



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

ANILLOS DE ARTIN Y DEFORMACIONES

Autor/a: Jose Antonio Castro Moreno

Tutor/es/as: Antonio Campillo López

Año: 2022/2023

El objetivo de este trabajo es recopilar y explicar todos los conceptos e ideas necesarios para que un alumno que acaba de terminar el grado, pueda entender tanto el contexto en el que aparece como la demostración del Teorema de Schlessinger. En este sentido, si damos por conocidas las asignaturas del grado, el texto es autocontenido a nivel lógico. Además, con el objetivo de hacer accesible el texto, salvo en casos muy claros, no se deja ninguna demostración al lector y se explicitan todos los detalles de los razonamientos hasta el final.

Para entender el Teorema de Schlessinger tenemos que introducir la teoría de deformaciones, que es el contexto original en el que surge el teorema. Aunque la teoría de deformaciones se puede explicar con variedades, sin introducir los esquemas, para enunciar y demostrar las condiciones de Schlessinger necesitamos objetos geométricos que representen la idea de un espacio de parámetros infinitesimal. Esto se consigue mediante el uso de anillos con elementos nilpotentes, que no tienen cabida en la geometría algebraica de variedades. Por tanto, para poder entender el contexto y la geometría de este problema, debemos introducir la noción de esquema. Ni la teoría de deformaciones ni los esquemas son necesarios para enunciar o demostrar el teorema de Schlessinger. Pero sin el contexto que aportan, el teorema pasa de ser una solución brillante a un problema complejo, a ser un sinsentido abstracto sobre funtores. Además, el Teorema de Schlessinger se enuncia y prueba en términos de funtores de k -álgebras Artinianas, por lo que necesitamos introducir también algunas nociones de teoría de categorías y algunas propiedades de las k -álgebras Artinianas.

Los tres primeros capítulos, Álgebra Conmutativa, Teoría de Categorías y Geometría Algebraica, son una introducción a las herramientas necesarias para los capítulos posteriores. En el primer capítulo se presentan las nociones básicas de álgebra conmutativa, que serán necesarias más adelante. Mucho del contenido de este capítulo es el propio de un primer curso de álgebra conmutativa y podría haber sido eliminado, sin embargo, dado que el temario de dicha asignatura es muy variable y no todo el mundo la ha cursado, se ha mantenido el capítulo íntegro. En el segundo capítulo se define lo que es una categoría y un funtor y se dan las propiedades universales que definen los objetos con los que vamos a tratar. En el capítulo 3 se define lo que es un esquema tratando de motivar el porqué de esta definición y cómo leer su geometría, con especial hincapié en los esquemas asociados a anillos Artinianos y su interpretación infinitesimal. Me gustaría aprovechar para agradecer a Ana Bravo, profesora de la UAM que durante una beca de verano en Madrid me enseñó a manejar e interpretar la geometría del álgebra conmutativa, lo cual ha sido clave para el desarrollo de los capítulos 1 y 3.

Tras estos tres capítulos podemos comenzar a adentrarnos en la teoría de deformaciones, dando las definiciones necesarias de deformación inducida, local e infinitesimal. Una vez entendidas estas, presentaremos las ideas de deformación formal versal y semiuniversal en términos de anillos. Disponer de esta última sería lo ideal, pues de existir codificaría toda la información sobre las deformaciones. El último capítulo está dedicado a las condiciones de Schlessinger. En él, volvemos a presentar las ideas de deformación versal y semiuniversal ahora en términos de funtores. Esto nos va a permitir llevar a cabo argumentos mucho más complejos sin tener que arrastrar toda la notación. Finalmente probaremos las condiciones de Schlessinger, donde acaba nuestro viaje.

Dado que no es hasta el capítulo 4 cuando se presenta la teoría de deformaciones, conviene tener una noción intuitiva de qué es una deformación y por qué es interesante. Esto nos permitirá saber a donde nos dirigimos y nos motivará durante los capítulos de preparación que pueden parecer desconexos. Supongamos que tenemos una hipersuperficie $X \subset \mathbb{A}^n$ dada por $f(\mathbf{x}) = 0$. Una posible deformación de esta hipersuperficie consiste en considerar la variedad $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ dada por $F(x, t)$ de tal forma que $F(x, t_0) = f(x)$. La manera de interpretar esta información es pensar en las fibras sobre cada t , dadas por $F^{-1}(\mathbb{A}^n \times \{t\}) = X_t$, como

una de las hipersuperficies que resultan de deformar X . Por ejemplo, podemos considerar una deformación donde la fibra $t = 0$ es una cúspide y las demás fibras $t \neq 0$ son nodos

$$F(x, y, t) = x^2 + ty^2 + y^3.$$

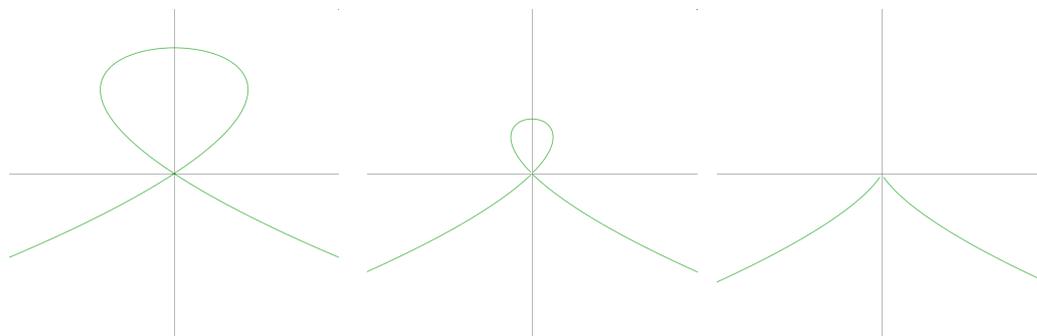


Figura 1: Fibras de la deformación para $t = -2, t = -1$ y $t = 0$.

La idea de deformación es importantísima y ubicua en la geometría pues al fin y al cabo responde a una idea muy simple, parametrizar una familia de objetos que guardan relación entre ellos y estudiar qué propiedades se pueden deducir de entenderlos como un todo y no uno a uno. Por ejemplo, si estamos estudiando un objeto muy complejo nos puede interesar deformarlo conservando ciertas propiedades y estudiar el objeto deformado en vez del original. Así, podemos convertir una variedad muy singular en una menos singular o lisa, o convertir una variedad en una variedad tórica y aprovechar las buenas propiedades de esta última. Es interesante también el estudio de familias de variedades con las mismas singularidades, denominadas deformaciones equisingulares. Dada la ubicuidad de las deformaciones en la geometría nos gustaría disponer de un objeto universal que, dada una variedad X , codificase toda la información de las deformaciones de X sin redundancia. Grothendick dio condiciones necesarias para que dentro de una teoría dicho objeto exista. Lamentablemente son muy pocos los casos en los que se verifican estas condiciones. Es necesario por tanto disponer de una noción más débil que se pueda usar cuando no exista la deformación universal. Lo mejor a lo que se puede aspirar es a la existencia de una deformación semiuniversal, que también codifica toda la información sobre las deformaciones pero de forma posiblemente redundante.

Schlessinger en su teorema da condiciones necesarias y suficientes para que exista una deformación semiuniversal **formal**. Esta deformación semiuniversal formal es el análogo a construir una solución para una ecuación diferencial como una serie de potencias, tras hallarla, hay que probar que la serie es convergente, en nuestro caso que la deformación es algebrizable. Es decir, tenemos que estudiar si la deformación semiuniversal **formal** se puede concretar en una deformación semiuniversal. En el marco algebraico, el problema de la algebrización de la deformación es extremadamente difícil y no hay muchos resultados al respecto, aunque los que existen son muy relevantes. En otros marcos como en el analítico, la existencia de una deformación semiuniversal **formal** implica la existencia de una deformación semiuniversal. Esta es otra de las virtudes del Teorema de Schlessinger, al enunciarse en términos de funtores la cantidad de contextos en los que se puede aplicar es enorme, tanto de marcos como de objetos. Se pueden deformar variedades, singularidades, morfismos, morfismos fijando el objeto de partida y/o el de llegada, etc. Además, todo esto se puede hacer considerando variedades algebraicas, analíticas, o de cualquier otro tipo. Siempre que se pueda construir el funtor de deformación, el Teorema de Schlessinger tiene cabida. Desde su publicación el Teorema de Schlessinger se ha vuelto fundamental en la teoría de deformaciones, no solo por el resultado sino por las técnicas de la demostración, en las que los anillos de Artin juegan un papel fundamental.

El artículo original de Schlessinger [10] es muy escueto y presupone que el lector conoce una gran cantidad de construcciones propias de la teoría de categorías. Tanto es así que apenas menciona las dos construcciones más importantes para la demostración del teorema. En primer lugar, cómo dotar al espacio tangente al funtor $t_{\mathcal{F}}$, de estructura de espacio vectorial, y en segundo lugar, cómo se construye una acción de $t_{\mathcal{F}}$ sobre las fibras de una aplicación $\mathcal{F}(p)$. Aunque son un poco más explícitos que Schlessinger, los libros [11] y [6] también están dirigidos a expertos en el tema, por lo que también dejan una gran cantidad de demostraciones al lector. En este texto aparecen todos los detalles de estas construcciones, que a pesar de ser tediosas, no son triviales. Tras enunciar el teorema, en la observación 5.16 se explica como las condiciones (H_0) y (H_2) permiten dotar a $t_{\mathcal{F}}$ de estructura de espacio vectorial. En la observación observación 5.18 construimos la acción de $t_{\mathcal{F}}$ y probamos que la condición (H_1) implica que esta acción es transitiva, lo cual es fundamental para la prueba. Finalmente, durante la prueba del teorema hacemos explícitos muchos argumentos que se omiten tanto en el artículo original como en la bibliografía. El tener que completar todos los detalles ha supuesto que este último capítulo, a pesar de ser aproximadamente una quinta parte del texto, ha consumido el grueso del tiempo y esfuerzo.

Índice

1. Álgebra Conmutativa	1
1.1. Primeras definiciones	1
1.2. Álgebra homológica	2
1.3. Lema de Nakayama	4
1.4. Topología I-ádica	5
1.5. Localización	7
1.6. Producto tensorial	8
1.7. Módulos planos	11
1.8. Anillos Artinianos	12
2. Teoría de Categorías	16
2.1. Introducción	16
2.2. Construcciones	20
2.3. Funtores Representables y Pro-representables	26
3. Geometría Algebraica	28
3.1. Haces	28
3.2. Spec	32
3.3. Espacio tangente y anillos de Artin	41
4. Deformaciones	46
4.1. Introducción a las deformaciones	46
4.2. Deformaciones semiuniversales	51
5. Deformación Formal	54
5.1. k-álgebras locales Noetherianas y Artinianas	54
5.2. El problema en términos de funtores	58
5.3. Condiciones de Schlessinger	61
Bibliografía	69

1. Álgebra Conmutativa

En este capítulo presentaremos los conceptos y técnicas del álgebra que vamos a usar. Durante todo el texto, usaremos la palabra anillo para referirnos a anillos conmutativos y con unidad, consecuentemente los morfismos de anillos deberán enviar el 1 en el 1. Se dan por conocidas las nociones más básicas del álgebra como ideal, anillo Noetheriano, módulo,...,etc. Los temas que aquí se tratan brevemente se pueden encontrar mucho más detallados en [9], [1] y [2].

1.1. Primeras definiciones

Vamos a comenzar dando algunas definiciones y resultados que son esenciales para lo siguiente.

Definición 1.1. Dado un ideal \mathfrak{a} de un anillo A se define el radical de \mathfrak{a} , que denotamos $\sqrt{\mathfrak{a}}$, como $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in A \mid f^n \in \mathfrak{a} \text{ para algún } n\}$.

Definición 1.2. Dado un anillo A definimos el nilradical $\sqrt{0}$ de A como el radical del ideal (0) , es decir, el ideal formado por los elementos nilpotentes de A .

Proposición 1.3. Dado un anillo A se tiene que el nilradical $\sqrt{0}$ es la intersección de todos los primos.

Demostración. Consideramos \mathfrak{P} la intersección de todos los primos de A . Si $f \in A$ es nilpotente y \mathfrak{p} es primo, entonces $f^n = 0 \in \mathfrak{p}$ y por tanto $f \in \mathfrak{p}$ por ser \mathfrak{p} primo.

Recíprocamente, si f no es nilpotente consideramos (\mathfrak{F}, \subset) el conjunto parcialmente ordenado de ideales \mathfrak{a} tales que $f^n \notin \mathfrak{a}$ para todo n . \mathfrak{F} no es vacío porque contiene al ideal 0 . Además, dada una cadena de ideales \mathfrak{a}_λ , esta tiene una cota superior que es $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}$. Veamos que \mathfrak{a} efectivamente es un ideal. Si $x, y \in \mathfrak{a}$ existen $\mathfrak{a}_{\lambda_1} \ni x$ y $\mathfrak{a}_{\lambda_2} \ni y$. Como es una cadena, uno de los dos ideales debe contener al otro y por tanto x e y están ambos en uno de los dos ideales, en el que estará también $x + y$. Probar que si $b \in \mathfrak{a}$ entonces $bx \in \mathfrak{a}$ y que $0 \in \mathfrak{a}$ es inmediato. Podemos por tanto aplicar el lema de Zorn, que nos dice que existe un elemento maximal $\mathfrak{b} \in \mathfrak{F}$. Vamos a ver que \mathfrak{b} es primo. Consideramos $x, y \notin \mathfrak{b}$, entonces los ideales $(x) + \mathfrak{b}$ e $(y) + \mathfrak{b}$ contienen a \mathfrak{b} estrictamente por lo que no están en \mathfrak{F} , es decir existen m, n con $f^m \in (x) + \mathfrak{b}$ y $f^n \in (y) + \mathfrak{b}$ de manera que $f^m = c_1x + b_1$ y $f^n = c_2y + b_2$. Entonces, el elemento $f^{n+m} = c_1c_2xy + c_1b_2x + b_1c_2y + b_1b_2 \in (xy) + \mathfrak{b}$ luego $(xy) + \mathfrak{b}$ no está en \mathfrak{F} y por tanto $(xy) \notin \mathfrak{b}$. Lo que hemos visto es que si f no es nilpotente debe existir un ideal primo \mathfrak{b} al que f no pertenece y por tanto no está en la intersección de todos los ideales primos. \square

Proposición 1.4. Dado un ideal I de un anillo A , su radical \sqrt{I} es la intersección de los ideales primos que lo contienen.

Demostración. Aplicamos la proposición anterior al anillo A/I junto con la biyección entre ideales de A/I e ideales de A que contienen a I . \square

Definición 1.5. Dado un anillo A definimos el radical de Jacobson $J(A)$ como la intersección de todos los ideales maximales de A .

Proposición 1.6. $x \in J(A)$ si y solo si $1 - xy$ es una unidad para todo $y \in A$.

Demostración. Si existe y tal que $1 - xy$ no es una unidad, el ideal generado por $(1 - xy)$ está contenido en algún maximal \mathfrak{m} , pero como $x \in J(A) \subset \mathfrak{m}$ se tiene que $(1 - xy) + xy = 1 \in \mathfrak{m}$, que es absurdo.

Si x no está en algún maximal \mathfrak{m} entonces \mathfrak{m} y x generan A . Por tanto, $1 = yx - m$ con $y \in A$ y $m \in \mathfrak{m}$. Se sigue que $1 - xy \in \mathfrak{m}$, luego no es unidad. \square

Proposición 1.7. Si $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n$ son una cantidad finita de ideales primos tales que $\bigcap_i \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ también primo entonces existe un \mathfrak{p}_i contenido en \mathfrak{p} .

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{n-1}$ no están contenidos en \mathfrak{p} . Tomamos entonces $x_n \in \mathfrak{p}_n$. Si consideramos $x_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}$ se tiene que $x_1 x_2, \dots, x_n \in \bigcap_i \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ y como \mathfrak{p} es primo alguno de los elementos de ese producto debe estar en \mathfrak{p} . Los $n - 1$ primeros no lo están luego debe ser $x_n \in \mathfrak{p}$ y por tanto $\mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{p}$. \square

Definición 1.8. Dado un anillo A se define una cadena de ideales de A como un subconjunto de los ideales de A que está totalmente ordenado para la inclusión. Es decir, una cadena de ideales en A se puede representar como $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_n$. Además se dice que esta cadena tiene longitud n , es decir, la longitud es la cantidad de inclusiones propias y no la cantidad de ideales en la cadena.

Definición 1.9. Dado un anillo A se define su dimensión $\dim(A)$ como la longitud máxima de una cadena de ideales primos en A , conviniendo que la dimensión es infinito si dicho máximo no existe. Aprovechamos para recordar que el propio A se excluye tanto de la definición de ideal primo como de la de ideal maximal.

La definición de dimensión que hemos dado se debe a Krull y hay 6 o 7 definiciones equivalentes a ella. Nosotros por comodidad nos quedaremos con esta, sin embargo resulta muy interesante ver cómo definiciones en principio tan alejadas unas de otras resultan ser equivalentes.

Definición 1.10. Un anillo A con un solo ideal maximal se denomina anillo local. A veces se denota por (A, \mathfrak{m}) , donde se entiende que la primera letra denota el anillo y la segunda el ideal maximal. Además al cuerpo $k = A/\mathfrak{m}$ se le llama cuerpo de residuos. (No confundir con el cuerpo de fracciones de un dominio A).

Definición 1.11. Dada una k -álgebra local (A, \mathfrak{m}) diremos que tiene a k como cuerpo de residuos si $(A/\mathfrak{m}) \simeq k$ y además el isomorfismo cumple que

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \text{Id} & & & \\
 & & & \curvearrowright & & & \\
 k & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/\mathfrak{m} & \longrightarrow & k.
 \end{array}$$

En otras palabras, el isomorfismo entre A/\mathfrak{m} y k manda la clase \bar{k} de un elemento del cuerpo en el propio k . Esto, que puede parecer un detalle sin importancia, va a ser muy relevante pues vamos a trabajar con morfismos de k -álgebras que deben respetar por tanto el morfismo de estructura y nos van a permitir deducir propiedades importantes.

Si $A/\mathfrak{m} \simeq k$ pero no existe un morfismo con la propiedad descrita arriba, diremos que el cuerpo de residuos de A es isomorfo a k en vez de decir que el cuerpo de residuos de A es k .

1.2. Álgebra homológica

Definición 1.12. Dada una sucesión de morfismos de A -módulos

$$\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\varphi_i} M_i \xrightarrow{\varphi_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \dots$$

decimos que esta es exacta si $\text{Im}(\varphi_i) = \text{Ker}(\varphi_{i+1})$ para todo i .

Las sucesiones exactas de morfismos son una herramienta muy útil en álgebra que permite expresar relaciones complejas de una manera visual.

Como ejemplo, dado un morfismo de anillos $\varphi : A \rightarrow B$ se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow B/\text{Im}(\varphi) \longrightarrow 0.$$

En el caso de que φ sea inyectiva se reduce a

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow B/\text{Im}(\varphi) \longrightarrow 0$$

y si φ es sobreyectiva

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0.$$

Las sucesiones exactas como estas dos últimas, que comienzan y terminan con 0 y solo tienen tres módulos no triviales, se llaman sucesiones exactas cortas. Como toda sucesión exacta de morfismos se puede separar en sucesiones exactas cortas, normalmente basta con estudiar estas.

Proposición 1.13. (El lema de los 5) Dado un diagrama conmutativo de A -módulos con filas exactas como

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_5} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_3} & B_3 & \xrightarrow{\beta_4} & B_4 & \xrightarrow{\beta_5} & B_5 \end{array}$$

si f_2 y f_4 son isomorfismos, f_1 es sobreyectiva y f_5 es inyectiva, entonces f_3 es un isomorfismo.

Demostración. Comenzamos por la inyectividad. Sea $x \in \text{Ker}(f_3)$, por ser el diagrama conmutativo se tiene que $f_4(\alpha_4(x)) = \beta_4(f_3(x)) = \beta_4(0) = 0$. Como f_4 es isomorfismo, $\alpha_4(x) = 0$ y, por ser la sucesión exacta, existe un $y \in A_2$ tal que $\alpha_3(y) = x$. Ahora, de nuevo por ser el diagrama conmutativo, $\beta_3(f_2(y)) = f_3(\alpha_3(y)) = f_3(x) = 0$, luego $f_2(y) \in \text{Ker}(\beta_3)$ y por ser las filas exactas existe $z \in B_1$ tal que $\beta_2(z) = f_2(y)$. Finalmente, al ser f_1 sobreyectiva existe t con $f_1(t) = z$. Como el diagrama conmuta, $f_2(\alpha_2(t)) = \beta_2(f_1(t)) = \beta_2(z) = f_2(y)$ y como f_2 es isomorfismo, $\alpha_2(t) = y$. Con esto hemos acabado pues, al ser la sucesión exacta, $\alpha_3(\alpha_2(t)) = 0$, pero por otro lado $\alpha_3(\alpha_2(t)) = \alpha_3(y) = x$, luego $x = 0$.

Para ver que f_3 es sobreyectiva consideramos $x \in B_3$. Como f_4 es isomorfismo, existe $y \in A_4$ tal que $f_4(y) = \beta_4(x)$. Al conmutar el diagrama sucede que $f_5(\alpha_5(y)) = \beta_5(f_4(y)) = \beta_5(\beta_4(x)) = 0$, la última igualdad se da por ser las filas exactas. Entonces, como f_5 es inyectiva $\alpha_5(y) = 0$ y, al ser las filas exactas, existe $z \in A_3$ tal que $\alpha_4(z) = y$. De nuevo por la conmutatividad del diagrama, $\beta_4(f_3(z)) = f_4(\alpha_4(z)) = f_4(y) = \beta_4(x)$, de manera que $x - f_3(z) \in \text{Ker}(\beta_4)$. Existen por tanto $t \in B_2$ con $\beta_3(t) = x - f_3(z)$ y $w \in A_2$ con $f_2(w) = t$. Se tiene que $f_3(\alpha_3(w)) = \beta_3(f_2(w)) = \beta_3(t) = x - f_3(z)$. Despejando de esta ecuación y usando la linealidad de f_3 se tiene que $f_3(\alpha_3(w) + z) = x$ y f_3 es sobreyectiva. \square

Estas demostraciones consisten básicamente en hacer en cada paso lo único que se puede hacer, lo que las hace bastante mecánicas. Tanto es así que se las conoce como “diagrama chasing” (seguir o cazar el diagrama en español). También se las suele llamar en tono irónico “abstract nonsense” (sinsentido abstracto) por el hecho de que cuando uno termina la demostración tiene la sensación de no haber obtenido ningún tipo de intuición de qué está sucediendo y sin embargo está completamente convencido de que el resultado probado es cierto.

Proposición 1.14. *Dada una sucesión exacta de A -módulos*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\phi} M_3 \longrightarrow 0$$

se tiene que M_2 es Noetheriano (Artiniano) si y solo si M_1 y M_3 son Noetherianos (Artinianos).

Demostración. Si M_2 es Noetheriano, dada una cadena ascendente $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_n \subset \dots$ de submódulos de M_1 , se tiene una cadena $\varphi(N_0) \subset \varphi(N_1) \subset \varphi(N_2) \subset \dots \subset \varphi(N_n) \subset \dots$ de submódulos de M_2 . Por tanto, debe existir n tal que $\varphi(N_n) = \varphi(N_{n+1})$. Como φ es inyectiva se tiene que $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ y por tanto $N_n = N_{n+1}$. De igual manera pero usando la sobreyectividad se prueba para M_3 .

Supongamos ahora que M_1 y M_3 son Noetherianos. Dada una cadena $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_n \subset \dots$ de submódulos de M_2 consideramos ahora la cadena $\varphi^{-1}(N_0) \subset \varphi^{-1}(N_1) \subset \varphi^{-1}(N_2) \subset \dots \subset \varphi^{-1}(N_n) \subset \dots$ de submódulos de M_1 y la cadena $\phi(N_0) \subset \phi(N_1) \subset \phi(N_2) \subset \dots \subset \phi(N_n) \subset \dots$ de submódulos de M_3 . Como ambos son Noetherianos, eligiendo un n suficientemente grande se tiene que $\varphi^{-1}(N_n) = \varphi^{-1}(N_{n+1})$ y $\phi(N_n) = \phi(N_{n+1})$. Podemos construir entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \varphi^{-1}(N_n) & \xrightarrow{\varphi} & N_n & \xrightarrow{\phi} & \phi(N_n) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow Id & & \downarrow i & & \downarrow Id & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \varphi^{-1}(N_{n+1}) & \xrightarrow{\varphi} & N_{n+1} & \xrightarrow{\phi} & \phi(N_{n+1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Las filas del diagrama son exactas por ser el diagrama original exacto. Los morfismos verticales, salvo el central, son todos la identidad y por tanto isomorfismos. Podemos aplicar entonces el lema de los 5 y obtener que la inclusión de N_n en N_{n+1} es un isomorfismo y por tanto $N_n = N_{n+1}$. \square

1.3. Lema de Nakayama

El lema de Nakayama es una herramienta fundamental del álgebra conmutativa y por tanto de la geometría algebraica. Aunque su enunciado más general habla de ideales contenidos en el radical de Jacobson $J(A)$ se suele aplicar principalmente a anillos locales (A, \mathfrak{m}) donde todos los ideales están contenidos en $J(A) = \mathfrak{m}$. Bajo el apodo lema de Nakayama se recogen varios enunciados diferentes que pueden o no ser equivalentes. De igual manera, en este texto cuando nos refiramos al lema de Nakayama será al propio lema o a cualquiera de sus corolarios.

Proposición 1.15. *Sea M un A -módulo finitamente generado y \mathfrak{a} un ideal de A tal que $\mathfrak{a}M = M$. Entonces, existe $y \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ tal que $yM = 0$.*

Demostración. Consideramos x_1, x_2, \dots, x_n generadores de M . Como $M = \mathfrak{a}M$ se tiene que deben existir coeficientes $b_{ij} \in \mathfrak{a}$ tales que

$$x_i = \sum b_{ij} x_j.$$

En forma matricial esta ecuación se puede escribir como $B\mathbf{x} = \mathbf{x}$ o equivalentemente $(B - Id)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si multiplicamos a la izquierda por la adjunta de la matriz $(B - Id)$ obtenemos $\det(B - Id)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Nótese que la construcción de la adjunta solo requiere de sumas y productos por lo que no supone ningún problema a pesar de trabajar en un anillo y no en un cuerpo. Solo falta ver que $\det(B - Id) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$. Los coeficientes de la matriz $(B - Id)$ están todos en \mathfrak{a} salvo los elementos diagonales, por tanto, nos basta con ver qué sucede con el término del determinante que resulta de multiplicar los elementos diagonales. Este término es

de la forma $\prod(b_{ii} - 1)$. Expandiendo el producto, el único término que no está en \mathfrak{a} es el que resulta del producto de los -1 por tanto $\det(B - Id) \equiv \pm 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ y nos basta con tomar $y = \pm \det(B - Id)$. \square

Proposición 1.16. (*Lema de Nakayama*) Sea M un A -módulo finitamente generado y $\mathfrak{a} \subset J(A)$ un ideal de A , entonces $\mathfrak{a}M = M$ implica que $M = 0$.

Demostración. Por la proposición anterior existe y tal que $yM = 0$ y además $y \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$, es decir, $y = 1 + a$ con $a \in \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a} \subset J(A)$ entonces $a \in J(A)$ y la caracterización de los elementos de $J(A)$ nos dice que $1 + a = y$ es una unidad. Entonces, $M = y^{-1}yM = y^{-1}(yM) = y^{-1}0 = 0$. \square

Proposición 1.17. Sea M un A -módulo finitamente generado, $N \subset M$ un submódulo y $\mathfrak{a} \subset J(A)$ un ideal. Si $M = \mathfrak{a}M + N$ entonces $M = N$.

Demostración. Consideramos el módulo M/N que es finitamente generado por serlo M . Se tiene entonces que

$$M/N = (\mathfrak{a}M + N)/N = (\mathfrak{a}M)/N = \mathfrak{a}(M/N).$$

Aplicando la proposición anterior se obtiene que $M/N = 0$ y por tanto $M = N$. \square

En un anillo local (A, \mathfrak{m}) un A -módulo $M/\mathfrak{m}M$ tiene además estructura de $(A/\mathfrak{m} = k)$ -espacio vectorial. El producto por escalar dado por $\bar{a} \cdot \bar{m} = \overline{am}$ (cuidado con dónde se toma cada clase) está bien definido pues dados $a_1 \sim a_2$ y $m_1 \sim m_2$ se tiene que

$$a_1m_1 - a_2m_2 = a_1m_1 - a_2m_2 + a_1m_2 - a_1m_2 = (a_1 - a_2)m_2 + a_1(m_1 - m_2).$$

Entonces, como $a_1 \sim a_2$ se tiene $(a_1 - a_2) \in \mathfrak{m}$ y por tanto $(a_1 - a_2)m_2 \in \mathfrak{m}M$. Por otro lado, como $m_1 \sim m_2$ entonces $(m_1 - m_2) \in \mathfrak{m}M$, por tanto, $(a_1 - a_2)m_2 + a_1(m_1 - m_2) \in \mathfrak{m}M$ y la operación está bien definida. Esta estructura de $(A/\mathfrak{m} = k)$ -espacio vectorial es muy importante en geometría algebraica y en álgebra conmutativa, haremos mas hincapié en ello en el capítulo 3. De momento nos quedamos con algunos resultados útiles de la cara algebraica.

Proposición 1.18. Dado (A, \mathfrak{m}) un anillo local y M un A -módulo finitamente generado, si los elementos m_1, m_2, \dots, m_n de M son tales que $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n$ generan $M/\mathfrak{m}M$ como A/\mathfrak{m} -módulo, entonces los m_i generan M como A -módulo. En particular, si tomamos \bar{m}_i una base de $M/\mathfrak{m}M$ obtenemos un sistema de generadores minimal de A .

Demostración. Consideramos N el A -módulo generado por los elementos m_i . Ahora como los \bar{m}_i generan $M/\mathfrak{m}M$ como A/\mathfrak{m} -módulo, se tiene que dado $m \in M$ existen $a_i \in A$ tales que $\bar{m} = \sum \bar{a}_i \bar{m}_i$. Que estas dos clases de equivalencia sean iguales significa que existe $y \in \mathfrak{m}M$ tal que $m = y + \sum a_i m_i$, por tanto $M = N + \mathfrak{m}M$ y aplicando la proposición anterior obtenemos $M = N$. \square

1.4. Topología I-ádica

Definición 1.19. Dado un ideal I de un anillo A y un A -módulo M consideramos los submódulos

$$M \supseteq IM \supseteq I^2M \supseteq \dots \supseteq I^nM \supseteq \dots$$

Podemos definir entonces una base o sistema fundamental de entornos abiertos de cada punto $x \in M$ como $\mathcal{B} = \{x + I^nM \mid x \in M\}$. La topología que definen estos entornos recibe el nombre

de topología I -ádica del A -módulo M . Nótese que estos entornos no son más que las clases de equivalencia módulo $I^n M$.

Proposición 1.20. *La colección de entornos definidos arriba son, efectivamente, una base de entornos de una topología.*

Demostración. Si $x \in (y + I^{n_1} M) \cap (z + I^{n_2} M)$, tomamos $n = \max\{n_1, n_2\}$ y es inmediato comprobar que $x \in x + I^n M \subset y + I^n M \cap z + I^n M$. Además dado $y \in x + I^n M$ se cumple que $y + I^n M \subset x + I^n M$. La primera condición nos permite asegurar que el conjunto formado por uniones de estos conjuntos es una topología y la segunda que efectivamente estos conjuntos son una base de entornos abiertos de la topología así definida. \square

Nótese que el propio A es un A -módulo, de manera que tiene sentido considerar en él la topología I -ádica.

Vamos ahora a probar una serie de resultados que nos van a ayudar a entender mejor esta topología.

Proposición 1.21. *La suma $+$: $M \times M \rightarrow M$ y el producto por un escalar \cdot : $A \times M \rightarrow M$ son continuos con la topología I -ádica. En particular $(M, +)$ es un grupo topológico y $(A, +, \cdot)$ es un anillo topológico.*

Demostración. Para cualquier punto (x, y) y cualquier entorno básico de su imagen $U = (x + y) + I^n M$ podemos tomar un entorno $V = (x + I^n M) \times (y + I^n M)$ del punto (x, y) de manera que la imagen de V está contenida en U y por tanto la aplicación es continua.

De manera análoga, dado (a, x) y un entorno básico de su imagen $U = ax + I^n M$, podemos considerar $V = (a + I^n) \times (x + I^n M)$ que es un entorno de (a, x) y tiene su imagen contenida en U . \square

Proposición 1.22. *La topología I -ádica es Hausdorff si y solo si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = 0$.*

Demostración. Si la topología es Hausdorff, como $I^n M$ es una base de entornos de 0, dado cualquier $x \in M$ existe un m tal que $x \notin I^m M$ y por tanto $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M$. Recíprocamente, si $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = 0$, dados $x \neq y$ se tiene que $x + \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = x$ luego existe un m tal que $y \notin x + I^m M$ y por tanto necesariamente $x \notin y + I^m M$, además $x + I^m M \cap y + I^m M = \emptyset$ luego el espacio es Hausdorff. \square

Definición 1.23. *Dado un A -módulo M con la topología I -ádica se dice que una sucesión a_n de elementos de M es de Cauchy si para cada $k \in \mathbb{N}$, existe n_0 tal que $(a_n - a_m) \in I^k M$ para todo $n, m > n_0$.*

Definición 1.24. *Dado un A -módulo M con la topología I -ádica se dice que M es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Ejemplo 1.25. *Si consideramos el anillo de polinomios $K[x]$, la sucesión $f_0(x) = 1$; $f_1(x) = 1 + x$; $f_2(x) = 1 + x + x^2$; $f_k(x) = \sum_{n=0}^k x^n$ es claramente de Cauchy, pues si $n > m$, $(f_n - f_m) \in (x)^m$. Sin embargo, el límite de esta sucesión, que es la serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, no está en el anillo $K[x]$ que por tanto no es completo. Se puede probar que el anillo de series formales $K[[x]]$ es completo y de hecho es lo que vamos a definir como anillo completado respecto de la topología (x) -ádica de $K[x]$. Para quien esté familiarizado con ellos, los enteros p -ádicos \mathbb{Z}_p son el completado de \mathbb{Z} con respecto a la topología generada por el ideal (p) y sin embargo guardan entre ellos una relación diferente a la que hay entre $K[x]$ y $K[[x]]$.*

Definición 1.26. Dado un anillo A con la topología I -ádica, consideramos \hat{A} el conjunto de sucesiones de Cauchy de A y definimos la relación de equivalencia dada por: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ si la sucesión $x_n - y_n$ converge a 0. Si definimos la suma y el producto coordenada a coordenada \hat{A} es un anillo. La demostración es completamente análoga a la que se realiza cuando se define \mathbb{R} como el conjunto de las sucesiones de Cauchy de \mathbb{Q} con esta misma relación de equivalencia.

Este anillo además contiene a A como subanillo mediante el morfismo dado por

$$\begin{aligned} \phi : A &\longrightarrow \hat{A} \\ a &\longrightarrow (a, a, \dots, a, \dots). \end{aligned}$$

Definición 1.27. Un anillo A para el cual la aplicación ϕ antes definida es isomorfismo se denomina anillo completo.

Hasta aquí hemos dado una noción topológica de lo que es el completado de un anillo. Como es habitual en matemáticas, hay una construcción equivalente, en este caso desde el punto de vista algebraico. Manejar ambas definiciones va a resultar clave en la demostración del Teorema de Schlessinger. Sin embargo, debemos esperar al segundo capítulo, donde introduciremos algunas nociones de teoría de categorías como el límite inverso, para ver la definición algebraica y la equivalencia entre ellas.

1.5. Localización

Definición 1.28. Dado A un anillo y S un conjunto multiplicativamente cerrado (incluyendo el producto vacío, es decir el 1), se define la localización de A en S como el conjunto $A \times S$ junto con la relación de equivalencia $(a_1, s_1) = (a_2, s_2)$ si existe $h \in S$ tal que $h(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$. Este conjunto se denota como $S^{-1}A$ y sus pares como $\frac{a_1}{s_1}$. Si además se consideran en $S^{-1}A$ las operaciones suma definida como $\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2}$ y producto definido como $\frac{a_1}{s_1} \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2}$, $S^{-1}A$ tiene estructura de anillo cuyo 0 es $\frac{0}{1}$ y su 1 es $\frac{1}{1}$.

Comprobar que estas operaciones están bien definidas junto con las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, mas allá de ser extremadamente tedioso, no aporta nada. Nos limitamos a comentar que para probar que el producto está bien definido hay que usar el clásico truco de sumar y restar un producto cruzado.

Conviene remarcar que en el caso de que S no contenga ningún divisor de 0 la condición de que exista $h \in S$ tal que $h(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$ es equivalente a que $(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$, que es la condición usual para \mathbb{Q} . El porqué de la aparición de h en la definición es el hecho de que un divisor de 0 nunca puede ser una unidad, por tanto, si $f \in S$ es tal que $fg = 0$, al añadir el inverso de f estamos obligando a g a ser 0 pues queremos que $\frac{fg}{f} = \frac{g}{1}$ y también que $\frac{fg}{f} = \frac{0}{f} = \frac{0}{1}$. Estas dos condiciones nos dicen que debería ser $\frac{g}{1} = \frac{0}{1}$, sin embargo no sucede que $1 \cdot g - 0 \cdot 1 = 0$. Es por esto que debemos añadir h en la definición. En este caso tendríamos $h = f$ y $f(g - 0) = 0$.

Ejemplo 1.29. El primer ejemplo consiste en tomar $S = \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$. Si por ejemplo $A = \mathbb{R}[x, y]$ y f es irreducible, $S^{-1}\mathbb{R}[x, y]$ es el conjunto de cocientes de polinomios cuyo denominador se anula en la curva f . Veremos más adelante que este anillo se corresponde justamente con las funciones racionales que están bien definidas en el complemento del conjunto de ceros de f . Esta construcción es muy frecuente, por lo que se suele abreviar la notación y referirse a $S^{-1}A$ simplemente como A_f .

Ejemplo 1.30. Dado que ningún ideal propio contiene al 1 no podemos localizar en los ideales. Sin embargo, si \mathfrak{p} es un ideal primo su complemento $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es multiplicativamente cerrado, pues si $f, g \notin \mathfrak{p}$ entonces $fg \notin \mathfrak{p}$, y podemos localizar en S . Al contrario que en el ejemplo anterior, si $A = \mathbb{R}[x, y]$ y tomamos $\mathfrak{p} = (f)$, que es primo por ser f irreducible, el anillo que resulta es el de cocientes de polinomios cuyo denominador no se anula en la curva que define f . Este anillo se corresponde por tanto con las funciones racionales de la curva en \mathbb{R} . Este anillo también aparece con frecuencia y tiene notación especial $A_{\mathfrak{p}}$. En mi opinión es una notación contradictoria el hecho de que A_f sea localizar en f y $A_{\mathfrak{p}}$ localizar en el complemento de \mathfrak{p} , sin embargo esta notación está universalmente extendida y por tanto la vamos a mantener.

Este segundo ejemplo es el que le da a la localización su nombre. Cuando localizamos en el complemento de un ideal primo obtenemos un anillo que nos da información de lo que sucede en el conjunto de ceros de ese ideal. La intuición detrás de esto es que al transformar todos los elementos que no están en \mathfrak{p} en unidades, de alguna manera pierden la complejidad de las relaciones entre ellos que les aporta el hecho de no ser invertibles, quedando solo en el anillo la estructura debida a \mathfrak{p} . Es decir el anillo $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local con ideal maximal \mathfrak{p} .

Definición 1.31. Dado un morfismo entre dos anillos $\varphi : A \rightarrow B$ y \mathfrak{p} un ideal primo de B , podemos considerar la localización del morfismo en \mathfrak{p} , que es el morfismo $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$ definido como $\varphi_{\mathfrak{p}}(a/f) = \varphi(a)/\varphi(f)$.

Para comprobar que este morfismo está bien definido, en primer lugar comprobamos que si $f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ entonces $\varphi(f) \notin \mathfrak{p}$ y por tanto la imagen efectivamente está en $B_{\mathfrak{p}}$. Para comprobar que no depende del representante, tomamos $a/f \sim b/g$ es decir, existe $h \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ tal que $h(ag - bf) = 0$. Entonces, $\varphi(h) \notin \mathfrak{p}$ y $\varphi(h)[\varphi(a)\varphi(g) - \varphi(b)\varphi(f)] = 0$, luego está bien definido. Para ver que respeta la suma, el producto, el cero y el uno se razona igual usando el hecho de que φ es morfismo.

Proposición 1.32. Dado un morfismo $f : A \rightarrow B$ y $S \subset A$ multiplicativamente cerrado, si para todo $s \in S$ se tiene que $f(s)$ es una unidad en b , entonces existe un único \tilde{f} tal que $\tilde{f} \circ i = f$, donde i es la inclusión de A en la localización.

Demostración. Si \tilde{f} es un morfismo se tiene que cumplir que $f(1) = f(s \cdot s^{-1}) = f(s)f(s^{-1})$. Por tanto, la única opción es definir $f(s^{-1})$ como $f(s)^{-1}$. Una vez definido el morfismo en los inversos de s , la imagen de cualquier elemento de $S^{-1}A$ queda determinada. Es sencillo comprobar que \tilde{f} así definido es un morfismo. \square

1.6. Producto tensorial

El producto tensorial de dos A -álgebras M, N es un objeto, $M \otimes N$, que nos permite transformar biunívoca y linealmente aplicaciones bilineales que salen del producto cartesiano $B : M \times N \rightarrow R$, en aplicaciones lineales que salen de $M \otimes N$. El producto tensorial es increíblemente útil y sirve para formalizar conceptos matemáticos muy diferentes. Uno de los ejemplos más bonitos que hay de su uso es la construcción del invariante de Dehn para un poliedro, que caracteriza completamente cuándo un poliedro puede transformarse en otro mediante cortes rectos y pegados (problema de Hilbert número 3). Más en la línea de este trabajo, como veremos más adelante, el producto tensorial de anillos está relacionado con el producto fibrado de variedades y por tanto sirve para formalizar la idea de pegar dos variedades a lo largo de una subvariedad común. En términos del producto tensorial se enuncia también la noción de módulo plano y morfismo plano, que es la noción técnica que permite formalizar la idea de deformación.

Definición 1.33. Dados M y N A -módulos, se define el A -módulo producto tensorial como

$M \otimes N = A^{M \times N} / R$, donde $A^{M \times N}$ es el A -módulo libre que tiene como base los elementos de $M \times N$. Es decir, un elemento de $A^{M \times N}$ es una combinación lineal finita de la forma $\sum_{i=1}^n a_i \cdot (m_i, n_i)$. R es el submódulo generado por elementos de la forma:

$$(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)$$

$$(m_1, m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)$$

$$a \cdot (m, n) - (am, n)$$

$$a \cdot (m, n) - (m, an).$$

La clase de (m, n) en el producto tensorial se denota como $m \otimes n$. De la definición se sigue que los elementos de la forma $m \otimes n$ son un sistema de generadores de $M \otimes N$ y que se cumplen las relaciones:

$$m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$$

$$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$$

$$a(m \otimes n) = (am) \otimes n = m \otimes (an).$$

Estas relaciones nos aseguran que la aplicación $\pi : M \times N \rightarrow M \otimes N$ definida como $\pi(m, n) = m \otimes n$ es A -bilineal.

Vamos a probar ahora la propiedad universal que caracteriza al producto tensorial.

Proposición 1.34. *El par $(M \otimes N, \pi)$ cumple que dada una aplicación A -bilineal $g : M \times N \rightarrow B$, existe un único morfismo de A -módulos $f : M \otimes N \rightarrow B$ de tal manera que g factoriza a través de π , es decir, $g = f \circ \pi$. Además, para cualquier otro par formado por un A -módulo P y aplicación A -bilineal $\tau : M \times N \rightarrow P$ cumpliendo esta propiedad, existe un único isomorfismo entre $h : P \rightarrow M \otimes N$ que cumple $\pi \circ h = \tau$.*

Demostración. Dado que $A^{M \times N}$ tiene como base los elementos de $M \times N$, podemos definir a partir de g una única aplicación bilineal $\tilde{g} : A^{M \times N} \rightarrow B$ tal que $\tilde{g}(m, n) = g(m, n)$. Para ver que esta aplicación “pasa al cociente” necesitamos asegurarnos de que se anula en los elementos de R , pero los elementos de R son justamente aquellos en los que debe anularse una aplicación bilineal como g , de manera que la aplicación $f : M \otimes N \rightarrow B$ dada por $f(m \otimes n) = g(m, n)$ está bien definida y obviamente cumple que $g = f \circ \pi$. Además, es la única pues si queremos que se cumpla $g = f \circ \pi$ debemos definir $f(\pi(m, n)) = f(m \otimes n) = g(m, n)$, pero como estos elementos son un sistema de generadores determinan f completamente.

Si existiese otro par (P, τ) con esta propiedad, aplicando la propiedad a $M \otimes N$ con $g = \tau$ existe un único f tal que $\tau = f \circ \pi$. Aplicándosela a P con $g = \pi$ se tiene que existe un único \tilde{f} con $\pi = \tilde{f} \circ \tau$. Sustituyendo una igualdad en la otra se obtiene $\pi = \tilde{f} \circ f \circ \pi$. Aplicando una vez más la propiedad probada para $M \otimes N$ con $g = \pi$, la unicidad nos dice que $\tilde{f} \circ f = Id$. Igualmente se prueba que $f \circ \tilde{f} = Id$ y por tanto son isomorfismos. \square

Es muy importante darse cuenta de que la notación $M \otimes N$ es ambigua pues M y N pueden ser módulos sobre varios anillos y el producto tensorial depende del anillo que estemos considerando ya que cocientaremos por unas relaciones u otras. Debido a esto, se suele denotar debajo del símbolo \otimes sobre qué anillo consideramos los módulos. En el caso de la definición escribiríamos $M \otimes_A N$.

Proposición 1.35. *Si los elementos m_i y n_j generan M y N como A -módulos entonces los elementos $m_i \otimes n_j$ generan $M \otimes N$ como A -módulo.*

Demostración. Un elemento de $M \otimes N$ es de la forma $\sum_k a_k(x_k \otimes y_k)$ con $x_k \in M$ e $y_k \in N$. Ahora, todos los x_k se pueden expresar como una combinación lineal finita de los m_i y los y_k de los n_j . Se tiene entonces que $\sum_k a_k(x_k \otimes y_k) = \sum_k a_k(\sum_i \lambda_{ik}m_i) \otimes (\sum_j \mu_{jk}n_j) = \sum_k = \sum_i a_k \lambda_{ik}(m_i \otimes (\sum_j \mu_{jk}n_j)) = \sum_k \sum_i \sum_j a_k \lambda_{ik} \mu_{jk}(m_i \otimes n_j)$. \square

Ejemplo 1.36. En muchas ocasiones el producto tensorial de dos módulos resulta ser el módulo 0. Esto nos dice que los morfismos de estructura de ambos no son compatibles a la hora de definir una aplicación bilineal. Como ejemplo vamos a ver que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$. Los elementos de la forma $(\frac{a}{b} \otimes c)$ son un sistema de generadores por lo que si todos ellos son 0 habremos acabado. Usando las relaciones que definen el producto tensorial se tiene que $(\frac{a}{b} \otimes c) = (n\frac{a}{bn} \otimes c) = n(\frac{a}{bn} \otimes c) = (\frac{a}{bn} \otimes nc) = \frac{a}{bn} \otimes 0 = 0 \otimes 0$.

De manera completamente análoga a la construcción que hemos hecho para dos módulos y aplicaciones bilineales, se puede hacer la misma construcción para una cantidad finita arbitraria n de módulos y aplicaciones n -lineales. Se obtiene así un módulo $M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_n$ con la propiedad universal de que cualquier aplicación n -lineal que salga de $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ factoriza de manera única a través del producto tensorial y además este módulo es único salvo isomorfismo único.

Proposición 1.37. Dados tres A -módulos M, N, P se tiene que:

- I) $M \otimes N \simeq N \otimes M$. Además, el isomorfismo es único si pedimos que $f(x \otimes y) = (y \otimes x)$.
- II) $(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes (N \otimes P) \simeq M \otimes N \otimes P$. Además, el isomorfismo es único si pedimos que $f((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z$.
- III) $A \otimes M \simeq M$. Además, el isomorfismo es único si pedimos que $f(a \otimes x) = ax$.

Demostración. Dado que las tres demostraciones se basan en la misma idea, vamos a hacer solo la correspondiente a II) por ser la más complicada de todas. Lo único que hay que hacer en la demostración es probar que las aplicaciones definidas por las condiciones impuestas en el enunciado son verdaderamente morfismos, una vez hecho eso es automático que uno es el inverso del otro.

Fijamos $z \in P$ y definimos el morfismo $f : M \times N \rightarrow M \otimes N \otimes P$ como $f(x, y) = x \otimes y \otimes z$. Este morfismo es bilineal y por tanto factoriza a través de $M \otimes N$, es decir, existe un morfismo $f_z : M \otimes N \rightarrow M \otimes N \otimes P$ dado por $f_z(x \otimes y) = x \otimes y \otimes z$. Podemos entonces construir la aplicación $g : (M \otimes N) \times P \rightarrow M \otimes N \otimes P$ dada por $g(t, z) = f_z(t)$. Esta aplicación es bilineal y de nuevo induce un morfismo $h : (M \otimes N) \otimes P \rightarrow M \otimes N \otimes P$ dado por $h((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z$. Para construir el morfismo inverso definimos $\mu : M \times N \times P \rightarrow (M \otimes N) \otimes P$ como $\mu(x, y, z) = (x \otimes y) \otimes z$. Como esta aplicación es trilineal define un morfismo $\tau : M \otimes N \otimes P \rightarrow (M \otimes N) \otimes P$ dado por $\tau(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$. Como h y τ son claramente inversos el uno del otro, son isomorfismos. \square

Definición 1.38. Dados dos anillos A y B un (A, B) -bimódulo es un A -módulo M que es también un B -módulo M de tal manera que las estructuras son compatibles, es decir, $a(bx) = b(ax)$ para todo $a \in A$ $b \in B$ y $x \in M$.

Dados dos anillos A, B , un A -módulo M , un B -módulo P y un (A, B) -bimódulo N se puede dotar a $M \otimes_A N$ de estructura de B -módulo con el producto $b(m \otimes n) = (m \otimes bn)$. Por tanto, $M \otimes_A N$ es también un bimódulo pues las dos estructuras son compatibles al serlo la de N . De igual modo, se puede dotar a $N \otimes_B P$ de estructura de bimódulo. Finalmente, dado que $M \otimes_A N$ es un bimódulo podemos repetir la construcción anterior y dotar a $(M \otimes_A N) \otimes_B P$ de estructura de A -módulo haciendo $a((x \otimes_A y) \otimes_B z) = (a(x \otimes_A y)) \otimes_B z$. Es decir, $(M \otimes_A N) \otimes_B P$

es también un bimódulo, de igual manera se puede proceder con $M \otimes_A (N \otimes_B P)$ que pasa a ser también un bimódulo.

Proposición 1.39. *Los módulos $(M \otimes_A N) \otimes_B P$ y $M \otimes_A (N \otimes_B P)$ que acabamos de construir son isomorfos como (A, B) -bimódulos.*

Demostración. Al igual que en la proposición anterior, la demostración consiste en comprobar que los morfismos que queremos definir efectivamente lo son. En este caso, está la dificultad añadida de probar la multilinealidad de las aplicaciones que vamos a definir. Consideramos $f : (M \otimes_A N) \times P \longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P)$ definida por $f(x \otimes y, z) = x \otimes_A (y \otimes_B z)$. Vamos a comprobar la B -bilinealidad de esta aplicación. La comprobación de que respeta la suma es inmediata, y respeta el producto en ambas entradas pues

$$f(b(x \otimes_A y), z) = f(x \otimes_A by, z) = x \otimes_A (by \otimes_B z) = x \otimes_A b(y \otimes_B z) = b(x \otimes_A (y \otimes_B z)) = bf(x \otimes_A y, z)$$

$$f(x \otimes_A y, bz) = x \otimes_A (y \otimes_B bz) = x \otimes_A b(y \otimes_B z) = b(x \otimes_A (y \otimes_B z)) = bf(x \otimes_A y, z)$$

.

Por tanto, esta aplicación B -bilineal induce un morfismo de $(M \otimes_A N) \otimes_B P$ en $M \otimes_A (N \otimes_B P)$ dado justamente por $g((x \otimes_A y) \otimes_B z) = x \otimes_A (y \otimes_B z)$. Faltaría construir el morfismo inverso de este y los dos morfismos que nos dan el isomorfismo como A -módulos. Todos ellos se construyen de manera análoga y no tiene sentido extenderse más con la prueba. \square

Dadas B y C A -álgebras el producto tensorial $B \otimes_A C$ tiene, además de estructura de A -módulo, estructura de A -álgebra.

Definición 1.40. *Dadas dos A -álgebras $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow C$ se define el A -álgebra $B \otimes_A C$ dada por el morfismo de estructura*

$$\varphi : A \longrightarrow B \otimes_A C$$

$$\varphi(a) = f(a) \otimes 1 = 1 \otimes g(a)$$

y el producto

$$(b_1 \otimes c_1)(b_2 \otimes c_2) = (b_1 b_2 \otimes c_1 c_2).$$

El producto se define solo para tensores puros y se extiende a combinaciones lineales de estos mediante la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, propiedad que se cumple entonces por definición. Dicho esto, es inmediato comprobar que para cualquiera de las igualdades de la definición 1.33 el producto no depende del representante y por tanto está bien definido. Comprobar esto junto con todas las demás propiedades de la definición de A -álgebra es rutinario.

1.7. Módulos planos

Definición 1.41. *Dado un A -módulo M diremos que M es un A -módulo plano si para cualquier morfismo inyectivo de A -módulos $f : N_1 \longrightarrow N_2$ se tiene que el morfismo $f \otimes Id : N_1 \otimes M \longrightarrow N_2 \otimes M$ es también inyectivo.*

Proposición 1.42. *Si M es un A -módulo plano y tenemos $\varphi : A \longrightarrow B$ entonces $M \otimes_A B$ es un B -módulo plano.*

Demostración. Dados dos B -módulos N_1, N_2 y un morfismo inyectivo entre ellos f queremos ver que el morfismo

$$Id_{(M \otimes_A B)} \otimes f : (M \otimes_A B) \otimes_B N_1 \longrightarrow (M \otimes_A B) \otimes_B N_2$$

es inyectivo. Como B es un bimódulo, aplicando la proposición 1.39 y la proposición 1.37 se deduce que $(M \otimes_A B) \otimes_B N_i \simeq M \otimes_A (B \otimes_B N_i) \simeq M \otimes_A N_i$. Esto nos da el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes_A B) \otimes_B N_1 \mu_1 & \xrightarrow{Id_{(M \otimes_A B)} \otimes f} & (M \otimes_A B) \otimes_B N_2 \mu_2 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ M \otimes_A N_1 & \xrightarrow{g} & M \otimes_A N_2. \end{array}$$

Además, como conocemos la forma de los isomorfismos podemos hallar g explícitamente.

$$\begin{aligned} g(m \otimes n) &= \mu_2 \circ (Id_{(M \otimes_A B)} \otimes f) \circ \mu_1^{-1}(m \otimes n) = \\ &= \mu_2 \circ (Id_{(M \otimes_A B)} \otimes f)(m \otimes 1 \otimes n) = \mu_2(m \otimes 1 \otimes f(n)) = m \otimes f(n) \end{aligned}$$

. Es decir, $g = Id_A \otimes f$ que, por ser M un A -módulo plano, es inyectivo. Si g es inyectivo el diagrama anterior nos dice que $Id_{M \otimes_A B} \otimes f$ también lo es y por tanto $M \otimes_A B$ es un B -módulo plano. \square

Definición 1.43. Dado un morfismo de anillos $\varphi : A \longrightarrow B$ diremos que φ es un morfismo plano si B es un A -módulo plano con el morfismo de estructura φ .

1.8. Anillos Artinianos

Damos por conocida la noción de A -módulo Noetheriano y sus caracterizaciones clásicas. Nos centraremos en este punto en caracterizar los A -módulos de Artin o Artinianos. Antes de comenzar recordamos que si consideramos A como A -módulo los submódulos de A son los ideales.

Definición 1.44. Se dice que un A -módulo M es Artiniano si cualquier cadena infinita de submódulos descendente es estacionaria. Es decir, si dada una cadena de submódulos

$$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n \supset \dots$$

existe un n_0 tal que $M_n = M_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$.

Proposición 1.45. Si M es un A -módulo Artiniano y N es un submódulo de M entonces M/N es Artiniano.

Demostración. Una cadena $\overline{M_0} \supset \overline{M_1} \supset \overline{M_2} \supset \dots \supset \overline{M_n} \supset \dots$ de submódulos en M/N se corresponde con el paso al cociente de una cadena $M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n \supset \dots$ de submódulos de M que contienen a N . Como M es Artiniano, $M_n = M_{n+1}$ de un n en adelante y por tanto $\overline{M_n} = \overline{M_{n+1}}$. \square

Dos de las características más importantes de los anillos Artinianos son las siguientes.

Proposición 1.46. Si A es Artiniano todo ideal primo de A es maximal. En particular, $\sqrt{0} = J(A)$.

Demostración. Dado \mathfrak{p} un ideal primo de A , A/\mathfrak{p} es un dominio de integridad Artiniano. Si consideramos $x \neq 0$, se tiene que los ideales generados por las potencias de x forman una cadena descendente $(x^n) \supset (x^{n+1})$, por tanto, existe un n tal que $(x^n) = (x^{n+1})$, lo que quiere decir que $x^n = x^{n+1}y$ con $y \in A/\mathfrak{p}$, y, puesto que A/\mathfrak{p} es un dominio, esto implica que $xy = 1$ y por tanto x es una unidad. Como cualquier elemento no nulo x es una unidad, A/\mathfrak{p} es un cuerpo y por tanto \mathfrak{p} es maximal. \square

Proposición 1.47. *Si A es Artiniano entonces tiene una cantidad finita de ideales maximales.*

Demostración. Consideramos \mathcal{I} el conjunto de los ideales que son intersección finita de ideales maximales, es decir, $\mathcal{I} = \{\mathfrak{a} \subset A \mid \mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_r\}$, junto con la relación de orden \subset . La condición de que A sea Artiniano nos dice que cualquier cadena de \mathcal{I} tiene una cota inferior en A . Por tanto, el Lema de Zorn nos asegura que existe un elemento minimal en \mathcal{I} . Sea $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n$ ese elemento minimal. Veamos que entonces estos son todos los ideales de A . Dado cualquier ideal maximal \mathfrak{m} se tiene que $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ por la maximalidad de \mathfrak{b} . Esto significa que $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n$, lo que implica que $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_i$ para algún i y como son ideales maximales, necesariamente $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$. \square

Proposición 1.48. *Si A es Artiniano entonces el nilradical $\sqrt{0}$ de A es nilpotente.*

Demostración. Por ser A Artiniano existirá k tal que $(\sqrt{0})^k = (\sqrt{0})^{k+1}$. A partir de ahora, nos referiremos a este ideal como \mathfrak{a} . Supongamos contra nuestra hipótesis que $\mathfrak{a} \neq 0$. Consideramos entonces (\mathfrak{F}, \subset) el conjunto parcialmente ordenado de ideales \mathfrak{b} tales que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq 0$. Este conjunto es no vacío pues $\mathfrak{a}\sqrt{0} = \mathfrak{a} \neq 0$, luego $\sqrt{0} \in \mathfrak{F}$. Por ser A Artiniano cualquier cadena en \mathfrak{F} tiene una cota inferior. El lema de Zorn nos dice entonces que existe \mathfrak{c} minimal en \mathfrak{F} . Como $\mathfrak{c} \in \mathfrak{F}$, existe $x \in \mathfrak{c}$ tal que $x\mathfrak{a} \neq 0$ pero entonces $(x)\mathfrak{a} \neq 0$ y por la minimalidad de \mathfrak{c} debe ser $(x) = \mathfrak{c}$. Se tiene también $(x\mathfrak{a})\mathfrak{a} = (x)\mathfrak{a}^2 = (x)\mathfrak{a} \neq 0$. Por tanto, de nuevo por minimalidad $(x)\mathfrak{a} = (x)$, esto quiere decir que $x \in (x)\mathfrak{a}$ y por tanto existe $y \in \mathfrak{a}$ tal que $x = xy$ lo que implica que $x = xy^n$ para cualquier n . Finalmente, recordamos que $y \in \mathfrak{a} = (\sqrt{0})^k \subset \sqrt{0}$ y por tanto existe m tal que $y^m = 0$. Esto implica que $x = xy^m = 0$, es decir $(x) = \mathfrak{c} = 0$. Sin embargo, por estar en \mathfrak{F} debería ser $\mathfrak{c}\mathfrak{a} \neq 0$ y hemos llegado a una contradicción al suponer $(\sqrt{0})^k \neq 0$. \square

Pudiera parecer que la condición de ser Artiniano es otro tipo de condición de finitud similar a la condición de ser Noetheriano. La realidad es que la condición de ser Artiniano es mucho más fuerte que la de ser Noetheriano. Nuestro objetivo ahora es probar esto y para ello necesitamos introducir algunos conceptos y proposiciones.

Si \mathfrak{a} es un ideal de A y M es un A -módulo tal que $\mathfrak{a}M = 0$, entonces M es un (A/\mathfrak{a}) -módulo con el producto $\bar{x}m = xm$. Este producto está claramente bien definido pues, si $a \in \mathfrak{a}$, se tiene $am = 0$ y entonces $(x+a)m = xm + am = xm$. De igual manera, si M es un (A/\mathfrak{a}) -módulo también es un A -módulo sin más que definir $am = \bar{a}m$. Por tanto, si tenemos un A -módulo M y un ideal \mathfrak{a} tal que $\mathfrak{a}M = 0$, entonces M será Noetheriano (Artiniano) como A -módulo si y solo si lo es como A/\mathfrak{a} -módulo.

Proposición 1.49. *Para un k -espacio vectorial V son equivalentes:*

- I) V tiene dimensión finita.
- II) Es Noetheriano como k -módulo.
- III) Es Artiniano como k -módulo.

Demostración. I) \implies II) y III) es directo. Si V tiene dimensión finita, una cadena de submódulos, es decir subespacios vectoriales, tiene a lo sumo una cantidad finita de elementos diferentes pues, en cada contención de la cadena, la dimensión de los espacios vectoriales tiene que aumentar o disminuir en al menos una unidad. Al estar la dimensión de los subespacios acotada, solo puede haber una cantidad finita en una cadena.

Para ver II) o III) \implies I) usamos el contrarrecíproco. Si V tiene dimensión infinita, existen $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ linealmente independientes. Entonces, los submódulos V_n generados por (x_1, x_2, \dots, x_n) y U_n generados por $(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, \dots)$ son cadenas ascendente y descendente no estacionarias. \square

Proposición 1.50. *Si A es un anillo en el que el ideal 0 es un producto de ideales maximales (no necesariamente distintos), $0 = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \dots \mathfrak{m}_n$. Entonces, A es Noetheriano si y solo si es Artiniano.*

Demostración. Consideramos para cada $i = 2, 3, \dots, n$ el (A/\mathfrak{m}_i) -módulo

$$M_i = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \dots \mathfrak{m}_{i-1} / \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \dots \mathfrak{m}_i.$$

Como A/\mathfrak{m}_i es un cuerpo, la proposición anterior nos dice que M_i es Artiniano si y solamente si es Noetheriano. Además, como $\mathfrak{m}_i M_i = 0$, se tiene que M_i es Noetheriano o Artiniano como A -módulo si y solamente si lo es como A/\mathfrak{m}_i -módulo. Por tanto, los M_i son A -módulos Noetherianos si y solamente si son Artinianos. Por último, vamos a ver que los M_i son Noetherianos si y solamente si A lo es, y que los M_i son Artinianos si y solamente si A lo es. Tendremos entonces que para los M_i ambas condiciones son equivalentes y equivalentes además a que lo sea A . Por tanto, A será Noetheriano si y solamente si es Artiniano. Vamos a ver esta última parte.

Si A es Noetheriano o Artiniano, está claro que los M_i lo son, pues son cocientes de submódulos de A . Si los M_i son todos Noetherianos podemos construir la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \dots \mathfrak{m}_i \longrightarrow \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \dots \mathfrak{m}_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow 0.$$

Para $i = n$, el primer término de la sucesión es 0 y el tercero es M_n . Aplicando la proposición 1.14 se deduce que $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \dots \mathfrak{m}_{i-1}$ es Noetheriano, es decir, para $i = n - 1$ el primer término de la sucesión es Noetheriano. Como M_{i-1} lo es por hipótesis, $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \dots \mathfrak{m}_{i-2}$ es Noetheriano. Iterando este proceso llegamos a que \mathfrak{m}_1 es Noetheriano y entonces consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_1 \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{m}_1 \longrightarrow 0$$

donde \mathfrak{m}_1 y A/\mathfrak{m}_1 son Noetherianos. Este último lo es por ser un cuerpo, y por tanto lo es A . De igual manera, se prueba que si todos los M_i son Artinianos también lo es A . \square

Proposición 1.51. *Si \mathfrak{a} es un ideal radical y el producto $xy \in \mathfrak{a}$, entonces $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a} + (x)} \cap \sqrt{\mathfrak{a} + (y)}$.*

Demostración. Que \mathfrak{a} está contenido en la suma de esos dos ideales es obvio pues $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \subset \sqrt{\mathfrak{a} + (x)}$. Si $z \in \sqrt{\mathfrak{a} + (x)} \cap \sqrt{\mathfrak{a} + (y)}$ significa que existen $a_1, a_2 \in \mathfrak{a}$ y $c_1, c_2 \in A$ tales que $z^n = a_1 + c_1 x$ y $z^m = a_2 + c_2 y$. Entonces $z^{n+m} = a_1 a_2 + a_1 c_2 y + a_2 c_1 x + c_1 c_2 xy \in \mathfrak{a}$ y como es un ideal radical, $z \in \mathfrak{a}$. \square

Proposición 1.52. *En un anillo Noetheriano A cualquier ideal radical es intersección de una cantidad finita de primos.*

Demostración. Vamos a razonar por reducción al absurdo junto con el lema de Zorn. Consideramos (\mathfrak{F}, \subset) el conjunto parcialmente ordenado de los ideales radicales de A que no son intersección de una cantidad finita de primos. Si negamos nuestro resultado, este conjunto es no vacío. Además, por ser el anillo Noetheriano, cualquier cadena de \mathfrak{F} debe tener una cota superior. El lema de Zorn nos asegura entonces que existe un elemento maximal \mathfrak{a} para \subset en \mathfrak{F} . El ideal \mathfrak{a} no puede ser primo pues sería intersección de primos y no podría ser un elemento de \mathfrak{F} . Podemos encontrar entonces $x, y \notin \mathfrak{a}$ tales que $xy \in \mathfrak{a}$. Aplicando el resultado anterior obtenemos $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a} + (x)} \cap \sqrt{\mathfrak{a} + (y)}$. Como \mathfrak{a} es maximal en \mathfrak{F} , tanto $\sqrt{\mathfrak{a} + (x)}$ como $\sqrt{\mathfrak{a} + (y)}$ deben ser intersección finita de primos, pero entonces \mathfrak{a} también lo es. Llegamos así a un absurdo al suponer que \mathfrak{F} era no vacío. \square

Proposición 1.53. *Si A es Noetheriano entonces cualquier ideal \mathfrak{a} de A cumple que existe un m tal que $(\sqrt{\mathfrak{a}})^m \subset \mathfrak{a}$.*

Demostración. Supongamos que x_1, x_2, \dots, x_k generan $\sqrt{\mathfrak{a}}$, existen por tanto r_i tales que $x_i^{r_i} \in \mathfrak{a}$. Consideramos $m = \sum r_i$, entonces el ideal $(\sqrt{\mathfrak{a}})^m$ está generado por los monomios de la forma $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ donde $\sum n_i = m$. Por cómo hemos definido m se tiene que para cada posible elección de los n_i siempre existe un i tal que $n_i \geq r_i$. Para este índice, $x_i^{n_i} \in \mathfrak{a}$ y por tanto el monomio está en \mathfrak{a} . Como esto pasa para cada uno de los monomios, $(\sqrt{\mathfrak{a}})^m \subset \mathfrak{a}$. \square

Como corolario inmediato se tiene que en un anillo Noetheriano el nilradical es nilpotente.

Proposición 1.54. *Un anillo A es Artiniano si y solo si es Noetheriano y su dimensión es 0.*

Demostración. Si A es Artiniano sus ideales primos son maximales, por tanto, no se puede construir una cadena de más de 1 ideal primo y entonces su dimensión es 0. Consideramos \mathfrak{m}_i los ideales maximales de A . Como en un anillo Artiniano el nilradical es nilpotente, existe k tal que $\prod \mathfrak{m}_i^k \subset (\cap \mathfrak{m}_i)^k = J(A)^k = (0)$. Por tanto, el ideal (0) es producto de maximales y por la proposición 1.50, A es Noetheriano por ser Artiniano.

Supongamos A Noetheriano y de dimensión 0. Como $\sqrt{0}$ es un ideal radical, existe una cantidad finita de ideales primos \mathfrak{p}_i tales que $\sqrt{0} = \bigcap \mathfrak{p}_i$. Vamos a probar que estos son todos los ideales primos de A . Dado \mathfrak{p} primo, como $(0) \subset \mathfrak{p}$, entonces $\sqrt{0} \subset \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ de manera que $\bigcap \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$. Esto implica que existe un i tal que $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$, pero como A tiene dimensión 0, necesariamente $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$. Además, también por tener dimensión 0, estos primos son todos maximales. Se tiene entonces que $\sqrt{0} = \bigcap \mathfrak{m}_i$ y de nuevo existe un m tal que $\prod \mathfrak{m}_i^m \subset (\cap \mathfrak{m}_i)^m = (\sqrt{0})^m = (0)$. Al igual que antes, A es Noetheriano si y solo si es Artiniano. \square

Proposición 1.55. *Si (A, \mathfrak{m}) es un anillo Noetheriano local entonces se da una de las dos siguientes condiciones excluyentes:*

- I) $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ para todo n .
- II) $\mathfrak{m}^n = 0$ para algún n y entonces A es Artiniano.

Demostración. Supongamos que no se cumple I). Entonces, existe un n tal que $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$, pero aplicando el lema de Nakayama se tiene que $\mathfrak{m}^n = (0)$. Para ver que es Artiniano, vamos a ver que tiene dimensión 0. Si \mathfrak{p} es un ideal primo de A entonces $\mathfrak{m}^n = (0) \subset \mathfrak{p}$. Tomando radicales obtenemos $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$. Por la maximalidad de \mathfrak{m} se tiene que $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ y por tanto solo hay un ideal primo \mathfrak{m} , luego la dimensión es 0. La proposición anterior nos dice que A es Artiniano. \square

2. Teoría de Categorías

2.1. Introducción

La teoría de categorías es una teoría matemática relativamente moderna, mediados del siglo XX, que se fija en el hecho de que en prácticamente cualquier área de las matemáticas se tienen unos objetos de interés y unas transformaciones válidas entre ellos, morfismos. La teoría de categorías desprovee a estas teorías de sus detalles finos y se fija en las conclusiones que se pueden obtener si miramos solo a los objetos, morfismos y las relaciones que entre ellos surgen. Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar cómo esta teoría, aparte de ser un lenguaje unificado para muchas teorías matemáticas, es también una herramienta que puede resultar muy útil.

Hasta la publicación de la paradoja de Rusell en 1901, era generalmente aceptado que dada una proposición lógica existía un conjunto que contenía a todos los elementos que verificaban esta condición. Esto conducía irremediabilmente a paradojas que terminarían siendo solucionadas con la axiomática de conjuntos de Zermelo Fraenkel. En esta teoría, las condiciones para crear un conjunto son mucho más restrictivas y evitan paradojas como la de Rusell. Sin embargo, esta teoría nos priva de poder considerar conjuntos que parecen inofensivos como “el conjunto de todos los espacios topológicos” y con los cuales nos gustaría trabajar. Es por esto que surge la noción de clase, una clase es una colección de conjuntos que cumplen un predicado. De esta manera, podemos hablar de la clase de todos los espacios topológicos sin ningún problema de incurrir en contradicciones o paradojas, pues una clase solo puede contener conjuntos y no a otras clases. Estas clases son el marco perfecto para la teoría de categorías que busca justamente trabajar con colecciones de objetos como “todos los conjuntos” o “todos los anillos conmutativos”.

Por último, antes de comenzar remarcar que cuando escribamos $A \in \mathcal{C}$ siendo \mathcal{C} una clase, queremos decir que A es uno de los conjuntos de la colección \mathcal{C} y en ningún caso debe interpretarse como que A es un elemento del conjunto \mathcal{C} , pues \mathcal{C} no es un conjunto. También cuando escribamos $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ nos referiremos a que cada conjunto de la clase \mathcal{B} está en la clase \mathcal{A} .

Definición 2.1. Una categoría $(\mathcal{A}, \mathcal{M}, \circ)$ consiste en una clase \mathcal{A} de objetos y una clase \mathcal{M} de morfismos o flechas f que salen de un objeto $A \in \mathcal{A}$, que llamaremos dominio de f , $Dom(f)$ y llegan a otro objeto $B \in \mathcal{A}$, que llamaremos codominio de f , $Cod(f)$. Toda esta información se expresa de la manera habitual $f : A \rightarrow B$. Finalmente, \circ es una operación que actúa exclusivamente en pares de morfismos (f, g) que cumplen que $Cod(g) = Dom(f)$ y nos da un morfismo $h = f \circ g$ cumpliendo $Dom(h) = Dom(g)$ y $Cod(h) = Cod(f)$. Además, para que esta clase sea una categoría se tiene que cumplir que:

I) Para todo objeto $A \in \mathcal{A}$ existe un morfismo $Id_A : A \rightarrow A$ cumpliendo que para todo $f : B \rightarrow A$ se tiene $Id_A \circ f = f$ y para todo $g : A \rightarrow B$ se tiene $g = g \circ Id_A$. Este morfismo se llama la identidad de A .

II) La operación \circ es asociativa, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Si tenemos una categoría $(\mathcal{B}, \mathcal{G}, *)$ de manera que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$ y $\circ|_{\mathcal{G}} = *$, se dice que $(\mathcal{B}, \mathcal{G}, *)$ es una subcategoría de $(\mathcal{A}, \mathcal{M}, \circ)$. Además, habitualmente denotaremos la categoría con el símbolo que hace referencia a la clase de los objetos.

Ejemplo 2.2. La clase de todos los espacios topológicos junto con las aplicaciones continuas definen la categoría de espacios topológicos, que denotaremos Top . La clase de todos los anillos junto con los morfismos de anillos define la categoría de anillos, que denotaremos \mathcal{R} . La clase de todos los conjuntos y las aplicaciones de conjuntos definen la categoría de conjuntos, que

vamos a denotar $\mathcal{S}ets$.

Como siempre en matemáticas, al presentar una teoría se dan los objetos de interés, en este caso categorías, y después se dan las transformaciones entre ellos. En el caso de la teoría de categorías las transformaciones son los funtores.

Definición 2.3. Un funtor covariante \mathcal{F} entre dos categorías $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ y $(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ es una asignación que asocia a cada objeto de \mathcal{A} un objeto de \mathcal{B} y cada morfismo $f \in \mathcal{M}$ un morfismo $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{N}$ cumpliendo que:

$$I) \mathcal{F}(Id_A) = Id_{\mathcal{F}(A)}.$$

$$II) \mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g).$$

Ejemplo 2.4. El ejemplo más sencillo de funtor es el funtor de olvido, que va de una subcategoría $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ en la categoría \mathcal{A} y simplemente se olvida de la estructura adicional que tenían los objetos de \mathcal{B} . Por ejemplo, tenemos el funtor de olvido entre $Top \subset \mathcal{S}ets$ y que envían un espacio topológico (X, τ) en el conjunto subyacente X . Bajo la acción de este funtor, la recta real con la topología usual y la recta real con la topología de Sorgenfrey tienen la misma imagen, que es \mathbb{R} como conjunto. Otro ejemplo de funtor olvido es el funtor entre la categoría de variedades riemannianas y la categoría de variedades diferenciales, lo que hace aquí el funtor es olvidarse de que la variedad tiene una métrica.

Ejemplo 2.5. El primer ejemplo de funtor que nos da información relevante es Π_1 , el funtor asociado al primer grupo fundamental de un espacio topológico. Este funtor va de la categoría de espacios topológicos puntuados, esto es, un espacio topológico con un punto destacado, en la categoría de grupos. Haciendo uso de este funtor se puede probar que no existe ninguna aplicación continua del disco unidad \mathbb{D} en la esfera unidad \mathbb{S}^1 .

Definición 2.6. Un funtor contravariante \mathcal{F} entre dos categorías $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ y $(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ es una asignación que asocia a cada objeto $A \in \mathcal{A}$ un objeto $\mathcal{F}(A) \in \mathcal{B}$ y cada morfismo $f \in \mathcal{M}$ un morfismo $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{N}$ con la particularidad de que se invierten el dominio y codominio. Si el morfismo f va de A en B el morfismo $\mathcal{F}(f)$ va de $\mathcal{F}(B)$ en $\mathcal{F}(A)$. Las propiedades que debe cumplir son análogas pero invirtiendo el orden de composición para que tenga sentido:

$$I) \mathcal{F}(Id_A) = Id_{\mathcal{F}(A)}.$$

$$II) \mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f).$$

Ejemplo 2.7. Los funtores contravariantes son igual de frecuentes que los covariantes, el uso de unos u otros es una cuestión de necesidad. Por ejemplo, si consideramos la categoría de anillos \mathcal{R} , fijado un anillo A podemos construir un funtor $Hom(-, A)$ que envía un anillo B en el anillo $Hom(B, A)$ de morfismos de B en A . Si tenemos un morfismo de anillos $f : B \rightarrow C$ y queremos asociarle un morfismo $Hom(-, A)(f)$ no hay ninguna manera razonable de definir la actuación de este morfismo sobre un elemento $\varphi \in Hom(B, A)$. La información que tendríamos sería la siguiente

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow \varphi & \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

con la cual no hay nada que hacer.

Sin embargo, si invertimos la dirección del morfismo y tratamos de definir $\text{Hom}(-, A)(f)$ de $\text{Hom}(C, A)$ en $\text{Hom}(B, A)$, la construcción es inmediata y natural. Dado $\psi \in \text{Hom}(C, A)$ se define $\text{Hom}(-, A)(f)(\psi) = \psi \circ f$

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow \psi \circ f & \uparrow \psi \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

A parte de como ejemplo, este functor junto con $\text{Hom}(A, -)$ definido de manera análoga, nos serán útiles más adelante.

Definición 2.8. Dadas dos categorías \mathcal{A} y \mathcal{B} se dice que son isomorfas si existen funtores $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $\mathcal{D} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ tales que $\mathcal{F} \circ \mathcal{D} = \text{Id}_{\mathcal{B}}$ y $\mathcal{D} \circ \mathcal{F} = \text{Id}_{\mathcal{A}}$, donde $\text{Id}_{\mathcal{A}}$ y $\text{Id}_{\mathcal{B}}$ son los funtores identidad.

La noción de categorías isomorfas es muy restrictiva y raramente sucede que dos categorías sean isomorfas. Aparece entonces la noción de categorías equivalentes, que es menos restrictiva que la de categorías isomorfas pero es igualmente útil. Para dar esta noción primero tenemos que decir qué entendemos por un morfismo entre dos funtores.

Definición 2.9. Dados dos funtores \mathcal{F} y \mathcal{G} entre las categorías \mathcal{A} y \mathcal{B} , un morfismo de funtores τ entre \mathcal{F} y \mathcal{G} consiste en dar para cada objeto $A \in \mathcal{A}$ un morfismo $\tau_A : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A)$ entre las imágenes de A por los dos funtores de manera que, dado un morfismo de \mathcal{A} , $f : A \rightarrow B$, el siguiente diagrama commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\tau_A} & \mathcal{G}(A) \\ \downarrow \mathcal{F}(f) & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\tau_B} & \mathcal{G}(B) \end{array}$$

Es interesante remarcar aquí que, para cada A , τ_A es un morfismo de \mathcal{B} . Además, solo hace falta definir τ para los objetos de la imagen de \mathcal{F} no para todos los objetos de la categoría \mathcal{B} .

Ejemplo 2.10. Vamos a construir ahora con todo detalle dos ejemplos de funtores y un homomorfismo entre ellos. Consideramos la categoría de anillos \mathcal{R} y la categoría \mathcal{G} de grupos. El hecho de que son categorías es inmediato.

Definimos dos funtores $GL_n(\cdot)$ y $\mathcal{U}(\cdot)$ de la categoría \mathcal{R} en la categoría \mathcal{G} .

El primer functor envía un anillo A en el grupo de matrices invertibles $n \times n$ con coeficientes en A , $GL_n(A)$, y un morfismo de anillos $f : A \rightarrow B$ en el morfismo de grupos, $\tilde{f} : GL_n(A) \rightarrow GL_n(B)$, que consiste en aplicar f a cada entrada de la matriz. Veamos que efectivamente es un functor.

Hay que comprobar que \tilde{f} es un homomorfismo de grupos. Esto se deduce del hecho de que al ser f morfismo de anillos respeta la suma y el producto, veámoslo. Dadas matrices $M, N, P \in GL_n(A)$ tales que $M \cdot N = P$ se cumple que

$$\tilde{f}(P) = f(p_{ij}) = f\left(\sum_{k=1}^n m_{ik}n_{kj}\right) = \sum_{k=1}^n f(m_{ik})f(n_{kj}) = \tilde{f}(M) \cdot \tilde{f}(N).$$

Ahora hay que comprobar que el functor manda la identidad en la identidad y respeta la composición. Lo primero es trivial y lo segundo se deduce de

$$\widetilde{f \circ g}(A) = (f \circ g)(a_{ij}) = f(g(a_{ij})) = \tilde{f} \circ \tilde{g}(A).$$

El funtor \mathcal{U} envía un anillo A en su grupo de unidades $\mathcal{U}(A)$ y un morfismo de anillos $f : A \rightarrow B$ en la restricción $f|_{\mathcal{U}(A)}$. Esta restricción es morfismo de grupos por serlo f de anillos y la comprobación de que el funtor respeta la composición y la identidad es de nuevo inmediata.

Vamos ahora a construir un homomorfismo $\tau : GL_n(\cdot) \rightarrow \mathcal{U}(\cdot)$. Tenemos que dar para cada anillo A un morfismo de grupos τ_A de $GL_n(A)$ en $\mathcal{U}(A)$. Este morfismo va a ser el determinante

$$\begin{aligned} \tau_A : GL_n(A) &\longrightarrow \mathcal{U}(A) \\ M &\longrightarrow \text{Det}(M). \end{aligned}$$

Vamos a comprobar que efectivamente el siguiente diagrama conmuta y por tanto $\text{Det}()$ será un homomorfismo de funtores

$$\begin{array}{ccc} GL_n(A) & \xrightarrow{\text{Det}} & \mathcal{U}(A) \\ \downarrow \tilde{f} & & \downarrow f \\ GL_n(B) & \xrightarrow{\text{Det}} & \mathcal{U}(B). \end{array}$$

La comprobación de que el diagrama conmuta es idéntica a la de que \tilde{f} respeta el producto. Como en el determinante solo hay involucradas sumas y productos y f es un homomorfismo de anillos, da igual aplicar f a cada entrada y calcular el determinante que calcular el determinante y luego aplicar f .

Por tanto, Det es un morfismo entre los funtores $GL_n(-)$ y \mathcal{U} que además ejemplifica la observación antes hecha de que no necesitamos definir el morfismo para todos los objetos de la categoría. El morfismo Det no tiene sentido para la inmensa mayoría de los grupos, sin embargo, está perfectamente definido para los grupos de matrices donde está contenida la imagen de \mathcal{F} . Por último, aunque en rigor el homomorfismo Det es una aplicación distinta dependiendo de los espacios de salida y llegada y deberíamos llamarlas de manera diferente, con el objetivo de no recargar la notación, cuando tengamos un morfismo de funtores denotaremos a cualquiera de los τ_A simplemente como τ .

Definición 2.11. Dadas dos categorías \mathcal{A} y \mathcal{B} , dos funtores entre ellas \mathcal{F} y \mathcal{D} y un morfismo de funtores $\tau : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{D}$, se dice que es un isomorfismo de funtores si para cada objeto $A \in \mathcal{A}$ se tiene que el morfismo τ_A es un isomorfismo de la categoría \mathcal{B} . En este caso se dice que los funtores son isomorfos, $\mathcal{F} \simeq \mathcal{D}$.

Definición 2.12. Se dice que dos categorías \mathcal{A} y \mathcal{B} son equivalentes si existen funtores covariantes \mathcal{F} y \mathcal{D} tales que $\mathcal{F} \circ \mathcal{D} \simeq \text{Id}_{\mathcal{B}}$ y $\mathcal{D} \circ \mathcal{F} \simeq \text{Id}_{\mathcal{A}}$. Si los funtores son contravariantes hablamos de antiequivalencia o equivalencia dual.

Un ejemplo extremadamente sencillo nos permite ver por qué esta definición es mucho más natural que la de categorías isomorfas.

Ejemplo 2.13. Consideremos dos categorías \mathcal{A} y \mathcal{B} . Los objetos de \mathcal{A} van a ser pares (V, B_V) , donde V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{R} y B_V es una base ordenada de V . \mathcal{B} va a consistir en la colección de espacios vectoriales \mathbb{R}^n con $n \geq 0$. Nos gustaría que estas dos categorías fuesen isomorfas, sin embargo, la enorme cantidad de objetos que hay en la primera nos lo impide. Definimos $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ que envía (V, B_V) en $(\mathbb{R}^{\dim(V)}, B_c)$, donde B_c es la base canónica, y envía una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ en la aplicación lineal $\mathcal{F}(f)$, que tiene la misma matriz en las bases canónicas de los \mathbb{R}^n que en las bases B_V y B_W . Definimos el funtor \mathcal{D} que envía \mathbb{R}^n en (\mathbb{R}^n, B_c) . En contra de lo que pueda parecer, estos funtores no nos dan una equivalencia, pues si tomamos $\mathbb{R}[x]/(x^2)$ se tiene que $\mathcal{D}(\mathcal{F}(\mathbb{R}[x]/(x^2))) = \mathbb{R}^2$. Hay

demasiados objetos en la categoría \mathcal{A} a los que queremos hacer corresponder uno solo de la categoría \mathcal{B} , lo que impide que la composición de los funtores sea la identidad. Sin embargo, sí podemos hacer que estas categorías sean equivalentes, basta definir el morfismo de funtores τ entre $Id_{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{D} \circ \mathcal{F}$ como el isomorfismo que manda la base B_V de (V, B_V) en la base canónica de $\mathbb{R}^{Dim(V)}$. Esto nos arregla el problema, pues $\mathcal{D} \circ \mathcal{F}$ es isomorfo a $Id_{\mathcal{A}}$ mediante τ y $\mathcal{F} \circ \mathcal{D}$ es propiamente el funtor $Id_{\mathcal{B}}$.

2.2. Construcciones

La teoría de categorías solo nos permite demostrar y trabajar con propiedades categóricas, esto es, propiedades que se pueden enunciar exclusivamente en términos de morfismos y objetos sin hacer ningún tipo de referencia a la estructura subyacente a los objetos de la categoría. La ventaja de esto es que los funtores nos permiten traspasar esta información entre las categorías. Los objetos definidos mediante una propiedad universal son objetos categóricos pues no requieren más que la noción de morfismo para ser definidos. Las definiciones mediante propiedades universales no nos aseguran la existencia de estos objetos, solo nos dicen qué propiedades los caracterizan. En esta sección vamos a definir y probar que existen una serie de objetos universales que van a ser necesarios a lo largo de la demostración del Teorema de Schlessinger.

Definición 2.14. *Dados dos objetos A y B de una categoría \mathcal{C} , se define el producto denotado por $A \times B$ como un objeto que cumple lo siguiente:*

Existen dos morfismos $pr_1 : A \times B \rightarrow A$ y $pr_2 : A \times B \rightarrow B$ cumpliendo que dados otros dos morfismos $f_1 : Y \rightarrow A$ y $f_2 : Y \rightarrow B$ existe un único morfismo $f : Y \rightarrow A \times B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y & & \\
 & \swarrow f_1 & \vdots f & \searrow f_2 & \\
 A & \xleftarrow{pr_1} & A \times B & \xrightarrow{pr_2} & B.
 \end{array}$$

Definición 2.15. *Dados dos objetos A y B de una categoría \mathcal{C} , se define el coproducto $A \coprod B$ como un objeto que cumple lo siguiente:*

Existen dos morfismos $i_1 : A \rightarrow A \coprod B$ e $i_2 : B \rightarrow A \coprod B$ cumpliendo que dados otros dos morfismos cualesquiera $f_1 : A \rightarrow Y$ y $f_2 : B \rightarrow Y$ existe un único morfismo $f : A \coprod B \rightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y & & \\
 & \swarrow f_1 & \vdots f & \nwarrow f_2 & \\
 A & \xrightarrow{i_1} & A \coprod B & \xleftarrow{i_2} & B.
 \end{array}$$

Esta dualidad entre producto y coproducto se extiende a todas las definiciones de objetos universales. Invertiendo el sentido de los morfismos en las definiciones se obtiene el objeto dual, al que se le añade el prefijo co-.

Definición 2.16. Dado un diagrama conmutativo, como el siguiente, en una categoría \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{pr_1} & B \\ pr_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ C & \xrightarrow{f_2} & D \end{array}$$

se dice que este cuadrado es cartesiano si dado cualquier otro objeto L en \mathcal{C} y otro par de morfismos $j_1 : L \rightarrow B$ y $j_2 : L \rightarrow C$ que también hacen el diagrama conmutativo, existe un único morfismo $\mu : L \rightarrow A$ tal que $pr_1 \circ \mu = j_1$ y $pr_2 \circ \mu = j_2$. Es decir, el morfismo punteado del siguiente diagrama conmutativo existe y es único

$$\begin{array}{ccccc} L & & & & \\ & \searrow \mu & & & \\ & & A & \xrightarrow{pr_1} & B \\ & & pr_2 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ & & C & \xrightarrow{\pi_2} & D. \end{array}$$

Definición 2.17. Dados dos morfismos $f_1 : B \rightarrow D$ y $f_2 : C \rightarrow D$ en \mathcal{C} , se define el producto fibrado $C \times_D B$ del par de morfismos como un objeto de \mathcal{C} que cumple lo siguiente:

Existen $pr_1 : C \times_D B \rightarrow B$ y $pr_2 : C \times_D B \rightarrow C$ de tal manera que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C \times_D B & \xrightarrow{pr_1} & B \\ pr_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ C & \xrightarrow{f_2} & D \end{array}$$

es conmutativo y cartesiano. Nótese que la notación $C \times_D B$ solo tiene sentido si se sabe cuales son los morfismos f_1 y f_2 .

Para que tenga sentido hablar del producto fibrado y no de un producto fibrado, necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 2.18. El producto fibrado es único salvo isomorfismo único.

Demostración. Supongamos que tanto A junto con pr_1 y pr_2 como L junto con j_1 y j_2 hacen que el diagrama sea cartesiano. Primero aplicamos la condición de ser cartesiano al diagrama formado dos copias de A con los morfismos pr_1 y pr_2

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & \\ & \searrow Id & & & \\ & & A & \xrightarrow{pr_1} & B \\ & & pr_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ & & C & \xrightarrow{f_2} & D. \end{array}$$

Como $Id : A \rightarrow A$ cumple que $pr_k \circ Id = pr_k$, si A es cartesiano debe ser el único morfismo con esta propiedad. Ahora por hacer L y A el diagrama cartesiano existen dos morfismos únicos $\mu : L \rightarrow A$ y $\lambda : A \rightarrow L$ tales que $pr_k \circ \mu = j_k$ y $j_k \circ \lambda = pr_k$. Si sustituimos una de estas condiciones en la otra, se obtiene $pr_k \circ \mu \circ \lambda = pr_k$. Esto quiere decir que el morfismo $g = \mu \circ \lambda$ es un morfismo de A en A que cumple que $pr_k \circ g = pr_k$, pero el único morfismo con esta propiedad es Id luego $\mu \circ \lambda = Id$. Razonando igual con L se llega a que $\lambda \circ \mu$ también es

la identidad y por tanto μ y λ son isomorfismos. Si existiese un isomorfismo τ distinto de μ cumpliría que $pr_k \circ \tau = j_k$ y por ser el diagrama cartesiano debería ser $\mu = \tau$. \square

Este esquema de demostración que hemos usado para ver que el producto fibrado es único salvo isomorfismo único es el mismo que se usa para probar que cualquier objeto universal es único salvo isomorfismo único. De aquí en adelante se dará por entendido, aunque no se diga, que estas construcciones son únicas salvo isomorfismo único.

Proposición 2.19. *En la categoría $\mathcal{S}ets$ el producto fibrado existe y viene dado por el conjunto $C \times_D B = \{(c, b) \in C \times B \mid f_1(b) = f_2(c)\}$. Los morfismos pr_1 y pr_2 son las proyecciones restringidas a este subconjunto que acabamos de definir.*

Demostración. Que el diagrama formado por los morfismos que acabamos de definir junto con f_1 y f_2 es conmutativo es obvio. Solo resta probar que dado L y morfismos j_1 y j_2 que hacen el diagrama conmutativo existe un único μ con las propiedades de la definición. Este μ es el morfismo de $\mu : L \rightarrow C \times_D B$ definido como $\mu(l) = (f_2(c), f_1(b))$. Es obvio que $pr_i \circ \mu = j_i$ y que μ es único porque la propiedad $pr_i \circ \mu = j_i$ define completamente el morfismo μ . \square

Proposición 2.20. *En la categoría de anillos \mathcal{R} existe el producto fibrado $C \times_D B$ que tiene como conjunto base el producto fibrado de conjuntos y las operaciones definidas componente a componente.*

Demostración. Este conjunto es cerrado para la suma y producto y por tanto es un subanillo del anillo producto. Efectivamente, dados (c_1, b_1) y (c_2, b_2) se tiene que $(c_1 + c_2, b_1 + b_2)$ es un elemento del conjunto, pues $f_2(c_1 + c_2) = f_2(c_1) + f_2(c_2) = f_1(b_1) + f_1(b_2) = f_1(b_1 + b_2)$. Análogamente se comprueba para el producto. El morfismo μ es el mismo que para los conjuntos y para probar que es un morfismo de anillos solo hay que usar que j_1 y j_2 lo son. De nuevo, como las proyecciones de un elemento del producto lo definen por completo, la propiedad $pr_i \circ \mu = j_i$ hace que μ sea único. \square

Definición 2.21. *Dado un diagrama conmutativo en una categoría \mathcal{C}*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & B \\ f_2 \downarrow & & \downarrow i_1 \\ C & \xrightarrow{i_2} & D \end{array}$$

se dice que este cuadrado es cocartesiano si dado cualquier otro objeto Z en \mathcal{C} y otro par de morfismos $\tau_1 : B \rightarrow Z$ y $\tau_2 : C \rightarrow Z$ que también hacen el diagrama conmutativo, existe un único morfismo $s : D \rightarrow Z$ tal que $s \circ i_1 = \tau_1$ y $s \circ i_2 = \tau_2$. Es decir, el morfismo punteado del siguiente diagrama conmutativo existe y es único

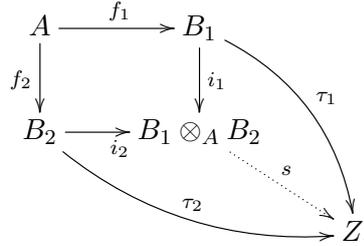
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & B \\ f_2 \downarrow & & \downarrow i_1 \\ C & \xrightarrow{i_2} & D \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau_1} \\ \xrightarrow{\tau_2} \\ \xrightarrow{s} \end{array} Z$$

Definición 2.22. *Dados dos morfismos $f_1 : A \rightarrow B$ e $f_2 : A \rightarrow C$ en \mathcal{C} , se define la suma amalgamada o pushout, $B \sqcup_A C$, del par de morfismos, como un objeto de \mathcal{C} que cumple que:*

Existen $i_1 : B \rightarrow B \sqcup_A C$ e $i_2 : C \rightarrow B \sqcup_A C$ de tal manera que el diagrama que forman junto con f_1 y f_2 es conmutativo y cocartesiano.

Proposición 2.23. *Dados dos morfismos en la categoría de anillos \mathcal{R} , $f_1 : A \rightarrow B_1$ y $f_2 : A \rightarrow B_2$, la suma amalgamada es el anillo producto tensorial $B_1 \otimes_A B_2$ junto con los morfismos $i_1(x) = x \otimes 1$ e $i_2(y) = 1 \otimes y$, donde se entiende que B_1 y B_2 son A -álgebras mediante los morfismos f_1 y f_2 .*

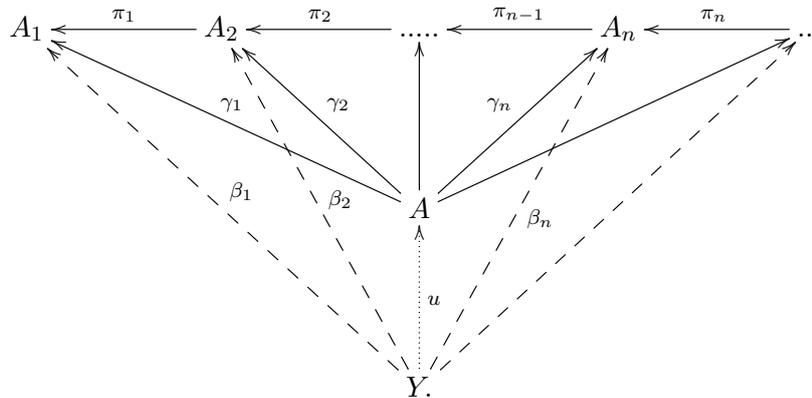
Demostración. Supongamos que existe otro anillo Z y un par de morfismos τ_1 y τ_2 que hacen el siguiente diagrama conmutativo



Podemos considerar entonces la aplicación $g : B_1 \times B_2 \rightarrow Z$ definida por $g(x, y) = \tau_1(x)\tau_2(y)$. Si consideramos Z como un A -álgebra a través del morfismo $\tau_1 \circ f_1 = \tau_2 \circ f_2$, esta aplicación es A -bilineal pues $g(x_1 + x_2, y) = \tau_1(x_1 + x_2)\tau_2(y) = \tau_1(x_1)\tau_2(y) + \tau_1(x_2)\tau_2(y)$ y también $g(ax, y) = \tau_1(ax)\tau_2(y) = \tau_1(f_1(a)x)\tau_2(y) = \tau_1(f_1(a))\tau_1(x)\tau_2(y) = a(\tau_1(x)\tau_2(y))$. Se tiene entonces que por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único morfismo s tal que $g(x, y) = s(x \otimes y)$. En particular, $\tau_1(x) = g(x, 1) = s(x \otimes 1) = s(i_1(x))$ y el diagrama conmuta. Al igual que para el producto fibrado, s es único pues la condición $s \circ i_k = \tau_k$ fija las imágenes por s de los elementos de la forma $(x \otimes 1)$ y $(1 \otimes y)$ que son un sistema de generadores. \square

Finalmente, vamos a definir los límites inversos o límites proyectivos. Esta noción es menos común que las que hemos visto hasta aquí pero igualmente importante. Como ya adelantamos, esta construcción es una manera equivalente de definir el completado de un anillo respecto de la topología I -ádica. Disponer de los dos puntos de vista va a ser clave para la prueba de las condiciones de Schlessinger, donde el objeto que buscamos es el límite inverso de unos anillos Artinianos construidos por inducción.

Definición 2.24. *Dada una sucesión de objetos A_n de una categoría \mathcal{C} y una sucesión de morfismos $\pi_n : A_{n+1} \rightarrow A_n$, el límite inverso es un par $(A, \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty)$ formado por un objeto $A \in \mathcal{C}$ y una sucesión de morfismos $\gamma_n : A \rightarrow A_n$ que cumplen que $\gamma_n = \pi_n \circ \gamma_{n+1}$ de tal manera que dado otro par $(Y, \{\beta_n\}_{n=1}^\infty)$ con las propiedades anteriores, existe un único morfismo $u : Y \rightarrow A$ que hace el siguiente diagrama conmutativo*



La idea detrás de esta definición es construir el límite de los A_n , algo así como A_∞ , lo que sería el último eslabón de esa cadena infinita. Si observamos esta cadena, vemos que desde cada uno de los A_n existe un morfismo a cualquier A_m con $m < n$, que denotamos por $f_{n,m}$, que es la composición de los π_i . La propiedad que cumplen estos $f_{n,m}$ es que $f_{n,m+1} = \pi_m \circ f_{n,m}$. Tras esta observación, esta definición, que podría resultar algo oscura, se vuelve bastante natural. Si A_∞ es el “último” eslabón de la cadena, deberá tener un morfismo γ_n a cualquiera de los A_n y estos deberán cumplir la misma propiedad relativa a las π_n que cumplen los morfismos entre el resto de elementos de la cadena. Finalmente, el hecho de pedir que dado otro par $(Y, \{\beta_n\}_{n=1}^\infty)$ exista un único morfismo u es para asegurarnos de que no hemos añadido nada innecesario en A . Es decir, si hemos encontrado otro objeto Y con esta propiedad en el camino para construir Y hemos pasado por A .

Vamos ahora a probar que los límites inversos existen en la categoría de $\mathcal{S}ets$ y en la categoría de anillos \mathcal{R} . Las construcciones para \mathcal{R} y $\mathcal{S}ets$ son análogas, siendo la de \mathcal{R} un poco más compleja. Nos limitaremos a hacer esta última.

Proposición 2.25. *El límite inverso existe en la categoría de Anillos.*

Demostración. Dada una cadena de morfismos

$$A_1 \xleftarrow{\pi_1} A_2 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_{n-1}} A_n \xleftarrow{\pi_n} \dots$$

consideramos el anillo producto $A = \prod_{n=1}^\infty A_n$ con suma y producto componente a componente. Definimos entonces \tilde{A} el subanillo de A

$$\tilde{A} = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty A_n \mid a_n = \pi_n(a_{n+1})\}.$$

Vamos a probar que \tilde{A} es efectivamente un subanillo y que es el límite inverso de la cadena.

El elemento neutro del producto está en \tilde{A} pues al ser π_n morfismos de anillos, $\pi_n(1) = 1$ y por tanto el elemento $(1, 1, \dots, 1, \dots)$ está en \tilde{A} .

\tilde{A} es cerrado para la suma y producto pues dados $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \tilde{A}$ se tiene que, de nuevo por ser π_n morfismo de anillos, si $\pi_n(a_{n+1}) = a_n$ y $\pi_n(b_{n+1}) = b_n$, entonces $\pi_n(a_{n+1} + b_{n+1}) = \pi_n(a_{n+1}) + \pi_n(b_{n+1}) = a_n + b_n$ y $\pi_n(a_{n+1} \cdot b_{n+1}) = \pi_n(a_{n+1}) \cdot \pi_n(b_{n+1}) = a_n \cdot b_n$.

Luego, efectivamente \tilde{A} es un anillo. Solo nos queda definir los γ_n y comprobar que se cumplen las propiedades pedidas.

La definición de γ_n es la esperada $\gamma_i((a_n)_{n=1}^\infty) = a_i$ y el hecho de que $\gamma_n = \pi_n \circ \gamma_{n-1}$ se deduce inmediatamente de la propia definición de \tilde{A} .

Supongamos ahora que existe un (Y, β_n) que cumple $\beta_n = \pi_n \circ \beta_{n-1}$. Entonces, el morfismo $u : Y \rightarrow \tilde{A}$ que buscamos está dado por $u(y) = (\beta_1(y), \beta_2(y), \dots, \beta_n(y), \dots)$. Este elemento está en \tilde{A} gracias a la condición $\beta_n = \pi_n \circ \beta_{n-1}$. Que u es un morfismo de anillos se deduce de que cada componente de u es un morfismo de anillos y en \tilde{A} las operaciones están definidas componente a componente. Que este u hace el diagrama conmutativo es inmediato pues $\gamma_i(u(y)) = \gamma_i(\beta_1(y), \beta_2(y), \dots, \beta_n(y), \dots) = \beta_i(y)$.

Solo resta ver la unicidad. Supongamos que existe $v : Y \rightarrow \tilde{A}$ cumpliendo todo lo anterior. En particular, v cumple que $\gamma_i(v(y)) = \beta_i(y)$ para todo i pero $\gamma_i(v(y))$ no es más que la componente i -ésima de $v(y)$, que debe ser por tanto $\beta_i(y)$. Se deduce entonces que $v(y) = (\beta_1(y), \beta_2(y), \dots, \beta_n(y), \dots) = u(y)$.

El morfismo u es por tanto único y \tilde{A} es el límite inverso. \square

Proposición 2.26. *Si consideramos la cadena de anillos*

$$A/I \xleftarrow{\pi_1} A/I^2 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_{n-1}} A/I^n \xleftarrow{\pi_n} \dots$$

se tiene que el límite inverso de esta cadena \tilde{A} es isomorfo a \hat{A} , que el completado de A para la topología I -ádica, es decir

$$\hat{A} \simeq \tilde{A} = \varprojlim A/I^k.$$

Demostración. Definimos el morfismo de anillos

$$\varphi : \tilde{A} \longrightarrow \hat{A}$$

$$\varphi((\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots)) = \{x_n\}_{n=1}^\infty.$$

Vamos a ver que el morfismo no depende de la elección de representante en cada uno de los A/I^k . Supongamos dos elecciones de representantes $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ y $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$. Las imágenes de cada uno de estos representantes son $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ pero como $y_k - x_k \in A/I^k$ se tiene que $\{y_n - x_n\}_{n=1}^\infty$ tiende a 0 y por tanto dan lugar a la misma clase de equivalencia en \hat{A} , luego la aplicación está bien definida. Una vez visto esto, el hecho de que es un morfismo de anillos es inmediato al ser la suma y el producto en ambos anillos componente a componente. Por tanto, vamos a centrarnos en ver que φ es un isomorfismo.

Comenzaremos por ver que es sobreyectiva. Dada la clase de equivalencia de una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vamos a construir $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in \tilde{A}$ preimagen de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Como x_n es de Cauchy, para $k \in \mathbb{N}$ tomamos el mínimo n_k tal que $x_n - x_m \in I^k$ para todo $n, m \geq n_k$ y tal que $n_k > n_{k-1}$. Definimos entonces $y_k = \bar{x}_{n_k}$. Al construir y_k de esta manera, se tiene que x_{n_k} es una subsucesión de x_n y al ser x_n de Cauchy es inmediato comprobar que su diferencia tiende a 0 y entonces están en la misma clase de equivalencia. Por tanto, $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) = \{x_n\}_{n=1}^\infty$. Falta comprobar que $(y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in \tilde{A}$. Para ello, hay que ver que $\pi_k(y_{k+1}) = y_k$. Como $n_{k+1} \geq n_k$, se tiene que $x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \in I^k$, lo que implica la condición que queríamos y por tanto φ es sobreyectiva.

Vamos ahora a ver que φ es inyectiva. Supongamos que $\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots) = 0$. Vamos a ver que $\bar{x}_i = 0$ para todo i . Si la imagen por φ es 0, entonces $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tiende a 0 y por tanto existe $n_i > i$ tal que $x_{n_i} \in I^i$. Sin embargo, por la condición que define el límite inverso, $x_i = x_{n_i} \pmod{I^i}$ y por tanto $x_i = 0$. \square

Esta equivalencia entre la visión topológica y la algebraica nos permite ver el completado como algo más manejable, el límite inverso, mientras que podemos usar toda la potencia de las nociones topológicas. Volviendo a nuestro ejemplo de antes, trabajar con el completado del anillo de polinomios respecto de (x) como límite inverso es bastante cómodo y nos llevaría enseguida a descubrir que es isomorfo a las series de potencias, algo que no es tan claro con la definición topológica. Recíprocamente, comprobar que los completados respecto de (x) y (x^3) son isomorfos con la noción de límite inverso es tedioso, mientras que con la descripción topológica basta comprobar que las topologías inducidas son la misma, lo cual es inmediato.

Para terminar vamos a ver algunas propiedades de los anillos completos que nos van a resultar útiles mas adelante.

Definición 2.27. *Se dice que un anillo local (A, \mathfrak{m}) es completo si es completo para la topología \mathfrak{m} -ádica. Además, cuando estemos trabajando con este tipo de anillos denotaremos por A_k al anillo cociente A/\mathfrak{m}^k .*

Proposición 2.28. *Dados dos anillos locales y completos (A, \mathfrak{m}_A) y (B, \mathfrak{m}_B) , existe una biyección entre los morfismos locales $\varphi : A \rightarrow B$ y las sucesiones de morfismos compatibles $\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$. Por compatibles nos referimos a que hacen conmutativo el diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xleftarrow{\pi_1} & A_2 & \xleftarrow{\pi_2} & \dots & \xleftarrow{\pi_{n-1}} & A_n & \xleftarrow{\pi_n} & \dots \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & & & \downarrow \varphi_n & & \\ B_1 & \xleftarrow{\tilde{\pi}_1} & B_2 & \xleftarrow{\tilde{\pi}_2} & \dots & \xleftarrow{\tilde{\pi}_{n-1}} & B_n & \xleftarrow{\tilde{\pi}_n} & \dots \end{array}$$

Durante esta prueba y durante todo el texto, reservaremos las letras γ_n para denotar los morfismos de A en A_n de un anillo local completo.

Demostración. Dado un morfismo $\varphi : A \rightarrow B$, la condición de ser local, $\varphi(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$, nos permite pasar el morfismo $\tilde{\gamma}_i \circ \varphi$ a los sucesivos cocientes obteniendo así una sucesión de morfismos φ_i que son claramente compatibles. Recíprocamente, dada una sucesión de morfismos compatibles φ_i podemos definir la imagen de un elemento $x \in A$ como el elemento de B dado por la sucesión $\varphi_i(\gamma_i(x))$. Para que esto defina un elemento de B , debe cumplirse que $\tilde{\pi}_{i-1}(\varphi_i(\gamma_i(x))) = \varphi_{i-1}(\gamma_{i-1}(x))$. Esta propiedad se cumple pues, al ser el diagrama conmutativo, $\tilde{\pi}_{i-1} \circ \varphi_i = \varphi_{i-1} \circ \pi_{i-1}$ entonces $\tilde{\pi}_{i-1} \circ \varphi_i \circ \gamma_i = \varphi_{i-1} \circ \pi_{i-1} \circ \gamma_i = \varphi_{i-1} \circ \gamma_{i-1}$.

Vamos a ver que estas construcciones son inversas la una de la otra. Dado φ vamos a ver que el morfismo que inducen los φ_i es el propio φ . Para esto, no hay más que darse cuenta de que, por definición, la clase de $\varphi(x)$ en B_i es el elemento $\varphi_i(\gamma_i(x))$. Por tanto, la imagen de x por el morfismo que inducen los φ_i es efectivamente $\varphi(x)$. \square

Proposición 2.29. *Un anillo local Artiniano (A, \mathfrak{m}) es completo.*

Demostración. En un anillo local Artiniano se cumple que existe un n tal que $\mathfrak{m}^n = 0$ y por tanto la cadena de morfismos de la definición de completado es

$$A/\mathfrak{m} \xleftarrow{\pi_1} A/\mathfrak{m}^2 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_{n-1}} A/\mathfrak{m}^n = A \xleftarrow{Id} A \xleftarrow{Id} \dots$$

Está claro entonces que tomando como γ_i el paso al cociente $A \rightarrow A/\mathfrak{m}^i$ si $i < n$, o $\gamma_i = Id$ si $i \geq n$, cumple las propiedades que definen el límite inverso. \square

Proposición 2.30. *Un morfismo local de un anillo local completo A en un anillo local Artiniano B , factoriza a través de A_i para algún i .*

Demostración. Dado un morfismo local $\varphi : A \rightarrow B$, podemos considerar la sucesión de morfismos $\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$. Como ya sabemos, existe un i suficientemente grande para el cual $B_i = B$ de manera que φ factoriza como $\varphi = \varphi_i \circ \gamma_i$. \square

2.3. Funtores Representables y Pro-representables

Una noción muy relevante de la teoría de categorías de la que vamos a hacer uso, es la de functor representable y prorepresentable. Aunque desgraciadamente los funtores que vamos a usar no van a cumplir estas condiciones sino otras más débiles, es interesante conocer cuál es la idea que perseguimos con esas definiciones más débiles.

Definición 2.31. *Dado un functor \mathcal{F} de una categoría \mathcal{C} en la categoría de conjuntos $\mathcal{S}ets$, se dice que el functor es representable si existe un objeto R en \mathcal{C} de manera que los funtores $\text{Hom}(R, -)$ y \mathcal{F} son isomorfos. También se dice que R representa el functor \mathcal{F} .*

Esto es interesante porque para comprender muy bien el funtor \mathcal{F} basta con entender en profundidad el objeto R que lo representa, con la ventaja añadida de que el objeto R está en la categoría \mathcal{C} por lo que, aparte de ser un conjunto, tiene una estructura, y podemos usar la teoría de \mathcal{C} para estudiarlo.

Ejemplo 2.32. *Dados dos A -módulos M, N , podemos definir el funtor $Bil(M, N; -)$ que envía un A -módulo T en el conjunto de aplicaciones bilineales de $M \times N$ en T y que envía una aplicación $f : T \rightarrow L$ en la aplicación $Bil(f)$ definida por $Bil(f)(g(m, n)) = f \circ g(m, n)$. Este funtor es representable. De hecho, ya hemos estudiado el A -módulo que lo representa, $M \otimes_A N$. Sabemos que hay una biyección entre las aplicaciones bilineales con salida en $M \times N$ y los morfismos con salida en $M \otimes N$. Esto nos permite entender las aplicaciones bilineales entendiendo el producto tensorial. Por ejemplo, probar que no existe ninguna aplicación bilineal no nula con salida en $\mathbb{Z}/(n) \otimes \mathbb{Q}$ y llegada en cualquier anillo, parece a priori una tarea bastante complicada. Sin embargo, ya vimos que no era difícil probar que $\mathbb{Z}/(n) \otimes \mathbb{Q} \simeq 0$.*

Definición 2.33. *Dado un objeto R que sea límite inverso de elementos de una categoría \mathcal{C} , es decir $R = \lim_{\leftarrow} R_i$ con $R_i \in \mathcal{C}$, se define el funtor h_R como el funtor $Hom(R, -)$ restringido a la categoría \mathcal{C} .*

Debemos restringir el funtor a \mathcal{C} porque R no tiene por qué estar en la categoría. Si consideramos por ejemplo la categoría de anillos Artinianos, el límite inverso de los anillos $k[x]/(x^n)$ es el anillo de series de potencias, que no es Artiniano.

Definición 2.34. *Un funtor \mathcal{F} de una categoría \mathcal{C} en $Sets$, se dice que es pro-representable si existe un objeto $R = \lim_{\leftarrow} R_i$ con $R_i \in \mathcal{C}$ de tal manera que el funtor \mathcal{F} es isomorfo al funtor h_R .*

La noción de pro-representable es lo mejor a lo que podemos aspirar una vez que sabemos que el funtor con el que estamos trabajando no es representable. Aunque el objeto R no esté en la categoría \mathcal{C} , si tenemos alguna forma razonable de trabajar con los límites inversos, como sucede con los anillos, la pro-representabilidad tiene casi todas las ventajas de la representabilidad. Lamentablemente, en el caso de las deformaciones los funtores con los que vamos a trabajar no van a ser ni representables ni pro-representables.

3. Geometría Algebraica

En la geometría algebraica moderna la definición de variedad algebraica se amplía al concepto de esquema para permitir trabajar con elementos nilpotentes. Estos elementos permiten formalizar algebraicamente la idea geométrica de desplazamiento infinitesimal. De la misma manera que el espacio proyectivo permite enunciar el Teorema de Bézout en su forma más completa, los esquemas proporcionan además un marco de trabajo más amplio donde se pueden probar resultados más fuertes. En este capítulo introduciremos la noción de esquema y explicaremos cómo los anillos Artinianos se corresponden en este contexto con nociones infinitesimales, que tendrán vital importancia durante el Teorema de Schlessinger. Los principales textos introductorios a la teoría de esquemas son [3] y [5] que han sido también nuestra principal referencia para este capítulo.

3.1. Hazes

El primer ingrediente que necesitamos para dar la definición de esquema es la noción de haz. Esta definición trata de encapsular las propiedades fundamentales que caracterizan al conjunto de funciones de un tipo dado sobre una variedad.

Definición 3.1. *Dado un espacio X con topología τ , un prehaz \mathcal{O} de anillos sobre X consiste en:*

- 1) *Para cada abierto $U \in \tau$ dar un anillo $\mathcal{O}(U)$.*
- 2) *Para cada contención $V \subset U$ dar un morfismo de anillos llamado restricción*

$$\rho_{UV} : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(V).$$

De tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- I) *El anillo asociado al vacío es trivial, $\mathcal{O}(\emptyset) = 0$.*
- II) *El morfismo de restricción de U en sí mismo es la identidad, $\rho_{UU} = Id$.*
- III) *Los morfismos de restricción son compatibles. Si $W \subset V \subset U$ entonces $\rho_{VW} \circ \rho_{UV} = \rho_{UW}$.*

Las nociones de prehaz y de haz, que en seguida veremos, se pueden dar fácilmente en términos de categorías y funtores. El lenguaje de las categorías solo debe utilizarse cuando sirva para esclarecer y no para oscurecer. Como en mi opinión este no es el caso, nos quedaremos con la definición clásica.

Esta definición, que puede parecer bastante oscura la primera vez que uno se encuentra con ella, lo resulta algo menos si se tiene en mente el siguiente ejemplo. Sea $\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$ y $\rho_{UV}(f) = f|_V$. La notación $\rho_{UV}(s) = s|_V$ se usa para cualquier tipo de haz, incluso cuando ρ_{UV} no es la restricción a V , de hecho, los elementos de $\mathcal{O}(U)$ no tienen por qué ser funciones. Con este ejemplo en mente, las condiciones que vamos a añadir ahora para que un prehaz sea un haz van a resultar completamente naturales.

Definición 3.2. *Un haz de anillos sobre X es un prehaz \mathcal{O} sobre X que cumple las siguientes condiciones:*

- IV) *Si los V_i forman un recubrimiento por abiertos del abierto U y $s \in \mathcal{O}(U)$ es tal que $s|_{V_i} = 0$ para todo i , entonces $s = 0$. (Si la restricción de una función es 0 en todos los abiertos, es que la función es 0).*

V) Si los V_i forman un recubrimiento por abiertos del abierto U y tenemos $s_i \in \mathcal{O}(V_i)$ tales que $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ para todo i, j , entonces existe $s \in \mathcal{O}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para todo i . (Podemos definir una función a trozos siempre que estos coincidan en las intersecciones).

Dada una variedad algebraica X sobre un cuerpo k , si definimos $\mathcal{O}(U)$ como el conjunto de funciones regulares de U en k y ρ_{UV} como la restricción, tenemos un haz. Dado que buscamos generalizar el concepto de variedad algebraica, este haz sirve como referencia para muchas de las propiedades que le vamos a exigir a los esquemas.

En esta línea, si nos fijamos en una variedad algebraica tenemos algo más que la información de las funciones regulares en un abierto U . Dado un punto $P \in X$, podemos considerar los gérmenes de funciones en P . Es decir, pares (U, f) , donde U es un abierto que contiene a P y $f \in \mathcal{O}(U)$, módulo la relación de equivalencia $(U, f) \sim (V, g)$ si existe un abierto $W \subset U \cap V$ y $h \in \mathcal{O}(W)$ tal que $f|_W = g|_W = h$. Este anillo de gérmenes de función en P es la localización del anillo $\mathcal{O}(X)$ en el ideal maximal \mathfrak{m}_P .

Basándonos en esto, definimos para un haz \mathcal{O} el conjunto de gérmenes de \mathcal{O} en un punto $P \in X$ como el conjunto de pares (U, s) con U abierto tal que $P \in U$ y $s \in \mathcal{O}(U)$, módulo la relación de equivalencia $(U, s) \sim (V, r)$ si existe un abierto $W \subset U \cap V$ con $P \in W$ y $t \in \mathcal{O}(W)$ tal que $s|_W = r|_W = t$. Vamos a denotar el conjunto de gérmenes como \mathcal{O}_P . Vamos a ver que este conjunto es un anillo.

Proposición 3.3. \mathcal{O}_P es un anillo con las operaciones

$$(U, s) + (V, r) = (U \cap V, r|_{U \cap V} + s|_{U \cap V})$$

$$(U, s) \cdot (V, r) = (U \cap V, r|_{U \cap V} \cdot s|_{U \cap V}).$$

Demostración. Como siempre, la única dificultad consiste en probar que las operaciones así definidas no dependen de representantes. Una vez visto eso, las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de suma y producto se deducen del hecho de que esas propiedades se verifican en $\mathcal{O}(U \cap V)$. Los elementos $(X, 1)$ y $(X, 0)$ son los respectivos neutros.

Veamos entonces que las operaciones están bien definidas. Dados $(U_1, s_1) \sim (U_2, s_2)$ y $(V_1, r_1) \sim (V_2, r_2)$ queremos ver que $(U_1 \cap V_1, r_1|_{U_1 \cap V_1} + s_1|_{U_1 \cap V_1}) = (U_2 \cap V_2, r_2|_{U_2 \cap V_2} + s_2|_{U_2 \cap V_2})$. Como $(U_1, s_1) \sim (U_2, s_2)$, existe un abierto $W_1 \subset U_1 \cap U_2$ y $s_3 \in \mathcal{O}(W_1)$ tal que las restricciones de s_1 y s_2 a W_1 son s_3 , y existe un W_2 para r_1 y r_2 . Tomando $W = W_1 \cap W_2$ y las correspondientes restricciones s_4 y r_4 se tiene que $(W, s_4 + r_4)$ cumple que $W \subset (U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2)$ y dado que las restricciones de los s_i y r_i coinciden en abiertos más grandes que W lo hacen también en W . \square

Como se habrá podido comprobar, mantener la notación de la restricción hace que la notación sea ridículamente recargada. Es por ello que si s es un elemento de $\mathcal{O}(U)$, también nos referiremos a su restricción a $V \subset U$ como s siempre y cuando no haya ambigüedad.

Definición 3.4. El par (X, \mathcal{O}) formado por un espacio topológico X equipado con un haz de anillos \mathcal{O} recibe el nombre de espacio anillado. Si además, como en el caso de las variedades algebraicas, los anillos de gérmenes sobre los puntos son anillos locales, se llama espacio anillado en anillos locales.

Hay una gran cantidad de objetos geométricos que cae en esta categoría: variedades algebraicas, variedades diferenciables de clase \mathcal{C}^k , variedades analíticas, esquemas... El estudio de estos objetos geométricos como espacios anillados nos permite tener en cuenta la estructura de las funciones en ese espacio a todas las escalas.

Definición 3.5. Dados dos haces \mathcal{O} y \mathcal{H} definidos sobre el mismo espacio X , un morfismo de haces $f^\# : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{H}$ consiste en dar para cada abierto U un morfismo $\varphi_U : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ de tal manera que el siguiente diagrama conmute (los morfismos horizontales son las restricciones)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}(V) \\ \varphi_U \downarrow & & \downarrow \varphi_V \\ \mathcal{H}(U) & \longrightarrow & \mathcal{H}(V). \end{array}$$

Como ya hemos dicho, se puede definir la noción de haz en términos de teoría de categorías, no es casualidad por tanto que esta definición sea completamente análoga a la de morfismo de funtores.

Ejemplo 3.6. Para motivar la definición de morfismo de espacios anillados que vamos a dar, vamos a fijarnos en qué sucede en el caso de los espacios topológicos. Supongamos que tenemos dos espacios topológicos X e Y con sus haces de funciones continuas $\mathcal{O}(X)$ y $\mathcal{H}(Y)$ y una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$. Vamos a estudiar qué sucede con los haces. Lo primero que debemos observar es que dada una función $h : X \rightarrow \mathbb{R}$, no hay ninguna manera natural de construir una función de Y en \mathbb{R} . Sin embargo, dada una función $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ sí podemos construir una aplicación de X en \mathbb{R} mediante la composición $\tilde{g} = g \circ f$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \tilde{g} & \downarrow g \\ & & \mathbb{R}. \end{array}$$

Esta misma construcción nos sirve para cualquier abierto de Y . Es decir, dada una aplicación continua f tenemos para cada abierto $V \subset Y$ el siguiente morfismo

$$\begin{aligned} f^\# : \mathcal{H}(V) &\longrightarrow \mathcal{O}(f^{-1}(V)) \\ g &\longrightarrow g \circ f. \end{aligned}$$

Nótese que a pesar de tener el morfismo $f^\#$ definido en cada uno de los $\mathcal{H}(V)$ con V abierto de Y , esto no es un morfismo de haces pues el haz \mathcal{O} no está definido sobre el mismo espacio topológico que el haz \mathcal{H} . Es importante remarcar también que mediante $f^\#$ no llegamos de manera directa a todos los abiertos de X , solo a aquellos que son contraimagen de uno de Y .

Queremos tratar de dar la definición de morfismo de espacios anillados imitando lo que sucede en este ejemplo. Lo primero que hay que solventar es el hecho de que los haces están definidos sobre espacios distintos. Para ello, vamos a definir ad-hoc un haz sobre Y que cumpla justo lo que buscamos.

Definición 3.7. Dado un espacio anillado (X, \mathcal{O}) , un espacio topológico cualquiera Y y una función continua entre ellos $f : X \rightarrow Y$, se define en Y el haz $f_*\mathcal{O}$ como

$$f_*\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(f^{-1}(V)).$$

donde V es abierto de Y .

En el ejemplo anterior, consistiría en asociarle a cada abierto V de Y el anillo de funciones continuas de $f^{-1}(V)$ en \mathbb{R} . De esta manera, las aplicaciones f^\sharp podrían definir un morfismo de haces. Concretamente

$$\begin{aligned} f^\sharp : \mathcal{H}(V) &\longrightarrow f_*\mathcal{O}(V) \\ h &\longrightarrow h \circ f. \end{aligned}$$

Esperamos que este ejemplo haga más digerible la definición de morfismo de espacios anillados.

Definición 3.8. *Dados dos espacios anillados (X, \mathcal{O}) e (Y, \mathcal{H}) , un morfismo de espacios anillados consiste en una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ y un morfismo de haces de Y , $f^\sharp : \mathcal{H} \rightarrow f_*\mathcal{O}$. Normalmente nos referiremos al morfismo como f a secas entendiendo que f^\sharp es el morfismo de haces asociado.*

Si tratamos de componer morfismos de espacios anillados $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{H})$ y $(g, g^\sharp) : (Y, \mathcal{H}) \rightarrow (Z, \mathcal{G})$, los morfismos de haces de los que disponemos son

$$\begin{aligned} f^\sharp : \mathcal{H}(V) &\longrightarrow f_*\mathcal{O}(V) \\ g^\sharp : \mathcal{G}(W) &\longrightarrow g_*\mathcal{H}(W). \end{aligned}$$

Estos morfismos no se pueden componer directamente porque los haces sobre los que actúan no están definidos sobre el mismo espacio topológico. Para solventar esto, solo tenemos que transportar el haz \mathcal{O} de X a Y mediante $f_*\mathcal{O}$ y una vez visto como un haz en Y transportarlo de nuevo a Z mediante $g_*(f_*(\mathcal{O}))$. Por definición, este haz en Z asocia a cada abierto W de Z el anillo $\mathcal{O}(f^{-1}(g^{-1}(W)))$. Una vez hemos hecho esta operación ya podemos definir el morfismo entre los haces que para cada abierto W de Z esta definido como la composición $f^\sharp \circ g^\sharp : \mathcal{G}(W) \rightarrow g_*(f_*(\mathcal{O}))$. Es bastante directo comprobar que los morfismos así definidos conmutan con las restricciones y por tanto este morfismo es efectivamente un morfismo de haces que, junto con la aplicación continua $g \circ f$, es lo que definimos como el morfismo de haces composición de (f, f^\sharp) y (g, g^\sharp) .

Definición 3.9. *Dado un morfismo de haces f entre (X, \mathcal{O}) e (Y, \mathcal{H}) y un punto P en X , se define el morfismo inducido entre los anillos de gérmenes $\mathcal{H}_{f(P)}$ y \mathcal{O}_P como*

$$\begin{aligned} f_P^\sharp : \mathcal{H}_{f(P)} &\longrightarrow \mathcal{O}_P \\ (U, h) &\longrightarrow (f^{-1}(U), f^\sharp(h)). \end{aligned}$$

Debemos comprobar que esta aplicación está bien definida. Dados $(U_1, h_1) \sim (U_2, h_2)$ existe un abierto $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ donde las restricciones coinciden, es decir $h_1|_{U_3} = h_2|_{U_3}$. Entonces, $f^{-1}(U_3) \subset f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$ y por definición de morfismo de haces, f^\sharp conmuta con la restricción. Por tanto, $f^\sharp(h_1)|_{f^{-1}(U_3)} = f^\sharp(h_1|_{U_3}) = f^\sharp(h_2|_{U_3}) = f^\sharp(h_2)|_{f^{-1}(U_3)}$ y f_P^\sharp está bien definido. Que es morfismo es directo de las propiedades de la suma y producto de funciones respecto a la composición.

También de esta definición se sigue que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U) & \xrightarrow{f^\sharp} & f_*\mathcal{O}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_{f(P)} & \xrightarrow{f_P^\sharp} & \mathcal{O}_P \end{array}$$

es conmutativo, donde los morfismos verticales envían un elemento del haz s a su clase o germen en el anillo local (U, s) .

Definición 3.10. Un morfismo entre dos espacios anillados en anillos locales (X, \mathcal{O}) e (Y, \mathcal{H}) , consiste en una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ y un morfismo de haces de Y , $f^\# : \mathcal{H} \rightarrow f_*\mathcal{O}$ de tal manera que el morfismo inducido entre el anillo de gérmenes de cada punto, $f_P^\# : \mathcal{H}_{f(P)} \rightarrow \mathcal{O}_P$, es un morfismo local.

Definición 3.11. Se dice que un morfismo de espacios anillados (en anillos locales) f es un isomorfismo de espacios anillados (en anillos locales) si existe g morfismo de espacios anillados (en anillos locales) tal que $f \circ g = g \circ f = Id$ y $f^\# \circ g^\# = g^\# \circ f^\# = Id$.

3.2. Spec

Vamos a ir construyendo poco a poco el objeto geométrico con el que trata la geometría algebraica, los esquemas. Esta construcción da un espacio de trabajo más rico donde se pueden obtener resultados más fuertes. A cambio, los objetos con los que estamos tratando son técnicamente mucho más complicados y más difíciles de interpretar que las variedades. Otra de las ventajas por las que merece la pena introducir los esquemas es porque permiten dar geometría a los anillos propios de la aritmética. Para ejemplificar estas dos cosas, a medida que vayamos introduciendo las definiciones vamos a estudiar cómo se ven las variedades algebraicas en el contexto de los esquemas junto con algún ejemplo de la aritmética.

Definición 3.12. Dado un anillo A , definimos el espectro de A como el conjunto $Spec(A) = \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ ideal primo de } A\}$.

Definición 3.13. Dado un anillo A y un ideal \mathfrak{a} , definimos $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \text{ ideal primo de } A\} \subset Spec(A)$. Si escribimos $V(S)$ con S un conjunto cualquiera, se debe interpretar como $V(I(S))$, donde $I(S)$ es el ideal que genera S en A .

Proposición 3.14. Dada una colección arbitraria de ideales \mathfrak{a}_i de A se cumple que:

$$I) V(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = V(\mathfrak{a}_1) \cup V(\mathfrak{a}_2).$$

$$II) V(\sum \mathfrak{a}_i) = \cap V(\mathfrak{a}_i).$$

$$III) V(\mathfrak{a}_1) \subset V(\mathfrak{a}_2) \iff \sqrt{\mathfrak{a}_1} \supset \sqrt{\mathfrak{a}_2}.$$

Demostración. I) Dado que $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \subset (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)$, la contención \supset es inmediata. Supongamos ahora que $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)$. Si $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{p}$ hemos terminado. En caso contrario, existe $a_1 \in \mathfrak{a}_1$ tal que $a_1 \notin \mathfrak{p}$, entonces, dado $a_2 \in \mathfrak{a}_2$, el elemento $a_1a_2 \in \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{p}$ por ser \mathfrak{p} primo. Como $a_1 \notin \mathfrak{p}$, debe ser $a_2 \in \mathfrak{p}$ luego $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{p}$ y por tanto $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}_2) \subset V(\mathfrak{a}_1) \cup V(\mathfrak{a}_2)$.

II) Por definición, $\sum \mathfrak{a}_i$ es el menor ideal que contiene a todos los \mathfrak{a}_i . Por tanto, $(\sum \mathfrak{a}_i) \subset \mathfrak{p}$ si y solamente si $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ para todo i .

III) El radical de un ideal es la intersección de todos los ideales primos que lo contienen. Si $V(\mathfrak{a}_1) \subset V(\mathfrak{a}_2)$, entonces cada ideal primo que contiene a \mathfrak{a}_1 contiene a \mathfrak{a}_2 y por tanto $\sqrt{\mathfrak{a}_1} \supset \sqrt{\mathfrak{a}_2}$. De igual modo, si $\sqrt{\mathfrak{a}_1} \supset \sqrt{\mathfrak{a}_2}$, dado \mathfrak{p} tal que $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{p}$, entonces $\sqrt{\mathfrak{a}_1} \subset \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ y por tanto $\mathfrak{a}_2 \subset \sqrt{\mathfrak{a}_2} \subset \sqrt{\mathfrak{a}_1} \subset \mathfrak{p}$. \square

Definición 3.15. Dado un anillo A , definimos en el conjunto $Spec(A)$ la topología cuyos cerrados son los conjuntos de la forma $V(\mathfrak{a})$ con \mathfrak{a} ideal de A . El hecho de que $V(0) = Spec(A)$ y $V(A) = \emptyset$ junto a las propiedades I) y II), nos aseguran que estos conjuntos efectivamente definen una topología en $Spec(A)$. Esta topología recibe el nombre de topología de Zariski.

Al igual que se hace siempre en estos casos, vamos a usar $Spec(A)$ para referirnos tanto al conjunto como al espacio topológico.

Ejemplo 3.16. *Vamos a ver cómo es esta topología en el anillo que representa el plano afín complejo $\mathbb{C}[x, y]$. Para empezar, tenemos muchos más puntos que si viésemos el plano afín como variedad. En $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ hay tantos puntos como ideales primos y sabemos que hay tantos ideales primos como variedades irreducibles. La manera de interpretar estos ideales primos es la siguiente:*

Los ideales de la forma $\mathfrak{m}_p = (x - a, y - b)$ representan los puntos $p = (a, b)$. Como sabemos, estos ideales son maximales, lo que quiere decir que estos puntos son cerrados, pues $\mathfrak{m}_p = V(\mathfrak{m}_p)$. Los ideales primos restantes son de la forma $\mathfrak{p} = (f)$ con f un polinomio irreducible, sin embargo, estos puntos no son cerrados. De hecho, sabemos que $f(a, b) = 0$ si y solo si $f \in (x - a, y - b)$. Es decir, la adherencia de \mathfrak{p} son todos los puntos \mathfrak{m}_p en los que f se anula, y además el propio \mathfrak{p} . A este punto se le llama el punto genérico de la curva f . Más aún, tenemos el punto correspondiente a (0) , en cuya adherencia está todo el espectro. Este punto representa todo el plano. Una manera de pensar en este espacio es como tres copias del plano afín una sobre la otra. En la copia de más arriba, viven los puntos variedades de dimensión 0, en la copia de debajo viven las curvas irreducibles variedades de dimensión 1 y en la última copia las variedades de dimensión 2, es decir, todo el plano. Esta manera de pensar está en resonancia con la idea de dimensión de Krull de cadenas de ideales primos.

Ejemplo 3.17. *En un tono más aritmético, vamos a estudiar el espectro de \mathbb{Z} . Los ideales primos son los generados por los números primos y el (0) . Los generados por los primos son todos maximales, por lo que se corresponderán a puntos cerrados. El ideal (0) se corresponde con el punto genérico de todo \mathbb{Z} , en cuya clausura están todos los ideales primos. En la línea de pensamiento del ejemplo anterior, podemos pensar en esto como dos rectas. En la de arriba viven los ideales de los números primos y la de abajo es la correspondiente al 0. Muchísimo más ilustrativo de las aplicaciones aritméticas, aunque también muchísimo más complejo, es el estudio de $\mathbb{Z}[x]$.*

Definición 3.18. *Dado $f \in A$ se define el conjunto abierto $D(f) = \text{Spec}(A) \setminus V(f)$.*

Proposición 3.19. *El conjunto $\mathcal{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$ es una base de la topología de Zariski.*

Demostración. Para ver que \mathcal{B} es una base hay que comprobar que cualquier abierto U de $\text{Spec}(A)$ se puede escribir como unión de elementos de \mathcal{B} . Si U es abierto, por la definición de la topología de Zariski, $U = \text{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a})$ para algún ideal \mathfrak{a} . Vamos a ver que

$$U = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$$

La igual se tiene debido a que

$$\mathfrak{p} \in U \iff \mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a}) \iff \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p} \iff \exists f \in \mathfrak{a} \mid f \notin \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p} \in \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$$

□

Ya casi hemos terminado de definir el objeto geométrico $\text{Spec}(A)$ solo nos falta añadirle el haz de anillos que nos va a dar lugar a la estructura que buscamos.

Definición 3.20. Dado un anillo A definimos sobre el espacio topológico $\text{Spec}(A)$, el haz \mathcal{O} como

$$\mathcal{O}(U) = \{s : U \longrightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \mid s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}} \text{ y } s \text{ es localmente un cociente}\}.$$

Que s sea localmente un cociente quiere decir que para cada $\mathfrak{p} \in U$ existe un entorno de \mathfrak{p} $V \subset U$ y elementos $f, g \in A$ tal que para cada $\mathfrak{q} \in V$ se tiene que $s(\mathfrak{q}) = \frac{g}{f} \in A_{\mathfrak{q}}$. Como aplicaciones ρ_{UV} tomamos las restricciones de U a V .

Proposición 3.21. El objeto que acabamos de definir es un haz de anillos.

Demostración. En primer lugar, hay que probar que $\mathcal{O}(U)$ es un anillo. Esto es sencillo, pues dadas s_1 y s_2 en $\mathcal{O}(U)$ se tiene que si $s_1(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ y $s_2(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ entonces $s_1 + s_2(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$. Por otro lado, si tenemos entornos de \mathfrak{p} , V_1 y V_2 , en los que s_1 y s_2 están representadas por $\frac{g_1}{f_1}$ y $\frac{g_2}{f_2}$, tomamos como entorno $V_1 \cap V_2$ y en él $s_1 + s_2$ estará representada por $\frac{g_1 f_2}{f_1 f_2} + \frac{g_2 f_1}{f_1 f_2}$, pues para $\mathfrak{q} \in V_1 \cap V_2$, como ni f_1 ni f_2 están en \mathfrak{q} que es un ideal primo, $f_1 f_2$ no está en \mathfrak{q} . De manera análoga, se comprueba que el producto de funciones de $\mathcal{O}(U)$ está en $\mathcal{O}(U)$. Las propiedades conmutativa asociativa y distributiva se deducen de las homónimas en $A_{\mathfrak{p}}$ puesto que las operaciones entre funciones se definen punto a punto. Finalmente, la función $s(\mathfrak{p}) = 0$ para todo \mathfrak{p} y $s(\mathfrak{p}) = 1$ para todo \mathfrak{p} , hacen el papel de neutro para suma y producto. Por tanto, $\mathcal{O}(U)$ es un anillo.

Vamos a ver ahora que estos anillos, junto con las aplicaciones ρ_{UV} definidas como la restricción usual, tienen estructura de haz de anillos.

La condición I) la vamos a imponer por definición, $\mathcal{O}(\emptyset) = 0$. II) y III) son inmediatas del hecho de que ρ_{UV} es la restricción de las aplicaciones. Por tanto, \mathcal{O} es un prehaz. Finalmente, como $\mathcal{O}(U)$ son realmente aplicaciones y ρ_{UV} restricciones, las propiedades IV) y V) se verifican. Si la restricción de s a cualquier abierto es 0, la aplicación s es nula. Si tenemos s_i definidas en abiertos V_i de manera que coinciden en las intersecciones, podemos definir $s(\mathfrak{p}) = s_i(\mathfrak{p})$ para cualquier i tal que $\mathfrak{p} \in V_i$. Dado que las s_i son localmente cocientes en V_i , s también será localmente un cociente tomando el mismo entorno y representantes que para s_i . \square

Al igual que hemos hecho antes, si no hay confusión usaremos $\text{Spec}(A)$ para referirnos indistintamente al conjunto, al espacio topológico y al espacio anillado. Si fuese necesario, se especificará cuál de las estructuras nos interesa.

Vamos a dar ahora unas propiedades básicas de este haz que nos van a ser muy útiles para el estudio de $\text{Spec}(A)$.

Proposición 3.22. Para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, el anillo de gérmenes $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es isomorfo al anillo local $A_{\mathfrak{p}}$.

Demostración. Recordamos que el anillo de gérmenes $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ son clases de equivalencia de pares (U, s) . Definimos el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} &\longrightarrow A_{\mathfrak{p}} \\ (U, s) &\longrightarrow s(\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

Este morfismo está bien definido porque si (V, r) es otro representante de la clase, estos deben coincidir en un entorno de \mathfrak{p} y por tanto en \mathfrak{p} . Vamos a probar que φ es sobreyectiva. De la propia definición de la localización, se sigue que cualquier elemento de $A_{\mathfrak{p}}$ es de la forma $\frac{g}{f}$ con $f, g \in A$ y $f \notin \mathfrak{p}$. Por tanto, la sección dada por $\frac{g}{f}$ está bien definida en $D(f)$, que es un entorno de \mathfrak{p} , y el par $(D(f), \frac{g}{f})$ es el elemento de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ que buscábamos. Para probar la inyectividad,

tomamos dos pares distintos (U, s) y (V, r) tales que $s(\mathfrak{p}) = r(\mathfrak{p})$. Por la definición de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, deben existir dos entornos de \mathfrak{p} en los que s y r están dados por cocientes de elementos de A . Tomamos la intersección de esos dos entornos, que denotamos por W , en la cual podemos suponer que $s = \frac{g_1}{f_1}$ y $r = \frac{g_2}{f_2}$. De nuevo por la definición de localización, si $\frac{g_1}{f_1} = \frac{g_2}{f_2}$ en $A_{\mathfrak{p}}$, existe $h \notin \mathfrak{p}$ tal que $h(g_1 f_2 - g_2 f_1) = 0$. Tenemos entonces que $D(h) \cap W$ es un entorno de \mathfrak{p} en el que $s = t$, pues en cualquier $\mathfrak{q} \in W \cap D(h)$ se tiene que $s = \frac{g_1}{f_1}$ y $r = \frac{g_2}{f_2}$ por estar en W . Como además $\mathfrak{q} \in D(h)$, se tiene que $h \notin \mathfrak{q}$ y por tanto la condición $h(g_1 f_2 - g_2 f_1) = 0$ nos sirve también para asegurar que $\frac{g_1}{f_1} = \frac{g_2}{f_2}$ en $A_{\mathfrak{q}}$. Como s y r coinciden en un entorno de \mathfrak{p} , su clase de equivalencia es la misma y φ es inyectiva. \square

Lo que nos dice la prueba de esta proposición es que los gérmenes de las secciones del haz están unívocamente determinados por su valor en un punto. Esto puede chocar pero, como veremos más adelante, a pesar de que necesitamos definir el haz mediante estas aplicaciones, los elementos de \mathcal{O} no son exactamente las funciones de $\text{Spec}(A)$. En realidad, el valor de estas funciones en un punto va a venir dada por su imagen en el cuerpo de residuos en \mathfrak{p} , es decir, $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$. Esto quedará más claro tras tratar con ejemplos.

Proposición 3.23. *Dado un elemento $f \in A$ se tiene que $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$.*

Demostración. Definimos el homomorfismo $\varphi : A_f \rightarrow \mathcal{O}(D(f))$ como $\varphi(a/f^n) = s$, donde s es la aplicación $s : \mathcal{O}(D(f)) \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ definida por $s(\mathfrak{p}) = a/f^n \in A_{\mathfrak{p}}$. Esto siempre tiene sentido pues, si $\mathfrak{p} \in D(f)$, entonces $f \notin \mathfrak{p}$ y por tanto en $A_{\mathfrak{p}}$ podemos considerar el elemento a/f^n .

Veamos que φ es inyectiva. Si $\varphi(a/f^n) = \varphi(b/f^m)$, entonces para cada primo $\mathfrak{p} \in D(f)$ se tiene que $a/f^n = b/f^m$ en $A_{\mathfrak{p}}$. Por tanto, existe un elemento $h \notin \mathfrak{p}$ tal que $h(af^m - bf^n) = 0$ en A . Consideramos \mathfrak{a} el anulador de $(af^m - bf^n)$. Se tiene entonces que $h \in \mathfrak{a}$ y $h \notin \mathfrak{p}$, de manera que $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$. Para cada $\mathfrak{p} \in D(f)$, existirá un h con esta propiedad, por tanto, $V(\mathfrak{a}) \cap D(f) = \emptyset$. Esto significa que cualquier primo que contiene a \mathfrak{a} no está en $D(f)$, es decir, está en $V(f)$ y por tanto cualquier primo que contiene a \mathfrak{a} contiene a (f) . Esto implica que $\sqrt{(f)} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ y como $f \in \sqrt{(f)}$, existe k tal que $f^k \in \mathfrak{a}$. Sin embargo, \mathfrak{a} es el anulador de $af^m - bf^n$, luego se tiene que $f^l(af^m - bf^n) = 0$ lo que implica que $a/f^n = b/f^m$ en A_f .

La sobreyectividad es la parte más rocosa de esta prueba pues, sin más información que las fracciones que representan a una función localmente, tenemos que construir un elemento de A_f que represente esa misma función en todo $D(f)$, lo cual es bastante tedioso. Tomamos un elemento $s \in \mathcal{O}(D(f))$. Por la definición de $\mathcal{O}(D(f))$, se tiene que existe un recubrimiento de $D(f)$ por abiertos V_i , en los que s está dada por un cociente a_i/g_i donde $g_i \notin \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in V_i$, es decir, $V_i \subset D(g_i)$. Como los $D(h)$ son una base de la topología, podemos refinar el recubrimiento a $D(h_{ji}) \subset V_i$. Como $D(h_{ji}) \subset V_i \subset D(g_i)$ entonces $V(g_i) \subset V(h_{ji})$ y la proposición 3.14 nos dice que entonces $\sqrt{(h_{ji})} \subset \sqrt{(g_i)}$. Por tanto, $h_{ji}^n = cg_i$ para algún n , de manera que $a_i/g_i = c_j a_i/h_{ji}^n$. Como $D(h_{ji}) = D(h_{ji}^n)$, renombrando los h_{ji}^n como d_k y $c_j a_i$ como b_k , podemos suponer que $D(f)$ está recubierto por abiertos de la forma $D(d_k)$ y en cada uno de esos abiertos s está dado por b_k/d_k .

Vamos a ver que se puede cubrir $D(f)$ con una cantidad finita de estos abiertos.

$$\text{Spec}(A) \setminus V(f) = D(f) \subset \bigcup D(d_k) = \bigcup (\text{Spec}(A) \setminus V(d_k)) = \text{Spec}(A) \setminus \left(\bigcap (V(d_k)) \right)$$

esto es equivalente a $\bigcap (V(d_k)) = V(\sum d_k) \subset V(f)$. La proposición 3.14 nos dice de nuevo que esto es equivalente a $\sqrt{f} \in \sqrt{\sum d_k}$ lo que a su vez equivale a que existan $m \in \mathbb{N}$ y $l_i \in A$ con $i = 1, 2, \dots, r$, tales que $f^m = \sum l_i d_i$, donde la suma es finita por la definición del ideal suma.

Podemos entonces recorrer la cadena de equivalencias en sentido inverso, sustituyendo todos los d_k por los que generan f^m que son finitos, y de esta manera llegamos a que $D(f) \subset \bigcup_{k=1}^r D(d_k)$.

Para terminar, en $D(d_i) \cap D(d_j) = D(d_i d_j)$ tenemos dos representantes distintos de s , b_i/d_i y b_j/d_j . La inyectividad, que hemos probado en el apartado anterior, aplicada a $A_{d_i d_j}$, nos dice que dos elementos que den lugar a la misma aplicación son iguales. Por tanto, $b_i/d_i = b_j/d_j$ en $A_{d_i d_j}$. Debe existir entonces n tal que $(d_i d_j)^n (b_i d_j - b_j d_i) = 0$. Como hemos conseguido reducir los d_i a una cantidad finita, podemos encontrar un n que funcione para todos los pares de $d_i d_j$ posibles, de manera que la ecuación $d_j^{n+1} (d_i^n b_i) - d_i^{n+1} (d_j^n b_j) = 0$ (*) es válida para todo i, j . Renombrando una última vez los elementos $d_i^{n+1} = t_i$ y $d_i^n b_i = e_i$, tenemos que $D(t_i) = D(d_i) = D(h_i)$ y, en cada uno de estos abiertos, s está representado por $e_i/t_i = d_i^n b_i/d_i^{n+1}$. La ecuación (*) que acabamos de deducir nos dice que $e_i t_j = e_j t_i$ para todo i, j . Como ya hemos visto que si los $D(t_i)$ recubren $D(f)$ entonces se puede escribir alguna potencia de f en términos de los t_i , $f^n = \sum \mu_i t_i$. Entonces, si consideramos $e = \sum \mu_i e_i$, se tiene que para cada índice i , $t_i e = \sum \mu_j t_j e_j$. Si utilizamos que $e_i t_j = e_j t_i$, la ecuación se transforma en $t_i e = \sum \mu_j t_j e_j = \sum \mu_j t_j e_i = f^n e_i$ y entonces $e/f^n \in A_f$ es el elemento que buscábamos. Efectivamente, en cada $D(t_i)$ la última ecuación nos dice que $e/f^n = e_i/t_i$ que es el elemento que representa a s en ese abierto. Como los $D(t_i)$ recubren $D(f)$, se tiene e/f^n representa s en todo $D(f)$. \square

Proposición 3.24. $\mathcal{O}(A) \cong A$.

Demostración. Es un corolario de la proposición anterior teniendo en cuenta que $D(1) = A$. \square

Definición 3.25. Llamamos *esquema afín* a un espacio anillado en anillos locales (X, \mathcal{O}) que es isomorfo como espacio anillado en anillos locales a $\text{Spec}(A)$ para algún anillo A .

Vamos a comprobar ahora que en los casos de variedades algebraicas hay una forma de interpretar el haz que hemos dado como el haz de funciones racionales y, que las propiedades que acabamos de probar son generalizaciones de las que esperaríamos para variedades. Después, veremos como se interpretan los casos que se salen de las variedades algebraicas.

Ejemplo 3.26. Sea $R = \mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y + z^2 - 1)$. Vamos a ver cómo podemos interpretar una función $s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ del haz de R . Como una función que sale de $\text{Spec}(R)$ y llega a distintos cuerpos según el punto \mathfrak{p} que consideremos. Tomamos en el abierto $D(z)$ la función s representada por $\frac{7x-2}{x^2+y-1}$. En primer lugar, hay que darse cuenta de que estos polinomios son elementos de R , de manera que este cociente es lo mismo que $\frac{7x-2}{z^2}$. Se cumple entonces que para todo $\mathfrak{p} \in D(z)$ se tiene $z \notin \mathfrak{p}$, que era un requisito para nuestra s . Si nos fijamos primero en los puntos cerrados, $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} = (x-a, y-b, z-c)$, que son los que tienen equivalente clásico, la imagen de s en estos puntos nos deja un poco fríos pues $s(\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}) = \frac{7x-2}{z^2} \in R_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}}$ es la propia función pero vista en el anillo $A_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}}$. Si queremos asignar un valor en un cuerpo a esta función, podemos pasar al cociente $R_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \simeq \mathbb{C}$. En este anillo cociente, $x = a, y = b, z = c$, es decir, la imagen de s en el cociente no es otra cosa que la evaluación, recuperando así la noción clásica. Veamos ahora qué pasa con la imagen de s en un punto no cerrado. Tomamos por ejemplo el punto $\mathfrak{p} = (z - 1/2) \in D(z)$. De nuevo no obtenemos un valor en un cuerpo $s(\mathfrak{p}) = \frac{7x-2}{z^2} \in R_{\mathfrak{p}}$. Sin embargo, una vez hemos localizado en \mathfrak{p} , este ideal se ha convertido en maximal y, si pasamos ahora al cociente $k(\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} = (R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$, tenemos un cuerpo que podemos considerar el cuerpo donde evaluar nuestra función. En este caso es un cuerpo conocido pues $R \simeq \mathbb{C}[x, z]$ mediante el morfismo que envía y en $x^2 + z^2 - 1$, de manera que $R/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{C}[x, y]/(z - 1/2) \simeq \mathbb{C}[x]$ y al localizar en $(z - 1/2)$, que es el ideal 0 del cociente, se tiene que $k(\mathfrak{p}) = \mathbb{C}(x)$. Este anillo es el formado por las funciones racionales en una variable. De hecho, si evaluamos estas funciones en un valor $x = a$, obtenemos el valor de la función original en el punto $(a, b, 1/2)$, que no

depende del valor de b . En este caso, no parece que haya ningún fenómeno muy diferente al caso de variedades algebraicas, lo que es bueno, pues pretendíamos que los esquemas fuesen una generalización de las variedades algebraicas. Además, los teoremas que hemos probado encajan perfectamente con lo que sabemos. Las funciones racionales de la variedad que representa R están dadas justamente por los elementos de R , las funciones racionales en el complemento de una subvariedad dada por f son cocientes de elementos de R donde el denominador es una potencia de f , es decir, R_f y, finalmente, los gérmenes de funciones en un punto p están dados por el anillo local $R_{\mathfrak{m}_p}$.

Ejemplo 3.27. Vamos a ver ahora un caso donde la intuición de las variedades desaparece. ¿Cómo son los elementos del haz de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$? En un abierto básico, por ejemplo $D(3)$, son fracciones donde el denominador es una potencia de 3. Consideramos $7/9 \in \mathbb{Z}_3$. ¿Qué pasa cuando evaluamos estas funciones en diferentes puntos? Por ejemplo en $\mathfrak{p} = (2)$, en teoría $s(\mathfrak{p}) = 7/9 \in \mathbb{Z}_{(2)}$, pero al igual que en el ejemplo anterior, si solo hacemos esto nos quedamos igual, es el mismo elemento visto en otro anillo. Si queremos obtener un valor en el cuerpo, debemos pasar al cociente $\mathbb{Z}_{(2)}/(2) = \mathbb{F}_2$ y aquí obtendremos $7/9 = 1$. Si queremos evaluar ahora en (13) tenemos que en \mathbb{F}_{13} $7/9 = 7 \cdot 3 = 21 = 8$. Por último, si quisiésemos evaluar en el punto genérico (0) , obtendríamos el valor $7/9$ en el cuerpo \mathbb{Q} . Vemos que a diferencia de lo que pasaba en el caso anterior, nuestra función toma valores en un cuerpo muy diferente en cada punto, tanto que incluso tienen características distintas. Quizás aquí se pueda entrever mejor por qué puede resultar interesante esta estructura. La función s evaluada en (p) nos da los resultados de la operación $7/9$ en el cuerpo primo de característica p . Esto nos permite tener un pensamiento geométrico en la aritmética.

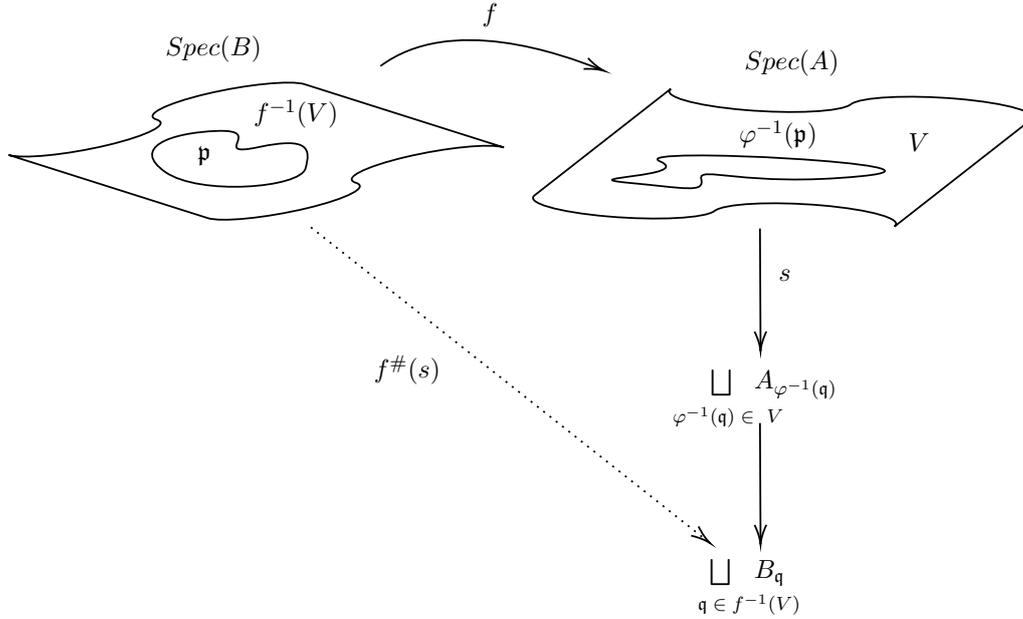
Definición 3.28. Llamamos esquema a un espacio anillado en anillos locales (X, \mathcal{O}) tal que, para cada punto $P \in X$, existe un entorno U de P cumpliendo que el espacio topológico U y la restricción del haz \mathcal{O} a U es un esquema afín.

Definición 3.29. Un morfismo de esquemas es un morfismo de espacios anillados en anillos locales entre esquemas.

Vamos a ver ahora como dado un morfismo entre dos anillos $\varphi : A \rightarrow B$, se puede definir un morfismo f entre los esquemas afines dados por estos $(f, f^\#) : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$. Este morfismo de esquemas se define de la siguiente manera:

La aplicación f entre los espacios topológicos viene dada por $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Hay que probar que es continua, para ello, vamos a ver que la contraimagen de un cerrado es cerrada. Cualquier cerrado de $\text{Spec}(A)$ es de la forma $V(\mathfrak{a})$ con \mathfrak{a} un ideal de A . Se tiene entonces que $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a}))$. Si $\mathfrak{p} \in f^{-1}(V(\mathfrak{a}))$, significa que $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \supset \mathfrak{a}$, lo que implica que $\varphi(\mathfrak{a}) \subset \varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})) \subset \mathfrak{p}$, luego $\mathfrak{p} \in V(\varphi(\mathfrak{a}))$. Recíprocamente, si $\mathfrak{p} \in V(\varphi(\mathfrak{a}))$ el ideal generado por $\varphi(\mathfrak{a})$ está contenido en \mathfrak{p} y por tanto $\mathfrak{a} \subset \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{a})) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$, es decir, $\mathfrak{p} \in f^{-1}(V(\mathfrak{a}))$. Concluimos entonces que f es continua.

Continuamos ahora definiendo los morfismos de anillos que dan lugar al morfismo de haces $f^\#$. Para cada $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(B)$, podemos localizar el homomorfismo φ en \mathfrak{p} para obtener un homomorfismo local $\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$. Para definir un morfismo de haces tenemos que dar, para cada abierto V de $\text{Spec}(A)$, un morfismo entre $\mathcal{O}(V)$ y el haz $f_*\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(f^{-1}(V))$. Definimos este morfismo como el morfismo que envía $s \in \mathcal{O}(V)$ en la aplicación $f^\#(s) \in f_*\mathcal{O}(V)$, definida como $f^\#(s)(\mathfrak{p}) = \varphi_{\mathfrak{p}}(s(f(\mathfrak{p})))$. El siguiente diagrama hace un poco más clara esta definición.



Nótese como el esquema de construcción del morfismo f^\sharp es idéntico al del ejemplo 3.6 para aplicaciones continuas, salvo que hay que traducir la llegada debido a la peculiaridad de nuestro haz de tomar valores en distintos anillos según el punto y según el esquema.

Vamos a comprobar, paso a paso, que esto que hemos definido es realmente un morfismo entre esquemas.

Esta composición tiene sentido, pues si $\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)$ entonces $f(\mathfrak{p}) \in V$ de manera que $s(f(\mathfrak{p}))$ es un elemento de $A_{f(\mathfrak{p})} = A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}$ sobre el que podemos hacer actuar $\varphi_{\mathfrak{p}}$ para obtener un elemento de $B_{\mathfrak{p}}$. Para ver que f^\sharp es un morfismo, observamos que $f^\sharp(s_1 + s_2)(\mathfrak{p}) = \varphi_{\mathfrak{p}}[(s_1 + s_2)(f(\mathfrak{p}))] = \varphi_{\mathfrak{p}}[s_1(f(\mathfrak{p})) + s_2(f(\mathfrak{p}))] = \varphi_{\mathfrak{p}}(s_1(f(\mathfrak{p}))) + \varphi_{\mathfrak{p}}(s_2(f(\mathfrak{p}))) = f^\sharp(s_1)(\mathfrak{p}) + f^\sharp(s_2)(\mathfrak{p})$. De manera análoga se prueba que f^\sharp respeta el producto, el cero y el uno. Falta ver que estas funciones están dadas, localmente, por un cociente. Dado $\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)$, existe un entorno U donde $\varphi_{\mathfrak{p}}(s(f(\mathfrak{p})))$ está dado por un cociente de elementos de B . Como sabemos que s está dada por un cociente, existe a/g tal que, en un entorno $U \subset V$ de $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, se tiene que $s(\mathfrak{q}) = a/g \in A_{\mathfrak{q}}$ y $g \notin \mathfrak{q}$. Si se cumple esto, entonces $\varphi(a)/\varphi(g)$ representa $f^\sharp(s)$ en $f^{-1}(U)$. Efectivamente, dado $\mathfrak{q} \in f^{-1}(U)$ se tiene que como $g \notin \mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ entonces $\varphi(g) \notin \mathfrak{q}$ y además $\varphi_{\mathfrak{q}}(s(f(\mathfrak{q}))) = \varphi_{\mathfrak{q}}(a/g) = \varphi(a)/\varphi(g) \in A_{\mathfrak{q}}$.

Hay que comprobar también que estas aplicaciones cumplen las condiciones para ser un morfismo de haces, es decir, que conmutan con la restricción. En este caso no hay ningún problema, pues en nuestro haz los morfismos de restricción son restricciones en el sentido usual. Dados dos abiertos $U \subset V$ de $\text{Spec}(A)$, si $s \in \mathcal{O}(V)$ se tiene que las funciones de $f^{-1}(U)$ dadas por $\varphi_{\mathfrak{p}}(s|_U(f(\mathfrak{p}))) = \varphi_{\mathfrak{p}}(s(f(\mathfrak{p})))|_{f^{-1}(U)}$ son obviamente la misma.

Por último, para ver que esto es un morfismo de espacios anillados en anillos locales, necesitamos ver que el morfismo en los anillos de gérmenes de los puntos es local. Para ello, vamos a comprobar que el morfismo entre $\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es $\varphi_{\mathfrak{p}}$ (entendido bajo el isomorfismo probado en la proposición 3.22). En esa proposición probamos que una clase de equivalencia (U, s) de $\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}$ estaba unívocamente determinada por el elemento $s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))$. De igual modo, la clase imagen $(f^{-1}(U), f^\sharp(s))$ está determinada por su valor en \mathfrak{p} , que resulta ser $\varphi_{\mathfrak{p}}(s(f(\mathfrak{p}))) = \varphi_{\mathfrak{p}}(\varphi^{-1}(\mathfrak{p}))$, y por tanto el morfismo en los anillos de gérmenes es $\varphi_{\mathfrak{p}}$.

Lo siguiente que debemos hacer ahora es comprobar que dados dos morfismos de anillos $\varphi :$

$A \longrightarrow B$ y $\phi : B \longrightarrow C$ el morfismo de esquemas h asociado a $\phi \circ \varphi$ es la composición en orden contrario de los morfismos de esquemas f y g asociados φ y a ϕ respectivamente, esto es $h = g \circ f$.

La comprobación, más allá de estar recargada de notación, es bastante directa. Para las aplicaciones entre espacios topológicos se tiene que $h(\mathbf{p}) = (\phi \circ \varphi)^{-1}(\mathbf{p}) = \varphi^{-1}(\phi^{-1}(\mathbf{p})) = g(f(\mathbf{p}))$. Para los morfismos de haces hay que comprobar que la composición de morfismos de haces $f^\#(g^\#(s)) = f^\#(\phi_{\mathbf{p}}(s(g(\mathbf{p})))) = \phi_{\mathbf{p}}(\varphi_{\phi^{-1}(\mathbf{p})}(s(g(f(\mathbf{p}))))$ es lo mismo que el morfismo de haces que induce la composición $(g \circ f)^\# = (\phi \circ \varphi)_{\mathbf{p}}(s((g \circ f)(\mathbf{p})))$, lo que es cierto sin más que acudir a la definición de cada uno de los objetos que aparecen. Más sencillo aún es comprobar que el morfismo de espacios anillados en anillos locales inducido por la identidad es la identidad.

Estas dos condiciones juntas nos dicen que $Spec()$ es un funtor contravariante de la categoría de anillos en la categoría de esquemas afines que envía un anillo A en $Spec(A)$ y un morfismo de anillos φ en el morfismo de esquemas que en la construcción anterior hemos llamado f . De ahora en adelante, en concordancia con la notación para funtores, llamaremos a este morfismo $Spec(\varphi)$ o $S(\varphi)$ para abreviar.

Nuestro objetivo es probar ahora que este funtor es en realidad una antiequivalencia de categorías. Para ello, vamos a definir un funtor de la categoría de esquemas afines en la categoría de anillos y vamos a comprobar que la composición de ambos es la identidad. Esto es notablemente más fácil que el camino inverso, lo cual es lógico si comparamos la complejidad técnica de los morfismos de esquemas afines con los morfismos de anillos.

Dado un morfismo de esquemas afines $(f, f^\#) : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$, hemos probado en la proposición 3.24 que $\mathcal{O}(Spec(A)) = A$ y $\mathcal{O}(Spec(B)) = B$, por tanto, nuestro morfismo de haces $f^\#$ nos da, mediante el isomorfismo de la proposición 3.23, un morfismo de anillos entre A y B que vamos a definir como morfismo asociado a $(f, f^\#)$.

Esta correspondencia será un funtor si conmuta con la composición. Esto es, si el morfismo asociado a $(f, f^\#) \circ (g, g^\#)$ es la composición en orden contrario de los morfismos asociados a $(f, f^\#)$ y $(g, g^\#)$. Si repasamos la definición de la composición de morfismos de espacios anillados en anillos locales, el morfismo entre haces de la composición era justamente la composición de los morfismos entre haces (una vez estos habían sido trasladados para hacerlos compatibles), por tanto, no hay nada que comprobar. Tampoco hay que hacer nada para ver que la identidad induce la identidad.

Proposición 3.30. *El funtor $Spec$ es una equivalencia de categorías entre la categoría de anillos y la categoría de esquemas afines.*

Demostración. Para ver esto hay que comprobar que compuestos en ambos sentidos, los funtores que hemos definido son isomorfos a la identidad. No hay ninguna duda de que esto es así para los objetos de la categoría, la parte difícil es comprobarlo para los morfismos.

Supongamos que tenemos un morfismo de anillos $\varphi : A \longrightarrow B$. Entonces, este induce un morfismo $(f, f^\#)$. Este morfismo $f^\#$ actúa en un elemento $s \in \mathcal{O}(Spec(A))$ como $f^\#(s) = \varphi_{\mathbf{p}}(s(f(\mathbf{p})))$. Para ver qué morfismo induce esto entre A y B tenemos que usar el isomorfismo descrito en la proposición 3.23, que nos dice que, para s , existe un único $a \in A$ tal que $s(\mathbf{p}) = a \in A_{\mathbf{p}}$. La imagen de este a por el morfismo que induce $(f, f^\#)$ será el elemento que representa la aplicación $\varphi_{\mathbf{p}}(s(f(\mathbf{p}))) = \varphi_{\mathbf{p}}(a) = \varphi(a)$. Entonces, esta aplicación está representada por $\varphi(a)$, de manera que el morfismo de anillos que induce $(f, f^\#)$ es de nuevo φ .

De igual manera, dado $(f, f^\#)$ el morfismo inducido, φ envía un elemento a de A que representa a s , en el elemento $\varphi(a)$ que representa $f^\#(s)$. Cuando definimos el morfismo en los anillos de

gérmenes de los puntos $f_{\mathfrak{p}}^{\#}$, vimos que el siguiente diagrama era conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varphi} & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}(\text{Spec}(A)) & \xrightarrow{f^{\#}} & \mathcal{O}(\text{Spec}(B)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}_{f(\mathfrak{p})} & \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}^{\#}} & \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_{f(\mathfrak{p})} & \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}^{\#}} & B_{\mathfrak{p}}
 \end{array}$$

j i

Si leemos este diagrama bajo las identificaciones que nos dan los isomorfismos de la proposición 3.22 y la proposición 3.23, los morfismos verticales que envían cada función s en su evaluación en el punto se convierten en los morfismos de localización i, j . Como el morfismo $f_{\mathfrak{p}}^{\#}$ es local, se tiene que $j^{-1}((f_{\mathfrak{p}}^{\#})^{-1}(\mathfrak{p})) = f(\mathfrak{p})$. Si calculamos la contraimagen por el otro camino del diagrama obtenemos $\varphi^{-1}(i^{-1}(\mathfrak{p}))$, de manera que $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$. Sin embargo, esta es la definición de la aplicación continua inducida por φ que debe ser por tanto la propia f . Una vez que sabemos esto, vamos a ver que $f_{\mathfrak{p}}^{\#}$ es $\varphi_{\mathfrak{p}}$, que se deduce de la propiedad universal de la localización. Si $x \notin f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ se tiene que $i(\varphi(x)) \notin \mathfrak{p}$ y por tanto es una unidad. Todos los elementos de $A \setminus \varphi(\mathfrak{p})$ van a parar mediante $i \circ \varphi$ en una unidad, por tanto, la propiedad universal de la localización para el anillo A , nos dice que este morfismo factoriza de manera única a través de i . Como $f_{\mathfrak{p}}^{\#}$ y $\varphi_{\mathfrak{p}}$ son dos morfismos que hacen el diagrama conmutativo son iguales. Una vez sabemos esto, se tiene que dada una aplicación $s \in \mathcal{O}(U)$, como el diagrama de la definición 3.9 conmuta y los morfismos verticales son la evaluación, se tiene que $f^{\#}(s)(\mathfrak{p}) = f_{\mathfrak{p}}^{\#}(s(f(\mathfrak{p})))$. Como hemos visto que $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ y que $\varphi_{\mathfrak{p}} = f_{\mathfrak{p}}^{\#}$, se tiene que $f^{\#}(s)(\mathfrak{p}) = f_{\mathfrak{p}}^{\#}(s(f(\mathfrak{p}))) = \varphi_{\mathfrak{p}}(s(\varphi^{-1}(\mathfrak{p})))$, que es la definición del morfismo de haces que induce φ . \square

Esta proposición que acabamos de probar nos dice que cualquier propiedad que se pueda probar en lenguaje de categorías para anillos será cierta también para los esquemas afines y viceversa. Es natural entonces que surja la duda de por qué hemos montado todo este lío para definir un objeto que es técnicamente muy complejo y no aporta nada. Esta pregunta es compleja y requiere de un conocimiento de la teoría de esquemas mucho más avanzado, pero trataremos de dar una pequeña justificación. En primer lugar, no todos los problemas se pueden enunciar en términos de categorías por lo que hay problemas de anillos que no se podrían resolver con esquemas y viceversa. Para los problemas que sí que son equivalentes, tenemos la ventaja de poder contar con la intuición y herramientas propias de la geometría, que no tendríamos si nos limitamos a anillos. Habrá ocasiones en las que tener una intuición geométrica del problema nos aporte enfoques distintos a los algebraicos, que pueden llevarnos a plantear tanto soluciones como problemas nuevos. Por último, al igual que las variedades afines no permiten probar los teoremas en toda su generalidad y pegamos varias para construir variedades proyectivas que se comportan mejor, los esquemas afines no son el objeto geométrico que permite probar los teoremas más potentes, para ello, necesitamos pegar varios esquemas afines que dan lugar a un esquema. Debido a esto último, hay que manejar la equivalencia entre esquemas afines y anillos con cuidado, por ejemplo, un objeto que cumpla una propiedad universal en la categoría de anillos va a cumplir la misma propiedad universal en la categoría de esquemas afines no en la categoría de esquemas en general. Aunque no lo vamos a ver en este trabajo esto tiene implicaciones importantes a la hora de algebrizar la deformación semiuniversal formal que nos da el Teorema de Schlessinger.

3.3. Espacio tangente y anillos de Artin

El objeto original de estudio en el que estábamos interesados eran las variedades algebraicas afines. La teoría de deformaciones nos obliga a trabajar con esquemas afines, por tanto, este es el marco en el que nos vamos a mover. Sin embargo, no debemos olvidar cuál era nuestro interés original y por ello vamos a fijar un cuerpo k y a trabajar con k -álgebras finitamente generadas y no con anillos en toda su generalidad. Además, vamos a considerar solo los morfismos de esquemas dados por morfismos de k -álgebras para eliminar automorfismos indeseados.

Definición 3.31. Diremos que un esquema X es un esquema sobre k o un k -esquema si existe un morfismo $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ al que llamaremos morfismo de estructura. En el caso afín, es decir, $X = \text{Spec}(A)$, según la antiequivalencia de categorías hay un morfismo $k \rightarrow A$, es decir, A es una k -álgebra.

Definición 3.32. Diremos que X es un esquema algebraico sobre k o un k -esquema algebraico si:

Es un esquema afín $X = \text{Spec}(A)$ con A una k -álgebra finitamente generada o si es un k -esquema y además para cada punto $x \in X$ existe un entorno afín $x \in \text{Spec}(A) \subset X$ de tal manera que la restricción del morfismo de estructura a $\text{Spec}(A)$, vista bajo la antiequivalencia, es un morfismo de tipo finito. Es decir, A está finitamente generado como k -álgebra.

No cabe duda de que la antiequivalencia que probamos para anillos y esquemas afines se traduce instantáneamente a una antiequivalencia entre k -esquemas afines y k -álgebras o entre k -esquemas algebraicos afines y k -álgebras finitamente generadas.

Definición 3.33. Un morfismo de esquemas afines sobre k o k -morfismo es un morfismo de esquemas $f : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ que conmuta con los morfismos de estructura. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(A) & \xrightarrow{f} & \text{Spec}(B) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec}(k) & \end{array}$$

Nos restringimos a morfismos de este tipo para evitar problemas con los automorfismos de los cuerpos, que no nos aportan información relevante sobre la geometría.

Ejemplo 3.34. Si tomamos $\text{Spec}(\mathbb{C})$, solo hay un ideal primo (0) de manera que el espacio que estamos considerando es un punto. Si nos restringimos a morfismos de \mathbb{C} -álgebras, obviamente solo hay un automorfismo del punto en sí mismo, que es lo que queremos. Sin embargo, hay una cantidad enorme de automorfismos de \mathbb{C} si solo consideramos su estructura como anillo. Este problema, que hemos ejemplificado con \mathbb{C} , aparece siempre que el cuerpo sobre el que trabajamos tenga automorfismos. Es por esto que vamos a limitarnos a morfismos de k -álgebras.

Definición 3.35. Dado un esquema afín X y un punto $x \in X$ correspondiente a un ideal primo \mathfrak{p} , definimos el ideal maximal de x , que denotamos como \mathfrak{m}_x , como el ideal maximal del anillo de gérmenes \mathcal{O}_x . Además, se define el cuerpo de residuos de x , que denotamos $k(x)$, como $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$. Con lo que hemos visto en la sección anterior, se tiene que $k(x) \simeq A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$. De hecho, también se suele denotar a este cuerpo como $k(\mathfrak{p})$.

Definición 3.36. Dado un esquema afín X y un punto $x \in X$, se dice que el punto es k -racional si $k(x) \simeq k$.

Proposición 3.37. Dado un cuerpo K y un esquema afín $X = \text{Spec}(A)$, es equivalente dar un punto $x \in X$ y una inclusión $k(x) \rightarrow K$ que dar un morfismo $f : \text{Spec}(K) \rightarrow X$.

Demostración. Dado un punto $x \in X$, podemos construir muchos morfismos de $\text{Spec}(K)$ en X que cumplan que $f(0) = x$. De hecho, para ello basta con tomar un morfismo de anillos $\varphi : A \rightarrow K$ tal que $\text{Ker}(\varphi) = \mathfrak{m}_x$. Sin embargo, si además nos dan una inclusión particular de $k(x) \rightarrow K$, podemos decidirnos por uno de estos morfismos. Concretamente, el morfismo de A en K viene dado por

$$A \longrightarrow A/\mathfrak{m}_x = k(x) \longrightarrow K.$$

Recíprocamente, dado un morfismo $f : \text{Spec}(K) \rightarrow X$ se tiene un morfismo $\varphi : A \rightarrow K$. El punto $f(0)$ viene dado por $\mathfrak{p} = \text{Ker}(\varphi)$. Además, como el morfismo llega en un cuerpo, se tiene que la imagen de todos los elementos que no están en \mathfrak{p} es una unidad. Por tanto, el morfismo factoriza a través de la localización en \mathfrak{p}

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & K \\ \downarrow & \nearrow \varphi_{\mathfrak{p}} & \\ A_{\mathfrak{p}} & & \end{array}$$

de donde se deduce que $k(x) = A_{\mathfrak{p}}/\text{Ker}(\varphi_{\mathfrak{p}}) \simeq \text{Im}(\varphi_{\mathfrak{p}}) \subset K$, lo que nos da la inclusión que buscábamos. \square

En este ejemplo se ve como un esquema es mucho más complejo que el espacio topológico subyacente. Todos los cuerpos K tienen como espectro un espacio topológico unipuntual, sin embargo, no podemos construir una aplicación que envíe el punto $\text{Spec}(K)$ a cualquier punto x de otro esquema. Necesitamos que exista una inclusión de $k(x)$ en K .

El siguiente ejemplo que vamos a considerar es $k[x]/(x^2)$, que de aquí en adelante vamos a denotar por $k[\varepsilon]$. Al igual que con un cuerpo, $\text{Spec}(k[\varepsilon])$ es unipuntual pues el único ideal primo es el generado por (ε) . Sin embargo, a diferencia de como pasaba con los cuerpos, la estructura de $k[\varepsilon]$ como esquema o como anillo es mucho más rica, como vamos a ver ahora. El párrafo que viene a continuación solo pretende dar una justificación intuitiva de cómo entender $\text{Spec}(k[\varepsilon])$. Todo lo que en él se cuenta quedará justificado con los resultados que probaremos inmediatamente después.

En \mathbb{A}_k^1 podemos considerar la variedad dada por dos puntos a y b . El esquema que representa esta variedad es $R = k[x]/((x-a)(x-b))$, que tiene como puntos los ideales maximales $(x-a)$, $(x-b)$ y el punto genérico (0) . Aunque no lo vamos a probar, se podría dar un morfismo de esquemas de $\text{Spec}(R)$ en otro k -esquema algebraico afín X que enviase los puntos a y b a otros dos puntos k -racionales cualesquiera de X . Si ahora pensamos en hacer tender $a \rightarrow b$ lo que sucede en \mathbb{A}_k^1 es que los dos puntos se van acercando hasta confundirse en uno solo. Sin embargo, el anillo que obtenemos no es el correspondiente a un solo punto k , sino un anillo con un poco más de estructura, $k[\varepsilon]$. Podemos pensar en el punto de $k[\varepsilon]$ como en un punto junto con una dirección tangente. Si pensamos en lo que sucede con el morfismo que habíamos construido, los dos puntos de X se irían acercando el uno al otro y en el límite obtendríamos un punto de X y la dirección por la cual se acercaba el otro punto. Si pensamos en el proceso que acabamos de describir, es exactamente como se construye la idea de vector tangente a una variedad diferenciable.

Definición 3.38. Dado un esquema X y un punto $x \in X$, se define el espacio tangente a x , que denotaremos T_x , como el $k(x)$ espacio vectorial dual de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. $T_x = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$.

Ejemplo 3.39. Vamos a ver qué forma tiene el espacio tangente en distintos puntos de una curva. Tomamos por ejemplo la cúspide $R = \mathbb{C}[x, y]/(x^2 - y^3)$ y calculamos la dimensión del espacio tangente en el punto singular $(0, 0)$ correspondiente al ideal primo $\mathfrak{p}_0 = (x, y)$ y en un punto no singular $(1, 1)$ correspondiente al ideal primo $\mathfrak{p}_1 = (x-1, y-1)$. Comenzamos por el

punto no singular. El anillo local en \mathfrak{p}_1 es $R_{\mathfrak{p}_1}$. Como la localización y el cociente conmutan, este anillo es $\mathbb{C}[x, y]_{\mathfrak{p}_1}/(x^2 - y^3)$ y el ideal maximal es por tanto el generado por $(x - 1, y - 1)$. Está claro entonces que $x - 1, y - 1$ son un sistema de generadores de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Sin embargo, no son una base. Al cocientar por $(x^2 - y^3) = (x - 1)^2 + 2(x - 1) - (y - 1)^3 - 3(y - 1)^2 - 3(y - 1)$ hemos añadido la relación $2(x - 1) - 3(y - 1) = -(x - 1)^2 + (y - 1)^3 + 3(y - 1)^2 \in \mathfrak{m}_x^2$. Por tanto, $x - 1, y - 1$ no son base. Basta con uno de ellos para generar $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, pues se tiene $2(x - 1) = 3(y - 1)$. El espacio tangente, que es el dual de este, tiene por tanto dimensión 1 que es lo que esperaríamos de un punto no singular de una curva. Vamos ahora con \mathfrak{p}_0 . Al igual que antes, x, y son un sistema de generadores del ideal \mathfrak{m}_x y por tanto x^2, xy, y^2 son un sistema de generadores de \mathfrak{m}_x^2 . En este caso, podemos ver que x, y sí son base de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, pues, a diferencia que en el caso anterior, la relación que hemos introducido expresada en potencias de x, y no contiene ningún elemento de grado 1. Esto hace imposible $c_1x + c_2y = f_1x^2 + f_2xy + f_3y^2$ pues todos los términos de la derecha tienen grado mayor estricto que 1. El espacio cotangente y por tanto el tangente tienen entonces dimensión 2, que es lo que esperaríamos del punto singular de la cúspide pues cualquier recta que pasa por ese punto la corta con multiplicidad 2.

Vamos a formalizar ahora la idea que hemos comentado anteriormente de como dar un morfismo de $\text{Spec}(k[\varepsilon])$ en $X = \text{Spec}(A)$ es lo mismo que dar un punto x y un vector tangente T_x . Vamos primero con un ejemplo.

Ejemplo 3.40. Supongamos que queremos construir un morfismo de $\text{Spec}(k[\varepsilon])$ en $\text{Spec}(R)$, donde $R = \mathbb{C}[x, y]/(x^2 - y^3)$ y $k = \mathbb{C}$. Esto es equivalente a dar un morfismo de anillos $\varphi : R \rightarrow k[\varepsilon]$. La propiedad fundamental del anillo cociente nos asegura que dar un morfismo de R en $k[\varepsilon]$ es lo mismo que dar un morfismo de $k[x, y]$ que se anula $(x^2 - y^3)$. Supongamos que $\varphi(x) = a + v\varepsilon$ y $\varphi(y) = b + w\varepsilon$. La condición anterior se escribe como $0 = \varphi(x^2 - y^3) = (a + v\varepsilon)^2 - (b + w\varepsilon)^3 = (a^2 - b^3) + (2av - 3b^2w)\varepsilon$. Aquí vemos claramente como para construir el morfismo debemos elegir por un lado un punto (a, b) de nuestra curva y por otro lado (v, w) un vector que sea tangente a la misma en (a, b) . Si elegimos $(a, b) = (1, 1)$, para que la ecuación se anule necesariamente $2v = 3w$, que concuerda con el hecho de que $\dim(T_x) = 1$. Si hacemos $(a, b) = (0, 0)$, la ecuación para el coeficiente de ε se cumple automáticamente y tenemos libertad para elegir (v, w) , lo que de nuevo concuerda con $\dim(T_x) = 2$. En rigor, el elemento del espacio tangente no es (v, w) sino la aplicación lineal de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow \mathbb{C}$ que vamos a construir a continuación. Como ya vimos, $(x - a), (y - b)$ es un sistema de generadores de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Se define entonces la aplicación que envía $c_1(x - a) + c_2(y - b) \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ en $c_1v + c_2w$. Habría que comprobar que esta aplicación está bien definida pero las relaciones que hemos hallado que deben cumplir (v, w) nos lo aseguran.

La generalización de este ejemplo viene dada por la proposición siguiente.

Proposición 3.41. Dado un k -esquema algebraico afín $X = \text{Spec}(A)$ y un punto k -racional x hay un isomorfismo de k -espacios vectoriales entre el espacio tangente a X en x y los morfismos de esquemas de $\varphi : \text{Spec}(k[\varepsilon]) \rightarrow X$ que envían el único punto de $\text{Spec}(k[\varepsilon])$ en x .

Demostración. Denotamos por \mathfrak{m}_x al ideal correspondiente a x . Lo primero que debemos notar es que el morfismo entre los anillos locales $A_{\mathfrak{m}_x}$ y $k[\varepsilon]_{\varepsilon}$ determina el morfismo entre los esquemas y por tanto entre los anillos A y $k[\varepsilon]$. Geométricamente, esto es porque $\text{Spec}(k[\varepsilon])$ solo tiene un punto, y la definición de morfismo de espacios anillados consiste en dar una aplicación continua f , que está determinada por la elección de x , y para cada abierto de la contraimagen de f un morfismo entre los anillos de los respectivos haces. $\text{Spec}(k[\varepsilon])$ es unipuntual, por tanto, solo hay un abierto y solo hay que dar un morfismo, que es el morfismo entre los anillos locales. Algebraicamente, el motivo de esto es que $k[\varepsilon]$ es un anillo local, de manera que localizarlo en (ε) es inocuo. Por tanto, podemos recuperar el morfismo $\varphi : A \rightarrow k[\varepsilon]$ definiéndolo como

$\varphi(x) = \varphi_{\mathfrak{m}_x}(\frac{x}{1})$. Vamos a aprovechar esto para definir la estructura de espacio vectorial de los morfismos de $\text{Spec}(k[\varepsilon])$ en X .

Si x es k -racional significa que $A_{\mathfrak{m}_x}/\mathfrak{m}_x = k$, lo que es equivalente a que $A_{\mathfrak{m}_x} = k \oplus \mathfrak{m}_x$. Entonces, por ser $\varphi_{\mathfrak{m}_x}$ un morfismo de k -álgebras deja fijos los elementos de k y, por tanto, $\varphi_{\mathfrak{m}_x}(\lambda + m) = \lambda + l(m)\varepsilon$, donde l es una aplicación lineal de \mathfrak{m}_x en k . Podemos definir entonces $\mu\varphi + \lambda\psi$ como el morfismo de A en $k[\varepsilon]$ determinado por el morfismo local $(\mu\varphi + \lambda\psi)_{\mathfrak{m}_x}(\lambda + m) = \lambda + (\mu l_\varphi(m) + \lambda l_\psi(m))\varepsilon$.

Finalmente, definimos el isomorfismo como sigue:

A un morfismo φ le vamos a asociar la aplicación $l : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow k$ dada por la aplicación l de la construcción anterior. Lo único que hay que comprobar es que esta aplicación pasa al cociente. Efectivamente, dados $m_1, m_2 \in \mathfrak{m}_x$ se tiene que $\varphi_{\mathfrak{m}_x}(m_1 m_2) = l(m_1 m_2)\varepsilon$, pero por ser $\varphi_{\mathfrak{m}_x}$ morfismo de anillos $\varphi_{\mathfrak{m}_x}(m_1 m_2) = \varphi_{\mathfrak{m}_x}(m_1)\varphi_{\mathfrak{m}_x}(m_2) = (l(m_1)\varepsilon)(l(m_2)\varepsilon) = 0$. Luego, efectivamente l se anula en \mathfrak{m}_x^2 y pasa al cociente. Comprobar que es un isomorfismo es inmediato. \square

Vemos aquí ya de manera más formal la interpretación que habíamos dado de $\text{Spec}(k[\varepsilon])$ como un punto y un vector infinitesimal. Ya tenemos dos formas de describir el espacio tangente T_x . Para la demostración del Teorema de Schlessinger vamos a necesitar una tercera caracterización del espacio tangente T_x , en este caso en términos de derivaciones.

Definición 3.42. *Dados una k -álgebra A y un A -módulo B , definimos una k -derivación de A en B como una aplicación $d : A \rightarrow B$ que*

I) *Es k -lineal.*

II) *Cumple la regla de Leibniz $d(xy) = xd(y) + yd(x)$.*

Nótese que estas condiciones obligan a que d valga 0 en los elementos de k , pues $d(1) = d(1 \cdot 1) = 1d(1) + 1d(1) = 2d(1)$. Estas aplicaciones tienen estructura de k -espacio vectorial con las operaciones obvias. La definición pretende extender la definición de derivación que tenemos en los anillos de polinomios procedente del análisis a anillos en general. En términos de derivaciones, la tercera caracterización de T_x es la siguiente.

Proposición 3.43. *Hay un isomorfismo entre T_x y $\text{Der}_k(A_{\mathfrak{m}_x}, k)$, donde $\text{Der}_k(A_{\mathfrak{m}_x}, k)$ denota las k -derivaciones que salen del anillo localizado en x y llegan en k .*

Demostración. En primer lugar hay que notar que solo hay un morfismo de $A_{\mathfrak{m}_x}$ en k , que es el paso al cociente. Mediante este morfismo, dotamos a k de estructura de $A_{\mathfrak{m}_x}$ -módulo, que nos permite considerar derivaciones. Una vez visto esto, dado l un elemento de T_x , definimos la derivación $d : A_{\mathfrak{m}_x} \rightarrow k$ dada por $d(\lambda + m) = l(m)$. La linealidad de esta aplicación es clara. Vamos a ver que cumple la regla de Leibniz,

$$\begin{aligned} d((\lambda_1 + m_1)(\lambda_2 + m_2)) &= d(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1m_2 + \lambda_2m_1 + m_1m_2) = \\ &= l(\lambda_1m_2 + \lambda_2m_1 + m_1m_2) = \lambda_1l(m_2) + \lambda_2l(m_1). \end{aligned}$$

Por otro lado, $(\lambda_1 + m_1) \cdot d(\lambda_2 + m_2) + (\lambda_2 + m_2) \cdot d(\lambda_1 + m_1)$, recordando que el morfismo de estructura es el paso al cociente, se convierte en $\lambda_1 \cdot d(\lambda_2 + m_2) + \lambda_2 \cdot d(\lambda_1 + m_1) = \lambda_1l(m_2) + \lambda_2l(m_1)$, que cumple por tanto la regla de Leibniz y es una derivación. De igual manera, dada una derivación $d : A_{\mathfrak{m}_x} \rightarrow k$, esta define una aplicación de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, pues d debe anularse en \mathfrak{m}_x^2 . Esto es debido a que $d(m_1 m_2) = m_1 d(m_2) + m_2 d(m_1)$, pero los m_i actúan en k como 0 por tanto $d(m_1 m_2) = 0$ y d es una aplicación lineal de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Está claro que estas construcciones son inversas la una de la otra y por tanto son un isomorfismo. \square

En el caso de que tengamos $\text{Spec}(R)$ con R un anillo local, las proposiciones que acabamos de ver nos dicen que $\text{Hom}(R, k[\varepsilon]) = T_R = \text{Der}_k(R, k)$, donde T_R es el espacio tangente al único punto de R . Esto será bastante relevante durante la demostración del Teorema de Schlessinger.

Las ideas que acabamos de presentar de cómo los morfismos de $\text{Spec}(k[\varepsilon])$ están en correspondencia con los vectores tangentes, se pueden generalizar a órdenes superiores si en vez de considerar $k[x]/(x^2)$ consideramos $k[x]/x^n$ con n arbitrario. En este caso, obtendríamos un esquema con un único punto pero cuya estructura de espacio anillado es más compleja. Los morfismos de estos anillos estarían en correspondencia con arcos infinitesimales de curvas de grado $(n - 1)$, que pasan por el punto de la variedad con un orden de tangencia n o con derivaciones de orden superior, temas en los que no vamos a entrar pero que son de gran interés.

4. Deformaciones

La noción de deformación es la que nos sugiere la intuición. Tenemos un objeto geométrico X_0 y queremos considerar una familia de objetos X_t indexados por un parámetro t que surgen de realizar modificaciones en nuestro objeto original. Además, queremos que haya algún tipo de relación entre X_t y X_0 . Es por esto que hemos dado la noción de planitud, que es la formalización algebraica de esta idea. La condición de planitud nos permite conservar algunos invariantes entre las fibras de la deformación. Estos invariantes codifican información geométrica importante que se mantendrá por tanto constante en las fibras de la deformación. Por ejemplo, dada una variedad X , si somos capaces de deformar X hasta una variedad con buenas propiedades (tórica, no singular,...etc), podemos emplear las propiedades de estas para calcular sus invariantes, que deberán coincidir con los de X .

Las deformaciones son un tema de actualidad sobre el que no hay mucha bibliografía y la que hay tienen un nivel bastante elevado. En el marco algebraico destacan principalmente [11] y [6], el primero de ellos es más abstracto con menos ejemplos pero también, en mi opinión, más preciso. El propio Hartshorne comentó, durante un curso impartido en la universidad de Buenos Aires en 2011, que lo interesante de [6] eran los ejemplos y ejercicios mucho más que la teoría. Dicho curso está disponible on-line y es una gran introducción a la teoría de deformaciones. El marco analítico tiene resultados más potentes y más ejemplos, [4] trata el caso analítico con gran detalle y contiene además una gran cantidad de ejemplos computables.

4.1. Introducción a las deformaciones

Definición 4.1. Una deformación ξ de un esquema X consiste en dar la información del diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{X} \\ i_2 \downarrow & & \downarrow \phi \\ \text{Spec}(k) & \xrightarrow{s_0} & S \end{array}$$

donde todos los morfismos son morfismos de k -esquemas y el morfismo ϕ es plano y sobreyectivo. Al esquema \mathcal{X} se le llama esquema o espacio total de la deformación y a S se le llama espacio de parámetros. Normalmente, se suele denotar a la deformación por el par (ξ, S) .

La idea que hay detrás de esta definición es la siguiente:

En el espacio \mathcal{X} tenemos los objetos que resultan de deformar X formando un todo. El morfismo ϕ nos permite “elegir” cual de estos objetos queremos mirar. Cada fibra $f^{-1}(s)$ sobre un elemento de S se corresponde con uno de los objetos X_s que forman parte de la deformación. Podría parecer que no hemos impuesto ninguna condición al morfismo i_1 y que podría no haber en \mathcal{X} ninguna fibra que fuese isomorfa a X . Sin embargo, al pedir que el diagrama sea cartesiano, en particular se tiene que $X \simeq \mathcal{X} \times_S \text{Spec}(k)$.

Las deformaciones que acabamos de definir son deformaciones de X como variedad abstracta sin espacio ambiente. Estas no son las únicas deformaciones que existen. Se puede deformar la variedad vista en un espacio ambiente, se puede deformar un morfismo entre dos variedades, se puede deformar un morfismo dejando fija la variedad de salida o la de llegada... Además, a cualquiera de estas deformaciones se les puede añadir condiciones a las fibras, dando lugar por ejemplo a deformaciones equisingulares, donde todas las fibras tienen el mismo tipo de singularidad. Esencialmente cualquier objeto geométrico se puede deformar. La existencia de esta gran cantidad de deformaciones justifica la generalidad del enunciado del Teorema de Schlessinger, que trabaja con un funtor arbitrario \mathcal{F} al que se le exigen muy pocas propiedades.

A modo de ejemplo vamos a dar también la definición de deformación de una variedad en un espacio ambiente.

Definición 4.2. Una deformación de un esquema $X \subset Y$ consiste en dar la información del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{j_1} & Y \times S \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 X & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{X} \\
 \downarrow i_2 & & \downarrow \phi \\
 \text{Spec}(k) & \xrightarrow{s_0} & S
 \end{array}$$

donde los morfismos del cuadrado inferior son una deformación y todos los morfismos del cuadrado superior son inclusiones.

En la definición de deformación abstracta aparece el producto fibrado de dos esquemas, y, en la definición de deformación de X en Y , aparece una inclusión de k -esquemas. No hemos definido ninguna de estas dos cosas ni lo vamos a hacer. El objetivo aquí es solo motivar las definiciones de deformación local e infinitesimal, que daremos con todo rigor, y presentar el marco general de la teoría en la que aparece el Teorema de Schlessinger. De aquí en adelante consideraremos siempre $X = \text{Spec}(B_0)$ un k -esquema algebraico afín.

Ejemplo 4.3. Vamos a ver un ejemplo de una deformación de la cúspide. Tomamos $B_0 = \mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^3)$, $X = \text{Spec}(A)$, como espacio total $\tilde{X} = \text{Spec}(B)$ con $B = \mathbb{C}[x, y, t_1, t_2]/(x^2 + y^3 + t_1y + t_2)$ y por último nuestro espacio de parámetros será \mathbb{A}^2 . Los morfismos que definen nuestra deformación son $i : B \rightarrow B_0$ dado por $i(x) = x$, $i(y) = y$, $i(t_i) = 0$ y $\phi : \mathbb{C}[x, y] \rightarrow B$ dado por $\phi(t_i) = t_i$. Esta deformación contiene entre sus fibras tanto curvas singulares, por ejemplo la fibra del punto $(-3, 2) \in \mathbb{A}^2$ correspondiente a la ecuación $x^2 + y^3 - 3y + 2$ tiene un punto singular en $(0, 1) \in \mathbb{A}^2$, como curvas regulares, la fibra del punto $(1, 1) \in \mathbb{A}^2$ es regular en todos sus puntos. Podemos usar el siguiente razonamiento para hallar las fibras singulares. Para que la fibra tenga un punto singular necesariamente $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$, es decir, los puntos singulares de cualquiera de las fibras tienen $x = 0$. Sabiendo esto, calculamos el discriminante respecto a la variable y del polinomio que define una fibra. Este discriminante vale $-4t_1^3 - 27(t_2 + x)^2$. Donde el discriminante se anule tendremos o un punto singular de la fibra o un punto de tangencia vertical, se puede comprobar que en nuestro caso todos los puntos son singulares. Sabiendo que necesariamente $x = 0$ en los puntos singulares, la fibra tendrá un punto singular para los valores de los parámetros que verifiquen $-4t_1^3 - 27t_2^2 = 0$. Haremos uso de esto más adelante.

El estudio de estas deformaciones que acabamos de presentar es tan interesante como complejo, especialmente cuando permitimos que el espacio de parámetros S tome cualquier forma. Una manera de comenzar el estudio de las deformaciones es mirar deformaciones locales o infinitesimales, donde restringimos la forma de S . El estudio de estas deformaciones locales permite después obtener resultados sobre las deformaciones generales. Vamos entonces a definir las categorías a las que van a pertenecer nuestros espacios de parámetros y en las que más adelante vamos a definir los funtores de deformación.

Definición 4.4. Denotaremos por \mathcal{A} a la categoría que tiene por objetos k -álgebras Noetherianas, locales, con cuerpo de residuos k y como morfismos los morfismos locales de k -álgebras. Denotaremos por \mathcal{A}_r la subcategoría de k -álgebras Artinianas, locales, con cuerpo de residuos k . Finalmente, denotamos por $\hat{\mathcal{A}}$ a la categoría que tiene por objetos k -álgebras Noetherianas, locales con cuerpo de residuos k que además son completas.

Las definiciones que vamos a dar de aquí hasta el final del capítulo se van a dar para deformaciones abstractas, pero conviene tener en cuenta que estas mismas definiciones se pueden dar para todos los tipos de deformaciones que hemos mencionado antes, deformaciones de X en Y , deformaciones de morfismos, de morfismos con variedad de partida o llegada fija, deformaciones equisingulares, etc.

Definición 4.5. Una deformación local de un k -esquema algebraico afín X es una deformación donde el espacio de parámetros S es un esquema afín, $S = \text{Spec}(A)$ con A un objeto de \mathcal{A} , y el espacio total de la deformación \mathcal{X} es también un k -esquema algebraico afín.

Definición 4.6. Una deformación infinitesimal de un k -esquema algebraico afín X es una deformación donde el espacio de parámetros S es un esquema afín $S = \text{Spec}(A)$ con A un objeto de \mathcal{A}_r y el espacio total de la deformación \mathcal{X} es también un k -esquema algebraico afín. Nótese que todas las deformaciones infinitesimales son locales.

Definición 4.7. Una deformación infinitesimal con espacio de parámetros $k[x]/(x^{n+1})$ recibe el nombre de deformación infinitesimal de orden n .

Ya vimos cuál era la interpretación geométrica de los anillos de la forma $k[x]/(x^n)$. No es de extrañar por tanto, que deformaciones que tengan anillos Artinianos como espacio de parámetros sean deformaciones infinitesimales.

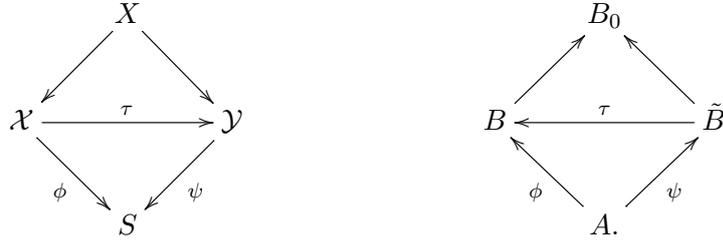
Dado que todos los objetos que aparecen en las deformaciones locales e infinitesimales son afines, la antiequivalencia de categorías nos permite ver una deformación local o infinitesimal de cualquiera de las dos maneras siguientes

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ \text{Spec}(k) & \xrightarrow{s_0} & \text{Spec}(A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B_0 & \longleftarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow \phi \\ k & \xleftarrow{s_0} & A. \end{array}$$

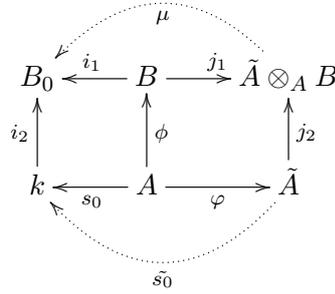
La condición de que $X_0 \simeq \mathcal{X} \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(k)$ se traduce para anillos en que $B_0 \simeq k \otimes_A B$ gracias a la antiequivalencia. Frecuentemente, haremos como aquí y, abusando de la notación, llamaremos de la misma manera a los morfismos de k -álgebras y a su correspondiente morfismo de esquemas. A partir de aquí vamos a utilizar esta equivalencia constantemente y hablaremos de anillos o esquemas indistintamente según sea más conveniente. A pesar de esto, en algunas ocasiones presentaremos los dos diagramas con la intención de que quede claro exactamente cuál es la traducción de una categoría a la otra. Con el objetivo de clarificar la información importante, en los diagramas omitiremos la parte correspondiente a $\text{Spec}(k)$ siempre que no sea relevante.

Nótese que no hay elección del morfismo s_0 pues $\text{Ker}(s_0)$ es un ideal de A que cumple que $A/\text{Ker}(s_0) \simeq k$ y, por tanto, es maximal. Sin embargo, en A solo hay un ideal maximal, luego $\text{Ker}(s_0) = \mathfrak{m}$. Además, los elementos de k deben quedar fijos por s_0 . Estas dos cosas juntas nos dicen que el morfismo s_0 no es otro que el morfismo de paso al cociente. De igual manera, el morfismo de k en B_0 debe ser el morfismo de estructura. Estas observaciones justifican la eliminación de esa parte del diagrama cuando no sea relevante.

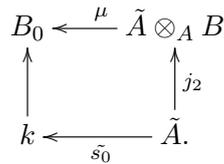
Definición 4.8. Dadas dos deformaciones locales de X , ϕ con espacio total $\mathcal{X} = \text{Spec}(B)$ y ψ con espacio total $\mathcal{Y} = \text{Spec}(\tilde{B})$, ambas con el mismo espacio de parámetros $S = \text{Spec}(A)$, diremos que son isomorfas si existe un isomorfismo local de A -álgebras $\tau : \tilde{B} \rightarrow B$ que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo



Definición 4.9. Dada una deformación local ξ de X dada por $\phi : \mathcal{X} = \text{Spec}(B) \rightarrow S = \text{Spec}(A)$ y un morfismo local de k -álgebras $\varphi : A \rightarrow \tilde{A}$ consideramos el diagrama



donde los morfismos μ y \tilde{s}_0 están definidos como $\mu(a \otimes b) = i_1(b)$ y $\tilde{s}_0(a) = \bar{a}$. Cada cuadrado del diagrama es conmutativo por construcción. Comprobamos que los morfismos que hemos añadido conmutan para la parte superior. Está claro que $\mu(j_1(b)) = \mu(1 \otimes b) = i_1(b)$. Por otro lado, dado un elemento $a \in A$ se tiene que si $s_0(a) = \lambda \in k$ entonces $a = \lambda + m$ con $\lambda \in k$ y $m \in \mathfrak{m}_A$. Por ser φ morfismo de k álgebras local $\tilde{s}_0(\varphi(a)) = \tilde{s}_0(\lambda + \tilde{m}) = \lambda$. Se define entonces la deformación inducida por φ como la deformación siguiente



Para ver que esto es efectivamente una deformación habría que probar que el diagrama es cocartesiano y que j_2 es un morfismo plano. Respecto a lo primero, si el diagrama original era cocartesiano, necesariamente $B_0 \simeq k \otimes_A B \simeq k \otimes_{\tilde{A}} \tilde{A} \otimes_A B$, luego nuestro diagrama también es cocartesiano. La proposición 1.42 nos asegura que si B es un A -módulo plano entonces $\tilde{A} \otimes_A B$ es un \tilde{A} -módulo plano y por tanto j_2 es un morfismo plano. Denotaremos a esta deformación como $\text{Def}_X(\varphi)(\xi)$.

Ejemplo 4.10. Partiendo del ejemplo 4.3 vamos a ver un ejemplo de deformación inducida. Habíamos visto que las fibras de los puntos (t_1, t_2) que cumplían $4t_1^3 + 27t_2^2 = 0$ eran singulares. Podemos entonces, mediante un morfismo $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^2$, inducir una deformación donde todas las fibras sean singulares.

Como tenemos la suerte de que la curva del espacio de parámetros de la deformación $4t_1^2 + 27t_2^3 = 0$ es parametrizable, podemos construir un morfismo de φ que la recorra. Este morfismo estará dado, en términos de anillos, por $\varphi(t_1) = -3t^2$, $\varphi(t_2) = 2t^3$. Con este morfismo la deformación inducida que resulta es

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mu & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 B_0 & \xleftarrow{i_1} & B & \xrightarrow{j_1} & k[t] \otimes_{k[t_1, t_2]} B \\
 & \uparrow i_2 & \uparrow \phi & & \uparrow j_2 \\
 k & \xleftarrow{s_0} & k[t_1, t_2] & \xrightarrow{\varphi} & k[t]. \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & & \bar{s}_0 & &
 \end{array}$$

El anillo $k[t] \otimes_{k[t_1, t_2]} B$ es isomorfo a $k[x, y, t]/(x^2 + y^3 - 3t^2 + 2t^3)$. Esto es debido a que, al tomar el producto fibrado sobre $k[t_1, t_2]$, se cumple que $\phi(t_i) \otimes 1 = 1 \otimes \varphi(t_i)$. Esto permite probar sin dificultad que $\psi : k[x, y, t]/(x^2 + y^3 - 3t^2 + 2t^3) \rightarrow k[t] \otimes_{k[t_1, t_2]} B$ dado por

$$\psi(x) = 1 \otimes x, \psi(y) = 1 \otimes y, \psi(t) = t \otimes 1$$

es un isomorfismo.

Este morfismo está bien definido pues $\psi(x^2 + y^3 - 3t^2 + 2t^3) = (1 \otimes x^2 + y^3) - (3t^2 \otimes 1) + 2t^3 \otimes 1$. Como $3t^2 \otimes 1 = 1 \otimes t_1 y$ y $2t^3 \otimes 1 = 1 \otimes t_2$, entonces, $\psi(x^2 + y^3 - 3t^2 + 2t^3) = 1 \otimes x^2 + y^3 + t_1 y + t_2 = 0$. Es sobreyectivo pues en su imagen hay un sistema de generadores. Veamos que es inyectivo. Para ello basta ver que si $\psi(q(x, t)) = 1 \otimes x^2 + y^3 + t_1 y + t_2$, entonces $q(x, t) = 0$. Se tiene que $q(x, t) = x^2 + y^3 + p(t, y)$ con $\psi(p(t, y)) = t_1 y + t_2 = (-3t^2 \otimes y)(2t^3 \otimes 1)$. Si escribimos $p(t, y) = a_3(y)t^3 + a_2(y)t^2 + a_1(y)t + a_0(y)$ la condición anterior nos dice que $a_1(y) = a_0(y) = 0$, que $a_2(y) = -3y$ y que $a_3(y) = 2$. Este isomorfismo nos dice que la deformación inducida por φ es

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^3) & \xleftarrow{\mu} & \mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^3 - 3t^2 + 2t^3) \\
 \uparrow & & \uparrow j_2 \\
 \mathbb{C} & \xleftarrow{\bar{s}_0} & \mathbb{C}[t].
 \end{array}$$

Esta deformación contiene exactamente las fibras singulares de la deformación del ejemplo 4.3.

Proposición 4.11. Dada una deformación local de $X = \text{Spec}(B_0)$, $\phi : X = \text{Spec}(B) \rightarrow S = \text{Spec}(A_0)$, y dos morfismos locales de k -álgebras, $\varphi : A_0 \rightarrow A_1$ y $\psi : A_1 \rightarrow A_2$, la deformación inducida por el morfismo $\psi \circ \varphi$ es isomorfa a la deformación que induce ψ a partir de la deformación que induce φ . Es decir, $\text{Def}_X(\psi \circ \varphi)(\xi) \simeq \text{Def}_X(\psi)(\text{Def}_X(\varphi)(\xi))$.

Demostración. No hay nada que decir de los morfismos s_0 pues deben ser siempre el paso al cociente. Solo hay que ocuparse por tanto del morfismo de la parte superior. Se tienen los dos diagramas siguientes

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mu_2 & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 B_0 & \xleftarrow{i_1} & B & \xrightarrow{j_1} & A_1 \otimes_{A_0} B \\
 & \uparrow i_2 & \uparrow \phi & & \uparrow j_2 \\
 k & \xleftarrow{s_0} & A_0 & \xrightarrow{\varphi} & A_1 \\
 & & & \xrightarrow{\psi} & A_2 \\
 & & & & \uparrow p_2 \\
 & & & & A_2 \otimes_{A_1} A_1 \otimes_{A_0} B \\
 & & & & \xrightarrow{p_1} \\
 & & & & A_2 \otimes_{A_1} A_1 \otimes_{A_0} B
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 & & \mu_3 & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 B_0 & \xleftarrow{i_1} & B & \xrightarrow{t_1} & A_2 \otimes_{A_0} B \\
 & \uparrow i_2 & \uparrow \phi & & \uparrow t_2 \\
 k & \xleftarrow{s_0} & A_0 & \xrightarrow{\psi \circ \varphi} & A_2.
 \end{array}$$

Queremos probar que el isomorfismo canónico entre $(A_2 \otimes_{A_1} A_1 \otimes_{A_0} B)$ y $(A_2 \otimes_{A_0} B)$, llamémoslo τ , nos da el isomorfismo de las deformaciones. Para ello hay que comprobar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & B_0 & & \\
 & \nearrow^{\mu_2} & & \nwarrow_{\mu_3} & \\
 A_2 \otimes_{A_1} A_1 & \otimes_{A_0} B & \xleftarrow{\tau} & A_2 \otimes_{A_0} B & \\
 & \nwarrow_{p_2} & & \nearrow_{t_2} & \\
 & & A_2 & &
 \end{array}$$

Efectivamente, $\mu_2(\tau(a_2 \otimes b)) = \mu_2(a_2 \otimes 1 \otimes b) = \mu_1(a_1 \otimes b) = i_1(b) = \mu_3(a_2 \otimes b) = i_1(b)$ y también $\tau(t_2(a_2)) = \tau(a_2 \otimes 1) = a_2 \otimes 1 \otimes 1 = p_2(a_2)$. \square

La proposición que acabamos de probar nos permite definir un funtor en términos del cual vamos a enunciar la teoría de deformación formal.

Definición 4.12. Dado un k -esquema algebraico afín X definimos el funtor de deformación local de X , que denotaremos como $\mathcal{D}ef_X$, como un funtor de la categoría \mathcal{A} en la categoría $\mathcal{S}ets$ cuya actuación en los objetos viene dada por

$$\mathcal{D}ef_X(A) = \{\text{clases de isomorfismo de deformaciones locales de } X \text{ sobre } A\}$$

y envía un morfismo φ en el morfismo que definimos más arriba como $\mathcal{D}ef(\varphi)$, que envía una deformación ξ en la deformación $\mathcal{D}ef(\varphi)(\xi)$.

Que el funtor respeta la identidad es claro pues la deformación inducida por la identidad a partir de ξ es isomorfa a ξ . La proposición 4.11 nos asegura que el funtor respeta la composición, por tanto estas dos cosas nos aseguran que el funtor está bien definido.

Abusando de la notación, llamaremos $\mathcal{D}ef_X$ también al funtor anterior restringido a la categoría $\mathcal{A}r$, es decir, al funtor de deformaciones infinitesimales. Siempre que pueda haber lugar a confusión especificaremos a cuál nos referimos. Sin embargo, llegado un punto del texto solo trabajaremos con el funtor de deformación infinitesimal.

4.2. Deformaciones semiuniversales

Definición 4.13. Una deformación local ξ de $X = \text{Spec}(B_0)$ con espacio de parámetros $\text{Spec}(A)$ se dice que es universal si dada cualquier deformación η con espacio de parámetros $\text{Spec}(C)$ existe un único morfismo $\varphi : A \rightarrow C$ tal que $\mathcal{D}ef(\varphi)(\xi) = \eta$.

Idealmente, este es el objeto que nos gustaría conseguir, pues los morfismos de S nos darían de forma precisa toda la información sobre las posibles deformaciones locales de X . Lamentablemente, salvo en casos muy sencillos este objeto no existe, por lo que debemos relajar la definición de deformación universal a la siguiente definición.

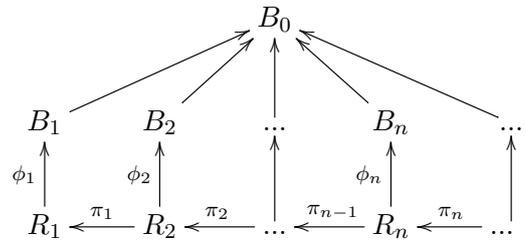
Definición 4.14. Una deformación local ξ de $X = \text{Spec}(B_0)$ con espacio de parámetros $\text{Spec}(A)$ se dice que es semiuniversal si dada cualquier deformación η con espacio de parámetros $\text{Spec}(C)$ existe un morfismo $\varphi : A \rightarrow C$ tal que $\mathcal{D}ef(\varphi)(\xi) = \eta$ y además el morfismo que induce φ en los espacios tangentes es único. Es decir, si φ_1 y φ_2 son dos morfismos que inducen η entonces $\tilde{\varphi}_1 : \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \rightarrow \mathfrak{m}_C/\mathfrak{m}_C^2$ coincide con $\tilde{\varphi}_2 : \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \rightarrow \mathfrak{m}_C/\mathfrak{m}_C^2$.

Dado un esquema algebraico $X = \text{Spec}(B_0)$, probar si existe o no una deformación universal para este esquema es un problema realmente complejo que no está resuelto en todos los casos y requiere técnicas que van mucho más allá de las que se pueden adquirir en el grado o máster.

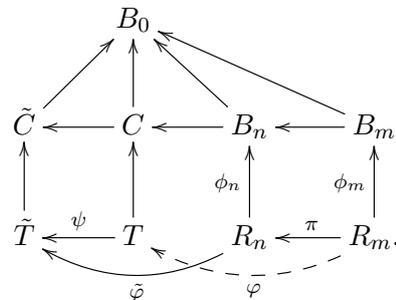
Incluso aunque nos diesen explícitamente la deformación semiuniversal local, probar que esta efectivamente lo es es un trabajo complicado. Esta última dificultad es exclusiva del marco algebraico ya que en el marco analítico se pueden dar bastantes ejemplos de deformaciones semiuniversales. De hecho, se puede dar la forma explícita de la deformación semiuniversal de cualquier singularidad aislada de una hipersuperficie, en esta demostración, para probar que la deformación que se obtiene a partir de la semiuniversal es isomorfa a la que buscábamos, se construye por inducción una serie de potencias y después se prueba su convergencia. Es por esto que esos mismos ejemplos no nos sirven en nuestro caso. Lo que se hace en el marco algebraico es imitar esta idea usando los anillos de Artin. Podemos pensar en la construcción de una serie de potencias término a término como aproximaciones de “Taylor” de orden cada vez mayor. Dada una serie de potencias $f(x) \in k[[X]]$, lo que estamos haciendo al construir las aproximaciones sucesivas es hallar la imagen de f en los anillos $k[[x]]/(x^n)$.

De igual modo, si en el marco algebraico tenemos un anillo R que es la base de una deformación semiuniversal local ξ , los morfismos de truncamiento $\gamma_n : R \rightarrow R_n$ inducen una serie de deformaciones $\xi_n = \text{Def}(\gamma_n)(\xi)$ que son infinitesimales, pues el anillo R_n es de Artin. Además, si la deformación ξ es semiuniversal, cualquier deformación infinitesimal η con espacio de parámetros A se obtiene mediante un morfismo $\varphi : R \rightarrow A$ como $\text{Def}(\varphi)(\xi) = \eta$. Sin embargo, al ser A de Artin se tiene que existe un cierto n que permite pasar φ al cociente, esto es, $\bar{\varphi} \circ \gamma_n = \varphi$ y por tanto $\eta = \text{Def}(\varphi)(\xi) = \text{Def}(\bar{\varphi})(\text{Def}(\gamma_n)(\xi)) = \text{Def}(\bar{\varphi})(\xi_n)$. Es decir, para cada deformación infinitesimal η , existe un n suficientemente grande de manera que la deformación η se puede obtener como una deformación inducida a partir de ξ_n . Lo que vamos a hacer entonces es recorrer el camino inverso en busca de la deformación semiuniversal local. Vamos a construir una sucesión de deformaciones infinitesimales ξ_n con la que vamos a obtener información sobre la deformación semiuniversal local. Para ello, nos bastará con trabajar con el funtor de deformación infinitesimal Def_X .

Definición 4.15. Una deformación formal de X viene dada por un anillo R de \hat{A} y una sucesión de deformaciones ξ_n con espacio de parámetros R_n de tal manera que $\text{Def}(\pi_n)(\xi_{n+1}) \simeq \xi_n$. Es decir, una deformación formal de X consiste en el siguiente diagrama de deformaciones



Definición 4.16. Una deformación formal de X dada por (ξ_n, R) se dice que es versal si cumple la siguiente propiedad



Dada una deformación infinitesimal (η, T) y dos morfismos de k -álgebras de Artin, $\psi : T \rightarrow \tilde{T}$ y $\tilde{\varphi} : R_n \rightarrow \tilde{T}$, que cumplen que $\text{Def}(\psi)(\eta) = \text{Def}(\tilde{\varphi})(\xi_n)$, existe un m suficientemente grande

y un morfismo $\varphi : R_m \longrightarrow T$ de manera que $\psi \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$ y $Def(\varphi)(\xi_m) = \eta$, donde π es la composición de los $\pi_n \circ \pi_{n+1} \circ \dots \circ \pi_{m-1}$. Si además el morfismo que induce φ en los espacios tangentes es único, se dice que la deformación es semiuniversal.

Si en la definición hacemos $\tilde{T} = k$ y $\tilde{C} = B_0$, lo que obtenemos es que dada cualquier deformación infinitesimal (η, T) , existe un m suficientemente grande de manera que (η, T) es una deformación inducida por (ξ_m, R_m) . Además, las condiciones que hemos impuesto nos aseguran que, aunque puede suceder que (η, T) y (η', T') no estén inducidas por ξ_n para el mismo n , la forma de obtener ambas deformaciones como deformaciones inducidas es compatible y existe un m suficientemente grande de manera que ambas son inducidas por ξ_m y por tanto por cualquier ξ_i con $i > m$.

Una vez definido qué entendemos por deformación versal y deformación semiuniversal formal, las construcciones que vienen a continuación son demasiado complejas para presentarse en los términos que venimos manejando hasta aquí y resulta mucho más conveniente comenzar a hablar en términos de categorías y funtores. Resulta casi mágico observar como las definiciones abstractas que damos en términos de funtores terminan encajando a la perfección para darnos el objeto que buscábamos.

5. Deformación Formal

En el capítulo anterior hemos planteado y entendido el problema en términos de anillos o esquemas afines. Sin embargo, para dar la solución debemos plantear el problema en términos de funtores. Esto no es debido a que la teoría de categorías disponga de herramientas más potentes, de hecho nosotros solo la vamos a usar como un lenguaje o notación alternativa. La potencia en este caso resulta del hecho de que al pasar nuestro problema al lenguaje de los funtores, eliminamos la información irrelevante y descargamos la notación. Una deformación pasa de ser un diagrama conmutativo entre cuatro esquemas, a ser un elemento ξ de un conjunto $Def_X(A)$, una deformación inducida se puede escribir como $Def_X(\varphi)(\xi)$. En general podemos representarlo todo de una manera más simple sin perder información.

5.1. k -álgebras locales Noetherianas y Artinianas

Para enunciar el teorema en términos de funtores, lo primero que debemos hacer es probar unos resultados sobre las categorías $\mathcal{A}r$, \mathcal{A} y $\hat{\mathcal{A}}$ (ver definición 4.4), que son las categorías de las que van a partir nuestros funtores.

Proposición 5.1. *En $\mathcal{A}r$ existe el producto fibrado.*

Demostración. La construcción y prueba es idéntica a la ya hecha para anillos. Lo único que vamos a probar es que el producto fibrado de dos objetos de $\mathcal{A}r$ es un objeto de $\mathcal{A}r$. Supongamos $\varphi : C \rightarrow A$, $\psi : B \rightarrow A$ y su producto fibrado $B \times_A C$.

$B \times_A C$ es local con ideal maximal $\mathfrak{n} = pr_1^{-1}(\mathfrak{m}_B) = pr_2^{-1}(\mathfrak{m}_C)$, veámoslo. Sea (b, c) un elemento que no es unidad, entonces, ni b ni c lo son pues, si por ejemplo c lo fuese, $\varphi(c)$ sería una unidad y por tanto $\psi(b)$ sería una unidad. Sin embargo, por ser ψ local, si $\psi(b)$ es unidad necesariamente b es una unidad, por tanto también lo sería (b, c) . Si (b, c) no es una unidad $b \in \mathfrak{m}_B$ y $c \in \mathfrak{m}_C$ por lo que $(b, c) \in \mathfrak{n}$.

Veamos que $B \times_A C$ es Artiniano. Como \mathfrak{m}_B está finitamente generado, los $\mathfrak{m}_B^{i-1}/\mathfrak{m}_B^i$ son $(k = B/\mathfrak{m}_B)$ -espacios vectoriales de dimensión finita y por la proposición 1.49 son k -módulos Artinianos. Consideramos entonces las sucesiones exactas cortas

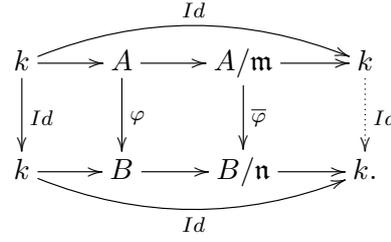
$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_B^{i-1}/\mathfrak{m}_B^i \longrightarrow B/\mathfrak{m}_B^i \longrightarrow B/\mathfrak{m}_B^{i-1} \longrightarrow 0$$

Razonando por inducción como en la proposición 1.50 se llega a que B es un k -espacio vectorial de dimensión finita. De igual manera C es un k -espacio vectorial de dimensión finita y por tanto $B \times_A C \subset B \times C$ es un k -espacio vectorial de dimensión finita. Como los ideales de $B \times_A C$ son en particular k -espacios vectoriales necesariamente $B \times_A C$ es Artiniano.

Finalmente, para ver que tiene cuerpo de residuos k observamos que, como $pr_1(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{m}_B$, entonces pr_1 pasa al cociente \tilde{pr}_1 . Esta aplicación sale de un cuerpo luego es inyectiva, además es sobreyectiva pues, dado $\lambda \in k$ los pares (λ, λ) están en $B \times_A C$ por lo que $(B \times_A C)/\mathfrak{n} \simeq B/\mathfrak{m}_B = k$. \square

Proposición 5.2. *Dado un morfismo $\varphi : (A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ de $\hat{\mathcal{A}}$ se tiene que φ es sobreyectivo si y solo si el morfismo en los espacios cotangentes $\varphi_* : t_A^* \rightarrow t_B^*$ lo es. Donde $t_A^* = \mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ y $t_B^* = \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$*

Demostración. Si φ es sobreyectivo, es obvio que φ_* lo es. Supongamos ahora que φ_* es sobreyectivo. Lo primero que tenemos que hacer es considerar el siguiente diagrama (Flechas en sólido)



El primer diagrama del cuadrado conmuta pues φ es un morfismo de k -álgebras. El segundo cuadrado conmuta por la definición de $\bar{\varphi}$. La flecha punteada la definimos como el morfismo $\bar{\varphi}$ visto a través del isomorfismo con k y por tanto conmuta por definición. Una vez que hemos visto que todo el diagrama conmuta, el hecho de que los isomorfismos de A/\mathfrak{m} y B/\mathfrak{n} con k sean la identidad, nos fuerza a que la flecha punteada sea la identidad y por tanto $\bar{\varphi}$ debe ser un isomorfismo, en particular sobreyectivo.

Lema 5.3. *Bajo estas hipótesis, dado $n \in \mathfrak{n}$ existe un $m \in \mathfrak{m}$ tal que $\varphi(m) = n + l$ con $l \in \mathfrak{n}^2$.*

Demostración. Consideramos $(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n)$ una base de $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ que, por el lema de Nakayama, es además un sistema de generadores minimal de \mathfrak{n} . Existen por tanto $\lambda_i \in k$ tales que $\bar{n} = \sum \lambda_i \bar{g}_i$. Es decir, $n = n_0 + \sum \lambda_i g_i$ con $n_0 \in \mathfrak{n}^2$. Además, por ser φ_* sobreyectiva existen $\bar{f}_i \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ tales que $\varphi_*(\bar{f}_i) = \bar{g}_i$, es decir, $\varphi(f_i) = g_i + n_i$ con $n_i \in \mathfrak{n}^2$. Como φ es morfismo de k -álgebras, los λ_i permanecen fijos y se tiene entonces que $\varphi(\sum \lambda_i f_i) = \sum (\lambda_i g_i + \lambda_i n_i) = \sum \lambda_i g_i + \sum \lambda_i n_i = n - n_0 + \sum \lambda_i n_i$, luego $m = \sum \lambda_i f_i$ es el elemento que buscábamos. \square

Vamos ahora con la prueba de la proposición.

Dado $b_0 \in B$, se tiene que existe $a_0 \in A$ tal que $\bar{\varphi}(\bar{a}_0) = \bar{b}$ o, lo que es equivalente, $\varphi(a_0) = b_0 + b_1$, donde $b_1 \in \mathfrak{n}$. Por el lema anterior, podemos encontrar $m \in \mathfrak{m}$ con $\varphi(m) = b_1 + b_2$ y $b_2 \in \mathfrak{n}^2$. Si consideramos $a_1 = a_0 - m$ se tiene $\varphi(a_1) = b_0 - b_2$. Vamos a probar ahora por inducción que, dado a_{n-1} tal que $\varphi(a_{n-1}) = b_0 + b_n$ con $b_n \in \mathfrak{n}^n$, existe a_n cumpliendo que $(a_n - a_{n-1}) \in \mathfrak{m}^n$, $\varphi(a_n) = b_0 + b_{n+1}$ y $b_{n+1} \in \mathfrak{n}^{n+1}$.

Si $b_n \in \mathfrak{m}^n$, se tiene que $b_n = \sum t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_n}$, donde $t_{ij} \in \mathfrak{n}$. Por el lema anterior, existen $r_{ij} \in \mathfrak{m}$ con $\varphi(r_{ij}) = t_{ij} + s_{ij}$ y $s_{ij} \in \mathfrak{n}^2$, pero entonces $\varphi(\sum r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n}) = \sum (t_{i_1} + s_{i_1})(t_{i_2} + s_{i_2}) \dots (t_{i_n} + s_{i_n})$. Si analizamos los términos que resultan de cada uno de estos productos, el término de orden más bajo en \mathfrak{n} corresponde al producto de todos los t_{ij} y el siguiente término de orden más bajo es una suma de productos donde aparecen $n-1$ veces los t_{ij} y una vez s_{ij} , que es por lo tanto un elemento de \mathfrak{n}^{n+1} . Es decir, el sumatorio que tenemos es de la forma $\sum t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_n} + s_i$ con $s_i \in \mathfrak{n}^{n+1}$. La suma de los productos t_{ij} dan b_n y la suma de los s_i da un resto b_{n+1} , por tanto, hemos encontrado un elemento $m_n = \sum r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n} \in \mathfrak{m}^n$ tal que $\varphi(m_n) = b_n + b_{n+1}$. Para terminar basta con tomar $a_n = a_{n-1} - m_n$.

Se tiene entonces que a_n es de Cauchy para la topología \mathfrak{m} -ádica, pues dado n_0 , si $n, m \geq n_0$ entonces $a_m - a_n \in \mathfrak{m}^{n_0}$. Como A es completo, esta sucesión tiene límite $a = \lim a_n$. Además, la sucesión de las imágenes es también de Cauchy con respecto a la topología \mathfrak{n} -ádica. De hecho, su límite es b_0 . Solo falta ver que φ es continua para estas topologías, pues entonces $\varphi(a) = \varphi(\lim a_n) = \lim \varphi(a_n) = b_0$, y habremos terminado. No cabe duda de que φ es continua pues, al ser local, $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$, por tanto, $\mathfrak{m} \subset \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{m})) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{n})$. Por otro lado, $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ es un ideal que debe estar contenido en \mathfrak{m} , luego $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. Esto implica también que $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}^n) = \mathfrak{m}^n$. Como estos son una base de entornos de 0 y la suma es continua, con esto basta para asegurar que φ es continua. \square

Definición 5.4. Se dice que un morfismo sobreyectivo $\varphi : B \rightarrow A$ de $\mathcal{A}r$ es una extensión pequeña si $\text{Ker}(\varphi)$ es un ideal principal $(t) \neq 0$ tal que $(t)\mathfrak{m} = 0$.

Este tipo de morfismos va a jugar un papel crucial en lo que sigue debido a que cualquier aplicación sobreyectiva de $\mathcal{A}r$ se puede factorizar como una sucesión finita de extensiones pequeñas. Por tanto, en muchas ocasiones nos podremos reducir al caso en el que el morfismo sea una extensión pequeña.

Proposición 5.5. *Cualquier aplicación sobreyectiva, no inyectiva de $\mathcal{A}r$ factoriza como una sucesión finita de extensiones pequeñas.*

Demostración. Dado $\varphi : B \rightarrow A$ morfismo local y sobreyectivo de anillos de Artin, vamos a probar que existen una cantidad finita de extensiones pequeñas cuya composición es φ . Dado $J = \text{Ker}(\varphi)$ tomamos $t \in J$, $t \neq 0$, y consideramos el ideal (t) . Por ser B local, $(t) \subset \mathfrak{m}$ y por ser además Artiniano, existe l tal que $\mathfrak{m}^l = 0$. Estas dos cosas juntas nos aseguran que existe un q mínimo tal que $(t)\mathfrak{m}^q = 0$. Si tomamos $s \in (t)\mathfrak{m}^{q-1}$, $s \neq 0$, se tiene entonces que el ideal generado por s es principal, no nulo, cumple que $(s)\mathfrak{m} = 0$ y está contenido en $\text{Ker}(\varphi)$ pues $(s) \subset (t)\mathfrak{m}^{q-1} \subset (t) \subset J$. Las tres primeras condiciones nos dicen que la aplicación de paso al cociente

$$\pi : B \rightarrow B/(s)$$

es una extensión pequeña. La última condición nos dice que podemos factorizar φ a través de esta extensión, es decir, que existe $\tilde{\varphi}$ tal que $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$. Si denotamos $C_1 = B/(s)$, el diagrama que resulta es el siguiente

$$B \xrightarrow{\pi} C_1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}} A.$$

Hay ahora dos posibilidades. La primera es que $\text{Ker}(\tilde{\varphi}) = 0$. Si esto sucede $\tilde{\varphi}$ es un isomorfismo y por tanto φ ya era una extensión pequeña pues $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\pi)$. Si por el contrario $\text{Ker}(\tilde{\varphi}) \neq 0$, podemos hacer con C_1 la misma construcción que con B y encontrar un ideal principal $(s_1) \subset C_1$ tal que la aplicación cociente

$$\pi : C_1 \rightarrow C_1/(s_1)$$

es una extensión pequeña a través de la cual factoriza $\tilde{\varphi}$. Iterando este proceso n veces llegaríamos al siguiente diagrama

$$B \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_n \rightarrow A.$$

Vamos a ver que en un número finito de pasos llegamos a que el morfismo de C_n en A tiene núcleo 0 y por tanto nos basta con llegar hasta C_{n-1} para factorizar φ . Razonamos por reducción al absurdo. En primer lugar, debemos observar que (s_1) es un ideal no nulo de $B/(s)$, es decir, es el paso al cociente de un ideal de B que contiene a s . Abusando de la notación vamos a llamar a este ideal de B también (s_1) . Se tiene entonces que $(s) \subset (s_1)$ donde la contención es estricta por ser (s_1) no nulo en $B/(s)$. De igual modo, (s_2) será un ideal de $C_1/(s_1) = B/(s_1)$, es decir, un ideal de B que contiene a (s_1) , de donde se sigue que $(s) \subset (s_1) \subset (s_2)$. Si el proceso no termina nunca tendríamos una cadena infinita de ideales, lo cual va contra la hipótesis de que B es Artiniano y por tanto Noetheriano. \square

Definición 5.6. Un morfismo $p : B \rightarrow A$ de $\mathcal{A}r$ se dice que es esencial si para cualquier morfismo $q : C \rightarrow B$ se tiene que, si $p \circ q$ es sobreyectivo, entonces q es sobreyectivo.

Proposición 5.7. Si $p : B \rightarrow A$ es una aplicación sobreyectiva de $\mathcal{A}r$ cumple que:

I) p es esencial si y solo si la aplicación entre los espacios cotangentes p_* es un isomorfismo.

II) Si p es una extensión pequeña, entonces, p no es esencial si y solo si tiene una sección $s : A \rightarrow B$ tal que $p \circ s = Id$.

Demostración. I) La aplicación pq es sobreyectiva si y solo si $(pq)_* = p_*q_*$ es sobreyectiva. Por ser p_* isomorfismo esto sucede si y solo si q_* es sobreyectiva y por la proposición 5.2, q también lo es. Por tanto, p es esencial.

Recíprocamente, si p es esencial consideramos $\overline{g_1}, \overline{g_2}, \dots, \overline{g_r}$ una base de t_A^* . Como p es sobreyectiva, existen $f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathfrak{m}_B$ tales que $p(f_i) = g_i$, lo que implica $p(\overline{f_i}) = \overline{g_i}$. Consideramos el anillo $C = k[f_1, f_2, \dots, f_r] \subset B$ y el morfismo de inclusión $i : C \rightarrow B$. Se tiene entonces que $p \circ i$ es un morfismo sobreyectivo. Si p es esencial eso significa que i es sobreyectivo, luego $C = B$. Por tanto, los f_i son un sistema de generadores del ideal maximal de B . Esto implica que los $\overline{f_i}$ son un sistema de generadores de t_B^* , luego $\dim_k(t_B^*) \leq \dim_k(t_A^*)$, pero ya habíamos dicho que p_* era sobreyectivo, luego p_* debe ser un isomorfismo.

II) Si p es una extensión pequeña, p tiene un núcleo que no es 0 y por tanto, si tiene una sección s como $p \circ s = Id$, los elementos del núcleo de p no pueden estar en la imagen de s . Es decir, s no es sobreyectiva. Entonces, p no es esencial pues $p \circ s = Id$, que es sobreyectiva, y sin embargo s no lo es.

Recíprocamente, si p no es esencial, el anillo C construido en la parte I) de esta proposición debe ser propiamente un subanillo de B , pues ya hemos visto que $C = B$ implicaría que p es esencial. Vamos a ver que p restringido a C nos da un isomorfismo $p : C \rightarrow A$ cuyo inverso es la sección que buscábamos. $p|_C$ es sobreyectivo pues por construcción de C tenemos que $p_*|_C$ lo es. Vamos a ver entonces que es inyectivo. Si p es una extensión pequeña, existe $t \in B$ tal que $Ker(p) = (t)$ y si p no es isomorfismo, por el apartado I) sabemos que p_* tampoco lo es. Como si que es sobreyectivo, se sigue que p_* no es inyectivo, luego existe $v \in \mathfrak{m}_B \setminus \mathfrak{m}_B^2$ tal que $p_*(\overline{v}) = 0$. Es decir, $p(v) \in \mathfrak{m}_A^2$ y por tanto es de la forma $p(v) = \sum \lambda_{ij} g_i g_j$. Entonces, $v - \sum \lambda_{ij} f_i f_j \in Ker(p)$, de donde se deduce que $\mu t = v - \sum \lambda_{ij} f_i f_j$ con $\mu \in k$. Como $v \notin \mathfrak{m}_B^2$ entonces $t \notin \mathfrak{m}_B^2$. Tenemos así que $t \in \mathfrak{m}_B \setminus \mathfrak{m}_B^2$. Vamos a usar esto para ver que $t \notin C$ y por tanto $p|_C$ es isomorfismo. Si $t \in C$, debería ser $t = \sum a_i f_i$ pero en este caso tendríamos que $0 = p_*(\overline{t}) = p(a_i \overline{f_i}) = a_i \overline{g_i}$. Como los $\overline{g_i}$ son por hipótesis base de t_A^* , $a_i = 0$, que implicaría $t = 0$, lo cual es absurdo. Por tanto, $t \notin C$ y $p|_C$ es isomorfismo. \square

Proposición 5.8. Dada una extensión pequeña $p : B \rightarrow A$ cuyo núcleo es (t) y un morfismo $f : R \rightarrow A$, se tiene que dos morfismos g_1 y g_2 de R en B cumplen que $p \circ g_i = f$ si y solo si $g_1(x) - g_2(x) = d(x)t$, donde $d(x)$ es una derivación de R en k . Además, esta derivación es la única con dicha propiedad.

Demostración. En primer lugar, como $(t)^2 = 0$, se puede dotar a t de estructura de A -módulo mediante la multiplicación $x \cdot t = p^{-1}(x)t$, que está bien definida porque si y_1, y_2 son ambos contraímagenes de x entonces $y_1 - y_2 \in Ker(p)$ y $(y_1 - y_2)t = 0$. Además, el morfismo f nos permite dotar a (t) de estructura de R -módulo mediante $r \cdot t = f(r) \cdot t = p^{-1}(f(r))t$.

Si $p \circ g_1 = p \circ g_2$, entonces $p \circ (g_1 - g_2) = 0$, por tanto, $Im(g_1 - g_2) \subset (t)$. Así para cada $x \in R$ existe un elemento que vamos a denotar $d(x)$ tal que $g_1(x) - g_2(x) = d(x)t$. A pesar de que $d(x)$ no es único, sí lo es la clase de $d(x)$ en $B/\mathfrak{m}_B = k$, pues si $(d_1(x) - d_2(x))t = 0$ entonces $d_1(x) - d_2(x) \in \mathfrak{m}_B$. Se tiene por tanto que $g_1(xy) - g_2(xy) = d(xy)t$. Por otro lado, $g_1(xy) - g_2(xy) = g_1(x)(g_1(y) - g_2(y)) + g_2(y)(g_1(x) - g_2(x)) = t(g_1(x)d(y) + g_2(y)d(x)) = t(xd(y) + yd(x))$. La última igualdad se cumple teniendo en cuenta la estructura de R -módulo de (t) . Por tanto, si definimos $\tilde{d} : R \rightarrow k$ como $\tilde{d}(x) = \overline{d(x)}$, es una k -derivación de R en k que está determinada de forma única como ya hemos visto. \square

5.2. El problema en términos de funtores

Necesitamos ahora introducir una serie de funtores auxiliares para la demostración de las condiciones de Schlessinger.

Vamos a ver primero como, dado un funtor \mathcal{F} de \mathcal{A} en \mathcal{S} , podemos extender \mathcal{F} a un funtor $\hat{\mathcal{F}}$ de $\hat{\mathcal{A}}$ en \mathcal{S} . Dado (R, \mathfrak{m}) en $\hat{\mathcal{A}}$ se tiene que R_n está en \mathcal{A} . Por tanto, podemos aplicar \mathcal{F} a la siguiente cadena, donde los morfismos son los truncamientos

$$R_1 \xleftarrow{\pi_1} R_2 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_{n-1}} R_n \xleftarrow{\pi_n} \dots .$$

Obteniendo así lo siguiente

$$\mathcal{F}(R_1) \xleftarrow{\mathcal{F}(\pi_1)} \mathcal{F}(R_2) \xleftarrow{\mathcal{F}(\pi_2)} \dots \xleftarrow{\mathcal{F}(\pi_{n-1})} \mathcal{F}(R_n) \xleftarrow{\mathcal{F}(\pi_n)} \dots .$$

Definimos entonces el funtor $\hat{\mathcal{F}}$ de $\hat{\mathcal{A}}$ en \mathcal{S} como el límite inverso de la cadena anterior

$$\hat{\mathcal{F}}(R) = \lim_{\leftarrow} \mathcal{F}(R_n).$$

Un elemento $\hat{\xi}$ de $\hat{\mathcal{F}}(R)$ es por tanto una sucesión de elementos $\xi_n \in \mathcal{F}(R_n)$ compatibles, es decir, $\xi_n = \mathcal{F}(\pi_n)(\xi_{n+1})$.

De igual modo, ya vimos que un morfismo $\varphi : R \rightarrow S$ de $\hat{\mathcal{A}}$ era equivalente a una sucesión compatible de morfismos de \mathcal{A} que daban lugar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} R_1 & \longleftarrow & R_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & R_n & \longleftarrow & \dots \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & & & \downarrow \varphi_n & & \\ S_1 & \longleftarrow & S_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & S_n & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Podemos entonces definir el funtor $\hat{\mathcal{F}}$ actuando sobre los morfismos como $\hat{\mathcal{F}}(\varphi)(\hat{\xi}) = \hat{\eta}$, donde $\eta_n = \mathcal{F}(\varphi_n)(\xi_n)$. El diagrama conmutativo que hemos considerado antes nos asegura que los elementos η_n son compatibles y por tanto $\hat{\eta}$ es efectivamente un elemento de $\hat{\mathcal{F}}(S)$.

La existencia y unicidad del límite inverso en la categoría de conjuntos probada en la proposición 2.25 nos asegura que la definición de $\hat{\mathcal{F}}$ así dada es correcta.

En general, partiendo de un funtor \mathcal{F} definido en $\hat{\mathcal{A}}$, si consideramos la restricción de \mathcal{F} a \mathcal{A} , la extensión que acabamos de construir mediante el límite proyectivo no tiene por qué coincidir con el funtor original.

En lo sucesivo conviene tener en mente la definición 2.33 de h_R pues va a ser un funtor clave en la prueba del teorema. Lo primero que necesitamos es ver cómo dado un morfismo de funtores $c : h_R \rightarrow \mathcal{F}$, podemos obtener un elemento distinguido $\xi_R \in \hat{\mathcal{F}}(R)$ asociado Id_R y viceversa, si seleccionamos un elemento $\hat{\xi} \in \hat{\mathcal{F}}(R)$ a partir de él se induce un morfismo $c : h_R \rightarrow \mathcal{F}$. Además, veremos que estas construcciones son inversas la una de la otra. Si tomamos ξ_R el elemento asociado a la identidad del morfismo c y construimos el morfismo asociado a ξ_R , obtenemos nuevamente c . De igual manera el elemento asociado a la identidad por el morfismo inducido por $\hat{\xi}$ es el propio $\hat{\xi}$. Vamos ahora con la construcción de ξ_R .

Proposición 5.9. *Dado R en la categoría $\hat{\mathcal{A}}$ y un funtor \mathcal{F} , existe una biyección entre los morfismos de funtores $c : h_R \rightarrow \mathcal{F}$ y los elementos de $\hat{\mathcal{F}}(R)$.*

Demostración. Consideramos R en la categoría $\hat{\mathcal{A}}$, el funtor h_R asociado a este R y un funtor cualquiera \mathcal{F} de \mathcal{A} en \mathcal{S} . Dado un morfismo entre los funtores $c : h_R \rightarrow \mathcal{F}$, se considera el

diagrama conmutativo siguiente, recordamos que $R_n = R/\mathfrak{m}^n$

$$\begin{array}{ccccccc}
 R_1 & \xleftarrow{\pi_1} & R_2 & \xleftarrow{\pi_2} & \dots & \xleftarrow{\pi_{n-1}} & R_n & \xleftarrow{\pi_n} & \dots \\
 & & \searrow \gamma_1 & & \uparrow & & \nearrow \gamma_n & & \\
 & & & & R & & & &
 \end{array}$$

donde cada γ_n es el paso al cociente de R a R_n , y π_n es el paso al cociente de R_{n+1} a R_n . Por tanto, se cumple que $\gamma_n = \pi_n(\gamma_{n-1})$. Dado que γ_n es un morfismo local de R en R_n , se tiene que $\gamma_n \in h_R(R_n)$ y podemos por tanto aplicar c a cada uno de los γ_n , obteniendo así $c(\gamma_n) = \xi_n \in \mathcal{F}(R_n)$. De esta manera, hemos obtenido un elemento ξ_n en cada $\mathcal{F}(R_n)$. Ahora, por el hecho de que c sea un morfismo de funtores se tiene que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 h_R(R_1) & \xleftarrow{\quad} & h_R(R_2) & \xleftarrow{\quad} & \dots & \xleftarrow{\quad} & h_R(R_n) & \xleftarrow{\quad} & \dots \\
 \downarrow c & & \downarrow c & & & & \downarrow c & & \\
 \mathcal{F}(R_1) & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{F}(R_2) & \xleftarrow{\quad} & \dots & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{F}(R_n) & \xleftarrow{\quad} & \dots
 \end{array}$$

es conmutativo y por tanto tenemos que

$$\mathcal{F}(\pi_n)(\xi_{n+1}) = \mathcal{F}(\pi_n)(c(\gamma_{n+1})) = c(h_R(\pi_n)(\gamma_{n+1})) = c(\pi_n \circ \gamma_{n+1}) = c(\gamma_n) = \xi_n.$$

Es decir, los ξ_n definen un elemento de $\lim_{\leftarrow} \mathcal{F}(R_n) = \hat{\mathcal{F}}(R)$. Vamos a denotar a este elemento $\xi_R = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$.

Recíprocamente, seleccionado un elemento $\hat{\xi}$ de R , vamos a construir un morfismo de funtores de $h_R \rightarrow \mathcal{F}$. Dado un anillo Artiniano A vamos a construir una aplicación que, abusando de notación, vamos a llamar $\hat{\xi} : h_R(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$. Cada elemento φ de $h_R(A)$ es un morfismo local de R en A . Como ya hemos visto, un morfismo local de un anillo completo en uno de Artin factoriza como $\varphi = \varphi_n \circ \gamma_n$ para un n suficientemente grande. Por otro lado, un elemento $\hat{\xi} \in \hat{\mathcal{F}}(R)$ es equivalente a una sucesión compatible $\xi_n \in R_n$. Teniendo estas dos cosas en cuenta, definimos el morfismo de funtores como

$$\hat{\xi}(\varphi) = \mathcal{F}(\varphi_n)(\xi_n).$$

Hay que comprobar que $\hat{\xi}$ cumple la propiedad necesaria para ser un morfismo de funtores de que, dado $p : B \rightarrow A$, se cumple $\hat{\xi} \circ h_R(p) = \mathcal{F}(p) \circ \hat{\xi}$. Dado $\varphi \in \text{Hom}(R, B)$, se tiene $\hat{\xi} \circ h_R(p)(\varphi) = \hat{\xi}(p \circ \varphi) = \mathcal{F}([p \circ \varphi]_n)(\xi_n)$ y $\mathcal{F}(p) \circ \hat{\xi}(\varphi) = \mathcal{F}(p)\mathcal{F}(\varphi_n)(\xi_n) = \mathcal{F}(p \circ \varphi_n)(\xi_n)$. A pesar de que m y n no tiene por qué ser iguales, la compatibilidad de ξ_n y φ_n nos dice que esos dos elementos son el mismo y por tanto $\hat{\xi}$ es un morfismo de funtores.

Falta comprobar que estas dos construcciones son inversas la una de la otra. Supongamos que $\hat{\xi}$ es el elemento que induce c , vamos a ver que $\hat{\xi} : h_R(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$ es exactamente c . Dado $\varphi \in h_R(A)$, se define $\hat{\xi}(\varphi)$ como $\mathcal{F}(\varphi_n)(\xi_n)$, pero ξ_n es por definición $c(\gamma_n)$ y por definición de morfismo de funtores $\mathcal{F}(\varphi_n)(c(\gamma_n)) = c(h_R(\varphi_n)(\gamma_n)) = c(\varphi_n \circ \gamma_n) = c(\varphi)$. Finalmente, vamos a ver que el elemento que induce el morfismo inducido por $\hat{\xi}$ es el propio $\hat{\xi}$. El elemento que induce $\hat{\xi}$ se define como $\xi_n = \hat{\xi}(\gamma_n)$. Tendríamos que tomar ahora el morfismo a través del cual $\gamma_n : R \rightarrow R_n$ factoriza, pero este morfismo es la identidad, luego $\hat{\xi}(\gamma_n) = \mathcal{F}(Id)(\xi_n) = \xi_n$ y el elemento que induce $\hat{\xi}$ es efectivamente $\hat{\xi}$. \square

Dado un morfismo entre funtores de anillos de Artin $c : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, para cualquier morfismo $\varphi : B \rightarrow A$ de $\mathcal{A}r$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} & \mathcal{F}(A) \\ c \downarrow & & \downarrow c \\ \mathcal{G}(B) & \xrightarrow{\mathcal{G}(\varphi)} & \mathcal{G}(A). \end{array}$$

La propiedad universal del producto fibrado nos asegura entonces que existe un morfismo τ entre $\mathcal{F}(B)$ y el producto fibrado $\mathcal{F}(A) \times_{\mathcal{G}(A)} \mathcal{G}(B)$. Como además estamos en la categoría de conjuntos, conocemos cómo es el producto fibrado y podemos dar explícitamente el morfismo

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{F}(B) &\rightarrow \mathcal{G}(B) \times_{\mathcal{G}(A)} \mathcal{F}(A) \\ \psi(b) &= (c(b), \mathcal{F}(\varphi)(b)). \end{aligned}$$

Una vez hemos construido este morfismo podemos definir qué entendemos por liso (smooth).

Definición 5.10. *Un morfismo de funtores $c : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ se dice que es liso (smooth) si para cualquier $\varphi : B \rightarrow A$ el morfismo inducido $\psi : \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(A) \times_{\mathcal{G}(A)} \mathcal{G}(B)$ es también sobreyectivo.*

Hemos visto que cualquier aplicación sobreyectiva de $\mathcal{A}r$ factoriza como una sucesión de extensiones pequeñas. Si probamos que un functor que es liso para dos morfismos lo es para la composición, nos bastará con comprobar que un functor es liso para extensiones pequeñas para poder asegurar que es liso.

Proposición 5.11. *Si un morfismo $c : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de Funtores de $\mathcal{A}r$ es liso para $\varphi : B \rightarrow A$ y $\phi : D \rightarrow B$ entonces es liso para $\varphi \circ \phi$.*

Demostración. Con las hipótesis del enunciado se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{F}(\varphi \circ \phi) & & \\ & \searrow & \curvearrowright & \searrow & \\ \mathcal{F}(D) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\phi)} & \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} & \mathcal{F}(A) \\ c \downarrow & & c \downarrow & & \downarrow c \\ \mathcal{G}(D) & \xrightarrow{\mathcal{G}(\phi)} & \mathcal{G}(B) & \xrightarrow{\mathcal{G}(\varphi)} & \mathcal{G}(A). \\ & \searrow & \curvearrowleft & \searrow & \\ & & \mathcal{G}(\varphi \circ \phi) & & \end{array}$$

Queremos probar que el morfismo inducido ψ es sobreyectivo

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{F}(D) &\rightarrow \mathcal{F}(A) \times_{\mathcal{G}(A)} \mathcal{G}(B) \\ \psi(b) &= (\mathcal{F}(\varphi \circ \phi)(d), c(d)). \end{aligned}$$

Para ello, tomamos $z \in \mathcal{F}(A)$ y $w \in \mathcal{G}(B)$ tales que $c(z) = \mathcal{G}(\varphi \circ \phi)(w) = \mathcal{G}(\varphi)[\mathcal{G}(\phi)(w)]$. Es decir, $(z, \mathcal{G}(\phi)(w)) \in \mathcal{F}(A) \times_{\mathcal{G}(A)} \mathcal{G}(B)$. Entonces, por ser el morfismo liso para φ , existirá un $y \in \mathcal{F}(B)$ tal que $\mathcal{F}(\varphi)(y) = z$ y $c(y) = \mathcal{G}(\phi)(w)$. Esto de nuevo significa que $(y, w) \in \mathcal{F}(B) \times_{\mathcal{G}(B)} \mathcal{G}(D)$ y por ser liso para ϕ , existe d tal que $c(d) = w$ y $\mathcal{F}(\phi)(d) = y$. Este d es el elemento que buscábamos, pues $\mathcal{F}(\varphi \circ \phi)(d) = \mathcal{F}(\varphi)[\mathcal{F}(\phi)(d)] = \mathcal{F}(\varphi)(y) = z$ y además $c(d) = w$. Concluimos entonces que el morfismo de funtores es liso para $\varphi \circ \phi$. \square

Definición 5.12. Dado un anillo R de \hat{A} y un elemento $\hat{\xi} \in \hat{\mathcal{F}}(R)$, diremos que el par $(R, \hat{\xi})$ es una deformación versal formal si el morfismo de funtores que induce $\hat{\xi} : h_R \rightarrow \mathcal{F}$ es liso.

Definición 5.13. Dado un funtor de $\mathcal{A}r$ se define el espacio tangente al funtor $t_{\mathcal{F}}$ como la imagen del funtor en $k[\varepsilon]$, $t_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(k[\varepsilon])$. Veremos más adelante cómo dotarle de estructura de k -espacio vectorial.

Definición 5.14. Dado un anillo R de \hat{A} y un elemento $\hat{\xi} \in \hat{\mathcal{F}}(R)$, diremos que el par $(R, \hat{\xi})$ es una deformación semiuniversal formal si es versal y además el morfismo inducido entre los espacios tangentes a los funtores $t_R \rightarrow t_{\mathcal{F}}$ es una biyección.

A priori, esta definición de deformación semiuniversal formal no se parece en nada a la que dimos en el capítulo 4. Sin embargo, si uno escribe las condiciones necesarias para que el morfismo $\hat{\xi}$ entre $h_R()$ y $\mathcal{D}ef_X$ sea liso, recupera como por arte de magia la definición 4.16

5.3. Condiciones de Schlessinger

Dados dos morfismos de $\mathcal{A}r$ $\varphi : C \rightarrow A$ y $\psi : B \rightarrow A$, podemos, como ya hemos hecho en otras ocasiones, considerar el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \downarrow \varphi & \\ B & \xrightarrow{\psi} & A. \end{array}$$

Partiendo de aquí, vamos a tomar dos caminos. En primer lugar podemos completar este diagrama con el producto fibrado en la categoría $\mathcal{A}r$ y después aplicarle nuestro funtor \mathcal{F} . La segunda opción es aplicarle el funtor a ese diagrama y después considerar el producto fibrado en la categoría de conjuntos. Esto nos da lugar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{F}(B \times_A C) & \xrightarrow{\mathcal{F}(pr_1)} & \mathcal{F}(C) \\ & & \searrow \mu & & \downarrow \mathcal{F}(\varphi) \\ & & \mathcal{F}(B) \times_{\mathcal{F}(A)} \mathcal{F}(C) & \xrightarrow{\tau_1} & \mathcal{F}(C) \\ & & \downarrow \tau_2 & & \downarrow \mathcal{F}(\varphi) \\ & & \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\mathcal{G}(\psi)} & \mathcal{F}(A). \\ & \mathcal{F}(pr_2) & \nearrow & & \\ & \mathcal{F}(B \times_A C) & & & \end{array}$$

El morfismo μ existe por la propiedad universal del producto fibrado. De hecho, como se ve en la demostración de la existencia, $\mu = (\mathcal{F}(pr_1), \mathcal{F}(pr_2))$.

El Teorema de Schlessinger nos dice qué condiciones debe de cumplir μ para que un funtor tenga una deformación semiuniversal.

Teorema 5.15. Si \mathcal{F} es un funtor $\mathcal{A}r$ en $\mathcal{S}ets$ cumpliendo que $\mathcal{F}(k)$ es unipuntual, $\mathcal{F}(k) = \{\xi_0\}$, condición a la que nos referiremos como (H_0) , y consideramos μ el morfismo construido en el diagrama anterior,

$$\mu : \mathcal{F}(B \times_A C) \rightarrow \mathcal{F}(B) \times_{\mathcal{F}(A)} \mathcal{F}(C)$$

entonces \mathcal{F} tiene una deformación semiuniversal formal si y solo si cumple que

(H_1) : μ es sobreyectivo para toda extensión pequeña $B \rightarrow A$.

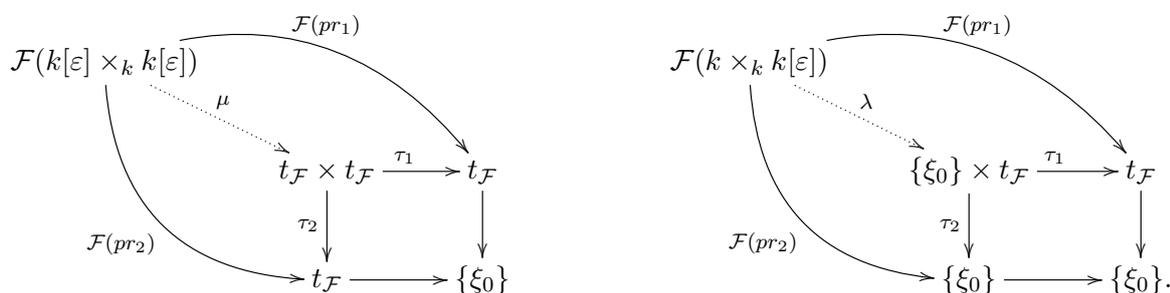
(H_2) : μ es una biyección si $A = k$ y $B = k[\varepsilon]$.

(H₃): El espacio tangente al funtor, $t_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(k[\varepsilon])$, tiene dimensión finita como k -espacio vectorial.

Antes de pasar a la demostración del teorema, vamos a ver qué herramientas podemos construir gracias a estas hipótesis y qué implicaciones tienen.

Observación 5.16. La condición (H₃) habla de la dimensión del espacio tangente al funtor, sin embargo, nosotros no hemos dotado a $t_{\mathcal{F}}$ de estructura de espacio vectorial. Resulta que las condiciones (H₀) y (H₂) son suficientes para dotar a $\mathcal{F}(k[\varepsilon])$ de estructura de k -espacio vectorial de la manera siguiente:

Aplicando (H₂) con $B = C = k[\varepsilon]$ se llega a que $\mathcal{F}(k[\varepsilon]) \times_{\mathcal{F}(k)} \mathcal{F}(k[\varepsilon]) \simeq \mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon])$. Como $\mathcal{F}(k)$ es unipuntual, se tiene que $\mathcal{F}(k[\varepsilon]) \times_{\mathcal{F}(k)} \mathcal{F}(k[\varepsilon]) = \mathcal{F}(k[\varepsilon]) \times \mathcal{F}(k[\varepsilon]) = t_{\mathcal{F}} \times t_{\mathcal{F}}$. Esto nos da la siguiente propiedad que vamos a usar para definir la estructura de k -espacio vectorial en $t_{\mathcal{F}}$. Consideramos los diagramas siguientes, donde pr_i son proyecciones de anillos y τ_i de conjuntos



Se tiene que $\mathcal{F}(pr_i) = \tau_i \circ \mu$. Cuando se tiene un diagrama de este estilo, se suele decir que el funtor \mathcal{F} conmuta con los productos. Este hecho va a ser fundamental a lo largo de toda la demostración de las condiciones de Schlessinger, pues es el que nos va a permitir trabajar con la estructura de espacio vectorial de $t_{\mathcal{F}}$.

Definimos la aplicación $+ : k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon] \rightarrow k[\varepsilon]$ como $(a + b_1\varepsilon) + (a + b_2\varepsilon) = (a + (b_1 + b_2)\varepsilon)$ y dado $d \in k$ la aplicación $d : k[\varepsilon] \rightarrow k[\varepsilon]$ como $d(a + b\varepsilon) = a + db\varepsilon$. Podemos entonces definir en $t_{\mathcal{F}}$ la suma como la composición $\mu^{-1} \circ \mathcal{F}(+)$ y el producto como $\mathcal{F}(d)$. Escribir con todo detalle la comprobación de que, con estas operaciones, $t_{\mathcal{F}}$ es un espacio vectorial, sería eterno, sin embargo, no son rutinarias. Haremos, a modo de ejemplo, la comprobación de la propiedad distributiva y de que la imagen de $\{\xi_0\} = \mathcal{F}(k)$ por el morfismo de estructura es el neutro de la suma. En todos los casos la demostración se reduce a enunciar la propiedad buscada en términos de morfismos, pues es al nivel al que podemos trabajar con el funtor.

Para ver la propiedad distributiva basta comprobar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 t_{\mathcal{F}} \times t_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\mu^{-1}} & \mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) & \xrightarrow{\mathcal{F}(+)} & t_{\mathcal{F}} \\
 \mathcal{F}(d) \times \mathcal{F}(d) \downarrow & & \mathcal{F}(d \times d) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(d) \\
 t_{\mathcal{F}} \times t_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\mu^{-1}} & \mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) & \xrightarrow{\mathcal{F}(+)} & t_{\mathcal{F}}.
 \end{array}$$

El cuadrado de la derecha conmuta porque lo hacen las operaciones $+$ y d que hemos definido antes. Solo falta comprobar que conmuta el de la izquierda. Observamos que dada una aplicación arbitraria f , si $\tau_i \circ f = \mathcal{F}(d) \circ \tau_i$, necesariamente $f = \mathcal{F}(d) \times \mathcal{F}(d)$. Usando entonces que $\tau_i \circ \mu = \mathcal{F}(pr_i)$, se tiene $\tau_i \circ \mu \circ \mathcal{F}(d \times d) \circ \mu^{-1} = \mathcal{F}(pr_i) \circ \mathcal{F}(d \times d) \circ \mu^{-1}$, pero $\mathcal{F}(pr_i) \circ \mathcal{F}(d \times d) = \mathcal{F}(d) \circ \mathcal{F}(pr_i)$, luego $\mathcal{F}(pr_i) \circ \mathcal{F}(d \times d) \circ \mu^{-1} = \mathcal{F}(d) \circ pr_i \circ \mu^{-1} = \mathcal{F}(d) \circ \tau_i$. Por tanto, $\mu \circ \mathcal{F}(d \times d) \circ \mu^{-1} = \mathcal{F}(d) \times \mathcal{F}(d)$, el diagrama de la izquierda conmuta y se da la propiedad

distributiva.

Este ejemplo ilustra por qué se dice que \mathcal{F} conmuta con los productos. Gracias al isomorfismo μ del primer diagrama, se tiene que $\mathcal{F}(d) \times \mathcal{F}(d) = \mu \circ \mathcal{F}(d \times d) \circ \mu^{-1}$. En general, esto sucede con todas las aplicaciones siempre que se tengan diagramas como los de arriba, pues $\mathcal{F}(pr_i) = \tau_i \circ \mu$.

Para probar que la imagen de ξ_0 por el morfismo de estructura i , definido como $i(a) = a + 0\varepsilon$, es el neutro, queremos comprobar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 t_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\tau_1^{-1}} & \{\xi_0\} \times t_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\mathcal{F}(i) \times Id} & t_{\mathcal{F}} \times t_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{+} & t_{\mathcal{F}} \\
 & \searrow & \downarrow \lambda^{-1} & & \downarrow \mu^{-1} & & \nearrow \mathcal{F}(+) \\
 & \mathcal{F}(pr^{-1}) & \mathcal{F}(k \times_k k[\varepsilon]) & \xrightarrow{\mathcal{F}(i \times Id)} & \mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) & &
 \end{array}$$

Esto es debido a que sabemos que siguiendo el camino inferior, la composición de los morfismos es la identidad. Efectivamente, $+ \circ (i \times Id) \circ pr^{-1}(a + b\varepsilon) = + \circ (i \times Id)(a, a + b\varepsilon) = +(a, a + b\varepsilon) = a + b\varepsilon$. Como \mathcal{F} es un funtor, esta propiedad se mantiene para los morfismos transformados por \mathcal{F} . El triángulo de la derecha del diagrama conmuta por cómo hemos definido la suma en $t_{\mathcal{F}}$. El cuadrado central conmuta porque el funtor conmuta con los productos. Por último, el triángulo de la izquierda conmuta sin más que ver el diagrama de la derecha al principio de la definición de $t_{\mathcal{F}}$. Por tanto, la composición de los morfismos de arriba es la identidad, pero esa composición no es otra cosa que la aplicación que envía $\xi \in t_{\mathcal{F}}$ a $\xi + \xi_0$, luego ξ_0 es el neutro para la suma.

Durante la prueba del Teorema de Schlessinger se usa también que dado un morfismo $c : h_R \rightarrow \mathcal{F}$, la aplicación $c : \text{Hom}(R, k[\varepsilon]) \rightarrow t_{\mathcal{F}}$ es lineal si consideramos en $t_{\mathcal{F}}$ la estructura de k -espacio vectorial que acabamos de dar. Nos vamos a limitar a dar los diagramas cuya conmutatividad implica la linealidad de c . La comprobación de que efectivamente conmutan es muy similar a las que ya hemos hecho.

$$\begin{array}{ccc}
 t_R \times t_R & \xrightarrow{\mu_R} & \text{Hom}(R, k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) & \xrightarrow{h_R(+)} & t_R \\
 c \times c \downarrow & & \downarrow c & & \downarrow c \\
 t_{\mathcal{F}} \times t_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) & \xrightarrow{\mathcal{F}(+)} & t_{\mathcal{F}} \times t_{\mathcal{F}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 t_R & \xrightarrow{h_R(d)} & t_R \\
 c \downarrow & & \downarrow c \\
 t_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\mathcal{F}(d)} & t_{\mathcal{F}}.
 \end{array}$$

Observación 5.17. Al igual que para comprobar que un morfismo de funtores es liso, basta comprobarlo para extensiones pequeñas debido a que cualquier morfismo sobreyectivo factoriza como extensiones pequeñas. Una prueba similar nos permite comprobar que μ es sobreyectivo para cualquier morfismo sobreyectivo de $\mathcal{A}r$ solo con serlo para extensiones pequeñas, condición (H_1) .

Observación 5.18. Lo último que necesitamos hacer para la prueba del teorema es definir dos acciones de grupo dadas por los espacios tangentes a los funtores h_R y \mathcal{F} .

Dada una extensión pequeña $p : B \rightarrow A$ y un elemento $f \in h_R(A)$, la proposición 5.8 nos dice que dos elementos de la fibra de $h_R(p)^{-1}(f)$ se diferencian en un elemento de $\text{Der}_k(R, k) \simeq \text{Hom}(R, k[\varepsilon]) = t_R$. Es decir, podemos definir en el conjunto $h_R(p)^{-1}(f)$ una acción del grupo t_R que es además transitiva y libre, pues dados dos elementos de la fibra existe un único elemento de t_R que los relaciona. Esto se puede enunciar diciendo que la siguiente aplicación es biyectiva

$$t_R \times h_R(B) \longrightarrow h_R(B) \times_{h_R(A)} h_R(B)$$

$$(v, g) \longrightarrow (v(g), g).$$

También se puede definir una acción de $t_{\mathcal{F}}$ sobre la fibra $\mathcal{F}(p)^{-1}(\eta)$. Esta es más complicada de definir y es donde entran de nuevo las propiedades (H_0) y (H_2) .

La propiedad (H_2) nos da un diagrama como los que ya conocemos

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(B \times_k k[\varepsilon]) & \xrightarrow{\mathcal{F}(pr_1)} & \mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) \\
 \downarrow \alpha & \searrow \tau_1 & \downarrow \mu \\
 \mathcal{F}(B) \times t_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\tau_1} & t_{\mathcal{F}} \times t_{\mathcal{F}} \\
 \downarrow \tau_2 & & \downarrow \tau_2 \\
 \mathcal{F}(B) & \longrightarrow & t_{\mathcal{F}} \\
 \downarrow \mathcal{F}(pr_2) & & \downarrow \mathcal{F}(pr_2) \\
 \{\xi_0\} & & \{\xi_0\}
 \end{array}$$

donde α es un isomorfismo.

Definimos entonces la aplicación $j : B \times_k k[\varepsilon] \longrightarrow B$ como $j(b, x + y\varepsilon) = b + yt$, donde t es el generador del $\text{Ker}(p)$, y la acción $\rho : \mathcal{F}(B) \times t_{\mathcal{F}}$ como $\rho = \mathcal{F}(j) \circ \alpha^{-1}$. Para comprobar que esto efectivamente define una acción del grupo $t_{\mathcal{F}}$ en $\mathcal{F}(p)^{-1}(\eta)$, tenemos que comprobar primero que $\rho(\rho(\eta', \xi_1), \xi_2) = \rho(\eta', \xi_1 + \xi_2)$ y después que si $\eta' \in \mathcal{F}(p)^{-1}(\eta)$ entonces $\rho(\eta', \xi) \in \mathcal{F}(p)^{-1}(\eta)$.

Para probar que la acción del grupo conmuta con la suma hay que utilizar los isomorfismos que nos da (H_2)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(B \times_k k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) & \xrightarrow{\lambda_1} & \mathcal{F}(B \times_k k[\varepsilon]) \times t_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\alpha \times Id} \mathcal{F}(B) \times t_{\mathcal{F}} \times t_{\mathcal{F}} \\
 \\
 \mathcal{F}(B \times_k k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) & \xrightarrow{\lambda_2} & \mathcal{F}(B) \times \mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) \xrightarrow{Id \times \mu} \mathcal{F}(B) \times t_{\mathcal{F}} \times t_{\mathcal{F}}
 \end{array}$$

Se tiene que $\alpha \times Id \circ \lambda_1$ y $Id \times \mu \circ \lambda_2$ son dos morfismos que cumplen que $\mathcal{F}(pr_i) = \tau_i \circ f$ $i = 1, 2, 3$. La propiedad universal del producto cartesiano, en este caso de tres factores, nos dice que el morfismo con esta propiedad es único y por tanto son iguales.

Una vez sabemos esto, para probar que la acción conmuta con la suma de $t_{\mathcal{F}}$ consideramos el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F}(B) \times t_{\mathcal{F}} \times t_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{Id \times \mu^{-1}} & \mathcal{F}(B) \times \mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) & \xrightarrow{Id \times \mathcal{F}(+)} & \mathcal{F}(B) \times \mathcal{F} \\
 \downarrow \alpha^{-1} \times Id & & \downarrow \lambda_2^{-1} & & \downarrow \alpha^{-1} \\
 \mathcal{F}(B \times_k k[\varepsilon]) \times t_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\lambda_1^{-1}} & \mathcal{F}(B \times_k k[\varepsilon] \times_k k[\varepsilon]) & \xrightarrow{\mathcal{F}(Id \times +)} & \mathcal{F}(B \times_k k[\varepsilon]) \\
 \downarrow \mathcal{F}(j) \times Id & & \downarrow \mathcal{F}(j \times Id) & & \downarrow \mathcal{F}(j) \\
 \mathcal{F}(B) \times t_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & \mathcal{F}(B \times_k k[\varepsilon]) & \xrightarrow{\mathcal{F}(j)} & \mathcal{F}(B).
 \end{array}$$

El morfismo que resulta de componer la arista superior y la arista derecha del diagrama es justamente $\rho(\eta', \xi_1 + \xi_2)$ y el que resulta de componer la arista izquierda y la inferior es $\rho(\rho(\eta', \xi_1), \xi_2)$, de manera que si el diagrama conmuta hemos terminado. El cuadrado superior izquierdo conmuta, tal y como acabamos de ver. El superior derecho e inferior izquierdo conmutan una vez más porque el funtor \mathcal{F} conmuta con los productos. Finalmente, el cuadrado inferior derecho conmuta por ser la imagen por \mathcal{F} del diagrama conmutativo que resulta del hecho de que $j(b, (x_1 + y_1\varepsilon) + (x_2 + y_2\varepsilon)) = j(j(b, x_1 + y_1\varepsilon), x_1 + y_1\varepsilon) = b + (y_1 + y_2)t$.

Finalmente, vamos a ver que efectivamente ρ actúa sobre las fibras $\mathcal{F}(p)^{-1}(\eta)$. En primer lugar hay que probar que la aplicación $\sigma : B \times_k k[\varepsilon] \rightarrow B \times_A B$ dada por $\sigma(b, x + y\varepsilon) = (b + yt, b)$ es un isomorfismo. Es inyectivo pues si $(b + yt, b) = (0, 0)$ entonces $b = 0$ e $y = 0$, como $x = \bar{b}$ entonces $(b, x + y\varepsilon) = 0$. Es sobreyectiva porque dados elementos $(b_1, b_2) \in B \times_A B$, se cumple que $\underline{p}(b_1 - b_2) = 0$, luego $b_1 - b_2 = yt$ con $y \in k$. Entonces, la imagen por σ del elemento $(b_2, \bar{b}_2 + y\varepsilon)$ es (b_1, b_2) . Se tiene entonces la siguiente composición

$$\beta : \mathcal{F}(B) \times_{t_{\mathcal{F}}} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathcal{F}(B \times_k k[\varepsilon]) \xrightarrow{\mathcal{F}(\sigma)} \mathcal{F}(B \times_A B) \longrightarrow \mathcal{F}(B) \times_{\mathcal{F}(A)} \mathcal{F}(B).$$

Dado que $\sigma(b, a + y\varepsilon) = (j(b), b)$, se tiene que $\beta(\xi, \eta') = (\rho(\eta'), \xi)$, pero esta aplicación tiene llegada en el producto fibrado $\mathcal{F}(B) \times_{\mathcal{F}(A)} \mathcal{F}(B)$, lo que quiere decir que $\mathcal{F}(p)(\rho(\eta'), \xi) = \mathcal{F}(p)(\eta') = \eta$. Por tanto, la acción ρ actúa efectivamente sobre las fibras de $\mathcal{F}(p)^{-1}(\eta)$. Además, la condición (H_1) nos dice que como p es una extensión pequeña, el último morfismo de esta composición es sobreyectivo. Como los otros dos son isomorfismos, β es sobreyectivo y por tanto la acción de $t_{\mathcal{F}}$ en las fibras de p es transitiva.

El último hecho importante que debemos remarcar sobre estas acciones es que a pesar de que las hemos definido de manera distinta, si se realiza la última construcción para $\mathcal{F} = h_R$, se recupera la definición que hemos dado en términos de las derivaciones. Efectivamente, la acción de un morfismo $\varphi \in \text{Hom}(R, k[\varepsilon])$ sobre un morfismo $\psi : R \rightarrow B$, dada por la aplicación $h_R(j)$, es $\varphi(\psi) = h_R(j)(\varphi, \psi)$, donde (φ, ψ) es un morfismo de R en $k[\varepsilon] \times_k B$. Finalmente, $h_R(j)(\varphi, \psi)(x) = (\psi(x) + l(x)\varepsilon, \psi(x)) = \psi(x) + l(x)t$. Si volvemos a la proposición 3.43 que nos relaciona $\text{Hom}(R, k[\varepsilon])$ y $\text{Der}(R, k)$, comprobamos que esta acción es exactamente la acción dada por las derivaciones que hemos definido antes.

Una vez visto esto ya estamos en condiciones de probar el Teorema de Schlessinger.

Demostración. (del Teorema de Schlessinger)

Supongamos primero que $(R, \hat{\xi})$ es una deformación semiuniversal y probemos que se cumplen (H_1) , (H_2) y (H_3) . Para probar (H_1) , consideramos $p : B \rightarrow A$ una extensión pequeña y $f : C \rightarrow A$ un morfismo cualquiera. Queremos ver que, entonces, μ (ver teorema 5.15) es sobreyectiva. Tomamos $(\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{F}(B) \times_{\mathcal{F}(A)} \mathcal{F}(C)$, que cumple por tanto que $\mathcal{F}(p)(\eta_1) = \mathcal{F}(f)(\eta_2) = \eta \in \mathcal{F}(A)$. Ahora, por ser la deformación semiuniversal, se tiene que la aplicación $\psi : h_R(B) \rightarrow h_R(A) \times_{\mathcal{F}(A)} \mathcal{F}(B)$ inducida por $\hat{\xi}$ es sobreyectiva y que también lo es $\hat{\xi} : h_R(C) \rightarrow \mathcal{F}(C)$. Con estas dos cosas tenemos que existen $\varphi \in h_R(B)$ y $\phi \in h_R(C)$ tales que $\hat{\xi}(\phi) = \eta_2$ y $\psi(\varphi) = (f \circ \phi, \xi_1)$. Esta última condición significa que $p \circ \varphi = f \circ \phi$ y que $\hat{\xi}(\varphi) = \xi_1$. Consideramos entonces $\varphi \times \phi \in h_R(B \times_A C)$. Por cómo hemos elegido φ y ϕ se tiene que el elemento $\hat{\xi}(\varphi \times \phi) \in \mathcal{F}(B \times_A C)$ cumple que $\mu(\hat{\xi}(\varphi \times \phi)) = (\eta_1, \eta_2)$. Esto prueba que la condición (H_1) se verifica.

Para comprobar (H_2) hay que comprobar que, si $B = k[\varepsilon]$ y $A = k$, μ es una biyección. Acabamos de ver que μ es sobreyectiva, por tanto, solo hay que probar que es inyectiva. Por ser $(R, \hat{\xi})$ semiuniversal, $\hat{\xi} : h_R(k[\varepsilon]) \rightarrow t_{\mathcal{F}}$ es una biyección. Supongamos que existen $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k C)$ tales que $\mu(\rho_1) = \mu(\rho_2) = (\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{F}(k[\varepsilon]) \times \mathcal{F}(C)$. Al igual que antes podemos encontrar un $\phi \in h_R(C)$ tal que $\hat{\xi}(\phi) = \eta_2$. Observamos entonces que, por ser $\hat{\xi}$ una biyección entre $h_R(k[\varepsilon])$ y $t_{\mathcal{F}}$, se tiene que, $\mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k C) \times_{t_{\mathcal{F}}} h_R(k[\varepsilon]) \simeq \mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k C)$. Entonces el morfismo ψ inducido por $\hat{\xi}$,

$$h_R(k[\varepsilon] \times_k C) \times_{t_{\mathcal{F}}} h_R(k[\varepsilon]) \longrightarrow \mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k C) \times_{t_{\mathcal{F}}} h_R(k[\varepsilon]) \simeq \mathcal{F}(k[\varepsilon] \times_k C)$$

es sobreyectivo y por tanto existen $\varphi_i \times \phi \in h_R(k[\varepsilon] \times_k C) \times_{t_{\mathcal{F}}} h_R(k[\varepsilon])$ tales que $\psi(\varphi_i \times \phi) = \rho_i$. En particular, $\hat{\xi}(\varphi_1) = \hat{\xi}(\varphi_2) = \eta_1$. La biyectividad de $\hat{\xi}$ entre $h_R(k[\varepsilon])$ y $t_{\mathcal{F}}$ nos dice que $\varphi_1 = \varphi_2$, lo que implica que $\rho_1 = \rho_2$ y prueba (H_2) . Una vez tenemos (H_2) podemos dotar

a $t_{\mathcal{F}}$ de estructura de espacio vectorial que, debido a la biyección entre $h_R(k[\varepsilon])$ y $t_{\mathcal{F}}$, tendrá dimensión finita, lo que prueba (H_3) .

Recíprocamente veamos que, si se verifican $(H_0), (H_1), (H_2), (H_3)$, entonces \mathcal{F} tiene una deformación semiuniversal. Consideramos t_1, t_2, \dots, t_r una base de $t_{\mathcal{F}}$, definimos $S = k[[T_1, T_2, \dots, T_r]]$ y \mathfrak{n} el ideal maximal de S . Vamos a construir el anillo R como el límite inverso de una serie de cocientes R_q de S , y $\hat{\xi}$ como una sucesión de elementos $\xi_q \in \mathcal{F}(R_q)$. Tomamos $R_0 = k$ y como primer elemento ξ_0 . Después, tomamos $R_1 = S/\mathfrak{n}^2 \simeq k[\varepsilon] \times_k \dots \times_k k[\varepsilon]$. La condición (H_2) aplicada r veces nos dice que $\mathcal{F}(R_1) \simeq t_{\mathcal{F}} \times \dots \times t_{\mathcal{F}}$. Por cómo se define el morfismo inducido por $\hat{\xi}$, el morfismo entre los espacios tangentes queda definido con la elección del primer elemento ξ_1 , pues un morfismo de R en $k[\varepsilon]$ factoriza con $n = 1$. Buscamos por tanto el elemento $\xi_1 \in \mathcal{F}(R_1)$ que induce el isomorfismo entre $h_{R_1} = \text{Hom}(R_1, k[\varepsilon])$ y $t_{\mathcal{F}}$. Veamos que este elemento es $\xi_1 = (t_1, t_2, \dots, t_r)$. Efectivamente, el morfismo que induce este elemento está definido como $\xi_1(\varphi) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi_1)$. Entonces, dado que una base de $\text{Hom}(R_1, k[\varepsilon])$ son las proyecciones en cada uno de los factores, y, al probar que $t_{\mathcal{F}}$ era un espacio vectorial, vimos que $\mathcal{F}(pr_i) = \tau_i \circ \mu$, se tiene que $\xi_1(pr_i) = \mathcal{F}(pr_i)(\xi_1) = \tau_i(t_1, t_2, \dots, t_r) = t_i$. Por tanto, el morfismo inducido por ξ_1 manda una base de $\text{Hom}(R_1, k[\varepsilon])$ en una base de $t_{\mathcal{F}}$, luego es un isomorfismo.

Supongamos ahora que ya tenemos construidos pares $(\xi_0, R_0), (\xi_1, R_1), \dots, (\xi_q, R_q)$ tales que $R_i = S/J_i$, donde los ideales J_i cumplen $\mathfrak{n}^{i+1} \subset J_i \subset J_{i-1}$ y $\mathcal{F}(\pi_i)(\xi_{i+1}) = \xi_i$. Los (ξ_0, R_0) y (ξ_1, R_1) ya construidos verifican esto trivialmente. Vamos a probar, por inducción, que podemos construir R_{q+1} que extiende esta familia. Buscamos entonces un ideal J de R_q , minimal entre los ideales que cumplen:

a) $\mathfrak{n}J_q \subset J \subset J_q$.

b) existe $\xi_{q+1} \in \mathcal{F}(R_{q+1})$ tal que $\mathcal{F}(\pi_q)(\xi_{q+1}) = \xi_q$.

En primer lugar, el conjunto de estos ideales es no vacío pues el propio J_q cumple a) y b). Los ideales que cumplen a) son subespacios vectoriales de $J_q/\mathfrak{n}J_q$, por tanto, la intersección de dos ideales que cumplen a) sigue cumpliendo a). Solo falta ver que la intersección de dos ideales que cumplen b) cumple b), pues entonces podremos tomar como ideal minimal J la intersección de todos los ideales que cumplen a) y b).

Sean I y L ideales que cumplen a) y b), vamos a ver que $K = I \cap L$ también lo cumple. En primer lugar, podemos ampliar el ideal I hasta que $I + L = J_q$ sin modificar su intersección. Podemos suponer entonces que $I + L = J_q$ y $L \cap I = K$. Como vamos a tener que trabajar con clases de equivalencia módulo los distintos ideales, para aligerar un poco la notación vamos a denotar las clases simplemente con subíndices, es decir $[x]_K = x_K$. Definimos entonces el isomorfismo siguiente

$$\begin{aligned} f : S/K &\longrightarrow S/I \times_{S/J_q} S/L \\ x_K &\longrightarrow (x_I, x_L). \end{aligned}$$

No cabe duda de que el morfismo está bien definido, pues K está contenido en I, L y J_q . Para ver la inyectividad, tomamos $x \in S$ tal que $x_I = x_L = 0$, entonces, $x \in I \cap L = K$, luego $x_K = 0$. Para ver la sobreyectividad, tomamos $x, y \in S$ tales que $x_{J_q} = y_{J_q}$, esto significa que existe $j \in J_q$ tal que $x - y = j$, pero como $J_q = I + L$, existen $i \in I$ y $l \in L$ con $i + l = j$, por tanto, $x = y + i + l$. Se tiene entonces que $(y + l)_K$ es el elemento que buscamos, pues $(y + l)_I = (x - i)_I = x_I$ y también $(y + l)_L = y_L$. Obtenemos así el siguiente diagrama

$$\mathcal{F}(S/K) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(S/I \times_{S/J_q} S/L) \longrightarrow \mathcal{F}(S/I) \times_{\mathcal{F}(S/J_q)} S/L.$$

La propiedad (H_1) nos dice que el segundo morfismo de la composición es sobreyectivo, como el primero es un isomorfismo, la composición es sobreyectiva. Con argumentos idénticos a los

que hemos usado en las observaciones previas al teorema se prueba que esta composición es el morfismo $(\mathcal{F}(\pi_I), \mathcal{F}(\pi_L))$. Si I y L cumplían b), existen ξ_I y ξ_L que se proyectan en ξ_q , y por ser el morfismo sobreyectivo, existe ξ_K cuya imagen es el par (ξ_I, ξ_L) . Por tanto ξ_K se proyecta también sobre ξ_q . Luego K también cumple a) y b). Por tanto, podemos tomar la intersección de todos los ideales que cumplen a) y b) como nuestro J_{q+1} y como ξ_{q+1} cualquier elemento de $\mathcal{F}(K)$ que se proyecte sobre ξ_q .

Acabamos de probar por inducción que podemos construir la sucesión ξ_q, R_q . Tomamos entonces $J = \bigcap_q J_q$ y $R = S/J$. Por cómo hemos construido los J_q , se cumple que los $\overline{J}_q = J_q/J$ son una base de la topología n -ádica de R . Por tanto, R es el límite inverso de los $R_q = R/\overline{J}_q$, entonces, la sucesión de elementos que hemos construido, $\hat{\xi} = \xi_q$, es efectivamente un elemento de $\hat{\mathcal{F}}(R)$. Solo resta probar que $(\hat{\xi}, R)$ es una deformación semiuniversal de \mathcal{F} . Es decir, que el morfismo que induce $\hat{\xi}$ entre h_R y $t_{\mathcal{F}}$, es liso e induce un isomorfismo en los espacios tangentes.

Ya vimos que debido a nuestra elección de ξ_1 los espacios tangentes $h_R(k[\varepsilon])$ y $t_{\mathcal{F}}$ eran isomorfos.

Falta probar que el morfismo es liso. Para ello hay que ver que dada una extensión pequeña, $p : B \rightarrow A$, el morfismo ψ , definición 5.10, es sobreyectivo. Conviene tener en mente el diagrama

$$\begin{array}{ccc} h_R(B) & \xrightarrow{\hat{\xi}} & \mathcal{F}(B) \\ h_R(p) \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(p) \\ h_R(A) & \xrightarrow{\hat{\xi}} & \mathcal{F}(A). \end{array}$$

Lo que hay que probar es que dados $\varphi \in h_R(A)$ y $\eta' \in \mathcal{F}(B)$ tales que

$$\hat{\xi}(\varphi) = \eta \quad \mathcal{F}(p)(\eta') = \eta$$

y existe $\phi \in h_R(B)$ tal que

$$\hat{\xi}(\phi) = \eta' \quad h_R(p)(\phi) = \varphi.$$

Pero $h_R(p)(\phi) = p \circ \phi$, por tanto, buscamos ϕ un levantamiento de φ que induzca la deformación η' . Vamos a probar en primer lugar que, si encontramos un levantamiento cualquiera de φ hemos terminado. Supongamos que tenemos ϕ tal que $h_R(p)(\phi) = \varphi$. Consideramos entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} h_R(k[\varepsilon]) \times h_R(B) & \xrightarrow{\hat{\xi} \times \hat{\xi}} & t_{\mathcal{F}} \times \mathcal{F}(B) \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\ h_R(B) \times_{h_R(A)} h_R(B) & \xrightarrow{\hat{\xi} \times \hat{\xi}} & \mathcal{F}(B) \times_{\mathcal{F}(A)} \mathcal{F}(B) \end{array}$$

donde β_1 y β_2 son las acciones de grupo de t_R y $t_{\mathcal{F}}$. Como ya vimos, ambas acciones de grupo vienen dadas por el morfismo $h_R(j)$ y $\mathcal{F}(j)$, de manera que $\hat{\xi}$ conmuta con las imágenes de ese morfismo. Eso, junto con el argumento que venimos usando de que los funtores conmutan con los productos, nos permite probar que el diagrama es conmutativo.

Sabiendo eso, tomamos $\hat{\xi}(\phi) = \eta''$. Esta deformación no es η' pero si que cumple que $\mathcal{F}(p)(\eta'') = \eta$. Por tanto, η'' está en la fibra de $\mathcal{F}(p)^{-1}(\eta)$ y, como ya vimos, la acción de $t_{\mathcal{F}}$ en estas fibras es transitiva. Es decir, existe un elemento $\zeta \in t_{\mathcal{F}}$ tal que, $\beta_2(\zeta, \eta'') = (\eta', \eta'')$. Consideramos entonces el elemento (v, ϕ) , contraimagen de (ζ, η'') por el morfismo $\hat{\xi} \times \hat{\xi}$. Finalmente, tenemos $\beta_1(\zeta, \phi) = (\tilde{\phi}, \phi) \in h_R(B) \times_{h_R(A)} h_R(B)$ y, por tanto, $\tilde{\phi}$ es el morfismo que buscábamos. Al estar el par $(\tilde{\phi}, \phi)$ en el producto fibrado, $\tilde{\phi}$ también es un levantamiento de φ , y además, como

el diagrama de las acciones es conmutativo, se tiene que $\hat{\xi}(\tilde{\phi}) = \eta'$. Acabamos de probar que, si encontramos ϕ tal que $h_R(\phi) = \varphi$, podemos usar las acciones que hemos construido para llevarlo a otro levantamiento que induce la deformación que buscábamos. Solo falta entonces probar que, si tenemos un morfismo de $\varphi : R \rightarrow A$, siempre lo podemos levantar a un morfismo de R en B .

Consideramos una extensión pequeña $p : B \rightarrow A$, un morfismo $\varphi : R \rightarrow A$ y una deformación $\eta' \in \mathcal{F}(B)$, tales que, $\hat{\xi}(\varphi) = \eta$ y $\mathcal{F}(p)(\eta') = \eta$. Sabemos que φ factoriza a través de algún $R_q = S/J_q$ y, por otro lado, como R es un cociente de series de potencias, el morfismo φ se puede levantar a un morfismo ψ de S en B . Esto último porque, al ser S un anillo de series de potencias, podemos considerar $a_i \in A$ las imágenes de las variables x_i de S , y construir el levantamiento enviando x_i a cualquier elemento de $p^{-1}(a_i)$. Juntando toda esta información se obtiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 S & & & & \\
 \downarrow & \searrow w & & \searrow \psi & \\
 R & & R_q \times_A B & \longrightarrow & B \\
 & & \downarrow p' & & \downarrow p \\
 & & R_q & \xrightarrow{\varphi_q} & A
 \end{array}$$

El morfismo w existe por la propiedad universal del producto fibrado. Además, la proyección p' es una extensión pequeña pues, su núcleo son los elementos de la forma $(0, b)$ con $p(b) = 0$. Es decir, $\text{Ker}(p') = 0 \times \text{Ker}(p)$, que es por tanto el ideal principal generado por $(0, t)$ donde t es el generador de $\text{Ker}(p)$. Se tienen entonces dos posibilidades, que p' tenga o no una sección. Si p' tiene una sección hemos acabado pues podemos usar la sección para levantar φ . Si p' no tiene sección, por la proposición 5.7 es esencial y, como $p' \circ w$ es sobreyectivo, se deduce que w es sobreyectivo.

Una vez sabemos que w es sobreyectivo, denotamos $J = \text{Ker}(w)$. Como la primera componente w envía S en $S/J_q = R_q$, se tiene que, si $w(y) = (0, 0)$, en particular $y \in J_q$ y por tanto $J \subset J_q$. Si $y \in \mathfrak{m}J_q$, $y = \sum m_i j_i$ con $m_i \in \mathfrak{m}$ y $j_i \in J_q$, entonces, $w(y) = \sum w(m_i)w(j_i)$ y, como w es local, $w(m_i)$ está en el ideal maximal de $R_q \times_A B$. Por otro lado, $p'(w(j_i)) = 0$, luego $w(j_i) \in \text{Ker}(p')$. Como p' es una extensión pequeña, el producto de un elemento de su núcleo por cualquiera del maximal es 0 y, por tanto, $w(y) = 0$. Es decir, $\mathfrak{m}J_q \subset J \subset J_q$. Además, por hipótesis tenemos ξ_q y η' que van a parar a η . Esto implica por la propiedad (H_1) que existe un elemento $\zeta \in \mathcal{F}(R_q \times_A B) \simeq \mathcal{F}(S/J)$ cuya imagen por $\mathcal{F}(p')$ es ξ_q . Entonces, J es un ideal de S que cumple las propiedades que cumplía el ideal J_{q+1} . Pero habíamos elegido J_{q+1} minimal de entre los que cumplían dichas propiedades, por tanto, $J_{q+1} \subset J$ y el morfismo w factoriza a través de R_{q+1} . Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 S & & & & & & \\
 \downarrow & \searrow w & & \searrow \psi & & & \\
 R & & R_{q+1} & \longrightarrow & R_q \times_A B & \longrightarrow & B \\
 & & \downarrow p' & & \downarrow p & & \\
 & & R_q & \xrightarrow{\varphi_q} & A & &
 \end{array}$$

La composición del paso al cociente de R a R_{q+1} , compuesto con el morfismo a través del cual factoriza w , seguido del morfismo de $R_q \times_A B$, nos da un levantamiento de $\varphi = \varphi_q(\pi_q)$, lo que concluye la prueba del teorema y el texto. \square

Bibliografía

- [1] M. F. Atiyah, I. G. MacDONald, *Introduction to Commutative Algebra*. Addison Wesley Publishing Company, 1969.
- [2] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer New York, 1995.
- [3] D. Eisenbud, J. Harris *The Geometry of Schemes*, Graduate Texts in Mathematics **197**, Springer New York, 2000.
- [4] G. M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin, *Introduction to Singularities and Deformations*. Springer Monographs in Mathematics, Springer Berlin, Heidelberg, 2006.
- [5] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer New York, 1977.
- [6] R. Hartshorne, *Deformation Theory*. Graduate Texts in Mathematics **257**, Springer New York, 2009.
- [7] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics **5**, Springer New York, 1998.
- [8] M. Manetti, *Lie Methods in Deformation Theory*. Springer Monographs in Mathematics, Springer Singapore, 2022.
- [9] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*. Cambridge University Press, 1987.
- [10] M. Schlessinger, Functors of Artin Rings. Transactions of the American Mathematical Society **130** (1968), no. 2, 208-222.
- [11] E. Sernesi, *Deformations of Algebraic Schemes*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **334**, Springer Berlin, Heidelberg, 2006.