



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIEMANN.
ALGUNAS TÉCNICAS DE REPRESENTACIÓN.**

Autor: Mariano San José Gómez

Tutor: Javier Sanz Gil

Año 2022/23

Índice general

Resumen	5
Introducción	7
Notación y terminología	9
1. Preliminares topológicos	11
1.1. Los espacios $\mathcal{C}(U)$ y $\mathcal{A}(U)$	11
1.2. Los subconjuntos compactos de $\mathcal{A}(U)$	17
2. El teorema de representación conforme de Riemann	22
3. Extensión de aplicaciones conformes a la frontera	29
4. Transformaciones de Schwarz-Christoffel	47
4.1. Simetría	47
4.2. Aplicación de Schwarz-Christoffel	57
4.2.1. Triángulos	67
4.2.2. Polígonos regulares de n lados	69
A. Algunos resultados básicos	75
B. Transformaciones de Möbius	79

Resumen

El objetivo fundamental de este trabajo es presentar el célebre teorema de representación conforme de Riemann, incluyendo resultados sobre extensión de la representación a la frontera. Se describirá la aproximación moderna a la solución de este problema, basada en los trabajos iniciales de Carathéodory y Koebe pero reformulada y simplificada por Fejér y Riesz. Se tratará de dar también un enfoque práctico al problema, ilustrando cómo construir representaciones para regiones que aparecen frecuentemente en las aplicaciones, como, por ejemplo, el interior de polígonos (método de Schwarz-Christoffel).

Abstract: The main objective of this work is to present the famous Riemann mapping theorem, including results on the extension of the representation to the boundary. The modern approach to solving this problem will be described, based on the initial works of Carathéodory and Koebe but reformulated and simplified by Fejér and Riesz. We will also give a practical approach to the problem, illustrating how to build representations for regions that frequently appear in applications, such as the interior of polygons (Schwarz-Christoffel method).

Introducción

La memoria presente tiene como objetivo fundamental la demostración del *teorema de representación conforme de Riemann*, que establece la posibilidad de construir una aplicación holomorfa y biyectiva entre el disco unidad y cualquier dominio propio y simplemente conexo del plano complejo, así como analizar el problema de extender dicha representación o equivalencia conforme, proporcionada por este teorema, a la frontera de los correspondientes dominios. En esta línea, estudiaremos el caso particular de los polígonos y cómo podemos dar una función analítica (u holomorfa) y biyectiva entre el polígono (interior y borde) y el disco unidad o el semiplano superior.

El trabajo entronca fundamentalmente con la asignatura obligatoria del Grado en Matemáticas “*Variable Compleja*”, del área de Análisis Matemático. Se aplicarán frecuentemente resultados básicos como el *teorema de holomorfía bajo el signo integral*, la *fórmula integral de Cauchy* o el *teorema de Weierstrass*. De hecho, se ha decidido incluir en un primer apéndice del trabajo (Apéndice A) un listado de los resultados fundamentales de aquella materia a los que se recurrirá. Por supuesto, también se utilizarán resultados de las materias “*Análisis Matemático*”, como el *teorema de la función inversa* o el *teorema del cambio de variable*, y de la “*Introducción a los espacios de funciones*”, cuyas técnicas y teoremas fundamentales están implícitos en la construcción de los espacios $\mathcal{C}(U)$ y $\mathcal{A}(U)$, que son espacios clásicos de funciones. No es quizá necesario mencionar que los contenidos propios de la “*Topología*” también son prácticamente omnipresentes.

La memoria se divide en cuatro capítulos y dos apéndices. En el primer capítulo, cuya referencia principal ha sido el libro de R. B. Ash y W. P. Novinger [1], realizamos la construcción de los espacios $\mathcal{C}(U)$ y $\mathcal{A}(U)$ de funciones continuas y holomorfas, respectivamente, en un abierto U del plano complejo. Se presentan dos resultados clásicos del Análisis Complejo como son el *teorema de Montel*, que asegura que toda sucesión en un conjunto acotado de $\mathcal{A}(U)$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en los compactos de U , y el *teorema de Vitali*, que asegura que una sucesión acotada de $\mathcal{A}(U)$, con U conexo, que converge en un subconjunto de U que tiene algún punto

de acumulación en U de hecho converge uniformemente en los compactos de U . Ambos son necesarios para desarrollar las herramientas claves en la demostración del *teorema de representación conforme de Riemann*.

En el segundo capítulo, cuya referencia principal ha sido también el libro de R. B. Ash y W. P. Novinger [1], se prueba dicho teorema fundamental, que garantiza la existencia de una equivalencia conforme f entre un subconjunto U propio, abierto, conexo y simplemente conexo de \mathbb{C} y el disco unidad \mathbb{D} . Posteriormente se concluye con algunos casos especiales o corolarios del *teorema de representación conforme de Riemann*. Ya en este capítulo, y también en los sucesivos, requerimos del manejo de las homografías, descritas en el apéndice B, y que juegan un papel importantísimo en la demostración del *teorema de representación conforme de Riemann*, en los argumentos de extensión de la aplicación conforme a la frontera, así como en muchos de los ejemplos más relevantes de estas construcciones.

En el tercer capítulo, cuyas referencias son los libros de R. B. Ash y W. P. Novinger [1] y J. B. Conway [2], nos adentramos en el problema de extensión a la frontera de la equivalencia conforme obtenida en el capítulo anterior. Mediante un ejemplo hacemos notar la importancia de definir el concepto de *punto simple* de la frontera y el papel que estos juegan en la extensión. A continuación se presenta el *teorema de Osgood-Charathéodory*, que garantiza la existencia de la extensión a la frontera si todos sus puntos son simples. Concluimos el capítulo con algunas aplicaciones relevantes de este teorema (ver por ejemplo los teoremas 3.17 y 3.15), que permiten por ejemplo la construcción de series de potencias uniformemente convergentes en el disco cerrado unidad pero tales que la serie de sus coeficientes no converge absolutamente.

En el cuarto y último capítulo, cuyas referencias son los libros de Peter Hernici [3] y Tobin A. Driscoll y Lloyd N. Trefethen [5], se aborda el problema de encontrar una equivalencia conforme entre un polígono de n lados (interior y frontera) y el disco unidad o el semiplano superior. Para ello se introducen en primer lugar resultados relativos a la extensión por simetría de funciones holomorfas, como el *principio de reflexión*, con el que se resuelven algunos ejemplos sencillos. De nuevo intervienen en estos desarrollos las homografías y su comportamiento con respecto de los círculos generalizados. Después, se resuelve el problema general mediante la construcción explícita de la denominada aplicación de Schwarz-Christoffel. Con esta aplicación se plantean y resuelven los ejemplos de equivalencias conformes entre polígonos de n lados y el semiplano superior o disco unidad, lo que concluye el trabajo.

Notación y terminología

\mathbb{N}_0	El conjunto de los números naturales junto con el 0.
\mathbb{C}	Cuerpo de los números complejos.
$\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$	Partes real e imaginaria, respectivamente, del número complejo z .
$\bar{z}, z $	Conjugado y módulo, respectivamente, del número complejo z .
\mathbb{D}	Disco unidad centrado en el 0.
$[a, b]$	Segmento en el plano complejo que une los puntos a y b .
$D(a, r)$	Disco centrado en a de radio r .
$B(z, \delta)$	Bola de centro z y radio δ .
$\bar{E}, \overset{\circ}{E}, \partial E$	Adherencia, interior y frontera, respectivamente, del conjunto E .
$d(z, A)$	Función distancia entre un conjunto A y un punto z .
$C(z_0, r)$	Circunferencia de centro z_0 y radio r positivamente orientada con la parametrización $z_0 + re^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$ (o una equivalente).
γ^*	Soporte de una curva paramétrica.
$\gamma \cdot \beta$	Concatenación de los caminos γ y β .
$\eta(\gamma, z)$	Índice de la curva γ en el punto z .

Capítulo 1

Preliminares topológicos

Dedicamos este primer capítulo a dar la construcción y propiedades fundamentales de los espacios con los que trabajaremos a lo largo de la memoria. Consideramos los espacios clásicos de funciones continuas y analíticas y los dotamos de una distancia. Más adelante, damos criterios para asegurar la compacidad de subconjuntos del espacio de las funciones analíticas y exponemos demostraciones de resultados clásicos del “Análisis Complejo” como son el *teorema de Montel* o el *teorema de Vitali*. A lo largo del capítulo se hacen múltiples referencias a los resultados clásicos de la asignatura “*Variable Compleja*” recogidos en el apéndice A.

1.1. Los espacios $\mathcal{C}(U)$ y $\mathcal{A}(U)$.

Nuestro objetivo en esta sección es definir los espacios sobre los que vamos a trabajar y dotarlos de una estructura de espacio métrico, así como ver algunas propiedades de los mismos como espacios métricos.

Definición 1.1. Dado $U \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, llamamos $\mathcal{C}(U)$ al *espacio de las funciones continuas* de U en \mathbb{C} .

Proposición 1.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$K_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq n, d(z, \mathbb{C} \setminus U) \geq \frac{1}{n} \right\},$$

donde $d(z, \mathbb{C} \setminus U)$ denota la función distancia a $\mathbb{C} \setminus U$ evaluada en z . Entonces $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente (o expansiva) de conjuntos compactos de U , es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $K_n \subseteq K_{n+1}$, de modo que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U.$$

Demostración:

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$. Entonces si $x \in K_n$ se tiene que $|x| \leq n < m$ y $d(z, \mathbb{C} \setminus U) \geq \frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ luego $K_n \subset K_m$, es decir, la sucesión es creciente. Veamos que K_n es compacto. Definimos

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\} = \overline{B}(0, n) \quad \text{y} \quad B = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \mathbb{C} \setminus U) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Entonces $K_n = A \cap B$, y tanto A como B son cerrados, pues $A = \overline{B}(0, n)$ y B es la contraimagen por la función distancia a un conjunto (que es continua) del intervalo $[\frac{1}{n}, \infty)$, cerrado en \mathbb{R}_+ por ser complementario de un abierto. Así, K_n es cerrado por ser intersección finita de cerrados. Puesto que $A = \overline{B}(0, n)$ es acotado, también lo es K_n . Como \mathbb{C} es un espacio euclídeo sabemos que un conjunto es compacto si, y solo si, es cerrado y acotado, y de esta manera K_n es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por último veamos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U$$

viendo ambas inclusiones. Veamos primero que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset U.$$

Sea $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $z \in K_N$. Es decir, $|z| \leq N$ y $d(z, \mathbb{C} \setminus U) \geq \frac{1}{N}$, o lo que es lo mismo, $d(z, \mathbb{C} \setminus U) > 0$ luego $z \in U$. Veamos ahora que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \supset U.$$

Sea $z \in U$, entonces $d(z, \mathbb{C} \setminus U) > 0$ y existe por tanto $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(z, \mathbb{C} \setminus U) \geq \frac{1}{N}$. Ahora bien, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq \max\{N, |z|\}$. Luego $|z| \leq n_0$ y $d(z, \mathbb{C} \setminus U) \geq \frac{1}{n_0}$ y se tiene que $z \in K_{n_0}$. Por tanto, $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Así,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U.$$

Definamos ahora la distancia que vamos a utilizar para dotar a $\mathcal{C}(U)$ de una estructura de espacio métrico.

Proposición 1.3. Dadas $f, g \in \mathcal{C}(U)$, definimos

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}}$$

donde $\|f\|_{K_n} = \sup\{|f(z)| : z \in K_n\}$. Entonces, $(\mathcal{C}(U), d)$ es un espacio métrico.

Demostración: Notemos que la serie que define $d(f, g)$ es una serie convergente pues

$$0 < \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}} \leq 1$$

y, como son series de términos positivos, se tiene que

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

- (1) Veamos que $d(f, g) > 0$ para todo $f, g \in \mathcal{C}(U)$ con $f \neq g$. Si $f \neq g$ entonces existe $z \in U$ tal que $f(z) \neq g(z)$ y como $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión expansiva de compactos, entonces existe un n_0 tal que $z \in K_{n_0}$. Así, como $\frac{1}{2^n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y

$$\|f - g\|_{K_n} = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K_n\} > 0$$

para todo $n > n_0$, se tiene que $\frac{\|g - f\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}} > 0$ y como $d(f, g)$ viene definida por una serie de términos positivos con al menos uno mayor que cero se tiene que $d(f, g) > 0$.

Por otro lado, si $f = g$ se tiene $\|f - g\|_{K_n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $d(f, g) = 0$.

- (2) Como $\|f - g\|_{K_n} = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K_n\} = \sup\{|g(z) - f(z)| : z \in K_n\} = \|g - f\|_{K_n}$ entonces $d(f, g) = d(g, f)$.
- (3) Sea $F(x) = \frac{x}{1+x}$, continua para todo $x \geq 0$ y derivable con $F'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$, y por tanto F es estrictamente creciente. Ahora, como

$$\begin{aligned} \|f - h\|_{K_n} &= \sup\{|f(z) - h(z)| : z \in K_n\} \\ &\leq \sup\{|f(z) - g(z)| + |g(z) - h(z)| : z \in K_n\} \\ &\leq \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K_n\} + \sup\{|g(z) - h(z)| : z \in K_n\} \\ &= \|f - g\|_{K_n} + \|g - h\|_{K_n}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\|f - h\|_{K_n}}{1 + \|f - h\|_{K_n}} &= F(\|f - h\|_{K_n}) \leq F(\|f - g\|_{K_n} + \|g - h\|_{K_n}) \\ &= \frac{\|f - g\|_{K_n} + \|g - h\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n} + \|g - h\|_{K_n}} \\ &\leq \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}} + \frac{\|g - h\|_{K_n}}{1 + \|g - h\|_{K_n}}, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad viene del hecho de que F es creciente y la segunda de que $\|g - h\|_{K_n}$ y $\|f - g\|_{K_n}$ son cantidades no negativas. Por tanto, tenemos que

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \frac{\|f - h\|_{K_n}}{1 + \|f - h\|_{K_n}} \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}} + \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \frac{\|g - h\|_{K_n}}{1 + \|g - h\|_{K_n}}$$

y así, tomando límites cuando $k \rightarrow \infty$, se deduce que

$$\begin{aligned} d(f, h) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - h\|_{K_n}}{1 + \|f - h\|_{K_n}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|g - h\|_{K_n}}{1 + \|g - h\|_{K_n}} \\ &= d(f, g) + d(g, h). \end{aligned}$$

Por tanto d es una distancia en $\mathcal{C}(U)$.

Teorema 1.4. La convergencia relativa a d es la convergencia uniforme en los conjuntos compactos de U , es decir, si $f_1, f_2, \dots, f \in \mathcal{C}(U)$ entonces $d(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ si, y solo si, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformemente en cada $K \subset U$ compacto.

Demostración:

Veamos ambas implicaciones.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{C}(U)$ tales que $d(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Es decir,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|f_n - f\|_{K_m}}{1 + \|f_n - f\|_{K_m}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Como la serie es de términos positivos, se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2^m} \frac{\|f_n - f\|_{K_m}}{1 + \|f_n - f\|_{K_m}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\|f_n - f\|_{K_m}}{1 + \|f_n - f\|_{K_m}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sea ahora $K \subseteq U$ compacto, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_N$. Como

$$\begin{aligned} 0 &\leq |f_n(z) - f(z)| \\ &\leq \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in K_N\} \end{aligned}$$

para todo $z \in K$, entonces $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformemente para todo $K \subseteq U$ compacto.

Sea ahora $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{C}(U)$ tales que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformemente para todo $K \subseteq U$ compacto. Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

converge, entonces existe m_0 tal que

$$\sum_{k=m_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora bien, como para todo $m \leq m_0$ se tiene que $\|f_n - f\|_{K_m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ entonces existe un $n_m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_m$ entonces $\|f_n - f\|_{K_m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, sea $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_{m_0}\}$, si $n \geq n_0$ entonces

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|f_n - f\|_{K_m}}{1 + \|f_n - f\|_{K_m}} \\ &\leq \sum_{m=1}^{m_0} \frac{1}{2^m} \frac{\|f_n - f\|_{K_m}}{1 + \|f_n - f\|_{K_m}} + \sum_{m_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|f_n - f\|_{K_m}}{1 + \|f_n - f\|_{K_m}} \\ &\leq \sum_{m=1}^{m_0} \frac{1}{2^m} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|f_n - f\|_{K_m}}{1 + \|f_n - f\|_{K_m}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

es decir, $d(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Definición 1.5. Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y f una función compleja definida en A . Se dice que f es *analítica* en un punto $z_0 \in A$ si existen un número $\delta > 0$ tal que $B(z_0, \delta) \subset A$, y una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con $a_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

para cada $z \in B(z_0, \delta)$. Diremos que f es *analítica* en U si lo es en todos sus puntos.

Observación 1.6. Dada f una función entonces es analítica en el punto z_0 si, y solo si, es holomorfa en el punto z_0 .

Definición 1.7. Denotamos por $\mathcal{A}(U)$ al *espacio de las funciones analíticas* de U en \mathbb{C}

Teorema 1.8. Con la distancia d , $\mathcal{C}(U)$ es completo y $\mathcal{A}(U)$ es cerrado en $\mathcal{C}(U)$.

Demostración:

Supongamos que $d(f_n, f_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$, es decir, que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Para cada $z \in U$ definimos $K_z = \{z\}$, que es compacto por ser cerrado y acotado. Entonces como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en K_z , se tiene que $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Como \mathbb{C} es completo, existe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ para todo $z \in U$. Ahora, dados $K \subset U$ compacto y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon$ para todo $n, m \geq n_0$ y para todo $z \in K$. Si hacemos $m \rightarrow \infty$ fijado $n \geq n_0$ tenemos que $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$ para todo $z \in K$, luego f_n converge a f uniformemente en K .

Sea ahora $\bar{D}(z_0, r) \subset U$ para algún $z_0 \in U$ y algún $r > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $n \geq n_0$ y todo $z \in \bar{D}(z_0, r)$. Sea $N \geq n_0$, como f_N es continua en z_0 existe $\delta \in (0, r)$ tal que $|f_N(z) - f_N(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ si $|z - z_0| \leq \delta$. Así,

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \leq \varepsilon$$

si $|z - z_0| \leq \delta$. Por tanto, f es continua en U y $\mathcal{C}(U)$ es completo.

Ahora bien, si suponemos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es de funciones analíticas entonces por el *teorema de Weierstrass* se tiene que f es analítica y por tanto $\mathcal{A}(U)$ es cerrado.

Teorema 1.9. Con la distancia d el conjunto $\mathcal{A}(U)$ es completo.

Demostración:

Puesto que $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{C}(U)$ es cerrado y que $\mathcal{C}(U)$ es completo para la distancia d se tiene que $\mathcal{A}(U)$ es también completo para la distancia d .

1.2. Los subconjuntos compactos de $\mathcal{A}(U)$.

Nuestro objetivo ahora es caracterizar los subconjuntos compactos de $\mathcal{A}(U)$ y estudiar algunas de sus propiedades.

Definición 1.10. Dado $F \subset \mathcal{C}(U)$ decimos que es *acotado* si para cada compacto $K \subset U$ se tiene que $\sup\{\|f\|_K : f \in F\} < \infty$. Es decir, las funciones de F son funciones uniformemente acotadas en los compactos de U .

Definición 1.11. Sea $F \subseteq \mathcal{A}(U)$, decimos que es *equicontinuo* en un punto $z_0 \in U$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z \in U$ y $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ para toda $f \in F$.

Teorema 1.12. Sea $F \subset \mathcal{A}(U)$ acotado. Entonces F es equicontinuo en todo punto $z_0 \in U$.

Demostración:

Sean $z_0 \in U$, $f \in F$ y $r > 0$ tales que $\bar{D}(z_0, r) \subset U$. Entonces, como f es holomorfa en U , por la fórmula integral de Cauchy se tiene que si $z \in$

$D(z_0, r/2)$ entonces

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{C(z_0, r)} \left(\frac{f(w)}{w - z} - \frac{f(w)}{w - z_0} \right) dw \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{C(z_0, r)} \frac{f(w)((w - z_0) - (w - z))}{(w - z)(w - z_0)} dw \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C(z_0, r)} |z - z_0| \left| \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_0)} \right| |dw| \\
&\leq \frac{2\pi r}{2\pi} |z - z_0| \sup \left\{ \left| \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_0)} \right| : w \in C^*(z_0, r) \right\}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, como F es acotado y $C^*(z_0, r)$ es compacto en U por ser cerrado y acotado, se tiene que existe $M_r > 0$ tal que $|f(w)| \leq M_r$ para todo $w \in C^*(z_0, r)$ y para toda $f \in F$. Además, como $z \in D(z_0, r/2)$ y $w \in C^*(z_0, r)$ se deduce que $|w - z| \leq \frac{r}{2}$ y $|w - z_0| = r$. Así, para todo $z \in D(z_0, r)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= r|z - z_0| \sup \left\{ \left| \frac{f(w)}{(w - z)(w - z_0)} \right| : w \in C^*(z_0, r) \right\} \\
&\leq \frac{r|z - z_0|M_r}{\frac{r}{2}r} = \frac{2M_r|z - z_0|}{r}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = \frac{r\varepsilon}{2M_r}$ para concluir la equicontinuidad de F en z_0

Teorema 1.13. Supongamos que $F \subseteq \mathcal{C}(U)$ es equicontinuo y que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de elementos de F tal que $f_n \rightarrow f$ puntualmente en U . Entonces, f es continua y $f_n \rightarrow f$ uniformemente en los compactos de U . Más generalmente, si $f_n \rightarrow f$ puntualmente en un subconjunto denso de U entonces $f_n \rightarrow f$ puntualmente en U y se verifica el resultado también.

Demostración:

Sean $\varepsilon > 0$ y $w \in U$, entonces existe $\delta_w > 0$ tal que $|f_n(z) - f_n(w)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $z \in D(w, \delta_w)$ y, por la equicontinuidad de F , para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $|f_n(z) - f_n(w)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |f(z) - f(w)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $z \in D(w, \delta_w)$ y por tanto f es continua. Sea ahora $K \subset U$ compacto, como $\{D(w, \delta_w) : w \in K\}$ es un recubrimiento abierto de K , existen w_1, \dots, w_r tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^r D(w_j, \delta_{w_j}).$$

Sea N tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $|f(w_j) - f_n(w_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$. Ahora bien, si $z \in D(w_j, \delta_{w_j})$ y $n \geq N$, entonces

$$|f(z) - f_n(z)| \leq |f(z) - f(w_j)| + |f(w_j) - f_n(w_j)| + |f_n(w_j) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

En particular, si $z \in K$ entonces existe un j tal que $z \in D(w_j, \delta_{w_j})$ y por tanto $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, es decir, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ uniformemente en los compactos de U .

Por último, sea $D \subset U$ denso y supongamos que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ puntualmente en D . Como antes $|f_n(z) - f_n(w)| < \varepsilon$ para todo $z \in D(w, \delta_w)$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Como D es denso en U , existe un $z \in D \cap D(w, \delta_w)$ tal que $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ converge y por tanto es de Cauchy, lo que implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ se tiene que $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$. Así,

$$|f_m(w) - f_n(w)| \leq |f_m(w) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(w)| < 3\varepsilon.$$

Por tanto, para todo $w \in U$ tenemos que $\{f_n(w)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{C} que es completo, por tanto converge hacia $f(w)$. Así, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ puntualmente en U .

Definición 1.14. Un conjunto $F \subset \mathcal{C}(U)$ se dice que es *relativamente compacto* si su adherencia en $\mathcal{C}(U)$ es compacto.

Puesto que $\mathcal{C}(U)$ es un espacio métrico, la compacidad relativa de F tiene una caracterización secuencial: toda sucesión de elementos de F admite una subsucesión convergente (a un límite que puede estar en F o no). El siguiente resultado establece que una familia acotada en $\mathcal{C}(U)$ es relativamente compacta.

Teorema 1.15 (de Montel). Sea $F \subset \mathcal{A}(U)$ acotado. Entonces toda sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de F tiene una subsucesión $\{f_{n_j}\}_{n_j=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en los compactos de U .

Demostración:

Sea $D \subset U$ denso numerable con $D = \{d_1, \dots, d_n, \dots\}$ que existe por ser $U \subset \mathbb{C}$ y ser \mathbb{C} separable. Como F es acotado existe $M_1 > 0$ tal que $|f(d_1)| < M_1$ para toda $f \in F$, así pues, por el *teorema de Bolzano-Weierstrass*, existe una subsucesión (f_{11}, f_{12}, \dots) de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge en d_1 . De la misma manera, existe una subsucesión (f_{21}, f_{22}, \dots) de (f_{11}, f_{12}, \dots) que converge en d_2 . Continuando con este argumento obtenemos subsucesiones (cada una de la anterior) (f_{k1}, f_{k2}, \dots) que convergen en cada d_k . Si definimos $g_n = f_{nn}$ entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión (g_k, g_{k+1}, \dots) es una subsucesión de

(f_{k1}, f_{k2}, \dots) y por tanto $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ converge puntualmente en un subconjunto denso de U . Así, por el teorema 1.12, F es equicontinuo y por el teorema 1.13 la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformemente en los compactos de U .

Teorema 1.16 (*criterio de compacidad*). Sea $F \subset \mathcal{A}(U)$ entonces F es compacto si, y solo si, F es cerrado y acotado.

Demostración:

Supongamos que F es cerrado y acotado y sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de F . Por el *teorema de Montel*, existe $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ que converge uniformemente en los compactos de U hacia una función f . Además, como F es cerrado en $\mathcal{A}(U)$ entonces se tiene que $f \in F$. Así, para toda sucesión de elementos de F encontramos una subsucesión convergente hacia un elemento de F y por el criterio secuencial para la compacidad (por ser $\mathcal{A}(U)$ un espacio métrico) se tiene que F es compacto.

Supongamos ahora que F es compacto. Puesto que todo compacto en un espacio métrico, en nuestro caso $\mathcal{C}(U)$, es cerrado, entonces F es cerrado. Veamos ahora que F es acotado. Sea $K \subset U$ compacto y sea $\varphi_K : F \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $\varphi_K(f) = \|f\|_K$. Veamos que es una función continua. Es inmediato que $\varphi_K : \mathcal{A}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma, y como la topología en $\mathcal{A}(U)$ es la de la convergencia uniforme en los compactos, si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge hacia f en $\mathcal{A}(U)$ se tiene que

$$\left| \|f_n\|_K - \|f\|_K \right| = |\varphi_K(f_n) - \varphi_K(f)| \leq \varphi_K(f_n - f) = \|f_n - f\|_K \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

y, por tanto, φ_K es continua. Ahora como φ_K es continua y F es compacto entonces $\varphi_K(F) = \{\|f\|_K : f \in F\}$ es compacto en \mathbb{R}_+ y, por tanto, acotado. Es decir, existe $M > 0$ tal que $\{\|f\|_K : f \in F\} < M$ por tanto $\sup\{\|f\|_K : f \in F\} < M < \infty$ para todo $K \subset U$ compacto. Así, F es acotado que es lo que queríamos probar.

Teorema 1.17. Sea $F \neq \emptyset$ y compacto en $\mathcal{A}(U)$. Si $z_0 \in U$ existe $g \in F$ tal que $|g'(z_0)| \geq |f'(z_0)|$ para toda $f \in F$.

Demostración:

Puesto que la convergencia en $\mathcal{A}(U)$ es la convergencia uniforme en los compactos, por el *teorema de Weierstrass* se deduce que tenemos convergencia uniforme en los compactos para las sucesivas derivadas de cualquier orden. En particular, si tomamos el compacto $K = \{z_0\}$ se deduce que la aplicación $\varphi : \mathcal{A}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(f) = |f'(z_0)|$ es continua en $\mathcal{A}(U)$ y, en particular, en F . Como F es compacto, entonces $\varphi(F) = \{|f'(z_0)| : f \in F\}$ es compacto en \mathbb{R} y contiene a su supremo, es decir, existe $g \in F$ tal que $|g'(z_0)| \geq |f'(z_0)|$ para toda $f \in F$.

Teorema 1.18. Supongamos que U es conexo y sea $F = \{f \in \mathcal{A}(U) : f : U \rightarrow \bar{D}(0, 1) \text{ inyectiva y } |f'(z_0)| \geq b\}$ con $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ y $z_0 \in U$. Entonces F es compacto.

Demostración:

Veamos primero que F es acotado. Sea $K \subset U$ compacto y sea $f \in F$, como f es una función entre U y $\bar{D}(0, 1)$ entonces para todo $z \in U$ se tiene que $|f(z)| \leq 1$. Así, $\|f\|_K = \sup\{|f(z)| : z \in K\} \leq 1$. Por tanto $\sup\{\|f\|_K : f \in F\} \leq 1 < \infty$ para toda $f \in F$. Como K era un compacto de U arbitrario entonces se tiene que para todo $K \subset U$ compacto, $\sup\{\|f\|_K : f \in F\} < \infty$ luego F es acotado.

Veamos ahora que F es cerrado. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de elementos de F tal que $d(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, nos gustaría probar que $f \in F$. Por el teorema A.4 se tiene que f es inyectiva o constante. Como f_n es analítica para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'$ uniformemente en los compactos de U . De este modo, como $|f'(z_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(z_0)| \geq b$ se deduce $|f'(z_0)| \neq 0$ y f no puede ser constante, y por tanto $f \in F$ y F es cerrado. Como F es cerrado y acotado, por el *criterio de compacidad*, se tiene que F es compacto.

Teorema 1.19 (de Vitali). Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}(U)$ una sucesión acotada y sea U conexo. Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge puntualmente en $S \subset U$ y que S tiene un punto límite en U . Entonces $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es uniformemente de Cauchy en los compactos de U y, por tanto, uniformemente convergente en los compactos de U hacia cierta $f \in \mathcal{A}(U)$.

Demostración:

Supongamos que existe $K \subset U$ compacto tal que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ no es uniformemente de Cauchy. Entonces existe $\varepsilon > 0$ para el que podemos encontrar sucesiones $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ y $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ de números naturales para las que $\|f_{m_j} - f_{n_j}\|_K \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sean ahora $\{g_j\}_{j=1}^\infty = \{f_{m_j}\}_{j=1}^\infty$ y $\{h_j\}_{j=1}^\infty = \{f_{n_j}\}_{j=1}^\infty$. Por el *teorema de Montel*, puesto que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es acotada, existen subsucesiones $\{g_{j_k}\}_{k=1}^\infty$ y $\{h_{j_k}\}_{k=1}^\infty$ que convergen respectivamente a $g \in \mathcal{A}(U)$ y $h \in \mathcal{A}(U)$ uniformemente en los compactos. Para simplificar la notación, denotemos por g_n a g_{j_k} y por h_n a h_{j_k} entonces tenemos que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$, que $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ y que $\|g_n - h_n\|_K \geq \varepsilon$ luego $\|g - h\|_K \geq \varepsilon$. Además, como $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge puntualmente en S se tiene que g y h coinciden en S , por tanto por el *principio de identidad* $g \equiv h$ en U lo que es absurdo. Por tanto, se tiene que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es uniformemente de Cauchy en los compactos de U .

Capítulo 2

El teorema de representación conforme de Riemann

A lo largo de este capítulo U será un subconjunto propio de \mathbb{C} , no vacío, abierto, conexo y simplemente conexo. Nuestro objetivo es dar la demostración del *teorema de representación conforme de Riemann*, es decir, probar que existe una biyección holomorfa entre nuestro abierto U y el disco unidad abierto \mathbb{D} . Este tipo de aplicaciones se denominan representaciones conformes y, como veremos, la hipótesis de la conexión simple es clave para obtener una raíz cuadrada analítica para cualquier función holomorfa que no se anule en U . De hecho, el teorema general de Cauchy A.12 establece la equivalencia entre ambas afirmaciones para un abierto del plano complejo.

Comenzaremos probando un resultado auxiliar que nos garantiza la existencia de una función analítica e inyectiva de U en \mathbb{D} . Es un pequeño paso intermedio hacia el *teorema de representación conforme de Riemann*. En realidad, la solución de un problema de optimización sobre la familia de funciones relativa a este resultado nos proporcionará la biyección que buscamos.

Lema 2.1. Sea U un abierto propio de \mathbb{C} tal que toda función holomorfa en U que no se anula admite raíz cuadrada analítica en U . Entonces, existe una función holomorfa e inyectiva de U en \mathbb{D} .

Demostración:

Sea $a \in \mathbb{C} \setminus U$ y sea $f(z) = z - a$ que verifica nuestras hipótesis de no anulación y holomorfía sobre U . Así, existe h analítica en U con $(h(z))^2 = z - a$ en U . Veamos que h es inyectiva. Sean z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$ con $z_1 \neq z_2$ entonces, como $(h(z_1))^2 = z_1 - a \neq z_2 - a = (h(z_2))^2$ se tiene que $h(z_1) \neq h(z_2)$ y h es inyectiva. Por el teorema de la aplicación abierta, como h es holomorfa, se tiene que $h(U)$ es abierto, y también lo es $-h(U)$. Dado que $(h(z))^2 \neq 0$ en U , entonces $h(z) \neq 0$ en U y por tanto $0 \notin h(U)$. Observemos que $h(U) \cap$

$(-h(U)) = \emptyset$, pues si existiesen $z_1, z_2 \in U$ tales que $h(z_1) = -h(z_2)$, entonces se tendría que $(h(z_1))^2 = z_1 - a = z_2 - a = (-h(z_2))^2$, lo que implicaría que $z_1 = z_2$ y, por tanto, que $h(z_1) = 0$, pero hemos visto que $0 \notin h(U)$. Sea ahora $w \in (-h(U))$, como este conjunto es abierto existe un $r > 0$ tal que $D(w, r) \subset (-h(U))$, luego $h(U) \cap D(w, r) = \emptyset$. Así, consideramos la función $f(z) = \frac{1}{h(z) - w}$, cuyo módulo es $|f(z)| \leq \frac{1}{r}$, pues $|h(z) - w| \geq r$ ya que $h(z) \in h(U)$ y $h(U) \cap D(w, r) = \emptyset$. Entonces, la función sf , con $0 < s < r$, es una función inyectiva de U en \mathbb{D} por serlo h .

Definición 2.2. Denotamos por $\hat{\mathbb{C}}$ al *plano complejo extendido*, es decir, a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Vamos a construir a continuación las llamadas transformaciones conformes de un disco en otro, que más tarde vamos a usar para demostrar el *teorema de representación conforme de Riemann*. Estas transformaciones son un caso particular de las denominadas *transformaciones de Möbius*, a las que se dedica el apéndice B.

Lema 2.3. Sea $a \in \mathbb{D}$, definimos la función φ_a en $\hat{\mathbb{C}}$ dada por

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

donde $\varphi_a(\infty) = \bar{a}^{-1}$ y $\varphi_a(\bar{a}^{-1}) = \infty$. Entonces φ_a es una función continua y biyectiva de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ cuya inversa es φ_{-a} . Además, φ_a es analítica en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\bar{a}^{-1}\}$ con un polo simple en \bar{a}^{-1} y un cero de orden 1 en a . Por último, $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $\varphi_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ y $\varphi'_a(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2}$, así, $\varphi'_a(a) = \frac{1}{1 - |a|^2}$ y $\varphi'_a(0) = 1 - |a|^2$.

Demostración:

Veamos en primer lugar que es biyectiva, para ello veamos que φ_{-a} es su inversa. En primer lugar,

$$\varphi_a(\varphi_{-a}(z)) = \frac{\frac{z + a}{1 + \bar{a}z} - a}{1 - \bar{a}\frac{z + a}{1 + \bar{a}z}} = \frac{z + a - a - a\bar{a}z}{1 + \bar{a}z - \bar{a}z - a\bar{a}} = z,$$

por otro lado,

$$\varphi_{-a}(\varphi_a(z)) = \frac{\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} + a}{1 + \bar{a}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}} = \frac{z - a + a - a\bar{a}z}{1 - \bar{a}z + \bar{a}z - a\bar{a}} = z.$$

es continua por definición (ver apéndice B). Veamos que φ_a envía \mathbb{D} en sí mismo. Si $|z| = 1$ entonces,

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = \left| \frac{z-a}{\bar{z}(1-\bar{a}z)} \right| = \left| \frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}} \right| = 1.$$

Por el *principio del módulo máximo*, φ_a envía \mathbb{D} en \mathbb{D} y envía $\partial\mathbb{D}$ en $\partial\mathbb{D}$.

Teorema 2.4 (de Schwarz-Pick). Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analítica, entonces para todo $a \in \mathbb{D}$ y todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \bar{f(a)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$$

y

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}.$$

De hecho, si se verifica la igualdad en el primer caso para algún $z \neq a$ o en el segundo caso, entonces f es una *transformación de Möbius* (ver apéndice B). Es más, existe un número complejo λ de módulo 1 tal que si $b = f(a)$ entonces f es la composición $\varphi_{-b} \circ \lambda\varphi_a = \varphi_b^{-1} \circ \lambda\varphi_a$. Es decir,

$$f(z) = \frac{\lambda\varphi_a(z) + b}{1 + \bar{b}\lambda\varphi_a(z)}$$

con $|z| < 1$.

Demostración:

Sea $a \in \mathbb{D}$ y $b = f(a)$. Consideremos la función $g = \varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a}$, puesto que f envía \mathbb{D} en \mathbb{D} , entonces g envía \mathbb{D} en \mathbb{D} . Además, $g(0) = \varphi_b(f(\varphi_{-a}(0))) = \varphi_b(f(a)) = \varphi_b(b) = 0$. Por el *lema de Schwarz* se tiene que $|g(w)| \leq |w|$ para todo w con $|w| < 1$ y sustituyendo w por $\varphi_a(z)$ teniendo en cuenta que $g(\varphi_a(z)) = \varphi_b(f(z))$ se tiene que

$$|g(\varphi_a(z))| = |\varphi_b(f(z))| = \left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \bar{f(a)}f(z)} \right| \leq |\varphi_a(z)| = \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|,$$

y tenemos la primera desigualdad. Por el *lema de Schwarz* se tiene también que $|g'(0)| \leq 1$ y por el lema 2.3 y la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \varphi_b'(f(\varphi_{-a}(0)))f'(\varphi_{-a}(0))\varphi_{-a}'(0) \\ &= \varphi_b'(f(a))f'(a)(1 - |a|^2) \\ &= \frac{1}{1 - |f(a)|^2}f'(a)(1 - |a|^2). \end{aligned}$$

Y como $|g'(0)| \leq 1$, entonces $|f(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$ y obtenemos la segunda desigualdad. Ahora si se da la igualdad en el primer caso para algún $z \neq a$ entonces $|g(\varphi_a(z))| = |\varphi_a(z)|$ para algún $z \neq a$. Así, $|g(w)| = |w|$ para algún $w \neq 0$. Por otro lado, si se da la igualdad en el segundo caso, entonces $|g'(0)| = 1$. En ambos casos, por el *lema de Schwarz* conseguimos un número complejo λ de módulo 1 tal que $g(w) = \lambda w$ para todo w con $|w| < 1$. Si tomamos $w = \varphi_a(z)$, entonces $\varphi_b(f(z)) = \lambda \varphi_a(z)$, es decir, $f(z) = \varphi_{-\lambda}(\lambda \varphi_a(z))$ para todo z con $|z| < 1$ y f es una *transformación de Möbius* por se composición de estas (ver apéndice B).

Teorema 2.5. Sea f una aplicación analítica y biyectiva de \mathbb{D} en \mathbb{D} , entonces $f = \lambda \varphi_a$ para algún λ con $|\lambda| = 1$ y $a \in \mathbb{D}$.

Demostración:

Sea $a \in \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$ y sea $g = f^{-1}$ luego $g(0) = a$. Como $g(f(z)) = z$ entonces $1 = g'(f(z))f'(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. En particular, $1 = g'(f(a))f'(a) = g'(0)f'(a)$. Por el *teorema de Schwarz-Pick* $|g'(0)| \leq 1 - |a|^2$ y $|f'(a)| \leq \frac{1}{1 - |a|^2}$. Así, $1 = |g'(0)||f'(a)| \leq \frac{1 - |a|^2}{1 - |a|^2} = 1$. Necesariamente se tiene que $|f'(a)| = \frac{1}{1 - |a|^2}$, luego se verifica la igualdad en el segundo caso del *teorema de Schwarz-Pick* tomando $b = f(a) = 0$ y por tanto $f = \lambda \varphi_a$.

Vamos a demostrar ahora un corolario del *teorema de la aplicación abierta* que utilizaremos en la prueba del *teorema de representación conforme de Riemann*.

Corolario 2.6. Sean f una función holomorfa en un abierto U , $z_0 \in U$ y $f(z_0) = w_0$. Son equivalentes:

- (a) $f'(z_0) \neq 0$.
- (b) Existen entornos abiertos $V \subset U$ de z_0 , y W de w_0 , tales que f es una biyección de V en W , $f^{-1} : W \rightarrow V$ es holomorfa y

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

para todo $w \in W$.

- (c) Existe un entorno abierto $V \subset U$ de z_0 en el que f es inyectiva.

Demostración: Veamos que (a) \implies (b): puesto que $U \in \mathbb{C}$ es un abierto, f es holomorfa en U , $z_0 \in U$ y $f'(z_0) \neq 0$ entonces estamos en las condiciones del *teorema de la función inversa* y se verifica (b).

Veamos que (b) \implies (c): puesto que f es biyectiva de V en W , con V entorno abierto de z_0 , en particular es inyectiva.

Por último, veamos que (c) \implies (a): por el *teorema de la aplicación abierta* $f(V) = W$ es abierto y $f(z_0) = w_0 \in W$. Como f es inyectiva en V entonces f es biyectiva de V en W . Por otro lado, por la continuidad de f^{-1} dado $w_1 \in W$ se tiene que

$$\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_1)}{w - w_1} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{1}{f'(z_1)}$$

luego f^{-1} es holomorfa para todo $w_1 \in W$. Así, como $z_0 = f^{-1}(f(z_0))$, entonces por la regla de la cadena se tiene que $1 = (f^{-1}(f(z_0)))' f'(z_0)$ y por tanto $f'(z_0) \neq 0$.

Veamos, ya con estas herramientas, el teorema principal de este capítulo y su demostración.

Teorema 2.7 (*de representación conforme de Riemann*). Sea U un subconjunto propio de \mathbb{C} no vacío, abierto y conexo tal que toda función analítica sin ceros en U tiene una raíz cuadrada analítica. Entonces existe una biyección analítica de U en \mathbb{D} .

Demostración:

Sea $z_0 \in U$ y sea $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ analítica e inyectiva que existe por el lema 2.1. Sea $F \subset \mathcal{A}(U)$ el conjunto de las funciones analíticas de U en \mathbb{D} tales que $|g'(z_0)| \geq |f'(z_0)|$. Observemos que $|f'(z_0)| > 0$ por el corolario 2.6 al ser f inyectiva.

Además $F \neq \emptyset$ pues $f \in F$ y F es compacto por el teorema 1.18. De esta manera, por el teorema 1.17, existe $h \in F$ tal que $|h'(z_0)| \geq |g'(z_0)|$ para toda $g \in F$. Veamos que h es sobreyectiva. Supongamos que no lo es y sea $a \in \mathbb{D} \setminus h(U)$. Consideremos la transformación φ_a entonces $\varphi_a \circ h : U \rightarrow \mathbb{D}$ es inyectiva sin ceros en U pues $a \in \mathbb{D} \setminus h(U)$. Por hipótesis, existe k analítica en U tal que $k^2 = \varphi_a \circ h$ y, además, k es inyectiva por serlo k^2 . Sea $b = k(z_0)$ y definamos $g = \varphi_b \circ k$. Entonces, $g(z_0) = \varphi_b(b) = 0$ y

$$\begin{aligned} h &= \varphi_{-a} \circ \varphi_a \circ h = \varphi_{-a} \circ k^2 \\ &= \varphi_{-a} \circ (\varphi_{-b} \circ g)^2 = \varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2 \circ g \\ &= (\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2) \circ g. \end{aligned}$$

De esta manera, $h'(z_0) = (\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2)'(g(z_0))g'(z_0) = (\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2)'(0)g'(z_0)$. La función $\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2$ es analítica y envía \mathbb{D} en sí mismo pero no es inyectiva. Por el *teorema de Schwarz-Pick*, se tiene que

$$|(\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2)'(0)| < 1 - |(\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2)(0)|^2$$

pues no se puede dar la igualdad, ya que si se diera entonces h sería una *transformación de Möbius* y por tanto biyectiva. Puesto que $|g'(z_0)| \neq 0$ se tiene que

$$|h'(z_0)| < (1 - |(\varphi_{-a} \circ \varphi_{-b}^2)(0)|^2)|g'(z_0)| \leq |g'(z_0)|$$

que es absurdo pues $g \in F$ y vimos que para toda $g \in F$ $|h'(z_0)| \geq |g'(z_0)|$. Por tanto h es sobreyectiva y, como $h \in F$, es analítica e inyectiva de U en \mathbb{D} . Luego h es la biyección holomorfa de U en \mathbb{D} que buscábamos.

Veamos algunas consecuencias del teorema.

Proposición 2.8. (i) Toda función g que maximiza $\{|f'(z_0)| : f \in F\}$ debe enviar z_0 en 0 (siendo F como en la demostración).

(ii) Sean f y h funciones analíticas y biyectivas de U en \mathbb{D} tales que $f(z_0) = h(z_0) = 0$ y $f'(z_0) = h'(z_0)$. Entonces $f = h$.

(iii) Sea f una función analítica de U en \mathbb{D} con $f(z_0) = 0$. Entonces si tomamos h como en el teorema, $|f'(z_0)| \leq |h'(z_0)|$. Además la igualdad se da si y solo si $f = \lambda h$ con $|\lambda| = 1$.

(iv) Dado $z_0 \in U$, existe una única aplicación biyectiva y analítica g de U en \mathbb{D} tal que $g(z_0) = 0$ y $g'(z_0)$ es real y positivo.

(v) Sean U_1 y U_2 conjuntos que verifican las hipótesis del teorema de representación conforme de Riemann. Sean $z_1 \in U_1$ y $z_2 \in U_2$. Entonces existe una única aplicación f biyectiva y analítica de U_1 en U_2 tal que $f(z_1) = z_2$ y $f'(z_1)$ es real y positivo.

Demostración:

(i) Sea $a = h(z_0)$. Entonces, $\varphi_a \circ h$ es una aplicación analítica e inyectiva de U en \mathbb{D} . Es más,

$$\begin{aligned} |(\varphi_a \circ h)'(z_0)| &= |\varphi_a'(h(z_0))h'(z_0)| = |\varphi_a'(a)g'(z_0)| \\ &= \frac{1}{1 - |a|^2}|g'(z_0)| \geq |g'(z_0)| \geq |f'(z_0)|. \end{aligned}$$

Puesto que $\varphi_a \circ h \in F$ y como $|g'(z_0)|$ maximiza $\{|f'(z_0)| : f \in F\}$ entonces debe ser $\frac{1}{1-|a|^2}|g'(z_0)| = |g'(z_0)|$, luego $\frac{1}{1-|a|^2} = 1$ y por tanto $0 = a = g(z_0)$.

- (ii) La función $h \circ f^{-1}$ es biyectiva y analítica con $h(f^{-1}(0)) = h(z_0) = 0$. Así por el teorema 2.5 aplicado a $a = 0$ existe un número complejo λ de módulo 1 tal que $h(f^{-1}(z)) = \lambda z$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por tanto, $h(w) = \lambda f(w)$ para todo $w \in \mathbb{D}$. Pero como $h'(z_0) = f'(z_0)$ entonces $\lambda = 1$ y $h = f$.
- (iii) La función $f \circ g^{-1}$ es analítica de \mathbb{D} en \mathbb{D} y $f \circ g^{-1}(0) = 0$. Por el *lema de Schwarz* se tiene que $|f(g^{-1}(z))| \leq |z|$ y $|f'(g^{-1}(0))\frac{1}{g'(z_0)}| \leq 1$. Luego $|f'(z_0)| \leq |g'(z_0)|$. De nuevo, por el *lema de Schwarz*, se da la igualdad si y solo si existe un número complejo λ de módulo 1 tal que $(f \circ g^{-1})(z) = \lambda z$, es decir, $f(z) = \lambda g(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
- (iv) Si tomamos h como en el *teorema de representación conforme de Riemann* y consideramos la función dada por

$$g(z) = \frac{\overline{h'(z_0)}}{|h'(z_0)|} h(z)$$

para todo $z \in U$. Entonces, g es biyectiva por serlo h , $g(z_0) = 0$ y

$$g'(z_0) = \frac{\overline{h'(z_0)}}{|h'(z_0)|} h'(z_0) = |h'(z_0)|,$$

y existe por tanto dicha aplicación. La unicidad es consecuencia de (ii), pues si existiesen g_1 y g_2 verificando (iv) entonces se tendría que $g_1(z_0) = g_2(z_0) = 0$ y que, por lo probado previamente, $g_1'(z_0) = |h'(z_0)| = g_2'(z_0)$.

- (v) Por (iv) existen biyecciones $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{D}$ y $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{D}$ con $f_1(z_1) = 0, f_2(z_2) = 0$ y $f_1'(z_1)$ y $f_2'(z_2)$ reales y positivas. Si consideramos la aplicación $g = f_2^{-1} \circ f_1 : U_1 \rightarrow U_2$ entonces

$$g(z_1) = f_2^{-1}(f_1(z_1)) = f_2^{-1}(0) = z_2$$

y por el *teorema de la función inversa*

$$\begin{aligned} g'(z_1) &= (f_2^{-1})'(f_1(z_1))f_1'(z_1) = (f_2^{-1})'(0)f_1'(z_1) \\ &= (f_2^{-1})'(f_2(z_2))f_1'(z_1) = \frac{1}{f_2'(z_2)}f_1'(z_1) \end{aligned}$$

real y positivo.

Capítulo 3

Extensión de aplicaciones conformes a la frontera

En este capítulo U será una región simplemente conexa y propia de \mathbb{C} . Por el *teorema de representación conforme de Riemann* sabemos que existirá una biyección analítica f de U en \mathbb{D} . Vamos a considerar el problema de extender f a un homeomorfismo de \bar{U} en $\bar{\mathbb{D}}$. La primera observación es que en estas condiciones \bar{U} deberá ser compacto, por $\bar{\mathbb{D}}$ lo es. Por tanto, vamos a asumir que U es acotado y veremos que ∂U juega un papel esencial para poder extender f .

Definición 3.1. Llamaremos *equivalencia o representación conforme* a toda aplicación biyectiva y analítica f de U en \mathbb{D} , donde U es un subconjunto propio, abierto, conexo y simplemente conexo de \mathbb{C} .

Definición 3.2. Sea A un subconjunto de \mathbb{C} y $x \in \mathbb{C}$. Se dice que x es un *punto límite* (o *de acumulación*) del conjunto A si para cada entorno V de x se tiene que $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Teorema 3.3. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $f : U \rightarrow V$ un homeomorfismo. Entonces una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene punto límite en U si y solo si la sucesión $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene punto límite en V .

Demostración:

Supongamos primero que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene un punto límite $z \in U$. Entonces existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ en U tal que $z_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} z$. Por la continuidad de f , se tiene que $f(z_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(z)$ y, por tanto, la sucesión $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene un punto límite en V .

De manera análoga supongamos que $\{f(z_n)\}_{n=1}^\infty$ tiene un punto límite $y \in V$, por ser f un homeomorfismo es biyectiva y existe por tanto $z \in U$ tal que $y = f(z)$. Así, existe una subsucesión $\{f(z_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ tal que $f(z_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(z)$. Por la continuidad de f^{-1} , se tiene que $z_{n_k} = f^{-1}(f(z_{n_k})) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f^{-1}(f(z)) = z$. Luego $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ tiene un punto límite en U .

Corolario 3.4. Sea f una equivalencia conforme de U en \mathbb{D} . Si $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en U tal que $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \beta \in \partial U$, entonces $|f(z_n)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

Demostración:

Puesto que $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ no tiene punto límite en U , pues si lo tuviera entonces sería β y se tendría que $\beta \in U$ lo que es absurdo, se tiene que $\{f(z_n)\}_{n=1}^\infty$ no tiene punto límite en \mathbb{D} por el teorema anterior. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| \neq 1$. Como $|f(z_n)| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces existen $\delta > 0$ y una subsucesión $\{f(z_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ contenida en $D(0, 1 - \delta)$. Como el conjunto $\overline{D}(0, 1 - \delta)$ es compacto, entonces la sucesión $\{f(z_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ tiene una subsucesión $\{f(z_{n_{k_m}})\}_{m=1}^\infty$ que converge a un punto $w \in D(0, 1 - \delta)$, pero como esta sucesión es una subsucesión de la original entonces $\{f(z_n)\}_{n=1}^\infty$ tiene un punto límite en \mathbb{D} . Así, por el teorema 3.3 se tiene que $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ tiene un punto límite en U , es decir, $\beta \in U$ lo que es absurdo. Por tanto, hemos probado que el límite existe y vale $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = 1$.

Definición 3.5. Llamamos *curva o arco* a una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, donde $[a, b]$ es un intervalo en \mathbb{R} . La imagen de la aplicación γ se denomina su *soporte*, denotado por γ^* .

Si esta aplicación es \mathcal{C}^1 a trozos y cada uno de estos trozos tiene un segmento por soporte, entonces la llamamos una *poligonal*.

Veamos algunos ejemplos de aplicaciones analíticas y la posibilidad de extenderlas o no a la frontera.

Ejemplos 3.6. (1) Veamos un ejemplo de una región acotada simplemente conexa U con puntos en la frontera cuya equivalencia conforme no se pueda extender. Consideremos $U = ([0, 1] \times [0, 1]) \setminus \{\{1/n\} \times (0, 1/2] : n = 2, 3, \dots\}$. U es conexo por que en particular es arcoconexo ya que dados dos puntos $z, w \in U$ distintos podemos unirlos por la poligonal siguiente: primero desde z subimos verticalmente hasta una altura h mayor que $1/2$ y menor que 1 , después avanzamos horizontalmente hasta $\text{Re}(w)$ y por último desde w subimos verticalmente hasta la misma altura h , ver figura 3.1. Por otro lado U es simplemente conexo pues $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ es conexo por ser toda la esfera de Riemann menos una porción y añadiendo la parte correspondiente a los segmentos.

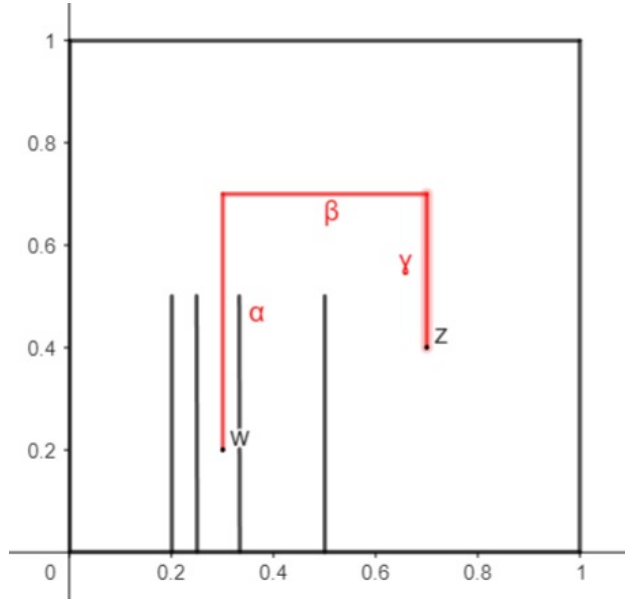


Figura 3.1: Ejemplo 1

Es decir, el camino $\gamma \cdot \beta \cdot \alpha$ une w con z ($\gamma \cdot \beta$ denota gamma concatenado con beta). Sea $\lambda = iy$ con $0 < y < 1/2$ y sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de U tal que $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} iy = \lambda$ con $\text{Im}(z) = y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea f una equivalencia conforme de U en \mathbb{D} , que existe por el *teorema de representación conforme de Riemann*. Supongamos que f se puede extender de manera continua a λ entonces existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $w = f(\lambda)$ y, por ser f continua, $w = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$. Como $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene punto límite en U , por el corolario 3.4 tenemos que $|f(z_n)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, con lo que $|w| = 1$, y $w \in \partial\mathbb{D}$. Sea $\alpha_k = f(z_{n_k})$ y unamos en \mathbb{D} los puntos α_k y α_{k+1} con el segmento $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Consideremos la curva γ construida a partir de la unión de todos los segmentos que unen los α_k y que acaba en w . Entonces, $f^{-1}([\alpha_k, \alpha_{k+1}])$ es un camino en U que une z_{n_k} con $z_{n_{k+1}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y podemos considerar la curva $f^{-1}(\gamma)$. Como necesariamente para hacer un camino que una z_{n_k} con $z_{n_{k+1}}$ hemos de bordear los segmentos de la forma $\{1/n\} \times (0, 1/2]$, entonces para todo punto del segmento $[iy, i/2]$ encontramos puntos de la curva da igual el entorno que tomemos. Así todo punto del segmento $[iy, i/2]$ es un punto límite de $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}([\alpha_k, \alpha_{k+1}])$. De este modo, f^{-1} no puede extenderse de manera continua en $w \in \partial\mathbb{D}$, pues si se pudiese entonces $f^{-1}(\gamma(1)) = f^{-1}(w) = \lambda$. Sin embargo, por la continuidad de γ , debería ser que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(\gamma(t_n)) = f^{-1}(\gamma(1)) = f^{-1}(w) = \lambda$ para toda sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$

de $[0, 1)$ que converja a 1. Pero si consideramos la sucesión $\{s_k\}_{k=1}^\infty$ tal que $\gamma(s_k)$ sea el punto medio del segmento $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, entonces la sucesión tiende a 1 y los $z'_k = f^{-1}(\gamma(s_k))$ conforman una sucesión con $\text{Im}(z'_k) = y'$ para algún $y < y' \leq 1/2$ por la continuidad de γ . Así, como $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{-1}(\gamma(s_k)) = iy' \neq \lambda$, entonces f^{-1} no se puede extender de manera continua a w y por lo tanto no se puede extender f de manera continua a λ .

Veremos ahora que si $\lambda \in \partial U$ es tal que dichas sucesiones no existen, entonces toda equivalencia conforme se podrá extender a $U \cup \{\lambda\}$.

Definición 3.7. Un punto $\beta \in \partial U$ se llama *simple* si para toda sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ en U tal que $z_n \rightarrow \beta$ se puede construir una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \cup \{\beta\}$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ estrictamente creciente en $[0, 1)$ tal que $t_n \rightarrow 1$, $\gamma(t_n) = z_n$ y $\gamma(t) \in U$ para todo $0 \leq t < 1$.

Intuitivamente hablando, podemos construir una curva continua que pase por los puntos de la sucesión y termine en β . En el ejemplo anterior de equivalencia conforme que no se puede extender a la frontera, los puntos considerados no son simples.

Lema 3.8. Sean U un abierto de \mathbb{C} , $z_0 \in U$ y supongamos que la circunferencia $C^*(z_0, r)$ tiene un arco L contenido en el complementario de \bar{U} que subtiende un ángulo mayor que π . Sea g una función continua en \bar{U} que es analítica en U . Si $|g(z)| \leq M$ para todo $z \in \bar{U}$ y $|g(z)| \leq \varepsilon$ para todo $z \in D(z_0, r) \cap \partial U$, entonces $|g(z_0)| \leq \sqrt{\varepsilon M}$.

Demostración:

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z_0 = 0$. Sea $V = U \cap (-U) \cap D(0, r)$. Definamos en \bar{V} la función h dada por $h(z) = g(z)g(-z)$. Veamos que $\bar{V} \subset \bar{U} \cap \overline{(-U)} \cap D(0, r)$. Por las propiedades de la adherencia se tiene que $\bar{V} \subset \bar{U} \cap \overline{(-U)} \cap \bar{D}(0, r)$. Sea $z \in \partial D(0, r)$, es decir $|z| = r$, veamos que entonces $z \notin \bar{U}$ o $z \notin \overline{(-U)}$. Efectivamente, si $z \in L$ entonces $z \notin \bar{U}$. En caso contrario, $-z \in L$, y entonces $-z \notin \bar{U}$, es decir, $z \notin \overline{-U}$ pues observemos que L es conexo en $C^*(0, r)$ y z y $-z$ son extremos de un diámetro, por tanto si ni z ni $-z$ pertenecieran a L este debería ser a lo sumo media circunferencia (abierto) y subtendería un ángulo menor que π . Por tanto, si $z \in \partial V$, entonces $z \in \partial U \cap D(0, r)$ o $z \in \partial(-U) \cap D(0, r)$ pues, al ser V abierto por ser intersección de abiertos se tiene que $\partial V = \bar{V} \setminus V$ y

porque se da la siguiente contención:

$$\begin{aligned}
\bar{V} \setminus V &\subset (\bar{U} \cap \overline{(-U)} \cap D(0, r)) \setminus (U \cap (-U) \cap D(0, r)) \\
&= (\bar{U} \cap (-\bar{U}) \cap D(0, r)) \cap (\mathbb{C} \setminus (U \cap (-U) \cap D(0, r))) \\
&= (\bar{U} \cap \overline{(-U)} \cap D(0, r)) \cap (\overline{\mathbb{C} \setminus U} \cup \overline{\mathbb{C} \setminus (-U)} \cup (\mathbb{C} \setminus D(0, r))) \\
&= (\partial U \cap \overline{(-U)} \cap D(0, r)) \cup (\bar{U} \cap (\partial(-U) \cap D(0, r))) \\
&\subset (\partial U \cap D(0, r)) \cup (\partial(-U) \cap D(0, r)).
\end{aligned}$$

Así, para todo $z \in \partial V$, y por tanto para todo $z \in \bar{V}$ por el principio del módulo máximo, se tiene que $|h(z)| = |g(z)||g(-z)| \leq \varepsilon M$ pues o bien $z \in D(0, r) \cap \partial U$ o bien $-z \in D(0, r) \cap \partial U$ y se puede acotar uno de los factores por ε y el otro por M . En particular, si tomamos $0 = z_0 \in U$ se tiene que $|h(0)| = |g(0)|^2 \leq \varepsilon M$.

Teorema 3.9. Sea U una región acotada y simplemente conexa de \mathbb{C} , y sea $\beta \in \partial U$ simple. Si f es una equivalencia conforme de U en \mathbb{D} , entonces f tiene una extensión continua a $U \cup \{\beta\}$.

Demostración:

Supongamos que f no se puede extender de manera continua a $U \cup \{\beta\}$, es decir, existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ de U que converge a β pero $\{f(z_n)\}_{n=1}^\infty$ no converge. Como $\{f(z_n)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada entonces existen $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ con $w_1 \neq w_2$ tales que $f(z_{2k-1}) \rightarrow w_1$ y $f(z_{2k}) \rightarrow w_2$. Por el corolario 3.4 se tiene que $|w_1| = |w_2| = 1$. Sea p el punto medio del arco positivamente orientado de $\partial \mathbb{D}$ que va de w_1 a w_2 . Sean a y b dos puntos cualesquiera de ese arco que equidisten de p . Denotemos por W_1 la parte del disco \mathbb{D} que se obtiene al trazar la recta que pasa por a y por 0 y que contiene a w_1 . Análogamente denotemos por W_2 la parte del disco \mathbb{D} que se obtiene al trazar la recta que pasa por b y por 0 y que contiene a w_2 (ver figura 3.2 sacada del [1, pág 127]).

Sean γ y $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ la curva y la sucesión de elementos de $[0, 1]$ de la definición de punto simple. Puesto que las subsucesiones $\{f(z_{2k-1})\}_{k=1}^\infty$ y $\{f(z_{2k})\}_{k=1}^\infty$ no cambian su comportamiento si eliminamos un número finito de términos, podemos considerar sin pérdida de generalidad que $f(z_{2k-1}) \in W_1$ y que $f(z_{2k}) \in W_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y, además que $|f(\gamma(t))| > 1/2$ para todo $t \in [0, 1]$. Como $f(\gamma(t_{2k-1})) \in W_1$ y $f(\gamma(t_{2k})) \in W_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces existen x_k e y_k con $t_{2k-1} < x_k < y_k < t_{2k}$ tales que se verifica una de las siguientes posibilidades:

- (I) $f(\gamma(x_k)) \in [0, a]$, $f(\gamma(y_k)) \in [0, b]$ (ambos sin los extremos), y $f(\gamma(t))$ está en el sector abierto delimitado por los puntos a, b y 0 para todo t tal que $x_k < t < y_k$.

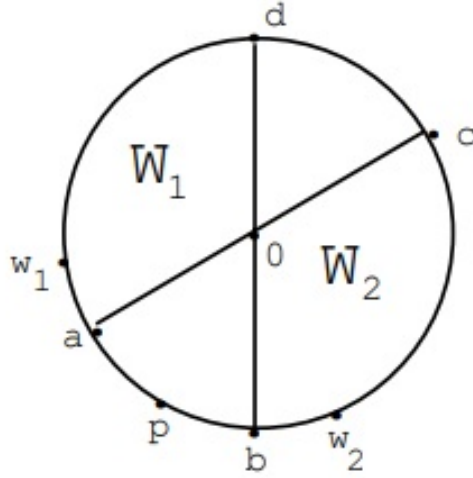


Figura 3.2: Construcción de W_1 y W_2

- (II) $f(\gamma(x_k)) \in [0, d]$, $f(\gamma(y_k)) \in [0, c]$ (ambos sin los extremos), y $f(\gamma(t))$ está en el sector abierto delimitado por los puntos d , c y 0 para todo t tal que $x_k < t < y_k$.

Observemos que el caso en el que están en partes “opuestas” del segmento, no se puede dar por continuidad de γ , es decir, no puede ser que se den los casos en los que $f(\gamma(x_k)) \in [0, a]$ y $f(\gamma(y_k)) \in [0, c]$ o $f(\gamma(x_k)) \in [0, d]$ y $f(\gamma(y_k)) \in [0, b]$. Puesto que se verifica una de las dos condiciones para infinitos $k \in \mathbb{N}$, vamos a suponer que se verifica el primer caso. Sea K el conjunto de los k tal que se verifica (I). Para cada $k \in K$ se define γ_k por:

$$\gamma_k(t) = \begin{cases} \frac{t}{x_k} f(\gamma(x_k)), & \text{si } 0 \leq t \leq x_k \\ f(\gamma(t)), & \text{si } x_k \leq t \leq y_k \\ \frac{1-t}{1-y_k} f(\gamma(y_k)), & \text{si } y_k \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Así, γ_k es el camino cerrado cuya trayectoria γ_k^* consiste en $[0, f(\gamma(x_k))] \cup \{f(\gamma(t)) : x_k \leq t \leq y_k\} \cup [f(\gamma(y_k)), 0]$ (ver figura 3.3 sacada de [1, pág 128]). Sea U_k la componente de $\mathbb{C} \setminus \gamma_k^*$ tal que $\frac{1}{2}p \in U_k$. Entonces $\partial U_k \subset \gamma_k^*$ pues $|f(\gamma(t))| > 1/2$ y $|\frac{1}{2}p| = 1/2$. Es más, $U_k \subset \mathbb{D}$ pues si hacemos el índice $\eta(\gamma_k, \frac{1}{2}p)$ obtenemos 1, ya que $|\gamma_k(t)| > 1/2$ para todo $x_k \leq t \leq y_k$, mientras

que el índice de cualquier punto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ es 0.

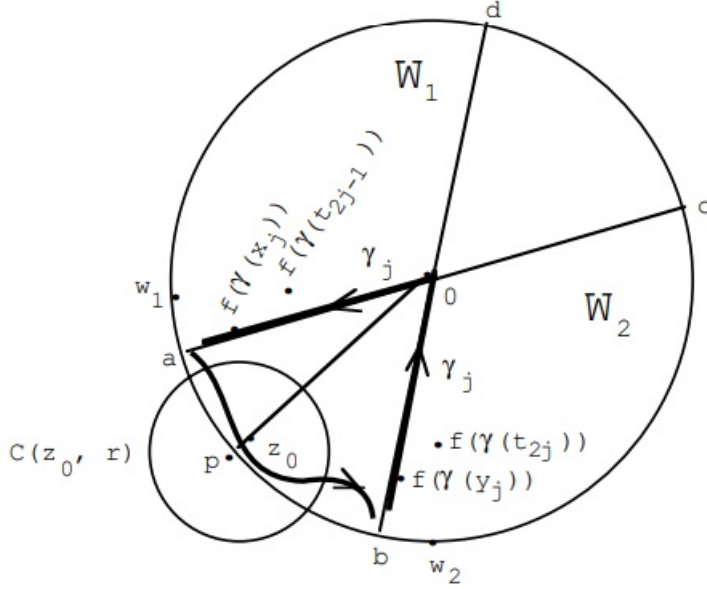


Figura 3.3: Comportamiento del camino γ_k .

Sea r un número positivo con $r < \frac{1}{2}|a - b|$ y escojamos un punto z_0 del segmento $[0, p]$ suficientemente cerca de p como para que el círculo $C(z_0, r)$ tenga un arco de longitud más grande que $\pi \cdot r$ en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, es decir, subtendiendo un ángulo mayor que π . Existe un k_0 tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0$ se tiene que $|f(\gamma(t))| > |z_0|$ para todo $t \in [t_{2k-1}, t_{2k}]$ (pues $|z_0| < |p| = 1 = |w_1|$), de esta manera, para todo $k \geq k_0$ se tiene que $z_0 \in U_k$. Es más, si $z \in \partial U_k \cap D(z_0, r)$, entonces $z \in \{f(\gamma(t)) : t_{2k-1} \leq t \leq t_{2k}\}$ y por tanto $f^{-1}(z) \in \gamma([t_{2k-1}, t_{2k}])$. Definamos

$$\varepsilon_k = \sup\{|f^{-1}(z) - \beta| : z \in \partial U_k \cap D(z_0, r)\} \leq \sup\{|\gamma(t) - \beta| : t \in [t_{2k-1}, t_{2k}]\}$$

y

$$M = \sup\{|f^{-1}(z) - \beta| : z \in \mathbb{D}\}.$$

Como $M \geq \sup\{|f^{-1}(z) - \beta| : z \in \overline{U_k}\}$ entonces por el lema 3.8 se tiene que $|f^{-1}(z_0) - \beta| \leq \sqrt{\varepsilon_k M}$. Como ε_k se puede hacer tan pequeño como queramos a medida que hacemos k tender a infinito (pues $\gamma(t_n) \rightarrow \gamma(1) = \beta$), se tiene que $f^{-1}(z_0) = \beta$. Pero esto es absurdo pues $f^{-1}(z_0) \in U$. En el caso en el que se verifique (II) la demostración es análoga a la presentada anteriormente.

Nos interesa demostrar ahora que si extendemos una equivalencia conforme a dos puntos β_1 y β_2 simples de la frontera, entonces la extensión es inyectiva, es decir, que $f(\beta_1) \neq f(\beta_2)$. Es natural pedir esto porque si no pudiéramos asegurar esta propiedad el problema de extensión a la frontera no tendría sentido, pues no mantendríamos el carácter biyectivo de la aplicación de la que partimos.

Lema 3.10. Sea g una equivalencia conforme de U , abierto, en $g(U)$. Entonces, la medida de Lebesgue o área de $g(U)$ es $\int_U |g'|^2 dx dy$.

Demostración:

Sea $g(z) = u(z) + iv(z)$ donde $u(z)$ es su parte real y $v(z)$ su parte imaginaria. Entendamos g como un difeomorfismo o cambio de variables de $U \subset \mathbb{R}^2$ en \mathbb{R}^2 . Puesto que g es analítica entonces u y v tienen derivadas parciales continuas de cualquier orden. Entendiendo g como transformación, su Jacobiano es

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |g'|^2$$

por las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Así, por el *teorema del cambio de variable* se tiene que

$$m(g(U)) = \int_{g(U)} 1 dudv = \int_U |\mathcal{J}_g| dx dy = \int_U |g'|^2 dx dy$$

que es lo que queríamos probar.

Teorema 3.11. Sea U una región acotada y simplemente conexa. Sea f una equivalencia conforme de U en \mathbb{D} . Si β_1 y β_2 son puntos simples distintos de la frontera de U y f se extiende de manera continua a $U \cup \{\beta_1, \beta_2\}$, entonces $f(\beta_1) \neq f(\beta_2)$.

Demostración:

Supongamos que β_1 y β_2 son puntos simples distintos de la frontera de U y que $f(\beta_1) = f(\beta_2)$. Comprobaremos que en estas condiciones $\beta_1 = \beta_2$. Para simplificar un poco la prueba y la notación asumiremos que, sin pérdida de generalidad, \mathbb{D} es $D(1, 1)$ (haciendo una simple traslación) y que $f(\beta_1) = f(\beta_2) = 0$.

Como β_1 y β_2 son puntos simples, entonces para $j = 1, 2$ existen curvas γ_j en $U \cup \{\beta_j\}$ tales que $\gamma_j([0, 1)) \subset U$ y $\gamma_j(1) = \beta_j$. Sea $g = f^{-1}$. Por continuidad, como $\lim_{s, t \rightarrow 1} (\gamma_2(t) - \gamma_1(s)) = \beta_2 - \beta_1$, existe $\tau < 1$ con $\tau < s, t < 1$ tal que $|\gamma_2(t) - \gamma_1(s)| \geq \frac{1}{2} |\beta_2 - \beta_1|$ para todo $\tau < s, t < 1$. Además, sea $\delta > 0$

Puesto que $\theta(r) \leq \frac{\pi}{2}$, se tiene que

$$\frac{|\beta_2 - \beta_1|^2}{4\pi r} \leq r \int_{-\theta(r)}^{\theta(r)} |g'(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Por último integremos respecto de r desde 0 hasta δ :

$$\int_0^\delta \int_{-\theta(r)}^{\theta(r)} |g'(re^{i\theta})|^2 r d\theta dr \leq \iint_L |g'(x + iy)|^2 dx dy;$$

donde hemos usado la inversa del cambio de variables clásico a coordenadas polares y donde L es el abierto con forma de lente cuya frontera está formada por arcos de $C^*(0, \delta)$ y $C^*(1, 1)$; ver figura 3.4 sacada del [1, pág 129]. Por el lema 3.10, $\iint_L |g'|^2 dx dy$ es el área de $g(L)$. Puesto que $g(L) \subset U$ y U es acotado, se tiene que $g(L)$ tiene área finita. Si nos fijamos en la parte izquierda de la desigualdad

$$\frac{|\beta_2 - \beta_1|^2}{4\pi r} \leq r \int_{-\theta(r)}^{\theta(r)} |g'(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

al integrar entre 0 y δ dicha integral vale ∞ salvo que $\beta_2 = \beta_1$. Así pues, hemos probado que $f(\beta_1) = f(\beta_2)$ implica que $\beta_2 = \beta_1$.

Probemos ahora que $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ se puede extender a un homeomorfismo de \bar{U} en $\bar{\mathbb{D}}$ si todo punto de la frontera de U es simple.

Teorema 3.12 (de Osgood-Charathéodory). Supongamos que U es una región acotada, simplemente conexa y con la propiedad de que todo punto de la frontera es simple. Si $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ es una equivalencia conforme, entonces f se puede extender a un homeomorfismo entre \bar{U} y $\bar{\mathbb{D}}$.

Demostración:

Por el teorema 3.9, para cada $\beta \in \partial U$ podemos extender de manera continua f a $U \cup \{\beta\}$. Supongamos que hemos extendido f de manera continua como antes a cada $\beta \in \partial U$. De esta manera, la extensión de f es una aplicación de \bar{U} en $\bar{\mathbb{D}}$ y, por el teorema 3.11, se tiene que es inyectiva. Es más, f es continua en cada punto $\beta \in \partial U$ pues si $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en \bar{U} tal que $z_n \rightarrow \beta$ entonces para cada n existe un $w_n \in U$ con $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(z_n) - f(w_n)| < \frac{1}{n}$ por el teorema 3.9. De nuevo, por el teorema 3.9, $f(w_n) \rightarrow f(\beta)$ pues $w_n \rightarrow \beta$ y $w_n \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ($|w_n - \beta| \leq |w_n - z_n| + |z_n - \beta| < \frac{1}{n} + \varepsilon$). Es decir, toda sucesión en la adherencia que converja a un punto de la frontera se puede aproximar por

una sucesión dentro del abierto sin perder la convergencia a dicho punto de la frontera utilizando la extensión con un único punto. De esta manera, $|f(z_n) - f(\beta)| \leq |f(z_n) - f(w_n)| + |f(w_n) - \beta| < \frac{1}{n} + \varepsilon$ luego $f(z_n) \rightarrow f(\beta)$ lo que prueba la continuidad de f en \bar{U} . Por último, notemos que $\mathbb{D} \subset f(\bar{U}) \subset \bar{\mathbb{D}}$ por construcción. Además, dado que $f(\bar{U})$ es compacto por ser la imagen por una aplicación continua de un compacto, es cerrado y entonces $f(\bar{U}) = \bar{\mathbb{D}}$. Por tanto, f es una aplicación continua y biyectiva entre \bar{U} y $\bar{\mathbb{D}}$ lo que implica que f^{-1} es también continua, pues es un resultado conocido de topología que una aplicación que parte de un espacio topológico compacto y llega a un espacio topológico Hausdorff es cerrada, y por tanto que f es un homeomorfismo.

Observación 3.13. Notemos que se está cometiendo un abuso de notación constantemente pues se usa el símbolo f para referirse tanto a la equivalencia conforme de U en \mathbb{D} como a su extensión a la frontera. Esto se debe a que si consideramos f la equivalencia conforme y \tilde{f} su extensión entonces $f = \tilde{f}|_U$. Será el contexto el que dictamine a cuál de las dos aplicaciones nos referimos.

Este teorema tiene numerosas aplicaciones, veamos algunas de ellas.

Teorema 3.14. Supongamos que $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es inyectiva y analítica en \mathbb{D} . Si $g(\mathbb{D})$ tiene área finita, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty$.

Demostración:

En la prueba del teorema 3.11, hemos utilizado el hecho de que para subconjuntos abiertos $L \subset \mathbb{D}$,

$$\iint_L |g'|^2 dx dy$$

es precisamente el área de $g(L)$, donde g es una función analítica e inyectiva en \mathbb{D} . Supongamos que $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con $z \in \mathbb{D}$. Entonces $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Si hacemos el cambio a polares tomando como subconjunto $L = \mathbb{D}$, se tiene que

$$\iint_{\mathbb{D}} |g'(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta = \int_0^1 r \int_{-\pi}^{\pi} |g'(re^{i\theta})|^2 d\theta dr.$$

Pero si $0 \leq r < 1$, entonces

$$\begin{aligned} |g'(re^{i\theta})|^2 &= g'(re^{i\theta})\overline{g'(re^{i\theta})} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \sum_{m=1}^{\infty} m\overline{a_m} r^{m-1} e^{-i(m-1)\theta} \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} nma_n\overline{a_m} r^{m+n-2} e^{i(n-m)\theta}. \end{aligned}$$

Como

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

y la serie

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} nma_n\overline{a_m} r^{m+n-2} e^{i(n-m)\theta}$$

converge uniformemente en θ para cada r fijo (pues es la serie de potencias de g' y su conjugada que tienen ambas radio de convergencia 1 por tenerlo g y estamos integrando en el compacto $C^*(0, r) \subset B(0, 1)$), podemos integrar término a término para obtener

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g'(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k|^2 r^{2k-2} \geq 2\pi \sum_{k=1}^N k^2 |a_k|^2 r^{2k-2}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ fijo por ser una serie de términos positivos. Multiplicando ahora por r e integrando respecto a r en la desigualdad, se tiene que

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_0^{\rho} r \int_{-\pi}^{\pi} |g'(re^{i\theta})|^2 d\theta dr = \int_{B(0,1)} |g'(x)|^2 dx dy \geq \lim_{\rho \rightarrow 1^-} 2\pi \sum_{k=1}^N \frac{k^2 |a_k|^2 \rho^{2k}}{2k}$$

para cada $N \in \mathbb{N}$ fijo. Si el límite de la izquierda cuando $\rho \rightarrow 1^-$, cuyo valor es el área de $g(\mathbb{D})$ por el teorema de la convergencia dominada, es finito, entonces

$$\sum_{k=1}^N k |a_k|^2 \leq \frac{m(g(\mathbb{D}))}{\pi}$$

para cada $N \in \mathbb{N}$ fijo, por tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2 < \infty.$$

Teorema 3.15. Sea $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una aplicación biyectiva y analítica de \mathbb{D} en U , una región acotada tal que todo punto de la frontera es simple. Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente en $\overline{\mathbb{D}}$ a (la extensión de) g en $\overline{\mathbb{D}}$.

Demostración:

Puesto que \mathbb{D} es un abierto conexo acotado de \mathbb{C} y $g(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^m a_n e^{in\theta}$ es una función holomorfa en \mathbb{D} , por ser suma de tales funciones, y continua en $\overline{\mathbb{D}}$, por ser suma de tales funciones, por el *principio del módulo máximo* es suficiente con probar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente hacia $g(z)$ para $|z| = 1$, ya que la convergencia uniforme se escribe en los siguientes términos: dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|g(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ y todo z con $|z| = 1$, y, como la función $g(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k$ es continua en \overline{U} por ser suma finita de funciones continuas en \overline{U} entonces alcanza su máximo en la frontera de U . Es decir, basta probar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ converge uniformemente en θ hacia $g(e^{i\theta})$. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $0 < r < 1$, se tiene que

$$|g(e^{i\theta}) - \sum_{n=0}^m a_n e^{in\theta}| \leq |g(e^{i\theta}) - g(re^{i\theta})| + |g(re^{i\theta}) - \sum_{n=0}^m a_n e^{in\theta}|.$$

Puesto que g es uniformemente continua en $\overline{\mathbb{D}}$, se tiene que $|g(e^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|$ converge a 0 uniformemente en θ cuando $r \rightarrow 1^-$, por tanto el primer término del lado derecho converge a 0 cuando $r \rightarrow 1^-$ uniformemente en θ . Fijémonos a continuación en el segundo. Si k es un número natural más pequeño que m , entonces como $g(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$ el segundo término se puede escribir

como

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=0}^k a_n(r^n - 1)e^{in\theta} + \sum_{n=k+1}^m a_n(r^n - 1)e^{in\theta} + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right| \\
& \leq \sum_{n=0}^k (1 - r^n)|a_n| + \sum_{n=k+1}^m (1 - r^n)|a_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| r^n \\
& \leq \sum_{n=0}^k n(1 - r)|a_n| + \sum_{n=k+1}^m n(1 - r)|a_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| r^n
\end{aligned}$$

pues $\frac{1-r^n}{1-r} = 1 + r + \dots + r^{n-1} < n$. Para continuar con la acotación escribimos $n(1 - r)|a_n| = (\sqrt{n}(1 - r))(\sqrt{n}|a_n|)$ y $|a_n| r^n = \frac{\sqrt{n}|a_n| r^n}{\sqrt{n}}$ y aplicamos la desigualdad de Schwarz. Además, como $n \leq k$ en el primer término, se tiene por tanto

$$\begin{aligned}
& k(1 - r) \sum_{n=0}^k |a_n| + \left(\sum_{n=k+1}^m n(1 - r)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=k+1}^m n|a_n|^2 \right)^{1/2} \\
& + \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2$ es convergente por el teorema anterior, dado $\varepsilon > 0$,

existe $k > 0$ tal que $\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} n|a_n|^2 \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{3}$. Fijemos dicho k y para $m > k$

denotemos por $r_m = \frac{m-1}{m}$ entonces $k(1 - r_m) \sum_{n=0}^k |a_n| \leq \frac{k}{m} \sum_{n=0}^k |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para m suficientemente grande. Para el término del medio se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=k+1}^m n(1 - r_m)^2 \right)^{1/2} &= \left(\sum_{n=k+1}^m n \frac{1}{m^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{m} \left(\sum_{n=k+1}^m n \right)^{1/2} \\
&< \frac{1}{m} \left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^{1/2} < 1
\end{aligned}$$

y

$$\left(\sum_{n=k+1}^m n|a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} n|a_n|^2 \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por último, para el tercer término se tiene que

$$\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{r_m^{2(m+1)}}{m+1} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_m^{2n} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{m+1} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_m^n \right)^{1/2}$$

que es lo mismo que

$$\left(\frac{1}{m+1} \frac{1}{1-r_m}\right)^{1/2} = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{1/2} < 1$$

y, por tanto,

$$\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n}\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq K$, entonces

$$\left|g(e^{i\theta}) - \sum_{n=0}^m a_n e^{in\theta}\right| < \varepsilon$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, como queríamos.

Observación 3.16. El teorema anterior se puede usar para dar ejemplos de series de potencias uniformemente convergentes que no lo son absolutamente. Es decir, series de potencias que convergen uniformemente pero a las que no se les puede aplicar el criterio M de Weierstrass. Sin embargo nos hace falta el siguiente teorema.

Teorema 3.17. Supongamos que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ para $z \in \mathbb{D}$, y

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Entonces para cada θ ,

$$\int_0^{1^-} |f'(re^{i\theta})| dr = \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \int_0^{\rho} |f'(re^{i\theta})| dr < \infty.$$

Demostración:

Si $0 \leq r \leq \rho < 1$ entonces para todo θ se tiene que

$$f'(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho} |f'(re^{i\theta})| dr &\leq \int_0^{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} dr = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\rho} n |a_n| r^{n-1} dr \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \rho^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \end{aligned}$$

donde en la igualdad hemos aplicado el teorema de la convergencia dominada para series ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\rho} n|a_n|r^{n-1}dr < \infty$.

Observación 3.18. Para cada θ , $\int_0^1 |f'(re^{i\theta})|dr$ es la longitud de la imagen por f del radio $[0, e^{i\theta}]$ de $\overline{\mathbb{D}}$. Si $\gamma(r) = re^{i\theta}$ para $0 \leq r \leq 1$, entonces la longitud de $f \circ \gamma$ viene dada por

$$\int_0^1 |(f \circ \gamma)'(r)|dr = \int_0^1 |f'(re^{i\theta})e^{i\theta}|dr = \int_0^1 |f'(re^{i\theta})|dr.$$

Por tanto el teorema 3.17 se puede entender geoméricamente como que f transforma los radios de $\overline{\mathbb{D}}$ en arcos de longitud finita.

Podemos ahora dar un método de construcción de series de potencias que convergen uniformemente pero no absolutamente. Sea Ω la región acotada, conexa y simplemente conexa de la figura 3.7 sacada de [1, pág 135]. Entonces todo punto de la frontera de Ω es simple salvo quizás 0. Veamos que el 0 es también simple. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Ω tal que $z_n \rightarrow 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $t_n = \frac{n-1}{n}$, entonces existe un camino poligonal $\gamma_n : [t_n, t_{n+1}] \rightarrow \Omega$ tal que $\gamma_n(t_n) = z_n$ y $\gamma_n(t_{n+1}) = z_{n+1}$ y tal que para todo $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, $\text{Re}(\gamma_n(t))$ esta entre $\text{Re}(z_n)$ y $\text{Re}(z_{n+1})$. Si definimos $\gamma = \cup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$, entonces γ es una aplicación continua de $[0, 1)$ en Ω y $\gamma(t) = \gamma_n(t)$ para todo $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Es más, $\gamma(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 1^-$. Por tanto 0 es un punto simple de Ω .

Por tanto por el *teorema de Osgood-Charathéodory*, existe un homeomorfismo f de $\overline{\mathbb{D}}$ en $\overline{\Omega}$ tal que f es analítica en \mathbb{D} . Escribamos $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

para $z \in \mathbb{D}$. Por el teorema 3.15 la serie converge uniformemente en $\overline{\mathbb{D}}$. Sea ahora $e^{i\theta}$ el punto de $\partial\mathbb{D}$ tal que $f(e^{i\theta}) = 0$. Puesto que f es un homeomorfismo, f envía el radio de $\overline{\mathbb{D}}$ que termina en $e^{i\theta}$ en un arco de $\Omega \cup \{0\}$ que termina en 0. Es más, la imagen del arco en $\Omega \cup \{0\}$ no puede tener longitud finita, pues el segmento que une los puntos de corte de las rectas internas a $y = x$ e $y = -x$ y la frontera de Ω tiene longitud más pequeña que la de la porción de dicho arco en esa región (ver figura 3.5). Así, construyendo el triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa dichos segmentos (ver figura 3.6) observamos que estos segmentos tienen mayor longitud que el cateto mayor y a su vez que la longitud de la porción γ de este que es $1/(kn)$ (en función de las rectas $y = x/k$ e $y = -x/k$ elegidas). Por tanto la longitud del arco es mayor o igual que la suma de la serie armónica por la constante $1/k$ y en consecuencia es infinita. Recordemos que el teorema 3.17 se puede entender geoméricamente como que f transforma radios de \mathbb{D} en arcos de

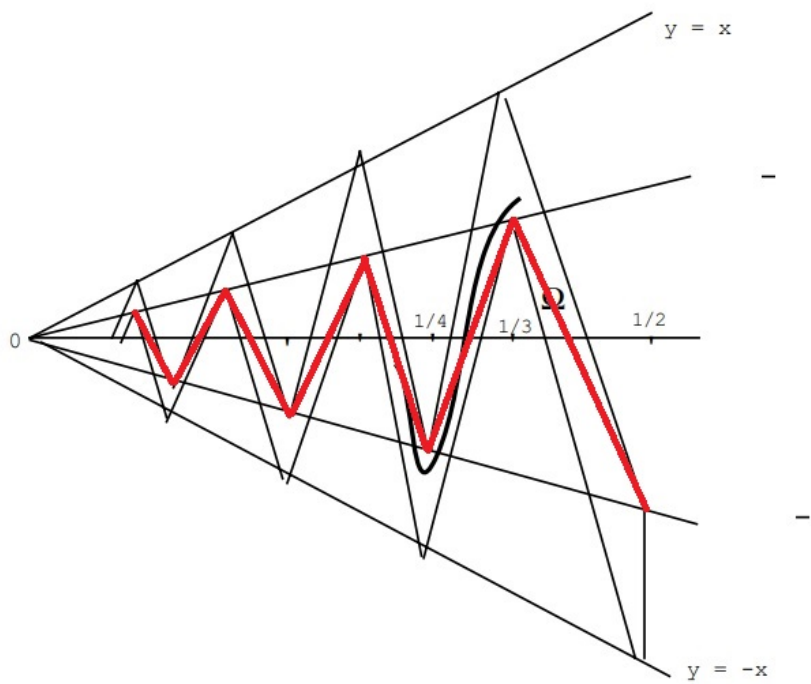


Figura 3.5: Segmentos que unen los puntos de corte.

longitud finita. Por tanto, en este caso ha de ser necesariamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

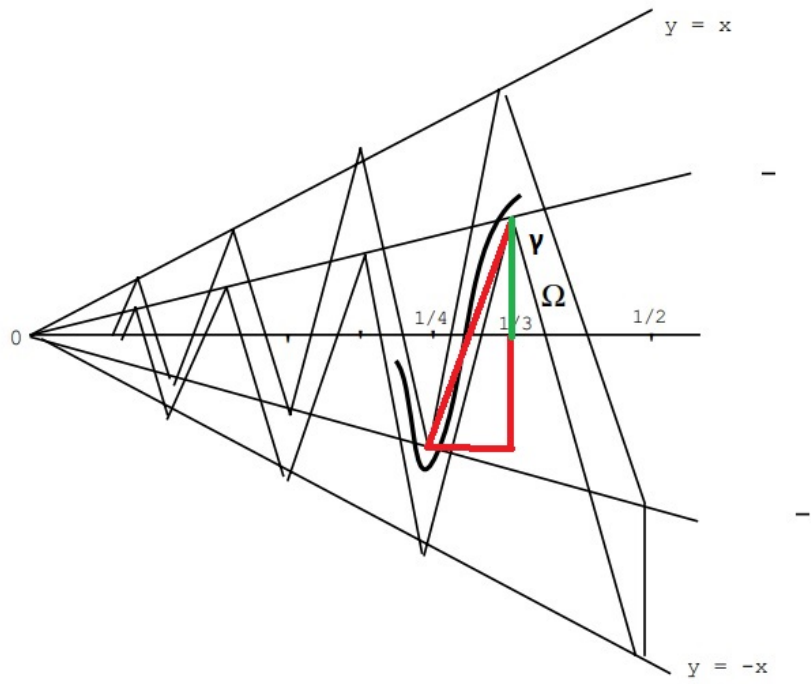


Figura 3.6: Triángulo expuesto en la observación.

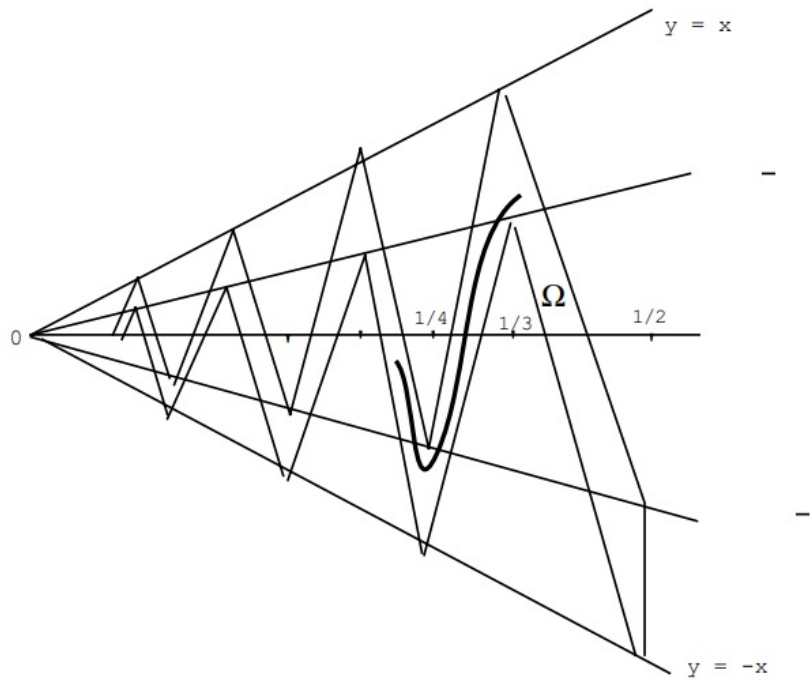


Figura 3.7: Construcción de Ω .

Capítulo 4

Transformaciones de Schwarz-Christoffel

A lo largo de la asignatura “*Variable Compleja*” se ha presentado cómo las potencias (y raíces), la exponencial, las ramas del logaritmo y las homografías o transformaciones de Möbius (estudiadas en el apéndice B) proporcionan numerosos ejemplos de transformaciones conformes entre diferentes tipos de recintos que aparecen de forma natural en las aplicaciones, como pueden ser: discos, semiplanos o sectores en general, bandas o semibandas, regiones limitadas por círculos generalizados en \mathbb{C} , ... Hasta ahora hemos comprobado que efectivamente si U cumple unas ciertas propiedades podemos garantizar la existencia de una equivalencia conforme f de U en \mathbb{D} . Es más, hemos garantizado la posibilidad de extender f de manera continua de \bar{U} en $\bar{\mathbb{D}}$ siempre que los puntos de la frontera de U sean simples. Sin embargo, no hemos dado ninguna forma explícita ni cerrada para este tipo de equivalencias conformes en ningún caso. Así pues, el objetivo de esta sección es usar el principio de simetría para encontrar una fórmula explícita para una equivalencia conforme que envíe un semiplano en el interior de un polígono. Una vez obtenida esta aplicación, bastaría con componer con la *transformación de Möbius* dada por $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$, que envía el semiplano superior en \mathbb{D} , para obtener la representación conforme del polígono en el disco unidad.

4.1. Simetría

Veamos primero algunos resultados relativos a la simetría de las funciones analíticas y cómo podemos mediante estos resultados extender las funciones analíticamente a dominios más grandes. También daremos fórmulas explícitas de casos simples para aplicaciones conformes entre cierto tipo de dominios.

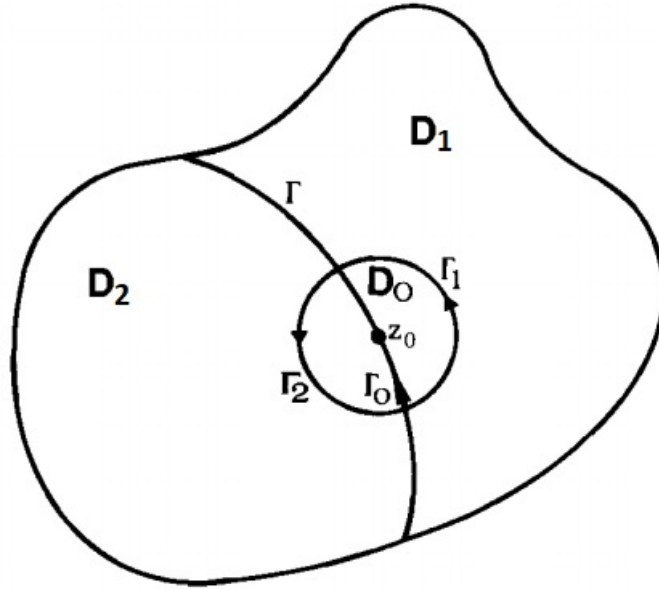


Figura 4.1: Construcción de D_0

Teorema 4.1. Sean D_1 y D_2 dos regiones disjuntas cuyas fronteras tienen el soporte Γ de un arco γ en común, donde γ es una curva \mathcal{C}^1 y regular. Sean f_i funciones analíticas en D_i y continuas en $D_i \cup \Gamma$ para $i = 1, 2$ y tales que $f_1(z) = f_2(z)$ para $z \in \Gamma$. La función f definida por

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{si } z \in D_1, \\ f_1(z) = f_2(z), & \text{si } z \in \Gamma, \\ f_2(z), & \text{si } z \in D_2 \end{cases}$$

es analítica en $D = D_1 \cup \Gamma \cup D_2$

Demostración:

Basta probar que f es analítica en todo punto de Γ . Sea $z_0 \in \Gamma$, y sea $\rho > 0$ tal que:

- (1) El disco $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$ está contenido en D ,
- (2) La frontera de D_0 , Γ_ρ se interseca con Γ en exactamente dos puntos pues el arco al ser una curva \mathcal{C}^1 y regular podemos hacer el disco D_0 lo suficientemente pequeño como para que intereseque de esta manera.

Llamamos Γ_i a la porción de Γ_ρ que está en D_i y Γ_0 a la porción de Γ que está contenida en D_0 (ver la figura 4.1 sacada de [3, pág 388]). Apliquemos ahora la *fórmula integral de Cauchy* a los conjuntos $D_0 \cap D_i$ para $i = 1, 2$ cuyas fronteras son $\Gamma_1 - \Gamma_0$ y $\Gamma_2 + \Gamma_0$ respectivamente. Si $z \in D_0 \cap D_1$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 - \Gamma_0} \frac{f_1(t)}{t - z} dt = f_1(z).$$

Si $z \in D_0 \cap D_2$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2 + \Gamma_0} \frac{f_2(t)}{t - z} dt = f_2(z).$$

Sumando las integrales se obtiene que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(t)}{t - z} dt = \begin{cases} f_1(z), & \text{si } z \in D_0 \cap D_1, \\ f_2(z), & \text{si } z \in D_0 \cap D_2. \end{cases}$$

Puesto que la función

$$F(z, w) = \frac{f(w)}{w - z}$$

es continua en $D_0 \times \Gamma_\rho$, entonces por el *teorema de holomorfía bajo el signo integral* se tiene que la función definida por la integral es continua en D_0 . De esta manera $F_0(z) = f(z)$ incluso en Γ_0 por la continuidad. De nuevo por el *teorema de holomorfía bajo el signo integral* como

$$F(z, w) = \frac{f(w)}{w - z}$$

es continua y holomorfa en $D_0 \times \Gamma_\rho$ entonces $F_0(z)$ es holomorfa. Es decir,

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(t)}{t - z} dt = f(z)$$

para $z \in D_0$ es continua y holomorfa. Por tanto f definida como en las hipótesis es analítica en $D = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$.

Observación 4.2. El teorema nos dice que si tenemos dos funciones analíticas que son una extensión continua de la otra entonces son extensiones analíticas en realidad. En este marco teórico tiene cabida el apéndice B pues hemos estudiado ahí que los círculos generalizados tienen por imagen a círculos generalizados por transformaciones de Möbius y que puntos simétricos tienen por imagen puntos simétricos.

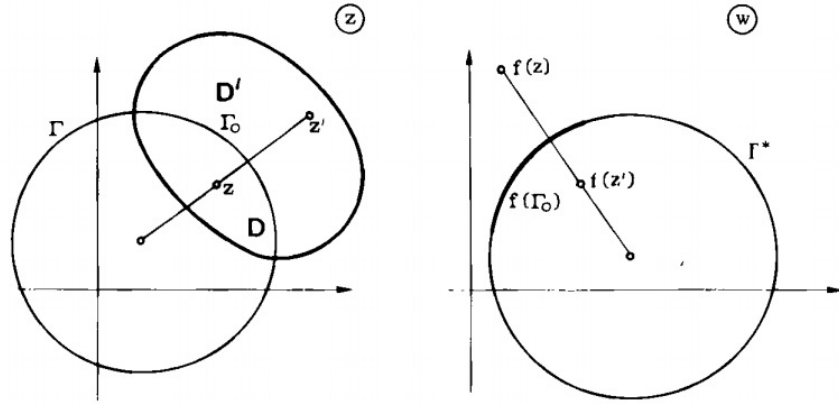


Figura 4.2: Puntos simétricos respecto de Γ y Γ^*

Teorema 4.3 (*principio de reflexión*). Sea Γ un círculo generalizado y sea D una región del plano complejo extendido que no interseca a Γ pero cuya frontera contiene un subarco no degenerado Γ_0 de Γ , es decir, un subarco que no se reduce a un único punto. Sea f una función analítica en D y continua en $D \cup \Gamma_0$ y supongamos que $f(\Gamma_0) \subset \Gamma^*$ con Γ^* un círculo generalizado. Entonces f se puede extender de manera analítica a D' , la reflexión de D respecto de Γ . Si z' es el punto simétrico de z respecto de Γ y w^* es el simétrico de w respecto de Γ^* , entonces la extensión viene dada por

$$f(z') = f(z)^*$$

con $z \in D$. Esta fórmula nos dice que los valores que toma f en puntos simétricos respecto de Γ deben ser puntos simétricos respecto de Γ^* (ver figura 4.2 sacada de [3, pág 389]).

Demostración:

Sean T y T^* dos transformaciones de Möbius que transforman Γ y Γ^* en el eje de los números reales. Es decir, $\Lambda = T(\Gamma_0)$ es un intervalo abierto del eje de los reales. La función dada por $g_1 = T^* \circ f \circ T^{-1}$ es analítica en $E = T(D)$ y continua en $E \cup \Lambda$. Definimos ahora una función g_2 en $\bar{E} = T(D')$ reflejando los valores de g_1 , es decir,

$$g_2(z) = \overline{g_1(\bar{z})}$$

con $z \in \bar{E}$. Entonces g_2 es analítica en \bar{E} y continua en $\bar{E} \cup \Lambda$ pues

$$g_2(z) = \overline{g_1(\bar{z})} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\bar{z})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n(\bar{z})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n$$

para todo $z \in \overline{E}$. Es más, para todo $z \in \Lambda$ se tiene que $g_1(z) = g_2(z)$ (pues son valores reales). Por el teorema 4.1, la función g definida por

$$g(z) = \begin{cases} g_1(z), & \text{si } z \in E \cup \Lambda, \\ g_2(z), & \text{si } z \in \overline{E} \cup \Lambda. \end{cases}$$

es analítica en $E \cup \Lambda \cup \overline{E}$. Así pues, si consideramos la función

$$\tilde{f} = (T^*)^{-1} \circ g \circ T,$$

que coincide en A con la función original f , es analítica en $D \cup \Gamma_0 \cup D'$. De esta manera, los puntos simétricos con respecto de Γ son imagen por una transformación de Möbius de puntos simétricos con respecto del eje de los reales y como el eje de los reales se envía sobre Γ^* entonces son puntos simétricos respecto de Γ^* .

Veamos algunas aplicaciones del principio de reflexión

Teorema 4.4. Sean $0 < \rho_1, \rho_2 < 1$ y sean D_1 y D_2 las coronas circulares dadas por $\rho_1 < |z| < 1$ y $\rho_2 < |z| < 1$ respectivamente. Si la función f es una aplicación conforme de D_1 en D_2 de manera que es continua en $\overline{D_1}$ y envía $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho_1\}$ en $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho_2\}$, entonces $\rho_1 = \rho_2$ y $f(z) = cz$ para algún $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$

Demostración:

Consideremos $D_1 = D_1^{(0)}$. Por el *principio de reflexión* podemos extender de manera analítica a cada uno de los conjuntos dados por $D_1^{(k)} = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1^{k+1} < |z| < \rho_1^k\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Notemos que para poder hacerlo simplemente consideramos la reflexión de cada uno de estos conjuntos con respecto del círculo interior, en estas regiones la función f es continua y por tanto estamos en las condiciones del *principio de reflexión* luego f se puede extender analíticamente a la reflexión de la reflexión de los conjuntos, que son el propio conjunto. Ahora bien, los valores que toma f en estas extensiones están en los conjuntos $D_2^{(k)} = \{z \in \mathbb{C} : \rho_2^{k+1} < |z| < \rho_2^k\}$. De esta manera conseguimos definir f como una inyección analítica del disco punteado $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ en sí mismo. Puesto que f es acotada sabemos que la singularidad en el cero es evitable. Notemos además que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ pues cuando nos acercamos al 0 la función f toma valores en el conjunto $D_2^{(k)}$ con $k \rightarrow \infty$. Así, si definimos $f(0) = 0$ obtenemos una función inyectiva del disco unidad D en sí mismo que deja al origen

fijo. Por el teorema 2,5 se tiene que existe λ unimodular tal que $f = \lambda\varphi_a$, recordemos que $a \in D(0, 1)$ se elije de manera que $f(a) = 0$, en este caso $a = 0$. Además, $\varphi_0(z) = z$ por tanto $f(z) = \lambda z$ para cierto λ unimodular. Por tanto f es un giro y necesariamente $\rho_1 = \rho_2$ pues $D_2 = f(D_1) = \lambda D_1$ donde $\lambda D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |\lambda z| < 1\} = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < 1\} = D_1$.

Observación 4.5. Sea ahora D una región doblemente conexa, es decir, una región tal que para cada par de puntos distintos existen dos caminos distintos que no se pueden deformar el uno en el otro (no son homótopos). Supongamos que D se puede enviar conformemente y biyectivamente a la región anular $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$ con $\rho_1 < \rho_2 < \infty$. Si llamamos módulo de D al ratio dado por $\mu = \rho_2/\rho_1$ entonces este ratio está determinado de manera única por D . Supongamos que f y g son dos aplicaciones conformes y biyectivas de D en dos regiones anulares con ratios μ_f y μ_g , la función $f \circ g^{-1}$ envía conforme y biyectivamente una región anular en la otra pero entonces los radios han de ser iguales y por tanto los ratios también por el teorema 4,4, y, de esta manera, $f = g$.

Definición 4.6. Sea s una aplicación conforme inyectiva y sea S su dominio de definición. Sea Λ un segmento abierto del eje real que esté contenido en S . Entonces llamamos *arco analítico* Γ a la imagen de Λ por s .

Teorema 4.7. Sea D un dominio de Jordan cuya frontera Γ contiene un arco analítico Γ_0 . Si f envía D sobreyectivamente en \mathbb{D} y es continua en $D \cup \Gamma_0$ entonces f se puede extender analíticamente a lo largo de Γ_0 .

Demostración:

Sean s , S y Λ como en la definición 4.6. La función $f \circ s$ es analítica en el conjunto abierto S^+ que está en el semiplano (superior o inferior) cuya frontera contiene a Λ , y continua en $S^+ \cup \Lambda$. Los valores de Λ por f van a parar a $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Por el *principio de reflexión* se tiene que $f \circ s$ se puede extender analíticamente a lo largo de Λ y, por tanto, $f = f \circ s \circ s^{-1}$ se puede extender analíticamente a lo largo de Γ_0 .

Veamos ahora, como ejemplos de aplicación del *principio de reflexión* y de las propiedades de simetría, algunos problemas relativos a transformaciones conformes en regiones concretas. Para ello vamos a introducir primero una aplicación.

Definición 4.8. La aplicación f dada por

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

para todo $z \neq 0$ se conoce por *función de Joukowski*.

Observación 4.9. Consideremos $z = \rho e^{i\phi}$ y veamos cuál es la imagen de las curvas $\rho = \text{const}$ y $\phi = \text{const}$ por la aplicación de Joukowski. Si

$$w = f(z) = \frac{1}{2}(\rho e^{i\phi} + \rho^{-1} e^{-i\phi}) = u + iv,$$

como

$$\frac{1}{2}(\rho e^{i\phi} + \rho^{-1} e^{-i\phi}) = \frac{1}{2}\left(\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos(\phi) + \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \text{sen}(\phi)\right)$$

entonces

$$u = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos(\phi)$$

y

$$v = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \text{sen}(\phi).$$

De esta manera la imagen del círculo $\rho = \rho_0$ tiene una representación paramétrica dada por

$$\phi \rightarrow (u, v) = \left[\frac{1}{2}\left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0}\right) \cos(\phi), \frac{1}{2}\left(\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}\right) \text{sen}(\phi) \right],$$

para $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Si consideramos $\rho_0 = 1$ obtenemos el segmento que une 1 con -1 recorrido dos veces, pues tenemos $\phi \mapsto (\cos(\phi), 0)$. Si $\rho_0 \neq 1$ y aplicamos la identidad fundamental de la trigonometría se tiene que

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_0^{-1})\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}(\rho_0 - \rho_0^{-1})\right]^2} = 1.$$

Esta ecuación da lugar a una elipse con focos en $(u, v) = (\pm 1, 0)$ y semiejes

$$a = \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_0^{-1}), \quad b = \frac{1}{2}(\rho_0 - \rho_0^{-1}).$$

Notemos que los círculos $\rho = \rho_0$ y $\rho = \rho_0^{-1}$ van a parar a la misma elipse. Por tanto la aplicación de Joukowski no es inyectiva salvo que se restrinja el dominio de manera adecuada.

Los rayos $\phi = \phi_0$ vienen dados por la ecuación paramétrica

$$\rho \rightarrow (u, v) = \left[\frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos(\phi_0), \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \operatorname{sen}(\phi_0) \right]$$

para $0 < \rho < \infty$. Si $\operatorname{sen}(\phi_0) = 0$ y $\cos(\phi_0) > 0$ entonces da lugar a la semirecta $u \geq 1$ y $v = 0$ recorrida desde ∞ hasta 1 y de vuelta hasta ∞ otra vez. Si $\operatorname{sen}(\phi_0) = 0$ y $\cos(\phi_0) < 0$ obtenemos la semirecta $u \leq -1$ y $v = 0$ recorrida desde $-\infty$ hasta -1 y de nuevo hasta $-\infty$. Si $\operatorname{sen}(\phi_0) \neq 0$ obtenemos un arco de hipérbola

$$\frac{u^2}{\cos^2(\phi_0)} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2(\phi_0)} = 1.$$

El arco derecho de la hipérbola se obtiene si $\cos(\phi_0) > 0$ y el izquierdo si $\cos(\phi_0) < 0$. Para $\cos(\phi_0) = 0$ la hipérbola degenera hasta la recta $u = 0$, $-\infty < v < \infty$. Además, observemos que los rayos $\arg(w) = \pm\phi_0$ son las asíntotas de las hipérbolas imagen pues si $|z|$ tiende a ∞ la aplicación de Joukowski tiende a $\frac{1}{2}z$ y si $|z|$ tiende a 0 la aplicación de Joukowski tiende a $\frac{1}{2}z^{-1}$. Estas hipérbolas tienen los focos en los puntos $(u, v) = (\pm 1, 0)$ y de hecho cortan perpendicularmente a cada elipse. Este hecho se podía haber anticipado, pues sabemos que la aplicación que estamos considerando es conforme y que la contraimagen de las hipérbolas son las semirectas que parten del origen y las de las elipses son las circunferencias centradas en 0. Como estas semirectas cortan perpendicularmente a las circunferencias y los ángulos se conservan por la transformación, entonces las hipérbolas cortan perpendicularmente a las elipses (ver figura 4.3 sacada de [3, pág 295]).

Estudiemos ahora cómo hemos de restringir el dominio para que esta función sea invertible. Si w es un número complejo, el punto z tiene por imagen a w por la aplicación f si y solo si verifica la ecuación

$$z^2 - 2wz + 1 = 0.$$

El discriminante de esta ecuación es $w^2 - 1$. Por tanto, si $w = \pm 1$ existe una única contraimagen que es concretamente el punto $z = \pm 1$. Si $w \neq \pm 1$ entonces, las soluciones vienen dadas por $w \pm (w^2 - 1)^{1/2}$. Si las multiplicamos, obtenemos que $(w + (w^2 - 1)^{1/2})(w - (w^2 - 1)^{1/2}) = w^2 - w^2 + 1 = 1$. Por tanto, la función de Joukowski es inyectiva en todo dominio tal que si el punto z pertenece entonces su inverso, $\frac{1}{z}$ no pertenece. El problema se trata entonces de elegir el valor adecuado para $(w^2 - 1)^{1/2}$. Notemos que

$$(w^2 - 1)^{1/2} = (w + 1)^{1/2}(w - 1)^{1/2},$$

luego basta indicar que valores de $(w + 1)^{1/2}$ y de $(w - 1)^{1/2}$ hay que elegir. Consideremos $\phi_1 = \arg(w + 1)$ y $\phi_2 = \arg(w - 1)$ entonces

$$(w + 1)^{1/2} = |(w + 1)|^{1/2} e^{i\phi_1/2}$$

y

$$(w - 1)^{1/2} = |(w - 1)|^{1/2} e^{i\phi_2/2}$$

luego

$$(w^2 - 1)^{1/2} = |(w^2 - 1)|^{1/2} e^{i(\phi_1 + \phi_2)/2}.$$

Por tanto, el problema se reduce a considerar adecuadamente los intervalos en los que se mueven los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 . Si nuestro dominio es $|z| > 1$, por ejemplo, elegimos de manera que $\phi_1, \phi_2 \in (-\pi, \pi]$. Esta elección hace continua a $\sqrt{w^2 - 1}$ para cualquier argumento tal que $-\pi < \arg(w - 1) < \pi$. Además, es también continua para números reales $w < -1$ pues si w atraviesa el eje real en un punto $w_0 < -1$, digamos hacia arriba, entonces tanto ϕ_1 como ϕ_2 aumentan 2π y por tanto también lo hace el argumento de $(w^2 - 1)^{1/2}$ y la raíz es continua.

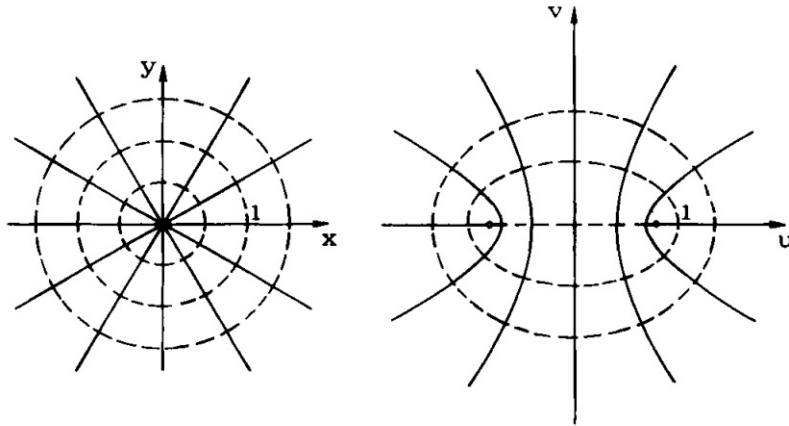


Figura 4.3: Aplicación de Joukowski.

Ejemplo 4.10. Sea $c > 0$. La curva

$$z = (\tau + ic)^2, \quad -\infty < \tau < \infty,$$

describe una parábola con foco en el origen y abierta hacia la derecha. Vamos a considerar el problema de transformar el interior de la parábola en el semiplano derecho tal que la simetría respecto del eje real se conserve (ver figura 4.4 sacada de [3, pág 392]).

Esta parábola es la imagen de la recta $\text{Im}(z_1) = c$ por la aplicación $z_1 \mapsto z_1^2$. La idea es enviar la parte superior de la parábola sobre el primer cuadrante de manera que el segmento $[A, B]$ del eje real vaya a parar sobre la parte positiva del eje real. La aplicación completa la obtendremos aplicando el *principio de reflexión*.

Vamos a necesitar componer varias funciones. Con la aplicación $z \mapsto z_1 = \sqrt{z}$, tomando el valor principal de la raíz (es decir, el argumento entre $[-\pi, \pi)$) la parte superior de la parábola va a parar a la semi-banda dada por $\text{Re}(z) > 0$ y $0 < \text{Im}(z) < c$. Haciendo la transformación $z_1 \mapsto z_2 = (\pi/c)z_1$ transformamos la semi-banda en una de altura π donde los puntos A y B se sitúan en $i\pi$ y 0 , respectivamente. Ahora si aplicamos la función $z_2 \mapsto z_3 = e^{z_2}$ transformamos la semi-banda en el semiplano superior salvo la parte del disco unidad contenida en este semiplano y los puntos A y B van a parar a -1 y 1 . Ahora bien, por lo visto sobre la aplicación de Joukowski,

$$z_3 \mapsto z_4 = \frac{1}{2}\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right)$$

envía el semiplano superior salvo el disco unidad en el semiplano superior con $A = -1$ y $B = 1$. Como $z_4 \mapsto z_5 = \frac{1}{2}(z_4 + 1)$ envía A en 0 si hacemos $z_5 \mapsto \sqrt{z_5}$ obtenemos el primer cuadrante y enviamos el segmento $[A, B]$ en el eje real positivo. Así pues, la composición de las funciones viene dada por

$$f(z) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{c}\sqrt{z}} + e^{-\frac{\pi}{c}\sqrt{z}}\right) + 1\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\cosh\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{z}\right) + 1\right)}$$

que, por el *principio de reflexión*, nos da la transformación que buscamos.

Ejemplo 4.11. Sea $\rho > 1$. Recordemos que la aplicación de Joukowski envía el exterior del círculo $|z| = \rho$ en el exterior de la elipse de semiejes $\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1})$ y $\frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1})$. Consideremos el problema de enviar el interior de la elipse sobre el disco unidad.

Este problema no se puede resolver de manera simple invirtiendo la función de Joukowski pues no cubriríamos el segmento $[-1, 1]$ sobre el eje real.

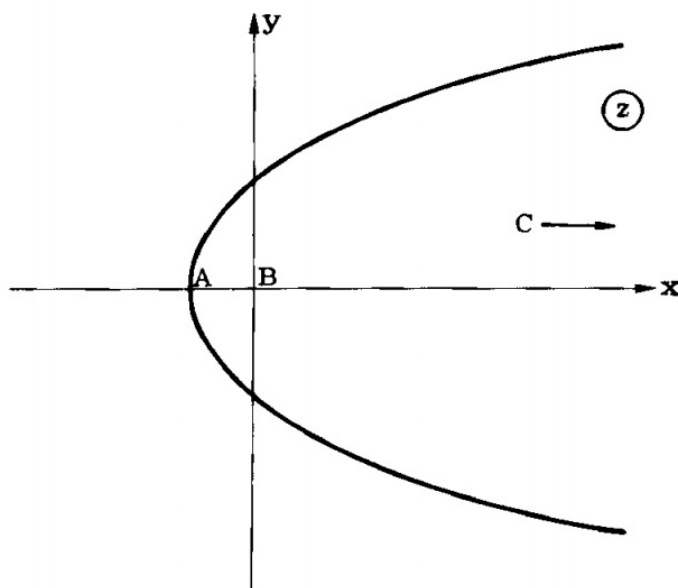


Figura 4.4: Parábola $z = (\tau + ic)^2$.

Vamos a tratar de enviar la parte superior de la elipse sobre la parte superior del disco unidad de manera que los números reales van a parar a números reales. La función $z \mapsto z_1 = z + (z^2 - 1)^{1/2}$ (eligiendo las raíces como en la observación 4.9)) envía la mitad superior de la elipse en la región semi-anular $1 < |z_1| < \rho$, $\text{Im}(z_1) > 0$ y con la función $z_1 \mapsto z_2 = \text{Log}(z_1)$ (con su rama principal) la región semi-anular va a parar al rectángulo $0 < \text{Re}(z_2) < \text{Log}(\rho)$, $0 < \text{Im}(z_2) < \pi$. Sin embargo, como mostraremos en la siguiente sección, este rectángulo, aunque se puede enviar sobre el semiplano, no se puede hacer por medio de funciones elementales. Por tanto, este problema no podemos resolverlo vía funciones elementales y el principio de reflexión.

4.2. Aplicación de Schwarz-Christoffel

El objetivo de esta sección es dar una fórmula explícita que transforme el semiplano superior en el interior de un polígono. Este no es un problema sencillo en general que proporcione una expresión en términos de funciones elementales. Para ello haremos uso de los resultados que hemos visto en la sección 4.1, en especial del *principio de reflexión*. El objetivo final de la sección será el de exponer los casos particularmente interesantes de los polígonos regulares, en concreto de un polígono regular general de n lados y

su equivalencia conforme con llegada tanto en el semiplano superior como en \mathbb{D} .

Definición 4.12. Sea D una región acotada y simplemente conexa cuya frontera consiste en un número finito, digamos $n + 1$, de segmentos de rectas donde permitimos aristas dobles. Denotamos los vértices por z_k para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ y el ángulo interior en el vértice k -ésimo por $\alpha_k\pi$ con $0 < \alpha_k \leq 2$. El segmento que une z_{k-1} con z_k , con el convenio $z_{-1} = z_n$, se denota por Γ_k para $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ (ver figura 4.5 sacada de [3, pág 396]).

Observación 4.13. Pensemos en el segmento que une z_k con z_{k+1} como un vector con inicio en z_k y apuntando hacia z_{k+1} . Observemos que el cambio en la dirección de la frontera en el vértice k -ésimo es $(1 - \alpha_k)\pi$. Si recorremos con ese vector desde z_0 hasta z_n haciendo los cambios direccionales en los vértices correspondientes, observamos que el giro total es exactamente 2π cuando volvemos a colocar el inicio del vector sobre z_0 . Por tanto,

$$\sum_{k=0}^n (1 - \alpha_k)\pi = \left(n + 1 - \sum_{k=0}^n \alpha_k\right)\pi = 2\pi,$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = n - 1.$$

Nuestro objetivo es determinar la forma de la función $w \mapsto g(w) = z$ que envíe el semiplano superior $E = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) > 0\}$ sobre D . La fórmula que obtendremos para g es suficientemente explícita como para determinar completamente la función en gran cantidad de casos especiales.

La existencia de tales funciones g está asegurada por el *teorema de representación conforme de Riemann*. Podemos asumir además, por el *teorema de Osgood-Charathéodory*, que g es continua e inyectiva en $\overline{E} = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \geq 0\}$. Denotamos la preimagen del vértice z_k en $\text{Im}(w) = 0$ por w_k y asumimos que $w = \infty$ se corresponde con z_0 , también con el convenio $w_{-1} = w_n$. Los w_k se escogen de manera que $w_1 < w_2 < \dots < w_n$. Como g transforma conformemente E , entonces $g'(w) \neq 0$ para todo $w \in E$ y por la versión homotópica del teorema de Cauchy g' admite un logaritmo analítico G en E .

Lema 4.14. La función $G'(w) = \frac{g''(w)}{g'(w)}$ se puede extender analíticamente a una función que es analítica en todo el plano salvo en las singularidades aisladas w_1, \dots, w_n .

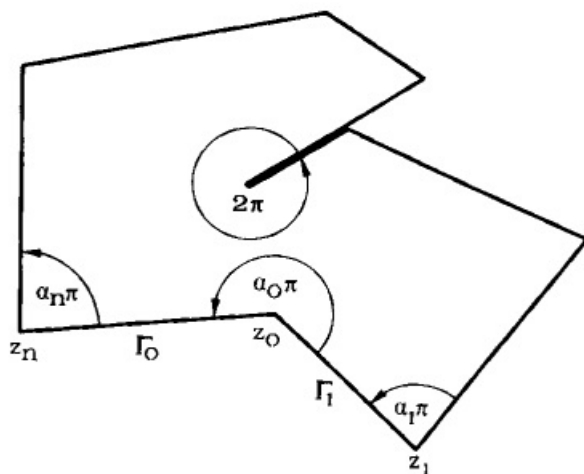


Figura 4.5: Polígono

Demostración:

Sea $k \in \{0, \dots, n\}$. Puesto que g es analítica en E , continua en \bar{E} y transforma el segmento $\Lambda_k : (w_{k-1}, w_k)$ en el segmento Γ_k , entonces, por el *principio de reflexión* se puede prolongar analíticamente a través de Λ_k asignando a un punto \bar{w} tal que $\text{Im}(w) < 0$ (que tiene a w por simétrico respecto de Λ_k) el valor simétrico de $g(w)$ respecto de Γ_k (ver figura 4.6 sacada de [3, pág 398]).

La extensión envía biyectivamente a la banda vertical E_k (simplemente conexa) que contiene a los puntos de Λ_k en una región que contiene a los puntos interiores a Γ_k . Así, $g'(w) \neq 0$ en E_k , y g' admite un logaritmo analítico G en E_k . Observamos que en Λ_k , $\arg(g'(w)) = \text{const}$. Esto se puede comprobar como sigue: dado que podemos considerar cualquier dirección para calcular los cocientes incrementales de g en un punto de Λ_k , tomaremos la dirección del eje real. Dichos cocientes son, por construcción de g , complejos de argumento fijo, el dado por la inclinación de Γ_k , y este será el argumento de su límite, que es $g'(w)$. Ahora bien, $g'(w) = e^{G(w)} = e^{\text{Re}(G(w))} e^{i\text{Im}(G(w))}$, de donde se deduce que

$$\text{Im}(G(w)) = \text{const}, \quad w \in \Lambda_k.$$

Derivando ahora en la dirección del eje de los reales se deduce que

$$\text{Im}(G'(w)) = 0, \quad w \in \Lambda_k.$$

De nuevo, por el *principio de reflexión*, la función G definida en $\text{Im}(w) < 0$ por

$$G'(w) = \overline{G'(\bar{w})}$$

es analítica en $E \cup (\cup_{k=0}^n \Lambda_k) \cup H$ donde $H = \{\bar{z} : z \in E\}$. La definición de G' en los puntos de las semirrectas verticales con inicio en w_k y parte imaginaria negativa, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, se hace por continuidad. Como en el semiplano superior la función es continua, lo mismo se deduce en el inferior, resultando también, en los puntos de estas semirrectas, válida la expresión $G'(z) = \overline{G'(\bar{z})}$. Entonces G' es analítica en el plano, salvo quizá en los puntos w_k para $k \in \{1, \dots, n\}$.

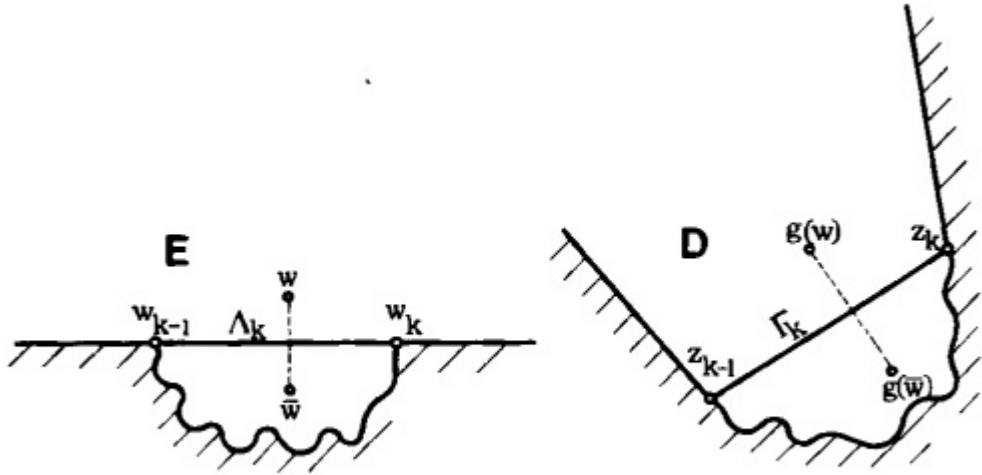


Figura 4.6: Regiones E y D y Principio de reflexión.

Lema 4.15. La función G' es racional. Tiene polos simples en los puntos w_k con residuo $\alpha_k - 1$ y se anula en el infinito. Por lo tanto, se puede escribir de la siguiente manera

$$G'(w) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{w - w_k}.$$

Demostración:

Consideremos la función $\tilde{g}_k(w) = g(w) - z_k$ que es holomorfa en E , continua en \bar{E} y no se anula en $\bar{E} \setminus \{w_k\}$, por tanto, admite un logaritmo analítico H_k en E que se puede extender a un logaritmo continuo en $\bar{E} \setminus \{w_k\}$. Definimos ahora

$$h_k = e^{\alpha_k^{-1} H_k}$$

que es continua en $\bar{E} \setminus \{w_k\}$ y holomorfa en E . Por otro lado, si elevamos a α_k , se tiene que

$$(h_k(w))^{\alpha_k} = e^{H_k(w)} = \tilde{g}_k(w) = g(w) - z_k \quad (4.1)$$

para todo $w \in \overline{E} \setminus \{w_k\}$. Además,

$$\lim_{w \rightarrow w_k} (h_k(w))^{\alpha_k} = g(w_k) - z_k = 0$$

y, se deduce que

$$\lim_{w \rightarrow w_k} h_k(w) = 0$$

y definimos $h_k(w_k) = 0$ para conseguir que sea continua en \overline{E} y holomorfa en E . Como g es inyectiva en \overline{E} entonces h_k también lo es.

Si $\arg(w - w_k)$ crece desde 0 hasta π , entonces $\arg(g(w) - z_k)$ crece $\alpha_k \pi$ pues parto de la arista Γ_k hacia la arista Γ_{k+1} , y por tanto $\arg(h(w))$ crece π (si $g(w) - z_k = ce^{i\alpha_k \pi}$ entonces $h(w) = (g(w) - z_k)^{1/\alpha_k} = (ce^{i\alpha_k \pi})^{1/\alpha_k} = ce^{i\pi}$). Por tanto, la imagen por h del segmento $(w_k - \varepsilon, w_k + \varepsilon)$ es un segmento que pasa por 0. Por tanto, por el *principio de reflexión* h se puede extender a una función analítica, conforme e inyectiva en el disco $D(w_k, \varepsilon)$. Esta extensión es además inyectiva pues si consideramos dos puntos origen distintos que están en el semidisco superior entonces las imágenes son distintas porque la aplicación era inyectiva antes de ser extendida. Si consideramos dos puntos origen que estén cada uno en un semidisco (superior e inferior), entonces la imagen del punto que está en el semidisco inferior tiene que estar en el reflejado por el segmento Γ_k correspondiente y por tanto no puede ser la misma. Por último si consideramos dos puntos distintos en el semidisco inferior entonces sus imágenes son la reflexión de imágenes de puntos en el semidisco superior, que tienen que partir de puntos distintos por serlo los reflejados. Por lo tanto, $h'_k(w_k) \neq 0$ y w_k es un cero simple de h_k . Ahora bien, derivando en (4.1) se tiene que

$$g'(w) = \alpha_k (h_k(w))^{\alpha_k - 1} h'_k(w) \quad \text{si } \text{Im}(w) > 0,$$

y

$$g''(w) = \alpha_k(\alpha_k - 1)(h_k(w))^{\alpha_k - 2} (h'_k(w))^2 + \alpha_k (h_k(w))^{\alpha_k - 1} h''_k(w) \quad \text{si } \text{Im}(w) > 0.$$

Como w_k es un cero simple de h_k , se puede escribir la función como $h_k(w) = (w - w_k)\varphi(w)$, con φ una función holomorfa tal que $\varphi(w_k) \neq 0$. Por tanto, derivando en esta igualdad se tiene que $h'_k(w) = \varphi(w) + (w - w_k)\varphi'(w)$, y que el cociente entre φ' y φ es una función holomorfa en torno a w_k . Entonces, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{g''(w)}{g'(w)} &= \frac{h''_k(w)}{h'_k(w)} + (\alpha_k - 1) \frac{h'_k(w)}{h_k(w)} \\ &= \frac{h''_k(w)}{h'_k(w)} + (\alpha_k - 1) \left(\frac{1}{w - w_k} + \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} \right) \\ &= \psi_0(w) + \frac{\alpha_k - 1}{w - w_k} \quad \text{si } \text{Im}(w) > 0, \end{aligned}$$

donde ψ_0 es la suma de la función

$$\frac{h_k''(w)}{h_k'(w)},$$

que es holomorfa por ser cociente de funciones holomorfas con denominador no nulo en w_k , y del cociente anteriormente analizado. Así, hemos obtenido una expresión de G' en el semidisco superior similar al clásico desarrollo de Laurent, suma de una parte regular y una parte singular consistente en un único sumando.

Si $\text{Im}(w) < 0$ hemos definido la imagen de la siguiente manera: $G'(w) = \overline{G'(\bar{w})}$. Si $\xi \in E$, como $e^{G(\xi)} = g'(\xi)$, derivando se sigue que $g''(\xi) = e^{G(\xi)} G'(\xi) = g'(\xi) G'(\xi)$, luego

$$G'(\xi) = \frac{g''(\xi)}{g'(\xi)} = \psi_0(\xi) + \frac{\alpha_k - 1}{\xi - w_k},$$

entonces, si $\text{Im}(w) < 0$,

$$G'(w) = \overline{G'(\bar{w})} = \overline{\psi_0(\bar{w}) + \frac{\alpha_k - 1}{\bar{w} - w_k}} = \overline{\psi_0(\bar{w})} + \frac{\alpha_k - 1}{w - w_k},$$

donde $\overline{\psi_0(\bar{w})}$ es la extensión al semidisco inferior de la aplicación holomorfa ψ_0 . Por lo tanto, encontramos que el desarrollo de tipo Laurent encontrado es válido para todo el disco, y concluimos que es el verdadero desarrollo de Laurent, el punto w_k es un polo simple y el residuo en el mismo es $\alpha_k - 1$. Puesto que esta construcción se puede hacer para todo punto singular w_k , la función

$$\Psi(w) = G(w) - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{w - w_k}$$

resulta ser una función entera, pues si $w \in D(w_k, \varepsilon)$ para algún k y algún $\varepsilon > 0$ entonces es igual a la función Φ'_k correspondiente y fuera de estos entornos la función en sí misma es holomorfa por ser resta de funciones holomorfas.

Para ver su comportamiento cerca de $w_0 = \infty$ vamos a hacer un razonamiento más ágil teniendo en cuenta que el razonamiento riguroso se haría de manera idéntica a lo expuesto para los puntos w_k con $k \in \{1, \dots, n\}$ anteriormente. Consideremos

$$h(w) = g\left(\frac{1}{w} - z_0\right)^{1/a_0}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $|w| < \varepsilon$, haciendo uso del mismo razonamiento, h es analítica en E y continua e inyectiva en \bar{E} luego se puede extender a una

aplicación conforme en todo el disco $D(0, \varepsilon)$ y se puede escribir como

$$h(w) = b_0 w(1 + c_2 w + \dots),$$

con $b_0 \neq 0$. De nuevo realizando los mismos cálculos

$$g(1/w) = z_0 + b_0^* w^{a_0} \psi_0(w),$$

luego

$$g(w) = z_0 + b_0^* w^{-a_0} \psi_0(w^{-1}).$$

Fijémonos en los factores ψ_0 y Φ_0 en este caso concreto. En este caso

$$\psi_0'(w^{-1}) = (-c_1^* w^{-2} - c_2^* w^{-3} - \dots),$$

$$\psi_0(w^{-1}) = (1 + c_1^* w^{-1} + c_2^* w^{-2} + \dots)$$

y

$$\begin{aligned} \Phi_0'(w^{-1}) &= (\log(b_0^*(-a_0 \psi_0(w^{-1}) + w^{-1} \psi_0'(w^{-1}))))' \\ &= \frac{b_0^*(-a_0 \psi_0'(w^{-1}) + \psi_0''(w^{-1})w^{-1} - w^{-2} \psi_0'(w^{-1}))}{b_0^*(-a_0 \psi_0(w^{-1}) + w^{-1} \psi_0'(w^{-1}))} \xrightarrow{w \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Como en este caso $G'(w) = \frac{-a_0 - 1}{w} + \Phi'(w^{-1})$ entonces se tiene que

$$G'(w) \xrightarrow{w \rightarrow \infty} 0.$$

Como $\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{w - w_k} \xrightarrow{w \rightarrow \infty} 0$ entonces la función $\Psi(w)$ está acotada y, por el *teorema* de Liouville, $\Psi(w) = 0$ por ser constante y tender a 0. Así,

$$G'(w) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{w - w_k}.$$

Observación 4.16. Recordemos que $G'(w) = \frac{g''(w)}{g'(w)}$ con g una equivalencia conforme que envíe el semiplano superior en el polígono D . Asumir la existencia de una función así que además sea continua hasta la frontera de E es algo que podemos hacer pues si consideramos la función dada por

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

sabemos que es una función analítica en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ pero en este caso $-\frac{d}{c} = \frac{-i}{1} = -i \notin \bar{E}$. Así, la función T define una aplicación analítica y biyectiva de E en D que es continua hasta la frontera. Puesto que D es un subconjunto de \mathbb{C} que verifica las propiedades del *teorema de representación conforme de Riemann* entonces existe f biyectiva y analítica de D en $D(0, 1)$ y por tanto f^{-1} es biyectiva y analítica de $D(0, 1)$ en D . Luego si consideramos la composición $f^{-1} \circ T$ es una aplicación biyectiva y analítica de E en D , es decir, $g = f^{-1} \circ T$ es la aplicación que andábamos buscando.

Ahora bien, el problema es que no se tiene una expresión explícita para f y, por tanto, tampoco para g . Sin embargo, si consideramos $G'(w) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{w - w_k}$ entonces integrando a ambos lados obtenemos que

$$\begin{aligned} G(w) &= \int \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{w - w_k} dw = \sum_{k=1}^n \int \frac{\alpha_k - 1}{w - w_k} \\ &= \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \log(w - w_k) + A = A^* + \log\left(\prod_{k=1}^n (w - w_k)^{\alpha_k - 1}\right) \\ &= \log\left(e^{A^*} \prod_{k=1}^n (w - w_k)^{\alpha_k - 1}\right) \end{aligned}$$

Puesto que G es un logaritmo analítico de g' , se deduce que,

$$g'(w) = B \prod_{k=1}^n (w - w_k)^{\alpha_k - 1} \quad B \in \mathbb{C},$$

de donde

$$g(w) = C + B \int_{w^*}^w \prod_{k=1}^n (t - w_k)^{\alpha_k - 1} dt.$$

Dejamos el límite inferior sin especificar pues solo afecta al valor de la constante C . Es decir, si $w, w^* \in \bar{E}$ tenemos la fórmula

$$g(w) - g(w^*) = e^{g'(w^*)} \int_{w^*}^w \prod_{k=1}^n (t - w_k)^{\alpha_k - 1} dt.$$

Definición 4.17 (aplicación de Schwarz-Christoffel). Sean $w, w^* \in \bar{E}$; la aplicación dada por

$$g(w) - g(w^*) = e^{g'(w^*)} \int_{w^*}^w \prod_{k=1}^n (t - w_k)^{\alpha_k - 1} dt = C \int_{w^*}^w \prod_{k=1}^n (t - w_k)^{\alpha_k - 1} dt,$$

donde $C = e^{g'(w^*)}$, se conoce por *aplicación de Schwarz-Christoffel*, donde $(t - w_k)^{\alpha_k - 1}$ denota cualquier rama analítica de la potencia en el conjunto E .

Observación 4.18. Notemos que la fórmula sirve también para el caso en el que D sea un polígono no acotado, es decir, que tenga un vértice $z_0 = \infty$ por ejemplo. Contamos los ángulos en el resto de vértices como hemos hecho anteriormente. Sin embargo, debemos asignar una medida angular al vértice que está en el infinito. Una opción sería medir el ángulo que se obtiene al ver este polígono sobre la esfera de Riemann. Si procedemos de esta manera entonces no se verificaría la relación

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = n - 1.$$

Por tanto, sería conveniente dar un valor al ángulo en el vértice z_0 de manera que dicha relación se conserve.

Fijémonos en la figura 4.7 sacada de [3, pág 402]. Supongamos que Γ_0 y Γ_n , las aristas relativas al vértice z_0 no son paralelas. Entonces las rectas dadas por dichas aristas se cortan en un punto que llamaremos z^* con un ángulo que $\alpha^*\pi$, $0 < \alpha^* < 2$. Consideremos el polígono acotado de vértices z^*, z_1, \dots, z_n . Entonces los ángulos asociados a los vértices son $\alpha^*, (1 - \alpha_1), (2 - \alpha_2), \dots, (2 - \alpha_{n-1}), (1 - \alpha_n)$ respectivamente. Así pues, tenemos un polígono con $n + 1$ lados, luego la suma de todos los ángulos debe cumplir la relación deseada, es decir,

$$n - 1 = \sum_{k=2}^{n-1} (2 - \alpha_k) + (1 - \alpha_1) + (1 - \alpha_n) + \alpha^*$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \alpha^* &= n - 1 - \sum_{k=2}^{n-1} (2 - \alpha_k) - (1 - \alpha_n) - (1 - \alpha_1) \\ &= n - 1 - 2(n - 2) - 1 - 1 + \alpha_n + \alpha_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \alpha_k \\ &= -n + 1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{k=0}^n \alpha_k - n + 1 - \alpha_0 = n - 1 - n + 1 - \alpha_0 \\ &= -\alpha_0. \end{aligned}$$

En el caso en el que Γ_0 y Γ_n sean paralelas entonces consideraremos que $\alpha_0 = 0$.

Sea ahora g la función que envía E en D . Entonces las demostraciones de los lemas 4.14 y 4.15 se pueden realizar de la misma forma exactamente modificando la h que se toma. En el caso de que las aristas no sean paralelas tomaremos $h(w) = g(w^{-1})^{1/\alpha^*}$ y $h(0) = 0$. Y en el caso en el que las aristas sean paralelas tomaremos $h(w) = \exp(\frac{-\pi}{d} e^{-i\phi} g(w^{-1}))$ siendo d la distancia entre los segmentos paralelos y $e^{i\phi}$ con $0 \leq \phi \leq 2\pi$ la dirección con la que se va hacia el infinito.

Por tanto, la definición de la aplicación de Schwarz-Christoffel se puede aplicar también al caso en el que los polígonos son no acotados.

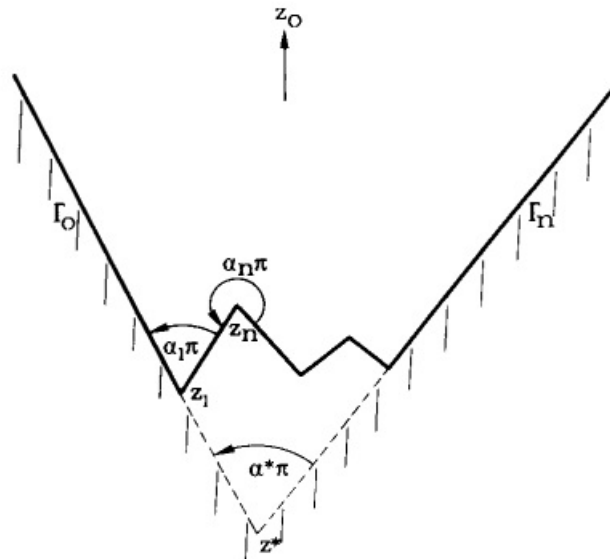


Figura 4.7: Un polígono no acotado

Veamos ahora algunos ejemplos de cómo podemos usar la aplicación de Schwarz-Christoffel para dar ejemplos concretos de aplicaciones conformes del semiplano superior en polígonos regulares.

Polígonos con 2 vértices

Una región poligonal con 2 vértices precisamente tiene la necesidad de tener un vértice en el infinito. Elegimos como preimágenes de los vértices $z_0 = \infty$ y $z_1 = 0$ los puntos $w_0 = \infty$ y $w_1 = 0$ (pues podemos hacer un movimiento rígido para llevar el vértice finito donde nos plazca). Entonces aplicando la definición 4.17 tomando $w^* = 0$ se tiene que

$$g(w) = C \int_0^w t^{\alpha-1} dt = C_1 w^\alpha$$

donde $C_1 > 0$ es una constante. Efectivamente, g envía el semiplano superior E en el sector de amplitud $\alpha\pi$ con vértice en 0 y lados con argumentos $\arg(C_1)$ y $\arg(C_1) + \alpha\pi$, donde $\arg(C_1)$ es un argumento de C_1 .

4.2.1. Triángulos

Sea D un triángulo con vértices en a, b y c y ángulos α, β y γ , respectivamente. Sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 2 - 1 = 1$. Si suponemos que tienen un vértice infinito entonces nos encontramos con varias posibilidades contempladas en la figura 4.8 sacada de [5, pág 17].

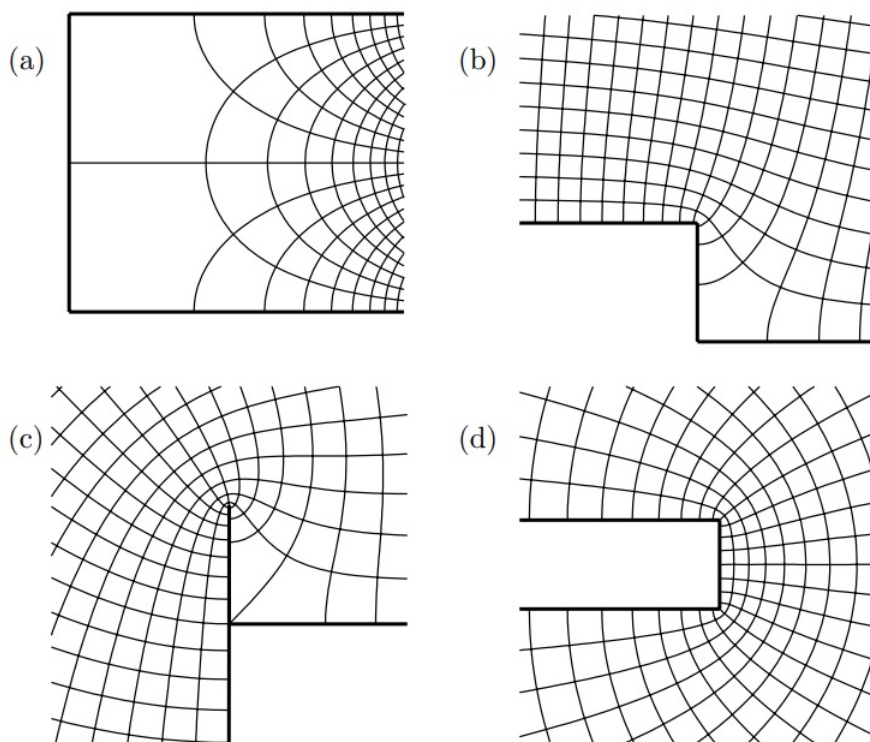


Figura 4.8: Triángulos que tienen un vértice infinito.

Veamos uno por uno los casos que obtenemos al aplicar la definición 4.17. En los cálculos que siguen se utilizan las fórmulas de derivación de las funciones inversas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas, cuya consideración requiere de la elección de ramas adecuadas para los logaritmos (o raíces) involucrados.

- (a) Tenemos $z_0 = \infty, z_1 = i$ y $z_2 = -i$ con ángulos $0, 1/2$ y $1/2$ respectivamente. Seleccionamos como preimágenes los puntos $w_0 = \infty, w_1 = 1$ y

$w_2 = -1$. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} g(w) - g(w_2) &= C \int_{-1}^w (t-1)^{-1/2}(t+1)^{-1/2} dt = C \int_{-1}^w (t^2-1)^{-1/2} dt \\ &= C_1 \text{ArgCosh}(w) + A_1 \end{aligned}$$

donde $C_1 = C \text{ArgCosh}(-1)$ y $A_1 = i$.

- (b) Tenemos $z_0 = \infty$, $z - 1 = i$ y $z_2 = 0$ con ángulos $0, 3/2$ y $1/2$ respectivamente. Escogemos como preimágenes los puntos $w_0 = \infty$, $w_1 = -1$ y $w_2 = 1$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} g(w) - g(w_2) &= C \int_1^w (t+1)^{1/2}(t-1)^{-1/2} dt = C \int_1^w \frac{t+1}{(t^2-1)^{1/2}} dt \\ &= C \int_0^{\text{Arcsec}(w)} \sec^2(u) + \sec(u) du \\ &= C \text{tg}(u) \Big|_0^{\text{Arcsec}(w)} + C \log(\sec(u) + \text{tg}(u)) \Big|_0^{\text{Arcsec}(w)} \\ &= C(w^2-1)^{1/2} + C \log((w^2-1)^{1/2} + w) \\ &= C(w^2-1)^{1/2} + C \text{ArgCosh}(w), \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad estamos haciendo el cambio de variable $t = \sec(u)$, en la cuarta igualdad hacemos uso de la propiedad $\text{tg}(\text{Arcsec}(w)) = \sqrt{w^2-1}$ y en la última igualdad hacemos uso de la propiedad $\log(\sqrt{w^2-1} + w) = \text{ArgCosh}(w)$. Así,

$$g(w) = C(w^2-1)^{1/2} + C \text{Arccosh}(w)$$

pues $g(w_2) = 0$.

- (c) Tenemos $z_0 = \infty$, $z_1 = i$ y $z_2 = 0$ con ángulos, $-3/2, 2$ y $1/2$ respectivamente. Elegimos $w_0 = \infty$, $w_1 = -1$ y $w_2 = 1$. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} g(w) - g(w_2) &= C \int_1^w (t+1)(t-1)^{-1/2} dt = C \int_0^{\sqrt{w-1}} (u^2+2) du \\ &= C \frac{2}{3} \sqrt{(w-1)^3} + 4C \sqrt{w-1} = C \frac{2}{3} \sqrt{w-1} (w+5) \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado el cambio de variable $u = \sqrt{t-1}$. Así,

$$g(w) = C_1 \sqrt{w-1} (w+5) \quad \text{con } C_1 = \frac{2}{3} C$$

pues $g(w_2) = 0$.

- (d) Tenemos $z_0 = \infty$, $z_1 = i$ y $z_2 = -i$ con ángulos, $-2, 3/2$ y $3/2$ respectivamente. Observemos que esto no da lugar a una inconsistencia pues el ángulo -2 y el ángulo 0 se puede entender como el “mismo” (salvo una vuelta) . Elegimos $w_0 = \infty$, $w_1 = -1$ y $w_2 = 1$. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
g(w) - g(w_2) &= C \int_1^w ((t+1)(t-1))^{1/2} dt = C \int_0^{\text{Arcsec}(w)} \text{tg}(u)^2 \sec(u) du \\
&= C \int_0^{\text{Arcsec}(w)} (\sec^2(u) - 1) \sec(u) du \\
&= C \int_0^{\text{Arcsec}(w)} \sec(u)^3 - \sec(u) du \\
&= \frac{C}{2} \text{tg}(u) \sec(u) \Big|_0^{\text{Arcsec}(w)} + \frac{C}{2} \log(\text{tg}(u) + \sec(u)) \Big|_0^{\text{Arcsec}(w)} \\
&= C \frac{1}{2} (w(w^2 - 1)^{1/2} - \text{ArgCosh}(w)).
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se ha aplicado el cambio de variable $t = \sec(u)$ y en la última igualdad las propiedades $\text{tg}(\text{Arcsec}(w)) = \sqrt{w^2 - 1}$ y $\log(\sqrt{w^2 - 1} + w) = \text{ArgCosh}(w)$. Así se tiene que

$$g(w) = C_1(w(w^2 - 1)^{1/2} - \text{ArgCosh}(w)) + A_1$$

donde $A_1 = i$ y $C_1 = \frac{1}{2}C$

Por último veamos el caso en el que los tres vértices sean finitos. Entonces podemos escoger como preimágenes de los vértices los puntos $\infty, 0$ y 1 . Así, nos queda que

$$g(w) = g(0) + C \int_0^w t^{\beta-1} (t-1)^{\gamma-1} dt.$$

4.2.2. Polígonos regulares de n lados

Ahora consideramos el problema de enviar el semiplano superior sobre un polígono regular de n lados. Sean z_0, \dots, z_{n-1} los vértices de dicho polígono. Entonces podemos considerar como preimágenes los puntos $w_0 = \infty$ y $w_k = k$ para todo $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Los ángulos vienen dados por α_k para todo $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Así, obtenemos que

$$g(w) = g(w_m) + C \int_{w_m}^w \prod_{k=1}^{n-1} (t-k)^{\alpha_k-1} dt$$

sin embargo esta fórmula en el caso general no es muy clarificadora. Seamos más concretos. Consideremos el hexágono regular (ver figura 4.9 con vértices en las raíces sextas de la unidad, es decir, $z_k = e^{(2\pi i)k/6}$ que tienen como ángulo asociado $2/3$.

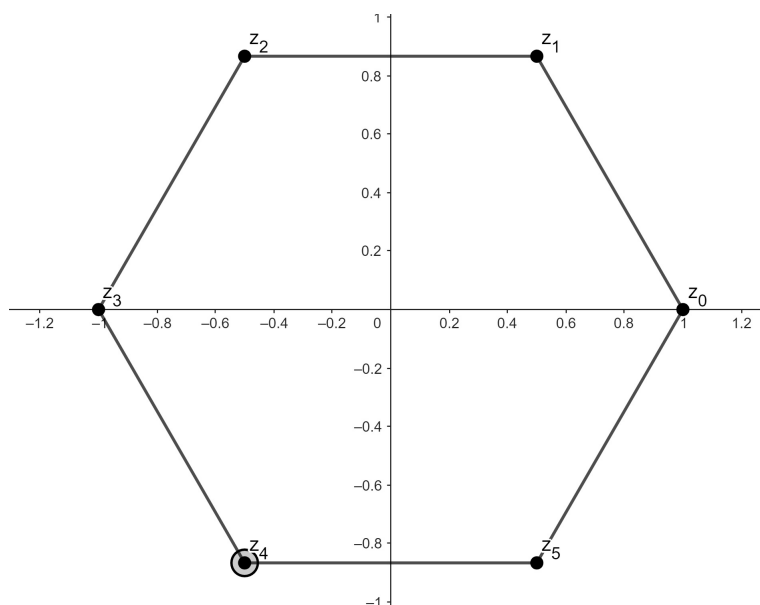


Figura 4.9: Hexágono regular.

Entonces podemos tomar como preimágenes los puntos $w_0 = \infty$ y $w_k = k$ para todo $k \in \{1, \dots, 5\}$. De esta manera obtenemos que

$$g(w) = g(w_3) + C \int_1^w (t-1)^{-1/3} \cdot \dots \cdot (t-5)^{-1/3} dt.$$

Debido a la complejidad integral que nos encontramos, pues esa integral no tiene expresión en términos de funciones elementales, y a que intuitivamente parece más sencillo simplemente enviar el triángulo formado por los vértices z_1 , 0 y z_0 en un sector circular y proceder así con los 6 triángulos en que descompone el hexágono, veamos cómo podemos enviar el polígono regular de n lados sobre el disco unidad. De esta manera necesitaremos generalizar en cierto modo la definición la aplicación de Schwarz-Christoffel. Para ello veamos con qué situación nos topamos si componemos dicha aplicación con una transformación de Möbius.

Observación 4.19. Consideremos la aplicación

$$T(s) = \frac{as + b}{cs + d}$$

con $ad - bc \neq 0$, es decir, la transformación de Möbius asociada a la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si denotamos por $E_1 = T^{-1}(E)$ donde recordemos que E es el semiplano superior, entonces E_1 es un semiplano o el interior o exterior de un círculo. La función dada por $g_1 = g \circ t$ donde g es la aplicación de Schwarz-Christoffel es una equivalencia conforme entre E_1 y D siendo D el polígono regular. Así,

$$G_1(s) = \log(g'_1(s)) = \log(g'(T(s))T'(s))$$

se puede definir de manera analítica en E_1 . Por la regla de la cadena tenemos que

$$G'_1(s) = \frac{g''(T(s))T'(s)^2 + T''(s)g'(T(s))}{g'(T(s))T'(s)} = G'(T(s))T'(s) + \frac{T''(s)}{T'(s)},$$

ahora bien, por el lema 4.15 sabemos la forma que tiene G' luego

$$G'_1(w) = \sum_{k=1}^n \frac{(\alpha_k - 1)T'(s)}{T(s) - T(s_k)} + \frac{T''(s)}{T'(s)}.$$

Derivando en la definición de T obtenemos que

$$\frac{T''(s)}{T'(s)} = \frac{-2c}{cs + d}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{T'(s)}{T(s) - T(s_k)} &= \frac{\frac{ad - bc}{(cs + d)^2}}{\frac{as + b}{cs + d} - \frac{as_k + b}{cs_k + d}} = \frac{\frac{ad - bc}{(cs + d)^2}}{\frac{(as + b)(cs_k + d) - (as_k + b)(cs + d)}{(cs + d)(cs_k + d)}} \\ &= \frac{(ad - bc)(cs_k + d)}{(cs + d)[acss_k + ads + bcs_k + bd - acss_k - ads_k - bcs - bd]} \\ &= \frac{(ad - bc)(cs_k + d)}{(cs + d)(ads + bcs_k - ads_k - bcs)} \\ &= \frac{(ad - bc)(cs_k + d)}{(cs + d)(ad - bc)(s - s_k)} = \frac{cs_k + d}{(cs + d)(s - s_k)} \end{aligned}$$

Notemos que aunque no hayamos definido explícitamente cuáles son los puntos s_k no estamos realizando más que un abuso de notación, pues los

puntos s_k en realidad son las preimágenes por la transformación de Möbius de los vértices z_k . Por tanto si los puntos s_0, \dots, s_n son finitos, usando que $s_0 = -d/c$ se tiene que

$$G_1'(s) = \frac{1}{s - s_0} \left[\sum_{k=1}^n \frac{(\alpha_k - 1)(s_k - s_0)}{s_k - s} - 2 \right].$$

Ahora bien, como

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k = n - 1$$

se tiene que

$$\sum_{k=0}^n (\alpha_k - 1) = -2.$$

Usando esta relación llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} G_1'(s) &= \frac{\alpha_0 - 1}{s - s_0} + \frac{1}{s - s_0} \left[\sum_{k=1}^n \frac{(\alpha_k - 1)(s_k - s_0)}{s - s_k} + (\alpha_k - 1) \right] \\ &= \frac{\alpha_0 - 1}{s - s_0} + \frac{1}{s - s_0} \left[\sum_{k=1}^n \frac{(\alpha_k - 1)(s_k - s_0) + (\alpha_k - 1)(s - s_k)}{s - s_k} \right] \\ &= \frac{\alpha_0 - 1}{s - s_0} + \frac{1}{s - s_0} \left[\sum_{k=1}^n \frac{(\alpha_k - 1)(s_k - s_0 + s - s_k)}{s - s_k} \right] \\ &= \frac{\alpha_0 - 1}{s - s_0} + \frac{1}{s - s_0} \left[\sum_{k=1}^n \frac{(\alpha_k - 1)(s - s_0)}{s - s_k} + (\alpha_k - 1) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k - 1}{s - s_k} \end{aligned}$$

que es exactamente la representación obtenida en el lema 4.15 salvo porque incluimos el caso $k = 0$. Por tanto, integrando como en el lema 4.15 se tiene que la aplicación de Schwarz-Christoffel que envía E_1 sobre D asociada a una constante C_1 de integración y un punto s^* arbitrario es

$$g_1(s) - g_1(s^*) = \int_{s^*}^s \prod_{k=0}^n (t - s_k)^{\alpha_k - 1} dt$$

donde de nuevo $(t - s_k)^{\alpha_k - 1}$ denota cualquier rama analítica en E_1 que existe pues E_1 es simplemente conexo.

Así pues, consideremos el problema de enviar el hexágono regular (aunque el proceso sería exactamente el mismo para cualquier otro polígono regular de n lados) en el disco unidad. Vamos a considerar los vértices del hexágono en los puntos $z_k = de^{2\pi ik/6}$ para $k = 0, \dots, 5$ con $d > 0$ y $z_6 = z_0$. Consideremos los puntos $w_k = e^{2\pi ik/n}$ para $k = 1, \dots, 6$ (ver figura 4.10 sacada de [3, pág 411]).

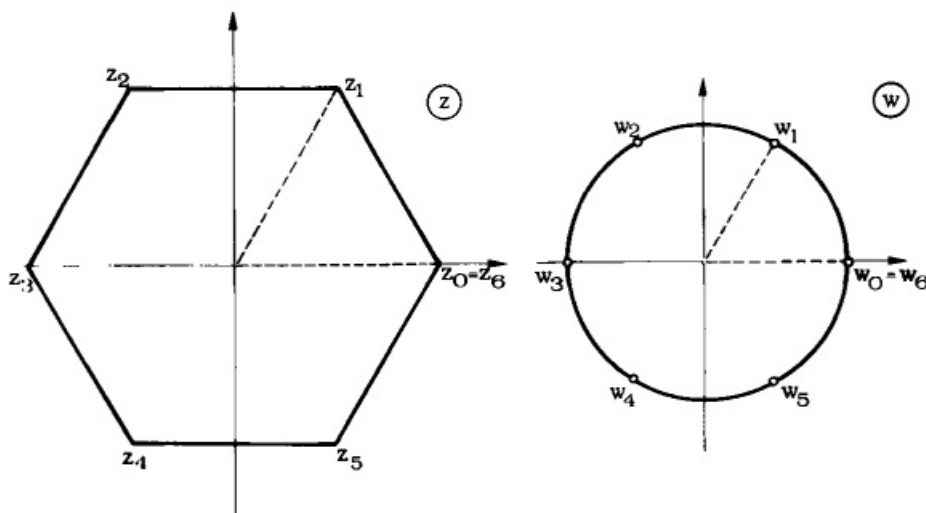


Figura 4.10: Aplicación conforme entre el hexágono regular y el disco unidad.

Podemos construir una aplicación analítica y biyectiva que mande el triángulo de vértices $0, z_0$ y z_1 en el sector circular $SC = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \arg(w) < 2\pi/6, |w| < 1\}$ de manera que el 0 quede fijo y el punto z_0 vaya a parar al w_0 y el z_1 al w_1 . Por el *principio de reflexión* podemos reflejar con respecto del segmento $[0, w_0]$ y del segmento $[0, w_1]$ para obtener medio disco y después reflejar la nueva aplicación analítica y biyectiva respecto del segmento $[w_2, w_5]$ para obtener una aplicación analítica y biyectiva entre el hexágono regular y el disco unidad de manera que los z_k vayan a parar a los w_k . Sin embargo, por la observación 4.19 esta función debe tener la siguiente forma

$$g(w) = C \int_0^w \prod_{k=1}^6 (t - w_k)^{-2/6} dt$$

donde mantenemos el exponente $-2/6$ sin simplificar para clarificar que estamos en el caso del hexágono regular y que basta cambiar los seises por n

para generalizar. Como

$$\prod_{k=1}^6 (t - w_k) = \prod_{k=1}^6 (t - e^{w\pi ik/6}) = t^6 - 1$$

entonces la función es

$$g(w) = C \int_0^w (t^6 - 1)^{-2/6} dt.$$

Ahora bien, podemos determinar la constante C evaluando en el punto $w_0 = 1$, es decir,

$$d = C \int_0^1 (t^6 - 1)^{-2/6} dt = C \int_0^1 (-1)^{-2/6} (1 - t^6)^{-2/6} dt = C \int_0^1 (1 - t^6)^{-2/6} dt.$$

Así, la última integral se puede expresar en términos de la función beta, es decir, de la función

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1} (1-x)^{v-1} dx \quad \text{para cada } (u, v) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Por tanto se tiene que

$$C = \frac{1}{6d} B(1/6, 1 - 2/6) = \frac{1}{6d} B(1/6, 2/3).$$

Este proceso se puede generalizar a cualquier cantidad de lados n y obteniendo

$$g(w) = C \int_0^w \prod_{k=1}^n (t - w_k) dt \quad \text{con } C = \frac{1}{dn} B(1/n, 1 - 2/n).$$

Apéndice A

Algunos resultados básicos

Dedicamos este primer apéndice a la recopilación de resultados propios del temario de la asignatura “*Variable Compleja*” del Grado en Matemáticas. El objetivo es poder hacer referencia a ellos cuando sea necesario y que el lector pueda acudir a ellos para mayor comodidad.

Teorema A.1 (*de Weierstrass*). Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en U que converge uniformemente en los compactos de U hacia la función f . Entonces, f es holomorfa en U , y para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de U hacia $f^{(k)}$.

Teorema A.2 (*de Hurwitz*). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}(U)$ (que recordemos es el espacio de las funciones analíticas en U) una sucesión tal que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ uniformemente en los compactos de U . Supongamos que $\bar{D}(z_0, r) \subset U$ y que f no se anula en $\{z : |z - z_0| = r\}$. Entonces, existe $N > 0$ tal que si $n \geq N$, f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(z_0, r)$.

Teorema A.3. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}(U)$ tal que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ uniformemente en los compactos de U . Si U es conexo y f_n no se anula en U para todo n , entonces $f \equiv 0$ o f no se anula en U .

Teorema A.4. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}(U)$ tal que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ uniformemente en los compactos de U . Si U es conexo y f_n es inyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces f es inyectiva o constante.

Teorema A.5 (*fórmula integral de Cauchy*). Sean U un abierto de \mathbb{C} y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en U . Si D es un dominio de Jordan tal que su adherencia $\bar{D} = D \cup \partial D$ está contenida en U , entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

para todo $z \in D$.

Teorema A.6 (*principio de identidad*). Sean f y g dos funciones holomorfas en un mismo abierto conexo $U \subset \mathbb{C}$ que coinciden en un subconjunto A que tiene al menos un punto de acumulación en U . Entonces $f \equiv g$ en U .

Teorema A.7 (*de la aplicación abierta*). Sea f una función holomorfa y no constante en un abierto conexo U . Entonces f es una aplicación abierta, es decir, para cada abierto $V \subset U$ se tiene que $f(V)$ es abierto.

Teorema A.8 (*del módulo máximo*). Sean U un abierto conexo de \mathbb{C} y f una función holomorfa en U . Entonces:

- (i) Si $|f|$ presenta un máximo local en un punto $z_0 \in U$, es decir, si existe un entorno V de z_0 con $V \subset U$ y de modo que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in V$, entonces f es constante en U .
- (ii) Supongamos además que U es acotado y que f es continua en \bar{U} . Entonces, $|f|$ alcanza su máximo absoluto en la frontera de U , es decir, existe un punto $\xi \in Fr(U)$ tal que $|f(\xi)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in \bar{U}$.

Lema A.9 (*de Schwarz*). Sea $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in B(0, 1)$. Entonces:

- (i) Para todo $z \in B(0, 1)$ se tiene que $|f(z)| \leq |z|$ y $|f'(0)| \leq 1$.
- (ii) Si para algún $z \in B(0, 1) \setminus \{0\}$ se tiene que $|f(z)| = |z|$, o si $|f'(0)| = 1$, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$ tal que $f(z) = cz$ para todo $z \in B(0, 1)$.

Teorema A.10 (*de la función inversa*). Sean U un abierto de \mathbb{C} y f una función holomorfa en U tal que su derivada f' es continua en U . Entonces, si $z_0 \in U$ y $f'(z_0) \neq 0$, existen un entorno abierto V de z_0 y un entorno abierto W de $f(z_0)$, tales que:

- (I) $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in V$.
- (II) f aplica biyectivamente V en W .
- (III) La función inversa $f^{-1} : W \rightarrow V$ es holomorfa en W y su derivada viene dada por $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$ para cada $z \in V$.

Teorema A.11 (*de holomorfía bajo el signo integral*). Sean U un abierto de \mathbb{C} , γ una curva en \mathbb{C} y $F : U \times \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en $U \times \gamma^*$. Se define

$$f(z) = \int_{\gamma} F(z, w) dw$$

con $z \in U$. Entonces la función f es continua en U .

Si, además, F es holomorfa respecto de z en U para cada $w \in \gamma^*$ fijo, entonces f es holomorfa en U y

$$f'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial F}{\partial z}(z, w) dw.$$

Teorema A.12 (versión homotópica del teorema de Cauchy). Sea U un abierto de \mathbb{C} . Son equivalentes:

- (a) U es simplemente conexo. Es decir, el complementario de U en la esfera de Riemann (o en $\hat{\mathbb{C}}$) es conexo.
- (b) Para todo ciclo γ en U y para todo $z \notin U$ se tiene que $\eta(\gamma, z) = 0$.
- (c) Para toda f holomorfa en U y para todo ciclo γ en U se tiene que $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$.
- (d) Para toda f holomorfa en U , para todo ciclo γ en U y para todo $z \in U \setminus \gamma^*$ se tiene que

$$\eta(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

- (e) Toda función holomorfa en U admite primitiva en U .
- (f) Toda función holomorfa en U que no se anule en U admite un logaritmo analítico en U .

- (g) Toda función holomorfa f en U y que no se anule en U admite raíz cuadrada analítica en U .
- (h) Toda función holomorfa f en U y que no se anule en U admite raíces n -ésimas analíticas en U para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (i) Toda función real y armónica en U es parte real de una función holomorfa en U .
- (j) El complementario de U no tiene componentes conexas acotadas.
- (k) Toda curva cerrada en U es homotópicamente equivalente a un punto.

Lema A.13. Sea X un espacio topológico. Una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene logaritmo continuo si, y solo si, tiene argumento continuo. Es más:

- (i) Si g es un logaritmo continuo de f entonces $\text{Im}(g)$ es un argumento continuo de f .
- (ii) Si ϑ es un argumento continuo de f , entonces $\ln |f| + i\vartheta$ es un logaritmo continuo de f .

Teorema A.14 (de Liouville). Sea f una función entera. Si f está acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces es constante.

Apéndice B

Transformaciones de Möbius

Dedicamos este apéndice a introducir las transformaciones de Möbius y a tratar y exponer sus principales propiedades. Las transformaciones de Möbius, tratadas a lo largo del Grado durante la asignatura de “*Variable Compleja*” nos acercan al problema planteado en este trabajo de encontrar una equivalencia conforme entre dos regiones del plano complejo. Estas aplicaciones permiten transformar entre sí diversos conjuntos reseñables como pueden ser discos, semiplanos, o porciones adecuadas de los mismos. A lo largo de este capítulo, se expondrán también las propiedades de simetría que tienen dichas aplicaciones con respecto de lo que llamaremos posteriormente “círculo generalizado”. Estas propiedades son claves tanto en el *principio de reflexión* como en la definición de la aplicación de Schwarz-Christoffel.

Definición B.1. Dada una matriz no singular 2×2 con coeficientes en los números complejos

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

es decir, tal que $ad - bc \neq 0$, la aplicación de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ dada por

$$T_M(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d}, & \text{si } z \neq \infty, z \neq -d/c \\ \infty, & \text{si } z = -d/c \\ a/c, & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

se llama *transformación de Möbius*. La condición $ad - bc \neq 0$ nos garantiza que la función no sea constante.

Observación B.2. La matriz determina únicamente la aplicación T_M salvo multiplicación por un escalar no nulo. Además, la transformación T_M es una aplicación continua de $\hat{\mathbb{C}}$ en sí mismo, y analítica en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Teorema B.3. Para toda M matriz 2×2 no singular, la función T_M define una aplicación biyectiva de $\hat{\mathbb{C}}$ en sí mismo.

Demostración:

Veamos que para todo punto w del plano complejo extendido la ecuación $T_M(z) = w$ tiene una única solución. Tenemos entonces la ecuación

$$\frac{az + b}{cz + d} = w.$$

- (I) Si $c = 0$, puesto que M es no singular $ad - bc \neq 0$ entonces se tiene que $a, d \neq 0$. Por tanto,

$$\frac{a}{d}z + \frac{c}{d} = w.$$

Si w es finito entonces, despejando, se tiene que

$$z = \frac{dw - b}{a}.$$

Por otro lado, si w es infinito, entonces $T_M(\infty) = \infty$ y es la única solución pues T_M es siempre finita para valores finitos.

- (II) Si $c \neq 0$ y w es finito, entonces $(az + b) = (cz + d)w$, o lo que es lo mismo,

$$z(a - cw) = -b + dw$$

que tiene solución única para todo $w \neq a/c$. Sin embargo si $w = a/c$ por definición $z = \infty$ y es una solución única. Por último, si w es infinito, se tiene que, por definición, $z = -d/c$ y es el único punto que verifica dichas condiciones.

Observación B.4. Notemos que si $c \neq 0$ y $w \neq a/c$ entonces la función inversa de T_M viene dada por

$$z = T_M^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Teorema B.5. Las transformaciones de Möbius, junto con su matriz asociada M , con la operación composición forman un grupo. Es más, si M y N son matrices, $T_M \circ T_N = T_{MN}$.

Demostración:

Notemos que como

$$MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} (T_M \circ T_N)(z) &= T_M(T_N(z)) = \frac{a(a'z + b') + b(c'z + d')}{c(a'z + b') + d(c'z + d')} \\ &= \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} = T_{MN}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la composición de funciones es siempre asociativa. Notemos, sin embargo, que el grupo de las transformaciones de Möbius no es conmutativo por no serlo las matrices. El elemento neutro viene dado por la identidad (tanto como aplicación como siendo visto como matriz). Y, por último, el elemento inverso viene dado por la matriz inversa, que siempre existe por ser el determinante $ad - bc$ distinto de 0 para toda transformación de Möbius.

Observación B.6. Existen ciertas transformaciones de Möbius que adquieren un papel relevante y son las asociadas a las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{C}$ no nulos. En el primer caso la aplicación asociada es $z \mapsto z + a$ y se llama traslación. En el segundo, la aplicación es $z \mapsto bz$ y se llama homotecia, en el caso en que $|b| = 1$ se llama también rotación y dilatación si $b > 0$. En el último caso la aplicación es $z \mapsto \frac{1}{z}$ y se llama inversión.

Teorema B.7. Toda transformación de Möbius se puede representar como la composición de, a lo sumo, una traslación, una homotecia, una inversión y una traslación.

Demostración:

Sea T la transformación de Möbius asociada a la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

por el teorema B.5 basta con probar que la matriz M (o un múltiplo no nulo suyo) se puede escribir como producto de las matrices de los casos especiales de la observación B.6. Si $c = 0$, entonces $a, d \neq 0$ y la representación es

$$\frac{1}{d} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{d} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, si $c \neq 0$ entonces, como

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{acz + bc}{c(cz + d)} = \frac{azc + ad + bc - ad}{c(cz + d)} \\ &= \frac{a(cz + d) + bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{d} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + d/c} \end{aligned}$$

que en términos de matrices quedaría

$$\frac{1}{c} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{bc - ad}{c^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición B.8. Consideremos $\hat{\mathbb{C}}$ el plano complejo extendido. Se define un círculo generalizado como o bien un círculo en el sentido usual o bien una línea recta (que comprende el punto del infinito).

Veamos un modelo del plano complejo extendido en el cual todos los puntos, incluido el del infinito, tienen una representación concreta.

Definición B.9. Identificamos el plano complejo con el plano $x_3 = 0$ de un espacio tridimensional real. Vamos a hacer corresponder cada punto de la esfera $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ con un punto del plano complejo extendido, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que es la compactificación de Alexandroff de \mathbb{C} , espacio localmente compacto y Hausdorff, mediante un punto del infinito. Sea $N = (0, 0, 1)$ el polo norte de la esfera. A cada $z = x + iy$ le hacemos corresponder el punto Z de intersección entre la esfera S

y la recta que pasa por el polo norte y por $(x, y, 0)$ (distinto del polo norte). De esta manera, las coordenadas de Z son

$$\left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Se puede visualizar geoméricamente que se está estableciendo una correspondencia biunívoca entre los puntos finitos del plano extendido y los puntos de S salvo el polo norte. De hecho, el punto del plano que corresponde a $Z = (x_1, x_2, x_3) \neq N$ de S viene dado por

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Completamos esta construcción haciendo corresponder el punto del infinito con el polo norte. Esta construcción esférica del plano complejo extendido se conoce como esfera de Riemann y al proceso de construcción se le conoce como proyección estereográfica.

Teorema B.10. Toda transformación de Möbius envía círculos generalizados en círculos generalizados.

Demostración:

Recordemos que toda transformación de Möbius se puede escribir como la composición de una traslación, una rotación, una inversión y otra traslación por el teorema B.7. Así pues, los círculos usuales y las rectas van a pasar a círculos usuales y rectas por las traslaciones y rotaciones. Veamos qué pasa con la inversión. Volviendo a la esfera de Riemann, dado un punto $Z = (x_1, x_2, x_3)$ que corresponde a $z = x + iy$ y $Z' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ que corresponde a

$$z' = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

entonces por lo visto en la definición B.9 se tiene que $x'_1 = x_1$, $x'_2 = -x_2$ y $x'_3 = -x_3$. Es decir, la imagen de $z \mapsto \frac{1}{z}$ en la esfera de Riemann se obtiene rotando 180 grados sobre el eje $x_2 = x_3 = 0$.

Sea ahora Γ un círculo generalizado y sea Γ' su imagen por la inversión $z \mapsto \frac{1}{z}$ y denotemos por Γ_S y Γ'_S las imágenes de Γ y Γ' sobre la esfera de Riemann.

Puesto que si tenemos una recta ha de pasar por el punto del infinito, se puede ver que su preimagen por la proyección estereográfica es un círculo que pasa por el polo norte. De igual manera, puesto que un círculo usual no tiene como punto al punto del infinito necesariamente no puede contener su

preimagen el polo norte. Así, se comprueba que la preimagen es de nuevo un círculo pero que esta vez no pasa por N . Siendo más rigurosos, un círculo en la esfera de Riemann se puede describir como la intersección de un plano dado por la ecuación $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_0$ donde $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ y $0 \leq \alpha_0 < 1$. Si un punto, $Z = (x_1, x_2, x_3)$ en S satisface esta ecuación, entonces, como sabemos la expresión de sus coordenadas, su preimagen satisface

$$\alpha_1(z + \bar{z}) - i\alpha_2(z - \bar{z}) + \alpha_3(z\bar{z} - 1) = \alpha_0(z\bar{z} + 1).$$

Haciendo $z = x + iy$ podemos escribir,

$$(\alpha_0 - \alpha_3)(x^2 + y^2) - 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 y + \alpha_0 + \alpha_3 = 0$$

y, si $\lambda = \alpha_0 - \alpha_3 \neq 0$, se tiene que

$$\left(x - \frac{\alpha_1}{\lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{\alpha_2}{\lambda}\right)^2 = \frac{1 - \alpha_0^2}{\lambda^2},$$

que es la ecuación de un círculo pues $0 \leq \alpha_0 < 1$. Si $\lambda = 0$, entonces la ecuación nos queda

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y = \alpha_3,$$

que da lugar a una línea recta. Análogamente, dada la ecuación de un círculo o de una recta se tienen cuatro coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ únicos que verifiquen $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ y $0 \leq \alpha_0 < 1$.

Por tanto, Γ_S es un círculo de S por ser Γ un círculo generalizado, y Γ'_S también pues es una rotación de 180 grados del círculo Γ_S . De nuevo, como Γ'_S es un círculo en S se tiene que Γ' es un círculo generalizado.

Definición B.11. Sea $c \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ y denotemos por Γ el círculo de centro c y radio ρ cuya ecuación es

$$(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = \rho^2.$$

Dos puntos z_1 y z_2 , distintos del infinito, se dice que son simétricos con respecto a Γ si, y solo si,

$$|z - c|^2 = (z_1 - c)(\bar{z}_2 - \bar{c}) = \rho^2.$$

Para el caso en que uno de los dos puntos es infinito decimos que es simétrico con respecto a Γ de c , su centro. Además, todo punto en Γ es simétrico con respecto a sí mismo respecto de Γ . Así, en una recta en el plano extendido, que contiene al infinito por definición, el punto del infinito es simétrico del punto del infinito.

En el caso en que Γ sea una recta, la noción de simetría es la usual, diremos que dos puntos son simétricos respecto de una recta si la recta que une dichos puntos es perpendicular a Γ y forma un ángulo de 90 grados o, equivalentemente, uno es el reflejado del otro reflejando respecto de Γ .

Observación B.12. Notemos que la conjugación no juega un papel relevante porque el rol de z_1 y z_2 es simétrico, es decir, z_1 es simétrico con respecto a Γ de z_2 si y solo si z_2 es simétrico con respecto a Γ de z_1 . Veámoslo

$$(z_1 - c)(\bar{z}_2 - \bar{c}) = \rho^2 = \overline{\rho^2} = \overline{(z_1 - c)(\bar{z}_2 - \bar{c})} = (\bar{z}_1 - \bar{c})(z_2 - c)$$

donde la segunda igualdad es cierta por ser ρ un número real (es un radio).

Lema B.13. Si a y b son números complejos distintos y μ es un número real positivo, entonces la ecuación

$$\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \mu$$

representa un círculo generalizado. Es más, da lugar a una recta si, y solo si, $\mu = 1$.

Demostración:

Usando que $z\bar{z} = |z|^2$ se tiene que

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = \mu^2(z - b)(\bar{z} - \bar{b})$$

o lo que es lo mismo

$$(1 - \mu^2)z\bar{z} - (\bar{a} - \mu^2\bar{b})z - (a - \mu^2b)\bar{z} + (a\bar{a} + b\bar{b}\mu^2) = 0.$$

Si $\mu = 1$ obtenemos la ecuación de una recta. Si $\mu \neq 1$ entonces la ecuación se puede escribir como $(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = \rho^2$, siendo el centro del círculo

$$c = \frac{a - \mu^2b}{1 - \mu^2}$$

y el radio el valor ρ con

$$\rho^2 = \frac{\mu^2(a - b)(\bar{a} - \bar{b})}{(1 - \mu^2)^2}.$$

Teorema B.14. Los puntos a y b son simétricos respecto del círculo generalizado

$$\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \mu.$$

Demostración:

Si $\mu = 1$ entonces se tiene que

$$\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = 1.$$

O lo que es lo mismo $|z - a| = |z - b|$, es decir, la recta es la mediatriz del segmento que une los puntos a y b . Por tanto a y b son simétricos respecto de la recta. Ahora bien, si $\mu \neq 1$ entonces se tiene que

$$c = \frac{a - \mu^2 b}{1 - \mu^2}$$

es el centro del círculo generalizado, así pues

$$\begin{aligned} (a - c)(\bar{b} - \bar{c}) &= \left(a - \frac{a - \mu^2 b}{1 - \mu^2}\right) \left(\bar{b} - \frac{\bar{a} - \mu^2 \bar{b}}{1 - \mu^2}\right) \\ &= \left(\frac{a(1 - \mu^2) - a + \mu^2 b}{1 - \mu^2}\right) \left(\frac{\bar{b}(1 - \mu^2) - \bar{a} + \mu^2 \bar{b}}{1 - \mu^2}\right) \\ &= \frac{(\mu^2(b - a))(\bar{b} - \bar{a})}{(1 - \mu^2)^2} = \frac{-\mu^2(a - b)(\bar{b} - \bar{a})}{(1 - \mu^2)^2} \\ &= \frac{\mu^2(a - b)(\bar{a} - \bar{b})}{(1 - \mu^2)^2} = \rho^2 \end{aligned}$$

por tanto los puntos a y b son también simétricos.

Teorema B.15. Sean a y b dos puntos del plano complejo extendido que son simétricos respecto del círculo generalizado Γ y sea T una transformación de Möbius. Entonces los puntos $a' = T(a)$ y $b' = T(b)$ son simétricos respecto de $\Gamma' = T(\Gamma)$.

Demostración:

Por el teorema B.7 toda transformación de Möbius se puede escribir como la composición de traslaciones, rotaciones e inversiones. Veamos si puntos simétricos respecto de Γ tienen por imagen puntos simétricos respecto de $T(\Gamma)$.

Si $a = b$ entonces, como a y b son simétricos, necesariamente $a \in \Gamma$. Así pues, $a' = b'$ y $a' \in \Gamma'$ luego a' es simétrico de b' respecto de Γ' . Ahora bien si $a \neq b$ y son finitos, podemos escribir la ecuación de Γ como

$$\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \mu$$

para cierto μ . Veamos esta última afirmación. Si Γ es una recta entonces el valor de μ que buscamos es 1 pues entonces obtendríamos, $|z - a| = |z - b|$, es decir, la recta dada por los puntos que equidistan de a y b . Si Γ es un círculo de centro c y radio ρ , como c está en la recta que pasa por a y b pero no está en $[a, b]$ entonces existe un μ tal que

$$c = \frac{a - \mu^2 b}{1 - \mu^2}$$

y, con esta elección,

$$\rho^2 = (a - c)(\bar{b} - \bar{c}) = \frac{(a - b)(\bar{a} - \bar{b})\mu^2}{(1 - \mu^2)^2},$$

por tanto, escribiendo

$$(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = \rho^2,$$

que es la ecuación del círculo, obtenemos

$$\left| \frac{z - a}{z - b} \right| = \mu.$$

Si denotamos por $w_1 = T_1(z) = \frac{1}{z}$ entonces la ecuación de Γ' es

$$\left| \frac{\frac{1}{w_1} - a}{\frac{1}{w_1} - b} \right| = \left| \frac{1 - aw_1}{1 - bw_1} \right| = \mu.$$

Ahora bien si a y b son no nulos, podemos escribir

$$\left| \frac{w_1 - a'}{w_1 - b'} \right| = \mu \left| \frac{a'}{b'} \right|$$

que, por el teorema B.14 demuestra que a' y b' son simétricos respecto de Γ' (pues Γ' se puede escribir como

$$\left| \frac{w_1 - a'}{w_1 - b'} \right| = \mu'$$

con $\mu' = \mu \left| \frac{a'}{b'} \right|$).

Del mismo modo, si denotamos por $w_2 = T_2(z) = cz$ con $c \in \mathbb{C}$, entonces la ecuación de Γ' es

$$\left| \frac{\frac{w}{c} - a}{\frac{w}{c} - b} \right| = \mu.$$

Sacando factor común a c tenemos que podemos reescribirla como

$$\left| \frac{w - a'}{w - b'} \right| = \mu c = \mu',$$

así, de nuevo por el teorema B.14, los puntos a' y b' son simétricos respecto de Γ' .

Por último, si denotamos por $w_3 = T_3(z) = z + d$ con $d \in \mathbb{C}$, entonces la ecuación de Γ' es

$$\left| \frac{w - d - a}{w - d - b} \right| = \mu$$

que se puede reescribir como

$$\left| \frac{w - a'}{w - b'} \right| = \mu,$$

y, de nuevo por el teorema B.14, los puntos a' y b' son simétricos respecto de Γ' .

Bibliografía

- [1] R.B. Ash and W.P. Novinger, *Complex Variables*. Segunda edición, Dover Publications, 2004, ISBN: 978-0486462509, disponible en la página web: www.math.uiuc.edu/~r-ash/CV.html.
- [2] J. B. Conway, *Functions of one complex variable I*. Graduate Texts in Mathematics 11. Springer-Verlag, New York, 1973.
- [3] Peter Henrici, *Applied and computational complex analysis. Volume 1*. Wiley-Interscience Publication, 1974, ISBN: 0-471-37244-7.
- [4] F. Galindo Soto, J. Gómez Pérez, J. Sanz Gil y L. A. Tristán Vega , *Guía práctica de VARIABLE COMPLEJA y sus aplicaciones*. Ediciones Universidad de Valladolid: Universidad de León, 2019, ISBN: 978-8413200149.
- [5] Tobin A. Driscoll and Lloyd N. Trefethen, *Schwarz-Christoffel mapping*. Cambridge University Press, 2002, ISBN: 9780521807265.