Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Grado en matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

Introducción a grupos, espacios vectoriales y anillos reticularmente ordenados

AUTOR:
Alberto Ruiz Alejandro

TUTOR:
Jesús M. Domínguez

Marzo 2023

Índice general

Introducción

Exponemos en esta memoria la teoría elemental de grupos, espacios vectoriales y anillos reticulados, enfocada desde el punto de vista de los espacios de funciones continuas, no hemos entrado a considerar la teoría de la medida. Hemos partido de los grupos conmutativos ordenados y hemos avanzado hasta introducir la estructura de Φ-álgebra, probando sus propiedades básicas, pero sin llegar a estudiar las Φ-álgebras uniformemente cerradas.

Esta memoria comparte con [Mar] algunos de sus objetivos (el paralelismo es grande en el tercer capítulo y en la parte inicial del cuarto, ya que ambas memorias siguen lo expuesto en [Pu]). Hemos tomado de [Mar] la descripción del planteamiento global.

Si X es un espacio topológico, denotaremos por $C(X)$ la $\mathbb{R}$-álgebra de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ con las operaciones definidas *punto a punto*:

$$\begin{array}{ll} (f+g)(x) & := f(x)+g(x), \\ (fg)(x) & := f(x)g(x), \\ (\lambda f)(x) & := \lambda f(x), \end{array}$$

para cada $x \in X$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideramos también en $C(X)$ la relación de orden parcial definida *punto a punto*:

$$f \leq g \text{ si } f(x) \leq g(x), \text{ para cada } x \in X.$$

Esta relación de orden parcial no solo es compatible con el producto en $C(X)$, sino que también lo es con su estructura vectorial, quedando así $C(X)$ dotado de estructura de retículo vectorial.

Sea $f \in C(X)$. Si $f \geq 0$, entonces $\sqrt{f} \in C(X)$ y, por lo tanto, f es el cuadrado de otra función de $C(X)$. Así pues, $f \geq 0$ si, y solo si, f es un cuadrado en el anillo $C(X)$. Además, si $g \in C(X)$, entonces $f \geq g$ si, y solo si, $f - g \geq 0$. Vemos así que el orden de $C(X)$ queda determinado por su estructura de anillo. Con frecuencia, para estudiar propiedades del anillo $C(X)$ es conveniente acudir a su estructura de orden.

Para cada espacio topológico X existe un espacio de Tychonoff Y tal que los anillos $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos. Es por ello que, para el estudio de las propiedades algebraicas de los anillos $C(X)$, podamos limitarnos a considerar espacios de Tychonoff (o espacios de Hausdorff completamente regulares), como así haremos en adelante.

Diremos que una $\mathbb{R}$-álgebra A es de tipo $\mathcal{C}$ si existe un espacio topológico X tal que A es l-isomorfa a $C(X)$, es decir, isomorfa como álgebra y como retículo.

Denotaremos por $C^*(X)$ la subálgebra de $C(X)$ formada por las funciones acotadas. El álgebra $C^*(X)$ es ciertamente de tipo $\mathcal{C}$, pues, si βX es la compactificación de Stone-Cech del espacio X, entonces cada función continua y acotada $f \in C^*(X)$ admite una extensión continua f^β a βX, y la aplicación

$$\begin{aligned} C^*(X) &\longrightarrow C(\beta X) \\ f &\longmapsto f^\beta \end{aligned}$$

es un l-isomorfismo.

Sea ahora Y un espacio intermedio entre X y βX, es decir, $X \subseteq Y \subseteq \beta X$. Puesto que X es denso en Y (por serlo en βX), la aplicación de restricción

$$\begin{aligned} C(Y) &\longrightarrow C(X) \\ f &\longmapsto f|X \end{aligned}$$

es un l-morfismo inyectivo e, identificando $C(Y)$ con su imagen en $C(X)$, podemos considerar a $C(Y)$ como un álgebra intermedia entre $C^*(X)$ y $C(X)$, es decir, $C^*(X) \subseteq C(Y) \subseteq C(X)$. Ahora bien, no todas las algebras intermedias entre $C^*(X)$ y $C(X)$ son de tipo $\mathcal{C}$. Puede demostrarse que si $f \in C(X)$, pero $f \notin C^*(X)$, entonces el álgebra intermedia $C^*(X)[f]$ formada por las expresiones polinómicas en f con coeficientes en $C^*(X)$ no es de tipo $\mathcal{C}$.

En el intento por encontrar una estructura algebraica que permita estudiar unificadamente las diferentes álgebras de funciones continuas, Henriksen y Johnson [HJ] proponen en 1961 la estructura de Φ-álgebra. Esta estructura ha sido la más exitosa. Todas las álgebras intermedias son Φ-álgebras (de hecho, son Φ-álgebras uniformemente cerradas). Plank [Pla] obtuvo además en 1971 el siguiente teorema de caracterización (mejorando un resultado anterior de Henriksen y Johnson): Una Φ-álgebra A uniformemente cerrada y cerrada por inversión es l-isomorfa a $C(X)$ para algún espacio de Lindelöf X si, y solo si, cada ideal propio uniformemente cerrado de A está contenido en un ideal maximal real (es decir, en un ideal maximal cuyo cuerpo residual es $\mathbb{R}$).

Sea A una Φ-álgebra. Un l-ideal maximal de A es un ideal sólido y propio de A que no está contenido estrictamente en ningún ideal sólido y propio de A. Probamos en la memoria que todo l-ideal maximal de A es un ideal primo de A, pero no necesariamente un ideal maximal de A. Vemos así que el espacio de los l-ideales maximales de A es un subespacio del espectro primo de A.

Finalizamos la memoria presentando sin demostración el teorema de representación de Henriksen-Johnson (véase [HJ]): toda Φ-álgebra A es l-isomorfa a un álgebra de funciones continuas extendidas sobre el espacio compacto y de Hausdorff $\mathcal{M}(A)$ formado por los l-ideales maximales de A (con la topología "hull-kernel").

Pasamos a resumir el contenido de cada capítulo, mencionando la bibliografía utilizada en cada uno de ellos.

En el capítulo de preliminares, damos las nociones básicas de los conceptos con los que trabajaremos durante toda la memoria. Estos incluyen las definiciones de orden parcial, extremos superiores e inferiores, retículos y subretículos, K-álgebras y morfismos entre las diferentes estructuras que definimos. Además exponemos el concepto de dualidad, el cual juega un papel muy importante durante toda la memoria, pues apoyándonos en él definimos la relación de orden en el cono negativo, y también justifica que algunas demostraciones se simplifiquen sin más que acudir a este principio. Damos una primera introducción al álgebra de funciones continuas, detallando sus operaciones y propiedades elementales, y por último, demostramos unos resultados que nos ayudarán a lo largo de la memoria para justificar algunos pasos en las demostraciones. Durante este capítulo también damos los primeros ejemplos sobre lo visto en él. La bibliografía utilizada para este primer capítulo ha sido [BKW], [GJ] y [AM].

En el capítulo siguiente ya entramos con profundidad en la primera de las estructuras que estudiamos: los grupos reticulados. Para ello, partimos de un grupo conmutativo G, al cual dotamos de una relación de orden parcial compatible con su operación, obteniendo así un grupo ordenado. Estudiamos las propiedades y probamos las resultados más importantes sobre ellos. A continuación, definimos el concepto de grupo reticulado, que no es más que un grupo ordenado que tiene estructura de retículo. Al igual que con los grupos ordenados, los estudiamos con más detalle, y en la sección siguiente definimos y presentamos las propiedades y resultados más importantes sobre los conceptos de parte positiva, parte negativa y valor absoluto de un elemento. La importancia de ellos se deja ver a lo largo de toda la memoria. Finalizamos el capítulo, primero introduciendo los l-morfismos, que son morfismos de grupos y de retículos simultáneamente. De ellos estudiamos ciertas propiedades que nos ayudarán en los siguientes capítulos. Por último, damos unos ejemplos, que reúnen todo lo visto hasta ese momento. Este capítulo se ha basado en la siguiente bibliografía: [BKW], [JR] y [Ji].

El tercer capítulo estudia los retículos vectoriales y su representación como espacios de funciones continuas. En la primera sección estudiamos los conceptos más elementales sobre ellos, apoyándonos en el capítulo anterior, e introducimos el concepto de l-subespacio. Estudiamos el espacio cociente que inducen los l-subespacios, y definimos el retículo de elementos acotados respecto a un elemento $e \in E^+$. A partir de él surgen las nociones de unidades débiles y fuertes de orden, y lo que siginifica que un retículo vectorial sea arquimediano. Exponemos los resultados y ejemplos más relevantes sobre todo lo anterior.

En la sección de representación, ahondamos en el concepto de espectro de un retículo vectorial E, Spec E. Establecemos una biyección entre el conjunto de los l-subespacios maximales de E^* y los núcleos de elementos del espectro acotado de E, Spec E^*. Dotamos de una norma tanto al retículo de los elementos acotados E^* como a $C(\text{Spec } E^*)$ y definimos la aplicación que se conoce como representación de Riez de E^*. La última parte de esta sección estudia todo lo anterior enfocado desde el espacio de funciones continuas $C(X)$ a través de diferentes resultados que vamos probando. Para este capítulo nos hemos basado principalmente en [Pu] y [JR], utilizando en menor medida también [Bki] y [Wi].

En el último capítulo estudiamos una nueva estructura, que consiste en dotar a una $\mathbb{R}$-álgebra de estructura de retículo vectorial. Al igual que en el anterior capítulo, tenemos dos secciones. En la primera definimos diferentes tipos de álgebras, entre las que se encuentran las Φ-álgebras, que son las más importantes para nuestros propósitos. Introducimos el concepto de l-ideal y estudiamos lo más importante de todo ello.

Por último, terminamos la memoria presentando una serie de resultados que nos permitan enunciar (sin demostrar) el teorema de representación de Henriksen-Johnson. Nos centramos, al igual que hicimos en retículos vectoriales, en estudiar el caso de $C(X)$, siendo X compacto y de Hausdorff. Estudiamos lo que se conoce como el álgebra de funciones extendidas sobre el conjunto de los l-ideales maximales de una Φ-álgebra A, dotado de la topología *hull-kernel* (o topología de Zariski). La bibliografía para este último capítulo se compone de [Pu], [JR] y [HJ].

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo damos las nociones básicas de los conceptos con los que trabajaremos durante toda la memoria. Estos incluyen las definiciones de orden parcial, extremos superiores e inferiores, retículos y subretículos, K-álgebras y morfismos entre las diferentes estructuras que definimos. Además exponemos el concepto de dualidad, el cual juega un papel muy importante durante toda la memoria, pues apoyándonos en él definimos la relación de orden en el cono negativo, y también justifica que algunas demostraciones se simplifiquen sin más que acudir a este principio. Damos una primera introducción al álgebra de funciones continuas, detallando sus operaciones y propiedades elementales, y por último, demostramos unos resultados que nos ayudarán a lo largo de la memoria para justificar algunos pasos en las demostraciones. Durante este capítulo también damos los primeros ejemplos sobre lo visto en él. La bibliografía utilizada para este primer capítulo ha sido [BKW], [GJ] y [AM].

Extremos superiores e inferiores

Definición 1. Una relación de *orden parcial* en un conjunto E es una relación binaria en E que satisface las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Como es habitual, denotaremos una relación de este tipo con el símbolo $\leq$.

Definición 2. Sea E un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq E$. Si el conjunto de las cotas superiores de A tiene elemento mínimo, este elemento se denomina *extremo superior* (o *supremo*) de A. El extremo superior de A, cuando exista, se denotará con $\bigvee A$, $\sup A$ o $\sup\limits_{x \in A} x$, y si A es un conjunto finito, $A := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, escribiremos preferentemente $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$. Análogamente para el *extremo inferior* (o *ínfimo*) de A.

Si F es un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado E (siendo el orden de F el heredado de E), será a menudo necesario utilizar una notación del tipo $\vee_F A$ o F-$\sup A$ para diferenciar el extremo superior de A en F del calculado en E. Debemos hacer notar, en relación con los extremos superiores de A, en F y en E respectivamente, que la existencia de uno no implica la del otro y que, aun cuando existan ambos, pueden no coincidir. Análogamente para los extremos inferiores.

Retículos y subretículos

Precisamos hacer algunas observaciones sobre las dos definiciones habituales (y coincidentes) de retículo: como conjunto parcialmente ordenado y como álgebra universal.

Definición 3. Un *retículo* es un conjunto parcialmente ordenado E en el que cada par de elementos $x, y \in E$ tiene extremo superior $x \vee y$ y extremo inferior $x \wedge y$.

Es obvio que, para cualesquiera elementos x, y, z de un retículo E, se verifica lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{(asociatividad)} & x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \\ \text{(conmutatividad)} & x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x, \\ \text{(idempotencia)} & x \vee x = x, \quad x \wedge x = x, \\ \text{(absorción)} & x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x. \end{array}$$

Definición 4. Como álgebra universal, un *retículo* es un conjunto E dotado de dos operaciones binarias, denotadas provisionalmente con $x \top y$ y $x \perp y$, que poseen las propiedades asociativa, conmutativa, de idempotencia y de absorción.

A partir de las dos operaciones anteriores $\top$ y $\perp$ puede introducirse una relación de orden parcial en E definiendo $x \leq y$ si $x \perp y = x$. El conjunto E con esta relación de orden parcial es un retículo y, para cualesquiera $x, y \in E$, se verifica que

$$\begin{aligned} x \vee y &= x \top y, \\ x \wedge y &= x \perp y. \end{aligned}$$

Definición 5. Sea E un retículo. La definición de subretículo de E se hace atendiendo a la definición de E como álgebra universal. Así pues, un subretículo F de E es un subconjunto F de E que es cerrado para las dos operaciones que definen E, es decir, $x \vee y \in F$, $x \wedge y \in F$, siempre que $x, y \in F$. Se adopta este mismo enfoque para la definición de morfismo de retículos.

Sea E un retículo y $F \subseteq E$. El que F sea un retículo con el orden heredado de E, no significa que F sea un subretículo de E. Si F, con el orden heredado de E, es un retículo, entonces, para cada par de elementos $x, y \in F$, existen $x \vee_F y$ y $x \wedge_F y$, pero puede que estos elementos no coincidan con $x \vee_E y := x \vee y$ y $x \wedge_E y := x \wedge y$ respectivamente. Veámoslo con un ejemplo:

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con el orden usual es un retículo, ya que es un conjunto totalmente ordenado. El conjunto $E := \mathbb{R}^3$, con el orden producto (o definido componente a componente), es también un retículo, y se verifica que

$$(x_1, x_2, x_3) \vee (y_1, y_2, y_3) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, x_3 \vee z_3)$$

Sea $F := \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ con el orden heredado de E. Puesto que $\mathbb{R}^2$ y F son isomorfos como conjuntos ordenados ($(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, x_1 + x_2)$), concluimos que F es un retículo. Ahora bien, tanto $(2, -1, 1)$ como $(0, 0, 0)$ están en F, pero, sin embargo, $(2, -1, 1) \vee (0, 0, 0) = (2, 0, 1) \notin F$. Así pues, F no es un subretículo de E.

Aplicaciones crecientes y morfismos de retículos

Definición 6. Sea $T : E \to F$ una aplicación entre conjuntos parcialmente ordenados. Diremos que la aplicación T es *creciente* (o *morfismo de conjuntos parcialmente ordenados*) si $x \le y$ implica que $T(x) \le T(y)$. Diremos que la aplicación T es un *isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados*) si T es biyectiva y tanto T como T^{-1} son aplicaciones crecientes.

Veremos a continuación un ejemplo de una aplicación creciente y biyectiva que no es isomorfismo. Para ello, nos bastará considerar dos relaciones de orden sobre un mismo conjunto, una de ellas estrictamente más fuerte que la otra. En esas condiciones, la aplicación identidad es biyectiva, y creciente en uno solo de los dos sentidos, luego, su inversa no es creciente.

Sea $E := \mathbb{R}^2$ con el orden usual (o definido componente a componente) y $F := \mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico. Recordemos que $(x_1, x_2) \underset{lex}{\le} (y_1, y_2)$ si $x_1 < y_1$ o ($x_1 = y_1$ y $x_2 \le y_2$). Luego, $(x_1, x_2) \le (y_1, y_2)$ implica que $(x_1, x_2) \underset{lex}{\le} (y_1, y_2)$. Además, $(1, 2) \underset{lex}{\le} (2, 1)$, aunque $(1, 2) \nleq (2, 1)$. Concluimos así que la aplicación identidad de E en F es creciente y biyectiva, pero su inversa no es creciente. De hecho, no existe ningún isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados entre E y F, ya que F es totalmente ordenado y E no lo es.

Definición 7. Sea $T : E \to F$ una aplicación entre retículos. Diremos que la aplicación T es un *morfismo de retículos* o (*l-morfismo*) si, para cualesquiera $x, y \in E$, se verifica que

$$\begin{aligned} T(x \vee y) &= T(x) \vee T(y), \\ T(x \wedge y) &= T(x) \wedge T(y). \end{aligned}$$

Definición 8. Diremos que un l-morfismo $T : E \to F$ es un *isomorfismo de retículos* (o *l-isomorfismo*) si la aplicación T es biyectiva. Es fácil comprobar que si T es un l-morfismo biyectivo, la inversa T^{-1} también es un l-morfismo y, por tanto, un l-isomorfismo.

Se prueba también sin dificultad que si T es un l-morfismo, entonces T es una aplicación creciente, pero, como veremos en el siguiente ejemplo, lo recíproco no es cierto.

Consideremos tanto $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}^3$ con el orden producto, y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $T(x_1, x_2) := (x_1, x_2, x_1 + x_2)$. La aplicación T es ciertamente creciente, ahora bien $T((0, 0) \vee (2, -1)) = T(2, 0) = (2, 0, 2)$, que no coincide con $T(0, 0) \vee T(2, -1) = (0, 0, 0) \vee (2, -1, 1) = (2, 0, 1)$.

Así pues, en el caso de los retículos, los morfismos como conjuntos ordenados (o aplicaciones crecientes) no coinciden con los morfismos como retículos (l-morfismos), ahora bien, sí coinciden los dos conceptos de isomorfismo.

Sea $T : E \to F$ es una aplicación creciente entre retículos. Si x e y son dos elementos cualesquiera de E, solo podemos asegurar que

$$\begin{aligned} T(x) \vee T(y) &\le T(x \vee y), \\ T(x) \wedge T(y) &\ge T(x \wedge y). \end{aligned}$$

Principio de dualidad

Sea $(E, \leq)$ un retículo. Consideremos en E la relación binaria $\leq'$ definida por

$$x \leq' y \text{ si } x \geq y.$$

Se comprueba sin dificultad que $\leq'$ es una relación de orden parcial (el *orden dual*) que también dota a E de estructura de retículo (el *retículo dual* del de partida), y es inmediato que

$$\begin{aligned} x \vee' y &= x \wedge y, \\ x \wedge' y &= x \vee y. \end{aligned}$$

Cuando una propiedad P, que se expresa en términos de la relación $\leq$, así como en términos de extremos superiores y extremos inferiores de pares de elementos, es cierta en todo retículo $(E, \leq)$, entonces esa propiedad también es cierta en el retículo dual $(E, \leq')$ y, por lo tanto, la propiedad P' que se obtiene a partir de P permutando $\leq$ por $\geq$ y permutando entre sí los símbolos $\vee$ y $\wedge$ también es cierta en todo retículo $(E, \leq)$. Decimos que la propiedad P' se obtiene a partir de P por *dualidad*.

Veamos un ejemplo de este situación. Un retículo E es distributivo si, para cualesquiera $x, y, z \in E$, se verifican las dos siguientes propiedades

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \\ x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z). \end{aligned}$$

Veremos en la proposición 37 que todo grupo reticulado es distributivo, pero, para probarlo, nos limitaremos a demostrar que, en todo grupo reticulado, se verifica la primera propiedad, ya que la segunda se obtiene por dualidad.

K-álgebras

Siguiendo la terminología de [AM], en esta memoria la palabra *anillo* se utiliza como sinónimo de anillo conmutativo con elemento unidad 1. Un subanillo B de un anillo A contendrá el elemento unidad 1 de A, y un morfismo de anillos de A en C llevará el 1 de A en el 1 de C.

Definición 9. Sea K un cuerpo. Llamaremos *K-álgebra* a un anillo A dotado de un morfismo de anillos $K \to A$, el cual se denomina *morfismo estructural* de la K-álgebra A. Si $A \neq 0$ (anillo trivial), entonces el morfismo estructural de A es inyectivo e identificaremos cada elemento de K con su correspondiente imagen en A, considerando de esta forma a K como subanillo de A.

Si A y B son K-álgebras, un morfismo de anillos $A \to B$ se dice que es un *morfismo de K-álgebras* si hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \\ K \arrow[u] \arrow[r, equal] & K \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales representan los morfismos estructurales. Si consideramos K como subanillo de las K-álgebras, entonces un morfismo de K-álgebras es simplemente un morfismo de anillos que deja invariantes los elementos de K. Es frecuente encontrar en la literatura (véase [JR]), y nosotros la hemos usado en la introducción, la siguiente definición alternativa de K-álgebra.

Una K-álgebra es un anillo A junto con una ley externa

$$\begin{aligned} K \times A &\longrightarrow A \\ (\lambda, a) &\longmapsto \lambda \cdot a \end{aligned}$$

que dota a A de estructura de K-espacio vectorial y de forma que, para cualesquiera $a, b \in A$ y cualquier $\lambda \in K$, se verifica

$$a(\lambda \cdot b) = (\lambda \cdot a)b = \lambda \cdot (ab).$$

Si A es una K-álgebra de acuerdo con la primera definición y $j : K \to A$ es el morfismo estructural, entonces, definiendo $\lambda \cdot a := j(\lambda)a$, se obtiene la ley externa con la que A satisface la segunda definición. Recíprocamente, si A es una K-álgebra según la segunda definición, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow A \\ \lambda &\longmapsto \lambda \cdot 1 \end{aligned}$$

es un morfismo de anillos, que podemos tomar como morfismo estructural para que A satisfaga la primera definición. Ambas definiciones son, por lo tanto, equivalentes. Habitualmente omitiremos el punto $(\cdot)$ que hemos usado con la ley externa.

Sea I un ideal de una K-álgebra A. Veamos que el anillo cociente A/I también es una K-álgebra. Con la primera definición, tomamos como morfismo estructural de A/I la composición del morfismo estructural $K \to A$ con el morfismo de paso al cociente $\pi : A \to A/I$. Con la segunda definición, definimos $\lambda \cdot \pi(a) := \pi(\lambda \cdot a)$.

Álgebras de funciones continuas

Sea X un espacio topológico no vacío y $\mathbb{R}^X$ el conjunto de todas las funciones reales definidas sobre X. Siempre que no se advierta lo contrario, consideramos en $\mathbb{R}$ el orden usual y en $\mathbb{R}^X$ el orden producto (o relación de orden *punto a punto*). La suma y el producto de funciones también se define *punto a punto*. Así pues, dadas $f, g \in \mathbb{R}^X$,

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (fg)(x) &= f(x)g(x), \end{aligned}$$

$$f \leq g \text{ si, y solo si, } f(x) \leq g(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Como es habitual, $f < g$ significa que $f \leq g$ y que $f \neq g$. Luego, si $f < g$, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) < g(x_0)$. Queremos insistir en que $f < g$ no significa que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$.

Se comprueba sin dificultad que esta relación de orden parcial dota a $\mathbb{R}^X$ de estructura de retículo vectorial. Dadas $f, g \in \mathbb{R}^X$, se verifica que

$$\begin{aligned} (f \vee g)(x) &= f(x) \vee g(x), \\ (f \wedge g)(x) &= f(x) \wedge g(x), \\ |f|(x) &= |f(x)|, \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Denotaremos frecuentemente con $\boldsymbol{\lambda}$ la función constante sobre cualquier conjunto cuyo valor constante es el número real λ.

Dotamos a $\mathbb{R}^X$ de estructura de $\mathbb{R}$-álgebra mediante el morfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^X \\ \lambda &\longmapsto \boldsymbol{\lambda} \end{aligned}$$

Así pues, si $f \in \mathbb{R}^X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda f = \boldsymbol{\lambda} f$.

Consideremos ahora el conjunto $C(X)$ de todas las funciones reales y continuas sobre X, que es una subálgebra de $\mathbb{R}^X$. Puesto que la función valor absoluto $|\,.\,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, si $f \in C(X)$, entonces $|f| = |\,.\,| \circ f \in C(X)$. Además, si $f, g \in C(X)$, entonces

$$\begin{aligned} f \vee g &= \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in C(X), \\ f \wedge g &= \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in C(X). \end{aligned}$$

Luego, $C(X)$ es también un subretículo de $\mathbb{R}^X$.

Denotaremos con $C^*(X)$ la subálgebra (y subretículo) de $C(X)$ formada por las funciones reales sobre X que son continuas y acotadas.

Teorema 10. El único morfismo de anillos de $\mathbb{R}$ en sí mismo es la identidad.

Demostración: Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morfismo de anillos. De la igualdad $\phi(1) = 1$, deducimos que ϕ es la identidad en $\mathbb{Z}$, ya que, si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \phi(1 + 1 + \cdots + 1) = \phi(1) + \phi(1) + \cdots + \phi(1) = n, \\ \phi(-n) &= -\phi(n) = -n. \end{aligned}$$

Además, si $q \in \mathbb{Q}$, entonces $q = m/n$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$. De donde, $\phi(q) = \phi(mn^{-1}) = \phi(m)\phi(n)^{-1} = mn^{-1} = q$. Luego, ϕ también es la identidad en $\mathbb{Q}$.

Por otra parte, puesto que ϕ lleva cuadrados en cuadrados, concluimos que, si $x \geq 0$, entonces $\phi(x) \geq 0$. Además, si $x \geq y$, entonces $x - y \geq 0$, y se sigue de lo anterior que $\phi(x) - \phi(y) = \phi(x - y) \geq 0$, por lo que $\phi(x) \geq \phi(y)$. Luego, ϕ es una aplicación creciente.

Veamos finalmente que ϕ es la identidad en $\mathbb{R}$. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) \neq x$. Supongamos $x < \phi(x)$. Elijamos $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < \phi(x)$. Entonces, por ser ϕ creciente, $\phi(x) \leq \phi(q) = q$, lo que es absurdo. Se razona análogamente si $x > \phi(x)$.

Proposición 11. Todo morfismo de anillos de $C(Y)$ en $C(X)$ es también un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Demostración: Sea $\phi : C(Y) \to C(X)$ un morfismo de anillos. Puesto que consideramos que $\mathbb{R}$ está contenido tanto en $C(Y)$ como en $C(X)$, se trata de probar que ϕ deja invariantes los elementos de $\mathbb{R}$ (las funciones constantes). Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Para ver que $\phi(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}$, debemos probar que $(\phi(\boldsymbol{\lambda}))(x) = \boldsymbol{\lambda}(x)$, para todo $x \in X$. Observemos que, si $x \in X$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_x : C(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

es un morfismo de anillos. Del teorema precedente se desprende que la composición

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \hookrightarrow & C(Y) & \xrightarrow{\phi} & C(X) & \xrightarrow{\phi_x} & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \boldsymbol{\lambda} & \longmapsto & \phi(\boldsymbol{\lambda}) & \longmapsto & (\phi(\boldsymbol{\lambda}))(x) \end{array}$$

es el morfismo identidad. Luego, $(\phi(\boldsymbol{\lambda}))(x) = \lambda = \boldsymbol{\lambda}(x)$.

Proposición 12. Todo morfismo de anillos de $C(Y)$ en $C(X)$ es también un morfismo de retículos.

Demostración: Sea $\phi : C(Y) \to C(X)$ un morfismo de anillos. Puesto que ϕ lleva cuadrados en cuadrados, concluimos, como en el teorema anterior, que ϕ es una aplicación creciente. Además,

$$(\phi(|g|))^2 = (\phi(|g|^2)) = \phi(g^2) = (\phi(g))^2.$$

Tomando raíces cuadradas en la expresión anterior, y teniendo en cuenta que $\phi(|g|) \geq 0$ por ser ϕ creciente, obtenemos que $\phi(|g|) = |\phi(g)|$. Por otra parte, sabemos que, si $f, g \in C(Y)$, entonces

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|).$$

De donde,

$$\phi(f \vee g) = \frac{1}{2}(\phi(f) + \phi(g) + |\phi(f) - \phi(g)|) = \phi(f) \vee \phi(g).$$

Análogamente se obtiene que $\phi(f \wedge g) = \phi(f) \wedge \phi(g)$.

Capítulo 2

Grupos conmutativos reticulados

En este capítulo ya entramos con profundidad en la primera de las estructuras que estudiamos: los grupos reticulados. Para ello, partimos de un grupo conmutativo G, al cual dotamos de una relación de orden parcial compatible con su operación, obteniendo así un grupo ordenado. Estudiamos las propiedades y probamos las resultados más importantes sobre ellos. A continuación, definimos el concepto de grupo reticulado, que no es más que un grupo ordenado que tiene estructura de retículo. Al igual que con los grupos ordenados, los estudiamos con más detalle, y en la sección siguiente definimos y presentamos las propiedades y resultados más importantes sobre los conceptos de parte positiva, parte negativa y valor absoluto de un elemento. La importancia de ellos se deja ver a lo largo de toda la memoria. Finalizamos el capítulo, primero introduciendo los l-morfismos, que son morfismos de grupos y de retículos simultáneamente. De ellos estudiamos ciertas propiedades que nos ayudarán en los siguientes capítulos. Por último, damos unos ejemplos, que reúnen todo lo visto hasta ese momento. Este capítulo se ha basado en la siguiente bibliografía: [BKW], [JR] y [Ji].

2.1. Grupos ordenados

A partir de ahora supondremos que trabajamos con un grupo conmutativo G dotado de una relación de orden parcial ($\leq$) y, como es habitual, denotaremos $+$ a la operación definida en él y 0 a su elemento neutro.

Definición 13. Diremos que G es un *grupo ordenado* si para todo $a, b, x \in G$, $a \leq b$ implica $a + x \leq b + x$. Esta definición significa que las traslaciones de G son automorfismos de conjuntos ordenados.

Definición 14. Sea G un grupo ordenado. El conjunto $P = \{x \in G \,/ x \geq 0\}$ se denomina *cono positivo* de G y sus elementos se denominan *positivos*. Se dirá que x es estrictamente positivo si $x > 0$. Notemos además que $a \leq b$ es equivalente a que se cumpla $b - a \in P$. Por lo tanto, el orden de G está determinado por P.

Proposición 15. Sea G un grupo ordenado. El cono positivo P posee las siguientes propiedades:

(i) $P + P \subseteq P$

(ii) $P \cap -P = \{0\}$, donde $-P = \{-x : x \in P\}$

Demostración:

(i) Si $0 \leq x$ y $0 \leq y$, sumando y en la primera desigualdad, obtenemos $0 \leq y \leq x+y$, lo que implica que $x + y \in P$ y se tiene lo que buscábamos.

(ii) Sea $x \in P \cap -P$. Como $x \in -P$, entonces $-x \geq 0$ y por tanto, sumando x a ambos lados, tenemos $0 = x - x \geq x$. Como además $x \geq 0$, entonces se deduce que $x = 0$.

Llamaremos *cono* a todo subconjunto de un grupo ordenado G que verifique (i) y (ii).

Proposición 16. Sea G un grupo cualquiera y sea P un cono de G. Existe en G un único orden parcial que hace a G un grupo ordenado y tal que P es el cono positivo.

Demostración: Definamos la relación $a \leq b$ si $b - a \in P$. Se tiene

- $a \leq a$ porque $a - a = 0 \in P$.
- Si $a \leq b$ y $b \leq c$, se tiene $c - a = (c - b) + (b - a) \in P + P \subseteq P$, y por tanto $a \leq c$.
- Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $b - a \in P \cap -P = \{0\}$, y por tanto $a = b$.

Las tres propiedades anteriores implican que la relación definida es de orden parcial. Sea $a \leq b$ y $x \in G$. Se tiene $(x + b) - (x + a) = b - a \in P$ y, por tanto, $x + a \leq x + b$. Luego, G es un grupo ordenado. Además, $0 \leq a$ es equivalente a que $a \in P$, es decir, P es el cono positivo de G.

En resumen, existe una correspondencia biyectiva entre los conos de G y las relaciones de orden compatibles con la estructura de grupo. Cuando consideremos un solo orden en G, a menudo escribiremos $P = G^+$. Si, por el contrario, consideramos más de un orden, denotaremos (G, P) al grupo G dotado del orden inducido por el cono P.

Observación 17. Ciertamente, $-P = \{x \in G \ / x \leq 0\}$, y a los elementos de tal conjunto los denominaremos *negativos*. Es claro que $-P$ también es un cono: si $x, y \in -P$, tenemos que $x+y \leq y \leq 0$ y, por tanto, se cumple (i) en la proposición 15. La segunda propiedad es inmediata sin más que notar que $-(-P) = P$. De esta forma podemos definir un orden, al que llamaremos *orden dual*: $x \leq y$ en $(G, -P)$ si, y solo si, $y \leq x$ en (G, P).

Observación 18. En todo grupo ordenado, $x \leq y$ es equivalente a $-y \leq -x$. Como consecuencia, la aplicación $T : (G, P) \mapsto (G, -P)$ definida como $T(x) = -x$ es un isomorfismo de grupos: es claro que la aplicación es biyectiva y, además, $T(x + y) = = -(x + y) = -x - y = T(x)T(y)$, por lo que se trata de un morfismo de grupos.

Si H es un subgrupo de G, entonces $H^+ = G^+ \cap H$ es un cono de H, el correspondiente al orden inducido en H por el orden de G.

Recordemos que una aplicación T entre conjuntos parcialmente ordenados es *creciente* si $x \leq y$ implica $T(x) \leq T(y)$.

Proposición 19. Sean G y K dos grupos ordenados. Sea f un morfismo de G en K. Para que f sea creciente es necesario y suficiente que se cumpla $f(G^+) \subseteq K^+$.

Demostración: Supongamos que f es creciente. Sea $x \in G^+$. Como $x \geq 0$ y f es creciente, entonces $f(x) \geq f(0) = 0$. Luego, $f(x) \in K^+$.

Ahora supongamos $f(G^+) \subseteq K^+$, y veamos que f es creciente. Dados $x, y \in G$ tales que $x \leq y$, se verifica que $y - x \in G^+$ y, por hipótesis, $f(y) - f(x) = f(y - x) \in K^+$. Luego, $f(x) \leq f(y)$, es decir f es creciente

Proposición 20. Un grupo ordenado G está totalmente ordenado si, y solo si, $G = G^+ \cup -G^+$.

Demostración: Si G está totalmente ordenado, entonces, dados $x, y \in G$, se cumple $x \leq y$ o $y \leq x$. Tomando $y = 0$, obtenemos que, o bien $x \geq 0$, o $x \leq 0$, y de esta manera $G = G^+ \cup -G^+$. Suponemos ahora $G = G^+ \cup -G^+$. Si $x, y \in G$, entonces se tiene $x - y \in G$ y, por hipótesis, o bien $x - y \in G^+$, lo que implica $x \geq y$, o $x - y \in (-G^+)$, lo que implica $x \leq y$. Luego, concluimos que G está totalmente ordenado.

Definición 21. Un conjunto parcialmente ordenado se dice *filtrante* si todo par de elementos en él poseen una cota superior y una cota inferior.

Proposición 22. Sea (G, P) un grupo ordenado. Para que G sea filtrante, es necesario y suficiente que $G = P + (-P)$.

Demostración: Supongamos G filtrante. Sea $x \in G$. Existe un y tal que $0 \leq y$, $x \leq y$. Entonces, $y \in P$ y, además, $x - y \in -P$. Luego, $x = y + (x - y) \in P + (-P)$.

Recíprocamente, sean $a, b \in G$. Por hipótesis se tiene $a = x - y$, $b = u - v$, con $x, y, u, v \in P$. Se deduce entonces $a \leq x \leq x + u$ y $b \leq u \leq x + u$, y también $a \geq -y \geq -y - v$ y $b \geq -v \geq -y - v$. Por lo tanto, hemos encontrado una cota superior y una cota inferior para a y b, luego G es filtrante.

Proposición 23. Sea (G, P) un grupo filtrante, (H, Q) un grupo ordenado y f una aplicación de P en Q que verifica $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Entonces existe un único morfismo creciente de G en H que prolonga a f.

Demostración: Tomemos $x \in G$. De acuerdo a la proposición anterior, existen $a, b \in P$ tales que $x = a - b$. Supongamos ahora que $x = a - b = d - c$ con $a, b, c, d \in P$. Se tiene $c + a = d + b$ y, por lo tanto, $f(c) + f(a) = f(d) + f(b)$, lo que implica $f(a) - f(b) = f(d) - f(c)$.

Definimos $\tilde{f}(x) = f(a) - f(b)$ si $x = a - b$. Debido al razonamiento anterior $\tilde{f}$ está bien definida. Para mostrar que $\tilde{f}$ es un morfismo, sea $x = a - b$, $y = u - v$ con $a, b, u, v \in P$. Entonces $x + y = a - b + u - v = (a + u) - (v + b)$, llegando a:

$$\tilde{f}(x + y) = f(a + u) - f(v + b) = (f(a) - f(b)) + (f(u) - f(v)) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)$$

En conclusión, $\tilde{f}$ es morfismo.

Veamos que $\tilde{f}$ prolonga a f. Para ello veamos primero que $f(0) = 0$. Dado que $0 = 0+0$, tenemos $f(0) = f(0)+f(0)$ y, por tanto, $f(0) = 0$. Ahora, sea $x \in P$. Se tiene $x = x-0$, por lo que $\tilde{f}(x) = f(x)-f(0) = f(x)$, y $\tilde{f}$ prolonga a f. Por último, por la proposición 19 se tiene que $\tilde{f}$ es creciente, ya que $\tilde{f}(P) = f(P) \subseteq Q$.

2.2. Retículos

En esta sección introduciremos el concepto de grupo reticulado, a partir de los grupos ordenados que ya hemos visto y la estructura de retículo que ya fue definida en el capítulo anterior.

Recordemos que un *retículo* era un conjunto parcialmente ordenado en el que cada par de elementos tenían extremo superior e inferior.

Definición 24. Un *grupo reticulado* es un grupo ordenado que tiene estructura de retículo.

A continuación veremos algunas propiedades de los extremos inferiores, superiores y las relaciones entre ellos.

Propiedades 25. Sea G un grupo ordenado y $a, b, c \in G$. Entonces se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\exists\ a \vee b \Rightarrow \exists\ (a+c) \vee (b+c)$, y se tiene $(a+c) \vee (b+c) = (a \vee b) + c$

(ii) $\exists\ a \wedge b \Rightarrow \exists\ (a+c) \wedge (b+c)$, y se tiene $(a+c) \wedge (b+c) = (a \wedge b) + c$

(iii) $\exists\ a \vee b \Rightarrow \exists\ (-a) \wedge (-b)$, y se tiene $(-a) \wedge (-b) = -(a \vee b)$

(iv) $\exists\ a \wedge b \Rightarrow \exists\ (-a) \vee (-b)$, y se tiene $(-a) \vee (-b) = -(a \wedge b)$

(v) $\exists\ a \vee b \Rightarrow \exists\ a \wedge b$, y se tiene $a \wedge b = a + b - (a \vee b)$

(vi) $\exists\ a \wedge b \Rightarrow \exists\ a \vee b$, y se tiene $a \vee b = a + b - (a \wedge b)$

Demostración: Tanto (i) como (ii) se deducen de lo siguiente. La aplicación T definida en G dada por $T(x) = x + c$ es un automorfismo y, por lo tanto, es un isomorfismo. Se cumple entonces tanto $(a \vee b) + c = T(a \vee b) = T(a) \vee T(b) = (a+c) \vee (b+c)$ como $(a \wedge b) + c = T(a \wedge b) = T(a) \wedge T(b) = (a+c) \wedge (b+c)$.

Veamos ahora (iii) y (iv). Definimos la aplicación $T : (G, P) \mapsto (G, (-P))$ dada por $T(x) = -x$. Se trata de un isomorfismo de grupos y, por tanto, conserva tanto los supremos como los ínfimos (se entiende $\vee = \vee_P$). Pero justamente los $\vee$ en $(G, -P)$ son los $\wedge$ en (G, P), debido al orden dual que comentamos en una observación anterior. Y de manera análoga para los $\wedge$. Por tanto, en resumen, tenemos: $-(a \vee b) = T(a \vee b) = T(a) \vee T(b) = (-a) \vee_{-P} (-b) = (-a) \wedge (-b)$. De manera análoga se tiene para el caso de los ínfimos..

Por último veamos (v) y (vi). Probaremos solo la (v), ya que la otra se obtiene por dualidad. Dicha propiedad se deduce de lo siguiente:

$$a \wedge b = (b - a + a) \wedge (b - b + a) = b + ((-a) \wedge (-b)) + a = a + b - (a \vee b)$$

Donde la segunda igualdad es consecuencia de (ii), y la tercera de (iii).

Definición 26. Llamaremos *sup-semirretículo* (resp. *inf-semirretículo*) a un conjunto que cumple que, dados dos elementos, su extremo superior (resp. extremo inferior) existe.

Observación 27. Debido a las propiedades anteriores, si G es un grupo ordenado y un inf-semirretículo o un sup-semirretículo, entonces G es un grupo reticulado y se tiene además $a + b = (a \vee b) - (a \wedge b)$, para todos $a, b \in G$.

Proposición 28. Sean $x, y, z, w \in G$ tales que $x + y = z + w$. Entonces,

$$x + y = (x \vee z) + (y \wedge w).$$

Demostración: Se tiene:

$$\begin{aligned}(x \vee z) + (y \wedge w) &= (x \vee (x + y - w)) + (y \wedge w) = x + (w \vee y) - w + (y \wedge w) = \\ &= x + (w \vee y) + (y \wedge w) - w = x + y + w - w = x + y\end{aligned}$$

En la segunda igualdad hemos utilizado la propiedad 25.(ii), mientras que la cuarta se tiene por la 25.(v).

Proposición 29. Sea G un grupo ordenado, y sean $y, z \in G$ tales que existe $y \wedge z$. Sean $a = y - (y \wedge z)$, $b = z - (y \wedge z)$, $x = y - z$. Entonces se cumple lo siguiente:

(i) $a \wedge b = 0$, $a - b = x$

(ii) $a = x \vee 0$, $b = (-x) \vee 0 = -(x \wedge 0)$

Demostración: Por la propiedad 25.(ii), tomando $c = -(y \wedge z)$, obtenemos $a \wedge b = (y \wedge z) - (y \wedge z) = 0$. Entonces es obvio, por como habíamos definido x, que $x = a - b$.

Por la propiedad 25.(iv) existe $(-z) \vee (-y)$, y por la 25.(i) también existe $(y - z) \vee (y - y)$ y tenemos lo siguiente: $(y - z) \vee (y - y) = y + ((-z) \vee (-y)) = y - (y \wedge z) = a$. Esto quiere decir justamente que $a = x \vee 0$. De manera análoga, existe $(z - z) \vee (z - y)$ y se tiene $(z - z) \vee (z - y) = z + ((-z) \vee (-y)) = z - (y \wedge z) = b$, y por ello $b = (-x) \vee 0 = -(x \wedge 0)$.

Proposición 30. Sea G un grupo dotado de una estructura de sup-semirretículo o inf-semirretículo. Las propiedades siguientes son equivalentes:

(i) G es un grupo reticulado

(ii) Para todo $a, b, c \in G$, $c + (a \vee b) = (c + a) \vee (c + b)$.

Demostración: Si G es reticulado, por la propiedad 25.(i) se tiene (ii). Recíprocamente, si se cumple (ii), tenemos que G es ordenado: si $a \leq b$, $(c + a) \vee (c + b) = c + (a \vee b) = c + b$ y, por tanto, $(c + a) \leq (c + b)$. Teniendo en cuenta la observación 27, deducimos que G es un grupo reticulado (es ordenado y existen tanto $\vee$ como $\wedge$ para dos elementos cualesquiera).

Teorema 31. Sea G un grupo ordenado. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) G es un grupo reticulado

(ii) Para cada $x \in G$, existen $a, b \in G$ tales que $x = a - b$ y $a \wedge b = 0$.

(iii) Para cada $x \in G$, existe $x \vee 0$.

Demostración:

(i)$\Rightarrow$ (ii): Supongamos G reticulado, y sea $x \in G$. Sean $y, z \in G$ tales que $x = y - z$, y definamos a y b como en la proposición 29. Entonces, por esa misma proposición, obtenemos $x = a - b$ y $a \wedge b = 0$, como queríamos ver.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Por hipótesis, suponemos que existen a, b tales que $x = a - b$ y $a \wedge b = 0$. Sean $y = a$, $z = b$. Se verifica que $y \wedge z = a \wedge b = 0$. Por tanto, podemos aplicar la proposición 29 y concluir que $x \vee 0$ existe y de hecho es igual a a.

(iii)$\Rightarrow$ (i): Sean $x, y \in G$. Entonces $0 \vee (y - x)$ existe. Por la propiedad 25.(i) existe también $x + (0 \vee (y - x)) = x \vee (x + y - x) = x \vee y$. Y por la propiedad 25.(v) existe $a \wedge b$ y G es reticulado.

Proposición 32. Un grupo reticulado está totalmente ordenado si y solo si $a \wedge b = 0$ implica $a = 0$ o $b = 0$.

Demostración: Si G es totalmente ordenado la condición es evidente que se cumple, ya que, o bien $a \leq b$ y tenemos $a = 0$, o $b \leq a$ y $b = 0$. Veamos el recíproco. Supongamos que se cumple dicha condición, y sea $x \in G$. Por el teorema anterior, existen a, b tales que $x = a - b$ y $a \wedge b = 0$. Esto, en particular, implica que, o bien $a = 0$ y $x = -b \leq 0$ (ya que $b \geq 0$), o $b = 0$ y $x = a \leq 0$. En conclusión, lo que acabamos de ver es que $G = P \cup -P$. Por la proposición 20 tenemos que G es totalmente ordenado.

La proposición que viene a continuación nos permitirá caracterizar los grupos reticulados a través del cono positivo P.

Proposición 33. Sea G un grupo ordenado. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(i) G es un grupo reticulado

(ii) G es filtrante y P es un sup-semirretículo.

(iii) G es filtrante y P es un inf-semirretículo.

Demostración: Es evidente que (i)$\Rightarrow$(ii) y que (i)$\Rightarrow$(iii). Veamos las implicaciones que faltan:

(ii)$\Rightarrow$ (i): Sea $x \in G$. Existe un a tal que $a \leq x, 0$, ya que G es filtrante. Tenemos que $a + P$ es sup-semiretículo, para todo $a \in G$, ya que es isomorfo a P por la traslación $t \mapsto a + t$. Por ello, $x \vee_{a+P} 0$ existe; veamos que coincide con $x \vee 0$. Sea z una cota superior de x y 0 en G. Veamos que $z \in a + P$, lo que garantizará que $x \vee_{a+P} 0 = x \vee 0$.

Tenemos $0 \leq z, x \leq z$ y, por tanto, $a \leq x \leq z$. Luego, $z = a + (z - a) \in a + P$.

Podemos afirmar entonces que $x \vee 0$ existe y coincide con el calculado en $a + P$. Para concluir basta con aplicar el teorema 31.

(iii)$\Rightarrow$(i): Notemos primero que, para todo $c \in G$, $c + P$ es un inf-semiretículo, por el mismo razonamiento que antes. Se tiene entonces la siguiente propiedad (que probamos a continuación): si $a, b \leq x, y$ existe un v tal que $a, b \leq v \leq x, y$.

Puesto que G es filtrante, dados a, b, existe c tal que $c \leq a, b$. Luego, $x, y \in cP$, ya que $c \leq x, y$ implica $(x-c), (y-c) \in P$. De donde, $x = c+(x-c) \in c+P, y = c+(y-c) \in c+P$. Veamos que $v = x \wedge_{c+P} y$ satisface lo deseado. Ciertamente $v \leq x, y$. Probemos que $a, b \leq v$. Observemos que $a, b \in c + P$, pues $c \leq a, b$. Además, teniendo en cuenta que $a \in c + P$, de $a \leq x, y$ deducimos que $a \leq v = x \wedge_{c+P} y$. Análogamente $b \leq v$.

Veamos a continuación que G es un inf-semirretículo y, por la observación 19, podremos concluir que G es un retículo. Tomemos $a \leq x, y$, dado que G es filtrante. Así pues, $x, y \in a + P$ y, puesto que aP es un inf-semirretículo, existe $g = x \wedge_{a+P} y$. Probemos que $g = x \wedge y$.

Ciertamente $g = x \wedge_{a+P} y$ es una cota inferior de $\{x, y\}$. Veamos que g es la mayor de las cotas inferiores de $\{x, y\}$ en G. Sea $b \leq x, y$. Debemos probar que $b \leq g$. Por la propiedad que acabamos de probar, existe v tal que $a, b \leq v \leq x, y$. Como $a \leq v$, entonces $v \in aP$. Luego, $v \leq x \wedge_{a+P} y = g$. De $b \leq v \leq g$, deducimos que $b \leq g$.

Proposición 34. Sea G un grupo reticulado, y $x \in G$. Si $nx \geq 0$, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \geq 0$.

Demostración: Por la aplicación de manera recurrente de la propiedad 25.(ii), tenemos la siguiente igualdad: $n(x \wedge 0) = nx \wedge (n-1)x \wedge \ldots \wedge x \wedge 0$. Por tanto, se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned} n(x \wedge 0) &= nx \wedge (n-1)x \wedge \ldots \wedge x \wedge 0 = \\ &= (n-1)x \wedge (n-2)x \wedge \ldots \wedge x \wedge 0 = (n-1)(x \wedge 0) \end{aligned}$$

La segunda igualdad es consecuencia de la hipótesis. Por tanto $x \wedge 0 = 0$, lo que implica $x \geq 0$.

Definición 35. Un grupo G se dice que *carece* (o *es libre*) *de torsión* si se cumple lo siguiente:

$$\text{para todo } x \in G, n \in \mathbb{N},\ nx = 0 \text{ implica que } x = 0.$$

Corolario 36. Todo grupo reticulado carece de torsión.

Demostración: Sea G un grupo reticulado, y sea $x \in G$. Si $nx = 0$, se tiene, por la proposición anterior, que $x \geq 0$. Tomando opuestos tenemos también $n(-x) = 0$ y, aplicando de nuevo dicha proposición, tenemos $(-x) \geq 0$. Luego, $x \leq 0$. En conclusión, $x = 0$, y G carece de torsión.

Proposición 37. Un grupo reticulado es un retículo distributivo, es decir, se satisfacen las dos igualdades siguientes para todo $x, y, z \in G$:

(i) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(ii) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Demostración: Demostraremos solo (i), pues la segunda se deduce de la primera por dualidad. Se tiene que $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee y$, y también $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z$. Por tanto $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Sea $t = y \wedge z$. De $t \leq y$ se deduce que $0 \leq y - t$ y, por tanto, $x \leq y - t + x \leq y - t + (t \vee x)$. Además, $0 \leq (t \vee x) - t$, por lo que se deduce $y \leq y - t + (t \vee x)$ y, por tanto, $x \vee y \leq y - t + (t \vee x)$. De igual forma se demuestra que $x \vee z \leq z - t + (t \vee x)$. Finalmente, llegamos a

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (x \vee z) &\leq (y - t + (t \vee x)) \wedge (z - t + (t \vee x)) = \\ &= (y \wedge z) - t + (t \vee x) = t \vee x = x \vee (y \wedge z)\end{aligned}$$

Teorema 38. Sea G un grupo reticulado. Sean $a_1, a_2, ..., a_m$ y $b_1, b_2, ..., b_n$ elementos positivos tales que $a_1 + a_2 + ... + a_m = b_1 + b_2 + ... + b_n$. Existen elementos $(c_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ tales que:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \ \text{ y } \ b_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}$$

Demostración: Para demostrarlo, primero probamos el caso en que $m = n = 2$. Se tiene, $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ y, entonces, $b_1 - a_1 = a_2 - b_2$. Definimos:

$$c_{11} = a_1 \wedge b_1, \ c_{12} = a_1 - c_{11}, \ c_{21} = b_1 - c_{11}, \ c_{22} = a_2 \wedge b_2$$

Se tiene, $c_{11} + c_{12} = a_1$ y $c_{11} + c_{21} = b_1$ y, entonces:

$$\begin{aligned}c_{21} + c_{22} &= b_1 - c_{11} + (a_2 \wedge b_2) = ((-a_1) \vee (-b_1)) + b_1 + (a_2 \wedge b_2) = \\ &= ((b_1 - a_1) \vee 0) + (a_2 \wedge b_2) = ((a_2 - b_2) \vee 0) + (a_2 \wedge b_2) = \\ &= a_2 + ((-a_2) \vee (-b_2)) + (a_2 \wedge b_2) = a_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{12} + c_{22} &= a_1 - c_{11} + (a_2 \wedge b_2) = ((-a_1) \vee (-b_1)) + a_1 + (a_2 \wedge b_2) = \\ &= ((a_1 - b_1) \vee 0) + (a_2 \wedge b_2) = ((b_2 - a_2) \vee 0) + (a_2 \wedge b_2) = \\ &= b_2 + ((-a_2) \vee (-b_2)) + (a_2 \wedge b_2) = b_2\end{aligned}$$

Por lo tanto, la propiedad se cumple en este caso. Pongamos ahora $m > 2$ y $n \geq 2$. Supongamos la propiedad cierta para $p < m$ y $q = n$. Como $(a_1 + ... + a_{m-1}) + a_m = b_1 + ... + b_n$, por hipótesis se tiene que existen elementos positivos $(t'_j)_{j \leq n}$ y $(t''_j)_{j \leq n}$ tales que:

$$a_1 + ... + a_{m-1} = \sum_{j=1}^{n} t'_j \ , \ a_m = \sum_{j=1}^{n} t''_j \ , \ b_j = t'_j + t''_j$$

Consideramos la primera de las igualdades, y aplicamos de nuevo la hipótesis de inducción. Existen elementos $(u_{ij})_{1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1}$ tales que, para $i \leq m - 1$, se tiene:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \ \text{ y para } j \leq n, \ t'_j = \sum_{i=1}^{m-1} u_{ij}$$

Si ponemos $u_{mj} = t''_j$, se deduce $a_m = \sum_{j=1}^{n} u_{mj}$ y $b_j = t'_j + t''_j = \sum_{i=1}^{m} u_{ij}$

Hemos demostrado, por tanto, que la propiedad es cierta para $p = m$ y $l = n$. Intercambiamos a_i y b_j y suponemos que el teorema es cierto para $p = m$ y $q \leq n$. Entonces, de manera análoga a lo anterior, se prueba que también se cumple para $p = m$ y $q = n$. Por tanto, hemos visto finalmente todo lo que queríamos.

Corolario 39. Sea G un grupo reticulado. Sean $a, b_1, ..., b_n$ elementos positivos de G tales que $a \leq b_1 + ... + b_n$. Entonces, existen elementos positivos $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ tales que $a = a_1 + ... + a_n$ y $a_i \leq b_i$, para cada i.

Demostración: Si tomamos $a' = b_1 + ... + b_n - a$, entonces es evidente que $a' \geq 0$ y que $a + a' = b_1 + ... + b_n$. Por tanto, aplicamos el teorema anterior a dicha igualdad y existen $(c_{ij})_{i \leq m, j \leq n}$ tales que:

$$a = \sum_{j=1}^{n} c_{1j} \quad , \quad a' = \sum_{j=1}^{n} c_{2j} \quad \text{y} \quad b_j = \sum_{i=1}^{2} c_{ij} = c_{1j} + c_{2j}$$

Tomando $a_i = c_{1i}$, se tiene $a_i \geq 0$, $a = a_1 + ... + a_n$ y también $a_i \leq a_i + c_{2i} = c_{1i} + c_{2i} = b_i$.

Corolario 40. Sea (G, P) un grupo reticulado. Si $x, y, z \in P$, entonces $x \wedge (y + z) \leq$ $\leq (x \wedge y) + (x \wedge z)$.

Demostración: Como $x \wedge (y + z) \leq (y + z)$, aplicando el corolario anterior deducimos que existen s, t tales que $x \wedge (y + z) = s + t$, con $0 \leq s \leq y$, $0 \leq t \leq z$. Por tanto, $s \leq s + t \leq x$, lo que implica $s \leq x \wedge y$. Por un razonamiento análogo, $t \leq s + t \leq x$ implica $t \leq x \wedge z$. Concluimos entonces $x \wedge (y + z) \leq (x \wedge y) + (x \wedge z)$.

A continuación introducimos el concepto de ortogonalidad y unas propiedades elementales.

Definición 41. Sea (G, P) un grupo reticulado, y sean $a, b \in P$. Se dice que a y b son ortogonales, y lo denotaremos $a \perp b$, si $a \wedge b = 0$.

Propiedades 42. Sea (G, P) un grupo reticulado, y sean $a, b \in P$, $c \in G$. Se cumple lo siguiente:

(i) $a \perp b$ si, y solo si, $a + b = a \vee b$

(ii) Si $a \perp b$ y $c \geq 0$, entonces $a \wedge c = a \wedge (b + c)$

(iii) Si $a \perp b$, $c \geq 0$ y $a \leq b + c$, entonces $a \leq c$

(iv) Si $a \perp b$ y $a \perp c$, entonces $a \wedge c = a \wedge (b + c) = 0$

Demostración: De la propiedad 25.(iv) tenemos $a \wedge b = a + b - a \vee b$, de lo que se deduce de manera clara (i).

Es claro que $a \wedge c \leq a \wedge (b + c)$. Por otro lado, debido al corolario 40, se tiene $a \wedge (b + c) \leq (a \wedge b) + (a \wedge c) = a \wedge c$, donde la igualdad es consecuencia de la hipótesis. Por tanto, se tiene (ii).

A partir de (ii) se deduce de manera trivial (iii), ya que $a \leq (b+c)$ implica $a \wedge c = a$, lo cual implica, a su vez, $a \leq c$.

Por último, (iv) vuelve a ser consecuencia de (ii). Como a y c son ortogonales tenemos que $c \geq 0$ y, por (ii), tenemos: $a \wedge (b+c) = a \wedge c = 0$. Concluimos así que a y $b+c$ son ortogonales.

2.3. Parte positiva, parte negativa y valor absoluto.

En $\mathbb{R}^X$ son bien conocidos los conceptos de valor absoluto, parte positiva y parte negativa. En este apartado definiremos este concepto en el caso de grupos reticulados, y daremos las propiedades y resultados más relevantes. Supondremos entonces que trabajamos siempre en un grupo conmutativo reticulado G.

Definición 43. Sea $x \in G$. Llamaremos *parte positiva* y, respectivamente, *parte negativa* de x a los elementos $x^+ = x \vee 0$ y $x^- = -x \vee 0 = -(x \wedge 0)$.

Es evidente entonces que $x \geq 0$ si, y solo si, $x^- = 0$, y $x \leq 0$ si y solo si $x^+ = 0$.

Observación 44. Sea $x \in G$. Debido a la proposición 22, se deduce lo siguiente:

(i) $(-x)^+ = x^-$, $(-x)^- = x^+$

(ii) $x = x^+ - x^-$, $x^+ \wedge x^- = 0$

De nuevo, por la proposición 22 junto con esta última observación, se tiene el siguiente resultado cuya demostración es trivial.

Proposición 45. Sean $x, y, z \in G$. Se verifica que $x = y - z$ e $y \wedge z = 0$ si, y solo si, $y = x^+$ y $z = x^-$.

Propiedades 46. Sean $x, y \in G$, $n \in \mathbb{N}$. Se verifican las siguientes propiedades:

(i) $x \leq y$ si, y solo si, $x^+ \leq y^+$ y $y^- \leq x^-$

(ii) $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$, $(x+y)^- \leq x^- + y^-$

(iii) $(nx)^+ = nx^+$, $(nx)^- = nx^-$

Demostración: Veamos (i). Es evidente que, si $x \leq y$, entonces $x^+ = x \vee 0 \leq y \vee 0 = y^+$ y también $y^- = -(y \wedge 0) \leq -(x \wedge 0) = x^-$. Recíprocamente, $x = x^+ - x^- \leq y^+ - y^- = y$.

Se tiene que $x \leq x^+$, $y \leq y^+$, lo que implica $x + y \leq x^+ + y^+$. Por la propiedad (i) que acabamos de probar, $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$, ya que $(x^+ + y^+)^+ = x^+ + y^+$ al ser positivo $x^+ + y^+$. La otra desigualdad se razona de manera análoga.

Por último, veamos (iii). Pongamos $y = x^+$, $z = x^-$. Se tiene que $x = y - z$. Por tanto, $nx = ny - nz$. Por otro lado, aplicando la propiedad 42.(iv) de manera recurrente con $b = c = y$, $b = c = z$, obtenemos que $ny \perp nz$. Por la proposición 45 se tiene entonces que $ny = (nx)^+$ y $nz = (nx)^-$.

Definición 47. Sea $a \in G$. Llamaremos *valor absoluto de* a al elemento $|a| = a \vee -a$.

Observación 48. De la definición, es inmediato que $|a| = |-a|$. También se deducen las tres propiedades siguientes:

(i) $|a| \leq x$ si, y solo si, $-x \leq a \leq x$

(ii) $|a| \geq 0$

(iii) $|a| = 0$ si, y solo si, $a = 0$

Proposición 49. Sean $a, b \in G$. Se tiene $|a - b| = (a \vee b) - (a \wedge b)$.

Demostración: Tenemos lo siguiente:

$(a \vee b) - (a \wedge b) = (a \vee b) + (-a \vee -b) = 0 \vee (b - a) \vee (a - b) \vee 0 = |a - b| \vee 0 = |a - b|$

La penúltima igualdad es consecuencia de la propiedad 25.(i), y la última es evidente por la observación anterior.

Observación 50. Si en la anterior proposición $b = 0$, entonces $|a| = a^+ + a^-$.

Propiedades 51. Sean $a, b \in G, n \in \mathbb{N}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

(i) $|na| = n|a|$

(ii) $|a \vee b| \leq |a| \vee |b| \leq |a| + |b|$

(iii) $|a + b| \vee |a - b| = |a| + |b|$

(iv) $|a + b| \wedge |a - b| = ||a| - |b||$

Demostración: A partir de la observación anterior, junto con la propiedad 46.(iii), tenemos lo siguiente: $|na| = (na)^+ + (na)^- = n(a^+) + n(a^-) = n(a^+ + a^-) = n|a|$, y por tanto se tiene (i).

La segunda desigualdad de (ii) es evidente. La primera se deduce de lo siguiente:

$$|a \vee b| = (a \vee b) \vee (-a \wedge -b) \leq a \vee b \vee -a \vee -b = |a| \vee |b|$$

La propiedad (iii) se tiene por lo siguiente:

$$\begin{aligned} |x + y| \vee |x - y| &= (x + y) \vee (-x - y) \vee (x - y) \vee (y - x) = \\ &= (|x| - y) \vee (|x| + y) = |x| + |y| \end{aligned}$$

Por último, veamos la propiedad (iv). Tenemos las dos igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} (x + y) \wedge |x - y| &= ((x + y) \wedge (x - y)) \vee ((x + y) \wedge (y - x)) = \\ &= (x - |y|) \vee (y - |x|) \end{aligned}$$

$$(-x - y) \wedge |x - y| = (-x - |y|) \vee (-y - |x|)$$

Lo anterior es justo el miembro de la izquierda de (iv). Tenemos entonces:

$$(x - |y|) \vee (y - |x|) \vee (-x - |y|) \vee (-y - |x|) = (|x| - |y|) \vee (|y| - |x|) = ||x| - |y||$$

Observación 52. De la propiedad (iii) se deduce de manera trivial un resultado bien conocido como es la desigualdad triangular. La enunciamos a continuación.

Proposición 53. (*Desigualdad triangular*). Sea G un grupo reticulado conmutativo. Entonces, para todo par de elementos $a, b \in G$, se satisface $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Proposición 54. Si $a \geq 0, b \geq 0$, entonces $a \wedge b = 0$ si, y solo si, $a + b = |a - b|$.

Demostración: Supongamos $a \wedge b = 0$. Por la proposición 49, tenemos $|a - b| = a \vee b$. Y, por la propiedad 42.(i), $a + b = a \vee b$. Luego, $a + b = |a - b|$.

Recíprocamente, supongamos $a + b = |a - b|$. Entonces, de nuevo por la proposición 49, se tiene $a + b = (a \vee b) - (a \wedge b) \leq a \vee b \leq a + b$. Esto implica $a + b = a \vee b$ y, por la propiedad 42.(i), se tiene $a \wedge b = 0$.

Proposición 55. Sean $a, b, c \in G$. Entonces $|(a \vee c) - (b \vee c)| + |(a \wedge c) - (b \wedge c)| = |a - b|$.

Demostración: Pongamos $x = a \wedge b$ y $t = |a - b|$. Se tiene entonces, por la proposición 49: $a \vee b = |a - b| + (a \wedge b) = t + x$. Desarrollando cada uno de los términos de la izquierda de la igualdad llegamos a lo siguiente:

$$|(a \vee c) - (b \vee c)| = (a \vee b \vee c) - ((a \wedge b) \vee c) = ((t + x) \vee c) - (x \vee c)$$

$$|(a \wedge c) - (b \wedge c)| = ((a \vee b) \wedge c) - (a \wedge b \wedge c) = ((t + x) \wedge c) - (x \wedge c)$$

Por lo tanto, lo que tenemos que demostrar es:

$$((t + x) \vee c) - (x \vee c) + ((t + x) \wedge c) - (x \wedge c) = t \quad \text{si y sólo si}$$

$$((t + x) \wedge c) - (x \vee c) = t + (x \wedge c) - ((t + x) \vee c)$$

.

El lado izquierdo de la igualdad anterior es lo siguiente:

$$\begin{aligned} ((t + x) \wedge c) - (x \vee c) &= (-x \wedge -c) + ((t + x) \wedge c) = t \wedge (c - x) \wedge (t + x - c) \wedge 0 = \\ &= (c - x) \wedge (t + x - c) \wedge 0, \quad \text{ya que } \ t \geq 0 \end{aligned}$$

Y el derecho es igual a:

$$\begin{aligned} t + (x \wedge c) - ((t + x) \vee c) &= ((-x - t) \wedge -c) + ((t + x) \wedge (t + c)) = \\ &= t \wedge (c - x) \wedge (t + x - c) \wedge 0 = (c - x) \wedge (t + x - c) \wedge 0 \end{aligned}$$

De esta forma hemos demostrado la igualdad que queríamos y se cumple la del enunciado.

Corolario 56. Sean $a, b \in G$. Entonces $|a^+ - b^+| \leq |a - b|$ y $|a^- - b^-| \leq |a - b|$.

Demostración: Se deduce de la proposición anterior tomando $c = 0$.

Proposición 57. Sean $a, b \in G$. Entonces $a^+ \wedge b^+ \leq (a + b)^+$.

Demostración: Sea $x = (a + b)^+$. Observemos que $x - a \geq -a$, ya que $x \geq 0$. Además:

$$\begin{aligned} x - b &= (a + b)^+ - b = ((a + b) \vee 0) - b = \\ &= ((a + b) - b) \vee (0 - b) = a \vee (-b) \geq a \end{aligned}$$

Luego, se tiene:

$$x - (a \wedge b) = x + ((-a) \vee (-b)) =$$
$$= (x - a) \vee (x - b) \geq (-a) \vee a = |a| \geq 0$$

En consecuencia, $x - (a \wedge b) + (a \wedge b) \geq a \wedge b$. De donde, $x \geq a \wedge b$. Además, $x \geq 0$, luego, $x \geq (a \wedge b) \vee 0$. Puesto que G es un retículo distributivo (por la proposición 37), $x \geq (a \wedge b) \vee 0 = (a \vee 0) \wedge (b \vee 0) = a^+ \wedge b^+$. Luego, $(a+b)^+ = x \geq a^+ \wedge b^+$.

2.4. Morfismos de grupos reticulados.

Definición 58. Sean G y H dos grupos reticulados y f una aplicación de G en H. Se dirá que f es un *l-morfismo* si se dan las dos siguientes condiciones:

(i) f es un morfismo de grupos: $f(a+b) = f(a) + f(b)$, para todo $a, b \in G$

(ii) f es un morfismo de retículos: $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ y $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, para todo $a, b \in G$

Si G y H son grupos reticulados y $f : G \to H$ es un morfismo de grupos tal que $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, para todo $a, b \in G$, entonces, de las propiedades vistas en 25 se deduce que f es un l-morfismo. Análogamente si $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, para todo $a, b \in G$.

Diremos que un l-morfismo es *l-isomorfismo* si es biyectivo. Veremos que la aplicación inversa de un l-isomorfismo es también un l-morfismo.

Proposición 59. Sea f un l-morfismo de G en H. Se verifica lo siguiente:

(i) $f(G^+) \subseteq H^+$

(ii) Si $f(G) = H$, entonces $f(G^+) = H^+$

Demostración: Si $x \in G^+$, se tiene $x = x \vee 0$ y, por tanto, $f(x) = f(x) \vee 0 \in H^+$. Se tiene por tanto (i).Veamos (ii): sea $y \in H^+$. Existe un $x \in G$ tal que $f(x) = y$. Se tiene, $x \vee 0 \in G^+$ y $f(x \vee 0) = y \vee 0 = y$. Se cumple entonces también (ii).

Proposición 60. Sean G y H dos grupos reticulados y $f : G \to H$ un l-isomorfismo. Entonces f^{-1} es también un l-morfismo.

Demostración: Es evidente que f^{-1} es morfismo de grupos. Veamos que es morfismo de retículos. Para ello probemos que conserva los extremos superiores, ya que el caso de los extremos inferiores es análogo.

Como f es inyectiva, nos basta ver que $f(f^{-1}(y_1 \vee y_2)) = f(f^{-1}(y_1) \vee f^{-1}(y_2))$. Por un lado, $f(f^{-1}(y_1 \vee y_2)) = y_1 \vee y_2$ y, al ser f l-morfismo, tenemos $f(f^{-1}(y_1) \vee f^{-1}(y_2)) = f(f^{-1}(y_1)) \vee f(f^{-1}(y_2)) = y_1 \vee y_2$. Por tanto, tenemos la igualdad buscada.

Observación 61. Un morfismo de grupos que sea creciente no es necesariamente un morfismo de grupos reticulados. Un ejemplo es el que vimos en el capítulo de preliminares tras la definición 8. Si tomamos la aplicación identidad f de $\mathbb{R}^2$ con el orden usual en $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico, se trata de una aplicación creciente, pero no es morfismo de grupos reticulados. En efecto, tomando los mismos puntos que tomamos entonces, tenemos que $(1,2) \vee (2,1) = (2,2)$ (con el orden usual), mientras que $(1,2) \vee_{lex} (2,1) = (1,2)$. Por ello no es l-morfismo al no verificarse $f((1,2) \vee (2,1)) = f((1,2)) \vee_{lex} f((2,1))$.

Teorema 62. Sean G y H grupos reticulados y f un morfismo de grupos entre G y H. La condiciones siguientes son equivalentes:

(i) f es l-morfismo

(ii) $f(|x|) = |f(x)|$ para todo $x \in G$

(iii) Si $x \perp y$, entonces $f(x) \perp f(y)$ para todo $x, y \in G$

(iv) $f(x^+) = f(x)^+$, para todo $x \in G$

Demostración:
(i)$\Rightarrow$(ii): Es evidente por la definición tanto de l-morfismo como de valor absoluto.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Supongamos que, para todo $x \in G$, se verifica $f(|x|) = |f(x)|$. Si $x \geq 0$, entonces $f(x) = f(|x|) = |f(x)| \geq 0$. Si $x \perp y$, entonces $x \geq 0, y \geq 0$. Además, se verifica que $|f(x) - f(y)| = |f(x-y)| = f(|x-y|)$.

Por la proposición 54, tenemos que $f(x) \perp f(y)$ si y solo si $f(x+y) = f(|x-y|)$. Y esto es cierto de nuevo por tal proposición, ya que $x \perp y$ si y solo si $x + y = |x-y|$.

(iii)$\Rightarrow$(iv): Como $x^+ \perp x^-$, tenemos $f(x^+) \perp f(x^-)$. Dado que $f(x) = f(x^+) - f(x^-)$, por la proposición 45 concluimos $f(x^+) = f(x)^+$.

(iv)$\Rightarrow$(i): Notemos que $x \vee y = x + (y-x)^+$. Por tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} f(x \vee y) &= f(x) + f((y-x)+) = f(x) + f(y-x)^+ = \\ &= f(x) + (f(y-x) \vee 0) = f(x) \vee f(y) \end{aligned}$$

Luego, f conserva los extremos superiores; también conserva los inferiores debido a la igualdad que ya fue probada anteriormente: $x \wedge y = x + y - (x \vee y)$.

Observación 63. Si G es un grupo reticulado, la aplicación $x \mapsto nx$ es un morfismo de grupos y, por la propiedad 46.(iii), conserva x^+, por lo que el teorema anterior garantiza que dicha aplicación es un l-morfismo. De esto se deduce lo siguiente:

$$n(a \vee b) = na \vee nb \;\text{ y }\; n(a \wedge b) = na \wedge nb, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y para todo } a, b \in G$$

Recordemos que un semigrupo es un conjunto no vacío junto con una operación binaria que es interna y asociativa. En nuestro caso la operación $+$ también cumple la propiedad conmutativa y, por lo tanto, G^+ es un semigrupo conmutativo o abeliano.

Proposición 64. Sean G y H grupos reticulados y sea f un morfismo del semigrupo G^+ en el semigrupo H^+ que conserva $\vee$. Existe un único l-morfismo de G en H que prolonga a f.

Demostración: Por la proposición 16, existe un único morfismo creciente de grupos $\tilde{f}$ que prolonga a f. Si $x, y \in G$ y $t = x \wedge y$, se tiene que $(\tilde{f}(x \vee y) - \tilde{f}(t)) \in G^+$ y entonces:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x \vee y) - \tilde{f}(t) = f((x-t) \vee (y-t)) = \\ = f(x-t) \vee f(y-t) = (\tilde{f}(x) \vee \tilde{f}(y)) - \tilde{f}(t)\end{aligned}$$

Por tanto $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$, y se tiene que $\tilde{f}$ es morfismo.

2.5. Ejemplos

En este último apartado del capítulo veremos algunos ejemplos relacionados con los conceptos vistos en él.

Ejemplo 65. Consideremos una familia $(G_i)_{i\in I}$ de grupos ordenados. Sea $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ el producto cartesiano de los G_i. Pongamos $G^+ = \prod\limits_{i\in I} (G_i)^+$. Se ve fácilmente que G^+ es un cono. Define por tanto un orden en G: si $x = (x_i)_{i\in I}$ y $y = (y_i)_{i\in I}$, $x \leq y$ equivale a $x_i \leq y_i$ para todo $i \in I$, es decir, se trata del orden "componente a componente". Si ahora suponemos que cada uno de los G_i es reticulado, entonces G es reticulado y $x \vee y = (x_i \vee y_i)_{i\in I}$, $x \wedge y = (x_i \wedge y_i)_{i\in I}$.

Diremos que G es el *producto directo* (o *producto cartesiano*) de los grupos reticulados G_i. Se tiene, además, que las proyecciones sobre cada uno de los G_i son l-morfismos. Si $x = (x_i)_{i\in I} \in G$, llamaremos *soporte de* x al conjunto $S(x) = \{i \in I \,/\, x_i \neq 0\}$.

Ejemplo 66. Sea $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ el producto directo de la familia $(G_i)_{i\in I}$ y sea $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ el subgrupo de G formado por los elementos que tienen soporte finito. Tal subgrupo conserva los extremos superiores e inferiores, por lo que es también un grupo reticulado, y lo llamaremos *suma directa*. Se cumple que la inyección canónica de $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ en G es un l-morfismo.

Cuando I sea finito, como es habitual en estos casos, denotaremos a la suma directa simplemente por $G_1 \oplus ... \oplus G_n$

Ejemplo 67. Si X es un espacio topológico, el conjunto $C(X)$ de las funciones continuas sobre X a valores reales (en el que tanto la suma como la relación de orden se definen "punto a punto") es un grupo reticulado, en el cual se tiene:

$$(f \vee g)(x) = \sup(f(x), g(x))$$
$$(f \wedge g)(x) = \inf(f(x), g(x))$$

Ejemplo 68. El grupo S de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es un caso particular del ejemplo anterior, cuando $X = \mathbb{N}$, y en él se verifica: $(x_n)_n \vee (y_n)_n = (x_n \vee y_n)_n$.

En S, existen muchos subgrupos que son grupos reticulados. Algunos de los más relevantes son los siguientes:

- El subgrupo de las sucesiones acotadas.
- El subgrupo de las sucesiones convergentes.
- El subgrupo de las sucesiones que convergen a 0.

Capítulo 3

Retículos vectoriales

Este capítulo estudia los retículos vectoriales y su representación como espacios de funciones continuas. En la primera sección estudiamos los conceptos más elementales sobre ellos, apoyándonos en el capítulo anterior, e introducimos el concepto de l-subespacio. Estudiamos el espacio cociente que inducen los l-subespacios, y definimos el retículo de elementos acotados respecto a un elemento $e \in E^+$. A partir de él surgen las nociones de unidades débiles y fuertes de orden, y lo que siginifica que un retículo vectorial sea arquimediano. Exponemos los resultados y ejemplos más relevantes sobre todo lo anterior.

En la sección de representación, ahondamos en el concepto de espectro de un retículo vectorial E, Spec E. Establecemos una biyección entre el conjunto de los l-subespacios maximales de E^* y los núcleos de elementos del espectro acotado de E, Spec E^*. Dotamos de una norma tanto al retículo de los elementos acotados E^* como a $C(\text{Spec } E^*)$ y definimos la aplicación que se conoce como representación de Riez de E^*. La última parte de esta sección estudia todo lo anterior enfocado desde el espacio de funciones continuas $C(X)$ a través de diferentes resultados que vamos probando. Para este capítulo nos hemos basado principalmente en [Pu] y [JR], utilizando en menor medida también [Bki] y [Wi].

3.1. La estructura de retículo vectorial

De ahora en adelante todos los espacios vectoriales que consideremos serán sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.

Definición 69. Un *espacio vectorial ordenado* es un espacio vectorial E dotado de una relación de orden parcial $\leq$ compatible con la estructura vectorial, es decir, que si $x, y \in E$ y se verifica que $x \leq y$, entonces se dan las dos siguientes condiciones:

(i) $x + z \leq y + z$, para todo $z \in E$

(ii) $\lambda x \leq \lambda y$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Al igual que hicimos en el caso de grupos, definimos el concepto de cono y examinaremos la relación de orden que un cono induce en E. Notemos que la única diferencia se da en la propiedad añadida que requerimos en la siguiente definición.

Definición 70. Sea E un espacio vectorial. Llamaremos *cono* a todo subconjunto de E que cumpla las siguientes tres propiedades:

(i) $C + C \subseteq C$

(ii) $C \cap -C = \{0\}$

(iii) $\lambda C \subseteq C$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Si E es un espacio vectorial ordenado, llamaremos *cono positivo* de E al conjunto $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$. Es sencillo ver que dicho conjunto satisface las tres propiedades descritas anteriormente. Además, a partir de él podemos definir el siguiente orden parcial :

$$x \leq y \text{ si y solo si } y - x \in E^+$$

Recíprocamente, dado un cono C sobre un espacio vectorial E, entonces en E podemos definir la siguiente relación: si $x, y \in E$:

$$x \leq y \ \text{ si } \ y - x \in C$$

Dicha relación es un orden parcial y dota a E de estructura de espacio vectorial ordenado cuyo cono positivo es C.

Definición 71. Sea E un espacio vectorial ordenado. Dados $x, y \in E$, llamaremos *intervalo cerrado* de extremos x e y al subconjunto $[x, y]$ de E definido por la igualdad:

$$[x, y] = \{z \in E : \ x \leq z \leq y\} = (x + E^+) \cap (y - E^+)$$

Definición 72. Un *retículo vectorial* (o *espacio de Riesz*) es un espacio vectorial ordenado que posee estructura de retículo.

Un subespacio vectorial F de un retículo vectorial E se dice que es un *subretículo vectorial* de E (o *subespacio de Riesz*) si el supremo y el ínfimo calculados en E de todo par de elementos de F están en F, es decir, si $x \vee y$ y $x \wedge y$ están en en F siempre que $x, y \in F$.

Al igual que hicimos en el capítulo anterior con los grupos, definimos también aquí los conceptos de parte positiva, negativa y valor absoluto de manera similar.

Sea E un retículo vectorial. Dado $x \in E$, recordemos los conceptos que vimos en el anterior capítulo sobre la parte negativa, la parte positiva y el valor absoluto de x. Se trata de elementos de E^+ que se denotan respectivamente x^+, x^- y $|x|$, y estaban definidos como:

$$x^+ = x \vee 0, \ \ x^- = (-x) \vee 0, \ \ |x| = x \vee -x$$

Se deduce entonces que $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$, y que dado otro elemento $y \in E$ se satisface:

$$x \leq y \text{ si solo si } -y \leq -x, \ \text{ y si } x \geq 0, \ \text{ entonces}$$

$$|y| \leq x \text{ si solo si } y \in [-x, x]$$

A continuación damos ejemplos tanto de retículos vectoriales como de subretículos vectoriales.

Ejemplo 73. El cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, con su orden usual, es un retículo vectorial.

Ejemplo 74. Sea X un conjunto y $\mathbb{R}^X$ el espacio vectorial de todas las funciones reales definidas sobre X con las operaciones definidas mediante

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ f, g \in \mathbb{R}^X$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

En $\mathbb{R}^X$ tenemos la siguiente relación de orden, a la que llamamos "*orden punto a punto*" (u *orden puntual*):

$$\text{Sean } f, g \in \mathbb{R}^X,\ \ f \leq g \ \text{ si } \ f(x) \leq g(x) \ \text{ para todo } x \in X$$

Con dicho orden, $\mathbb{R}^X$ es un retículo vectorial.

Ejemplo 75. $\mathbb{R}^n$ con el orden componente a componente es un retículo vectorial. Se ven de manera sencilla las dos condiciones de espacio vectorial ordenado, y si $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, se tiene $x \vee y = (x_1 \vee y_1, ..., x_n \vee y_n)$. Es un caso particular de lo anterior, tomando $X = \{1, 2, ..., n\}$.

Ejemplo 76. $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, con el orden lexicográfico es un retículo vectorial. El caso $n = 2$ se le suele denominar *plano lexicográficamente ordenado*. De nuevo es sencillo comprobar que es un espacio vectorial ordenado, y además posee estructura de retículo ya que está totalmente ordenado.

Lema 77. (*Descomposición de Riesz*). Sea E un espacio vectorial y sean $x, y, z \in E^+$ tales que $z \in [0, x+y]$. Entonces existen $x', y' \in E^+$ tales que $z = x' + y'$ y $x' \in [0, x]$, $y' \in [0, y]$. En particular, se deduce $[0, x] + [0, y] = [0, x+y]$.

Demostración: Puesto que el espacio vectorial E es un grupo con la operación $+$, esto se deduce del corolario 39, que fue probado en el capítulo anterior.

A continuación se presenta un lema que reúne varias propiedades que merecen la pena tener en cuenta, ya que serán usadas en varias ocasiones más adelante. La mayoría de estas propiedades ya fueron probadas en el capítulo anterior de grupos. Esto se debe a que todo espacio vectorial E es un grupo con la operación suma $(+)$.

Lema 78. Sea E un retículo vectorial y sean $x, y, z \in E$. Se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $-(x \wedge y) = (-x) \vee (-y)$, $-(x \vee y) = (-x) \wedge (-y)$

(ii) $x + (y \wedge z) = (x+y) \wedge (x+z)$, $x + (y \vee z) = (x+y) \vee (x+z)$

(iii) $x + y = x \vee y + x \wedge y$

(iv) $(x-y)^+ = x - x \wedge y$, $(x-y)^- = y - x \wedge y$

(v) $x = x^+ - x^-$, $x^+ \wedge x^- = 0$, $|x| = x^+ + x^-$, $|x| = |-x|$

(vi) $|x| = x^+ \vee x^-$, $|x+y| \leq |x| + |y|$, $||x| - |y|| \leq |x-y|$

(vii) Si $x, y, z \geq 0$ entonces $x \wedge (y+z) \leq (x \wedge y) + (x \wedge z)$

(viii) Si $nx \geq 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \geq 0$

(ix) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $n(x \vee y) = nx \vee ny,\ n(x \wedge y) = nx \wedge ny$

(x) $2(x \vee y) = x + y + |x - y|$

(xi) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

(xii) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Demostración:
Por lo comentado antes del lema, de estas doce propiedades, todas menos la (xi) se cumplen en grupos y ya fueron demostradas. La propiedad (vi) también se verifica en grupos, pero la probamos ahora ya que no fue vista antes. Por último, (x) es consecuencia de (ix) y también lo vemos.

Dado $x \in E$ es evidente que, o bien $x \geq 0$, o $x \leq 0$ y, por tanto, $-x \geq 0$. Entonces se verifica $|x| = x \vee -x = x \vee -x \vee 0 \vee 0 = (x \vee 0) \vee (-x \vee 0) = x^+ \vee x^-$.

Tomando en (ix) $n = 2$ tenemos:

$$2(x \vee y) = (x + x) \vee (y + y) = x + y + ((x - y) \vee (y - x)) = x + y + |x - y|$$

Eso muestra (x). Veamos ahora (xii). Probémoslo para $\lambda > 0$ (el otro caso es análogo). Por un lado:

$$\lambda x \leq \lambda|x| \quad \text{y} \quad -\lambda x = \lambda(-x) \leq \lambda|x| \Rightarrow |\lambda x| \leq \lambda|x|$$

Y como $\lambda > 0$, tenemos entonces $|x| = |\frac{1}{\lambda}\lambda x| \leq \frac{1}{\lambda}|\lambda x| \Rightarrow \lambda|x| \leq |\lambda x|$.

Observación 79. La propiedad (viii) del lema anterior se puede extender a lo siguiente:

$$\text{Si } \lambda x \geq 0 \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}, \text{ entonces } x \geq 0$$

Esto se deduce de que al ser $\lambda > 0$, se tiene

$$\frac{1}{\lambda}\lambda x \geq 0\frac{1}{\lambda} = 0$$

Esto implica $x \geq 0$. Por otro lado, (ix) también se puede generalizar de forma análoga a lo siguiente:

$$\text{Para todo } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ se tiene } \lambda(x \vee y) = \lambda x \vee \lambda y,\ \lambda(x \wedge y) = \lambda x \wedge \lambda y$$

La demostración es análoga a como se hacía en grupos, considerando el isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados $x \mapsto \lambda x$.

Observación 80. Conviene recordar algunos resultados del capítulo anterior que se mantienen en este caso. De la propiedad (ii) se deduce que, para que un espacio vectorial ordenado sea un retículo vectorial, basta con que exista $x \vee 0$ para todo $x \in E$. Esto se debe a que $x \vee y = x + (0 \vee (y - x))$. Por otro lado, las propiedades (i), (ii) y (xiii) son válidas para familias arbitrarias de elementos de un retículo vectorial E.

Recordemos que dados dos retículos E, F , un *morfismo de retículos* entre E y F es una aplicación $T : E \to F$ que cumple las dos propiedades siguientes:

(i) $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$, para todo $x, y \in E$

(ii) $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$, para todo $x, y \in E$

Definición 81. Sean E y F retículos vectoriales. Una aplicación $T : E \to F$ es un *morfismo de retículos vectoriales* o, abreviadamente, un *l-morfismo* (si no hay lugar a confusión) si es una aplicación lineal y un morfismo de retículos.

Un morfismo de retículos vectoriales es *isomorfismo de retículos vectoriales* (o *l-isomorfismo)* si es biyectivo. Análogamente a lo que pasaba en el capítulo anterior con los grupos, la inversa de un isomorfismo de retículos vectoriales es también un morfismo de retículos vectoriales. Esto lo vemos en la siguiente observación.

Observación 82. Para que una aplicación lineal entre retículos vectoriales sea un l-morfismo, basta con que mande supremos en supremos o ínfimos en ínfimos. Esto se debe a la igualdades de (i) en el lema 78. De ellas se deduce que si T es un morfismo de retículos vectoriales que conserva los supremos, entonces se tiene lo siguiente (análogamente se haría en el caso de que conservase los ínfimos):

$$-T(x \wedge y) = T((-x) \vee (-y)) = (-T(x)) \vee (-T(y)) = -(T(x) \wedge T(y))$$

En relación con lo comentado en la observación 80, otra condición suficiente para que una aplicación lineal entre retículos vectoriales sea l-morfismo es que se tenga $T(x \vee 0) = T(x) \vee T(0)$ para todo $x \in E$.

Veamos que la aplicación inversa de un l-isomorfismo es también l-morfismo (y, por lo tanto, l-isomorfismo). Sea $T : E \to F$ un l-morfismo, y $x, y \in F$. Existen por tanto $z, w \in E$ tales que $T(z) = x$, $T(w) = y$. Tenemos que ver que la aplicación inversa T^{-1} conserva los supremos e ínfimos. Esto último viene dado por lo siguiente:

$$T^{-1}(x \vee y) = T^{-1}(T(z) \vee T(w)) = T^{-1}(T(z \vee w)) = z \vee w = T^{-1}(x) \vee T^{-1}(y)$$

Por último, se tiene que una aplicación lineal T es l-morfismo si, y solo si, $|T(x)| = T(|x|)$, para todo $x \in E$. Esto se debe a la siguiente igualdad:

$$2(x \vee 0) = 2x \vee 0 = x + (x \vee (-x)) = x + |x|$$

Por tanto, T es l-morfismo si, y solo si, se tiene lo siguiente:

$$2T(x \vee 0) = 2(T(x) \vee T(0)) = T(x) + (T(x) \vee (-T(x)) = T(x) + |T(x)|$$

De esto último se deduce lo que queríamos.

Definición 83. Sea E un retículo vectorial. Un subconjunto S de E se dice que es *sólido* si se satisface:

$$\{x \in E : |x| \leq |s|\} \subseteq S, \text{ para todo } s \in S$$

Se comprueba sin dificultad que la intersección de subconjuntos sólidos de E es un subconjunto sólido de E. Llamaremos *l-subespacio* de E a todo subespacio vectorial suyo que sea sólido. Un l-subespacio propio será *maximal* cuando no esté contenido estrictamente en ningún l-subespacio propio de E.

Se verifica que todo l-subespacio de E es un subretículo vectorial de E. Esto se deduce de que si $x, y \in S$, entonces $|x \wedge y| \leq |x|$ y, por ser S sólido, $x \wedge y \in S$. Por el lema 78.(iii) concluimos que también $x \vee y \in S$.

Ejemplo 84. Sea A el subespacio vectorial de $C([0,1])$ formado por todas las funciones que cumplen $f(1/2) = 0$. Se trata de un l-subespacio. Esto se deduce de que si $g \in A$, entonces $|g(1/2)| = 0$. Por tanto, si $f \in A$ es tal que $|f| \leq |g|$, con $g \in A$, se obtiene que $f(1/2) = 0$ y, por tanto, $f \in A$ y A es sólido. Veremos más adelante que este caso se puede generalizar, y probaremos que, de hecho, se trata de un l-subespacio maximal.

Proposición 85. Sea E un retículo vectorial. Entonces se cumplen las dos siguientes propiedades:

(i) La intersección de subretículos vectoriales o l-subespacios son subretículos vectoriales o l-subespacios respectivamente. Por lo tanto, tiene sentido hablar del subretículo vectorial o l-subespacio generado por un subconjunto de E.

(ii) Sean F_1,F_2 l-subespacios de E. Entonces la suma algebraica $F_1 + F_2$ es un l-subespacio de E. Si $f \in (F_1 + F_2)^+$, entonces existen $f_1 \in F_1^+$, $f_2 \in F_2^+$ tales que $f = f_1 + f_2$. En particular, si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ y si $f \in (F_1 + F_2)^+$, entonces $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in F_1^+$, $f_2 \in F_2^+$.

Demostración: (i) es trivial. Veamos por tanto (ii). Es claro que F_1+F_2 es un subespacio vectorial de E. Sean $f \in F_1 + F_2$, $g \in E$ tales que $|g| \leq |f|$. Entonces $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$. De la desigualdad siguiente,

$$g^+ \leq |g| \leq |f| \leq |f_1| + |f_2|$$

por el lema de la descomposición de Riesz deducimos que existen g', g'' en E tales que $g^+ = g' + g''$, $0 \leq g' \leq |f_1|$, $0 \leq g'' \leq |f_2|$. Por ser F_1, F_2 l-subespacios tenemos que $g' \in F_1^+$, $g'' \in F_2^+$, por lo que $g^+ \in F_1^+ + F_2^+$. Análogamente se ve que $g^- \in F_1^+ + F_2^+$. Por tanto $F_1 + F_2$ es un l-subespacio.

Finalmente, sea $f \in (F_1 + F_2)^+$. Tomando $g = f$ en el razonamiento anterior llegamos a lo que queríamos probar.

A continuación veremos los retículos vectoriales en espacios cociente. Para ello consideraremos un retículo vectorial E y un l-subespacio F suyo. Consideraremos el espacio cociente E/F, cuyos elementos los denotaremos $\overline{x}$, donde $x \in E$.

Definición 86. Sean $\overline{x}, \overline{y} \in E/F$. Definimos $\overline{x} \leq \overline{y}$ si existen $x_1 \in \overline{x}$, $y_1 \in \overline{y}$ tales que $x_1 \leq y_1$.

A continuación se encuentra un lema que usaremos para ver que la relación que acabamos de definir es una relación de orden parcial.

Lema 87. Sean $\overline{x}, \overline{y} \in E/F$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\overline{x} \leq \overline{y}$

(ii) Para todo $x_1 \in \overline{x}$, existe $y_1 \in \overline{y}$ satisfaciendo $x_1 \leq y_1$

(iii) Para todo $x_1 \in \overline{x}$, $y_1 \in \overline{y}$, existe $q \in F$ satisfaciendo $y_1 - x_1 \geq q$

Demostración:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $x_1 \in \overline{x}$. Veamos que existe un $y_1 \in \overline{y}$ tal que $x_1 \leq y_1$. Dado que $\overline{x} \leq \overline{y}$ por hipótesis, existen $x' \in \overline{x}$, $y' \in \overline{y}$ tales que $x' \leq y'$. Por definición, $x_1 = x + f_1$, $x' = x + f_1'$, $y' = y + f_2'$, para ciertos $f_1, f_1', f_2' \in F$. Por tanto, deducimos lo siguiente:

$$x_1 = (x_1 - x') + x' \leq (x_1 - x') + y' = y' + (f_1 - f_1') = y + (f_2' + f_1 - f_1')$$

Dado que $f_2' + f_1 - f_1' \in F$, el y_1 buscado es $y_1 = y + (f_2' + f_1 - f_1')$, y se satisface lo que pretendíamos.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sean $x_1 \in \overline{x}, y_1 \in \overline{y}$. Por hipótesis, existe un $y' \in \overline{y}$ tal que $x_1 \leq y'$. Se verifica entonces lo siguiente:

$$y_1 - x_1 = (y_1 - y') + (y' - x_1) \geq y_1 - y'$$

Tomando $q = y_1 - y'$ se concluye lo que se quería demostrar, pues $q \in F$ y $y_1 - x_1 \geq q$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Por hipótesis, existe $q \in F$ tal que $y_1 - x_1 \geq q$ o, lo que es lo mismo, $y_1 \geq x_1 + q$. Tomamos entonces $x_2 = x_1 + q \in \overline{x}$, $y_2 = y_1 \in \overline{y}$.

Observación 88. El orden en el cociente que hemos definido antes se trata de un parcial. La propiedad reflexiva es clara. Para la propiedad transitiva, sean $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in E/F$ tales que $\overline{x} \leq \overline{y}$, $\overline{y} \leq \overline{z}$. Por el lema anterior, existen $q_1, q_2 \in F$ tales que $y - x \geq q_1$, $z - y \geq q_2$. Por tanto, $z - x \geq q_1 + q_2$, y se tiene entonces $\overline{x} \leq \overline{z}$.

Veamos por último la propiedad antisimétrica. Sean $\overline{x}, \overline{y} \in E/F$ tales que $\overline{x} \leq \overline{y}, \overline{y} \leq \overline{x}$. De nuevo por el lema anterior existen $q_1, q_2 \in F$ tales que $y - x \geq q_1$, $x - y \geq q_2$. Esto implica, en particular, que $y - x \leq -q_2$, $x - y \leq -q_1$, y por tanto $|x - y| \leq (-q_1) \vee (-q_2) \in F$. Como F es sólido, se tiene $x - y \in F$, y entonces $\overline{x} = \overline{y}$.

Teorema 89. E/F con el orden parcial definido anteriormente es un retículo vectorial. En particular, se satisface:

$$\overline{x} \vee \overline{y} = \overline{x \vee y}, \;\; \overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{x \wedge y} \text{ para todo } x, y \in E$$

Demostración: Veamos primero que E/F es un espacio vectorial ordenado. Veamos para ello las dos condiciones de la definición 69.

Sean $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in E/F$ tales que $\overline{x} \leq \overline{y}$. Aplicando la propiedad (iii) del lema 87, afirmamos lo siguiente:

$$\overline{x} + \overline{z} \leq \overline{y} + \overline{z} \text{ si, y solo si, existen } x_1, y_1, z_1 \in E/F, \; q \in F \text{ tales que}$$
$$(y_1 + z_1) - (x_1 + z_1) = y_1 - x_1 \geq q$$

Esto equivale a $\overline{x} \leq \overline{y}$. Por lo tanto, se tiene la primera condición.

Veamos la segunda. Sea $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Si $\lambda = 0$, es claro que $\lambda\overline{x} \leq \lambda\overline{y}$. Si $\lambda > 0$, dividimos a ambos lados entre λ, y entonces $\lambda\overline{x} \leq \lambda\overline{y}$ equivale a $\overline{x} \leq \overline{y}$, lo cual era cierto por hipótesis.

Veamos ahora que es un retículo y que se tienen las igualdades del enunciado. Probamos la relativa a los extremos superiores al ser la otra análoga. Por un lado, es claro que $\overline{x \vee y} \geq \overline{x}$, $\overline{x \vee y} \geq \overline{y}$, es decir, $\overline{x} \vee \overline{y} \leq \overline{x \vee y}$.

Por último, veamos la desigualdad contraria, para así concluir la demostración. Sea $\overline{z} \in E/F$ una cota superior de $\{\overline{x}, \overline{y}\}$. Existen por tanto $q_1, q_2 \in F$ tales que $z - x \geq q_1$, $z - y \geq q_2$.

Pongamos $q = q_1 \wedge q_2$. Es obvio que $z - x \geq q$, $z - y \geq q$. Esto implica

$$z \geq (x+q) \vee (y+q) = (x \vee y) + q \Rightarrow z - (x \vee y) \geq q$$

Esto es lo mismo que decir $\overline{z} \geq \overline{x \vee y}$, por lo que concluimos que $\overline{x \vee y} = \overline{x} \vee \overline{y}$.

Observación 90. Sea $\pi : E \to E/F$ la aplicación de paso al cociente, que manda a un elemento $x \in E$ en su clase $\overline{x} \in E/F$. Entonces del teorema anterior se deduce que π es morfismo de retículos (obviamente es lineal y, además, $\pi(x \vee y) = \pi(x) \vee \pi(y)$).

Veamos que $\pi(E^+)$ es el cono positivo de E/F. Si $x \in E^+$, es decir, si $x \geq 0$, entonces ciertamente $\pi(x) = \overline{x} \geq \overline{0}$. Y recíprocamente, si $\overline{x} \geq \overline{0}$, existe un $x_1 \in \overline{x}$ tal que $x_1 \geq 0$ o, lo que es lo mismo, $x_1 \in E^+$. Luego, $\overline{x} = \pi(x_1) \in \pi(E^+)$

Corolario 91. Dado un l-subespacio F de un retículo vectorial E, existe una biyección natural entre el conjunto de los l-subespacios de E que contienen a F y el conjunto de l-subespacios de E/F.

Demostración: Si consideramos la aplicación π de paso al cociente de la observación anterior, es bien conocido que las aplicaciones "imagen directa" e "imagen inversa"de dicha aplicación establecen una biyección entre los subespacios vectoriales de E que contienen a F y los subespacios vectoriales de E/F. Para concluir, al ser π un morfismo de retículos vectoriales, dichas aplicaciones transforman l-subespacios en l-subespacios.

Definición 92. Sea E un retículo vectorial. Fijado un elemento $e \in E^+$, definimos el conjunto

$$E^*(e) = \{x \in E : \ |x| \leq ne \text{ para algún n} \in \mathbb{N}\}$$

Es claro que $E^*(e) \neq \emptyset$ (pues $ne \in E^*(e)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$), y es fácil ver que dicho conjunto es un subretículo vectorial de E, a el cual llamaremos *retículo de los elementos acotados de E respecto a e.*

Definición 93. Sea $e \in E^+$. Diremos que e es una *unidad débil de orden* si, para cada $x \in E^+$, se satisface

$$x = \bigvee \{y \in E^*(e) : \ 0 \leq y \leq x\}$$

Dado que $0 \leq x \wedge e \leq x$, se tiene que $\{y \in E^*(e) : \ 0 \leq y \leq x\} \neq \emptyset$. Llamaremos *unidad fuerte de orden* al elemento e si $E^*(e) = E$.

Definición 94. Diremos que un retículo vectorial es *arquimediano* si dados $x, y \in E^+$, el que $nx \leq y$, para todo $n \in \mathbb{N}$, implica $x = 0$; o equivalentemente, si dados $x \in E, \ y \in E^+$, el que $nx \leq y$, para todo $n \in \mathbb{N}$, implica $x \leq 0$.

El siguiente lema muestra diferentes formas equivalentes de decir que un retículo vectorial dado es arquimediano.

Lema 95. Sea E un retículo vectorial. Se satisfacen las siguientes equivalencias:

(i) E es arquimediano.

(ii) Si $x \in E^+$, entonces $\inf \{\frac{x}{n} : n = 1, 2, ...\} = 0$

(iii) Si $x \in E^+, x \neq 0$, entonces el conjunto $\{nx : \ n = 1, 2, ...\}$ no está acotado superiormente.

Demostración:
(i)$\Rightarrow$(ii): Si y es una cota inferior del conjunto $\{\frac{x}{n} : n = 1, 2, ...\}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica $y \leq \frac{x}{n}$, es decir, $yn \leq x$, y por ser arquimediano E concluimos que $y = 0$ y que el ínfimo de tal conjunto es 0.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Supongamos que el conjunto $\{nx : \ n = 1, 2, ...\}$ está acotado superiormente. Entonces existe un $y \in E^+$ tal que $nx \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica $x \leq \frac{y}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto que inf $\{\frac{y}{n} : n = 1, 2, ...\} > 0$, llegando así a contradicción.

(iii)$\Rightarrow$(i): Sean $x, y \in E^+$ tal que $nx \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que el conjunto $\{nx : \ n = 1, 2, ...\}$ está acotado superiormente por y, entonces $x = 0$.

Ejemplo 96. Sea $\mathbb{R}^n$ con el orden lexicográfico. Ya sabemos, por un ejemplo anterior, que se trata de un retículo vectorial. Sin embargo, no es arquimediano. Basta considerar $x = (0, 1, 0, ..., 0)$, $y = (1, 0, ..., 0)$. Tenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $nx \leq y$, pero $x \neq \mathbf{0} = (0, ..., 0)$.

Proposición 97. Sea E un retículo vectorial arquimediano y $e \in E^+$. Son equivalentes:

(i) e es una unidad débil de orden.

(ii) $x = \bigvee_n (x \wedge ne)$, para todo $x \in E^+$.

(iii) Si $x \wedge e = 0$, entonces $x = 0$.

Demostración: Sea $x \in E^+$. Veamos cada una de las equivalencias:

(i)$\Rightarrow$(ii): Es evidente que $x \wedge ne \leq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $z \in E$ tal que $x \wedge ne \leq z$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $x \leq z$. Por hipótesis, al ser e unidad débil de orden, tenemos la igualdad siguiente: $x = \bigvee \{y \in E^*(e) : \ 0 \leq y \leq x\}$. Si tomamos $y \in E^*(e)$ tal que $0 \leq y \leq x$, entonces se tiene que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $y = y \wedge ne \leq x \wedge ne \leq z$. Por tanto, tenemos $x \leq z$, lo que termina de demostrar la igualdad que queríamos ver.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Supongamos que $x \wedge e = 0$. Por tanto, $x \in E^+$. Por hipótesis, se tiene $x = \bigvee_n (x \wedge ne)$, para todo $x \in E^+$. Además, por el lema 78.(vii), tenemos $x \wedge ne \leq n(x \wedge e) = 0$, con lo que concluimos $x = 0$.

(iii)$\Rightarrow$(i): Sea $z \in E^+$ tal que $0 \leq y \leq z$, para todo $y \in E^*(e)$. Veamos que $x \leq z$, es decir, que $x \wedge z = x$. Pongamos $t = (x - x \wedge z) \wedge e$. Para todo $y \in E^*(e)$, $0 \leq y \leq x$ se tiene:

$$t + y \leq t + x \wedge z \leq x - x \wedge z + x \wedge z = x$$

Como $t \in E^*(e)$, $0 \leq t \leq x$, por lo anterior con $y = t$ obtenemos $2t \leq x$, y por inducción se tiene $nt \leq x$. Al ser E arquimediano, concluimos $t = 0$, es decir, $x = x \wedge z$.

Observación 98. De la proposición anterior (en concreto la propiedad (iii)) deducimos que si e es una unidad débil de orden, entonces $e = 0$ si, y solo si, $E = \{0\}$.

Ejemplo 99. Si X es un espacio topológico, entonces $C(X)$ es un retículo vectorial arquimediano en el que la función constante 1 es una unidad débil de orden. Esto se ve fácilmente debido a la proposición anterior, ya que si $f \in C(X)$, con $f \wedge 1 = 0$, entonces $f = 0$.

Si denotamos con $C^*(X)$ el conjunto de las funciones de $C(X)$ que son acotadas en el sentido usual, entonces $C^*(X) = C(X)^*(1)$. Esto es claro por la definición de $C(X)^*(1)$, ya que es justamente el conjunto de las funciones que, en valor absoluto, son menores que un determinado $n \in \mathbb{N}$, es decir, las funciones acotadas.

Hasta el final de esta subsección, y con el objetivo de aligerar la notación, haremos las siguientes consideraciones. Los retículos vectoriales serán no nulos, y si e es una unidad débil de orden o unidad fuerte de orden, la llamaremos simplemente unidad débil o unidad fuerte, y al conjunto $E^*(e)$ lo denotaremos simplemente E^*.

En el siguiente lema usaremos un resultado bien conocido como es el *lema de Zorn*. Recordemos que el lema de Zorn garantiza que todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.

Lema 100. Sea E un retículo vectorial con unidad débil e. Todo l-subespacio de E^* está contenido en un l-subespacio maximal.

Demostración: Veamos en primer lugar que la unidad débil no puede pertenecer a ningún l-subespacio propio de E^*. Si F es un l-subespacio de E^* tal que $e \in F$, entonces, para todo $x \in E^*$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq ne \in F$, y por ser sólido F se tiene $x \in F$, por lo que F no es propio.

Sea T un l-subespacio propio de E^*, y sea S la colección de todos los l-subespacios propios de E^* que contienen a T. Si $\{F_i\}_{i \in I}$ es un subconjunto de S que está ordenado totalmente por inclusión, entonces $F = \bigcup_i F_i$ es un l-subespacio de E^* que contiene a T, y además propio porque $e \notin F$, es decir, $F \in S$. Por el lema de Zorn, concluimos que existe un l-subespacio maximal que contiene a F y, en particular, a T.

El siguiente resultado se deduce de manera evidente del lema anterior.

Corolario 101. Si E es un retículo vectorial con unidad débil e, entonces en E^* existen l-subespacios maximales.

Lema 102. Sea E un retículo vectorial. Si los únicos l-subespacios que admite E son los triviales, entonces E es isomorfo a $\mathbb{R}$ como retículo vectorial.

Demostración: Primero veamos que E es arquimediano y totalmente ordenado. Para ello, sean $x, y \in E^+$ tales que $ny \leq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y consideremos el l-subespacio S_y generado por y:

$$S_y = \{z \in E : |z| \leq \lambda y \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R}^+\}.$$

Si $x \in S_y$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $ny \leq my$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica $y \leq 0$ y, por tanto, $y = 0$. Si, por el contrario, $x \notin S_y$, entonces, por hipótesis, $S_y = \{0\}$, es decir, $y = 0$. Por tanto, E es arquimediano.

Probemos ahora que E está totalmente ordenado. Tenemos que ver que dado $x \in E$, $x \leq 0$ o $x \geq 0$, para concluir aplicando la proposición 20. Esto es lo mismo que decir $x^+ = 0$ o $x^- = 0$. Supongamos $x^- \geq 0$, por lo que $S_{x^-} = E$. Por tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^+ \leq nx^-$, de manera que $x^+ = x^+ \wedge nx^- \leq n(x^+ \wedge x^-) = 0$. Como se tenía $x^- > 0$, se concluye $x^+ = 0$. Análogamente se ve el caso $x^+ > 0$.

Veamos finalmente que existe un isomorfismo entre $\mathbb{R}$ y E. Para ello, fijamos $x > 0$ y definimos la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to E$ dada por $\varphi(\lambda) = \lambda x$. Es evidente que dicha aplicación es lineal e inyectiva. Veamos que también es sobreyectiva. Sea $y > 0$. El conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda y \leq x\}$ es no vacío porque $S_x = E$, y está acotado superiormente debido a que E es arquimediano. De igual manera, el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} : x \leq \lambda y\}$ es no vacío porque $S_y = E$, y está acotado inferiormente por 0.

Sean $\alpha = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda y \leq x\}$, $\beta = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : x \leq \lambda y\}$. Probemos que son máximo y mínimo respectivamente y que, de hecho, $\alpha = \beta$. Por ser α el supremo, se tiene $(\alpha - \frac{1}{n})y \leq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica $n(\alpha y - x) \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $\alpha y \leq x$, es decir, $\alpha \in \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda y \leq x\}$. Con un razonamiento análogo, $\beta \in \{\lambda \in \mathbb{R} : x \leq \lambda y\}$. Evidentemente $\alpha \leq \beta$, y si existiese un λ tal que $\alpha < \lambda < \beta$, entonces se tendría $\lambda y \nleq x$ y $x \nleq \lambda y$, lo cual es imposible por ser E totalmente ordenado. En conclusión, $\alpha = \beta$ e $y = \alpha^{-1}x = \varphi(\alpha^{-1})$, y por tanto es sobreyectiva la aplicación.

Para terminar, solo queda ver que φ y φ^{-1} son ambos morfismos de retículos vectoriales. Es claro que ambos son aplicaciones lineales, y dado que E es un retículo vectorial se tienen las siguientes igualdades que muestran que también son morfismo de retículos:

$$\varphi(\lambda \vee \mu) = (\lambda \vee \mu)x = \lambda x \vee \mu x = \varphi(\lambda) \vee \varphi(\mu)$$

$$\varphi^{-1}(x \vee y) = \lambda^{-1}(x \vee y) = \lambda^{-1}x \vee \lambda^{-1}y = \varphi^{-1}(x) \vee \varphi^{-1}(y)$$

Para dichas igualdades hemos utilizado las observaciones 79 y 82. En conclusión, la aplicación φ que hemos definido es un isomorfismo entre $\mathbb{R}$ y E.

El siguiente corolario es esencial para lo que se verá en la siguiente subsección. Si E es un retículo vectorial y $H \subseteq E$, diremos que H es un *l-hiperplano* si es un l-subespacio de E tal que $E/M \cong \mathbb{R}$ (isomorfismo como retículos vectoriales).

Corolario 103. Todo l-subespacio maximal de un retículo vectorial es un l-hiperplano. Recíprocamente, todo l-hiperplano de un retículo vectorial es un l-subespacio maximal.

Demostración: Lo primero es evidente por la definición que acabamos de dar y el lema anterior. Veamos entonces lo recíproco. Sea H un l-hiperplano de E, y F un l-subespacio que contiene a H. Tenemos que ver que $F = E$.

Consideramos el morfismo de paso al cociente $\pi : E \to E/H$. Por el corolario 83, $\pi(F)$ es l-subespacio no nulo de E/H, que es isomorfo a $\mathbb{R}$. En particular, se tiene $\pi(F) = E/H$ (ya que es un subespacio no nulo de uno de dimensión 1). Dado que $H \subseteq F$, se tiene la siguiente iguadad, con la que concluimos la demostración:

$$F = \pi^{-1}(\pi(F)) = \pi^{-1}(E/H) = E.$$

3.2. Representación de retículos vectoriales

Definición 104. Sea E un retículo vectorial con unidad débil e. Definimos respectivamente el *espectro de E respecto de e* y el *espectro acotado de E respecto de e* como los siguientes conjuntos:

$$\operatorname{Spec} E = \{\omega : E \to \mathbb{R},\ \text{morfismo de retículos vectoriales tal que } \omega(e) = 1\}$$

$$\operatorname{Spec} E^* = \{\omega : E^* \to \mathbb{R},\ \text{morfismo de retículos vectoriales tal que } \omega(e) = 1\}$$

Observación 105. Por el corolario 96, tenemos que, si M es un l-subespacio maximal de E^*, entonces es un l-hiperplano, y por tanto E^*/M es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 1. Además, en la demostración del lema 100 vimos que la unidad débil e no puede pertenecer a ningún l-subespacio propio de E^*, por lo que $e \notin M$. Esto implica, en particular, $\pi(e) > 0$, y se tiene que $\pi(e)$ es base de E^*/M (si $x \in E^*$, $\pi(x) = \lambda\pi(e)$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

Todo lo anterior tiene como consecuencia que la siguiente composición sea un morfismo de retículos vectoriales $\omega : E^* \to \mathbb{R}$ con $\omega(e) = 1$:

$$\begin{array}{ccccc} E^* & \xrightarrow{\pi} & E^*/M & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\pi(e) & \mapsto & \lambda \end{array}$$

Tenemos que ϕ es isomorfismo y, en conclusión, existe una correspondencia biunívoca entre Spec E^* y el conjunto de todos los l-subespacios maximales de E^*. En particular, se ve de manera sencilla que el l-subespacio maximal M es justamente el núcleo de dicha composición, es decir, $M = \ker\omega$. Más aún, todo l-subespacio maximal es núcleo de algún $\omega \in$ Spec E^*, y recíprocamente, si $\omega \in$ Spec E^*, entonces $\ker\omega$ es un l-subespacio maximal.

Lo primero es evidente con la construcción que acabamos de hacer, por lo que veamos lo recíproco. Para ello, veremos que, si denotamos $M = \ker\omega$, entonces M es un l-hiperplano y, aplicando el corolario 96, M es un l-subespacio maximal.

Sean $y \in M$, $x \in E$ tales que $|x| \leq |y|$. Entonces se tiene lo siguiente:

$$|\omega(x)| = \omega(|x|) \leq \omega(|y|) = |\omega(y)| = 0.$$

Por tanto, $x \in M$, y M es un l-subespacio. Veamos ahora que E^*/M es isomorfo (como retículo vectorial) a $\mathbb{R}$. A partir del diagrama siguiente, tenemos que probar que $\overline{\omega}$ es morfismo de retículos vectoriales, y dado que era isomorfismo vectorial, concluimos que M es l-hiperplano.

$$\begin{tikzcd} E^* \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ E^*/M \arrow[ur, "\overline{\omega}"] & \end{tikzcd}$$

Necesitamos ver que $\overline{\omega}(|\overline{x}|) = |\overline{\omega}(\overline{x})|$. Por definición, $|\overline{\omega}(\overline{x})| = |\omega(x)|$. Por ser π morfismo de retículos vectoriales, $|\overline{x}| = |\pi(x)| = \pi(|x|) = \overline{|x|}$. Por tanto, llegamos a lo que queríamos:

$$|\overline{\omega}(\overline{x})| = \overline{\omega}(\overline{|x|}) = \omega(|x|) = |\omega(x)|.$$

A continuación veremos que podemos definir una norma sobre E^* y la aplicación conocida como representación de Riesz de E^*.

Recordemos el concepto de *topología débil* (o *topología inicial*): dado un conjunto X y una familia indexada $(Y_i)_{i\in I}$ de espacios topológicos con aplicaciones $f_i : X \to Y_i$, la topología débil sobre X para las aplicaciones $(f_i)_{i\in I}$ es la menos fina tal que dichas aplicaciones son continuas.

Observación 106. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Sea $x \in E^*$. Definimos la siguiente norma en E^*:

$$\|x\|_e = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : |x| \leq \lambda e\}$$

Se comprueba sin dificultad que, en efecto, se trata de una norma y que $\|e\|_e = 1$. Veamos que dicho ínfimo es, en realidad, un mínimo. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por definición de ínfimo, se satisface $|x| \leq (\|x\|_e + \frac{1}{n})e$, esto es, $n(|x| - \|x\|_e e) \leq e$. Por ser E arquimediano, se tiene $|x| \leq \|x\|_e e$, por lo que $\|x\|_e$ pertenece al conjunto, y se trata de un mínimo.

Sea $x \in E^*$. Definimos la función $\tilde{x}$ como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \text{Spec } E^* & \xrightarrow{\tilde{x}} & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \tilde{x}(\omega) = \omega(x) \end{array}$$

Debido a lo anterior, las funciones $\tilde{x}$ son continuas y tenemos, de forma natural, la aplicación $E^* \to C(\operatorname{Spec} E^*)$ que manda x a $\tilde{x}$. Tal aplicación es lo que se conoce como *representación de Riesz de* E^*. Es fácil comprobar que es un morfismo de retículos vectoriales y, por la observación 105, su núcleo es la intersección de todos los l-subespacios maximales de E^*.

Consideramos ahora la topología débil definida por las funciones $\tilde{x}$ sobre Spec E^*. Las funciones $\tilde{x}$ definidas anteriormente separan puntos de Spec E^*, es decir, dados $\omega_1, \omega_2 \in \operatorname{Spec} E^*$, con $\omega_1 \neq \omega_2$, existe un x tal que $\tilde{x}(\omega_1) \neq \tilde{x}(\omega_2)$. Como $\omega_1 \neq \omega_2$, existe un $x \in E^*$ tal que $\omega_1(x) \neq \omega_2(x)$. Luego, $\tilde{x}(\omega_1) = \omega_1(x) \neq \omega_2(x) = \tilde{x}(\omega_2)$.

Spec E^* es un subconjunto de $\mathbb{R}^{E^*}$, viendo a este último como producto de copias de $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{R}^{E^*} = \Pi_{x\in E^*} R_x$, donde $R_x = \mathbb{R}$, para todo $x \in E^*$. Más aún, Spec E^* es un subespacio topológico de $\mathbb{R}^{E^*}$, esto es, la topología inducida en Spec E^* (topología de subespacio) por la topología producto coincide con la topología débil para las funciones $\tilde{x}$.

Aclaremos esto último. Por la transitividad de las topologías débiles (véase [Bki]), la topología inducida en Spec E^* por la topología producto es la topología débil para las aplicaciones $p_x \circ i$, donde i es la inclusión de Spec E^* en $\mathbb{R}^{E^*}$ y $p_x : \Pi_{x\in E^*} R_x \to R_x = \mathbb{R}$ la proyección x-ésima. Basta ahora comprobar que $p_x \circ i = \tilde{x}$. Para ello, sea $x \in E^*$ y $\omega \in$ Spec E^*. Tenemos:

$$(p_x \circ i)(\omega) = p_x((\omega(x))_{x\in E^*}) = \omega(x) = \tilde{x}(\omega).$$

Observamos finalmente que, si vemos Spec E^* como subespacio de $\Pi_{x\in E^*} R_x$, entonces el morfismo de representación de Riesz es $x \mapsto \tilde{x} = p_x|_{\text{Spec } E^*}$.

Proposición 107. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Entonces Spec E^*, dotado de la topología débil definida por los elementos de E^*, es un espacio topológico compacto y no vacío.

Demostración: Primero vemos que Spec $E^* \neq \emptyset$. Esto se debe al corolario 101 junto con la observación 105, ya que en el corolario vimos la existencia de l-subespacios maximales, y en la observación que estos estaban en biyección con Spec E^*.

Para probar que Spec E^* es compacto, veremos que es cerrado y subconjunto de un compacto, luego compacto. Veamos que es cerrado. Para ello, sea $\omega_0 \in \overline{\text{Spec } E^*}$ y probemos que $\omega_0 : E \to \mathbb{R}$ es lineal, morfismo de retículos y satisface $\omega_0(e) = 1$.

Para la linealidad, tenemos que probar que dados $x, y \in E^*$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se satisface $\omega_0(\lambda x + \mu y) = \lambda\omega_0(x) + \mu\omega_0(y)$. Es evidente que existen aplicaciones $\omega : E^* \to \mathbb{R}$ que, evaluadas en $x + y$, x e y, valen respectivamente $\omega_0(x + y)$, $\omega_0(x)$ y $\omega_0(y)$. Dado $\epsilon > 0$, consideramos el abierto no vacío Ω de $\mathbb{R}^{E^*}$ definido como sigue:

$$\begin{aligned}\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(\lambda x + \mu y) - \omega_0(\lambda x + \mu y)| < \epsilon\} \cap \\ \cap \ \{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(x) - \omega_0(x)| < \epsilon\} \cap \\ \cap \ \{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(y) - \omega_0(y)| < \epsilon\}\end{aligned}$$

Tomamos $\omega' \in \Omega \cap \text{Spec } E^* \neq \emptyset$, y dado que ω' es lineal, sumamos $0 = \lambda\omega'(x) + \mu\omega'(y) - \omega'(\lambda x + \mu y)$ y, aplicando la desigualdad triangular, llegamos a lo siguiente:

$$\begin{aligned}|\omega_0(\lambda x{+}\mu y) - \lambda\omega_0(x) - \mu\omega_0(y)| &\leq \\ \leq |\omega_0(\lambda x + \mu y) - \omega'(\lambda x + \omega y)| &+ \\ + |\lambda\omega'(x) - \lambda\omega_0(x)| &+ \\ + |\mu\omega'(y) - \mu\omega_0(y)| &\leq (1 + |\lambda| + |\mu|)\epsilon\end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, tenemos lo que buscábamos. Para probar que ω_0 es morfismo de retículos, veamos que, para todo $x \in E^*$, se tiene $|\omega_0(x)| = \omega_0(|x|)$. Si se da lo anterior concluimos aplicando lo visto en la observación 82. De manera similar al razonamiento que seguimos anteriormente, sea ahora Π el abierto no vacío de $\mathbb{R}^{E^*}$ siguiente:

$$\begin{aligned}\Pi = \{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(x) - \omega_0(x)| < \frac{\epsilon}{2}\} \cap \\ \cap \ \{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(|x|) - \omega_0(|x|)| < \frac{\epsilon}{2}\}\end{aligned}$$

Consideramos $\omega' \in \Pi \cap \text{Spec } E^* \neq \emptyset$ y, análogo a lo que hicimos antes, sumamos $0 = \omega'(|x|) - |\omega'(x)|$ y aplicamos la desigualdad triangular:

$$|\omega_0(|x|) - |\omega_0(x)|| \leq |\omega_0(|x|) - \omega'(|x|)| + ||\omega'(x)| - |\omega_0(x)|| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Por tanto ω_0 es morfismo de retículos. Por último, veamos que $\omega_0(e) = 1$. La proyección $\pi_e : \mathbb{R}^{E^*} \to \mathbb{R}$, que manda ω en $\pi_e(\omega) = \omega(e)$, es continua, por lo que se tiene que la imagen de la adherencia de un conjunto está contenido en la adherencia de la imagen de dicho conjunto. En particular:

$$\pi_e(\overline{\text{Spec } E^*}) \subseteq \overline{\pi_e(\text{Spec } E^*)} = \overline{\{\omega(e) : \omega \in \text{Spec } E^*\}} = \{1\}$$

Se tiene entonces, $\omega_0(e) = 1$ y, por tanto, Spec E^* es cerrado. Para ver la compacidad, podemos ver $\mathbb{R}^{E^*}$ como un producto de copias de $\mathbb{R}$ y entonces, si probamos que las imágenes de los elementos de las proyecciones son acotadas, Spec E^* será un subespacio cerrado de un producto de intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$, que es compacto, y Spec E^* será compacto.

Dado $x \in E^*$, por definición, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq ne$. Dado que $\omega \in$ Spec E^* es creciente, tenemos: $|\omega(x)| \leq \omega(|x|) \leq n\omega(e) = n$, y Spec E^* es compacto.

Observación 108. Gracias a la proposición anterior, podemos definir en $C(\text{Spec } E^*)$ la norma del supremo, $|| \, ||_\infty$, como sigue: dada $f \in C(\text{Spec } E^*)$,

$$||f||_\infty = \sup\{|f(\omega)| : \omega \in \text{Spec } E^*\}.$$

Con esta norma y la que definimos en la observación 100 sobre E^*, tenemos el siguiente resultado en relación con la representación de Riesz.

Teorema 109. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Entonces, E^* es isométrico a su imagen por la representación de Riesz $E^* \to C(\text{Spec } E^*)$. Como consecuencia, dicha aplicación es inyectiva, es decir, la intersección de todos los l-subespacios maximales de E^* es nula.

Demostración: En E^* consideramos la norma definida en la observación 106, mientras que en $C(\text{Spec } E^*)$ la de la observación anterior. Queremos ver que se tiene $||\tilde{x}||_\infty = ||x||_e$.

Sea $x \in E^*, x \neq 0$. Por lo que vimos en la observación 106, tenemos que $|x| \leq ||x||_e e$. Esto implica que, para todo $\omega \in$ Spec E^*, se tiene $|\omega(x)| \leq \omega(|x|) \leq ||x||_e$. Por tanto, $||\tilde{x}||_\infty \leq ||x||_e$.

Veamos la desigualdad contraria. Sea $\gamma = \sup\{\beta \in \mathbb{R} : \beta e \leq |x|\} \neq \emptyset$. Como se demostró en el lema 102, dicho supremo se alcanza y es máximo. Tenemos entonces que $\gamma e \leq |x|$. Como $|x| \leq ||x||_e e$, si $\gamma = ||x||_e e$, tendríamos $|x| = ||x||_e e$ y por tanto para todo $\omega \in$ Spec E^*, $\omega(|x|) = ||x||_e$. Es decir, habríamos visto $||\tilde{x}||_\infty = ||x||_e$.

Supongamos que existe λ tal que $\gamma < \lambda < ||x||_e$, en cuyo caso $\lambda e \nleq x$ y $|x| \nleq \lambda e$. Entonces, $(\lambda e - |x|)^+ > 0$ y $(\lambda e - |x|)^- > 0$. Razonando como en la demostración del lema 102, deducimos que $(\lambda e - |x|)^- \notin S_{(\lambda e - |x|)^+}$, es decir, $S_{(\lambda e - |x|)^+}$ es un l-subespacio propio de E^*. Por el lema 100, existe un l-subespacio maximal M en E^* que contiene a $S_{(\lambda e - |x|)^+}$. Por la observación 105, sea $\omega \in$ Spec E^* tal que $\ker \omega = M$. Se satisface:

$$\omega(\lambda e - |x|) = \omega((\lambda e - |x|)^+ - (\lambda e - |x|)^-) = -\omega((\lambda e - |x|)^-) \leq 0$$

Esto es, tenemos $\omega(|x|) \geq \lambda$, lo que implica $||x||_\infty \geq \lambda$. Como el λ era arbitrario cumpliendo $\gamma \leq \lambda \leq ||x||_e$, concluimos $||x||_\infty \geq ||x||_e$, como queríamos ver.

Vemos a continuación cómo se define la convergencia en un retículo vectorial. Daremos para ello las siguientes definiciones.

Definición 110. Sea E un retículo vectorial y $e \in E^+$.

Una sucesión $\{x_n\}_n$ en E se dice que es *e-uniformemente de Cauchy* si, para todo $\epsilon > 0$ ($\epsilon \in \mathbb{R}$), existe un entero positivo ν tal que, si $n, m \geq \nu$, entonces, $|x_n - x_m| \leq \epsilon e$.

Una sucesión $\{x_n\}_n$ en E se dice que es *e-uniformemente convergente* si existe $x \in E$ tal que, para todo $\epsilon \geq 0$, existe un entero positivo ν tal que si $n \geq \nu$ entonces $|x_n - x| \leq \epsilon e$. Si $\{x_n\}_n$ es e-uniformemente convergente, se ve sin dificultad que el elemento x es único y se denomina *límite e-uniforme* de la sucesión $\{x_n\}_n$.

Un subconjunto D de E se dice que es *e-uniformemente cerrado* si, cada sucesión e-uniformemente de Cauchy de D, es e-uniformemente convergente a un elemento de D. Un subconjunto D de E se dice que es *e-uniformemente denso* en E si, cada elemento de E, es límite e-uniforme de una sucesión de D.

Ejemplo 111. Sea X un espacio topológico. Consideramos la función constante λ, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Dicha función es continua, y es sencillo ver que en $C(X)$ las nociones de la definición anterior sobre la convergencia uniforme respecto a λ coinciden con las nociones usuales de convergencia uniforme.

Lo mismo ocurre cuando X es compacto y de Hausdorff y sobre él consideramos la topología definida por la norma del supremo. Las nociones anteriores coinciden con las de "sucesión de Cauchy", "sucesión convergente", "conjunto cerrado" y "conjunto denso"para dicha topología.

En la demostración del siguiente resultado, haremos uso del teorema de Stone-Weierstrass, cuya demostración puede verse en [Wi].

Teorema 112. *Teorema de caracterización:* Un retículo vectorial arquimediano E es l-isomorfo a $C(K)$ para algún espacio topológico compacto Hausdorff K si, y solo si, en E existe una unidad fuerte e para la cual E es e-uniformemente cerrado.

Demostración: Supongamos en primer lugar que K es compacto y de Hausdorff. La función constante igual a 1 es una unidad fuerte, y cada sucesión de Cauchy en $C(K)$ es convergente, ya que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continua. Luego en $C(K)$ existe una unidad fuerte e ($e = 1$) para la cual $C(K)$ es e-uniformemente cerrado.

Por hipótesis, E es l-isomorfo a $C(K)$ mediante un l-isomorfismo $\phi : C(K) \to E$. Entonces, se tiene que $\phi(1)$ es una unidad fuerte en E para la cual E es e-uniformemente cerrado.

Veamos lo recíproco. Sea E un retículo vectorial arquimediano en el que existe una unidad fuerte e para la cual E es e-uniformemente cerrado. Por definición de unidad fuerte, tenemos que $E = E^*$ ($= E^*(e)$). Por la proposición 99, el morfismo de representación de Riesz es un l-morfismo inyectivo $\phi : E \to C(\text{Spec } E^*)$ que lleva x en $\tilde{x}$. Para terminar, basta por tanto que dicho morfismo es sobreyectivo, ya que Spec E^* es compacto y de Hausdorff.

Como $\phi(e) = 1$, entonces ϕ es un l-isomorfismo entre E y $\phi(E)$ y $\phi(E)$ es 1-uniformemente cerrado. Como en $C(\text{Spec } E^*)$ consideramos la topología definida por la norma del supremo, en particular tenemos que $\phi(E)$ es cerrado para dicha topología. Para ver $\phi(E) = C(\text{Spec } E^*)$ y, por tanto, que se tenga ϕ sobreyectiva solo nos falta probar que $\phi(E)$ es denso en $C(\text{Spec } E^*)$. Aplicando el teorema de Stone-Weierstrass se tiene esto último. En conclusión, ϕ es el l-isomorfismo que buscábamos.

Lema 113. *(Lema de Urysohn)* Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. Si A y B son dos subconjuntos cerrados y disjuntos de X, entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f = 0$ en A y $f = 1$ en B.

En [Wi] puede verse la demostración en un caso más general, suponiendo solo que X es un espacio normal.

Lema 114. Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. La topología de X coincide con la topología inicial para las funciones de $C(X)$.

Demostración: Sea τ la topología original de X y τ_i la topología inicial para las funciones $C(X)$. Puesto que la topología τ hace continuas a las funciones de $C(X)$, concluimos que $\tau_i \subseteq \tau$. Luego, la aplicación identidad $(X,\tau) \overset{id}{\to} (X,\tau_i)$ es continua. Puesto que (X,τ) es compacto, en cuanto veamos que (X,τ_i) es de Hausdorff, podremos concluir que la identidad es también una aplicación cerrada y, en consecuencia, un homeomorfismo.

Para probar que (X,τ_i) es de Hausdorff, basta observar que el lema de Urysohn nos garantiza que las funciones de $C(X)$ "separan puntos", es decir, que dados dos puntos distintos cualesquiera $x_1, x_2 \in X$, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observación 115. El lema anterior es cierto con solo exigir que el espacio X sea de Tychonoff (véase [GJ]).

Sea X un espacio compacto y de Hausdorff, y sea $a \in X$. Es obvio que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \phi_a : & C(X) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(a) \end{array}$$

es un morfismo de retículos vectoriales tal que $\phi_a(1) = 1$.

Teorema 116. Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\mu}{\to} & \text{Spec } C(X) \\ a & \mapsto & \phi_a \end{array}$$

es un homeomorfismo.

Demostración: Probemos en primer lugar que μ es biyectiva, viendo que, para cada morfismo de retículos vectoriales $\phi : C(X) \to \mathbb{R}$ con $\phi(1) = 1$, existe un único $a \in X$ tal que $\phi = \phi_a$. Sea ϕ un tal morfismo y supongamos, razonando por reducción al absurdo, que, para cada $a \in X$, existe $f_a \in C(X)$ tal que $\phi(f_a) = \phi_a(f_a)$.

Para todo a, sea $g_a = |f_a - \phi(f_a)\mathbf{1}|$, siendo $\mathbf{1}$ la función constante igual a 1. Entonces, $g_a(a) = |\phi_a(f_a) - \phi(f_a)| > 0$ y $\phi(g_a) = |\phi(f_a) - \phi(f_a)\phi(\mathbf{1})| = 0$. Por lo tanto, para todo $a \in X$, existe una función g_a tal que $g_a(a) > 0$, es decir, $X = \cup_{i \in I}\{x \in X : g_{a_i}(x) > 0\}$. Por ser X compacto y cada una de las g_a continuas, existen $a_1, ..., a_m \in X$ tales que

$$X = \cup_i \ \{x \in X : g_{a_i}(x) > 0\}, \ \ i \in \{1, ..., m\}$$

Tomamos ahora $g = g_{a_1} \vee ... \vee g_{a_m}$. Entonces, $g(x) > 0$, para todo $x \in X$. Dado que g es continua y X es compacto, existe un $\delta > 0$ tal que $g(x) \geq \delta$, para todo $x \in X$. Por lo tanto, $\phi(g) \geq \phi(\delta\mathbf{1}) = \delta > 0$. Sin embargo, también tenemos lo siguiente:

$$\phi(g) = \phi(g_{a_1}) \vee ... \vee \phi(g_{a_m}) = 0$$

Por tanto, hemos llegado a contradicción, y debe de existir un $a \in X$ tal que $\phi = \phi_a$. Solo falta ver la unicidad, la cual se deduce del lema de Urysohn, ya que si tenemos $a, b \in X$ con $a \neq b$, por dicho lema existe un $f \in C(X)$ tal que $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$. Por ello no puede darse $\phi_a = \phi_b$.

Recordemos ahora (véase la proposición 107, teniendo en cuenta que $C(X) = C^*(X)$ por ser X compacto) que la topología de Spec $C(X)$ es la topología inicial para las funciones $\tilde{f}$, variando f en $C(X)$. Concluiremos que μ es un homeomorfismo si vemos que la topología de X coincide con la topología inicial para las funciones $\tilde{f} \circ \mu$. Eso es cierto, como consecuencia del lema precedente, con solo observar que $\tilde{f} \circ \mu = f$, para cada $f \in C(X)$.

Corolario 117. Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. Los l-subespacios maximales de $C(X)$ son los conjuntos de la forma $M_a = \{f \in C(X) : f(a) = 0\}$, $a \in X$.

Demostración: Como ya hemos comentado anteriormente, la aplicación $\phi_a : C(X) \to \mathbb{R}$, $\phi_a(f) = f(a)$, es un morfismo de retículos vectoriales tal que $\phi_a(1) = 1$. Luego $M_a = \ker\, \phi_a$ es un l-hiperplano y, por lo tanto, un l-subespacio maximal.

Recíprocamente, sea M un l-subespacio maximal de $C(X) = C^*(X)$. Sabemos (véase la observación 105) que $M = \ker\, \omega$, para cierto $\omega \in$ Spec $C(X)$. Ahora bien, según el teorema anterior, existe $a \in X$ tal que $\omega = \phi_a$. De donde, $M = \ker\, \phi_a = M_a$.

Si ϕ es una aplicación continua de Y a X, ambos compactos y de Hausdorff, definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \xrightarrow{\Phi} & C(Y) \\ f & \mapsto & f \circ \phi \end{array}$$

Se trata de un morfismo de retículos vectoriales tal que $\Phi(1) = 1$. Recíprocamente, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 118. Sean X e Y dos espacios compactos y de Hausdorff, y Φ un morfismo de retículos vectoriales de $C(X)$ a $C(Y)$ con $\Phi(1) = 1$. Entonces, existe una única función continua $\phi : Y \to X$ tal que

$$\Phi(f) = f \circ \phi \quad (f \in C(X))$$

Demostración: Para todo $y \in Y$, podemos aplicar el teorema anterior a la función $f \mapsto (\Phi(f))(y)$, y existe un único elemento $\phi(y) \in X$ tal que, para todo $f \in C(X)$, se tiene

$$(\Phi(f))_{\phi(y)}(y) = f(\phi(y))$$

Por tanto, obtenemos la aplicación $\phi : Y \to X$ con la propiedad del enunciado:

$$\Phi(f) = f \circ \phi \quad (f \in C(X))$$

Solo nos queda ver la continuidad de ϕ. Para ello, sea U un abierto de X y probemos que su contraimagen es abierto en Y. Sea $b \in \phi^{-1}(U) \subseteq Y$. Por el lema de Urysohn aplicado a los cerrados disjuntos $\phi(b)$ y $X \setminus U$, existe un función $f \in C(X)$ tal que $f(\phi(b)) = 1$ y $f = 0$ en $X \setminus U$.

Definimos $g = \Phi(f)$. Tenemos que $g \in C(Y)$, $g(b) = f(\phi(b)) = 1$ y $g = 0$ en $Y \setminus \phi^{-1}(U)$. Además, el conjunto $\{y \in Y : g(y) > 0\}$ es abierto en Y y $b \in \{y \in Y : g(y) > 0\} \subseteq \phi^{-1}(U)$ (ya que g era nula en el complementario de $\phi^{-1}(U)$). Por tanto, $\phi^{-1}(U)$ es abierto de Y, al ser entorno de cada uno de sus puntos, y ϕ es continua.

Corolario 119. Sean X e Y espacios compactos y de Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) X e Y son espacios homeomorfos.

(ii) $C(X)$ y $C(Y)$ son anillos isomorfos.

(iii) $C(X)$ y $C(Y)$ son retículos vectoriales isomorfos.

Demostración:
(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $\phi : Y \to X$ un homeomorfismo. La aplicación continua ϕ induce el morfismo de anillos $C(X) \to C(Y)$, $f \mapsto f \circ \phi$, cuyo inverso es el morfismo de anillos inducido por ϕ^{-1}.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $\Phi : C(X) \to C(Y)$ un isomorfismo de anillos. Sabemos (véanse las proposiciones 11 y 12 en preliminares) que Φ es también un isomorfismo de retículos y de $\mathbb{R}$-álgebras. Luego, Φ es un isomorfismo de retículos vectoriales.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sea $\Phi : C(X) \to C(Y)$ un isomorfismo de retículos vectoriales y sea $u = \Phi(\mathbf{1})$. Tomamos un $v \in C(X)$ tal que $\Phi(v) = \mathbf{1}$ (ya que Φ es sobreyectiva). Dado que v es continua y X compacto, está acotada y existe un número positivo c tal que $v \leq c\mathbf{1}$. Entonces $\mathbf{1} = \Phi(v) \leq c\Phi(\mathbf{1}) = cu$. Esto implica que $u(y) > 0$, para todo $y \in Y$. Definimos el l-isomorfismo Ψ de la siguiente forma:

$$(\Psi(f))(y) = \frac{(\Phi(f))(y)}{u(y)}$$

Este l-isomorfismo satisface $\Psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Ahora, aplicando el corolario anterior a Ψ y a Ψ^{-1}, existen funciones $\phi_1 : Y \to X$ y $\phi_2 : X \to Y$ tales que

$$\Psi(f) = f \circ \phi_1 \quad \text{y} \quad \Psi^{-1}(g) = g \circ \phi_2$$

Si $x \in X$, para todo $f \in C(X)$, se tiene $(\Psi\Psi^{-1}(f))(x) = (f \circ (\phi_1 \circ \phi_2))(x)$. Aplicando el lema de Urysohn, llegamos a las igualdades $y = (\phi_1 \circ \phi_2)(y)$ y $x = (\phi_1 \circ \phi_2)(x)$. Por tanto, ϕ_1 y ϕ_2 son inversas la una de la otra, y X e Y son homeomorfos.

Observación 120. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Como hicimos anteriormente, dotamos a Spec E de la topología débil definida por E: dado $x \in E$ tenemos la función $\tilde{x}$ siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \text{Spec } E & \xrightarrow{\tilde{x}} & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \tilde{x}(\omega) = \omega(x) \end{array}$$

La aplicación $\tilde{x}$ que manda $\omega \in \text{Spec } E$ en $(\omega(x))_{x\in E} \in \mathbb{R}^E$ es inyectiva, ya que separa puntos de Spec E, siendo la topología de Spec E justamente la inducida por la topología producto de $\mathbb{R}^E$. Además se ve, con una prueba igual a la de la proposición 107, que Spec E es cerrado $\mathbb{R}^E$.

Podemos definir entonces una aplicación natural $E \mapsto C(\text{Spec } E)$, la cual se conoce también como *representación de Riesz*, y se trata de un morfismo de retículos vectoriales.

Capítulo 4

Φ - Álgebras

En este último capítulo estudiamos una nueva estructura, que consiste en dotar a una $\mathbb{R}$-álgebra de estructura de retículo vectorial. Al igual que en el anterior capítulo, tenemos dos secciones. En la primera definimos diferentes tipos de álgebras, entre las que se encuentran las Φ-álgebras, que son las más importantes para nuestros propósitos. Introducimos el concepto de l-ideal y estudiamos lo más importante de todo ello.

Por último, terminamos la memoria presentando una serie de resultados que nos permitan enunciar (sin demostrar) el teorema de representación de Henriksen-Johnson. Nos centramos, al igual que hicimos en retículos vectoriales, en estudiar el caso de $C(X)$, siendo X compacto y de Hausdorff. Estudiamos lo que se conoce como el álgebra de funciones extendidas sobre el conjunto de los l-ideales maximales de una Φ-álgebra A, dotado de la topología *hull-kernel* (o topología de Zariski). La bibliografía para este último capítulo se compone de [Pu], [JR] y [HJ].

4.1. La estructura de Φ-álgebra

En este primer apartado definiremos conceptos básicos y daremos resultados elementales que nos permitan abordar el tema con más profundidad más adelante.

Definición 121. Llamaremos $\mathbb{R}$-*álgebra* a todo anillo $A \neq \{0\}$ dotado de un morfismo de anillos $\mathbb{R} \to A$, el cual se denomina *morfismo estructural* de la $\mathbb{R}$-álgebra A. Al ser el morfismo estructural inyectivo, identificamos $\mathbb{R}$ con su imagen en A y consideramos que $\mathbb{R}$ es un subanillo de A, como es usual.

Si A y B son $\mathbb{R}$-álgebras, una aplicación $A \to B$ se dice que es un morfismo de $\mathbb{R}$-*álgebras* si es un morfismo de anillos que deja invariante a $\mathbb{R}$, es decir, si es un morfismo de anillos que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d] & B \\ A \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Si A es una $\mathbb{R}$-álgebra e I es un ideal propio de A, entonces la composición del morfismo estructural de A con el morfismo de paso al cociente $A \to A/I$ dota a A/I de estructura de $\mathbb{R}$-álgebra, que será la que consideraremos de ahora en adelante. Esta estructura es la única para la cual el morfismo de paso al cociente $A \to A/I$ es un morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Definición 122. Llamaremos l-álgebra a toda $\mathbb{R}$-álgebra A dotada de una relación de orden $\leq$, que sea compatible con su producto (es decir, si $a, b \in A$ son tales que $a \leq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \leq bc$) y que la dota de estructura de retículo vectorial.

Sean A y B l-álgebras. Diremos que una aplicación $T : A \to B$ es un *morfismo de l-álgebras* si es morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras y morfismo de retículos vectoriales. Llamaremos *isomorfismo de l-álgebras* a todo morfismo de l-álgebras biyectivo. Diremos que A y B son l-isomorfas si existe un isomorfismo de l-álgebras entre A y B.

Observación 123. Sean A y B l-álgebras y $T : A \to B$ un morfismo de álgebras. Dado que A y B son retículos vectoriales, para T es válido todo lo que comentamos en la observación 82. Por ello, T será l-morfismo si, y solo si, se cumple cualquiera de las condiciones de dicha observación. Tal y como probamos en la proposición 60, si T es un isomorfismo de l-álgebras su inversa es también un morfismo de l-álgebras.

Definición 124. Sea A una l-álgebra. Diremos que un ideal I de A es un *l-ideal* si I es un subconjunto sólido de A. Un *l-ideal maximal* es un l-ideal propio que no está contenido estrictamente en ningún l-ideal propio.

Cada l-ideal maximal de una l-álgebra es, por lo tanto, un ideal sólido, pero puede que no sea un ideal maximal (véase el ejemplo 143). Por otra parte, cada ideal maximal que sea sólido es un l-ideal maximal, puesto que no está contenido estrictamente en ningún l-ideal propio del álgebra en cuestión.

Al igual que hicimos en la demostración del lema 100, se prueba también en este caso que todo l-ideal propio está contenido en algún l-ideal maximal.

Observación 125. Sea I un ideal propio de una l-álgebra A y sea $\pi : A \to A/I$ el morfismo de paso al cociente. Análogamente a lo expuesto en el teorema 89 y la observación 90, se demuestra también en este caso que $\pi(A^+)$ es el cono positivo para una estructura de l-álgebra sobre A/I tal que π es morfismo de l-álgebras si, y solo si, I es un l-ideal. En dicho caso, existe una biyección natural entre el conjunto de los l-ideales que contienen a I y el conjunto de los l-ideales de A/I. Esto es el análogo a lo visto en el corolario 91. Además, los l-ideales maximales se corresponden por dicha biyección.

Ejemplo 126. Sea X un espacio topológico, entonces $C(X)$ es una l-álgebra. Si Y es un subconjunto de X, e $I_Y = \{f \in C(X) : f(Y) = \{0\}\}$, entonces I_Y es un l-ideal de $C(X)$.

Proposición 127. Sea A una l-álgebra. Para todo $a, b \in A$ se satisfacen las dos siguientes propiedades:

(i) $c(a \wedge b) \leq ca \wedge cb$ y $c(a \vee b) \geq ca \vee cb$, para todo $c \in A^+$

(ii) $|ab| \leq |a||b|$

Demostración: Se prueban sin dificultad las desigualdades de (i). Probemos ahora (ii). Teniendo en cuenta la observación 48, se sigue de lo siguiente:

$$\begin{aligned} -|a||b| &= -(a^+ + a^-)(b^+ + b^-) = -a^+b^+ - a^+b^- - a^-b^+ - a^-b^- \leq \\ &\leq a^+b^+ - a^+b^- - a^-b^+ + a^-b^- = (a^+ - a^-)(b^+ - b^-) = \\ &= ab \leq a^+b^+ + a^+b^- + a^-b^+ + a^-b^- = |a||b| \end{aligned}$$

Definición 128. Una subálgebra B de una l-álgebra A se dice que es una *l-subálgebra* si B es un subretículo de A.

Ejemplo 129. Sea A una l-álgebra. Fijado $e \in A^+$, sea $A^*(e)$ el subretículo vectorial de A formado por los elementos de A que son acotados respecto de e. Supongamos que $e \cdot e \in A^*(e)$ y que $1 \in A^*(e)$. Dados $a, b \in A^*(e)$, por la propiedad (ii) de la proposición 127 se satisface lo siguiente:

$$|ab| \leq |a||b| \leq (n_1 e) \cdot (n_2 e) = (n_1 n_2) e \cdot e \leq (n_1 n_2 n_3) e$$

Por tanto, $ab \in A^*(e)$. En conclusión, hemos visto que, en este caso, $A^*(e)$ es una l-subálgebra de A. Como consecuencia, si $1 \geq 0$, entonces $A^*(1)$ es una l-subálgebra de A.

Proposición 130. Si J e I son l-ideales de una l-álgebra A, entonces

$$I + J = \{a + b : a \in I,\, b \in J\}$$

también es un l-ideal. Si, además, $1 \in A^+$, entonces se satisface la igualdad

$$(I + J) \cap A^*(1) = I \cap A^*(1) + J \cap A^*(1)$$

Demostración: Primero veamos que el ideal $I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$ es sólido. Sea $c \in A$ tal que $|c| \leq |a + b|$, con $a \in I$ y $b \in J$. Tenemos que ver que $c \in I + J$. Dado que $|c| = c^+ + c^-$, es claro que $c^+ \leq |a| + |b|$ y $c^- \leq |a| + |b|$. Aplicando el lema de descomposición de Riesz, existen $a_1, a_2 \in I$, $b_1, b_2 \in J$ tales que $0 \leq a_1 \leq |a|$, $0 \leq a_2 \leq |a|$, $0 \leq b_1 \leq |b|$, $0 \leq b_2 \leq |b|$. El hecho de que pertenezcan a I y a J se debe a que tanto I como J son sólidos. En consecuencia, $c = c^+ - c^- = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in I + J$ y, por tanto, $I + J$ es un l-ideal, al ser un ideal sólido.

Es evidente que $I \cap A^*(1) + J \cap A^*(1) \subseteq (I + J) \cap A^*(1)$. Veamos por tanto la inclusión contraria. Sea $c \in (I + J) \cap A^*(1)$. Entonces $c = a + b \in A^*(1)$, con $a \in I$, $b \in J$. Aplicando de nuevo la descomposición de Riesz, existen a_1, a_2, b_1, b_2 tales que $0 \leq a_1 \leq |a|$, $0 \leq a_2 \leq |a|$, $0 \leq b_1 \leq |b|$, $0 \leq b_2 \leq |b|$. Al igual que antes, como I y J son sólidos, entonces $a_1, a_2 \in I$, $b_1, b_2 \in J$.

Por otro lado, $c \in A^*(1)$, lo cual implica que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|c| \leq n$. Además, se verifica la desigualdad $a_1 \leq c^+ \leq |c|$. Obtenemos entonces que $a_1 \in A^*(1)$, al estar acotado también por n. Análogamente se ve que a_2, b_1, $b_2 \in A^*(1)$. En conclusión, $c = c^+ - c^- = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in I \cap A^*(1) + J \cap A^*(1)$.

A continuación definimos el concepto de f-álgebra y Φ-álgebra, y damos unas propiedades sobre ellas. El resto del apartado versará sobre estos conceptos.

Definición 131. Diremos que una l-álgebra A es una *f-álgebra* si tiene la siguiente propiedad: si $a, b \in A$ son tales que $a \wedge b = 0$, entonces, para todo $c \in A^+$, se satisface $a \wedge bc = 0$. Llamaremos *Φ-álgebra* a toda f-álgebra que sea arquimediana.

Propiedades 132. Sea A una f-álgebra. Dados $a, b \in A$ se satisfacen:

(i) $c(a \vee b) = ca \vee cb$ y $c(a \wedge b) = ca \wedge cb$ para todo $c \in A^+$

(ii) $|ab| = |a||b|$

(iii) si $a \wedge b = 0$, entonces $ab = 0$. En particular, $a^+a^- = 0$

(iv) $a^2 = |a|^2 \geq 0$. En particular, $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$

(v) si $a, b \geq 0$, entonces $0 \leq ab - (ab \wedge nb) \leq \frac{1}{n}a^2b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(vi) $ab = (a \vee b)(a \wedge b)$. Como consecuencia, si I es un l-ideal de A y $a \geq 0$, entonces $a \in I$ si, y solo si, $a \wedge 1 \in I$.

Demostración:
(i): se prueba de manera análoga a la propiedad (ix) del lema 78.

(ii): Si $a \in A^+$ se deduce de (i):
$$|ab| = (ab) \vee (-ab) = a[b \vee (-b)] = a|b| = |a||b|$$
Hemos utilizado (i) en la segunda igualdad en lo anterior. En general, lo que se tiene es lo siguiente:
$$\begin{aligned} a|b| = a^+|b| - a^-|b| = |a^+b| - |a^-b| \leq ||a^+b| - |a^-b|| \leq \\ \leq |a^+b - a^-b| = |ab| \end{aligned}$$
De igual forma se prueba $-a|b| \leq |ab|$ y, por tanto, $|a||b| = (a|b|) \vee (-a|b|) \leq |ab|$. La otra desigualdad es justamente la propiedad (ii) de la proposición 127.

(iii): Si $a \wedge b = 0$, entonces $a, b \geq 0$. Al ser A una f-álgebra, aplicando la definición 2 dos veces consecutivas (con $c = a$ y $c = b$) obtenemos $ab \wedge ab = 0$, es decir, $ab = 0$. En particular, dado que $a^+ \wedge a^- = 0$, se obtiene $a^+a^- = 0$.

(iv): Por la anterior propiedad, tenemos que $a^+a^- = 0$, por lo que $a^2 = (a^+ - a^-)^2 = (a^+)^2 - 2a^+a^- + (a^-)^2 = (a^+)^2 + (a^-)^2$. Por otro lado, $|a|^2 = (a^+)^2 + 2a^+a^- + (a^-)^2 = (a^+)^2 + (a^-)^2$. Concluimos entonces $a^2 = |a|^2$.

(v): Sean $a, b \leq 0$. De la propiedad 78.(iv) se tienen las igualdades $(ab - nb)^+ = ab - (ab \wedge nb)$ y $(ab - nb)^- = nb - (ab \wedge nb)$, por lo que se satisface:
$$(ab - (ab \wedge nb)) \wedge (nb - (ab \wedge nb)) = (ab - nb)^+ \wedge (ab - nb)^- = 0$$
De aquí, y puesto que A es una f-álgebra, tomando $c = \frac{a}{n} \geq 0$ obtenemos la siguiente cadena de implicaciones:
$$\begin{gathered} (ab - (ab \wedge nb)) \wedge (\frac{a}{n}nb - \frac{a}{n}(ab \wedge nb)) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (ab - (ab \wedge nb)) \wedge (ab - a(\frac{a}{n}b \wedge nb)) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow ab + (-(ab \wedge nb) \wedge -a(\frac{a}{n}b \wedge nb)) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow ab - ((ab \wedge nb) \vee a(\frac{a}{n}b \wedge nb)) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow ab = ((ab \wedge nb) \vee a(\frac{a}{n}b \wedge nb)) \leq (ab \wedge nb) + a(\frac{a}{n}b \wedge nb) \end{gathered}$$

Para pasar de la segunda a la tercera ecuación hemos utilizado el lema 78.(ii), mientras que, para la siguiente implicación, hemos utilizado la propiedad (i) del mismo lema. Por tanto, obtenemos de esta manera que $ab - (ab \wedge nb) \leq a(\frac{a}{n}b \wedge nb) \leq \frac{1}{n}a^2b$.

(vi): Por la propiedad 78.(iii), tenemos $a + b = a \vee b + a \wedge b$. Se verifica entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned} ab - (a \vee b)(a \wedge b) &= ab - (a \wedge b)(a + b - a \wedge b) = \\ &= ab - [a(a \wedge b) + b(a \wedge b) - (a \wedge b)^2] = \\ &= (a - a \wedge b)(b - a \wedge b) = (a - b)^+(a - b)^- \end{aligned}$$

De nuevo, la propiedad 78.(iv) justifica la última igualdad. Aplicando la propiedad (iii) que acabamos de probar, obtenemos lo que buscábamos, $ab = (a \vee b)(a \wedge b)$.

Observación 133. Sea A una l-álgebra, y sean $a \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Cuando escribamos $a \leq \alpha$, entenderemos que $\alpha \in A$ vía la inclusión natural $\mathbb{R} \hookrightarrow A$. Cuando A es una f-álgebra, por la propiedad (iv) anterior, $1 \in A^+$ y el orden que A induce en $\mathbb{R}$ es el orden usual de $\mathbb{R}$. Esto significa que $\alpha \leq \beta$ en $\mathbb{R}$ si, y solo si, $\alpha \leq \beta$ en A.

Observación 134. Sea A una Φ-álgebra. Entonces A es un retículo vectorial arquimediano en el que $1 > 0$ es una unidad débil. Por tanto, tenemos en A también las nociones de la definición 92: $A^* = A^*(1)$ será la subálgebra de los elementos acotados de A (A^* será también Φ-álgebra). Spec A^* es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, y Spec A es un espacio topológico realcompacto. Tenemos entonces las representaciones que vimos en su momento $A^* \hookrightarrow C(\text{Spec } A^*)$ y $A \hookrightarrow C(\text{Spec } A)$.

Ejemplo 135. Si X es un espacio topológico, es claro que $C(X)$ es una Φ-álgebra. Como vimos en el ejemplo 111, las nociones de convergencia en $C(X)$ coinciden con las clásicas. Además, $C^*(X)$ está formado por las funciones de $C(X)$ acotadas en el sentido usual, es decir, $C(X)^* = C^*(X)$.

Ejemplo 136. Sea $X = \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$, y sea A el conjunto de las funciones continuas en X que son eventualmente funciones polinómicas, esto es, $f \in A$ si, y solo si, $f \in C(X)$ y existen un $y \in X$ y un polinomio $p \in \mathbb{R}[z]$ tales que $f(x) = p(x)$, para todo $x \geq y$. Veamos que A es una Φ-álgebra.

Se comprueba sin dificultad que A es un subanillo de $C(X)$. Además, A contiene a las funciones constantes, así que la imagen del morfismo estructural $\mathbb{R} \to C(X)$ está contenida en A. Luego, A es una subálgebra de X.

Para ver que A es un subretículo de $C(X)$ nos basta probar que si $f \in A$, entonces $|f| \in A$. Sea pues $f \in A$. Existen, por lo tanto, un polinomio p y $y \in X$ tales que $f = p$ en $[y, \infty)$. A partir de un cierto $w \geq y$, el signo de $p(x)$ coincide con el del coeficiente principal del polinomio p (si p fuese el polinomio nulo la situación sería trivial). Así que, a partir de w, o bien $|f| = p$, o bien $|f| = -p$.

Concluimos que $|f|$ es eventualmente una función polinómica. Luego, A es una l-subálgebra de la Φ-álgebra $C(X)$ y, por lo tanto, una Φ-álgebra.

Lema 137. Si la unidad de una l-álgebra A es una unidad fuerte, entonces A es una

f-álgebra. En particular, si A es una l-álgebra y $1 \geq 0$ en A, entonces $A^*(1)$ es una f-álgebra.

Demostración: Supongamos que 1 es una unidad fuerte de A. Entonces, por definición, $A^*(1) = A$ y $1 \in A^+$, es decir, $1 \geq 0$. Sean $a, b, c \in A^+$ con $a \wedge b = 0$. Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a, b, c \leq n$. Se satisface entonces lo siguiente:

$$0 \leq a \wedge bc \leq a \wedge nb \leq na \wedge nb = n(a \wedge b) = 0$$

Por tanto, $a \wedge bc = 0$ y A es una f-álgebra. Aplicando lo que acabamos de probar, tenemos que $A^*(1)$ es una f-álgebra, ya que $A^*(1)$ es una l-álgebra, $1 \in A^+$ y 1 es una unidad fuerte de $A^*(1)$.

Recordemos que un elemento x de un anillo A se dice que es nilpotente si existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$.

Lema 138. En una Φ-álgebra A no existen elementos nilpotentes no nulos.

Desmostración: Sea $c \in A$ tal que $c^p = 0$, para algún p. Veamos que, necesariamente, $c = 0$. Podemos suponer que p es el menor número par que lo satisface, en cuyo caso $c^p = 0 = |c|^p$ y, por tanto, podemos suponer $c \geq 0$. Existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2k$, y denotamos $d = c^k$. Se verifica entonces $(md)^2 = m^2 d^2 = m^2 c^p = 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Aplicando la propiedad 132.(v), obtenemos $0 \leq md - (md \wedge 1) \leq (md)^2$ (tomando en ella $a = md$, $b = 1$, $n = 1$). Es decir, tenemos $md = md \wedge 1$ o, lo que es lo mismo, $md \leq 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Al ser A arquimediana, necesariamente $d = 0$. Si $p = 2$, entonces $k = 1$ y, por tanto, $c = d = 0$ y terminamos. Si, por el contrario, $p > 2$, entonces o k o $k + 1$ es par y menor estrictamente que p, llegando así a contradicción. Hemos visto entonces que el único elemento nilpotente que puede haber es el 0.

Corolario 139. Sea A una Φ-álgebra. Para cualesquiera $a, b \in A^+$ se satisface

$$a \leq b \text{ si y solo si } a^2 \leq b^2$$

Demostración: Es claro que $a^2 \leq b^2$ cuando $a \leq b$. Veamos lo contrario. Supongamos que $a^2 \leq b^2$. Sea $c = a - a \wedge b$ y probemos que $c = 0$, es decir, que $a = a \wedge b$ y, por tanto, $a \leq b$. Aplicando la propiedad 132.(vi) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} ab = (a \wedge b)(a \vee b) &= [a(a \wedge b)] \wedge [b(a \vee b)] = \\ &= (a^2 \vee ab) \wedge (ab \vee b^2) = (a^2 \wedge b^2) \vee (ab) \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se obtiene aplicando el lema 78.(xii). De lo anterior se deduce $a^2 \wedge b^2 \leq ab$. Por otro lado, dado que $a = a \wedge b + c$, se tiene $a^2 = (a \wedge b)^2 + c^2 + 2c(a \wedge b) \geq (a \wedge b)^2 + c^2$. Juntando todo esto llegamos a

$$a^2 = a^2 \wedge b^2 = a^2 \wedge b^2 \wedge (ab) = (a \wedge b)^2 \leq a^2 - c^2$$

Concluimos entonces $c^2 = 0$. Como en A no hay elementos nilpotentes no nulos, por el lema anterior, se tiene que $c = 0$ y terminamos.

Teorema 140. Sea A una l-álgebra arquimediana. Son equivalentes:

(i) A es una Φ-álgebra.

(ii) 1 es una unidad débil.

(i)⇒(ii): Por la propiedad 132.(iii), si $a \in A$ con $a \wedge 1 = 0$, entonces $a \cdot 1 = a = 0$. Por la proposición 97.(iii), concluimos que 1 es unidad débil de A.

(ii)⇒(i): Probemos que A es una f-álgebra. Sean a, b, $c \in A^+$ tales que $a \wedge b = 0$. Tenemos que ver que $a \wedge bc = 0$. De nuevo por la proposición 97 y dado que 1 es unidad débil, esto equivale a que se vea $a \wedge bc \wedge 1 = 0$. De acuerdo con el lema 138, esto es lo mismo que ver que $(a \wedge bc \wedge 1)^2 = 0$ ($A^*(1)$ es una Φ-álgebra por el lema 137 al ser A l-álgebra y $1 \geq 0$ en $A^*(1)$). Por un lado se verifica

$$(a \wedge bc \wedge 1)^2 \leq a(a \wedge bc \wedge 1) \wedge bc(a \wedge bc \wedge 1) \wedge (a \wedge bc \wedge 1)$$

Y $a(a \wedge bc \wedge 1) \wedge bc(a \wedge bc \wedge 1) \wedge (a \wedge bc \wedge 1) = 0$ si $b(a \wedge bc \wedge 1) = 0$. De nuevo equivale a ver $[b(a \wedge bc \wedge 1) \wedge 1]^2 = 0$, por el mismo razonamiento que antes. Esto se deduce de lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 \leq [b(a \wedge bc \wedge 1) \wedge 1]^2 &\leq [b(a \wedge bc \wedge 1) \wedge 1][b(a \wedge bc \wedge 1)] \leq \\ &\leq (b \wedge 1)(a \wedge 1)b \leq (a \wedge b)b = 0 \end{aligned}$$

La penúltima desigualdad es consecuencia de la definición de l-álgebra, mientras que la última se debe a que $(b \wedge 1)(a \wedge 1) \leq a$ y $(b \wedge 1)(a \wedge 1) \leq b$. Por tanto hemos visto lo que queríamos y A es una Φ-álgebra.

4.2. Representación de Φ-álgebras

Concluimos la memoria presentando el teorema de representación de Henriksen-Johnson (que no demostramos): toda Φ-álgebra A es l-isomorfa a un álgebra de funciones continuas extendidas sobre el espacio compacto y de Hausdorff $\mathscr{M}(A)$ formado por los l-ideales maximales de A (con la topología hull-kernel).

Sea A una f-álgebra y $B \subseteq A$. Denotaremos con $S(B)$ el menor l-ideal de A que contiene a B, es decir, la intersección de todos los l-ideales de A que contienen a B.

Lema 141. Si A es una f-álgebra y $B \subseteq A$, entonces

$$S(B) = \{c \in A : |c| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|, \text{para cierto } n \in \mathbb{N} \text{ y ciertos } a_i \in A, b_i \in B\}$$

Demostración: Basta tener en cuenta la desigualdad triangular $|c_1 + c_2| \leq |c_1| + |c_2|$ y que $|ac| = |a||c|$ por ser A una f-álgebra.

Proposición 142. Todo l-ideal maximal de una Φ-álgebra es un ideal primo, pero no necesariamente un ideal maximal.

Demostración: Sea M un l-ideal maximal de una Φ-álgebra A. Veamos que M es un ideal primo de A. Sean $a, b \notin M$. Veamos que $ab \notin M$.

Supongamos que $ab \in M$. Consideremos el conjunto

$$S(a) = \{c \in A : |c| \leq |ax| \text{ para algún } x \in A\}$$

Según el lema precedente, se trata del menor l-ideal de A al que pertenece a. Puesto que $S(a) + M$ es un ideal sólido (véase la proposición 85) que contine estrictamente a M, del carácter maximal de M se deduce que $S(a) + M = A$. Así que $1 = c_1 + m_1$,

$c_1 \in S(a), m_1 \in M$. Análogamente, $1 = c_2 + m_2$, $c_2 \in S(b), m_2 \in M$. De donde,

$$1 = (c_1 + m_1)(c_2 + m_2) = c_1(c_2 + m_2) + m_1(c_2 + m_2) = c_1c_2 + c_1m_2 + m_1(c_2 + m_2)$$

En la expresión anterior el término $c_1m_2 + m_1(c_2 + m_2)$ pertenece a M. Además

$$|c_1c_2| = |c_1||c_2| \leq |ax_1||bx_2| = |abx_1x_2| \in M$$

Como M es sólido, concluimos que $c_1c_2 \in M$ y, en consecuencia, $1 \in M$, lo que es absurdo (pues M es ideal propio). El siguiente ejemplo muestra que un l-ideal maximal puede no ser un ideal maximal.

Ejemplo 143. Consideremos la Φ-álgebra A del ejemplo 136. Recordemos que $X = \mathbb{R}^+$ y que A es la l-subálgebra de $C(X)$ formada por las funciones que son eventualmente polinómicas.

Consideremos $M = \{f \in A : f \text{ es eventualmente } 0\}$, que es, ciertamente, un un l-ideal propio de A.

Veamos en primer lugar que M no es un ideal maximal del anillo A. Sea f la inclusión de X en $\mathbb{R}$, es decir, $f(x) = x$, para todo $x \in X$. Ciertamente $f \in A \setminus M$. Veamos que $1 \notin (f) + M$ y, en consecuencia, M estará contenido en en el ideal propio $(f) + M$.

Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $1 = fg + m$, siendo $g \in A$ y $m \in M$. Puesto que $g \in A$, existe un $y \geq 0$ y $p[z] \in \mathbb{R}[z]$ tales que $g = p$ en $[y, \infty)$. Luego, $(fg - 1)(x) = xp(x) - 1$ si $x \in [y, \infty)$. Ahora bien, como $fg - 1 \in M$, existe un $w \geq y$ tal que $fg - 1 = 0$ en $[w, \infty)$. Así que $xp(x) - 1 = 0$ si $x \in [w, \infty)$, lo que es absurdo, ya que el polinomio $zp(z) - 1$ no puede tener infinitas raíces.
Veamos ahora que M es un l-ideal maximal de A. Sea $f \in A \setminus M$, y sea $S(f)$ el menor el menor l-ideal de A que contiene a f. Recordemos (véase el lema 141) que

$$S(f) = \{g \in A : |g| \leq |fh|, \text{ para algún } h \in A\}$$

Debemos probar que $S(f) + M = A$. Puesto que $S(f) = S(|f|)$, podemos suponer que $f \geq 0$. Veamos que $S(f) + M$ contiene una unidad de A.

Determinemos las unidades de A. Dada $g \in A$, sea

$$Z(g) = f^{-1}(0) = \{x \in X : g(x) = 0\}$$

Supongamos que g es una unidad de A. Entonces $Z(g) = \emptyset$ y la función $\frac{1}{g}$ pertenece a A. Luego, existe $y \geq 0$ tal que g y $\frac{1}{g}$ son funciones polinómicas en $[y, \infty)$. Sean $p, q \in \mathbb{R}[Z]$, $p(z) = a_0 + ... + a_nz^n$, tales que $g = p$ y $\frac{1}{g} = q$ en $[y, \infty)$. Como el polinomio $pq - 1$ se anula en $[y, \infty)$, concluimos que $pq - 1 = 0$. De donde, $p = a_0$ y $q = \frac{1}{a_0}$. Concluimos que un elemento g de A es una unidad si, y sólo si, $Z(g) = \emptyset$ y g es eventualmente una constante (no nula).

Volvamos a nuestro objetivo de probar que $S(f) + M$ contiene una unidad de A. Como $f \in A^+ \setminus M$, existe $y \geq 0$ y existe $p(z) \in \mathbb{R}[Z]$, $p(z) = a_0 + ... + a_nz^n$, tales que $f = p$ en $[y, \infty)$. Como $p \neq 0$, pues $f \notin M$, podemos suponer que $a_n \neq 0$. Como, para x suficientemente grande, el signo de $p(x)$ coincide con el de a_n, concluimos que $a_n > 0$.

Supongamos que en $S(f)$ hay una función g que es eventualmente una constante no nula. Consideremos la función $|g|$, que también está en $S(f)$ y es eventualmente una constante positiva. Existe, por lo tanto, $y > 0$ y una constante $a > 0$ tal que $|g| = a$

en $[y, \infty)$. Consideremos la siguiente función $h : X \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{y}x + 1 & si \quad x \in [0, y] \\ \\ 0 & si \quad x \in [y, \infty) \end{cases}$$

Ciertamente $h \in M$ y la función $|g| + h$ es una unidad de A que está en $S(f) + M$.

Luego, para terminar, nos basta encontrar en $S(f)$ una función g que sea eventualmente una constante no nula.

Recordemos que $f = p$ en $[y, \infty)$, siendo $p(z) = a_0 + ... + a_n z^n$ y $a_n > 0$. Una vez superada la última raíz del polinomio $p'(z)$, la función $p(x)$ es creciente y $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$, ya que $a_n > 0$. Puesto que $f = p$ en $[y, \infty)$, existe $w \geq y$ tal que f es creciente y $f \geq 1$ en $[w, \infty)$. Consideremos la función $g : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in [0, w] \\ \\ f(w) & si \quad x \in [w, \infty) \end{cases}$$

Es obvio que $g \in A$ y que $0 \leq g \leq f$. De donde $g \in S(f)$, y g es eventualmente una constante no nula.

Sea X un espacio topológico no vacío. Dado $a \in X$, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \xrightarrow{\phi_a} & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$$

es un morfismo sobreyectivo de l-álgebras. Luego, $M_a = \ker \phi_a$ es un ideal maximal sólido y, por lo tanto, un l-ideal maximal.

Proposición 144. Sea X un espacio compacto y de Hausdorff no vacío. Los l-ideales maximales de $C(X)$ coinciden con los ideales maximales, y son exactamente los conjuntos de la forma M_a, $a \in X$.

Demostración: Hemos visto en el ejemplo precedente que los conjuntos M_a son tanto ideales maximales como l-ideales maximales. Probemos ahora que todo ideal maximal es de esa forma.

Sea M un ideal maximal de $C(X)$ y R el conjunto de ceros comunes a las funciones en M, es decir

$$R = \{x \in X : \ f(x) = 0 \text{ para todo } f \in M\}$$

Veamos que $R \neq \emptyset$. Supongamos razonando por reducción al absurdo, que $R = \emptyset$. Entonces, para cada $x \in X$, existe un $f_x \in M$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Dado que f_x es continua, existe un entorno abierto U_x de x en X donde f_x no se anula nunca. Por la compacidad de X, existe un número finito de abiertos $U_{x_1}, ..., U_{x_n}$ que cubren a X. Definimos la siguiente función

$$f = f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + ... + f_{x_n}^2$$

Luego, f no se anula en ningún punto de X, ya que f_{x_i} no se anulaba en ningún punto de U_{x_i}, $i = 1, ..., n$ y teníamos $X = U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$. Por tanto, f es una unidad de $C(X)$. Pero esto contradice $f \in M$, y entonces se tiene que R es no vacío. Sea $a \in R$. La inclusión $M \subseteq M_a$ es clara, y dado que M es maximal tenemos que $M = M_a$.

Veamos finalmente que todo l-ideal maximal de $C(X)$ es también de la forma M_a. Sea N un l-ideal maximal de $C(X)$. Sabemos (véase la proposición 142) que N es un ideal primo. Sea M un ideal maximal conteniendo a N. Sabemos ya que $M = M_a$, para cierto $a \in X$. Puesto que M_a es un ideal sólido y propio de $C(X)$ que contiene a N, del carácter maximal de N, se deduce que $N = M_a$.

Observación 145. En las Φ-álgebras uniformemente cerradas (que no vemos en esta memoria), como es el caso de $C(X)$, los ideales primos son l-ideales y, en consecuencia, los ideales maximales coinciden con los l-ideales maximales (véase [Pu] y [GJ]).

Definición 146. Sea A una Φ-álgebra. Denotaremos $\mathscr{M}(A)$ (o simplemente $\mathscr{M}$ cuando no haya confusión) al conjunto de l-ideales maximales de A. Sea B un subconjunto de A. Se define el conjunto $\mathscr{V}(B)$ como

$$\mathscr{V}(B) = \{M \in \mathscr{M} : \ B \subseteq M\}$$

Obsérvese que $\mathscr{V}(B) = \mathscr{V}(I(B)) = \mathscr{V}(I^+(B))$, donde $I(B)$ es el ideal sólido generado por B, es decir, el mínimo ideal sólido de A que contiene a B.

Proposición 147. Sea A una Φ-álgebra. Entonces se satisface lo siguiente:

(i) $\mathscr{V}(A) = \emptyset$, $\mathscr{V}(\{0\}) = \mathscr{M}$

(ii) Si $(B_i)_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de A, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{V}(B_i) = \mathscr{V}(\bigcup\limits_{i\in I} B_i)$.

(iii) Si B y C son subconjuntos de A, entonces $\mathscr{V}(B) \cup \mathscr{V}(C) = \mathscr{V}(I(B) \cap I(C))$.

Demostración: (i) y (ii) son sencillas de ver. Probemos entonces (iii). Es obvio que $\mathscr{V}(I(B)), \mathscr{V}(I(C)) \subseteq \mathscr{V}(I(B) \cap I(C))$. Luego, $\mathscr{V}(B) \cup \mathscr{V}(C) \subseteq \mathscr{V}(I(B) \cap I(C))$.

Veamos ahora que $\mathscr{V}(I(B) \cap I(C)) \subseteq \mathscr{V}(B) \cup \mathscr{V}(C)$. Lo probamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $M \in \mathscr{M}$ tal que $M \in \mathscr{V}(I(B) \cap I(C))$, $M \notin \mathscr{V}(B)$, $M \notin \mathscr{V}(C)$. Luego, $B \nsubseteq M$ y $C \nsubseteq M$. Existen, por lo tanto, $b \in B \setminus M$, $c \in C \setminus M$. Consideremos el conjunto

$$S(b) = \{w \in A : |w| \leq |bx|, \text{ para algún } x \in A\}$$

Según el lema 141, se trata del menor ideal sólido de A al que pertenece b.

Puesto que $S(b) + M$ es un ideal sólido (véase la proposición 85) que contiene estrictamente a M, del carácter maximal de M se deduce que $S(b) + M = A$. Así que $1 = b_1 + m_1$, $b_1 \in S(b)$, $m_1 \in M$. Análogamente, $1 = c_1 + m_2$, $c_1 \in S(c)$, $m_2 \in M$. De donde,

$$1 = (b_1 + m_1)(c_1 + m_2) = b_1(c_1 + m_2) + m_1(c_1 + m_2) = b_1c_1 + b_1m_2 + m_1(c_1 + m_2)$$

En la expresión anterior el término $b_1m_2 + m_1(c_1 + m_2)$ pertenece a M. Además

$$|b_1c_1| = |b_1||c_1| \leq |bx_1||cx_2| = |bcx_1x_2| \in I(B) \cap I(C) \subseteq M$$

Como M es sólido, concluimos que $b_1c_1 \in M$ y, en consecuencia, $1 \in M$, lo que es absurdo (pues M es un ideal propio).

Debido a esta proposición, podemos definir la topología siguiente en $\mathscr{M}$.

Definición 148. Sea A una Φ-álgebra. Definimos en $\mathscr{M}$ la topología cuyos cerrados son los conjuntos $\mathscr{V}(B)$, siendo B subconjunto de A. Esta se conoce con el nombre de topología *hull-kernel* (o también con los nombres de topología de *Stone* o topología de *Zariski*).

Lema 149. Para cada $a \in A$, sea $D(a) = \{M \in \mathscr{M} : \ a \notin M\}$. Los conjuntos $D(a)$, $a \in A$, constituyen una base de abiertos de $\mathscr{M}$.

Esto se deduce del hecho de que los conjuntos $D(a)$ son los complementarios de los conjuntos $\mathscr{V}(\{a\})$, los cuales forman una base de cerrados de $\mathscr{M}$.

Proposición 150. Sea A una Φ-álgebra y $\mathscr{M}(A)$ el conjunto de los l-ideales maximales de A con la topología hull-kernel. Se verifica que $\mathscr{M}(A)$ es un espacio compacto.

Demostración: Nos basta considerar recubrimientos abiertos formados por abiertos de una base.

Sea $(D(a_i))_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $\mathscr{M}(A)$. Así pues, para cada $M \in \mathscr{M}(A)$, existe a_i tal que $a_i \notin M$. Luego el conjunto $\{a_i : i \in I\}$ no está contenido en ningún l-ideal maximal. Sea $S(a_i : i \in I)$ el menor l-ideal que contiene al conjunto $\{a_i : i \in I\}$. Si $S(a_i : i \in I)$ fuese un ideal propio, entonces estaría contenido en algún l-ideal maximal, lo que no es cierto. Luego, $S(a_i : i \in I) = A$, es decir, $1 \in S(a_i : i \in I)$.

Del lema precedente se deduce que $1 \leq |\alpha_1 a_1| + ... + |\alpha_n a_n|$, para ciertos $\alpha_i \in A$ y ciertos a_i. Puesto que $D(a_i) = D(|a_i|)$, podemos suponer que $a_i \geq 0$ y, así,

$$1 \leq |\alpha_1|a_1 + ... + |\alpha_n|a_n \in S(a_1, ..., a_n)$$

Puesto que $S(a_1, ..., a_n)$ es sólido, concluimos que $1 \in S(a_1, ..., a_n)$. Por lo tanto, el conjunto $\{a_1, ..., a_n\}$ no está contenido en ningún l-ideal maximal, es decir,

$$D(a_1) \cup ... \cup D(a_n) = \mathscr{M}(A).$$

Definición 151. Sea X un espacio topológico, y sea $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ la recta real extendida (o compactificación de $\mathbb{R}$ por dos puntos). Para una función $f : X \to \mathbb{R}$, definimos $R(f) = f^{-1}(\mathbb{R}) = \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\}$ y denotamos con $\mathscr{D}(X)$ el conjunto de las funciones continuas $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tales que $R(f)$ es un abierto denso de X. Llamaremos *funciones continuas extendidas* a los elementos de $\mathscr{D}(X)$. Es evidente que $C(X) \subseteq \mathscr{D}(X)$.

Definición 152. Consideremos en $\mathscr{D}(X)$ el orden y las operaciones definidas *punto a punto*. Sean $f, g \in \mathscr{D}(X)$. Se ve sin dificultad que las funciones $f \vee g$ y $f \wedge g$ son continuas y que $R(f) \cap R(g) \subseteq R(f \vee g) \cap R(f \wedge g)$. Puesto que la intersección de dos abiertos densos de X es un abierto denso de X, concluimos que $f \vee g$ y $f \wedge g$ pertenecen a $\mathscr{D}(X)$. Así pues, $\mathscr{D}(X)$ es un retículo.

También se ve sin dificultad que, si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda f \in \mathscr{D}(X)$, pero, como veremos en el siguiente ejemplo, no podemos afirmar que $\mathscr{D}(X)$ sea cerrado para la suma y la multiplicación. Si existiesen funciones $h, k \in \mathscr{D}(X)$ tales que

$$h(x) = f(x) + g(x), \ \ k(x) = f(x)g(x)$$

para todo $x \in R(f) \cap R(g)$, entonces a h y k se les llama suma y producto, respectivamente, de f y g, y se denotan $f+g$ y fg. Observemos que al ser $R(f)\cap R(g)$ un abierto denso de X, dichas operaciones están bien definidas (pero no están definidas punto a punto).

Ejemplo 153. Sea $X = \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ la compactificación por un punto de $\mathbb{N}$. Sean $f_1(x) = x + \text{sen}\, x$, $f_2(x) = \frac{\text{sen x}}{x}$, $g(x) = -x$, si $x\in\mathbb{N}$, y sean $f_1(\infty) = \infty$, $f_2(\infty) = 0$, $g(\infty) = -\infty$. Es claro que $f_1, f_2, g \in \mathscr{D}(X)$, pero las funciones $f_1 + g$ y $f_2 g$ no están definidas (punto a punto).

Teorema 154. (*Henriksen-Johnson*). Sea A una Φ-álgebra. Se verifica que $\mathscr{M}(A)$ es un espacio compacto y de Hausdorff y que el álgebra A es l-isomorfa a un álgebra $\widehat{A}$ de funciones extendidas sobre $\mathscr{M}(A)$.

Demostración: La demostración completa puede verse en [HJ]. Nosotros nos vamos a limitar aquí a asociar a cada elemento $a\in A$ una función continua extendida $\widehat{a}\in\mathscr{D}((\mathscr{M}(A)))$.

Fijado $a\in A$ y $M\in\mathscr{M}(A)$, sea $M(a)$ la imagen de a por el morfismo de paso al cociente $A\to A/M$. Si $a\in A^+$, definimos

$$\widehat{a}(M) = \inf\{\lambda\in\mathbb{R} : M(a)\leq\lambda\}$$

sobreentendiendo que $\inf\emptyset = \infty$. Si $a\in A$, definimos

$$\widehat{a}(M) = \widehat{a_+}(M) - \widehat{a_-}(M)$$

De la igualdad $a^+a^- = 0$ (véase 132) deducimos $0 = M(a^+a^-) = M(a^+)M(a^-)$ y, puesto que A/M es un dominio de integridad por ser M un ideal primo (véase 142), concluimos que, o bien $M(a^+) = 0$ y, en consecuencia, $\widehat{a_+}(M) = 0$, o bien $M(a^-) = 0$ y, en consecuencia, $\widehat{a^-}(M) = 0$. Así que $\widehat{a}(M) = \widehat{a^+}(M) - \widehat{a^-}(M)$ está bien definido, ya que uno de los sumandos es 0.

Queremos insistir en que las operaciones definidas en $\widehat{A} = \{\widehat{a} : a\in A\}$ son las inducidas por las operaciones en $\mathscr{D}((\mathscr{M}(A))$ (véase 152). Así pues, para comprobar que $\widehat{a_1}+\widehat{a_2} = \widehat{a_1+a_2}$ y que $\widehat{a_1}\widehat{a_2} = \widehat{a_1a_2}$, basta probar que $(\widehat{a_1}+\widehat{a_2})(M) = \widehat{a_1+a_2}(M)$ y que $(\widehat{a_1}\widehat{a_2})(M) = \widehat{a_1a_2}(M)$, para todo $M\in R(\widehat{a_1})\cap R(\widehat{a_2})$.

Bibliografía

[AM] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, *Introducción al Álgebra conmutativa*, Reverté, 1973.

[BKW] A. Bigard, K. Keimel, and S. Wolfenstein, *Groupes et anneaux réticulés*, Springer, 1977.

[Bki] N. Bourbaki, *General Topology: Chapters 1-4*, Springer, 1998.

[GJ] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, 1960.

[HJ] M. Henriksen and D. G. Johnson, *On the structure of a class of arquimedean lattice-ordered algebras*, Fund. Math. (1961), 73-94.

[HP] M. Husek and A. Pulgarín, *On characterizing riesz spaces C(X) without Yosida representation*, Positivity (2013), 515-524.

[JR] E. de Jonge and Arnoud C. M. Rooij, *Introduction to Riesz Spaces*, Mathematisch Centrum, 1977.

[Ji] Jingjing Ma, *Lecture Notes on Algebraic Structure of Lattice-Ordered Rings*, World Scientific Publishing Company, 2014.

[Mar] I. Marcos, *Retículos vectoriales. Álgunos teoremas de representación (TFG)*, Universidad de Valladolid, 2021.

[Pl] D.Plank, *Closed l-ideals in a class of lattice-ordered algebras*, Illinois J. Math (1971), 515-524.

[Pu] A. Pulgarín, *Sobre la caracterización del álgebra topológica de las funciones reales y continuas sobre un espacio topológico*, Universidad de Extremadura, 2003.

[Wi] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.