultado previo que nos facilitará en gran medida la prueba del mismo.

Lema 5.4. *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias con sólo una cantidad finita de coeficientes distintos. Si $B(0,1)$ no es el dominio de holomorfía de f, entonces existen índices λ y μ con $\lambda < \mu$ verificando $a_{\lambda+j} = a_{\mu+j}$ para todo número natural j.*

Demostración. Separamos la prueba en dos casos.

- Si f es un polinomio sabemos que su dominio de holomorfía es $\mathbb{C}$ y, además sabemos que existe un índice N tal que $a_n = 0$ para todo $n > N$. De esta manera, basta tomar números naturales λ y μ tales que $\lambda > \mu > N$ y, en consecuencia tenemos $a_{\lambda+j} = 0 = a_{\mu+j}$ para todo número natural j.

- Si f no es un polinomio, denotemos por $d_1, d_2, \ldots, d_k$ a los distintos números complejos que aparecen en la sucesión de coeficientes de la serie de potencias que define f.

  Para $k = 1$ es evidente, pues la sucesión de coeficientes de la serie se trata de una sucesión constante, denotemos la constante por a. Entonces, para todo par de índices $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ con $\lambda < \mu$ se tiene que $a_{\lambda+j} = a = a_{\mu+j}$ para todo número natural j.

  Supongamos pues, que $k \geq 2$ y denotemos $d := \text{mín}\{|d_i - d_j| \ : \ i \neq j\} > 0$. Ahora bien, como la sucesión de coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada, podemos aplicar el Lema 5.3 con $\varepsilon := d/3$. Luego existen un número natural q y números complejos $c_0, c_1, \ldots, c_{q-1}$ verificando

  $$|c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{q-1} a_{n+q-1} + a_{n+q}| \leq \frac{d}{3}, \tag{5.6}$$

  para todo número natural n.

  A continuación, consideremos todas las q-uplas $(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+q-1})$ donde $n \in \mathbb{N}$. Dado que existe un número finito de q-uplas que pueden ser formadas con k números distintos (concretamente k^q) entonces, existen números naturales λ y μ con $\lambda < \mu$ tales que

$$(a_\lambda, a_{\lambda+1}, \ldots, a_{\lambda+q-1}) = (a_\mu, a_{\mu+1}, \ldots, a_{\mu+q-1}).$$

Teniendo en cuenta que se verifica $a_{\lambda+j} = a_{\mu+j}$ para $0 \le j < q$, se sigue que

$$\begin{aligned} |a_{\lambda+q} - a_{\mu+q}| &= \left|\sum_{m=0}^{q-1} c_m a_{\lambda+m} + a_{\lambda+q} - \left(\sum_{m=0}^{q-1} c_m a_{\mu+m} + a_{\mu+q}\right)\right| \\ &\le \left|\sum_{m=0}^{q-1} c_m a_{\lambda+m} + a_{\lambda+q}\right| + \left|\sum_{m=0}^{q-1} c_m a_{\mu+m} + a_{\mu+q}\right| \le \frac{2d}{3} < d, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es consecuencia de la desigualdad triangular y en la segunda estamos usando (5.6)

De la definición de d se deduce que necesariamente $|a_{\lambda+q} - a_{\mu+q}| = 0$, lo cual implica $a_{\lambda+q} = a_{\mu+q}$ y, en consecuencia, se tiene que

$$(a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \ldots, a_{\lambda+q}) = (a_{\mu+1}, a_{\mu+2}, \ldots, a_{\mu+q}).$$

Razonando de manera análoga, se deduciría que $a_{\lambda+q+1} = a_{\mu+q+1}$. De esta manera, puede probarse por inducción que $a_{\lambda+j} = a_{\mu+j}$ para todo número natural j, lo cual concluye la prueba.

$\square$

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema principal de este último capítulo.

Teorema 5.5 (de Szegö). *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias con sólo una cantidad finita de coeficientes distintos. Entonces, o bien $B(0,1)$ es el dominio de holomorfía de f, o bien f puede ser prolongada analíticamente a una función racional*

$$\hat{f}(z) = \frac{p(z)}{1 - z^k}$$

donde $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ y k es un número natural.

Demostración. Suponemos que f no es un polinomio (si lo fuera, f se trataría de una función entera y no hay estudio que hacer), entonces se tiene que $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ y, en consecuencia, la serie tiene radio de convergencia igual a la unidad.

Si $B(0,1)$ no fuera el dominio de holomorfía de f, en virtud del lema inmediatamente anterior sabemos que existen índices λ y μ con $\lambda < \mu$ verificando $a_{\lambda+j} = a_{\mu+j}$ para todo número natural j.

En estas condiciones, considerando los polinomios

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\lambda-1} a_n z^n \quad \text{y} \quad Q(z) = \sum_{n=\lambda}^{\mu-1} a_n z^n$$

se sigue que f puede escribirse como

$$f(z) = P(z) + Q(z) z^{\mu-\lambda} + Q(z) z^{2(\mu-\lambda)} + \ldots = P(z) + \frac{Q(z)}{1 - z^{\mu-\lambda}}$$

para $z \in B(0,1)$.

Ahora bien, denotando por $p(z) := P(z)\left(1 - z^{\mu-\lambda}\right) + Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, la función definida por

$$\hat{f}(z) = \frac{p(z)}{1 - z^{\mu-\lambda}}$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z^{\mu-\lambda} = 1\}$ y, en consecuencia, se trata de una prolongación racional analítica de f. □

5.3. Una aplicación del Teorema de Szegö

Teorema 5.6 (de Fatou)**.** *Sea R una función racional con las siguientes propiedades:*

(1) R es holomorfa en $B(0,1)$ y tiene exactamente k polos en $C(0,1)$, todos de primer orden ($k \geq 1$).

(2) El conjunto $\{a_0, a_1, \ldots\}$ de coeficientes de la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de la función R centrada en el origen no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$.

En estas condiciones, la función R puede ser escrita como

$$R(z) = \frac{P(z)}{1 - z^k},$$

donde P es un polinomio de coeficientes complejos.

Demostración. Suponemos que $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_k^{-1} \in C(0,1)$ son los polos de la función R en $C(0,1)$, entonces se verifica la ecuación:

$$R(z) = \frac{B_1}{1 - z\lambda_1} + \frac{B_2}{1 - z\lambda_2} + \cdots + \frac{B_k}{1 - z\lambda_k} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

donde la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ tiene radio de convergencia mayor que la unidad. Esto implica que dicha serie es holomorfa en el punto $z = 1$ y, en consecuencia, se tiene que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Además, teniendo en cuenta que para $i = 1, \ldots, k$ se tiene que

$$\frac{1}{1 - z\lambda_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_i^n z^n,$$

se deduce que los coeficientes de la serie de Taylor de R en 0 vienen dados por:

$$a_n = B_1\lambda_1^n + B_2\lambda_2^n + \cdots + B_k\lambda_k^n + b_n. \tag{5.7}$$

Ahora bien, tomando módulos en la ecuación (5.7) y haciendo uso de la desigualdad triangular se tiene que

$$|a_n| \leq |B_1| + |B_2| + \cdots + |B_k| + |b_n|, \tag{5.8}$$

donde hemos tenido en cuenta que $|\lambda_i| = 1$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

Combinando la desigualdad (5.8) junto con el hecho de que la sucesión $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada, se concluye que el conjunto $A := \{a_0, a_1, \ldots\}$ es acotado. Sabemos que, por hipótesis, el conjunto A no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$, y como además hemos probado que es acotado, necesariamente se trata de un conjunto finito.

En estas condiciones podemos aplicar el teorema de Szegö que nos asegura que R puede ser prolongada analíticamente a una función racional

$$\hat{R}(z) = \frac{p(z)}{1 - z^k}$$

donde $p(z) \in \mathbb{C}[z]$. De esta manera, en virtud del principio de Identidad, sabemos que la función racional R puede ser escrita como

$$R(z) = \frac{p(z)}{1 - z^k}$$

en $B(0,1)$. $\square$

Del teorema previo se deduce una interesante caracterización de las raíces de la unidad. Antes de introducirla realizamos un pequeño recordatorio sobre la noción de separabilidad de polinomios y una observación que nos simplificará la prueba.

Recordamos, de la asignatura de Ecuaciones Algebraicas, que si K es un cuerpo y $P(X) \in K[X]$ es un polinomio irreducible sobre K, se dice que $P(X)$ es **separable sobre *K*** si en un cuerpo de descomposición L de $P(X)$ sobre K tenemos $P(X) = a(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_r)$ donde $a \in K$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in L$ con $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$.

Además, también estudiamos el siguiente criterio de separabiliad.

Proposición 5.7. *Sea K un cuerpo y $P(X) \in K[X]$ un polinomio irreducible sobre K. Denotando por $char(K)$ a la característica de K:*

(i) Si $char(K) = 0$ entonces $P(X)$ es separable.

(ii) Si $char(K) = p > 0$ entonces $P(X)$ es inseparable si y sólo si existe $Q(X) \in K[X]$ con $P(X) = Q(X^p)$.

Observación 11. Si consideramos un polinomio $Q(z)$ irreducible sobre $\mathbb{Z}$, que sabemos que también es irreducible sobre $\mathbb{Q}$, que es un cuerpo. Tenemos que $Q(z)$ es irreducible sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ que tiene característica igual a 0. En consecuencia, del apartado (i) del resultado inmediatamente anterior sabemos que $P(X)$ es separable, y por tanto, tiene todas sus raíces distintas dos a dos.

Introducimos a continuación el resultado consecuente de interés.

Corolario 5.8 (Teorema de Kronecker)**.** *Si los ceros del polinomio*

$$Q(z) = z^n + q_1 z^{n-1} + q_2 z^{n-2} + \dots + q_{n-1} z + q_n \in \mathbb{Z}[z],$$

donde $n \geq 1$, tienen todos valor absoluto igual a la unidad, entonces todos los ceros de Q son raíces de la unidad.

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que Q es irreducible en $\mathbb{Z}$. Entonces, de la observación anterior, sabemos que Q sólo tiene raíces de primer orden y la función racional $1/Q$ sólo tiene polos de primer orden que están contenidos en la circunferencia unidad.

Como q_n es el producto de todos los ceros del polinomio Q se tiene que $|q_n| = 1$ y, teniendo en cuenta que se trata de un número entero, se sigue que $q_n \in \{-1, +1\}$. De esta manera, la serie de Taylor de $1/Q$ centrada en el origen tiene coeficientes enteros (basta con hacer la división formal $1/Q$).

En estas condiciones podemos aplicar el teorema de Fatou y concluir que existe un polinomio $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ de manera que

$$\frac{1}{Q(z)} = \frac{P(z)}{1 - z^k}$$

o, equivalentemente,

$$1 - z^k = P(z)\, Q(z).$$

Observación 12. Suponer que Q es irreducible en $\mathbb{Z}$ no es un problema puesto que si no lo fuera, existirían $Q_1, \ldots, Q_r \in \mathbb{Z}[X]$ irreducibles en $\mathbb{Z}$ y mónicos, de modo que $Q(X) = Q_1(X) \ldots Q_r(X)$, y bastaría con realizar la demostración anterior para cada uno de ellos obteniéndose para cada $i = 1, \ldots, r$:

$$\frac{1}{Q_i(z)} = \frac{P_i(z)}{1 - z^{k_i}},$$

y en consecuencia,

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 - z^{k_i}\right) = Q(z) \prod_{i=1}^{r} P_i(z).$$

De donde, trivialmente se deduce que si $Q(\alpha) = 0$, entonces α es una raíz de la unidad.

Así se concluye que si $Q(\alpha) = 0$, entonces $\alpha^k = 1$, como se quería probar. □

En cursos de Álgebra este resultado suele ser formulado de la siguiente manera:

“Un entero algebraico distinto de 0 que, junto con todos sus conjugados, tiene valor absoluto menor o igual que 1 es una raíz de la unidad. ”

Apéndice A

Convergencia de series funcionales

En este apéndice, vamos a introducir el concepto de convergencia por continuidad de una sucesión de funciones y probar que resulta equivalente a la convergencia uniforme en los compactos cuando dicha sucesión converge a una función continua.

Sea X un espacio métrico. En primer lugar, introducimos el concepto de sucesión (de funciones) continuamente convergente.

Definición A.1. Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (con $f_n : X \to \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$) se dice **continuamente convergente en X** si, para toda sucesión convergente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, el límite $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)$ existe en $\mathbb{C}$.

Observación 13. En particular, usando sucesiones constantes, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en X a la función $f : X \to \mathbb{C}$, donde $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Una vez introducida la noción de convergencia por continuidad exponemos dos propiedades básicas, bien conocidas para límites de sucesiones.

Lema A.2. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuamente convergente, con límite puntual f. Si dos sucesiones $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{x''_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen hacia el mismo límite x en X, entonces las sucesiones $\{f_n(x'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f_n(x''_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tienen el mismo límite en $\mathbb{C}$, que es $f(x)$.*

Demostración. Definiendo la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ como $x_{2n} = x'_{2n}$ y $x_{2n+1} = x''_{2n+1}$, sabemos que $x_n \to x$.

Ahora, por la convergencia por continuidad, tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$. Luego tomando subsucesiones también tenemos:

$$f_{2n}(x_{2n}) \to f(x) \implies f_{2n}(x'_{2n}) \to f(x) \implies f_n(x'_n) \to f(x)$$

$$f_{2n+1}(x_{2n+1}) \to f(x) \implies f_{2n+1}\left(x''_{2n+1}\right) \to f(x) \implies f_n(x''_n) \to f(x)$$

Lo que prueba que $\{f_n(x'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f_n(x''_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tienen el mismo límite en $\mathbb{C}$. $\square$

Lema A.3. *Para toda subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene que*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x).$$

Demostración. En este caso definimos la siguiente sucesión

$$x'_m = \begin{cases} x_1 & si \quad 1 \leq m \leq n_1 \\ \\ x_k & si \quad n_{k-1} < m \leq n_k \end{cases}$$

Por tanto, $\lim\limits_{m\to\infty} x'_m = x$ y, como consecuencia, tenemos $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x'_m) = f(x)$ lo que implica que $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}\left(x'_{n_k}\right) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x)$. $\square$

A continuación, pasamos a probar que la función límite de una sucesión de funciones continuamente convergente resulta ser continua, lo cual sabemos que no es (siempre) cierto en el caso de convergencia uniforme.

Proposición A.4. *Si la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge continuamente en X hacia la función f, entonces f es continua (incluso en el caso de que las funciones f_n no sean todas ellas continuas).*

Demostración. Probaremos la continuidad secuencial de f. Tomamos $x \in X$ y cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ que converja hacia x.

Sea $\varepsilon > 0$, en virtud de la convergencia puntual, existe un subsucesión estrictamente creciente de índices de manera que

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{A.1}$$

En virtud del Lema A.3 sabemos que $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = f(x)$, por tanto, existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k > k_\varepsilon$, se verifica

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{A.2}$$

En consecuencia, aplicando la clásica desigualdad triangular y combinando las desigualdades (A.1) y (A.2) se deduce que

$$|f(x_k) - f(x)| \leq |f(x_k) - f_{n_k}(x_k)| + |f_{n_k}(x_k) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $k \geq k_\varepsilon$, lo cual prueba la continuidad de f en x. Dado que x es arbitario en X, la función f es continua en X como queríamos demostrar. □

Ahora estamos en condiciones de mostrar el resultado de importacia, anticipado en el primer párrafo de este apéndice.

Teorema A.5. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones, con $f_n : X \to \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en los conjuntos compactos de X hacia una función $f \in \mathcal{C}(X)$.*
2. *La sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es continuamente convergente en X.*

Demostración. Vamos a probar ambas implicaciones.

($1 \implies 2$) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en X y pongamos $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

El conjunto $L = \{x, x_1, x_2, \dots\}$ es un conjunto compacto en X luego, por hipótesis, tenemos $\lim_{n\to\infty} |f - f_n|_L = 0$. Ahora bien, como consecuencia, la sucesión $\{f(x_n) - f_n(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en $\mathbb{C}$.

Dado que la función f es continua, en virtud del criterio secuencial de la continuidad, tenemos que la sucesión $\{f(x) - f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ también converge a cero.

La sucesión resultante de sumar estas dos sucesiones que convergen a cero, $\{f(x) - f_n(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, converge también hacia cero. Equivalentemente, tenemos $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x) \in \mathbb{C}$, por tanto, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es continuamente convergente en X.

(2 $\implies$ 1) Sea f la función límite, en virtud de la proposición anterior, sabemos que $f \in \mathcal{C}(X)$.

Supongamos que existe un conjunto compacto $K \subset X$ verificando

$$\lim_{n\to\infty} |f - f_n|_K \neq 0.$$

Esto significa que existen un $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{f - f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tales que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$|f - f_{n_k}|_K > \varepsilon,$$

de manera equivalente, esto quiere decir que existen puntos $x_{n_k} \in K$ tales que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se verifica

$$|f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k})| > \varepsilon.$$

Ahora bien, como K es compacto, podemos suponer que $x_{n_k} \to x$ (si fuese necesario, tomaríamos una subsucesión adecuada). Entonces, en virtud de la continuidad de f, se deduce que

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x). \tag{A.3}$$

Por otro lado, por hipótesis se tiene

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_{n_k}) = f(x). \tag{A.4}$$

Teniendo en cuenta las igualdades (A.3) y (A.4), es evindente que la sucesión resta resultante converge a cero, esto es, $\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) = 0$ lo que contradice lo supuesto. $\square$

Apéndice B

Teorema de Vitali

El objetivo fundamental de este apéndice es demostrar el teorema de Vitali, que requerimos para poder probar el teorema de convergencia de Fatou y M. Riesz y el teorema de convergencia de Ostrowski .

Empezamos introduciendo los conceptos de familia de funciones uniformemente acotada y localmente uniformemente acotada; de los cuales derivan los respectivos para sucesiones de funciones. Para ello trabajamos en un dominio $D \subset \mathbb{C}$, esto es, un conjunto abierto y conexo.

Definición B.1. Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ se dice **uniformemente acotada** en un subconjunto $A \subset D$ si existe un número real $M > 0$ tal que $|f|_A := \sup_{z \in A} |f(z)| \leq M$ para toda función $f \in \mathcal{F}$.

Definición B.2. Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ se dice **localmente uniformemente acotada** en D si cada punto $z \in D$ tiene un entorno $U \subset D$ tal que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en U. Esto ocurre si, y sólo si, la familia $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en todos los conjuntos compactos contenidos en D. En particular, una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(B)$ en un disco $B = B(c, r)$, $r > 0$, es localmente acotada en B si, y solo si, es uniformemente acotada en todos los discos $B(c, \rho)$ con $\rho < r$.

Definición B.3. Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $f_n \in \mathcal{H}(D)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice **(localmente) uniformemente acotada** en D si la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es (localmente) uniformemente acotada.

A continuación, enunciamos dos lemas que serán realmente útiles para probar el teorema de Montel, del que derivan el criterio de convergencia de Montel y el teorema de Vitali como consecuencias casi inmediatas.

Lema B.4. *Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ una familia localmente uniformemente acotada en D. Entonces, para todo punto $c \in D$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un disco $B \subset D$ centrado en c tal que $|f(w) - f(z)| \leq \varepsilon$ para toda función $f \in \mathcal{F}$ y para todos $w, z \in B$, es decir, $\mathcal{F}$ es localmente equicontinua en D.*

Demostración. Sean $c \in D$ y $\varepsilon > 0$. Elegimos $r > 0$ suficientemente pequeño de manera que $B(c, 2r) \subset D$, y de modo que $\mathcal{F}$ sea uniformemente acotada en $\overline{B}(c, 2r)$. Entonces $\sup\{|f|_{\overline{B}(c,2r)} : f \in \mathcal{F}\} = M_0 < \infty$.

Sean $w, z \in B(c, r) \subset B(c, 2r)$, en virtud de la fórmula integral de Cauchy, para $f \in \mathcal{F}$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
f(w) - f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(c,2r)} \frac{f(\xi)}{\xi - w} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(c,2r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(c,2r)} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - w} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(c,2r)} f(\xi) \frac{w - z}{(\xi - w)(\xi - z)} d\xi \\
&= \frac{w - z}{2\pi i} \int_{C(c,2r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - w)(\xi - z)} d\xi.
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

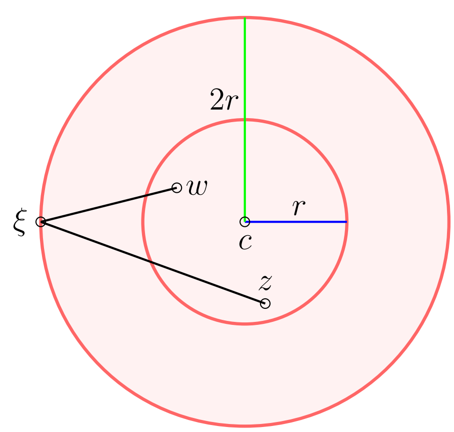

Figura B.1: Esquema gráfico.

Por tanto, como $w, z \in B(c, r)$ y $\xi \in C(c, 2r)$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
&|(\xi - w)(\xi - z)| \\
&= |\xi - w| \cdot |\xi - z| \\
&\geq r \cdot r = r^2
\end{aligned}
$$

luego, tomando módulos en (B.1), deducimos:

$$\begin{aligned}
|f(w)-f(z)| &\leq \frac{|w-z|}{2\pi}\int_{C(c,2r)} \frac{|f(\xi)|}{|(\xi-w)(\xi-z)|}d\xi \\
&\leq \frac{|w-z|}{2\pi}\frac{\sup\{|f(\xi)| \,:\, \xi \in C(c,2r)\}}{r^2}2\pi(2r) \\
&\leq |w-z|\frac{2}{r}M_0.
\end{aligned}$$

Pongamos $M = 2M_0/r$. Suponiendo que $M > 0$ basta con tomar $\delta = \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{2M}, r\}$ y considerar $B = B(c,\delta)$, pues para todos $w, z \in B(c,\delta) \subset B(c,r) \subset B(c,2r)$ se tiene

$$\begin{aligned}
|f(w)-f(z)| &\leq |w-z|\cdot M = |w-c+c-z|M \\
&\leq |w-c|M + |c-z|M \leq \frac{\varepsilon}{2M}M + \frac{\varepsilon}{2M}M = \varepsilon,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

Nota. Si $M = 0$, entonces $\sup\{|f|_{B(c,2r)} \,:\, f \in \mathcal{F}\} = 0$ lo que significa que la familia $\mathcal{F}$ está formada únicamente por la función nula. En este caso, el lema anterior es evidente.

La prueba del siguiente lema resulta muy sencilla haciendo uso de la propiedad de Bolzano-Weierstrass relativa a sucesiones complejas.

Lema B.5. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones, $f_n : D \to \mathbb{C}$, acotada en cada punto de D. Entonces para todo subconjunto numerable A de D existe una subsucesión de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente en A.*

Demostración. Sea $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ un subconjunto numerable de D.

Vamos a probar, por inducción completa, que para cada $l \in \mathbb{N}$ existe una subsucesión $\{f_{l,k}\}_{k=0}^{\infty}$ tal que

1. La sucesión $\{f_{l,k}\}_{k=0}^{\infty}$ converge en a_l.
2. La sucesión $\{f_{l,k}\}_{k=0}^{\infty}$ con $l \geq 1$, es una subsucesión de $\{f_{(l-1),k}\}_{k=0}^{\infty}$

Supongamos dadas las sucesiones $\{f_{j,k}\}_{k=0}^{\infty}$ para $j < l$, verificando las condiciones 1 y 2 anteriores.

Ahora bien, como $A \subset \mathbb{C}$ que posee la propiedad de Bolzano-Weierstrass, sabemos que, como la sucesión $\{f_{(l-1),k}\}_{k=0}^{\infty}$ es acotada en a_l por hipótesis, entonces existe una subsucesión $\{f_{l,k}\}_{k=0}^{\infty}$ de la sucesión $\{f_{(l-1),k}\}_{k=0}^{\infty}$ que converge en a_l, que es exactamente lo que queríamos probar. $\square$

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar y probar el Teorema de Montel que es el siguiente.

Teorema B.6 (de Montel)**.** *Cada sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ de funciones holomorfas y localmentente uniformemente acotadas en D tiene una subsucesión que converge uniformemente en los compactos de D.*

Demostración. Para empezar la demostración elegimos un conjunto numerable y denso $A \subset D$ (bastaría con elegir A como el conjunto de los números racionales contenidos en D, esto es, el conjunto de números complejos que tiene parte real y parte imaginaria racional contenido en D).

Dada una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ de funciones holomorfas y localmente uniformemente acotadas en D (por tanto también son holomorfas y localmente uniformemente acotadas en A), como A es numerable, en virtud del lema anterior sabemos que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ de $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge puntualmente en A.

A continuación, vamos a probar que $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de D. Para demostrarlo, basta con probar que la sucesión $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ verifica el criterio secuencial de la continuidad, esto es, $\lim f_{n_k}(z_{n_k})$ existe para cada sucesión $\{z_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ verificando $z_{n_k} \in D$ y $z_{n_k} \to z^* \in D$.

Sea $\varepsilon > 0$, en virtud del lema B.4, existe un disco $B \subset D$ centrado en z^* tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todos $\omega, z \in B$, se verifica

$$|f_{n_k}(\omega) - f_{n_k}(z)| \leq \varepsilon.$$

El hecho de que A sea denso en D nos garantiza que existe un punto $a \in A \cap B$. Además, como $\lim z_{n_k} = z^*$ existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $z_{n_k} \in B$ para todo $k \geq k_1$. La desigualdad

$$\begin{gathered} |f_{n_m}(z_{n_m}) - f_{n_l}(z_{n_l})| \\ \leq |f_{n_m}(z_{n_m}) - f_{n_m}(a)| + |f_{n_m}(a) - f_{n_l}(a)| + |f_{n_l}(a) - f_{n_l}(z_{n_l})| \end{gathered}$$

nos permite deducir que, para todos $m, l \geq k_1$, se tiene

$$|f_{n_m}(z_{n_m}) - f_{n_l}(z_{n_l})| \leq 2\varepsilon + |f_{n_m}(a) - f_{n_l}(a)|. \tag{B.2}$$

Además, dado que $\lim f_{n_l}(a)$ existe, entonces también existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m, l \geq k_2$, se verifica

$$|f_{n_m}(a) - f_{n_l}(a)| \leq \varepsilon. \tag{B.3}$$

Para concluir, enlazando lo obtenido en (B.2) y (B.3) se tiene

$$|f_{n_m}(z_{n_m}) - f_{n_l}(z_{n_l})| \leq 3\varepsilon,$$

para todos $m, l \geq \max\{k_1, k_2\}$, lo cual muestra que la sucesión $\{f_{n_k}(z_{n_k})\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y, por tanto, es una sucesión convergente. □

Teorema B.7 (Criterio de convergencia de Montel)**.** *Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas y localmente uniformemente acotada en D. Si toda subsucesión de $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge en los compactos de D, converge hacia $f \in \mathcal{H}(D)$, entonces $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge en los compactos del conjunto D hacia f.*

Demostración. Si $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ no converge en los compactos del conjunto D hacia $f \in \mathcal{H}(D)$. Esto significa que existe un subconjunto compacto K de D tal que $|f_n - f|_K$ no converge hacia 0. En consecuencia, existen $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ tales que $|f_{n_k} - f|_K > \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teniendo en cuenta que, por hipótesis, la sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es localmente uniformemente acotada en D, entonces también lo será la subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$.

Ahora dado que la sucesión $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ es de funciones holomorfas y localmente uniformemente acotadas en D sabemos, en virtud del teorema de Montel, que existe una subsucesión de $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$, digamos $\{f_{n_{k_l}}\}_{l=0}^{\infty}$, que converge uniformemente en los compactos de D.

Ahora bien, como $|f_{n_{k_l}} - f|_K \geq \varepsilon$ para todo $l \in \mathbb{N}$ (por ser subsucesión de $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$), entonces, f no puede ser el límite de dicha subsucesión, lo cual es absurdo. □

Teorema B.8 (de Vitali)**.** *Sea D un dominio en $\mathbb{C}$, y sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas y localmente uniformemente acotadas en D. Supongamos que el conjunto*

$$A := \{\omega \in D \ : \ \text{lím}\, f_n(\omega) \ \text{existe en } \mathbb{C}\}$$

tiene, al menos, un punto de acumulación en D. Entonces la sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge en los compactos de D.

Demostración. En virtud del criterio de convergencia de Montel basta con probar que todas las subsucesiones de $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ que convergen uniformemente en los compactos de D lo hacen hacia la misma función.

Ahora bien, supongamos que dos subsucesiones, digamos $\{f_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{f_{n_l}\}_{l=0}^{\infty}$, tienen funciones límite distintas (g y h respectivamente). Por hipótesis sabemos que las funciones g y h coinciden en A, pues si $a \in A$ tenemos

$$g(a) = \text{lím}\, f_{n_k}(a) = \text{lím}\, f_n(a) = \text{lím}\, f_{n_k}(a) = h(a).$$

Dado que $A \subset D$ es un conjunto que posee al menos un punto de acumulación, en virtud del Teorema de identidad, sabemos que como g y h son funciones holomorfas en D que coinciden en A entonces $g = h$ en D.

Lo que prueba que todas las subsucesiones de $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ que convergen uniformemente en los compactos de D tienen la misma función límite. $\square$

Apéndice C

Biholomorfía. Dominios de holomorfía. Aplicaciones finitas.

En este apéndice recogemos las definiciones y los resultados relativos a biholomorfía, dominios de holomorfía y aplicaciones finitas necesarios para realizar las pruebas de las proposiciones que requerimos para la demostración de la Construcción de Porter.

C.1. Aplicaciones biholomorfas

Definición C.1. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y sea f función holomorfa en D. Se dice que f es **biholomorfa** de D en D' si $D' := f(D)$ es un dominio y la aplicación $f : D \to D'$ tiene aplicación inversa, $f^{-1} : D' \to D$, holomorfa en D'.

Teorema C.2 (de la aplicación abierta)**.** *Sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y no localmente constante en el dominio D, entonces es una aplicación abierta.*

Demostración. Sea U un conjunto abierto de D y consideramos $c \in U$. Tenemos que probar que $f(U)$ contiene un disco dentrado en $f(c)$.
Como f no es constante en torno a c, existe un disco V centrado en c con $\overline{V} \subset U$ y $f(c) \notin f(\partial V)$.

Por lo tanto, el número $2\delta := \min\{|f(z) - f(c)| \ : \ z \in \partial V\}$ es positivo, luego $B(f(c), \delta) \subset f(V) \subset f(U)$. Lo que concluye la prueba. $\square$

Proposición C.3 (Criterio de biholomorfía)**.** *Sea D un dominio y sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función holomorfa e inyectiva. Entonces $D' := f(D)$ es un dominio en $\mathbb{C}$ y $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D$. Además, la aplicación $f : D \to D'$ es biholomorfa y la inversa satisface*

$$\left(f^{-1}\right)'(\omega) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(\omega)\right)}.$$

Demostración. Del hecho de que f sea inyectiva se deduce que f no es localmente constante, entonces, en virtud del teorema de la aplicación abierta, se sigue que f es una aplicación abierta y, en consecuencia, D' es un dominio. Además, también se deduce que la inversa $g := f^{-1} : D' \to D$ es continua, pues para todo conjunto abierto U de D se tiene que

$$\begin{aligned} g^{-1}(U) &= \{z \in D' \ : \ g(z) \in U\} = \{z \in D' \ : \ f^{-1}(z) \in U\} \\ &= \{z \in D' \ : \ z \in f(U)\} = f(U) \end{aligned}$$

puesto que $D' = f(D) \supset f(U)$ y sabemos que $f(U)$ es abierto en D'.

Como f es inyectiva, la derivada no puede anularse en ningún disco contenido en D pues, de acuerdo con el principio de identidad, el conjunto de los ceros de f' (denotémoslo por $Z(f')$) es un conjunto discreto y cerrado en D lo cual implica que $M := f(Z(f'))$ es un conjunto discreto y cerrado en D'.

Consideramos $d \in D' \setminus M$ y ponemos $c := f^{-1}(d)$. Tenemos

$$f(z) = f(c) + (z - c) f_1(z)$$

donde $f_1 : D \to \mathbb{C}$ es continua en c y $f_1(c) = f'(c) \neq 0$. Para $z = f^{-1}(\omega)$, $\omega \in D'$ se sigue que

$$\omega = f(c) + \left(f^{-1}(\omega) - c\right) f_1\left(f^{-1}(\omega)\right).$$

La función $q = f_1 \circ f^{-1}$ es continua en d y $q(d) = f'(c) \neq 0$. Luego podemos transformar la última ecuación en

$$f^{-1}(\omega) = f^{-1}(d) + (\omega - d)\frac{1}{q(\omega)}$$

para todo $\omega \in D'$ suficientemente "cerca" de d. De donde se deduce que f^{-1} es diferenciable en d y

$$\left(f^{-1}\right)'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(d)\right)}$$

para todo $d \in D' \setminus M$.

Ahora bien, tenemos que $f^{-1} \in \mathcal{H}(D' \setminus M) \cap \mathcal{C}(D')$, de donde se sigue que f^{-1} es holomorfa en D'. Además, la ecuación

$$\left(f^{-1}\right)'(d)\, f'\left(f^{-1}(d)\right) = 1$$

que se verifica en $D' \setminus M$ ahora se verifica en todo D' por continuidad luego, en particular, $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D$. □

Lema C.4 (de aproximación)**.** *Si B es un disco centrado en c contenido en D y f es holomorfa en D, entonces*

$$\left|\frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} - f'(c)\right| \leq |f' - f'(c)|_B$$

para todo $\omega, z \in B$ con $\omega \neq z$.

Demostración. En primer lugar, observamos que $f(\xi) - f'(c)\,\xi$ es una primitiva de $f'(\xi) - f'(c)$ en D, luego

$$f(\omega) - f(z) - f'(c)(\omega - z) = \int_z^\omega \left(f'(\xi) - f'(c)\right) d\xi. \tag{C.1}$$

Ahora bien, aplicando la clásica desigualdad para el valor absoluto de la integral se sigue que

$$\left|\int_z^\omega \left(f'(\xi) - f'(c)\right) d\xi\right| \leq |f' - f'(c)|_B\, |\omega - z|. \tag{C.2}$$

Combinando las desigualdades (C.1) y (C.2) se deduce que

$$\left|\frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} - f'(c)\right| \leq |f' - f'(c)|_B \tag{C.3}$$

para todo $\omega, z \in B$ con $\omega \neq z$, como queríamos concluir. □

Lema C.5. *Sean $f : D \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y $c \in D$ un punto tal que $f'(c) \neq 0$. Entonces exite un entorno U de c con la propiedad de que la restriccion $f|_U : U \to \mathbb{C}$ es inyectiva.*

Demostración. Como $f'(c) \neq 0$, de la continuidad de f' se deduce que existe $r > 0$ tal que $B(c, r) \subset D$ y $|f' - f'(c)|_B < |f'(c)|$.

Entonces, para $\omega, z \in B(c, r)$ con $\omega \neq z$ necesariamente se tiene que $f(\omega) \neq f(z)$ pues, en otro caso, del lema anterior se deduciría que $|f'(c)| < |f'(c)|$ lo cual es absurdo.

En consecuencia, denotando $U := B(c, r)$ tenemos que U es un entorno de c contenido en D tal que la aplicación $f : U \to \mathbb{C}$ es inyectiva, como se quería demostrar. $\square$

Definición C.6. Sea D un dominio en $\mathbb{C}$. Una aplicación holomorfa $f : D \to \mathbb{C}$ se denomina **localmente biholomorfa** en $c \in D$ si existe un entorno abierto U de c contenido en D tal que la restricción $f|_U : U \to f(U)$ es biholomorfa.

Proposición C.7. *Una aplicación holomorfa $f : D \to \mathbb{C}$ es localmente biholomorfa en $c \in D$ si, y sólo si, $f'(c) \neq 0$.*

Demostración.
($\Longrightarrow$) Suponemos que existe U abierto tal que $c \in U$ y $f : U \to f(U)$ es biholomorfa. Entonces, por definición, sabemos que la aplicación inversa $f^{-1} : f(U) \to U$ existe y es holomorfa en $f(U)$. Además, del teorema de la función inversa se sigue que

$$f(z) \cdot \left(f^{-1}\right)'(f(z)) = 1$$

para todo $z \in U$, luego es claro que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$; en particular, $f'(c) \neq 0$, como se quería probar.

($\Longleftarrow$) Suponemos $f'(c) \neq 0$. El Lema C.5 afirma la existencia de un entorno abierto U de c contenido en D tal que la aplicación $f_{|U} : U \to f(U)$ es inyectiva. Aplicando ahora el criterio de biholomorfía (Proposición C.3) se deduce que $f_{|U}$ es biholomorfa, como se quería demostrar. $\square$

C.2. Conjuntos frontera bien distribuidos

Definición C.8. Sea G un dominio en $\mathbb{C}$. Si b es un punto frontera de G, un disco $V \subset G$ se denomina **disco visible** de b si $b \in \partial V$. En este caso, se dice que b es un **punto frontera visible** de G.

Definición C.9. Sea G un dominio en $\mathbb{C}$. Un conjunto M de puntos frontera visibles de G se denomina **bien distribuido** si se verifica la siguiente propiedad:

"Sea $c \in G$ y sea B un disco centrado en c que interseca ∂G. Entonces en la componente conexa de $B \cap G$ que contiene el punto c existe un disco visible V para algún $b \in M \cap B$."

Teorema C.10 (Existencia de conjuntos bien distribuidos)**.** *Cualquier dominio G de $\mathbb{C}$ tiene un conjunto frontera bien distribuido numerable.*

Demostración. Sea R un conjunto numerable y denso en G (bastaría tomar $R = (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap G$). Para cada $\xi \in R$ elegimos $b_\xi \in \partial G$ en la frontera del mayor disco abierto $V \subset G$ centrado en ξ. El conjunto M, de todos esos puntos frontera visibles b_ξ, es numerable.

Ahora, sea B un disco centrado en $c \in G$ que interseca ∂G. Si $\xi \in R$ es elegido suficientemente próximo a c entonces el mayor disco $V \subset G$ centrado en ξ está contenido, junto con ∂V, en B y $c \in V$.

Por construcción del conjunto M, V es el disco visible de algún punto $b \in M$. Como $b \in \partial V \subset B$ y $V \subset B \cap G$, entonces V está contenido en la componente conexa de $B \cap V$ que contiene c pues $c \in V$. Luego M es un conjunto frontera bien distribuido. $\square$

Proposición C.11. *Sea G un dominio de $\mathbb{C}$. Todo conjunto frontera bien distribuido de G es denso en ∂G.*

Demostración. Sea M un conjunto frontera de G bien distribuido. Vamos a razonar por reducción al absurdo, suponiendo que existe un conjunto abierto U de ∂G tal que $U \cap M = \emptyset$.

Sea $c \in G$ suficientemente próximo a U y sea $B(c, r)$ tal que $B(c, r) \cap \partial G \subset U$. Entonces, por definición, sabemos que en la componente conexa de $B(c, r) \cap G$ que contiene a c existe un disco visible V para algún punto

$b \in M \cap B$. Entonces $b \in \partial G \cap B \subset U$ y, en consecuencia $b \in U \cap M$ lo cual es absurdo. $\square$

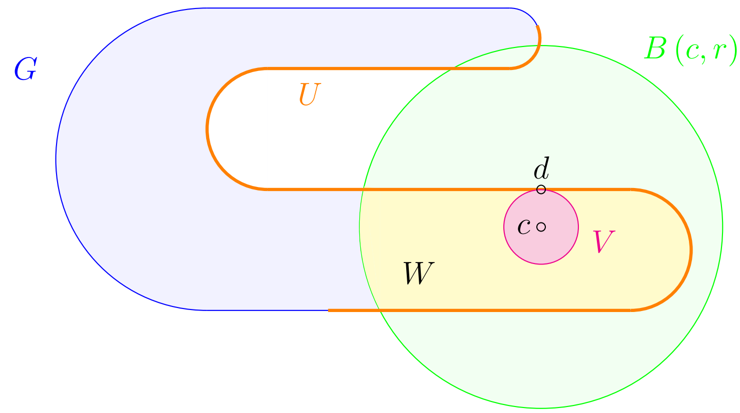

Figura C.1: Esquema gráfico.

C.3. Dominios de holomorfía

Lema C.12. *Sean G y $\hat{G}$ dominios en $\mathbb{C}$ y sea W una componente conexa de $G \cap \hat{G}$. Entonces se verifican:*

(i) $\hat{G} \cap \partial W \subset \partial G$,

(ii) Si $\hat{G} \not\subset G$, entonces $\hat{G} \cap \partial W$ es un conjunto no vacío.

Demostración.

(i) Sea $q \in \hat{G} \cap \partial W$. Como $\partial W \subset \overline{W} \subset \overline{G}$ se sigue que $q \in \overline{G}$. Si $q \in G$ entonces, como $q \in \hat{G}$ se tendría que $q \in W$ lo cual contradice que $q \in \partial W$. En conclusión, $q \in \overline{G} \setminus G = \partial G$.

(ii) Supongamos $\hat{G} \not\subset G$, entonces $\hat{G} \setminus W \neq \emptyset$. En otro caso, la inclusión $W \subset \hat{G}$ implicaría $\hat{G} = W \subset G$ lo cual contradice lo supuesto.

Ahora bien, $\hat{G} \setminus W$ no es abierto pues $\hat{G} = W \cup \left(\hat{G} \setminus W\right)$ donde W es abierto y $\hat{G} = W \cup \left(\hat{G} \setminus W\right)$ es conexo. Sea $p \in \hat{G} \setminus W$ pero no un punto interior, entonces $U \cup W \neq \emptyset$ para todo entorno U de p, esto es $p \in \partial W$ y, por lo tanto, $p \in \hat{G} \cup \partial W$. $\square$

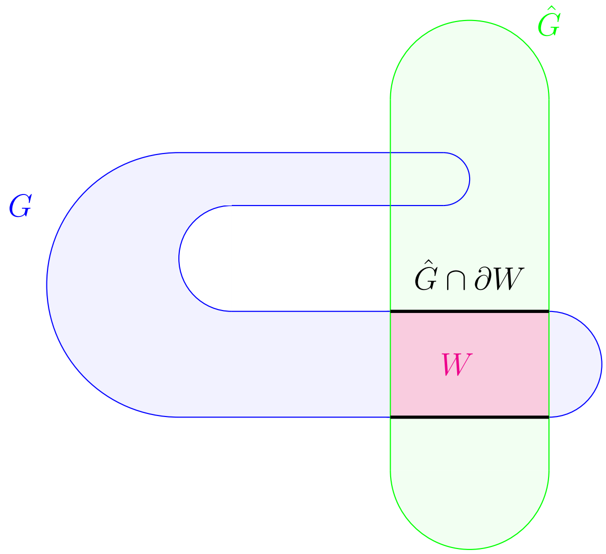

Figura C.2: Esquema gráfico Lema C.12

Teorema C.13. *Para una función f holomorfa en un dominio G, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) El dominio G es el dominio de holomorfía de la función f.

(2) No existen ningún dominio $\hat{G} \not\subset G$ y una función $\hat{f}$ holomorfa en $\hat{G}$ de manera que el conjunto $\{z \in G \cap \hat{G} \,:\, f(z) = \hat{f}(z)\}$ tenga puntos interiores.

(3) Todo punto frontera de G es punto barrera de f.

Demostración. Vamos a demostrar: $\neg(1) \Rightarrow \neg(2) \Rightarrow \neg(3) \Rightarrow \neg(1)$.

$(\neg(1) \Rightarrow \neg(2))$ Suponemos que G no es el dominio de holomorfía de f, en consecuencia, existe $c \in G$ tal que el disco de convergencia, que denotamos por $\hat{G}$, de la serie de Taylor, que denotamos por $\hat{f}$, de f en c no está contenido en G.

Como $\hat{f}$ es holomorfa en $\hat{G}$ y $f = \hat{f}$ en la componente conexa, que denotamos W, de $G \cap \hat{G}$ que contiene c, se concluye que $W \subset \{z \in G \cap \hat{G} : f(z) = \hat{f}(z)\}$ y, por tanto, el expuesto conjunto tiene puntos interiores (lo cual equivale a $\neg(2)$).

$(\neg(2) \Rightarrow \neg(3))$ Supongamos que $\hat{G} \not\subset G$, $\hat{f} \in \mathcal{H}\left(\hat{G}\right)$ y W_1 es una componente conexa de $G \cap \hat{G}$ tal que $\hat{f}\Big|_{W_1} = f|_{W_1}$.

Teniendo en cuenta el lema previo, existe $p \in \hat{G} \cap \partial W_1 \subset \partial G$. Además, podemos asumir que p es un punto frontera visible de W_1 en virtud de la Proposición C.11. Consideramos un disco $U \subset \hat{G}$ centrado en p y un disco visible $V \subset W_1$ para $p \in \partial W_1$. Entonces $U \cap V \subset W$ donde W es una componente conexa de $G \cap U$.

Ahora bien, $p \in \partial V \cap \partial G$ implica $p \in \partial W$. Considerando $g := \hat{f}\Big|_U$ entonces $g|_W = f|_W$ ya que $V \cap U \subset W_1$, entonces p no es un punto barrera de f.

$(\neg(3) \Rightarrow \neg(1))$ Supongamos que $p \in \partial G$ no es un punto barrera de f, y sea g una función holomorfa en un abierto U (con $p \in U$) tal que $g|_W = f|_W$ siendo W una componente conexa de $U \cap G$.

Sea r el radio de convergencia de la serie de Taylor de g centrada en p. Eligimos $c \in W$ con $|c-p| < r/2$. El disco de convergencia de la serie de Taylor de g centrada en c contiene al punto $p \in \partial G$. Como f y g tienen el mismo desarrollo de Taylor centrado en c, G no es el dominio de holomorfía de f. □

Ahora, estamos en condiciones de enunciar y probar el primero de los resultados que se utilizan en la demostración de la construcción de Porter de series sobreconvergentes. Antes realizamos una pequeña observación.

Observación 14. Si q es un polinomio no constante, entonces tiene grado ≥ 1. En consecuencia, si existe $p \in \mathbb{C}$ tal que $q'(p) = 0$ necesariamente q' debe ser un polinomio de grado ≥ 1 (no puede tratarse de un polinomio de grado 0, pues en tal caso sería el polinomio idénticamente nulo y, en consecuencia, el p sería un polinomio constante).

Teorema C.14. *Sean $\tilde{G}$ un dominio en $\mathbb{C}$, q un polinomio no constante y G una componente conexa de $q^{-1}\left(\tilde{G}\right)$.*

Si $\tilde{G}$ es el dominio de holomorfía de $\tilde{f}$, entonces G es el dominio de holomorfía de la función $f := \left(\tilde{f} \circ q\right)\Big|_G$.

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que f puede ser polongada de manera holomorfa a un punto $p \in \partial G$. Entonces, existirían $\varepsilon > 0$ y una función g, holomorfa en $B(p, \varepsilon)$, tal que $f|_W = g|_W$ en la componente conexa $W \subset B(p, \varepsilon) \cap G$ de manera que $p \in \partial W$.

- Supongamos $q'(p) \neq 0$.

  En virtud de la Proposición C.7 sabemos que q es localmente biholomorfa en torno al punto p. Tomando ε suficientemente pequeño, podemos suponer $U = B(p, \varepsilon)$ y, por tanto, $q : U \to \hat{G}$ es biholomorfa.

  Como $p \in \partial G$ entonces $q(p) \in \partial \tilde{G}$ luego tenemos $\hat{G} \not\subset \tilde{G}$. Considerando la función $\hat{f} := g \circ (q|_U)^{-1}$, que es holomorfa en $\hat{G}$ se tiene que

  $$q(W) \subset \{z \in \tilde{G} \cap \hat{G} \ : \ \tilde{f}(z) = \hat{f}(z)\}.$$

  Luego, en virtud del Teorema C.13, se deduce que $\tilde{G}$ no es el dominio de holomorfía de $\tilde{f}$ en contra de la hipótesis. En consecuencia, f no puede ser prolongada de manera holomorfa a ningún punto de ∂G y; por lo tanto, G es el dominio de holomorfía de f.

- Supongamos $q'(p) = 0$.

  Teniendo en cuenta el Lema C.12 se sigue que $B(p, \varepsilon) \cap \partial W \subset \partial G$. Esto es, g es una prolongación holomorfa de la función f a todos los puntos frontera $\tilde{p} \in \partial G$ que pretenecen a $B(p, \varepsilon) \cap \partial W$.

  De la Observación 14, sabemos que q' es un polinomio no constante y, en virtud del principio de los ceros aislados, sabemos que p es un cero aislado del polinomio q'.

  A continuación, vamos a probar que p es un punto aislado de la frontera de G. Como p es un cero aislado del polinomio q' existe un abierto B tal que $p \in B$ y $B \cap Z(q') = \{p\}$, esto es, todo punto $\tilde{p} \in B \setminus \{p\}$ verifica $q'(\tilde{p}) \neq 0$.
  Supongamos que existe $\tilde{p} \in (B \setminus \{p\}) \cap \partial G$ entonces $q'(\tilde{p}) \neq 0$ y, estamos en condiciones de aplicar el caso analizado anteriormente; por lo tanto, se tiene que $\tilde{G}$ no es el dominio de holomorfía de $\tilde{f}$, en contra de la hipótesis. Por tanto, $(B \setminus \{p\}) \cap \partial G = \emptyset$; lo cual prueba que p es, efectivamente, un punto aislado de la frontera de G.

  Del hecho de que p sea un punto aislado de la frontera de G se deduce que $q(p)$ es también un punto aislado de la frontera de $\tilde{G}$.

Ahora bien, como por hipótesis f puede ser prolongada analíticamente al punto p, existe un entorno de p en el cual f está acotada. Por la definición de la función f, esto implica que $\tilde{f}$ está acotada en un entorno de $q(p)$, lo cual es absurdo pues $\tilde{G}$ es el dominio de holomorfía de $\hat{f}$ por hipótesis.

Por tanto, concluímos que f no puede ser prolongada analíticamente a ningún punto de la frontera de G y, en consecuencia, G es el dominio de holomorfía de la función f.

□

Observación 15. En las condiciones del teorema anterior veamos que, efectivamente $p \in \partial G$ implica $q(p) \in \partial \tilde{G}$.

Demostración. En primer lugar, teniendo en cuenta que $qq^{-1}\left(\tilde{G}\right) \subset \tilde{G}$ y $q\left(\overline{G}\right) \subset \overline{q(G)}$, observamos que:

$$G \subset q^{-1}\left(\tilde{G}\right) \implies q(G) \subset \tilde{G} \implies \overline{q(G)} \subset \overline{\tilde{G}} \implies q\left(\overline{G}\right) \subset \overline{\tilde{G}}$$

luego, necesariamente si $p \in \partial G$ entonces $q(p) \in \overline{\tilde{G}} = \tilde{G} \cup \partial \tilde{G}$.

Para finalizar la prueba, a continuación vamos a probar que $q(p) \notin \tilde{G}$. Razonando por reducción al absurdo, suponemos $q(p) \in \tilde{G}$, en consecuencia, existe $r > 0$ tal que $B(q(p), r) \subset \tilde{G}$. Ahora bien, como q se trata de una función entera, sabemos que $V := q^{-1}(B(q(p), r))$ es abierto y, además, $p \in V$. En consecuencia, existe $\varepsilon > 0$ de manera que $B(p, \varepsilon) \subset V$; de esta manera el conjunto $G \cup V$ es abierto y conexo con $G \cup V \subset G$, lo cual entra en contradicción con la hipótesis (G es componente conexa y tenemos $G \subset G \cup V$). Por lo tanto, concluimos que $q(p) \notin \tilde{G}$ y, necesariamente $q(p) \in \partial \tilde{G}$. □

C.4. Aplicaciones finitas

Definición C.15. Sea G un dominio en $\mathbb{C}$ y sea $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión contenida en G. Se dice que $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una **sucesión frontera en $\boldsymbol{G}$** si no admite subsucesiones convergentes hacia un punto de G.

Lema C.16. *Una sucesión de números complejos, $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, es una sucesión frontera en $\mathbb{C}$ si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.*

Demostración. Probamos ambas implicaciones:

($\Longrightarrow$) Razonamos por contrarrecíproco suponiendo que $\lim_{n\to\infty}|z_n| \neq \infty$. De esta manera existe una constante $M > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que $|z_m| < M$.

Así, tomando $n = 1$, existe un número natural n_1 con $n_1 > n$ verificando $|z_{n_1}| < M$. Ahora bien, dado n_1 existe $n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_2 > n_1$ satisfaciendo $|z_{n_2}| < M$. Análogamente, dado n_2 existe $n_3 \in \mathbb{N}$ con $n_3 > n_2$ cumpliendo $|z_{n_3}| < M$. Recurrentemente, construimos una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ con $|z_{n_k}| < M$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Así, tenemos $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \overline{B}\,(0, M)$ que se trata de un conjunto compacto. En virtud del teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $\{z_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ de $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente hacia un punto de $\overline{B}\,(0, M)$. En consecuencia, por definición, $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ no es una sucesión frontera en $\mathbb{C}$.

($\Longleftarrow$) Evidente. $\square$

Definición C.17. Sean G y G' dominios en $\mathbb{C}$. Una **aplicación** $f : G \to G'$ se denomina **finita** si verifica:

"Si $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset G$ es una sucesión frontera de G, entonces $\{f\,(z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset G'$ es una sucesión frontera de G'".

Antes de seguir con el estudio de las aplicaciones finitas, hacemos una breve revisón sobre las singularidades aisladas en el infinto.

Definición C.18. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en U. Si existe $R > 0$ tal que $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > R\} \subset U$, se dice que **$\infty$ es una singularidad aislada de f**.

Notación. Denotaremos por $B^*(\infty, r)$ al conjunto $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > r\}$ y también utilizaremos la notación $B^*(c, r) = B\,(c, r) \setminus \{c\}$.

Observación 16. Si ∞ es una singularidad aislada de una función f y tomamos $R > 0$ como en la definición, la función g dada por

$$g(z) = f(1/z), \quad z \in B^*(0, 1/R) \tag{C.4}$$

está bien definida y es holomorfa en $B^*(0, 1/R)$, de modo que 0 es una singularidad aislada de g. Esta observación da sentido a la siguiente definición.

Definición C.19. Sea f una función holomorfa en $B^*(\infty, R)$. Se dice que f presenta una **singularidad evitable, polar o esencial en** ∞ si la función g definida en (C.4) presenta ese tipo de singularidad en $z_0 = 0$. En caso de que la singularidad sea polar, se define el orden del polo de f en ∞ como el orden del polo de g en 0.

Teorema C.20 (Caracterización de singularidades esenciales en infinito)**.** *Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto tal que existe $R > 0$ con $B^*(\infty, R) \subset U$, y $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa. Son equivalentes:*

a) ∞ es una singularidad esencial de f.

b) Para cada $r > R$, el conjunto $f(B^*(\infty, r))$ es denso en $\mathbb{C}$.

c) El desarrollo de Laurent de la función f en $B^*(\infty, R)$ es de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$, siendo $a_n \neq 0$ para infinitos índices n.

Con las definiciones y resultados que se han enunciado a modo de recordatorio, realizamos la siguiente observación que jugará un papel importante en la demostración del primer resultado sobre aplicaciones finitas que exponemos.

Observación 17. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera que no es un polinimo. Entonces f presenta una sigularidad esencial en ∞.

Demostración. Dado que f es una función entera no polinómica, su serie de Taylor en torno al 0 viene dada por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, donde infinitos coeficientes a_n son no nulos. Basta aplicar $c) \implies a)$ del Teorema C.20. $\square$

Proposición C.21. *Una aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es finita si, y sólo si, f es un polinomio no constante.*

Demostración. Vamos a probar ambas implicaciones.

($\Longrightarrow$) Razonando por contrarreícproco, vamos a suponer que f no es un polinomio constante entonces, o bien es un polinomio constante, o bien no es un polinomio. Analizamos los dos casos por separado:

- Si f es un polinomio constante, es claro que se trata de una aplicación no finita.

Supongamos $f(z) = z_0 \in \mathbb{C}$, dada una sucesión frontera $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$, la sucesión de las correspondientes imágenes va a ser la sucesión constante igual a z_0, y cualquier subsucesión de ésta convergerá al punto $z_0 \in \mathbb{C}$, por lo tanto $\{f(z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ no es una sucesión frontera en $\mathbb{C}$ y, en consecuencia, f no es una aplicación finita.

- Si f no es un polinomio, de la observación inmediatamente anterior sabemos que presenta una singularidad esencial en ∞.

  A continuación, haciendo uso del teorema de Casorati-Weierstrass vamos a construir una sucesión frontera $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ de manera que la sucesión de imágenes $\{f(z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ no sea frontera en $\mathbb{C}$.

  Dado que para todo $R > 0$, sabemos que el conjunto $f(B^*(\infty, R))$ es denso en el plano complejo, fijado $\varepsilon > 0$ razonamos de la siguiente manera:

  - Elegimos z_0 tal que $|z_0| > 1$ y $|f(z_0)| < \varepsilon$ (lo cual no supone ningún problema pues el conjunto $f(B^*(\infty, 1))$ es denso en el plano complejo).
  - Una vez determinado z_0, elegimos z_1 de manera que $|z_1| > |z_0| + 1$ y $|f(z_1)| < \varepsilon/2$.
  - Una vez determinado z_1, elegimos z_2 de manera que $|z_2| > |z_1| + 1$ y $|f(z_2)| < \varepsilon/4$.

  Iterando el proceso anterior construimos una sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ frontera en $\mathbb{C}$ pues, en efecto:

  $$\lim_{n\to\infty} |z_n| > \lim_{n\to\infty} (|z_0| + n) = \infty.$$

  Por otro lado, la sucesión de imágenes $\{f(z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ verifica

  $$\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = 0$$

  y, en virtud del Lema C.16 sabemos que no se trata de una sucesión frontera en $\mathbb{C}$.

  De esta manera se concluye que f no se trata de una aplicación finita.

($\Longleftarrow$) Sea $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión frontera en $\mathbb{C}$, entonces $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Ahora bien, es evidente que $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \infty$, de donde se deduce que $\{f(z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión frontera en $\mathbb{C}$. $\square$

A continuación introducimos tres propiedades básicas de las aplicaciones finitas.

Proposición C.22. *Sean G y G' dominios en $\mathbb{C}$. Una aplicación $f : G \to G'$ holomorfa y finita verifica las siguientes propiedades:*

(i) Todo conjunto $f^{-1}(\omega)$, $\omega \in G'$, es finito.

(ii) Para todo conjunto compacto $L \subset G'$ se tiene que $f^{-1}(L)$ es compacto.

(iii) f es sobreyectiva, esto es, $f(G) = G'$.

Demostración. (i) En primer lugar observamos que f no es constante pues, en tal caso, ya sabemos que no se trataría de una aplicación finita porque toda sucesión frontera en G tendría como imagen un sucesión no frontera en G'.

Como f no es constante, necesariamente todo conjunto $f^{-1}(\omega)$ es localmente finito en G. En caso contrario, tendríamos que existe $z_0 \in f^{-1}(\omega) \subset G$ de manera que para todo entorno $U \subset G$ de z_0 se tiene que la intersección $U \cap f^{-1}(\omega)$ tiene cardinal infinito. En particular, lo anterior se verifica para todo abierto $U \subset G$ con $z_0 \in U$, luego tenemos $\emptyset \neq U \cap f^{-1}(\omega) \setminus \{z_0\}$, lo cual prueba que z_0 es un punto de acumulación de $f^{-1}(\omega)$. En estas condiciones tenemos que las funciones f y $g : G \to G'$, con $g(z) = \omega$, son holomorfas en G (conexo y abierto por ser un dominio en el plano complejo) y coinciden en el conjunto $f^{-1}(\omega)$ que acabamos de probar que tiene un punto de acumulación en G. En estas condiciones el principio de identidad afirma que las funciones g y f coinciden en G , lo cual entraría en contradicción con el hecho de que la función f no es constante.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe $\omega \in G'$ tal que el conjunto $F := f^{-1}(\omega)$ es infinito. En este caso, dado que sabemos que el conjunto F es localmente finito, podemos extraer una sucesión frontera $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset F$. Sin embargo, la sucesión de la imágenes será la sucesión constante igual a $\omega \in G'$ que sabemos que no es una sucesión frontera en G' y, en consecuencia, deducimos que f no es una aplicación finita, lo cual contradice la hipótesis.

(ii) Vamos a probar que toda sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset K := f^{-1}(L)$ tiene un punto de acumulación en K.

Como $\{f(z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset L$ no es una sucesión frontera en G', entonces $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ no es una sucesión frontera en G. En consecuencia, $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ admite una subsucesión convergente en G, esto es, existe $\hat{z} \in G$ tal que $\hat{z}$ es un punto de acumulación de $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$. Ahora bien, como K es cerrado sabemos que $\hat{z} \in K$.

(iii) Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $f(G) \neq G'$ entonces $f(G)$ tiene un punto frontera $p \in G'$.

Consideramos una sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset G$ con $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = p$, luego $\{f(z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ no es una sucesión frontera en G' y, en consecuencia, $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ no es una sucesión frontera en G.

Por definición, como $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ no es una sucesión frontera en G, admite una subsucesión convergente hacia un punto $\hat{z}$ de G. Del hecho de que f sea una función continua en G se deduce que $p = f(\hat{z}) \in f(G)$, lo cual contradice lo supuesto. $\square$

Proposición C.23. *Una aplicación holomorfa $f : B(0,1) \to B(0,1)$ es finita si, y sólo si,*

$$\lim_{|z|\to 1} |f(z)| = 1.$$

Demostración.

$(\implies)$ Razonamos por contrarecíproco, suponiendo que $\lim_{|z|\to 1} |f(z)| \neq 1$. Esto es, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe z con $|z| > \delta$ tal que $\varepsilon \leq ||f(z)| - 1| = 1 - |f(z)|$.

De esta manera, considerando, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ se tiene que existe z_n con $|z_n| > 1 - \frac{1}{n+1}$ y de modo que $|f(z_n)| \leq 1 - \varepsilon$.

Ahora bien, dado que $|z_n| < 1$ para todo n, tenemos que $\lim_{n\to\infty} |z_n| \leq 1$. Y, por otro lado, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| \geq \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

En consecuencia, $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$ y la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es frontera en $B(0,1)$.

Sin embargo, la sucesión $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sabemos que verifica $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| \leq 1 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, luego $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| \neq 1$, de donde se deduce que la aplicación f no es finita.

($\Longleftarrow$) Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión frontera en $B(0,1)$. Entonces sabemos que $\lim_{n\to\infty}|z_n| = 1$ y, combinando el criterio secuencial para la continuidad y la hipótesis se sigue que,

$$1 = \lim_{|z|\to 1}|f(z)| = \lim_{n\to\infty}|f(z_n)|$$

lo que prueba que $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión frontera en $B(0,1)$ y, en consecuencia, la aplicación f es finita. □

Lema C.24. *Sean G un dominio acotado en $\mathbb{C}$ y g una función holomorfa en G. Además, supongamos que g no se anula en G y que $\lim_{z\to\partial G}|g(z)| = 1$, entonces g es constante en G.*

Demostración. Consideramos la función auxiliar $f : G \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 1/g(z)$. Del hecho de que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in G$ se deduce que la función f está bien definida y es holomorfa en G.

Por hipótesis sabemos que $\lim_{z\to\partial G}|g(z)| = 1$ y, en virtud del teorema del módulo máximo, se deduce que, o bien g es constante en G, o bien $|g(z)| < 1$ para todo $z \in G$.

Si g fuera constante en G ya tenemos el resultado probado, luego supongamos que $|g(z)| < 1$ para todo $z \in G$. En estas condiciones, tenemos que $|f(z)| > 1$ para todo $z \in G$. Además, por hipótesis se sigue que

$$\lim_{z\to\partial G}|f(z)| = \lim_{z\to\partial G} 1/|g(z)| = 1,$$

y nuevamente en virtud del teorema del módulo máximo, tenemos que o bien f es constante en G, o bien $|f(z)| < 1$ para todo $z \in G$.

Si f fuese constante en G también lo sería g y, por tanto, tendríamos el resultado demostrado. Supongamos que $|f(z)| < 1$ para todo $z \in G$, en estas condiciones tendríamos $1 < |f(z)| < 1$ para todo $z \in G$ lo cual resulta absurdo. En consecuencia, deducimos que f y, por tanto g, son funciones constantes en G. □

Teorema C.25. *Sea f una función holomorfa en $B(0,1)$, son equivalentes:*

(i) $f : B(0,1) \to B(0,1)$ *es finita.*

(ii) *Existen una cantidad finita de puntos* $c_1, \ldots, c_d \in B(0,1)$ *donde* $d \geq 1$, *y* $\eta \in C(0,1)$ *tales que:*

$$f(z) = \eta \prod_{n=1}^{d} \frac{z - c_n}{\overline{c_n} z - 1}.$$

Demostración. $(i) \implies (ii)$ El conjunto $f^{-1}(0)$ es finito y no vacío, denotemos por $c_1, \ldots, c_d \in B(0,1)$ los ceros de la función f en $B(0,1)$ (donde cada cero aparece tantas veces como el orden del mismo en la función f).

Consideramos, para $1 \leq n \leq d$, las funciones auxiliares

$$f_n(z) = \frac{z - c_n}{\overline{c_n} z - 1}$$

que resultan ser holomorfas en el disco abierto unidad, pues el único punto en el que se anula el denominador es $z = c_n/|c_n| \notin B(0,1)$.

Ahora bien, por construcción, la función g definida por

$$g(z) = \frac{f(z)}{f_1(z) \ldots f_d(z)}$$

es holomorfa en $B(0,1)$ y, además, no se anula en $B(0,1)$.

Por otro lado, para todo $1 \leq n \leq d$, observamos que

$$\lim_{|z| \to 1} |f_n(z)| = \left| \frac{\xi - c_n}{\overline{c_n} \xi - 1} \right| = \left| \frac{\xi - c_n}{\overline{c_n} - \overline{\xi}} \right| = 1 \tag{C.5}$$

donde $\xi \in C(0,1)$. Además, como $f : B(0,1) \to B(0,1)$ es holomorfa en el disco unidad y finita, de la Proposición C.23 se sigue que

$$\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = 1 \tag{C.6}$$

Combinando las igualdades (C.5) y (C.6), y teniendo en cuenta la definición de g, se deduce que

$$\lim_{|z| \to 1} |g(z)| = 1. \tag{C.7}$$

En estas condiciones, en virtud del lema previo, se concluye que g es una función constante en $B(0,1)$. Esto es $g(z) = \eta$, donde $|\eta| = 1$ de acuerdo con (C.7). En consecuencia, tenemos

$$f(z) = \eta f_1(z) \dots f_d(z) = \eta \prod_{n=1}^{d} \frac{z - c_n}{\overline{c_n} z - 1}$$

como queríamos probar.

$(ii) \implies (i)$ Para cada $1 \leq n \leq d$ sabemos que la correspondiente función f_n es holomorfa y no constante en $B(0,1)$ y que verifica (C.5), luego en virtud del teorema del módulo máximo se tiene que $|f_n| < 1$ para todo $z \in B(0,1)$. En consecuencia, de la hipótesis se deduce que $|f(z)| < 1$ luego $f : B(0,1) \to B(0,1)$.

Ahora bien, observamos que

$$\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = \lim_{n \to \infty} |f(z_n)| = |\eta| \prod_{n=1}^{d} \left| \frac{\xi - c_n}{\overline{c_n} \xi - 1} \right| = 1$$

y junto a la hipótesis de que f es continua en el disco unidad, se sigue que que f es una aplicación finita. □

Corolario C.26. *Sea q un polinomio. Supoongamos que existe $R \in (0, \infty)$ tal que la región $\{z \in \mathbb{C} : |q(z)| < R\}$ tiene un disco $B(c,r)$, $0 < r < \infty$, como componente conexa. Entonces $q(z) = a(z-c)^d$, donde $d \geq 1$ y $|a| = R/r^d$.*

Demostración. En primer lugar vamos a probar que la aplicación $q : B(c,r) \to B(0,R)$ es finita. Para ello, consideramos una sucesión frontera $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ y, razonando por reducción al absurdo supondremos que $\lim_{n \to \infty} |q(z_n)| \neq R$.

En estas condiciones existen $R_0 < R$ y una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{n=0}^{\infty}$ de manera que $|q(z_{n_k})| \leq R_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, como $\{z_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión frontera en $B(c,r)$ tenemos que $\lim_{k \to \infty} |z_{n_k} - c| = r$. Dado que $\overline{B}(c,r)$ es un conjunto compacto, sabemos que la sucesión $\{z_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ admite una subsucesión convergente $\{z_{n_{k_l}}\}_{l=0}^{\infty}$ hacia un punto $a \in C(c,r)$, esto es, $|a - c| = r$.

A continuación, vamos a probar que $|q(a)| = R$, en particular, vamos a probar que $|q(z)| = R$ para todo $z \in \operatorname{Fr}(U)$, donde $U = \{z \in \mathbb{C} : |q(z)| < R\}$.

Observamos que el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |q(z)| \leq R\}$ es cerrado y contiene a U. Teniendo en cuenta que q es una función continua tenemos:

$$\overline{U} \subset \{z \in \mathbb{C} \,:\, |q(z)| \leq R\}.$$

Por otro lado, $\mathbb{C} \setminus U$ es un conjunto cerrado y coincide con su adherencia. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}(U) &= \overline{U} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus U} \\
&\subset \{z \in \mathbb{C} \,:\, |q(z)| \leq R\} \cap \{z \in \mathbb{C} \,:\, |q(z)| \geq R\} \\
&= \{z \in \mathbb{C} \,:\, |q(z)| = R\}
\end{aligned}$$

Lo que prueba que $|q(z)| = R$ para todo $z \in \mathrm{Fr}(U)$ y, en particular, para $a \in \overline{B}(c, r)$.

Ahora bien, tenemos que $\left|q\left(z_{n_{k_l}}\right)\right| \leq R_0 < R$ para todo $l \in \mathbb{N}$ y; teniendo en cuenta la continuidad de q, deducimos que $|q(a)| \leq R_0 < R$, lo cual entra en contradicción con $|q(a)| = R$. En consecuencia deducimos que $\lim_{n\to\infty} |q(z_n)| = R$ y, por tanto, q es una aplicación finita.

Ahora bien, considerando el polinomio $p(z) := q(rz + c)/R$ tenemos que $p : B(0,1) \to B(0,1)$ es una aplicación finita (ver Observación 18). Del teorema inmediatamente anterior, se deduce que $p(z) = \eta z^d$ donde $\eta \in C(0,1)$ (como p es un polinomio necesariamente todos los c_n del teorema anterior deben ser nulos). Atendiendo a la definición de p concluimos que $q(z) = \eta (z - c)^d$, como se quería probar. $\square$

Observación 18. Si $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión frontera de $B(0,1)$, entonces $\{z_n r + c\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión frontera de $B(c, r)$ pues:

$$\lim_{n\to\infty} |(z_n r + c) - c| = \lim_{n\to\infty} r\,|z_n| = r.$$

De esta manera

$$\lim_{n\to\infty} |p(z_n)| = \lim_{n\to\infty} |q(z_n r + c)/R| = R/R = 1$$

lo que prueba que $\{f(z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión frontera de $B(0,1)$ y, en consecuencia, $p : B(0,1) \to B(0,1)$ es una aplicación finita.

Apéndice D

El Pequeño Teorema de Runge

Este apéndice se centra en desarrollar los resultados previos necesarios para, posterioremente, estar en condiciones de enunciar y demostrar el Pequeño Teorema de Runge. Nuestro interés se centra en una consecuencia del mencionado resultado que requerimos para realizar la prueba del Teorema 5.1.

D.1. Fórmula integral de Cauchy para compactos

Para la teoría de aproximación, precisamos de la Fórmula Integral de Cauchy para conjuntos compactos en dominios arbitrarios. Nuestro punto de partida será la fórmula integral de Cauchy para rectángulos.

Antes de enunciar el resultado que hemos adelantado en el párrafo anterior, recordamos el teorema de Cauchy (en su versión homológica), resultado estudiado en la asignatura de Variable Compleja, ya que de éste es consecuencia directa la fórmula integral de Cauchy para rectángulos.

Teorema D.1 (Teorema de Cauchy. Versión homológica)**.** *Sea U un abierto y γ una curva cerrada y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos en U. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

a) Para todo $z \notin U$ se tiene que $\eta(\gamma, z) = 0$.

b) Para toda función f holomorfa en U se tiene que $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

c) Para toda función f holomorfa en U y para todo $z \in U \setminus \gamma^*$ se tiene que

$$\eta(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega.$$

Teorema D.2 (Fórmula integral de Cauchy para rectángulos)**.** *Sea R un rectángulo compacto en un dominio D. Para toda función holomorfa f en D se verifica*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial R} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \begin{cases} f(z) & \text{si} \quad z \in \mathring{R}, \\ \\ 0 & \text{si} \quad z \notin R. \end{cases}$$

Con el punto de partida expuesto, proseguimos con el resultado de interés de este apartado.

Teorema D.3 (Fórmula integral de Cauchy para conjuntos compactos)**.** *Sean D un dominio de $\mathbb{C}$ y $K \neq \emptyset$ un conjunto compacto en D. Entonces, en $D \setminus K$ existen una cantidad finita de segmentos horizontales y verticales, que denotamos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, de igual longitud de manera que, para toda función f holomorfa en D, se verifica*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\sigma_k} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega, \quad z \in K. \tag{D.1}$$

Demostración. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $D \neq \mathbb{C}$. En caso contrario, al ser K compacto, es evidente que existe $r > 0$ tal que $K \subset B(0, r)$ y basta tomar $D = B(0, r)$.

En estas condiciones, teniendo en cuenta que $K \subset D$, se tiene que $K \cap \partial D = \emptyset$ donde K es un conjunto compacto y ∂D es un cerrado y, en consecuencia, $\delta := d(K, \partial D) > 0$. Consideramos, en el plano complejo, una malla paralela a los ejes coordenados formada por cuadrados compactos con longitud de lado igual a d verificando $\sqrt{2}d < \delta$.

Como K es un conjunto compacto, interseca sólo una cantidad finita de cuadrados de la malla, digamos $Q_1, \ldots, Q_k$. Observamos que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} Q_i \subset D.$$

La primera inclusión es evidente. Para probar la segunda fijamos un punto $c_i \in Q_i \cap K$, por definición del número δ sabemos que $B(z_i, \delta) \subset D$. Del hecho de que el cuadrado Q_i tenga diámetro $\sqrt{2}\delta$, se deduce que la distancia del punto c_i a todo punto de Q_i es menor o igual que $\sqrt{2}d$. Como, por construcción, $\sqrt{2}d < \delta$ se tiene que $Q_i \subset B(z_i, \delta) \subset D$. Dado que el punto z_i es arbitrario, este razonamiento puede realizarse para todos los cuadrados Q_i y, por tanto, la segunda inclusión queda probada.

Pasamos a considerar los segmentos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, que son parte de las fronteras ∂Q_i pero son lados no comunes a dos de los cuadrados Q_j. Observamos que

$$\bigcup_{j=1}^{n} \sigma_j^* \subset D \setminus K. \tag{D.2}$$

En caso contrario, si K intersecara un segmento σ_j, entonces existirían dos cuadrados de la malla con σ_j como lado común, lo cual entra en contradicción con la elección de los σ_i.

Como los segmentos que comparten lados en distintos cuadrados de la malla tienen fronteras orientadas con direcciones opuestas, se sigue que

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\partial Q_i} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \sum_{j=1}^{n} \int_{\sigma_j} \frac{f(z)}{\omega - z}, \quad z \in D \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} \partial Q_i \right).$$

Si c es un punto interior de algún cuadrado, digamos $c \in \mathring{Q}_i$, entonces de la fórmula integral de Cauchy para los rectángulos se deduce que

$$\int_{\partial Q_i} \frac{f(\omega)}{\omega - c} d\omega = 2\pi i f(c) \quad \text{y} \quad \int_{\partial Q_l} \frac{f(\omega)}{\omega - c} d\omega = 0 \quad \text{para todo } l \neq i,$$

lo cual prueba (D.1) para los puntos del conjunto $\bigcup_{i=1}^{k} \mathring{Q}_i$.

Sea c un punto de la frontera de un cuadrado, digamos $c \in \partial Q_i$. De (D.2) sabemos que c no pertenece a ningún segmento σ_j y, en consecuencia, las integrales de la parte derecha de la igualdad (D.1) están bien definidas. Consideramos una sucesión de puntos $c_m \in \mathring{Q}_i$ que converge hacia c. De lo ya probado, sabemos que los puntos c_m verifican (D.1) y, por continuidad, se deduce que el punto c también verifica la misma igualdad. $\square$

D.2. Aproximación mediante funciones racionales

Empezamos probando un lema auxiliar que utilizaremos, junto al Teorema D.3, para demostrar el resultado siguiente y γ^* a su soporte.

Notación. Dada una curva γ, en lo que sigue, denotaremos por $L(\gamma)$ a la longitud de la misma.

Lema D.4. *Sea K un conjunto compacto en $\mathbb{C}$. Sea σ un segmento en $\mathbb{C}$ disjunto del conjunto compacto K, y sea h una función continua en σ^*. Entonces, la función $\int_\sigma h(\omega)(\omega - z)^{-1} d\omega$, definida para $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma^*$, puede ser uniformemente aproximada en K por funciones racionales de la forma*

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_\mu}{z - \omega_\mu}, \quad \text{donde } \; c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C} \; \text{ y } \; \omega_1, \ldots, \omega_m \in \sigma^*.$$

Demostración. La función $\upsilon(\omega, z) := h(\omega)(\omega - z)^{-1}$ es continua en $\sigma^* \times K$. Como $\sigma^* \times K$ es compacto, υ es uniformemente continua en $\sigma^* \times K$; luego para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\upsilon(\omega, z) - \upsilon(\omega', z)| \leq \varepsilon, \quad (\omega, \omega', z) \in \sigma^* \times \sigma^* \times K \; \text{ con } \; |\omega' - \omega| \leq \delta. \tag{D.3}$$

Dividimos σ en subsegmentos $\pi_1, \ldots, \pi_m$ de longitud menor o igual que δ y, elegimos $\omega_\mu \in \pi_\mu^*$. Considerando $c_\mu := -h(\omega_\mu) \int_{\pi_\mu} d_\omega$, para $z \in K$ se tiene

$$\left| \int_{\pi_\mu} \upsilon(\omega, z)\, d\omega - \frac{c_\mu}{z - \omega_\mu} \right| = \left| \int_{\pi_\mu} (\upsilon(\omega, z) - \upsilon(\omega_\mu, z))\, d\omega \right| \leq \varepsilon L(\pi_\mu)$$

donde en la desigualdad se ha combinado la cásica desigualdad para el módulo de una integral con (D.3).

Definiendo $q(z) := \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu (z - \omega_\mu)^{-1}$, que es continua en K, se tiene que

$$\left| \int_\sigma \upsilon(\omega, z)\, d\omega - q(z) \right| \leq \varepsilon L(\sigma), \quad \forall z \in K.$$

□

Proposición D.5 (Lema de aproximación.)**.** *Para cada conjunto compacto K en un dominio D, existen una cantidad finita de segmentos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ en K de manera que toda función f holomorfa en D puede ser uniformemente aproximada en K por funciones racionales de la forma*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{z - \omega_i}, \quad \text{donde } \ c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C} \ \text{ y } \ \omega_1, \ldots, \omega_m \in \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i^*.$$

Demostración. Consideramos segmentos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ en $D \setminus K$ como en el Teorema D.3 y, en consecuencia, se verifica la igualdad (D.1).

En virtud del lema previo, para $\varepsilon > 0$ existen funciones

$$q_i(z) = \sum_{\mu=1}^{m_i} \frac{c_{\mu i}}{z - \omega_{\mu i}}, \quad \text{donde } \ \omega_{\mu i} \in \sigma_i^* \ \text{ y } \ c_{\mu i} \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

tales que

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\sigma_i} \frac{f(\omega)}{\omega - z} - q_i(z) \right|_K \leq \frac{\varepsilon}{n}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Considerando $q = q_1 + \ldots + q_n$ tenemos $|f - q|_K \leq \varepsilon$. Por construcción, q es una suma finita de términos de la forma $c_k (z - \omega_k)^{-1}$ donde $\omega_k \in \bigcup_{j=1}^{n} \sigma_j^*$, que es lo que se quería probar. □

D.3. Teorema del cambio de polos

Antes de exponer el último de los resultados previos que precisamos para estar en condiciones de enunciar y probar el Pequeño Teorema de Runge hacemos una pequeña observación.

Observación 19. Sea $S \neq \emptyset$ un subconjunto de un dominio G tal que todo disco $B \subset G$ centrado en un punto $c \in S$ está contenido en S, entonces $S = G$.

Teorema D.6 (del cambio de polos)**.** *Sea K un conjunto compacto en $\mathbb{C}$. Sean a y b puntos arbitrarios de una componente conexa Z de $\mathbb{C} \setminus K$. Entonces $(z - a)^{-1}$ puede ser aproximada uniformemente en K por polinomios en $(z - b)^{-1}$. En particular, si Z es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$, entonces $(z - a)^{-1}$ puede aproximarse uniformemente en K por polinomios.*

Demostración. Para $\omega \notin K$, denotamos por L_ω al conjunto de todas las funciones holomorfas en K que se pueden aproximar uniformemente en K mediante polinomios en potencias de $(z-\omega)^{-1}$.

Con la notación establecida, es evidente que se verifica un especie de propiedad transitiva: si $(z-s)^{-1} \in L_c$ y $(z-c)^{-1} \in L_b$, entonces $(z-s) \in L_b$.

La primera afirmación que se realiza en el enunciado del teorema equivale a probar que el conjunto $S := \{s \in Z \ : \ (z-s)^{-1} \in L_b\}$ es exactamente la componente conexa Z. Como $b \in S$, teniendo en cuenta la observación anterior, basta probar que si $c \in S$ y $B \subset Z$ es un disco centrado en c, entonces $B \subset S$.

Sea $s \in B$. La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} (s-c)^n (z-c)^{-n-1}$ converge normalmente en $\mathbb{C} \setminus B$ hacia $(z-s)^{-1}$. Como $K \cap B = \emptyset$, la sucesión de sumas parciales converge uniformemente en K hacia $(z-s)^{-1}$, por lo tanto, tenemos $(z-s)^{-1} \in L_c$. Como, por hipótesis, $c \in S$ de la propiedad transitiva comentada antes, se sigue que $(z-s)^{-1} \in L_b$, esto es, $s \in S$. El razonamiento es válido para todo $s \in B$, como consecuencia, $B \subset S$ como queríamos.

Por otro lado, si Z es la componente conexa no acotada, existe $d \in Z$ tal que $K \subset B(0, |d|)$. Entonces, todas las funciones $(z-d)^{-1}$ son uniformemente aproximadas por sus polinomios de Taylor en K. En consecuencia de la transitividad, $(z-a)^{-1}$ puede ser uniformemente aproximada en K por polinomios. □

D.4. Teoría de Runge para conjuntos compactos

Utilizando los resultados estudiados en los apartados anteriores, estamos en condiciones de probar una primera versión del teorema de aproximación. Antes de enunciar el teorema realizamos un inciso de notación.

Notación. Dado un conjunto $P \subset \mathbb{C}$, denotaremos por $\mathbb{C}_P[z]$ al conjunto de funciones racionales cuyos polos pertenecen al conjunto P.

Teorema D.7 (de aproximación. Versión 1)**.** *Sea K un conjunto compacto de $\mathbb{C}$. Si $P \subset \mathbb{C} \setminus K$ interseca cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$, entonces toda función holomorfa en K puede ser uniformemente aproximada en K por* *funciones en* $\mathbb{C}_P\left[z\right]$.

Demostración. Sea f una función holomorfa en K y sea $\varepsilon > 0$. Como f es holomorfa en un entorno abierto de K, de la Proposición D.5 deducimos la existencia de un conjunto compacto L en $\mathbb{C}$, disjunto de K, y una función

$$q\left(z\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{z - \omega_i},$$

donde $\omega_1, \ldots, \omega_k \in L$, tal que

$$\left|f - q\right|_K \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{D.4}$$

Denotamos por Z_j la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$ que contiene al punto ω_j.

Si Z_j es acotada, por hipótesis existe un punto $t_j \in Z_j \cap P$. Del teorema del cambio de polos se deduce la existencia de un polinomio g_j en potencias de $\left(z - t_j\right)^{-1}$ tal que

$$\left|\frac{c_j}{z - \omega_j} - g_j\left(z\right)\right| < \frac{1}{2k}\varepsilon, \quad \forall z \in K. \tag{D.5}$$

Por el contrario, si Z_j no es acotado, entonces la expresión (D.5) sigue verificándose (en virtud del mismo teorema) pero, en este caso particular, g_j se trata de un polinomio.

Definimos la función racional $g := g_1 + \ldots + g_k$, observamos que todos sus polos pertenecen al conjunto P y, además,

$$\begin{aligned} \left|f - g\right|_K &\leq \left|f - q\right|_K + \left|q - g\right|_K \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{k} \left|\frac{c_i}{z - \omega_i} - g_i\left(z\right)\right|_K \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la desigualdad triangular combinada con las desigualdades (D.4) y (D.5). $\square$

Una manera equivalente de enunciar el resultado anterior se recoge en el siguiente teorema.

Teorema D.8 (de aproximación. Versión 2)**.** *Sea K un conjunto compacto en un dominio D. Si toda componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$ interseca $\mathbb{C} \setminus D$, entonces toda función holomorfa en K puede se uniformemente aproximada en K por funciones racionales holomorfas en D.*

Demostración. Basta con tomar $P \subset \mathbb{C} \setminus K$ verificando $P \cap D = \emptyset$ y aplicar el teorema anterior. □

El teorema de interés de este apéndice, resulta ser un caso especial del teorema previo cuando se verifica $D = \mathbb{C}$.

Teorema D.9 (Pequeño Teorema de Runge.)**.** *Sea K un conjunto compacto en un dominio D. Si $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo entonces, toda función holomorfa en K puede se uniformemente aproximada en K por polinomios.*

D.5. Consecuencias del Teorema de Runge

Una vez conocido el Pequeño Teorema de Runge, estudiamos dos consecuencias del mismo. La segunda de ellas resulta de gran importancia en el quinto capítulo del trabajo, puesto que es utilizada para probar un resultado previo requerido para la prueba del teorema de Szegö.

Corolario D.10. *Si $K \neq C\,(0,1)$ es un conjunto compacto (no vacío) contenido en $C\,(0,1)$, entonces existe un polinomio P tal que $P\,(0) = 1$ y $|P|_k < 1$.*

Demostración. Como $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo, del Pequeño Teorema de Runge, se sigue que existe un polinomio $\tilde{P}$ tal que $|\tilde{P} - 1/k|_K < 1$. Entonces $P := 1 + z\tilde{P}$ es un polinomio que verifica

- $P\,(0) = 1 + 0 \cdot \tilde{P}\,(0) = 1$,
- $|P|_K = |z|_K \left|\tilde{P} - 1/z\right|_K < 1$,

como se quería probar. □

Corolario D.11. *Si $K \neq C\,(0,1)$ es un conjunto compacto contenido en $C\,(0,1)$, entonces existe un entorno U de K y una función*

$$Q\,(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{z^{k-1}} + \frac{1}{z^k},$$

con $k \geq 1$*, tal que* $|Q|_K < 1$*.*

Demostración. En virtud del corolario anterior sabemos que existe un polinomio $P(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k$ verificando $|P|_K < 1$.

Ahora bien, consideramos el polinomio $Q(z) := P(z) z^{-k}$, es evidente que se verifica $|Q|_K < 1$. Razonando por continuidad, se deduce la existencia de un entorno U de K tal que $|Q|_U < 1$. $\square$

Bibliografía

[1] P. Erdos, *Note on the Converse of Fabry's Gap Theorem*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 57, No. 1 (Jan., 1945), pp. 102-104.

[2] F. Galindo Soto, J. Gómez Pérez, J. Sanz Gil y L.A. Tristán Vega, *Guía Práctica De Variable Compleja y Aplicaciones*, Ediciones Universidad de Valladolid, 27 de septiembre 2019.

[3] Hugh L. Montgomery, *Ten Lectures on the Interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis*, American Mathematical Society, University of Michigan, Ann Arbor, MI. (1994)

[4] Reinhold Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer Graduate Texts in Mathematics Series, First edition, NY. (1991)

[5] Reinhold Remmert, *Classical Topics in Complex Fuction Theory*, Springer Graduate Texts in Mathematics Series, First edition, NY. (1998)

[6] G. Sansone y J. Gerretsen, *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable. Vol.I: Holomorphic Functions*, Groningen, P. Noordhoff. (1960)