



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Grupos de simetría y orbifolds

Autor: Pedro Fidalgo Martínez

Tutor: Santiago Encinas Carrión

Curso 2022/2023

Índice general

Introducción	1
1. Topología, geometría y simetrías	5
1.1. Acciones continuas de un grupo	5
1.2. Grupos de isometrías	13
1.3. Grupos cristalográficos	20
2. Orbifolds	23
2.1. Definiciones y preliminares	24
2.2. Grupo local	28
2.3. Ejemplos	31
2.3.1. El toro y la botella de Klein	32
2.3.2. Espejos y bordes	33
2.3.3. (M, G) -orbifolds	34
2.3.4. La mesa de billar y esquinas	38
2.3.5. La funda de almohada y conos	39
2.3.6. Orbifolds geométricos	40
2.4. Recubrimientos de orbifolds	41
2.5. Característica de Euler	50
3. Clasificación de orbifolds parabólicos	55
3.1. Notación Conway-Thurston	55
3.2. Fórmula de la característica de Euler	59
3.3. El teorema <i>mágico</i> de Conway	61
3.4. Desarrollando cada orbifold	66
4. Clasificación de orbifolds elípticos	83
4.1. El teorema <i>mágico</i> para la esfera	83
4.2. Desarrollando cada orbifold	87
4.3. Los grupos de frisos	91

Bibliografía	92
Índice de figuras	97
Índice de tablas	99

Introducción

Este trabajo nace a raíz la lectura de la primera parte de [Conway]. Como su título anuncia, en *The symmetries of things* se nombra y clasifica un catálogo inmenso de grupos de simetría. En particular, John H. Conway introduce una notación novedosa (la signatura orbifold) y una prueba original (su teorema *mágico*) para la clasificación de los 17 grupos cristalográficos del plano. Desarrollando las ideas de William P. Thurston, Conway utiliza los orbifolds como herramienta fundamental, lo que le permite clasificar también otras familias de grupos de simetría.

Nuestro objetivo principal es, por un lado, estudiar el concepto de orbifold siguiendo [Thurston1] y, por otro, clasificar los grupos cristalográficos del plano e incluso otros tipos de grupos, como se indica en [Conway].

Los grupos cristalográficos se utilizan para estudiar las simetrías de las estructuras cristalinas: moléculas cuyos átomos se ordenan de forma periódica. No es de extrañar que los cristalógrafos hayan sido los primeros en estudiarlos rigurosamente. Los 17 grupos cristalográficos del plano fueron clasificados por primera vez a finales del siglo XIX por Fedorov. Y unos años más tarde Fedorov, Schönflies y Barlow enumeraron los 230 grupos cristalográficos del espacio (ver [Montesinos] para más detalles).

Tras haber sido clasificados, los grupos cristalográficos continúan siendo objeto de investigación matemática. A principios del siglo XX, Bieberbach probó varios teoremas fundamentales (teorema 1.3.4), en los que caracteriza los grupos cristalográficos en dimensión n y resuelve parte del 18.º problema de Hilbert (en dimensión n hay solo finitos grupos cristalográficos módulo isomorfismo). Unos años después, Zassenhaus publicó un algoritmo capaz de enumerar los grupos cristalográficos en dimensión n . Y en la década de 1970 Thurston, entre otros, utilizó los grupos discretos de isometrías y los orbifolds para producir avances sustanciales en geometría y topología de dimensión 3, consiguiendo estar más cerca de resolver la conjetura de Poincaré, que finalmente fue resuelta por Perelman, Medalla Fields 2006. Para más detalles, consúltense las notas históricas sobre los grupos cristalográficos de [Delgado, notas bibliográficas 2], [Ratcliffe, sección 7.7] y [Thurston2, sección 4.2].

Además, a lo largo de la historia del arte la simetría ha sido utilizada como recurso estético. Sin salir de España, en la Alhambra podemos disfrutar de bellos motivos simétricos que cubren paredes, suelos y techos, donde se han encontrado ejemplos de los 17 grupos cristalográficos. Este monumento inspiraría al artista M. C. Escher, quien volvió a poner de manifiesto el potencial artístico de los grupos de simetría. Pueden verse varios ejemplos en [Montesinos].

En cambio, los orbifolds son objetos matemáticos recientes. Fueron definidos por primera vez en 1956, [Satake], con el nombre de *V-manifolds*. Pero no fue hasta que Thurston los renombró como orbifolds en sus conferencias [Thurston1] que realmente tomaron relevancia. Mientras que Satake se centró en su geometría diferencial, Thurston exploró las nociones topológicas de los orbifolds, especialmente los recubrimientos.

Un orbifold es, localmente, el cociente de un abierto de \mathbb{R}^n por un grupo finito de automorfismos. Para nuestro objetivo, nos interesará estudiar la estructura de orbifold de \mathbb{E}^2/G , siendo \mathbb{E}^2 el plano euclídeo y G un grupo cristalográfico.

Actualmente los orbifolds se estudian empleando teoría de categorías, en vez de a través de cartas locales como se venía haciendo. Se han utilizado grupoides [Moerdijk] y stacks [Lerman] para definir la categoría de los orbifolds.

En el primer capítulo de la memoria desarrollaremos las nociones de teoría de grupos, topología y geometría necesarias para este trabajo. Empezaremos estudiando las acciones continuas de grupos y los grupos discretos de automorfismos en la topología compacto-abierta. Después recordaremos la clasificación de movimientos euclídeos. Definiremos los grupos cristalográficos y algunas nociones relacionadas siguiendo la terminología que empleaba Thurston. También enunciaremos los teoremas de Cartan-Dieudonné (1.2.15) y de Bieberbach (1.3.4), fundamentales en el estudio de grupos de isometrías.

El segundo capítulo es la parte central del trabajo, ya que trata el estudio general de los orbifolds. Definiremos el concepto de orbifold siguiendo la fuente original, que son las notas de [Thurston1]. Después estudiaremos los grupos locales, que permiten definir los puntos singulares o regulares del orbifold. Gracias a la información almacenada en los grupos locales de \mathbb{E}^2/G podremos recuperar el grupo cristalográfico G . Tras presentar una lista de ejemplos que nos serán de utilidad en el capítulo 3, acabaremos definiendo los recubrimientos y la característica de Euler generalizados a orbifolds. La relación entre los recubrimientos y la característica de Euler (teorema 2.5.5) es fundamental para probar el teorema *mágico* de Conway (3.3.1).

También seguiremos las notas de [Caramello], que utilizan una notación más moderna. Sin embargo, las demostraciones que exponemos en este capítulo aparecen como ejercicios tanto en [Caramello] como en [Thurston1], y los detalles que hemos añadido han supuesto el núcleo del trabajo invertido en la memoria.

En los capítulos 3 y 4 se clasifican los grupos cristalográficos del plano y los grupos finitos puntuales del espacio respectivamente. En ambos capítulos se enuncia primero el teorema *mágico* de Conway (3.3.1 y 4.1.2), que nos indica qué orbifolds debemos considerar. Y después recuperamos los grupos de simetría *desarrollando* cada orbifold (ver tablas 3.3 y 4.3).

Dado que vamos a nombrar los orbifolds que necesitemos con la signatura de Conway y Thurston (definición 3.1.4), le asociaremos esta misma signatura a los grupos de simetría. Esta notación nos dará información sobre los elementos de simetría del grupo y su dominio fundamental. En comparación con lo anterior, los contenidos de esta parte son más bien corolarios que ilustran las aplicaciones que pueden tener los orbifolds.

Aunque la memoria concluya aquí, en [Conway] se enumeran también los primeros elementos de la familia infinita de grupos cristalográficos del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , utilizando otro teorema *mágico*. También se generaliza la notación orbifold para clasificar los 230 grupos cristalográficos espaciales (los detalles se pueden ver en [Conway2]).

Por último, un breve comentario sobre las figuras de esta memoria. Las imágenes de grupos cristalográficos han sido creadas con la ayuda del software libre *Morenaments*, de [Gagern]. Actualmente se puede descargar en la página web de Imaginary. Las teselaciones simétricas de la esfera han sido generadas con la ayuda de *Tegula*, de [Zeller]. Este programa permite manejar una base de datos de teselaciones de la esfera, el plano y el plano hiperbólico.

Me gustaría agradecer a Santiago toda su ayuda y consejo durante el trabajo. Ha sido un placer aprender con él.

Capítulo 1

Topología, geometría y simetrías

Los conceptos que se presentan en este primer capítulo nos servirán para estudiar los grupos cristalográficos y su relación con los orbifolds en el resto de la memoria. En la primera sección definiremos, sobre un espacio topológico, los conceptos de acción continua y grupo discreto de automorfismos. También introduciremos varias definiciones relacionadas con acciones propiamente discontinuas siguiendo [Thurston2].

Pasando al caso particular de los espacios métricos, en la segunda sección veremos que las acciones propiamente discontinuas y los grupos discretos son conceptos equivalentes como se indica en [Scott] y se prueba en [Ratcliffe]. Además, estudiaremos el grupo de isometrías del espacio euclídeo \mathbb{E}^n siguiendo a [Blanco], [Delgado] y [Ratcliffe]. Finalmente, en la sección 1.3 definiremos los grupos cristalográficos y presentaremos varios resultados fundamentales de [Ratcliffe] y [Thurston2], algunos sin demostrar dada su complejidad, pero que necesitaremos en el trabajo.

1.1. Acciones continuas de un grupo

El concepto de acción de un grupo G sobre un conjunto X aparece de manera natural cuando G es un grupo de simetría de X . Como trabajaremos con espacios métricos, y por tanto topológicos, primero vamos a estudiar las acciones continuas, es decir, las que respetan la estructura topológica. Para ello, G debe estar dotado de una topología compatible con su operación interna.

Nota. Si G es un grupo que actúa sobre un conjunto X , denotaremos $\alpha(g, x) = gx$, siendo $\alpha : G \times X \rightarrow X$ la acción.

Definición 1.1.1. Un **grupo topológico** G es un grupo (G, \cdot) dotado de una topología τ tal que τ es compatible con \cdot en el siguiente sentido:

- La operación interna de grupo $\cdot : G \times G \rightarrow G$ es una aplicación continua, dotando a $G \times G$ de la topología producto.
- La aplicación $G \rightarrow G$ dada por $g \mapsto g^{-1}$ es continua.

Definición 1.1.2. Dado un espacio topológico X y un grupo topológico G , una **acción continua** de G sobre X es una aplicación continua $G \times X \rightarrow X$ que cumple las siguientes condiciones:

- $ex = x$ para todo $x \in X$, siendo e el elemento neutro de G .
- $g(hx) = (gh)x$ para todos $g, h \in G$ y $x \in X$.

Definimos en X la relación de equivalencia $x \mathcal{R} y \iff \exists g \in G : gx = y$. Se define la aplicación de paso al cociente $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$. Llamamos **espacio de órbitas** al conjunto de clases de equivalencia $X/G := X/\mathcal{R}$ dotado de la topología cociente por la relación \mathcal{R} . La **órbita** de un punto x es su clase de equivalencia y se denota $G \cdot x$. El **grupo estabilizador o de isotropía** de un punto $x \in X$ es el subgrupo de G formado por los elementos que dejan fijo x denotado $G_x := \{g \in G : gx = x\} \leq G$.

Sea $\text{Aut}(X)$ el **grupo de automorfismos** de X , es decir, los homeomorfismos de X en X . Queremos representar las acciones continuas sobre X como subgrupos de $\text{Aut}(X)$. De esta manera interpretamos las acciones como subgrupos de un mismo grupo.

Definición 1.1.3. Una **representación** r del grupo topológico G en $\text{Aut}(X)$ es un homomorfismo de grupos $r : G \rightarrow \text{Aut}(X)$.

Lema 1.1.4. Sea α una acción continua de G sobre X . Dado $g \in G$, llamemos $\alpha_g : X \rightarrow X$ a la aplicación continua $\alpha_g(x) = gx$. Sea $\hat{\alpha} : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ dada por $\hat{\alpha}(g) = \alpha_g$. Entonces $\hat{\alpha}$ define una representación de G por automorfismos de X . En particular, $\hat{\alpha}(G) = \{\alpha_g : g \in G\}$ es un subgrupo de $\text{Aut}(X)$.

Demostración. Por definición de acción sabemos que $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ y que $\alpha_e = \text{id}_X$. Luego para todo g en G se tiene que $\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}} = \text{id}_X$, de donde se deduce que α_g es un automorfismo de X . Es decir, $\hat{\alpha}(g) \in \text{Aut}(X)$. Como la primera igualdad implica que $\hat{\alpha}(g) \circ \hat{\alpha}(h) = \hat{\alpha}(gh)$, entonces $\hat{\alpha} : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ es homomorfismo de grupos como se quería ver. \square

Definición 1.1.5. Una acción de G sobre X es **fiel** (o efectiva) cuando el único elemento de G que deja fijos todos los puntos de X es el neutro.

Proposición 1.1.6. Sea α una acción continua de G sobre X . Entonces son equivalentes:

- α es fiel.
- $\ker \hat{\alpha} = \{e\}$.
- $\hat{\alpha}$ es isomorfismo entre G y un subgrupo de $\text{Aut}(X)$.

Demostración. La demostración es inmediata por el lema 1.1.4. □

Al hablar de acciones de G fieles, estamos hablando de subgrupos de $\text{Aut}(X)$ isomorfos a G o, equivalentemente, de representaciones de G inyectivas. Por lo tanto, de aquí en adelante **supondremos que todas las acciones son fieles** o, lo que es lo mismo, grupos de automorfismos de X .

Definición 1.1.7. Diremos que una acción de G sobre X es **libre** si el único elemento de G que deja algún punto fijo es el neutro.

Nota. Las acciones libres son siempre fieles. Ya que si solamente el elemento neutro tiene puntos fijos, entonces solamente el neutro deja fijos todos los puntos. Obsérvese también que las acciones libres son las que para cada punto $x \in X$, su grupo estabilizador, G_x , es el trivial.

Ejemplo 1.1.8. Veamos un ejemplo de acción α que no sea fiel. Sea D_n el grupo diédrico de orden $2n$, generado por la reflexión σ y el giro g del plano euclídeo. Definimos la acción $\alpha : D_n \times \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ como

$$\sigma x = x \quad \text{y} \quad gx = g(x)$$

para cada reflexión $\sigma \in D_n$, cada punto $x \in \mathbb{E}^2$ y cada giro $g \in D_n$. Está claro que las reflexiones y el neutro dejan fijo todo el plano, por lo que α no es una acción fiel. De hecho la representación $\hat{\alpha}$ nos da $\hat{\alpha}(D_n) = C_n \leq \text{Aut}(\mathbb{E}^2)$, el subgrupo de giros de D_n .

Ejemplo 1.1.9. Algunos ejemplos de grupos que actúan libremente son los grupos de movimientos de \mathbb{E}^2 formados por traslaciones y/o reflexiones con deslizamiento, ya que estos movimientos no dejan ningún punto fijo. También son acciones libres los giros que actúan sobre una circunferencia, o sobre el plano sin el origen (así se evita que el origen quede fijo).

Nuestro objetivo ahora es definir la noción de grupo de automorfismos discreto. Para ello tenemos que dotar a $\text{Aut}(X)$ de una topología, τ_k , que llamaremos compacto-abierta. Veamos cómo se construye. Primero recordaremos algunos resultados básicos de topología sobre bases y subbases.

Lema 1.1.10. Dado (X, τ) un espacio topológico y un subconjunto $B \subseteq \tau$, son equivalentes:

- La topología τ es la menor o más gruesa de X que contiene a B . Es decir, si otra topología $\tilde{\tau}$ cumple que $B \subseteq \tilde{\tau}$ entonces tenemos que $\tau \subseteq \tilde{\tau}$.
- El conjunto \mathcal{B} formado por las intersecciones finitas de elementos de B forma una base de τ . Consideramos $X \in \mathcal{B}$ como la intersección de cero elementos de B .

Demostración. Supongamos que τ es la menor topología que contiene a B . Cualquier topología que contenga a B también debe contener todas las intersecciones finitas de B , es decir, tenemos que $\mathcal{B} \subseteq \tau$. El conjunto τ_0 formado por uniones de elementos de \mathcal{B} es cerrado para intersecciones finitas y uniones. Luego τ_0 es una topología siendo \mathcal{B} una base. Además, cualquier topología que contenga a B debe contener las uniones de \mathcal{B} , luego tenemos que $B \subseteq \tau_0 \subseteq \tau$. Y por ser τ la topología más gruesa que contiene a B , deducimos que $\tau = \tau_0$. Es decir, \mathcal{B} es base de τ .

Supongamos ahora que \mathcal{B} es una base de τ y hay otra topología $B \subseteq \tilde{\tau}$. Entonces $\mathcal{B} \subseteq \tilde{\tau}$ por el mismo argumento que antes. Luego $\tau \subseteq \tilde{\tau}$ y queda probado que τ es la más gruesa topología que contiene B . \square

Definición 1.1.11. Dado (X, τ) espacio topológico, una **subbase** de la topología es una colección $B \subseteq \tau$ que cumple las condiciones equivalentes del lema 1.1.10. Recíprocamente, dado $B \subseteq \mathcal{P}(X)$ definimos la **topología generada por la subbase B** como el conjunto de uniones de intersecciones finitas de elementos de B .

Nota. Cualquier subconjunto B de $\mathcal{P}(X)$ puede ser subbase generadora de alguna topología. Esto es porque $\mathcal{B} = \{\bigcap_{i=1}^n B_i : B_i \in B, n \in \mathbb{N}\} \cup X$ cubre con sus elementos X y además si un punto x está en la intersección de dos conjuntos de \mathcal{B} , entonces siempre se tiene que $x \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Estas dos condiciones son suficientes para que \mathcal{B} sea base de alguna topología y por tanto son suficientes para que B sea subbase.

Lema 1.1.12. Sea B subbase del espacio topológico (X, τ) y sea $Y \subseteq X$. Entonces $B_Y := \{Y \cap V : V \in B\}$ es subbase de (Y, τ_Y) . Donde τ_Y es la topología de subespacio

Demostración. Denotemos con \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}_Y) el conjunto de intersecciones finitas de elementos de B (resp. B_Y). Luego $\mathcal{B}_Y = \{Y \cap W : W \in \mathcal{B}\}$, ya que si $W = \bigcap_{i=1}^n V_i$ con $V_i \in B$, entonces $Y \cap W = \bigcap_{i=1}^n (V_i \cap Y)$ con $V_i \cap Y \in B_Y$. Como \mathcal{B} es base de τ , entonces \mathcal{B}_Y es base de τ_Y . Por lo que B_Y es subbase de τ_Y . \square

Definición 1.1.13. Sea (X, τ) un espacio topológico. Definimos la **topología compacto-abierta** τ_k sobre $\text{Aut}(X)$ como la generada por la subbase

$$B_k = \{(K, U) : K \subseteq X \text{ compacto}, U \in \tau\},$$

donde $(K, U) := \{f \in \text{Aut}(X) : f(K) \subseteq U\}$ son los abiertos subbásicos.

Nótese que τ_k tiene a $\mathcal{B}_k = \{\bigcap_{i=1}^n (K_i, U_i) : n \in \mathbb{N}, (K_i, U_i) \in B_k\}$ como base. Veamos ahora algunas propiedades del espacio $(\text{Aut}(X), \tau_k)$ que pueden consultarse en [Dugundji] o [Munkres].

Lema 1.1.14. Dados U, U_i abiertos y K, K_i compactos de X , tenemos las siguientes relaciones:

1. $K_2 \subseteq K_1, U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow (K_1, U_1) \subseteq (K_2, U_2)$
2. $\bigcap_{i=1}^n (K_i, U) = (\bigcup_{i=1}^n K_i, U)$
3. $\bigcap_{i=1}^n (K, U_i) = (K, \bigcap_{i=1}^n U_i)$
4. $\bigcap_{i=1}^n (K_i, U_i) \subseteq (\bigcup_{i=1}^n K_i, \bigcup_{i=1}^n U_i)$

Demostración. Las cuatro propiedades son consecuencia de la definición de abierto subbásico (K, U) . Para probar (1) obsérvese que $f(K_2) \subseteq f(K_1) \subseteq U_1 \subseteq U_2$ si $f \in (K_1, U_1)$. Para ver (2) y (4) hay que tener en cuenta que $\bigcup f(K_i) = f(\bigcup K_i)$. La prueba de (3) es inmediata de la definición. \square

Lema 1.1.15. Si X es un espacio Hausdorff, entonces $(\text{Aut}(X), \tau_k)$ también es Hausdorff.

Demostración. Sean $f \neq g \in \text{Aut}(X)$, entonces existe un punto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Como X es Hausdorff, podemos separar $f(x_0)$ de $g(x_0)$ por abiertos disjuntos U y V . Luego $(\{x_0\}, U)$ y $(\{x_0\}, V)$ son entornos abiertos disjuntos de f y g respectivamente. \square

Lema 1.1.16. Dado $g \in \text{Aut}(X)$, la aplicación $\varphi_g : \text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(X)$ definida por $\varphi_g(h) = gh$ es un automorfismo del espacio topológico $(\text{Aut}(X), \tau_k)$. Es decir, $\varphi_g \in \text{Aut}(\text{Aut}(X))$.

Demostración. Sabemos que φ_g es una biyección por ser $\varphi_{g^{-1}}$ su inversa. Si vemos que φ_g es continua para todo $g \in \text{Aut}(X)$, entonces se tendrá también que $\varphi_{g^{-1}}$ es continua, concluyendo la demostración. Para comprobar la continuidad de φ_g basta con asegurarse de que la imagen inversa de cualquier abierto subbásico $(K, U) \in B_k$ sea abierta. Ya que entonces también será abierta la imagen inversa de cualquier abierto básico de \mathcal{B}_k .

Observemos que $h \in \varphi_g^{-1}(K, U)$ si y solo si $gh \in (K, U)$, lo que equivale a que $h \in (K, g^{-1}(U))$. Luego $\varphi_g^{-1}(K, U) = (K, g^{-1}(U)) \in \tau_k$, y así queda demostrada la continuidad de φ_g . \square

El espacio $(\text{Aut}(X), \tau_k)$ no es, en general, un grupo topológico (ver [Dijkstra]). Pero la topología compacto-abierta cumple una propiedad que resulta suficiente para lo que buscamos si X es localmente compacto y Hausdorff.

Proposición 1.1.17. Sea (X, τ) un espacio localmente compacto y Hausdorff. Consideremos la aplicación de evaluación $\alpha : \text{Aut}(X) \times X \rightarrow X$ dada por $(f, x) \mapsto f(x)$. Entonces la topología compacto-abierta sobre $\text{Aut}(X)$ es la más gruesa que hace que la aplicación de evaluación sea continua.

Demostración. Siguiendo la prueba de [Arens], veamos primero que τ_k es más gruesa que cualquier otra topología para la que α es continua. Después comprobaremos que α es continua considerando τ_k .

Sea $\tilde{\tau}$ una topología sobre $\text{Aut}(X)$ que hace que α sea continua. Tomando K compacto y U abierto de X , sea $W = (K, U) \in B_k$ abierto de τ_k . Para ver que $W \in \tilde{\tau}$, veamos que para todo $f \in W$ existe un entorno $W_f \in \tilde{\tau}$ contenido en W . Así se conseguiría que $B_k \subseteq \tilde{\tau}$, luego $\tau_k \subseteq \tilde{\tau}$.

Una vez elegido $f \in W \in B_k$ tomemos $x \in K$, luego $f(x) \in U$. Entonces, por la continuidad de α considerando $\tilde{\tau}$, $\alpha^{-1}(U)$ es abierto de $\text{Aut}(X) \times X$. Por lo que existen $V_x \subseteq X$ entorno de x y $W_{f,x} \subseteq \text{Aut}(X)$ $\tilde{\tau}$ -entorno de f tales que $(f, x) \in W_{f,x} \times V_x \subseteq \alpha^{-1}(U)$. Es decir, para todo $y \in V_x$ y $g \in W_{f,x}$, se tiene $g(y) \in U$.

Tenemos un recubrimiento por abiertos $\bigcup_{x \in K} V_x \supseteq K$, luego por la compacidad de K existe un subrecubrimiento finito $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \supseteq K$. Definimos el $\tilde{\tau}$ -entorno $W_f = \bigcap_{i=1}^n W_{f,x_i}$ de f . Y tenemos que si $g \in W_f$ entonces $g(K) \subseteq g(\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}) \subseteq U$, es decir, $g \in W = (K, U)$. Por lo que $W_f \subseteq W$ para todo $f \in W$, con W_f $\tilde{\tau}$ -entorno de f . Esto prueba que $W \in \tilde{\tau}$, entonces $B_k \subseteq \tilde{\tau}$, luego $\tau_k \subseteq \tilde{\tau}$.

Veamos, para acabar, la continuidad de α considerando τ_k . Tomando U abierto de X , veamos que $\alpha^{-1}(U)$ es abierto. Sea $(f, x) \in \alpha^{-1}(U)$, entonces $f^{-1}(U)$ es un entorno de x . Como X es localmente compacto y Hausdorff, existe $K \subseteq f^{-1}(U)$ compacto que es adherencia de un entorno abierto V de x (véase [Munkres, teorema 29.2]). Luego $W = (K, U)$ es τ_k -entorno de f tal que $(f, x) \in W \times V \subseteq \alpha^{-1}(U)$, probando así la continuidad de α . \square

Una vez tratadas las principales propiedades de la topología compacto-abierta en $\text{Aut}(X)$, pasamos a definir los conceptos relacionados con grupos de automorfismos que utiliza [Thurston2] para el estudio de los orbifolds y los grupos cristalográficos.

Definición 1.1.18. Sea (X, τ) un espacio topológico, y G un grupo de automorfismos de X . Diremos que G es **discreto** si tiene la topología discreta como subespacio de $(\text{Aut}(X), \tau_k)$.

Proposición 1.1.19. Sea G un subgrupo de $\text{Aut}(X)$. Consideremos la topología compacto-abierta. Entonces son equivalentes:

1. G es discreto.
2. Los conjuntos unipuntuales son abiertos de G .
3. Los conjuntos unipuntuales forman una base de la topología de G .
4. Los conjuntos unipuntuales forman una subbase de la topología de G .
5. $\{\text{id}_X\}$ es abierto en G .

Demostración. Las implicaciones triviales son $(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$ y también $(2) \Rightarrow (5)$.

Por último probemos $(2) \Leftarrow (5)$. Veamos que $\{g\}$ es abierto en G , con $g \in G$. Gracias al lema 1.1.16 sabemos que multiplicar por $g \in G$ nos da un automorfismo φ_g en el espacio topológico $(\text{Aut}(X), \tau_k)$. Como G es subgrupo y subespacio de $\text{Aut}(X)$, la restricción de φ_g a G es también automorfismo de G . Dado que $\{\text{id}_X\}$ es abierto en G , entonces $\{g\} = \varphi_g(\{\text{id}_X\})$ también lo es, quedando probada la última implicación. \square

Definición 1.1.20. Sea α la acción por evaluación de $G \leq \text{Aut}(X)$ sobre X .

1. Decimos que α tiene **órbitas discretas** si todo punto $x \in X$ tiene un entorno U tal que solo finitos $g \in G$ cumplen que $gx \in U$. Es decir, $G \cap (\{x\}, U)$ es finito.
2. Decimos que α es **wandering** si todo punto $x \in X$ tiene un entorno U tal que solo finitos $g \in G$ cumplen que $gU \cap U \neq \emptyset$.
3. Sea X localmente compacto. Diremos que la acción α es **propriadamente discontinua** (o que G actúa propia y discontinuamente) si para cada compacto K de X hay solo finitos $g \in G$ tales que $gK \cap K \neq \emptyset$.

Nota. Es importante observar que las variedades topológicas son localmente compactas y Hausdorff, ya que veremos acciones propriadamente discontinuas sobre estas. En el caso de grupos de isometrías en espacios lo suficientemente *buenos*, la discretitud y los tres conceptos anteriormente definidos son equivalentes (teorema 1.2.6).

Lo que en [Thurston2] se llama órbitas discretas y *wandering* se usa a veces como definición de acción propriadamente discontinua ya que no parece haber consenso en la literatura sobre la definición de esta propiedad. En el caso general estos tres conceptos no son equivalentes. Solo se puede asegurar una cadena de implicaciones como veremos a continuación.

Proposición 1.1.21. Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff y G un subgrupo de $\text{Aut}(X)$.

1. Si la acción de G sobre X (suponiendo que es localmente compacto) es propiamente discontinua, entonces es *wandering*.
2. Si la acción de G sobre X es *wandering*, entonces tiene órbitas discretas.
3. Si la acción de G tiene órbitas discretas, entonces G es discreto.
4. La acción de G sobre X tiene órbitas discretas si y solo si para todo punto $x \in X$, su órbita es un espacio discreto $G \cdot x$ de X y su estabilizador G_x es finito.

Demostración. (1) Propiamente discontinua implica *wandering*. Porque todo punto tiene un entorno compacto K y todo compacto cumple que el conjunto $\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.

(2) *Wandering* implica órbitas discretas, ya que para todo x existe un entorno U tal que $\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Como este conjunto contiene a $G \cap (\{x\}, U)$, que también es finito, G tiene órbitas discretas.

(3) Veamos que tener órbitas discretas implica la discretitud de G comprobando que $\{\text{id}_X\}$ es abierto en G , ya que por la proposición 1.1.19 esto equivale a que G sea discreto. Estamos suponiendo que para cada x existe un entorno abierto U tal que $(\{x\}, U) \cap G$ es finito. Claramente $\text{id}_X \in (\{x\}, U)$. Además, $(\text{Aut}(X), \tau_k)$ es Hausdorff gracias al lema 1.1.15. Por lo tanto podemos separar id_X de cada uno de los finitos $g_i \in (\{x\}, U) \cap G$ por abiertos disjuntos W_i, V_{g_i} de $\text{Aut}(X)$. Y así se tiene que $G \cap (\{x\}, U) \cap \bigcap_{i=1}^m W_i = \{\text{id}_X\}$ es abierto de G .

(4) Veamos que tener órbitas discretas implica que las órbitas son espacios discretos y los estabilizadores son finitos. Dado $x \in X$, sea $y \in G \cdot x$ un punto de su órbita. Entonces y tiene un entorno U que contiene finitos puntos de la órbita $\{y, y_1, \dots, y_n\} = U \cap G \cdot x$, por tener G órbitas discretas. Como X es Hausdorff, se puede separar y de cada y_1, \dots, y_n por abiertos disjuntos V_i, W_{y_i} en U y así se consigue un entorno abierto $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ de y tal que $V \cap G \cdot x = \{y\}$. Luego cada punto de $G \cdot x$ es abierto de la órbita, por lo que esta es un espacio discreto.

Comprobemos ahora que los estabilizadores son finitos. Fijemos un punto $x \in X$. Como G tiene órbitas discretas, existe un entorno W de x tal que $G \cap (\{x\}, W)$ es finito. Como es claro que $G_x \subseteq G \cap (\{x\}, W)$, se tiene que el estabilizador de x es finito.

Veamos por último que si las órbitas son espacios discretos y los estabilizadores son finitos, entonces G tiene órbitas discretas. Como las órbitas de G son espacios discretos, entonces para todo punto $x \in X$ existe un entorno U tal que $U \cap G \cdot x = \{x\}$. Por lo tanto, $(\{x\}, U) \cap G = G_x$, el subgrupo estabilizador de x . Pero como sabemos que G_x es finito, queda probado (4). \square

1.2. Grupos de isometrías

En esta sección dejamos el caso general de los espacios topológicos para centrarnos en el caso particular de los espacios métricos. Siguiendo [Ratcliffe] vamos a probar la equivalencia entre las acciones continuas definidas en 1.1.20 bajo ciertas condiciones sobre X .

Definición 1.2.1. Un **espacio métrico** (X, d) está formado por un conjunto X y una **métrica** o distancia d . Una métrica d sobre X es una aplicación $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$, para todo $x, y \in X$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in X$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$.

En un espacio métrico (X, d) podemos definir la **bola abierta** y la **bola cerrada** de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ como el conjunto

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}, \quad \bar{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

El conjunto de las bolas abiertas de (X, d) forma una base \mathcal{B}_d para τ_d , la **topología inducida por d** . Así, al hablar de espacios métricos, les estamos dotando también de estructura de espacios topológicos.

Definición 1.2.2. Dados $(X, d), (Y, \rho)$ espacios métricos, una **isometría** de X en Y es una aplicación $f : X \rightarrow Y$ que conserva las distancias, es decir, que $d(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2))$ para todo par de puntos. Nótese que f es automáticamente inyectiva y continua. Llamaremos $\text{Iso}(X)$ al grupo de isometrías biyectivas de X en X . Tenemos que $\text{Iso}(X)$ es subgrupo de $\text{Aut}(X)$. También consideramos $\text{Iso}(X)$ como subespacio de $\text{Aut}(X)$ con la topología compacto-abierta.

Nota. Para que $\text{Iso}(X)$ sea un grupo, se necesita la biyectividad de las isometrías. Por ejemplo, consideremos $(c_{00}(\mathbb{R}), d_\infty)$, el espacio métrico de las sucesiones reales con un número finito de términos no nulos, con la distancia inducida por la norma del supremo. La aplicación $f(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$ es una isometría lineal pero no tiene inversa, por no ser sobreyectiva.

Nota. Para probar el teorema 1.2.6 en espacios algo más generales que los euclídeos, seguiremos las ideas de [Ratcliffe]. Pero nos restringiremos a espacios métricos más amigables, los finitamente compactos.

También necesitaremos el teorema de Ascoli (1.2.5) generalizado a espacios de funciones continuas con la topología de la convergencia compacta [Munkres, teorema 47.1]. Pero lo enunciaremos adaptado a nuestra situación, ya que $\text{Aut}(X)$ es subespacio de $\mathcal{C}(X, X)$, el espacio de funciones continuas de X en X . Además, si X es métrico, la topología compacto-abierta coincide con la de la convergencia compacta sobre $\mathcal{C}(X, X)$, como se puede ver en [Munkres, teorema 46.8].

Definición 1.2.3. Diremos que un espacio métrico es **finitamente compacto** si todas sus bolas cerradas son compactas. Nótese que los espacios euclídeos son finitamente compactos, y los espacios finitamente compactos son localmente compactos y Hausdorff.

Definición 1.2.4. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}(X, X)$. Se dice que \mathcal{S} es **equicontinuo** respecto de d si para todo $x_0 \in X$ y todo $\varepsilon > 0$, existe un entorno U de x_0 tal que $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ para todo punto $x \in U$ y toda aplicación $f \in \mathcal{S}$.

Teorema 1.2.5 (de Ascoli). [Munkres, teorema 47.1]. Sea (X, d) espacio métrico localmente compacto y Hausdorff. Dotemos a $\mathcal{C}(X, X)$ de la topología compacto-abierta y sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}(X, X)$. Entonces \mathcal{S} está contenido en un compacto de $\mathcal{C}(X, X)$ si y solo si \mathcal{S} es equicontinuo respecto de d y, para cada $x \in X$, el conjunto

$$\mathcal{S}_x = \{f(x) : f \in \mathcal{S}\}$$

tiene clausura compacta.

Teorema 1.2.6. Sea (X, d) un espacio métrico finitamente compacto y sea G un grupo de isometrías de X . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. La acción de G es propiamente discontinua.
2. La acción de G es *wandering*.
3. La acción de G tiene órbitas discretas.
4. Las órbitas de G son espacios discretos y sus estabilizadores son finitos.
5. El grupo G es discreto.

Demostración. Recordando la proposición 1.1.21 tenemos la cadena de implicaciones $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Rightarrow (5)$. Si probamos $(5) \Rightarrow (1)$, ya hemos terminado.

Sea K compacto de X . Para llegar a (1) suponiendo (5), necesitamos ver que $\mathcal{S} = \{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$ es finito. Veamos que \mathcal{S} está contenido en un compacto C empleando el teorema de Ascoli (1.2.5). Así tendremos que la intersección de C con G es compacta, ya que G es cerrado en $\text{Aut}(X)$ como puede verse en [Ratcliffe, teorema 5.3.5, lemas 3 y 6]. También sabemos que $C \cap G$ es discreto por serlo G . Luego \mathcal{S} estará contenido en un discreto compacto $C \cap G$ y por tanto será finito.

Veamos que \mathcal{S} cumple las hipótesis del teorema de Ascoli. La equicontinuidad de \mathcal{S} es clara ya que estamos manejando isometrías: para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno $B(x, \varepsilon)$ tal que $d(gx, gy) = d(x, y) < \varepsilon$, para todo $g \in \mathcal{S}$ y todo $y \in B(x, \varepsilon)$.

Veamos por último que $\overline{\mathcal{S}_x}$ es compacto para cualquier $x \in X$. Si $\overline{\mathcal{S}_x}$ está contenido en una bola cerrada (luego compacta por ser X finitamente compacto), entonces $\overline{\mathcal{S}_x}$ es compacto, ya que los cerrados dentro de un compacto son compactos. Así que solo necesitamos ver la acotación de \mathcal{S}_x para saber que su adherencia está contenida en una bola cerrada. Sean $x \in X$, $g \in \mathcal{S}$, $y \in K$ y $\delta(K)$ el diámetro de K . Entonces tenemos que

$$d(y, gx) \leq d(y, gy) + d(gy, gx) \leq 2\delta(K) + d(x, y) =: R,$$

por lo que $\overline{\mathcal{S}_x} \subseteq \overline{B}(y, R)$. Luego \mathcal{S} es finito y entonces concluimos que G actúa propia y discontinuamente. □

Definición 1.2.7. Llamaremos **espacio euclídeo** n -dimensional \mathbb{E}^n al espacio métrico (\mathbb{R}^n, d) con la métrica euclídea. Dentro de \mathbb{E}^{n+1} , consideramos la esfera unitaria con la métrica dada por la restricción de d a la esfera. Este espacio métrico se designa por \mathbb{S}^n y se suele llamar **espacio esférico** (o esfera) n -dimensional.

Nota. El espacio euclídeo \mathbb{E}^n tiene más estructuras que la de espacio métrico. También es un espacio vectorial y afín de dimensión finita, y está dotado de producto escalar (el usual) y norma. Suponemos conocido el hecho de que las isometrías de \mathbb{E}^n son afinidades. Y si dejan fijo el origen, las isometrías son aplicaciones lineales. De hecho, las isometrías lineales quedan representadas por las matrices ortogonales, mientras que las isometrías afines se pueden expresar como una isometría lineal seguida de una traslación. Todos estos resultados pueden consultarse en [Ratcliffe].

Nota. Podríamos haber dotado a \mathbb{S}^n de una métrica intrínseca, pero nos será beneficioso que haya una relación entre la métrica de la esfera y la del espacio ambiente euclídeo. Así se establece una identificación entre las isometrías lineales de \mathbb{E}^{n+1} y las isometrías de \mathbb{S}^n , que son restricción de las anteriores [Ratcliffe, teorema 2.1.3]. Teniendo en mente lo que conocemos sobre espacios euclídeos podemos pasar a definir los siguientes grupos.

Definición 1.2.8. $E(n) := \text{Iso}(\mathbb{E}^n)$ llamado **grupo euclídeo o de movimientos**, es el grupo de isometrías (afines) de \mathbb{E}^n . No debe confundirse con $O(n) := \text{Iso}(\mathbb{S}^{n-1})$, el **grupo ortogonal**, formado por las isometrías lineales de \mathbb{E}^n , que coinciden con las isometrías de \mathbb{S}^{n-1} . Entre los movimientos de \mathbb{E}^n se encuentran las traslaciones en una dirección v , dadas por $t_v(x) = x + v$. El **grupo de traslaciones** de \mathbb{E}^n se denota con $T(n)$. Observemos que $T(n)$ es isomorfo a \mathbb{R}^n a través de $t_v \mapsto v$.

Veamos algunos resultados sobre el grupo euclídeo y sus subgrupos. El objetivo será poder aplicarlo en la clasificación de los grupos cristalográficos. Pero antes recordemos un resultado de teoría de grupos.

Lema 1.2.9. Dado un grupo G , un subgrupo H de G y un subgrupo normal N de G , son equivalentes:

1. $NH = G$ y $N \cap H = \{1\}$.
2. Para cada $g \in G$ existen $n \in N$, $h \in H$ únicos tales que $g = nh$.
3. $\pi \circ i : H \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/N$ es un isomorfismo, con i la inclusión del subgrupo H y π la proyección al cociente.
4. Existe una sucesión exacta de grupos que escinde a la derecha

$$1 \hookrightarrow N \xrightarrow{j} G \begin{matrix} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{i} \end{matrix} H \twoheadrightarrow 1,$$

siendo i y j las inclusiones en G . Es decir, $N = \ker p$, $p \circ i = \text{id}_H$.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Como $NH = G$, todo g puede escribirse como nh . Si g se puede escribir como $nh = \tilde{n}\tilde{h}$, entonces se tiene que $\tilde{n}^{-1}n = \tilde{h}h^{-1}$ es un elemento que está en $N \cap H = \{1\}$. Luego $n = \tilde{n}$ y $h = \tilde{h}$.

(2) \Rightarrow (3) Veamos que $\pi \circ i$ es sobreyectiva tomando $\bar{g} \in G/N$. Podemos representarlo como $\bar{g} = \overline{nh} = \overline{h}h^{-1}\overline{nh} = \overline{h}$, ya que $h^{-1}nh \in N$ por ser N subgrupo normal. Luego $\pi \circ i(h) = \bar{g}$, que prueba la sobreyectividad.

Veamos ahora la inyectividad. Si dado $h \in H$ ocurre que $\pi(h) = \bar{1}$, es porque $h \in N$. Pero esto nos da $h = 1 \cdot h = h \cdot 1$, y para que la representación de h sea única, h debe ser el elemento neutro. Luego $\pi \circ i$ es inyectiva.

(3) \Rightarrow (4) Como sabemos que $\pi \circ i$ nos da el isomorfismo $G/N \simeq H$, los morfismos $j : N \hookrightarrow G$ (inclusión) y $p := (\pi \circ i)^{-1} \circ \pi : G \twoheadrightarrow H$ nos dan una sucesión exacta $1 \hookrightarrow N \xrightarrow{j} G \xrightarrow{p} H \twoheadrightarrow 1$. Esto es claro, al ser j monomorfismo, p epimorfismo y $j(N) = N = \ker(p)$. Además la sucesión escinde a la derecha por $i : H \hookrightarrow G$, pues tenemos que $p \circ i = (\pi \circ i)^{-1} \circ \pi \circ i = \text{id}_H$.

(4) \Rightarrow (1) Veamos que $NH = G$. Tomemos $g \in G$ y sea $h = p(g)^{-1} \in H$. De las igualdades

$$p(g \cdot h) = p(g) \cdot p(i(h)) = p(g) \cdot h = 1$$

deducimos que gh pertenece a $\ker p = N$. Sea $n \in N$ tal que $n = gh$, entonces podemos expresar g como $np(g)$ con $n \in N$ y con $p(g) \in H$. Y así queda probado que $G = NH$.

Tomemos ahora $g \in N \cap H$. Entonces las igualdades

$$g = p(i(g)) = p(g) = p(j(g)) = 1$$

prueban que $N \cap H = \{1\}$, gracias a la sucesión exacta escindida. \square

Definición 1.2.10. Dados los grupos $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$ decimos que G es **producto semidirecto** de N y H , que escribiremos con $G = N \rtimes H$, si se cumple cualquiera de las propiedades equivalentes del lema 1.2.9.

Proposición 1.2.11. $E(n) = T(n) \rtimes O(n)$

Demostración. Veamos que se satisface la propiedad (1) del lema 1.2.9. Es claro que las traslaciones y las isometrías lineales son isometrías, luego ya tenemos $T(n), O(n) \leq E(n)$. Veamos que $T(n) \trianglelefteq E(n)$. Dada la traslación de x a y , $t_{xy} := t_{y-x} \in T(n)$, y $g \in E(n)$ veamos que $gt_{xy}g^{-1} = t_{g(x)g(y)} \in T(n)$. Lo comprobaremos en coordenadas. Si $gz = Az + b$, entonces tenemos que $g^{-1}z = A^{-1}(z - b)$ y que

$$gt_{xy}g^{-1}z = A(A^{-1}(z - b) + y - x) + b = z + Ay + b - (Ax + b) = t_{g(x)g(y)}(z).$$

Por lo que las traslaciones forman un subgrupo normal de $E(n)$.

Es fácil ver que $T(n) \cap O(n) = \{\text{id}_{\mathbb{E}^n}\}$, ya que $T(n)$ actúa libremente pero todos los elementos de $O(n)$ dejan fijo el origen. Por último, sabemos que $T(n)O(n) = E(n)$, porque una isometría afín es producto de una isometría lineal y una traslación. \square

Dado que $O(n)$ se puede representar como las matrices $n \times n$ ortogonales ($A^t = A^{-1}$) de coeficientes reales, tenemos que $|AA^t| = |A|^2 = |I_n| = 1$ y el determinante de estas matrices será 1 o -1 . A los elementos con determinante 1 se les llama **rotaciones** de $O(n)$.

Definición 1.2.12. Definimos $SO(n)$, el **grupo ortogonal especial**, como el subgrupo de $O(n)$ de las rotaciones. Entonces definimos dentro del grupo euclídeo $SE(n) = T(n) \rtimes SO(n)$, el **grupo euclídeo especial o de movimientos directos**.

De esta manera, diremos que un movimiento de $E(n)$ es **directo** si está en $SE(n)$. De lo contrario, diremos que se trata de un movimiento **indirecto**. Dado un grupo de movimientos $G \leq E(n)$, denotaremos con $G^+ = G \cap SE(n)$ a su subgrupo de movimientos directos.

Lema 1.2.13. Sea $G \leq E(n)$. Entonces G^+ tiene índice 2 o 1 en G , dependiendo de si tiene movimientos indirectos o no.

Demostración. Es evidente que si $G \leq SE(n)$, entonces $G = G^+$ y por tanto $[G : G^+] = 1$. Si por el contrario existe $\sigma \in G - G^+$, entonces $G^+ \cap \sigma G^+ = \emptyset$. Además $\sigma G^+ = G - G^+$, ya que si τ es indirecto, entonces $\sigma^{-1}\tau$ es directo y por tanto $\tau \in \sigma G^+$. Luego $[G : G^+] = 2$. \square

Definición 1.2.14. Dado un subgrupo $G \leq E(n)$, definamos los siguientes grupos: llamaremos al grupo libre abeliano $T(G) := G \cap T(n)$ el **grupo de traslaciones** de G y a $F(G) := G/T(G)$, el **grupo puntual** de G . De esta manera, tenemos el diagrama conmutativo (1.1), donde las sucesiones horizontales son exactas y escinden a la derecha como en el lema 1.2.9. Así podemos descomponer cualquier grupo de movimientos como producto semi-directo $G = T(G) \rtimes F(G)$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \{\text{id}\} & \longrightarrow & T(G) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F(G) & \longrightarrow & \{\text{id}\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \{\text{id}\} & \longrightarrow & T(n) & \longrightarrow & E(n) & \longrightarrow & O(n) & \longrightarrow & \{\text{id}\}
 \end{array} \tag{1.1}$$

Para tratar los grupos cristalográficos en los siguientes capítulos, vamos a enunciar la clasificación de movimientos que necesitaremos. Omitimos la demostración por ser elemental en un curso de Álgebra lineal y Geometría. Primero, recordemos el teorema de Cartan-Dieudonné.

Teorema 1.2.15 (de Cartan-Dieudonné en \mathbb{E}^n). [Blanco, teorema 6.1]. Todo movimiento $\sigma \in E(n)$ sobre el espacio afín euclídeo n -dimensional se puede descomponer como producto de a lo sumo $n + 1$ reflexiones respecto de hiperplanos.

Una vez visto el teorema de Cartan-Dieudonné, procedemos a enumerar los distintos movimientos de $E(2)$ según sus puntos fijos. También enunciaremos la clasificación de isometrías de $O(3)$, que necesitaremos en el cuarto capítulo. Las demostraciones pueden encontrarse en [Blanco] por ejemplo.

Proposición 1.2.16 (Clasificación de movimientos sobre \mathbb{E}^2). Cada movimiento de $E(2)$ es de uno de los siguientes tipos:

1. **La identidad**, $\text{id}_{\mathbb{E}^2}$: fija todo el plano y es directa.
2. **Reflexión** respecto de una recta l , σ_l : fija la recta l y es indirecta.
3. **Giro** de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$ con centro en $P \in \mathbb{E}^2$, $g_{P,\theta}$: fija el punto P y es directo. Si $\theta = \pi$, se llama **simetría central**.
4. **Traslación** por un vector $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, t_v : sin puntos fijos y directa.
5. **Reflexión con deslizamiento** (o trasreflexión) respecto de la recta l mediante un vector v en dirección l , $\sigma_l^v = \sigma_l t_v = t_v \sigma_l$: sin puntos fijos e indirecta.

Proposición 1.2.17 (Clasificación de isometrías de $O(3)$). Toda isometría de $O(3)$ pertenece a una de las siguientes clases:

1. **La identidad**, $\text{id}_{\mathbb{E}^3}$: deja fijo todo el espacio y es directa.
2. **Reflexión** respecto del plano vectorial Π , σ_Π : deja Π fijo y es indirecta.
3. **Giro** respecto de la recta vectorial l de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$, $g_{l,\theta}$: deja l fija y es directa. Si $\theta = \pi$, se llama **simetría respecto del eje l** .
4. **Giro indirecto** (o rotorreflexión) con Π plano y l recta vectoriales tales que $\Pi \perp l$ y ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$, es el producto $\sigma_\Pi g_{l,\theta} = g_{l,\theta} \sigma_\Pi$: deja $\{0\} = \Pi \cap l$ fijo y es indirecto. Si $\theta = \pi$ se llama **simetría central**.

Acabamos esta sección caracterizando ciertos grupos discretos de isometrías. Estos resultados se presentan a título informativo, ya que no son estrictamente necesarios para la clasificación de los grupos cristalográficos. Por tanto omitiremos las demostraciones.

Proposición 1.2.18. [Ratcliffe, teorema 5.3.2] Los subgrupos discretos de $T(n)$ son exactamente los generados por $m \leq n$ traslaciones con vectores linealmente independientes, por lo que son isomorfos a \mathbb{Z}^m .

Nota. Los subgrupos discretos de $T(n)$ se llaman **retículos** o redes. En cristalografía, un retículo se interpreta como el conjunto de puntos en el espacio correspondientes a cada vector de traslación del retículo.

Proposición 1.2.19. [Ratcliffe, teorema 5.3.1] Los subgrupos discretos de $O(n)$ son exactamente los finitos.

De hecho, la clasificación de los subgrupos finitos de $O(3)$ se presentará en el cuarto capítulo, como consecuencia del teorema *mágico* de Conway (4.1.2). Enunciamos ahora la clasificación de los subgrupos finitos de $O(2)$, que puede consultarse en [Delgado].

Proposición 1.2.20. Los subgrupos finitos no triviales de $O(2)$ son o bien grupos cíclicos C_n generados por una rotación de orden $n \geq 2$, o bien diédricos D_n generados por una rotación de orden n y una reflexión, siendo $n \geq 1$.

1.3. Grupos cristalográficos

Una vez conocidas las propiedades de los grupos de isometrías, acabamos este capítulo definiendo los grupos cristalográficos y presentando los teoremas de Bieberbach (1.3.4).

Definición 1.3.1. Dado un subconjunto F de un espacio métrico (X, d) , se define el **grupo de simetría** de F como el grupo $G(F)$ de isometrías que dejan F invariante.

Definición 1.3.2. Un **grupo cristalográfico** n -dimensional o de Bieberbach G es un grupo de isometrías de \mathbb{E}^n discreto y cocompacto (\mathbb{E}^n/G es un espacio topológico compacto).

Definición 1.3.3. Sea $G \leq \text{Iso}(X)$ en el espacio métrico (X, d) . Un subconjunto D de X es un **dominio fundamental** de G si cumple las siguientes condiciones:

- El conjunto D es un abierto conexo de X .
- Los abiertos de la familia $\{gD\}_{g \in G}$ son disjuntos dos a dos.
- $X = \bigcup_{g \in G} g\overline{D}$.

Nota. Los grupos cristalográficos admiten dominios fundamentales por ser discretos. Además, por ser cocompactos, los dominios fundamentales pueden tomarse con adherencia compacta. Para más detalles, ver [Ratcliffe, teorema 7.5.1].

Como ejemplos de dominios fundamentales, en muchas figuras de esta memoria se añade un dominio fundamental del grupo gracias a *Morenaments*, como en la figura 2.5 y las que siguen a la figura 3.1.

Para terminar el capítulo, enunciamos los resultados de Bieberbach, que son fundamentales en el estudio abstracto de los grupos cristalográficos. Las demostraciones pueden encontrarse en la sección 7.5 de [Ratcliffe].

Teorema 1.3.4 (de Bieberbach). [Thurston2, teorema 4.2.2].

1. Un grupo G es isomorfo a un grupo discreto de isometrías de \mathbb{E}^m , para algún m , si y solo si G tiene un subgrupo de índice finito que es libre abeliano de rango finito (isomorfo a \mathbb{Z}^n con $n \leq m$).
2. Un grupo cristalográfico n -dimensional G contiene un subgrupo normal de índice finito que es libre abeliano de rango n y es igual a su propio centralizador. Este subgrupo es el subgrupo de traslaciones y queda caracterizado por ser el único subgrupo abeliano maximal de índice finito.

Recíprocamente, si G tiene un subgrupo normal de índice finito que es libre abeliano de rango n y es igual a su propio centralizador, entonces G es isomorfo a un grupo cristalográfico n -dimensional. Si G es libre de torsión, no hace falta pedir que el subgrupo sea igual a su propio centralizador.

3. Si G y G' son grupos cristalográficos de dimensiones n y n' isomorfos, entonces $n = n'$ y existe $a : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ una afinidad que conjuga G con G' .
4. Dado n , solo existen finitos grupos cristalográficos n -dimensionales salvo equivalencia afín.

Capítulo 2

Orbifolds

“This terminology should not be blamed on me. It was obtained by a democratic process in my course of 1976-77. An orbifold is something with many folds; unfortunately, the word ‘manifold’ already has a different definition. I tried ‘foldamani,’ which was quickly displaced by the suggestion of ‘manifolded.’ After two months of patiently saying ‘no, not a manifold, a manifoldead,’ we held a vote, and ‘orbifold’ won.”

– W. Thurston

Los contenidos de este capítulo constituyen la parte central de la memoria. Primero, vamos a definir el concepto de orbifold, que generaliza el concepto de variedad. En lugar de ser localmente euclídeo, un orbifold es localmente el cociente de un abierto de \mathbb{R}^n por un grupo de automorfismos. Y la información de estos grupos se almacena en las cartas de orbifold.

Después, en la sección 2.2, procederemos a estudiar varias propiedades de los orbifolds, principalmente los grupos locales y las singularidades. Y tras unos ejemplos que nos serán de utilidad en la clasificación de los grupos cristalográficos, trataremos los recubrimientos de orbifolds en la sección 2.4. Por último, en la sección 2.5 se generaliza la característica de Euler a los orbifolds. Nos es de gran interés el teorema 2.5.5, que relaciona los recubrimientos con la característica de Euler y será la base de la clasificación de los grupos cristalográficos.

Para exponer la teoría de los orbifolds seguimos, como la mayoría de textos introductorios, las notas de [Thurston1]. También utilizamos terminología de [Caramello], que es una referencia más reciente.

2.1. Definiciones y preliminares

Recordemos primero las definiciones de variedad topológica y de variedad topológica con borde.

Definición 2.1.1. Una **variedad** (topológica n-dimensional) es un espacio topológico M que cumple tres condiciones:

- Es **localmente euclídeo**: Cada punto de M tiene un entorno abierto U que es homeomorfo a un abierto V de \mathbb{R}^n . Se llama **carta** a estos homeomorfismos $\phi : U \rightarrow V$. Un conjunto de cartas que cubre M se llama **atlas**.
- Es T_2 : M es un espacio de Hausdorff.
- Cumple el **segundo axioma de numerabilidad**: La topología de M tiene una base numerable de abiertos.

Nota. Cuando dos cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ se solapan, es decir, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ podemos definir el homeomorfismo

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

que llamaremos **aplicación de transición o cambio de cartas**. Los cambios de cartas no necesitan cumplir más propiedades para funcionar correctamente con variedades topológicas. Pero cuando definamos los orbifolds (2.1.4) tendremos que exigir más condiciones a los cambios de cartas, como ocurre por ejemplo con la estructura de variedad diferenciable.

Nótese que, por ser localmente euclídeas, las variedades son también localmente compactas, al serlo \mathbb{R}^n .

Definición 2.1.2. Consideremos $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$ como subespacio de \mathbb{R}^n . Una **variedad con borde** (topológica n-dimensional) es un espacio Hausdorff M que cumple el segundo axioma de numerabilidad y en el que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}_+^n (en vez de \mathbb{R}^n como en variedades sin borde).

Un punto p de una variedad con borde M es **interior** (resp. **de borde**) si para alguna carta ϕ , el punto $\phi(p)$ pertenece al interior (resp. a la frontera) de \mathbb{R}_+^n . El **borde** de una variedad con borde M es el subespacio ∂M de puntos de borde de M .

Nota. La definición de punto de borde o interior no depende de la carta elegida, ya que los cambios de carta son homeomorfismos en el entorno de p donde se solapan. Luego todas las cartas de p envían el punto o bien al interior, o bien a la frontera de \mathbb{R}_+^n .

Nota. El borde ∂M de una variedad n -dimensional M es una variedad de dimensión $n - 1$. Esto se puede comprobar tomando una carta $\phi : U \rightarrow V$ de cada punto de borde. Podemos definir $\tilde{\phi} = \phi|_{U \cap \partial M}$, que es homeomorfismo sobre su imagen contenida en $\mathbb{R}^{n-1} = \text{Fr}(\mathbb{R}_+^n)$. De esta forma, a partir de un atlas de M podemos construir un atlas de ∂M .

Las cartas orbifold van a ser más complicadas que las de variedad. Para no alargar más la definición 2.1.4, definamos antes las aplicaciones plegadoras.

Definición 2.1.3. Una aplicación $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ continua y sobreyectiva se llama **plegadora** si \tilde{U} es abierto de \mathbb{R}^n y existe Γ grupo finito de automorfismos de \tilde{U} asociado a ϕ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

- La aplicación ϕ es Γ -invariante: $\phi \circ \gamma = \phi$, para todo $\gamma \in \Gamma$.
- Existe un homeomorfismo $h : \tilde{U}/\Gamma \rightarrow U$ tal que $\phi = h \circ p$, siendo $p : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}/\Gamma$ el paso al cociente. Es decir, tenemos el diagrama conmutativo (2.1).

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U} & \xrightarrow{p} & \tilde{U}/\Gamma \\
 \downarrow \gamma & \searrow \phi & \downarrow h \\
 \tilde{U} & \xrightarrow{\phi} & U
 \end{array} \tag{2.1}$$

Definición 2.1.4. Un **orbifold** (topológico n -dimensional) \mathcal{O} está formado por un par $(X_{\mathcal{O}}, \mathcal{A})$ donde:

- $X_{\mathcal{O}}$ es un espacio topológico Hausdorff que cumple el segundo axioma de numerabilidad, llamado **espacio subyacente** de \mathcal{O} .
- $\mathcal{A} = \{(\phi_i : \tilde{U}_i \rightarrow U_i, \Gamma_i)\}_{i \in I}$ es un **atlas orbifold** n -dimensional. Los elementos del atlas se llaman **cartas orbifold** n -dimensionales.

Cada carta orbifolds está formada por:

- Una aplicación ϕ_i plegadora, con $\Gamma_i \leq \text{Aut}(\tilde{U}_i)$ asociado.
- Un abierto \tilde{U}_i de \mathbb{R}^n .
- Un abierto U_i de $X_{\mathcal{O}}$. La colección de abiertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ cubre $X_{\mathcal{O}}$ y cumple la siguiente **condición necesaria de base**: si existe $x \in U_i \cap U_j$ con $U_i, U_j \in \mathcal{U}$ entonces existe $U_k \in \mathcal{U}$ de manera que $x \in U_k \subseteq U_i \cap U_j$.

Además, las cartas orbifold de un atlas orbifold son **compatibles**.

Diremos que las cartas de un atlas orbifold son compatibles si cada vez que tenemos $U_i \subseteq U_j$ se cumplen las siguientes condiciones:

- Existe $f_{ij} : \Gamma_i \hookrightarrow \Gamma_j$ monomorfismo de grupos
- Existe $\psi_{ij} : \tilde{U}_i \hookrightarrow \tilde{U}_j$ inmersión topológica, es decir, ψ_{ij} es continua, inyectiva e induce un homeomorfismo con su imagen.
- La inmersión ψ_{ij} es equivariante respecto de f_{ij} , es decir, para todo $\gamma \in \Gamma_i$ y todo $x \in \tilde{U}_i$ tenemos que $\psi_{ij}(\gamma x) = f_{ij}(\gamma)\psi_{ij}(x)$. Además, el diagrama (2.2) conmuta.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \phi_i & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \tilde{U}_i & \xrightarrow{p_i} & \tilde{U}_i/\Gamma_i & \xrightarrow{h_i} & U_i \\
 \downarrow \psi_{ij} & & \downarrow \bar{\psi}_{ij} & & \swarrow \\
 \tilde{U}_j & \xrightarrow{\bar{p}_i} & \tilde{U}_j/f_{ij}(\Gamma_i) & \xrightarrow{\bar{f}_{ij}} & \tilde{U}_j/\Gamma_j \\
 & \searrow & \nearrow p_j & \xrightarrow{h_j} & U_j \\
 & & \phi_j & &
 \end{array} \tag{2.2}$$

Donde \bar{p}_i es el paso al cociente; h_i, h_j son homeomorfismos dados por las aplicaciones plegadoras ϕ_i, ϕ_j ; y $\bar{\psi}_{ij}, \bar{f}_{ij}$ están inducidas por $\psi_{ij}, f_{ij}(\Gamma_i) \leq \Gamma_j$ respectivamente.

Nota. La compatibilidad entre cartas y la condición necesaria de base son indispensables para la estructura de orbifold. Gracias a estas propiedades, la información del grupo de cada carta orbifold hace que el grupo local esté bien definido (ver 2.2.4).

Nota. Es común en la literatura escribir en un abuso de notación $x \in \mathcal{O}$ en lugar de $x \in X_{\mathcal{O}}$, que es lo correcto.

Definición 2.1.5. Dos atlas orbifold \mathcal{A}, \mathcal{B} sobre $X_{\mathcal{O}}$ son **equivalentes** si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es otro atlas orbifold de $X_{\mathcal{O}}$, es decir, se tiene compatibilidad entre las cartas. Una **estructura de orbifold** sobre un espacio subyacente $X_{\mathcal{O}}$ es la clase de equivalencia de un atlas orbifold.

Nota. Con la relación de equivalencia de atlas se subraya que, como en el caso de las variedades, las cartas no son intrínsecas a la estructura de orbifold sobre un espacio subyacente. Cuando trabajamos con un orbifold estamos tomando una clase de equivalencia de atlas orbifold para un espacio subyacente. En algunos casos se podrá considerar un atlas maximal o uno con pocas cartas, dependiendo de lo que la situación requiera.

Definición 2.1.6. Diremos que un orbifold \mathcal{O} es **conexo, compacto**, o cualquier otra propiedad topológica si lo es su espacio subyacente $X_{\mathcal{O}}$.

Lema 2.1.7. Supongamos que trabajamos con el atlas maximal para la estructura de orbifold de \mathcal{O} . Dada una carta $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma)$ con $x \in U$, podemos obtener una carta $(\phi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow V, \Gamma_{\tilde{x}})$ tal que

- $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ es conexo de \mathbb{R}^n ,
- $V = \phi(\tilde{V}) \subseteq U$ (luego también será conexo de $X_{\mathcal{O}}$),
- $\phi^{-1}(x) = \{\tilde{x}\}$, es decir, su fibra es unipuntual y
- $\Gamma_{\tilde{x}} \leq \Gamma$ es el subgrupo estabilizador.

Demostración. Sea la carta $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma)$, con $x \in U$. Escojamos un $\tilde{x} \in \phi^{-1}(x)$ y consideremos su estabilizador $\Gamma_{\tilde{x}} = \{\gamma \in \Gamma : \gamma\tilde{x} = \tilde{x}\}$. Como \tilde{U} es un abierto de \mathbb{R}^n , es variedad topológica. Y como Γ es finito, actúa de forma propiamente discontinua. Luego podemos aplicar el lema 2.3.3, que luego veremos para variedades en general, y conseguir

- un entorno conexo \tilde{V} de \tilde{x} contenido en \tilde{U} tal que
- $\gamma\tilde{V} = \tilde{V}$, para todo $\gamma \in \Gamma_{\tilde{x}}$ y
- $\gamma\tilde{V} \cap \tilde{V} = \emptyset$, para todo $\gamma \in \Gamma - \Gamma_{\tilde{x}}$.

Luego la restricción de los elementos de $\Gamma_{\tilde{x}}$ a \tilde{V} es el grupo asociado de la aplicación plegadora $\phi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow V := \phi(\tilde{V})$, como se puede ver en el diagrama (2.3).

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \xrightarrow{p} & \tilde{V}/\Gamma \cong \tilde{V}/\Gamma_{\tilde{x}} \\ & \searrow \phi & \downarrow h \\ & & V \end{array} \quad (2.3)$$

Recordemos que estamos considerando el atlas maximal para la estructura de orbifold de \mathcal{O} . Las cartas de $V \subseteq U$ son compatibles trivialmente, ya que los morfismos $f_{V,U}, \psi_{V,U}$ son las inclusiones. En el resto de cartas del atlas que cumplan $W_1 \subseteq V$ o $V \subseteq W_2$ tenemos compatibilidad ya que hay compatibilidad para $W_1 \subseteq U$ y $V \subseteq U \cap W_2 \subseteq W_2$, siendo W_1, W_2 abiertos de otras cartas del atlas maximal. Luego $(\phi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow V, \Gamma_{\tilde{x}})$ es una carta del atlas maximal con las propiedades deseadas. □

Definición 2.1.8. Sea \mathcal{O} un orbifold topológico. Llamamos **carta fundamental** de $x \in X_{\mathcal{O}}$ a toda carta orbifold $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma)$ tal que \tilde{U} es conexo, $\phi^{-1}(x) = \{\tilde{x}\}$ y $\Gamma = \Gamma_{\tilde{x}}$, el grupo estabilizador de \tilde{x} en Γ .

Nota. En el lema 2.1.7 hemos visto que si trabajamos con atlas maximales, podemos tomar una carta fundamental para cualquier punto. Y la podemos elegir contenida en la carta orbifold que deseemos. Es decir, **los abiertos de las cartas fundamentales forman una base de abiertos** de $X_{\mathcal{O}}$. Por tanto, a partir de ahora no causará problema suponer que el abierto \tilde{U} de la carta con la que trabajemos sea conexo, o que además la carta sea fundamental.

2.2. Grupo local

Ahora vamos a definir los conceptos de grupo local y de punto regular o singular. Para ello tendremos que ver en la proposición 2.2.4 que el grupo local está bien definido. Pero antes enunciamos el siguiente teorema sobre grupos finitos de automorfismos.

Teorema 2.2.1 (de Newman). [Dress, teorema 1]. Si Γ es un grupo finito de automorfismos sobre una variedad topológica M conexa, entonces el conjunto de puntos con estabilizador trivial es abierto y denso en M .

Corolario 2.2.2. Si Γ es un grupo de automorfismos sobre una variedad topológica M conexa tal que el conjunto de puntos con estabilizador no trivial tiene interior no vacío en M , entonces Γ es infinito.

Demostración. Este corolario es un caso del contrarrecíproco de 2.2.1. Si el conjunto de puntos con estabilizador no trivial tiene interior no vacío en M , entonces el conjunto de puntos con estabilizador trivial no es denso en M . Por lo que Γ no puede ser finito. \square

Definición 2.2.3. Sea $x \in X_{\mathcal{O}}$ y tomemos una carta $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma)$ tal que $\phi(\tilde{x}) = x \in U$. Llamamos **grupo local** o grupo local de isotropía Γ_x a la clase módulo isomorfismo de $\Gamma_{\tilde{x}} \leq \Gamma$, siendo $\Gamma_{\tilde{x}} = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(\tilde{x}) = \tilde{x}\}$ el estabilizador de \tilde{x} en Γ .

Nota. Es importante distinguir el siguiente matiz. El grupo $\Gamma_{\tilde{x}}$ es el estabilizador de $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ en Γ mientras que Γ_x es el grupo local de $x \in X_{\mathcal{O}}$, bien definido salvo isomorfismo como veremos a continuación. Es decir, $\Gamma_{\tilde{x}}$ es un representante módulo isomorfismo de Γ_x . Con esta notación remarcamos que estos dos grupos no son exactamente lo mismo.

Proposición 2.2.4. El grupo local de cada punto x es único salvo isomorfismo, es decir, no depende de cartas ni del representante \tilde{x} en la carta elegida.

Demostración. Basta con ver que si $U_i \subseteq U_j$ cubren x , siendo las cartas orbifold $(\phi_i : \tilde{U}_i \rightarrow U_i, \Gamma_i)$ y $(\phi_j : \tilde{U}_j \rightarrow U_j, \Gamma_j)$ con $\phi_i(\tilde{x}_i) = \phi_j(\tilde{x}_j) = x$, entonces $\Gamma_{\tilde{x}_i} \simeq \Gamma_{\tilde{x}_j}$. Ya que si tenemos dos cartas cualesquiera con abiertos U_i, U_j tales que $x \in U_i \cap U_j$, entonces existe $U_k \subseteq U_i \cap U_j$ también abierto de una carta que cubre x con $U_k \subseteq U_i, U_j$. Esto es porque, por definición, el conjunto \mathcal{U} de abiertos de cartas orbifold cumple la condición necesaria de base. Así se tendrá la isomorfía de grupos a través de \tilde{x}_k en la carta U_k , es decir, $\Gamma_{\tilde{x}_i} \simeq \Gamma_{\tilde{x}_k} \simeq \Gamma_{\tilde{x}_j}$. Siendo precisos, $\Gamma_{\tilde{x}_i} = (\Gamma_i)_{\tilde{x}_i}$, pero haremos esta simplificación.

Supongamos entonces que $U_i \subseteq U_j$ cubren x , con aplicaciones plegadoras $\phi_i(\tilde{x}_i) = x = \phi_j(\tilde{x}_j)$ y grupos asociados Γ_i, Γ_j . Sea $\tilde{y}_j = \psi_{ij}(\tilde{x}_i) \in \tilde{U}_j$, luego gracias al diagrama (2.2) tenemos que

$$\phi_j(\tilde{x}_j) = x = \phi_i(\tilde{x}_i) = \phi_j \circ \psi_{ij}(\tilde{x}_i) = \phi_j(\tilde{y}_j).$$

Como ϕ_j proyecta \tilde{y}_j y \tilde{x}_j sobre x , tenemos que existe $\gamma \in \Gamma_j$ tal que $\tilde{y}_j = \gamma\tilde{x}_j$.

Veamos que $f_{ij}(\Gamma_{\tilde{x}_i}) \leq \gamma\Gamma_{\tilde{x}_j}\gamma^{-1}$. Tomemos $g \in \Gamma_{\tilde{x}_i}$. Entonces obtenemos por las igualdades

$$\tilde{x}_j = \gamma^{-1}\psi_{ij}(\tilde{x}_i) = \gamma^{-1}\psi_{ij}(g\tilde{x}_i) = \gamma^{-1}f_{ij}(g)\tilde{y}_j = (\gamma^{-1}f_{ij}(g)\gamma)\tilde{x}_j$$

que $\gamma^{-1}f_{ij}(g)\gamma \in \Gamma_{\tilde{x}_j}$ si $g \in \Gamma_{\tilde{x}_i}$. Por lo que $f_{ij}(\Gamma_{\tilde{x}_i}) \leq \gamma\Gamma_{\tilde{x}_j}\gamma^{-1}$.

Veamos ahora que $\gamma\Gamma_{\tilde{x}_j}\gamma^{-1} \leq \Gamma_{\tilde{y}_j}$. Tomemos $h \in \Gamma_{\tilde{x}_j}$ y entonces

$$\tilde{y}_j = \gamma\tilde{x}_j = \gamma h\tilde{x}_j = (\gamma h\gamma^{-1})\tilde{y}_j$$

implica que $\gamma h\gamma^{-1} \in \Gamma_{\tilde{y}_j}$ si $h \in \Gamma_{\tilde{x}_j}$. Es decir, se tiene que $\gamma\Gamma_{\tilde{x}_j}\gamma^{-1} \leq \Gamma_{\tilde{y}_j}$.

Ya hemos conseguido $f_{ij}(\Gamma_{\tilde{x}_i}) \leq \gamma\Gamma_{\tilde{x}_j}\gamma^{-1} \leq \Gamma_{\tilde{y}_j}$, solo falta $\Gamma_{\tilde{y}_j} \leq f_{ij}(\Gamma_{\tilde{x}_i})$. Sea $g \in \Gamma_{\tilde{y}_j}$, queremos ver que g pertenece a $f_{ij}(\Gamma_{\tilde{x}_i})$. Como g deja \tilde{y}_j fijo, tenemos que $\tilde{y}_j \in g\psi_{ij}(\tilde{U}_i) \cap \psi_{ij}(\tilde{U}_i)$. Luego $A = g\psi_{ij}(\tilde{U}_i) \cap \psi_{ij}(\tilde{U}_i)$ es un abierto no vacío de \tilde{U}_j .

Puesto que Γ_j tiene orden finito, el conjunto D de puntos de \tilde{U}_j con estabilizador trivial es abierto y denso gracias al teorema 2.2.1. Esto quiere decir que existe $\tilde{z} \in A \cap D$. Como $\tilde{z} \in D$, tenemos que $\Gamma_{\tilde{z}} = \{1\}$. Y como $\tilde{z} \in A$, existen $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{U}_i$ tales que $\tilde{z} = g\psi_{ij}(\tilde{a}) = \psi_{ij}(\tilde{b})$. Dado que el diagrama (2.2) conmuta, obtenemos la igualdad

$$\phi_i(\tilde{b}) = \phi_j(\psi_{ij}(\tilde{b})) = \phi_j(g\psi_{ij}(\tilde{a})) = \phi_i(\tilde{a}).$$

Luego, como $\phi_i(\tilde{a}) = \phi_i(\tilde{b})$, existe $h \in \Gamma_i$ tal que $h\tilde{a} = \tilde{b}$. Y entonces tenemos que

$$\tilde{z} = \psi_{ij}(\tilde{b}) = \psi_{ij}(h\tilde{a}) = f_{ij}(h)\psi_{ij}(\tilde{a}) = (f_{ij}(h)g^{-1})\psi_{ij}(\tilde{b}) = (f_{ij}(h)g^{-1})\tilde{z}.$$

Por lo tanto $f_{ij}(h)g^{-1} \in \Gamma_{\tilde{z}} = \{1\}$. Es decir, al tomar $g \in \Gamma_{\tilde{y}_j}$, existe $h \in \Gamma_i$ tal que $f_{ij}(h) = g$. Veamos que $h \in \Gamma_{\tilde{x}_i}$ para acabar. Sabemos que

$$\psi_{ij}(\tilde{x}_i) = \tilde{y}_j = g\tilde{y}_j = f_{ij}(h)\psi_{ij}(\tilde{x}_i) = \psi_{ij}(h\tilde{x}_i).$$

Pero como ψ_{ij} es inyectiva, implica que $\tilde{x}_i = h\tilde{x}_i$. Así tenemos finalmente que $\Gamma_{\tilde{y}_j} \leq f_{ij}(\Gamma_{\tilde{x}_i})$, luego queda probada la unicidad de Γ_x salvo isomorfismo por las siguientes relaciones:

$$\Gamma_{\tilde{x}_i} \simeq f_{ij}(\Gamma_{\tilde{x}_i}) \simeq \Gamma_{\tilde{y}_j} \simeq \Gamma_{\tilde{x}_j}$$

□

El grupo local de un punto es un invariante del punto del orbifold y nos dará información sobre la estructura de orbifold en ese punto. El grupo local será de gran importancia para conocer más propiedades de los orbifolds. Veamos ahora terminología para los puntos según su grupo local.

Definición 2.2.5. Dado un punto $x \in X_{\mathcal{O}}$, diremos que x es **regular** si $\Gamma_x = \{1\}$ y diremos que x es **singular** si su grupo local no es trivial. El conjunto de todos los puntos singulares de $X_{\mathcal{O}}$ se llama **lugar singular** de \mathcal{O} y se denota $\Sigma_{\mathcal{O}} = \{x \in X_{\mathcal{O}} : \Gamma_x \neq \{1\}\}$.

Definición 2.2.6. Sea \mathcal{O} un orbifold topológico y Γ un grupo finito cualquiera. Denotaremos a los siguientes subespacios topológicos del espacio subyacente:

$$\Sigma_{\Gamma} = \{x \in X_{\mathcal{O}} : \Gamma \simeq \Gamma_x\}.$$

Cada componente conexa Σ_{α} de cada Σ_{Γ} se llamará **estrato** de \mathcal{O} . Y llamaremos **estratificación canónica** de \mathcal{O} a la unión disjunta $X_{\mathcal{O}} = \bigcup_{\alpha} \Sigma_{\alpha}$. Nótese que $\Sigma_{\{1\}} = X_{\mathcal{O}} - \Sigma_{\mathcal{O}}$. Los símbolos α en los estratos Σ_{α} son simplemente índices en algún conjunto I .

Nota. Cada estrato de un orbifold es una variedad topológica sin borde (véase [Caramello, sección 1.3]). Pero probar esto excede los objetivos de este trabajo. Además no haremos uso de esta propiedad. Lo que sí veremos es que el **lugar regular** $\Sigma_{\{1\}}$ es una variedad (proposición 2.3.1) y que es abierto y denso en $X_{\mathcal{O}}$ (proposición 2.2.7).

Proposición 2.2.7. El lugar singular $\Sigma_{\mathcal{O}}$ de un orbifold \mathcal{O} es un cerrado de interior vacío de $X_{\mathcal{O}}$. En particular, es nunca denso (su clausura tiene interior vacío).

Demostración. Sea $x \in \bar{\Sigma}_{\mathcal{O}}$ y sea $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma)$ una carta fundamental de x . Tenemos que $U \cap \Sigma_{\mathcal{O}} \neq \emptyset$, por ser U entorno de x , pero entonces existe $\phi(\tilde{y}) = y \in U \cap \Sigma_{\mathcal{O}}$, es decir, $\{1\} \neq \Gamma_{\tilde{y}} \leq \Gamma = \Gamma_{\tilde{x}}$, por ser carta fundamental de x . Por tanto $\Gamma_x = \Gamma \neq \{1\}$, luego $x \in \Sigma_{\mathcal{O}}$. Por lo que $\Sigma_{\mathcal{O}}$ es cerrado en $X_{\mathcal{O}}$.

Veamos ahora que el interior de $\Sigma_{\mathcal{O}}$ es vacío. Si x es un punto interior de $\Sigma_{\mathcal{O}}$, existirá un abierto U de una carta fundamental $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma)$ de x tal que $x \in U \subseteq \Sigma_{\mathcal{O}}$. Esto es porque los abiertos de cartas fundamentales forman una base de abiertos (lema 2.1.7). Como $U \subseteq \Sigma_{\mathcal{O}}$ está formado por puntos de grupo local no trivial, entonces \tilde{U} es una variedad conexa donde todos sus puntos tienen estabilizador no trivial por Γ . Por el corolario del teorema de Newman (2.2.2) tenemos que Γ es infinito, lo que contradice que Γ sea el grupo finito asociado a una carta orbifold. Luego x no puede ser un punto interior a $\Sigma_{\mathcal{O}}$. \square

2.3. Ejemplos

Veamos unos cuantos ejemplos de orbifolds para afianzar ideas. Empecemos por el caso trivial de orbifold, que son las variedades.

Proposición 2.3.1. Un orbifold \mathcal{O} con $\Sigma_{\mathcal{O}} = \emptyset$ es también variedad, es decir, un atlas orbifold sobre $X_{\mathcal{O}}$ es un atlas de variedad topológica del espacio subyacente $X_{\mathcal{O}}$.

Recíprocamente, una variedad M tiene estructura de orbifold tal que $\Sigma_M = \emptyset$, es decir, un atlas de variedad puede ser interpretado como un atlas de orbifold siendo todos los grupos asociados a las aplicaciones plegadoras de las cartas triviales.

Demostración. Si todos los puntos del espacio subyacente son regulares, entonces todas las cartas orbifold $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma)$ son también cartas de variedad $\phi : \tilde{U} = \tilde{U}/\Gamma \rightarrow U$. Porque $\Gamma = \{1\}$ y $\tilde{U} = \tilde{U}/\{1\}$. Es decir, $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ es homeomorfismo, con \tilde{U} abierto de \mathbb{R}^n y U abierto de $X_{\mathcal{O}}$. Y por tanto el atlas de orbifold es atlas de variedad sobre el espacio subyacente $X_{\mathcal{O}}$.

La segunda parte es igual de fácil. Considérese un atlas maximal sobre una variedad, que será de orbifold además de atlas de variedad. \square

Nota. Existen orbifolds cuyo espacio subyacente es una variedad pero no todos sus puntos son regulares. Como es el caso de *la funda de almohada* en el ejemplo 2.3.5.

Hay variedades y orbifolds que pueden verse como cocientes (globales) de otras variedades por ciertos grupos. Estos son significativos porque aparecerán en el estudio de grupos cristalográficos. Veamos la siguiente colección de ejemplos de grupos de simetría actuando sobre el plano euclídeo.

2.3.1. El toro y la botella de Klein

Consideremos el grupo \mathbb{Z}^2 actuando sobre \mathbb{E}^2 mediante traslaciones, es decir, $(1, 0) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$, $(0, 1) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{v}$, con \mathbf{u}, \mathbf{v} vectores linealmente independientes de \mathbb{E}^2 . Este es uno de los grupos cristalográficos que buscamos clasificar. Sea $\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ la proyección de paso al cociente, con $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{T}^2$ el toro. Uno estaría tentado a decir que ϕ es una carta orbifold que cubre todo el toro, pero algo falla: el grupo asociado \mathbb{Z}^2 es infinito.

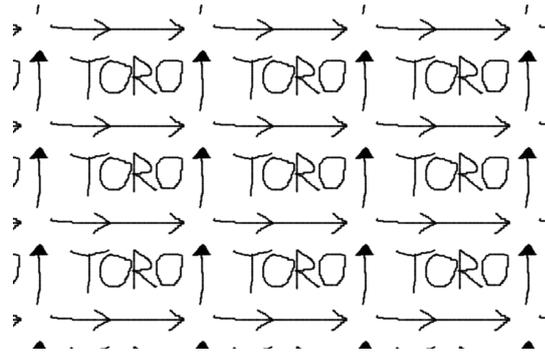


Figura 2.1: El toro como cociente $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$.

Para darle al toro estructura orbifold no nos queda más remedio que tomar varias cartas con grupo asociado trivial, es decir un atlas de variedad usual como en la proposición 2.3.1. Pero no es absurdo querer cubrir el toro con la proyección $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$, de hecho esa idea se formaliza mediante los recubrimientos de orbifolds que veremos en la sección 2.4. Y lo mismo ocurre con la botella de Klein.

La botella de Klein se obtiene habitualmente identificando los lados opuestos de un rectángulo, un par en el mismo sentido y el otro en sentido opuesto. Podemos teselar el plano moviendo ese rectángulo por traslaciones τ en dirección perpendicular al par de lados emparejado en el mismo sentido, y reflexiones con deslizamiento σ en dirección perpendicular al par emparejado en sentido opuesto. Estas simetrías generan un grupo infinito G , que al cocientar el plano por él volvemos a obtener la botella de Klein. De hecho el grupo G es también cristalográfico, denominado $\times \times$ o pg en la tabla 3.3. Por

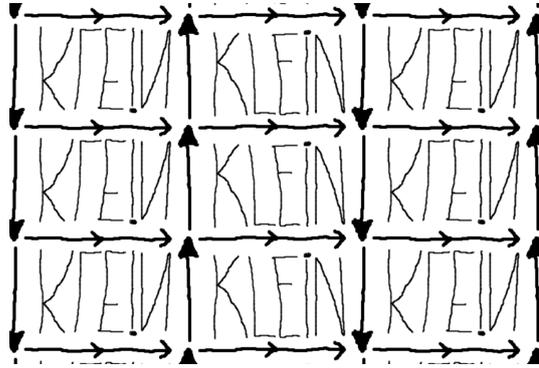


Figura 2.2: La botella de Klein como cociente \mathbb{E}^2/G .

lo tanto nos beneficiará estudiar la botella de Klein \mathbb{E}^2/G de la misma forma que el toro $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$: como orbifolds. Precisamente, como orbifolds recubiertos por \mathbb{T}^2 (véase el ejemplo 2.4.9).

2.3.2. Espejos y bordes

En el espacio euclídeo \mathbb{E}^n consideramos el grupo $G = \{1, \sigma_H\}$, siendo σ_H la reflexión respecto de un hiperplano H . El espacio $M := \mathbb{E}^n/G \cong \mathbb{R}_+^n$ tiene estructura de variedad con borde, donde $\partial M = H$. Pero además tiene estructura de orbifold, ya que las cartas de variedad en el borde pueden tomarse como orbifold: en vez de tomar $h : V \rightarrow U$ con V abierto de \mathbb{R}_+^n con puntos de borde, tomamos $\phi = h \circ p : \tilde{U} \rightarrow U$ siendo $p : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}/G \cong V$ el paso al cociente y $\tilde{U} = V \cup \sigma_H(V)$ abierto de \mathbb{R}^n . Además, el espacio anterior puede cubrirse con una sola carta $\phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n/G$, ya que G es finito. Gracias a esta idea, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.2. Cualquier variedad con borde M puede ser dotada también de estructura de orbifold, siendo su borde como variedad el lugar singular como orbifold $\Sigma_M = \partial M$, con grupos locales con una reflexión $G = \{1, \sigma\}$.

En la terminología de Thurston y Conway, un punto de borde visto como parte de un orbifold se suele llamar punto de **espejo** para distinguirlo de la estructura de variedad con borde.

Nota. Para evitar confusiones se omitirá el concepto de orbifold con borde, donde lo único que cambia es que los abiertos \tilde{U} se toman en \mathbb{R}_+^n . Esto podría dar lugar a malentendidos, confundiendo $\partial\mathcal{O}$ con $X_{\partial\mathcal{O}}$ o con $\partial X_{\mathcal{O}}$. Además, no se necesita para la clasificación de los grupos cristalográficos. Por lo que nos limitaremos a trabajar con orbifolds sin borde, pudiendo ser el espacio subyacente de alguno de ellos una variedad con borde (espejo).

2.3.3. (M, G) -orbifolds

Dado un grupo G que actúa sobre una variedad M , nos planteamos dotar de estructura de orbifold al espacio cociente M/G . Lo llamaremos también (M, G) -orbifold. Empecemos con unos lemas.

Lema 2.3.3. Dada una variedad M y un grupo de automorfismos G que actúa de forma propiamente discontinua, tomemos un punto $\tilde{x} \in M$ y un entorno \tilde{U} de \tilde{x} . Entonces existe un abierto $\tilde{U}_x \subseteq \tilde{U}$, que podemos elegir conexo, cumpliendo las siguientes condiciones:

- $g\tilde{U}_x = \tilde{U}_x$, para todo $g \in G_{\tilde{x}}$.
- $g\tilde{U}_x \cap \tilde{U}_x = \emptyset$, para todo $g \in G - G_{\tilde{x}}$.

Demostración. Vamos a construir el entorno \tilde{U}_x y comprobar que cumple lo que queremos. En virtud de la proposición 1.1.21, la acción de G es *wandering* ya que actúa de forma propiamente discontinua. Por lo tanto, existe un entorno abierto U de \tilde{x} contenido en \tilde{U} tal que $\mathcal{S} = \{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Además podemos elegir U conexo quedándonos con la componente conexa que nos interesa. Luego $\{g_i\}_{i=1}^k = \mathcal{S} - G_{\tilde{x}}$ es finito. Y podemos separar por abiertos disjuntos $\tilde{x} \in V_i$ de cada imagen $g_i\tilde{x} \in U_i$, por ser M de Hausdorff. Así reducimos U al entorno abierto

$$V = U \cap \left(\bigcap_{i=1}^k (V_i \cap g_i^{-1}U_i) \right).$$

Definimos $\tilde{U}_x = \bigcap_{g \in G_{\tilde{x}}} gV$, que es un entorno abierto de \tilde{x} , por ser intersección finita de entornos abiertos. Lo hemos obtenido reduciendo el entorno original sucesivamente $\tilde{U} \supseteq U \supseteq V \supseteq \tilde{U}_x$. Comprobemos que cumple las dos propiedades que queríamos ver. Si $g \in G_{\tilde{x}}$, entonces

$$g\tilde{U}_x = \bigcap_{h \in G_{\tilde{x}}} ghV = \bigcap_{h \in G_{\tilde{x}}} hV = \tilde{U}_x.$$

Ya que g permuta los elementos del grupo estabilizador. Si $g \notin \mathcal{S}$, entonces $gV \cap V = \emptyset$. Y puesto que $\tilde{U}_x \subseteq V$, deducimos $g\tilde{U}_x \cap \tilde{U}_x = \emptyset$. Por último, si $g_i \in \mathcal{S} - G_{\tilde{x}}$, entonces

$$g_i\tilde{U}_x \cap \tilde{U}_x \subseteq g_i(V_i \cap g_i^{-1}U_i) \cap (V_i \cap g_i^{-1}U_i) \subseteq U_i \cap V_i = \emptyset.$$

Dado que $\tilde{U}_x \subseteq V_i \cap g_i^{-1}U_i$. □

Lema 2.3.4. Dada una variedad M y un grupo de automorfismos G que actúa propia y discontinuamente, entonces la aplicación $p : M \rightarrow M/G$ de paso al cociente es abierta. Además, M/G es Hausdorff y cumple el segundo axioma de numerabilidad.

Demostración. Para ver que p es abierta, tomamos un abierto \tilde{U} de M y comprobamos que $p(\tilde{U})$ sea abierto. Lo que equivale a que $p^{-1}(p(\tilde{U}))$ sea abierto, por ser p aplicación cociente. Como la relación de equivalencia del cociente es la inducida por la acción de G , tenemos que

$$p^{-1}(p(\tilde{U})) = \bigcup_{g \in G} g\tilde{U}.$$

Y dado que $G \leq \text{Aut}(M)$, cada conjunto de la unión es abierto, por serlo \tilde{U} . Luego $p^{-1}(p(\tilde{U}))$ es abierto, que equivale a que $p(\tilde{U})$ lo sea.

Hemos probado que p es abierta. Veamos que $M/G = p(M)$ cumple el segundo axioma de numerabilidad por cumplirlo M y ser p sobreyectiva y abierta. Sea $\tilde{\mathcal{B}}$ una base numerable de M . Entonces $\mathcal{B} = \{p(B) : B \in \tilde{\mathcal{B}}\}$ es base numerable de M/G , ya que cubre M/G por abiertos y cualquier abierto U de M/G cumple que $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} B_i$, con $B_i \in \tilde{\mathcal{B}}$, luego tenemos que $U = p(p^{-1}(U)) = p(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} p(B_i)$, con $p(B_i) \in \mathcal{B}$.

Veamos por último que M/G es de Hausdorff. Para dos puntos distintos $x, y \in M/G$ existen $\tilde{x}, \tilde{y} \in M$ tales que $p(\tilde{x}) = x$ y $p(\tilde{y}) = y$. Luego $\tilde{x} \neq \tilde{y}$. Como M es localmente compacto y Hausdorff podemos separar \tilde{x} de \tilde{y} por entornos compactos disjuntos \tilde{U}, \tilde{V} . El compacto $K = \tilde{U} \cup \tilde{V}$ cumple, por ser la acción de G propiamente discontinua, que el siguiente conjunto es finito: $\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\} = \{g_i\}_{i=0}^r$. Como $g_i\tilde{x} \neq \tilde{y}$, podemos separar $g_i\tilde{x}$ de \tilde{y} por abiertos disjuntos \tilde{U}_i, \tilde{V}_i respectivamente. Por lo tanto

$$U = \tilde{U} \cap \left(\bigcap_{i=0}^r g_i^{-1}\tilde{U}_i \right), \quad V = \tilde{V} \cap \left(\bigcap_{i=0}^r \tilde{V}_i \right)$$

son entornos disjuntos de \tilde{x}, \tilde{y} respectivamente, tales que $gU \cap V = \emptyset$ para todo $g \in G$. Luego $p(U), p(V)$ son entornos disjuntos de x e y , por ser p abierta. \square

Teorema 2.3.5. Si M es una variedad topológica n -dimensional y G es un grupo de automorfismos que actúa propia y discontinuamente, entonces M/G tiene una estructura natural de orbifold topológico n -dimensional.

Demostración. Escribiremos $p : M \rightarrow M/G$ para denotar la aplicación de paso al cociente. Usaremos la notación $x \in M/G$ y $\tilde{x} \in M$ para puntos de la fibra de x . Y los entornos construidos como en el lema 2.3.3 se designarán $\tilde{U}_{\tilde{x}}$, con $U_x := p(\tilde{U}_{\tilde{x}})$.

El espacio cociente M/G será el espacio subyacente sobre el que definiremos la estructura de orbifold. Gracias al lema 2.3.4, ya tenemos que M/G es Hausdorff y satisface el segundo axioma de numerabilidad. Por lo tanto,

el resto de la prueba se dedicará a la construcción de un atlas orbifold sobre el espacio topológico subyacente M/G . Veamos primero que todos los puntos tienen carta orbifold U_x contenida en cada entorno abierto U y después comprobaremos la compatibilidad.

Escojamos entonces un punto $x \in M/G$ y \tilde{x} en su fibra $p^{-1}(x)$. Queremos construir una carta orbifold contenida en el entorno abierto U de x . Sea $\tilde{U} \subseteq p^{-1}(U)$ un entorno abierto de $\tilde{x} \in M$ homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n . Aplicando el lema 2.3.3, tenemos garantizada la existencia de un entorno conexo $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ de \tilde{x} contenido en \tilde{U} que cumple lo siguiente:

- $g\tilde{U}_{\tilde{x}} = \tilde{U}_{\tilde{x}}$, para todo $g \in G_{\tilde{x}}$.
- $g\tilde{U}_{\tilde{x}} \cap \tilde{U}_{\tilde{x}} = \emptyset$, para todo $g \in G - G_{\tilde{x}}$.
- Existe $\varphi : W \rightarrow \tilde{U}_{\tilde{x}}$ homeomorfismo, con W abierto de \mathbb{R}^n . Dado que $\tilde{U}_{\tilde{x}} \subseteq \tilde{U}$ son abiertos de M .

Por las propiedades de $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ tenemos que $U_x := p(\tilde{U}_{\tilde{x}}) = \tilde{U}_{\tilde{x}}/G \cong \tilde{U}_{\tilde{x}}/G_{\tilde{x}}$. Donde consideramos $G_{\tilde{x}} \leq \text{Aut}(\tilde{U}_{\tilde{x}})$ restringiendo el dominio de sus elementos al entorno. Y entonces tenemos que $\phi = p \circ \varphi : W \rightarrow U_x$ es una aplicación plegadora, con $\Gamma_x := \{\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi : g \in G_{\tilde{x}}\} \leq \text{Aut}(W)$ grupo local de x asociado, que es isomorfo a $G_{\tilde{x}}$. Luego $(\phi : W \rightarrow U_x, \Gamma_x)$ es una carta orbifold. En el diagrama (2.4) se pueden ver con mayor claridad las aplicaciones p_x, h_x inducidas por la aplicación plegadora ϕ .

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{U}_{\tilde{x}} \\
 \downarrow p_x & \searrow \phi & \downarrow p|_{\tilde{U}_{\tilde{x}}} \\
 W/\Gamma_x & \xrightarrow{h_x} & U_x \cong \tilde{U}_{\tilde{x}}/G_{\tilde{x}}
 \end{array} \tag{2.4}$$

Nótese que la colección de abiertos $\mathcal{U} = \{U_x \subseteq U : x \in U \in \tau_{M/G}\}$ en M/G , asociados a aplicaciones plegadoras, cumple la siguiente propiedad: dado un punto $z \in U_x \cap V_y$, podemos construir un entorno $W_z \in \mathcal{U}$ y una aplicación plegadora, con $z \in W_z \subseteq U_x \cap V_y$. Esto se consigue aplicando de nuevo el lema 2.3.3 y la construcción que acabamos de hacer. De hecho \mathcal{U} es una base de abiertos para la topología de M/G . Y cada abierto básico U_x forma parte de una carta fundamental $(\phi : W \cong \tilde{U}_{\tilde{x}} \rightarrow U_x, \Gamma_x)$ de algún punto $x \in M/G$.

Una vez visto para la colección \mathcal{U} , tenemos que ver que la colección de aplicaciones plegadoras $\mathcal{A} := \{(\phi : W \cong \tilde{U}_{\tilde{x}} \rightarrow U_x, \Gamma_x)\}_{U_x \in \mathcal{U}}$ satisface la definición de atlas orbifold para terminar la demostración. Es decir, falta ver que hay compatibilidad entre las cartas de \mathcal{A} .

Sean $U_x \subseteq V_y$ abiertos de \mathcal{U} que tienen respectivamente cartas de orbifold $(\phi_i : W_i \cong \tilde{U}_x \rightarrow U_x, \Gamma_x)$ y $(\phi_j : W_j \cong \tilde{V}_y \rightarrow V_y, \Gamma_y)$ donde W_i, W_j son abiertos de \mathbb{R}^n . Sabemos que $p^{-1}(U_x) \subseteq p^{-1}(V_y)$. Además, como $g\tilde{U}_x$ y \tilde{V}_y son conexos para todo $g \in G$, debe existir algún $\sigma \in G$ tal que $\sigma\tilde{U}_x \subseteq \tilde{V}_y$. Gracias a la existencia de $\sigma \in G$, podemos construir las siguientes aplicaciones: Por un lado

$$\tilde{\psi}_{ij} : \tilde{U}_x \hookrightarrow \tilde{V}_y$$

es una inmersión topológica dada por $\tilde{\psi}_{ij}(\tilde{z}) = \sigma\tilde{z}$ para todo $\tilde{z} \in \tilde{U}_x$. Por otro lado

$$\tilde{f}_{ij} : G_{\tilde{x}} \hookrightarrow G_{\tilde{y}}$$

es un monomorfismo de grupos dado por $\tilde{f}_{ij}(g) = \sigma g \sigma^{-1}$. Ya que si $g \in G_{\tilde{x}}$, entonces $\sigma g \sigma^{-1} \in \sigma G_{\tilde{x}} \sigma^{-1} = G_{\sigma\tilde{x}} \subseteq G_{\tilde{y}}$, ya que $\sigma\tilde{x} \in \tilde{V}_y$. Estas aplicaciones *con tilde* inducen las aplicaciones *sin tilde* necesarias para la compatibilidad de cartas de orbifold. Es decir,

$$\psi_{ij} : W_i \hookrightarrow W_j$$

es una inmersión topológica dada por $\psi_{ij}(\omega) = \varphi_j^{-1} \circ \tilde{\psi}_{ij} \circ \varphi_i(\omega)$. Se puede ver en el diagrama conmutativo (2.5) cómo se relacionan estas aplicaciones continuas.

$$\begin{array}{ccccc} W_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \tilde{U}_x & \xrightarrow{p} & U_x \\ \downarrow \psi_{ij} & & \downarrow \tilde{\psi}_{ij} & & \downarrow \\ W_j & \xrightarrow{\varphi_j} & \tilde{V}_y & \xrightarrow{p} & U_y \end{array} \quad (2.5)$$

Por otro lado, la aplicación *sin tilde*

$$f_{ij} : \Gamma_x \hookrightarrow \Gamma_y$$

es un monomorfismo de grupos definido como $f_{ij}(\gamma) = f_{ij}(\varphi_i^{-1} \circ g \circ \varphi_i) = \varphi_j^{-1} \circ \tilde{f}_{ij}(g) \circ \varphi_j$. Ya que $\Gamma_x = \{\varphi_i^{-1} \circ g \circ \varphi_i : g \in G_{\tilde{x}}\}$ y de la misma forma $\Gamma_y = \{\varphi_j^{-1} \circ g \circ \varphi_j : g \in G_{\tilde{y}}\}$. Se puede ver en el diagrama conmutativo (2.6) cómo se relacionan los morfismos de grupos.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_x & \xrightarrow{f_{ij}} & \Gamma_y \\ \simeq_{\varphi_i} \uparrow & & \simeq_{\varphi_j} \uparrow \\ G_{\tilde{x}} & \xrightarrow{\tilde{f}_{ij}} & G_{\tilde{y}} \end{array} \quad (2.6)$$

Con estas aplicaciones así definidas, tenemos que $\phi_i = \phi_j \circ \psi_{ij}$, ya que si tomamos $\omega \in W_i$:

$$\phi_i(\omega) = p(\varphi_i(\omega)) = p(\sigma\varphi_i(\omega)) = (p \circ \varphi_j) \circ \varphi_j^{-1}(\sigma\varphi_i(\omega)) = \phi_j \circ \psi_{ij}(\omega).$$

Veamos por último que ψ_{ij} es equivariante respecto de f_{ij} . Dados $\omega \in W_i$ y $\gamma = \varphi_i^{-1} \circ g \circ \varphi_i \in \Gamma_x$, es decir, $g \in G_{\tilde{x}}$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(\gamma\omega) &= \varphi_j^{-1}(\sigma\varphi_i((\varphi_i^{-1} \circ g \circ \varphi_i)(\omega))) = (\varphi_j^{-1} \circ (\sigma \circ g \circ \sigma^{-1}) \circ \varphi_j)(\varphi_j^{-1} \circ \sigma \circ \varphi_i)(\omega) \\ &= (\varphi_j^{-1} \circ \tilde{f}_{ij}(g) \circ \varphi_j)(\varphi_j^{-1} \circ \tilde{\psi}_{ij} \circ \varphi_i)(\omega) = f_{ij}(\gamma)\psi_{ij}(\omega). \end{aligned}$$

Como hemos visto que $\phi_i(\omega) = \phi_j \circ \psi_{ij}(\omega)$ y $\psi_{ij}(\gamma\omega) = f_{ij}(\gamma)\psi_{ij}(\omega)$ para todos $\omega \in W_i$ y $\gamma \in \Gamma_i$, tenemos que el diagrama (2.2) de la definición conmuta.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \phi_i & & & & \\ & & \curvearrowright & & & & \\ W_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \tilde{U}_{\tilde{x}} & \xrightarrow{p} & U_x \cong \tilde{U}_{\tilde{x}}/G_{\tilde{x}} \cong W_i/\Gamma_x & & \\ & \downarrow \psi_{ij} & \downarrow \tilde{\psi}_{ij} & & \downarrow \bar{\psi}_{ij} & & \\ W_j & \xrightarrow{\varphi_j} & \tilde{V}_{\tilde{y}} & \xrightarrow{\bar{p}} & \tilde{V}_{\tilde{y}}/\tilde{f}_{ij}(G_{\tilde{x}}) & \xrightarrow{\tilde{f}_{ij}} & V_y \cong \tilde{V}_{\tilde{y}}/G_{\tilde{y}} \cong W_j/\Gamma_y \\ & & & & \downarrow p & & \\ & & & & & & \\ & & & & \phi_j & & \end{array}$$

(2.7)

Así concluye la demostración. Hemos podido dotar a M/G de una estructura de orbifold. □

Corolario 2.3.6. Si M es una variedad topológica n -dimensional y G es un grupo de automorfismos que actúa de forma libre y propiamente discontinua, entonces M/G es otra variedad topológica n -dimensional.

Demostración. Sabemos que M/G tiene estructura de orbifold por 2.3.5. Pero como G actúa libremente, los estabilizadores de cada punto son triviales. Luego $\Sigma_{M/G} = \emptyset$, y por la proposición 2.3.1 tenemos que M/G es una variedad topológica. □

2.3.4. La mesa de billar y esquinas

Tomemos un rectángulo R en \mathbb{E}^2 . Sea G el grupo generado por las reflexiones respecto de las rectas del rectángulo R . Entonces G es un grupo cristalográfico, ya que es discreto porque el estabilizador de cada punto del plano es finito y la órbita de cada punto es discreta (teorema 1.2.6), y $T(G)$ es isomorfo a \mathbb{Z}^2 . En la tabla 3.3 el nombre de G es *2222 o pmm .

Tenemos que el espacio cociente \mathbb{E}^2/G es homeomorfo al rectángulo con borde, R , que tomamos inicialmente, a su vez homeomorfo a un disco cerrado. Pero si consideramos la estructura natural de orbifold de \mathbb{E}^2/G del

teorema 2.3.5, nos queda algo distinto a un disco. El lugar singular del orbifold $\mathcal{O} = \mathbb{E}^2/G$ es todo el borde de $X_{\mathcal{O}} \cong R$. Nótese que el espacio subyacente $X_{\mathcal{O}}$ es una variedad con borde. Todos los puntos singulares de \mathcal{O} son de espejo salvo los cuatro vértices del rectángulo R , estos cuatro tienen por grupo local a D_2 , el grupo diédrico de 4 elementos. Los puntos singulares de este tipo se llamarán puntos de **esquina** (de orden 2).

De esta forma, la estructura de orbifold de \mathbb{E}^2/G distingue perfectamente entre los puntos regulares, los especulares y las esquinas. Una imagen mental de este orbifold es una mesa de billar: un rectángulo donde los lados y los vértices *hacen rebotar* las bolas de billar.

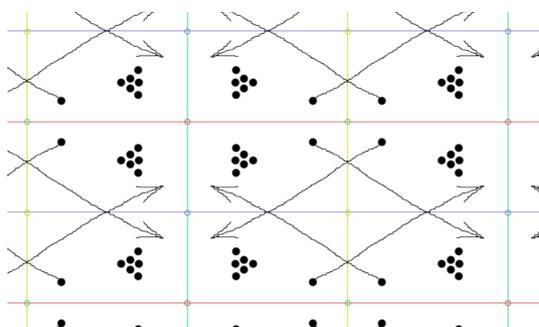


Figura 2.3: Mesa de billar.

El ejemplo de la mesa de billar sirve para tener una idea intuitiva sobre los puntos de espejo y de esquina. Las singularidades de este tipo tienen reflexiones en sus grupos locales y se encuentran en el borde del espacio subyacente.

2.3.5. La funda de almohada y conos

Si G es el grupo que hemos visto en el ejemplo anterior, el subgrupo G^+ de movimientos directos también es cristalográfico, ya que $G^+ \leq G$ sigue siendo discreto y $T(G^+) = T(G)$ es isomorfo a \mathbb{Z}^2 . De hecho, el grupo G^+ está generado por giros de orden 2 en torno a los vértices del rectángulo R . Como luego veremos, el nombre de G^+ en la tabla 3.3 es 2222 o $p2$.

Mientras que R es dominio fundamental de G , para obtener un dominio fundamental de G^+ podemos tomar dos copias adyacentes de R como marcan las rectas negras en la figura 2.4. Luego el espacio cociente \mathbb{E}^2/G^+ es homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^2 , ya que se están identificando los bordes del dominio fundamental según indican las flechas.

El orbifold $\mathcal{P} = \mathbb{E}^2/G^+$ tiene a la esfera como espacio subyacente. Además tiene cuatro puntos singulares con grupo local C_2 , cíclico de orden 2. Los representantes en el plano de los cuatro puntos de $\Sigma_{\mathcal{P}}$ se pueden ver coloreados en la figura 2.4. Llamaremos puntas de **cono** (de orden 2) a las singularidades de este tipo.

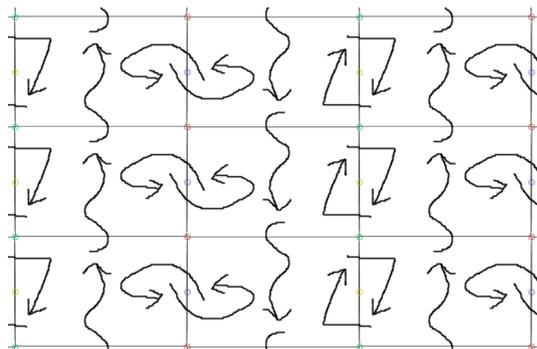


Figura 2.4: Funda de almohada.

Es importante darse cuenta de que, a diferencia de los puntos de esquina, las puntas de cono están en el interior del espacio subyacente $X_{\mathcal{P}}$ y no en el borde (proposición 3.1.3).

2.3.6. Orbifolds geométricos

Hasta ahora hemos visto orbifolds topológicos, donde se utilizan aplicaciones continuas. Pero para nuestro propósito solo nos interesan las isometrías de un espacio métrico, por lo que nos restringiremos a ciertos tipos de orbifolds. Esto facilitará enormemente deducir ciertas propiedades y eliminará casos patológicos.

Definición 2.3.7. Un **orbifold diferenciable** n -dimensional es un orbifold topológico en el que los elementos de los grupos locales y las aplicaciones de transición ψ_{ij} son aplicaciones diferenciables C^∞ entre abiertos de \mathbb{R}^n .

Definición 2.3.8. Diremos que un orbifold topológico $\mathcal{O} = (X/G, \mathcal{A})$ es un (X, G) -**orbifold geométrico** si X es variedad riemanniana y G es un grupo de isometrías de X que actúa propia y discontinuamente.

Nota. Para lo que nos ocupa, estudiaremos (X, G) -orbifold geométricos donde X será \mathbb{E}^2 o \mathbb{S}^2 y G será un grupo cristalográfico plano o un subgrupo discreto de $O(3)$.

2.4. Recubrimientos de orbifolds

En esta sección definiremos los recubrimientos de orbifolds y veremos alguna propiedad básica. Esto nos será de utilidad cuando definamos la característica de Euler. Pero primero definiremos lo que es un morfismo de orbifolds siguiendo el estilo de [Caramello]. Utilizaremos cartas fundamentales, definidas en (2.1.8).

Definición 2.4.1. Sean \mathcal{O} y \mathcal{P} orbifolds topológicos. Definimos un **morfismo de orbifolds** $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}$ como una aplicación continua $f : X_{\mathcal{P}} \rightarrow X_{\mathcal{O}}$ que admite un **levantamiento local compatible** en cada punto. Esto es, para cada $x \in X_{\mathcal{P}}$ se satisfacen las siguientes condiciones:

- Existen cartas fundamentales $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma_x)$ de x y $(\psi : \tilde{V} \rightarrow V, \Gamma_{f(x)})$ de $f(x)$ con $f(U) \subseteq V$.
- Existen un morfismo de grupos $f_x : \Gamma_x \rightarrow \Gamma_{f(x)}$ y una aplicación continua $\tilde{f}_x : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ tales que \tilde{f}_x es equivariante respecto de f_x , es decir, $\tilde{f}_x(\gamma\tilde{y}) = f_x(\gamma)\tilde{f}_x(\tilde{y}), \forall \tilde{y} \in \tilde{U}, \forall \gamma \in \Gamma_x$. Y el diagrama (2.8) conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{f}_x} & \tilde{V} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ U & \xrightarrow{f} & V \end{array} \quad (2.8)$$

Un morfismo de orbifolds es un **isomorfismo** si existe un morfismo que es su aplicación inversa. Es decir, al componer las aplicaciones en ambos sentidos se obtiene la identidad.

Teorema 2.4.2 (La categoría de los orbifolds). La identidad y la composición de morfismos de orbifolds son morfismos de orbifolds.

Demostración. En primer lugar, $\text{id}_{\mathcal{O}}$ es una aplicación continua en el espacio subyacente. Además, para cada punto $x \in X_{\mathcal{O}}$ induce en cada carta fundamental $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma_x)$ las aplicaciones $\text{id}_x : \Gamma_x \rightarrow \Gamma_x$ y $\tilde{\text{id}}_x : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$, que cumplen todas las hipótesis de la definición por ser aplicaciones identidad. Y trivialmente la aplicación identidad es morfismo de orbifolds.

En segundo lugar, dados los morfismos $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}$ y $g : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$, veamos que $g \circ f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{Q}$ es morfismo de orbifolds. Está claro que $g \circ f : X_{\mathcal{O}} \rightarrow X_{\mathcal{Q}}$ es una aplicación continua. Veamos que en cada punto se tiene un levantamiento local compatible.

Tomemos $x \in X_{\mathcal{O}}$, con $f(x) = y \in X_{\mathcal{P}}$ y $g(y) = z \in X_{\mathcal{Q}}$. Como f y g son morfismos de orbifolds, tenemos que existe una pareja de cartas fundamentales (ϕ, U, Γ_x) , (ψ_1, V_1, Γ_y) (resp. (ψ_2, V_2, Γ_y) , (χ, W, Γ_z)) que inducen un levantamiento compatible para f (resp. g).

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{f}_x} & \tilde{V}_1 & & \tilde{V}_2 & \xrightarrow{\tilde{g}_y} & \tilde{W} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 & & \downarrow \chi \\ U & \xrightarrow{f} & V_1 & & V_2 & \xrightarrow{g} & W \end{array} \quad (2.9)$$

Para simplificar las cosas, $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ representan los grupos locales de cada punto módulo isomorfismo. Nótese que $\tilde{g}_y \circ \tilde{f}_x$ no está bien definido, por lo que buscaremos entornos más pequeños para poder definir $\tilde{g}_y \circ \tilde{f}_x$. Así podremos *unir* los diagramas conmutativos (2.9) y tener un levantamiento local compatible de $g \circ f$ en x .

Como vimos en el lema 2.1.7, existe $y \in V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$ de una carta fundamental de y dada por $(\psi_3 : \tilde{V}_3 \rightarrow V_3, \Gamma_y)$. Sea $\tilde{U}_0 := \bigcap_{\gamma \in \Gamma_x} \gamma \tilde{f}_x^{-1}(\tilde{V}_3)$, que es un entorno abierto de $\tilde{x} = \phi^{-1}(x)$ invariante a todos los elementos de Γ_x . La restricción de los elementos de la carta $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma_x)$ a este nuevo abierto nos da otra carta orbifold $(\phi_0 : \tilde{U}_0 \rightarrow U_0, \Gamma_x)$. De esta manera, redefinimos \tilde{f}_x y \tilde{g}_y como $\tilde{f}_x|_{\tilde{U}_0}$ y $\tilde{g}_y \circ \psi_{32}$ (ψ_{32} es la inmersión de cambio de carta). Luego $\tilde{g}_y \circ \tilde{f}_x : \tilde{U}_0 \rightarrow \tilde{W}$ es una aplicación continua. Y obtenemos el diagrama conmutativo (2.10) deseado.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_0 & \xrightarrow{\tilde{f}_x} & \tilde{V}_3 & \xrightarrow{\tilde{g}_y} & \tilde{W} \\ \downarrow \phi_0 & & \downarrow \psi_3 & & \downarrow \chi \\ U_0 & \xrightarrow{f} & V_3 & \xrightarrow{g} & W \end{array} \quad (2.10)$$

Además, los morfismos de grupos f_x, g_y permiten definir el morfismo $g_y \circ f_x : \Gamma_x \rightarrow \Gamma_z$. Y $\tilde{g}_y \circ \tilde{f}_x$ es equivariante respecto de $g_y \circ f_x$. Ya que, dados $\tilde{u} \in \tilde{U}_0$, $\gamma \in \Gamma_x$ tenemos que

$$\tilde{g}_y \circ \tilde{f}_x(\gamma \tilde{u}) = \tilde{g}_y(f_x(\gamma) \tilde{f}_x(\tilde{u})) = g_y \circ f_x(\gamma) \tilde{g}_y \circ \tilde{f}_x(\tilde{u}).$$

Queda probado que existe un levantamiento local compatible para cada punto $x \in X_{\mathcal{O}}$. Por lo tanto, la composición de morfismos de orbifolds es de nuevo morfismo de orbifolds. \square

Corolario 2.4.3. Sean dos orbifolds isomorfos $\mathcal{O} \cong \mathcal{P}$ y sean los puntos $x \in X_{\mathcal{O}}$, $y \in X_{\mathcal{P}}$ emparejados por el isomorfismo de orbifolds. Entonces los espacios subyacentes son homeomorfos $X_{\mathcal{O}} \cong X_{\mathcal{P}}$ y los grupos locales son isomorfos $\Gamma_x \simeq \Gamma_y$.

Demostración. Sabemos que existen los morfismos de orbifolds $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}$ y $g : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}$ tales que $f(x) = y$, $g \circ f = \text{id}_{\mathcal{O}}$ y $f \circ g = \text{id}_{\mathcal{P}}$. El teorema 2.4.2 asegura que las aplicaciones anteriores son morfismos de orbifolds. Luego está claro que los espacios subyacentes son homeomorfos. Además, los levantamientos locales compatibles son de la forma $\tilde{g}_y \circ \tilde{f}_x = \tilde{\text{id}}_x$. En particular, los morfismos de grupos asociados son $g_y \circ f_x = \text{id}_{\Gamma_x}$, $f_x \circ g_y = \text{id}_{\Gamma_y}$. Por lo que los grupos locales son isomorfos. \square

Definición 2.4.4. Un **recubrimiento** de orbifolds es un morfismo de orbifolds sobreyectivo $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}$ tal que todo punto $x \in X_{\mathcal{O}}$ tiene un entorno abierto U que esté **bien recubierto** por p . Un abierto U está bien recubierto por p si existe una carta orbifold $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma)$ que cumple las siguientes condiciones:

- La imagen inversa $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$ es unión disjunta de abiertos de $X_{\mathcal{P}}$, que llamaremos **hojas**.
- Cada hoja U_i admite una carta de la forma $(\phi_i : \tilde{U} \rightarrow U_i, \Gamma_i)$, con $\Gamma_i \leq \Gamma$ y tal que el diagrama (2.11) conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{p}=\text{id}_{\tilde{U}}} & \tilde{U} \\ \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi \\ \tilde{U}/\Gamma_i \cong U_i & \xrightarrow{p} & U \cong \tilde{U}/\Gamma \end{array} \quad (2.11)$$

Cuando la fibra $p^{-1}(x)$ de los puntos regulares x consta de $r \in \mathbb{N}$ puntos, decimos que p es un **recubrimiento de r hojas**. Si la fibra de cada punto de \mathcal{O} es finita, diremos que está **finitamente recubierto** por \mathcal{P} .

Nota. Dado el diagrama (2.11) y $A \subseteq U$, tenemos que $p^{-1}(A) \cap U_i = \phi_i(\phi^{-1}(A))$. Para comprobarlo nótese que $\phi = p \circ \phi_i$, siendo todas ellas sobreyectivas. Esto será utilizado en el lema 2.4.5. También es importante notar que en ambos resultados se utilizará la misma construcción de cartas fundamentales.

Veamos que el número de hojas de un recubrimiento de orbifolds está bien definido. Es decir que el cardinal de cada fibra, si son finitas, es el mismo para todos los puntos regulares (proposición 2.4.6). Pero antes probaremos un lema.

Lema 2.4.5. Sea $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}$ un recubrimiento de orbifolds. Sea U un abierto de $X_{\mathcal{O}}$ bien recubierto por p . Entonces para cualquier $x \in U$ existe una carta fundamental $(\psi : \tilde{V} \rightarrow V, \Gamma_x)$ con $V \subseteq U$ bien recubierto por p . Además ψ descompone, en cada hoja del recubrimiento p , como en el diagrama (2.11).

Demostración. Sea $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma)$ una carta en \mathcal{O} bien recubierta por p . Luego tenemos que existen las cartas en \mathcal{P} $(\phi_i : \tilde{U} \rightarrow U_i, \Gamma_i)$ para cada hoja U_i en $\bigcup_{i \in I} U_i = p^{-1}(U)$ y cumplen el diagrama (2.11). Tomemos una carta fundamental $(\psi : \tilde{V} \rightarrow V, \Gamma_x)$ de x como las construidas en el lema 2.1.7 y 2.3.3. Es decir, se cumple que

- $V \subseteq U$ es abierto conexo de $X_{\mathcal{O}}$,
- $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ es abierto conexo de \mathbb{R}^n ,
- $\psi = \phi|_{\tilde{V}}$ y $\psi^{-1}(x) = \{\tilde{x}\}$,
- $\Gamma_x = \Gamma_{\tilde{x}} \leq \Gamma$, siendo Γ_x el grupo local de x en la carta ψ y $\Gamma_{\tilde{x}}$ el subgrupo estabilizador de \tilde{x} en Γ ,
- $g\tilde{V} = \tilde{V}$ para todo $g \in \Gamma_x$ y
- $g\tilde{V} \cap \tilde{V} = \emptyset$ para todo $g \in \Gamma - \Gamma_x$.

Veamos ahora cómo construir una carta para cada hoja tal que cumpla el diagrama (2.11). Pero primero hay que ver cuáles son las hojas de V . Obsérvese que $\psi^{-1}(x) = \{\tilde{x}\}$ pero $\phi^{-1}(x) = \Gamma \cdot \tilde{x}$, la órbita de \tilde{x} . Y por las propiedades de \tilde{V} enumeradas, tenemos que $\phi^{-1}(V) = \bigcup_{g \in \Gamma} g\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ es unión de abiertos conexos, iguales o disjuntos dos a dos. De hecho, definiendo \mathcal{G} como un conjunto formado por un representante de cada clase por la izquierda de Γ_x en Γ , tenemos que $\phi^{-1}(V) = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} g\tilde{V}$ es unión disjunta de abiertos conexos. Y para cada $i \in I$ se cumple que

$$\phi_i(\bigcup_{g \in \mathcal{G}} g\tilde{V}) = \phi_i(\phi^{-1}(V)) = p^{-1}(V) \cap U_i.$$

Definamos ahora $\psi_{i,g} = \phi_i \circ g : \tilde{V} \rightarrow \phi_i(g\tilde{V}) \cong g\tilde{V}/\Gamma_i$ para cada índice $i \in I$ y cada $g \in \Gamma$. Donde de hecho $g\tilde{V}/\Gamma_i = g\tilde{V}/\Gamma_i \cap \Gamma_{g\tilde{x}}$, ya que el resto de elementos de Γ_i envían $g\tilde{V}$ a otro abierto disjunto. Definamos también el grupo $\Gamma_{i,g} := g^{-1}(\Gamma_i \cap \Gamma_{g\tilde{x}})g = (g^{-1}\Gamma_i g) \cap \Gamma_{\tilde{x}}$, que es subgrupo de Γ_x . Sea $V_{i,g} := \phi_i(g\tilde{V}) \subseteq U_i$, abierto conexo de $X_{\mathcal{P}}$. Entonces tenemos que la aplicación plegadora $(\psi_{i,g} : \tilde{V} \rightarrow V_{i,g}, \Gamma_{i,g})$ es una carta en \mathcal{P} . De hecho es una carta fundamental para $x_{i,g} = \phi_i(g\tilde{x})$, ya que \tilde{V} es conexo, $\psi_{i,g}^{-1}(x_{i,g}) = \{\tilde{x}\}$ y $\Gamma_{i,g}$ deja \tilde{x} fijo.

Como se puede ver en el diagrama (2.12), a partir del diagrama cuadrado exterior hemos obtenido el cuadrado interior, siendo ambos conmutativos.

Luego V está bien recubierto.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{id}_{\tilde{U}} & & & & \\
 & & \curvearrowright & & \curvearrowleft & & \\
 \tilde{U} & \longleftarrow & \tilde{V} & \xrightarrow{\text{id}_{\tilde{V}}} & \tilde{V} & \longleftarrow & \tilde{U} \\
 \downarrow \phi_i & & \downarrow \psi_{i,g} & & \downarrow \psi & & \downarrow \phi \\
 \tilde{U}/\Gamma_i \cong U_i & \longleftarrow & \tilde{V}/\Gamma_{i,g} \cong V_{i,g} & \xrightarrow[p]{p} & V \cong \tilde{V}/\Gamma_x & \longleftarrow & U \cong \tilde{U}/\Gamma
 \end{array} \quad (2.12)$$

□

Nota. Gracias al lema 2.4.5 sabemos que los entornos abiertos V de x bien recubiertos de las cartas fundamentales de x forman un **sistema fundamental de entornos** de x en $X_{\mathcal{O}}$.

Proposición 2.4.6. Sea \mathcal{O} un orbifold conexo recubierto finitamente por $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}$. Supongamos que $x_0 \in X_{\mathcal{O}} - \Sigma_{\mathcal{O}}$ tiene r puntos en su fibra $p^{-1}(x_0)$. Entonces todos los puntos regulares tienen r puntos en su fibra. Además, para cualquier $x \in X_{\mathcal{O}}$ tenemos la siguiente ecuación:

$$r = \sum_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} \frac{|\Gamma_x|}{|\Gamma_{\tilde{x}}|} = \sum_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} [\Gamma_x : \Gamma_{\tilde{x}}] \quad (2.13)$$

Nota. Los grupos locales son finitos por la definición de orbifold y la suma es finita por estar \mathcal{O} finitamente recubierto. Nótese también que el índice de $\Gamma_{\tilde{x}}$ en Γ_x solo tiene sentido cuando consideramos $\Gamma_{\tilde{x}} \leq \Gamma_x$. Para ello, se pueden tomar cartas $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma)$ de x y $(\phi_i : \tilde{U} \rightarrow U_i, \Gamma_i)$ de \tilde{x} como en el diagrama (2.11). Es decir, se toma U bien recubierto por p .

Demostración. Sea $x \in X_{\mathcal{O}}$, llamemos $s(x)$ a la suma (2.13) asociada a ese punto. Nótese que si x es regular en \mathcal{O} , entonces $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ lo es en \mathcal{P} , ya que $\Gamma_{\tilde{x}} \leq \Gamma_x$ en alguna carta bien recubierta. Además se tiene que

$$s(x) = \sum_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} [\Gamma_x : \Gamma_{\tilde{x}}] = \sum_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} [\{1\} : \{1\}] = |p^{-1}(x)|.$$

Sea $S_r := \{x \in X_{\mathcal{O}} : s(x) = r\}$. Tenemos que $s(x_0) = |p^{-1}(x_0)| = r$, por hipótesis. Luego $x_0 \in S_r$. Si conseguimos ver que S_r es cerrado y abierto en el conexo $X_{\mathcal{O}}$, tendremos que $X_{\mathcal{O}} = S_r$. Así quedará probada la fórmula (2.13) y en particular el número de hojas de un recubrimiento no dependerá de un punto regular arbitrario, como queríamos ver.

Comprobemos primero que S_r es abierto en $X_{\mathcal{O}}$. No hará falta ver que es cerrado, porque $X_{\mathcal{O}} - S_r = \bigcup_{s \neq r} S_s$ será abierto por el mismo razonamiento.

Téngase en cuenta que $X_{\mathcal{O}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, por la finitud del recubrimiento. Tomemos entonces $x \in S_r$ y veamos que tiene un entorno U contenido en S_r .

Si $x \in S_r$ es regular, tiene una carta fundamental $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \{1\})$ con U bien recubierto por p . Es decir, U es homeomorfo a un abierto \tilde{U} de \mathbb{R}^n y cumple que $p^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^r U_i$ con $U_i \cong p(U_i) = \tilde{U}$ abiertos de $X_{\mathcal{P}}$ para cada i . Luego cada punto y de U es también regular con $r = |p^{-1}(y)|$. Por lo tanto $x \in U \subseteq S_r$ prueba que x es interior a S_r .

Si por el contrario $x \in S_r$ es singular, entonces tendrá una carta fundamental $(\psi : \tilde{V} \rightarrow V, \Gamma_x)$, con $\Gamma_x \neq \{1\}$ y con V bien recubierto por p , como en el lema 2.4.5. (Siendo $p^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^s V_i$, $s \leq r$ y denotando con $(\psi_i : \tilde{V} \rightarrow V_i, \Gamma_{x_i})$ a la carta de la hoja V_i). Si $z \in V$ es regular, sean $\tilde{z} \in \psi^{-1}(z)$ y $z_i \in p^{-1}(z)$. Entonces $\psi^{-1}(z) = \Gamma \cdot \tilde{z}$ es su órbita por Γ en \tilde{V} y también $\psi_i^{-1}(z_i) = \Gamma_{x_i} \cdot \tilde{z}$. Dado que z es regular, conocemos el número de puntos de su órbita, obteniendo $|\psi^{-1}(z)| = |\Gamma|$ y $|\psi_i^{-1}(z_i)| = |\Gamma_{x_i}|$. Luego tenemos la igualdad $|\psi_i(\psi^{-1}(z))| = [\Gamma : \Gamma_{x_i}]$. Ya que en $\psi_i(\psi^{-1}(z))$ hay un punto por cada clase de Γ_{x_i} en Γ . Por lo tanto

$$s(z) = |p^{-1}(z)| = \sum_{i=1}^s |\psi_i(\psi^{-1}(z))| = \sum_{i=1}^s [\Gamma_x : \Gamma_{x_i}] = s(x) = r.$$

Si ahora tomamos $y \in V$ singular, podemos tomar una carta fundamental de y contenida en V bien recubierta. En dicha carta existirán puntos regulares z . Pero como pertenecen a V , razonando como antes, concluimos que

$$r = s(z) = |p^{-1}(z)| = \sum_{i=1}^s [\Gamma_y : \Gamma_{y_i}] = s(y).$$

Y así queda probado que $x \in U \subseteq S_r$ es un punto interior a S_r , sea regular o singular. \square

Veamos ahora un tipo particular de recubrimiento de orbifolds.

Teorema 2.4.7. Sea M una variedad conexa sobre la que actúa un grupo $G \leq \text{Aut}(M)$ de forma propiamente discontinua. Sea $H \leq G$ (luego su acción también es propiamente discontinua). Entonces $p : M/H \rightarrow M/G$ es un recubrimiento de orbifolds. Y si el índice de H en G es finito, entonces p es un recubrimiento de $[G : H]$ hojas.

Demostración. Con el objetivo de ver que p es recubrimiento, primero comprobaremos que es morfismo de orbifolds encontrando un levantamiento local compatible utilizando un par de cartas fundamentales. Y después probaremos que p es recubrimiento de orbifolds, comprobando por último que tiene $[G : H]$ hojas, de ser finito.

Trabajaremos con un atlas maximal de cada orbifold, luego contendrá las cartas fundamentales construidas en el teorema 2.3.5. Llamaremos a las aplicaciones de paso al cociente $p_G : M \rightarrow M/G$ y $p_H : M \rightarrow M/H$. Nótese que $p_G = p \circ p_H$. Tomemos $z \in M$ y definimos los puntos $y = p_H(z)$, $x = p_G(z)$, luego $p(y) = x$. Podemos tomar $(\phi : V \rightarrow U_x, \Gamma_x)$ una carta fundamental de x como las construidas en 2.3.5. Sean $H_z \leq G_z$ los estabilizadores de z , con $G_z \simeq \Gamma_x$ el grupo local de $x \in M/G$ y $H_z \simeq \Gamma_y$ el grupo local de $y \in M/H$. Entonces podemos tomar $(\phi' : V \rightarrow U_y, \Gamma_y)$, que es carta fundamental de y a partir de la carta fundamental ϕ de x , donde $U_y = p_H(\tilde{U}_z)$. Para verlo más claro, estos son los diagramas de las cartas:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{U}_z \\
 \downarrow p_y & \searrow \phi' & \downarrow p_H \\
 V/\Gamma_y & \xrightarrow{h_y} & U_y = \tilde{U}_z/H_z
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{U}_z \\
 \downarrow p_x & \searrow \phi & \downarrow p_G \\
 V/\Gamma_x & \xrightarrow{h_x} & U_x = \tilde{U}_z/G_z
 \end{array}
 \quad (2.14)$$

Donde φ es homeomorfismo entre los abiertos $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\tilde{U}_z \subseteq M$.

Veamos que p es morfismo de orbifolds topológicos. Obsérvese que tenemos que $p(U_y) = p \circ p_H(\tilde{U}_z) = p_G(\tilde{U}_z) = U_x$. También sabemos que la inclusión $H_z \hookrightarrow G_z$ induce un monomorfismo $p_{yx} : \Gamma_y \hookrightarrow \Gamma_x$, como ocurría en el diagrama (2.6). Y la identidad id_V es equivariante respecto de p_{yx} , al serlo trivialmente $\text{id}_{\tilde{U}_z}$ respecto de la inclusión $H_z \hookrightarrow G_z$. Luego el diagrama (2.15) conmuta, siendo $\text{id}_V = \tilde{p}_{yx}$ el levantamiento local compatible. Por lo que p es morfismo de orbifolds.

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\text{id}_V = \tilde{p}_{yx}} & V \\
 \left(\begin{array}{ccc} \downarrow \varphi & & \varphi \downarrow \\ \tilde{U}_z & \xrightarrow{\text{id}_{\tilde{U}_z}} & \tilde{U}_z \\ \downarrow p_H & & p_G \downarrow \end{array} \right) & & \phi \\
 U_y & \xrightarrow{p} & U_x
 \end{array}
 \quad (2.15)$$

Veamos ahora que cada punto admite un entorno abierto bien recubierto por p . Para ello, tomaremos el mismo par de cartas fundamentales que hemos usado. Es decir, veamos que U_x está bien recubierto por p . Recordemos que $p_G = p \circ p_H$, siendo todas estas aplicaciones sobreyectivas, luego tenemos que

$$p^{-1}(U_x) = p_H(p_G^{-1}(U_x)) = p_H\left(\bigcup_{g \in G} g\tilde{U}_z\right) = \bigcup_{g \in G} p_H(g\tilde{U}_z).$$

Donde estos abiertos $p_H(g\tilde{U}_z)$ son iguales o disjuntos dos a dos. Nótese que con el diagrama (2.15) queda probado que $U_y = p_H(\tilde{U}_z)$ es una hoja de U_x .

Veamos ahora que $U_g := p_H(g\tilde{U}_z)$ es una hoja para todo $g \in G$ (pudiendo darse el caso de que haya hojas repetidas).

Queremos construir una carta $(\phi'_g : V \rightarrow U_g, \Gamma_g)$ que cumpla el diagrama (2.11) para terminar de probar que U_x está bien recubierto por p . Sea $\varphi_g := g \circ \varphi : V \rightarrow g\tilde{U}_z$. Claramente es un homeomorfismo, luego φ_g es una carta de variedad. Ahora, al igual que definimos $\phi' = p_H \circ \varphi$, sea $\phi'_g := p_H \circ \varphi_g$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & V & & \\
 & \swarrow \phi'_g & & \searrow \phi' & \\
 U_g & \xleftarrow{p_H} & g\tilde{U}_z & \xleftarrow{g} & \tilde{U}_z & \xrightarrow{p_H} & U_y
 \end{array}
 \quad (2.16)$$

Para verificar que ϕ'_g es una carta de orbifold tenemos que encontrar su grupo asociado $\Gamma_g \leq \text{Aut}(V)$. Por definición de p_H , sabemos que $U_g \cong g\tilde{U}_z/H = g\tilde{U}_z/H_{gz}$. Siendo $H_{gz} = gH_zg^{-1}$ el estabilizador de gz . Luego, de la misma manera que φ induce un isomorfismo entre el estabilizador y el grupo local $H_z \simeq \Gamma_y$ (véase 2.3.5), tenemos que φ_g induce un isomorfismo de grupos entre el estabilizador H_{gz} y el grupo local $\Gamma_{p_H(gz)}$. De forma más explícita, el isomorfismo es

$$H_{gz} \simeq \Gamma_{p_H(gz)} := \varphi_g^{-1}(gH_zg^{-1})\varphi_g = \varphi^{-1}H_z\varphi =: \Gamma_y.$$

Es decir, acabamos de comprobar que los puntos $p_H(gz)$ e $y = p_H(z)$ tienen el mismo grupo local en V . Definimos $\Gamma_g := \Gamma_{p_H(gz)}$, ya que es el grupo asociado a ϕ'_g que queríamos. Además, se cumple que $\Gamma_g = \Gamma_y \leq \Gamma_x$, una de las condiciones de la definición de recubrimiento.

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{U}_z \\
 \downarrow p_y & \searrow \phi' & \downarrow p_H \\
 V/\Gamma_y & \xrightarrow{h_y} & U_y = \tilde{U}_z/H_z
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\varphi_g} & g\tilde{U}_z \\
 \downarrow p_g & \searrow \phi'_g & \downarrow p_H \\
 V/\Gamma_g & \xrightarrow{h_g} & U_g = g\tilde{U}_z/H_{gz}
 \end{array}
 \quad (2.17)$$

En el diagrama podemos ver cómo hemos obtenido una carta para cada U_g a partir de la de U_y . Además es una carta que verifica el diagrama (2.11) porque

$$p(\phi'_g(V)) = p \circ p_H(g\tilde{U}_z) = p_G(\tilde{U}_z) = U_x.$$

Luego queda demostrado que U_x está bien recubierto por p .

Supongamos ahora que $[G : H]$ es finito. Veamos que este es exactamente el número de hojas del recubrimiento. Para ello, comprobaremos que p es un recubrimiento finito (de orbifolds conexos). Y aplicando la proposición 2.4.6, solo hará falta calcular el cardinal de la fibra de un punto regular.

Si tomamos un punto $x \in M/G$ y un entorno U_x como los que hemos construido, tenemos que $p^{-1}(U_x) = \bigcup_{g \in G} U_g$. Pero esta unión está formada por abiertos iguales o disjuntos dos a dos. Sea $\mathcal{I} \subseteq G$ un subconjunto de tal forma que $p^{-1}(U_x) = \bigcup_{g \in \mathcal{I}} U_g$ sea unión disjunta. Luego si $g \neq h$ pertenecen a \mathcal{I} , entonces $Hg \neq Hh$. Ya que de lo contrario se tendría que $hg^{-1} \in H$. Lo que implica que

$$U_g = p_H(g\tilde{U}_z) = p_H((hg^{-1})g\tilde{U}_z) = p_H(h\tilde{U}_z) = U_h.$$

De aquí deducimos que hay $|\mathcal{I}| \leq [G : H]$ hojas. Por tanto, p es un recubrimiento finito.

Tomemos ahora un punto $x_0 \in M/G$ regular. Entonces cada punto y_0 de la fibra $p^{-1}(x_0)$ es regular en M/H . Si $z_0 \in p_G^{-1}(x_0)$, tenemos igualdades entre las fibras y las órbitas: $p_G^{-1}(x_0) = G \cdot z_0$ y $p_H^{-1}(y_0) = H \cdot z_0$. Sea $\mathcal{G} \subseteq G$ formado por un representante de cada clase por la izquierda de H en G , luego $|\mathcal{G}| = [G : H]$. Además, p_H establece una biyección entre $\mathcal{G} \cdot z_0$ y $p^{-1}(x_0) = p_H(p_G^{-1}(x_0)) = p_H(G \cdot z_0) = p_H(\mathcal{G} \cdot z_0)$. Así podemos concluir que $|p^{-1}(x_0)| = [G : H]$. \square

Corolario 2.4.8. Sea M una variedad conexa sobre la que actúa un grupo $G \leq \text{Aut}(M)$ de forma propiamente discontinua. Entonces $p : M \rightarrow M/G$ es un recubrimiento de orbifolds. Si el orden de G es finito, entonces p es un recubrimiento de $|G|$ hojas.

Demostración. Es un caso particular del teorema anterior, donde $H = \{1_G\}$. \square

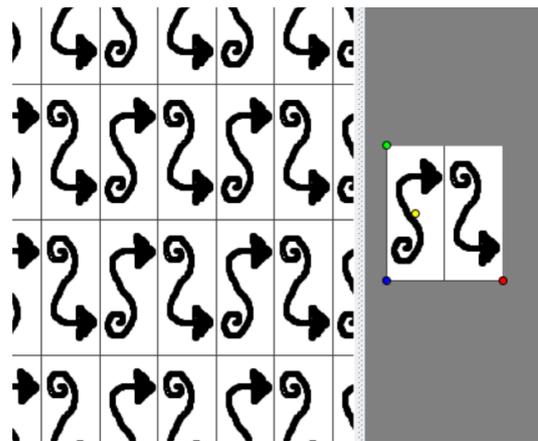


Figura 2.5: El toro cubre con 2 hojas la botella de Klein.

Ejemplo 2.4.9. Retomemos el ejemplo 2.3.1. Como habíamos visto, el toro se puede ver como $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ y la botella de Klein como \mathbb{E}^2/G . Siendo G el grupo cristalográfico $pg = \times \times$ según la notación de la tabla 3.3.

Gracias al corolario 2.4.8, podemos decir que el plano recubre con infinitas hojas a la botella de Klein y al toro, como cocientes de grupos cristalográficos. Es más, puede darse el caso de que $\mathbb{Z}^2 = T(G) \leq G$ con índice $[G : \mathbb{Z}^2] = 2$, el teorema 2.4.7 nos da un recubrimiento de 2 hojas del toro sobre la botella de Klein.

En la figura 2.5 podemos comprobar que si moviéramos el rectángulo de la derecha por traslaciones, tendríamos el grupo cristalográfico \mathbb{Z}^2 . Pero como el motivo periódico tiene más simetrías, el grupo de simetría del patrón que hemos generado es G . Y el dominio fundamental de \mathbb{Z}^2 en este ejemplo es el doble que el de G .

Ejemplo 2.4.10. Recordemos la mesa de billar (ejemplo 2.3.4) y la funda de almohada (ejemplo 2.3.5). Vimos que si G es el grupo cristalográfico tal que \mathbb{E}^2/G es la mesa de billar, entonces $G^+ \leq G$ es también cristalográfico y \mathbb{E}^2/G^+ es la funda de almohada. Nótese que $T(G) \simeq \mathbb{Z}^2$, luego $\mathbb{E}^2/T(G)$ es el toro.

Por lo tanto, tenemos que $T(G) = T(G^+) \leq G^+ \leq G$ es una cadena ascendente de grupos. Y se puede comprobar que los índices son $[G : G^+] = 2$, $[G^+ : T(G^+)] = 2$ y $[G : T(G)] = [G : G^+][G^+ : T(G^+)] = 4$.

Esto nos da tres recubrimientos. El toro recubre la funda de almohada con 2 hojas y la mesa de billar con 4 hojas. Y la funda de almohada recubre la mesa de billar con 2 hojas. En la figura 3.2 se puede ver que los dominios fundamentales de $T(G)$ están formados por 4 copias de dominios fundamentales de G . Y en la figura 3.6 ocurre lo mismo, pero con 2 copias.

2.5. Característica de Euler

Empecemos recordando lo que es una triangulación de un espacio topológico X . Después nos centraremos en triangulaciones de orbifolds para definir la característica de Euler de un orbifold.

Definición 2.5.1. Un **símplice** geométrico n -dimensional σ es la envolvente convexa de $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, puntos en posición general en \mathbb{R}^d , con $n \leq d$. Los puntos a_i son los **vértices** de σ . Se escribe $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$. Dado un símplice $\tau = \langle b_0, \dots, b_m \rangle$ tal que $\{b_0, \dots, b_m\} \subseteq \{a_0, \dots, a_n\}$ decimos que τ es una **cara** de σ o que $\tau \leq \sigma$. La cara τ es una **cara propia** si $\tau \neq \sigma$, y lo denotamos con $\tau < \sigma$.

La unión de las caras propias de σ se llama **frontera geométrica** $\text{Fr}^g(\sigma)$. Y el complementario en σ de su frontera geométrica se denomina **interior geométrico** $\text{Int}^g(\sigma)$.

Un **complejo simplicial** geométrico K en \mathbb{R}^d es un conjunto finito de símlices geométricos en \mathbb{R}^d cumpliendo lo siguiente:

- Si $\tau \leq \sigma \in K$, entonces $\tau \in K$.
- Si $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara de σ y de τ .

El **poliedro** de K es el subespacio de \mathbb{R}^d formado por la unión de todos los símlices de K . Lo designaremos por $|K|$.

Una **triangulación** del espacio topológico X es un homeomorfismo entre X y el poliedro $|K|$ de un complejo simplicial K .

Definición 2.5.2. Una **triangulación** de un orbifold \mathcal{O} es una triangulación del espacio topológico subyacente $X_{\mathcal{O}}$ en el sentido usual. Diremos que una triangulación de \mathcal{O} es **compatible** con la estructura de orbifold si los puntos x del interior (geométrico) de cada símlice σ tienen el mismo grupo local Γ_x , que denotaremos entonces $\Gamma(\sigma)$. En otras palabras, para cada $\sigma \in K_{\mathcal{O}}$ existe un estrato $\Sigma_{\alpha} \subseteq \Sigma_{\Gamma(\sigma)}$ de \mathcal{O} tal que $\text{Int}^g(\sigma) \subseteq \Sigma_{\alpha}$.

Definición 2.5.3. Dada una triangulación compatible $K_{\mathcal{O}}$ de un orbifold \mathcal{O} , definimos la **característica de Euler** de \mathcal{O} de la siguiente manera:

$$\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) = \sum_{\sigma \in K_{\mathcal{O}}} (-1)^{\dim(\sigma)} \frac{1}{|\Gamma(\sigma)|}$$

Nota. Recordemos que si X es un espacio topológico triangulado por el complejo K , la característica de Euler de X es

$$\chi_{\text{top}}(X) = \sum_{\sigma \in K} (-1)^{\dim(\sigma)}.$$

Para distinguir la característica de Euler de espacios topológicos o de orbifolds mantendremos la notación χ_{top} , χ_{orb} .

Nota. Téngase en cuenta que la característica de Euler de \mathcal{O} depende, en principio, de la triangulación elegida. Se podría probar que esto no es así desarrollando la homología y los números de Betti para orbifolds o, de otra manera, generalizando la fórmula de Gauss-Bonnet como hizo Satake. Pero esto excede nuestros objetivos.

Sin embargo si \mathcal{O} no tiene puntos singulares, su característica de Euler coincide con la definida para la variedad $X_{\mathcal{O}}$: $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) = \chi_{\text{top}}(X_{\mathcal{O}})$. Luego sabemos que χ_{orb} no depende de triangulaciones en este caso. Y en el teorema 3.2.4 veremos que χ_{orb} tampoco depende de triangulaciones en ciertos (X, G) -orbifolds que serán nuestro objeto de estudio.

Para poder enunciar el teorema *mágico* de Conway 3.3.1 en el siguiente capítulo vamos a necesitar probar el teorema 2.5.5. Este resultado se demuestra rápidamente una vez hayamos visto el lema 2.5.4.

Lema 2.5.4. Sea $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}$ un recubrimiento de orbifolds de r hojas. Si \mathcal{O} puede triangularse de forma compatible, entonces existen $K_{\mathcal{O}}$ y $K_{\mathcal{P}}$ triangulaciones compatibles de \mathcal{O} y \mathcal{P} tales que para todo $\sigma \in K_{\mathcal{O}}$ existen $\tau_1, \dots, \tau_s \in K_{\mathcal{P}}$ (con $s \leq r$) de manera que

$$p^{-1}(\text{Int}^g(\sigma)) = \bigcup_{i=1}^s \text{Int}^g(\tau_i).$$

Demostración. Elaboremos, sin escribir todos los detalles, las indicaciones de [Thurston1, proposición 13.3.4] y [Caramello, proposición 2.4.2].

Tomemos una triangulación compatible de \mathcal{O} . Podemos suponer que cada símplice está contenido en un abierto bien recubierto por p . Ya que si no fuera así, por ser compacto, cada símplice puede cubrirse con finitos abiertos bien recubiertos. Y tras un proceso finito de subdivisión baricéntrica conseguimos que la triangulación cumpla lo que queremos.

Tomemos $\sigma \in K_{\mathcal{O}}$, que está contenido en U bien recubierto. Luego cada hoja U_i de U por p tiene una carta $(\phi_i : \tilde{U} \rightarrow U_i, \Gamma_i)$ que cumple el diagrama 2.18. Donde $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma)$ es la carta de U tal que $\Gamma_i \leq \Gamma$ para cada índice i .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{p}=\text{id}_{\tilde{U}}} & \tilde{U} \\ \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi \\ \tilde{U}/\Gamma_i \cong U_i & \xrightarrow{p} & U \cong \tilde{U}/\Gamma \end{array} \quad (2.18)$$

Llamemos c al conjunto $\text{Int}^g(\sigma)$, que generalmente no es abierto de $X_{\mathcal{O}}$. Entonces $\phi^{-1}(c)$ en \tilde{U} es o bien homeomorfo a c , o bien unión disjunta de copias trasladadas por Γ homeomorfas a c . Esto se debe a que el grupo local de cada punto de c es $\Gamma(\sigma) \leq \Gamma$. Y lo mismo ocurre con $\phi_i(\phi^{-1}(c))$ en U_i para cada i .

Las copias homeomorfas a cada celda c de $X_{\mathcal{O}}$ nos da una descomposición en celdas de $X_{\mathcal{P}}$. Además, el grupo local también es constante en los puntos de cada celda de $X_{\mathcal{P}}$ por tener los puntos de $\phi^{-1}(c)$ el mismo estabilizador en Γ . Luego solo falta ver que las celdas que hemos obtenido nos dan una triangulación de \mathcal{P} .

Tomemos U uno de los finitos abiertos bien recubiertos que hemos escogido en las líneas anteriores. El conjunto $K_U = \{\sigma \in K_{\mathcal{O}} : \sigma \subseteq U\}$ es un subcomplejo simplicial de $K_{\mathcal{O}}$. Y al pasar de U a \tilde{U} por ϕ tenemos una

triangulación de $\phi^{-1}(K_U)$, por la compatibilidad de $K_{\mathcal{O}}$. Luego, por la misma razón, $\phi_i(\phi^{-1}(K_U))$ es una triangulación de $p^{-1}(K_U) \cap U_i$ para cada i . Y dado que los abiertos U cubren $X_{\mathcal{O}}$, tenemos una triangulación de \mathcal{P} al unir todas las triangulaciones de la forma $\phi_i(\phi^{-1}(K_U))$ para cada i y cada uno de los finitos U escogidos. \square

Teorema 2.5.5. Si $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}$ es un recubrimiento de orbifolds (triangulables) de r hojas, entonces

$$\chi_{\text{orb}}(\mathcal{P}) = r \chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}).$$

Demostración. Triangulemos los orbifolds teniendo en cuenta el lema 2.5.4. Como el interior geométrico de cada símplice está totalmente contenido en un estrato, todo punto $x \in \text{Int}^g(\sigma)$ con $\sigma \in K_{\mathcal{O}}$ tiene grupo local $\Gamma_x \simeq \Gamma(\sigma)$. Y lo mismo ocurre con cada $\tilde{x} \in \text{Int}^g(\tau_i)$ en la fibra de x : $\Gamma_{\tilde{x}} \simeq \Gamma(\tau)$. Luego se cumple la fórmula (2.13) en cada punto de $\text{Int}^g(\sigma)$. Y entonces tenemos que

$$\frac{r}{|\Gamma(\sigma)|} = \sum_{i=1}^s \frac{1}{|\Gamma(\tau_i)|}.$$

Por lo tanto, al recorrer cada σ de \mathcal{O} estamos recorriendo cada τ de \mathcal{P} . Y deducimos que

$$r \chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) = \sum_{\sigma \in K_{\mathcal{O}}} (-1)^{\dim(\sigma)} \frac{r}{|\Gamma(\sigma)|} = \sum_{\tau \in K_{\mathcal{P}}} (-1)^{\dim(\tau)} \frac{1}{|\Gamma(\tau)|} = \chi_{\text{orb}}(\mathcal{P}).$$

\square

Acabamos el capítulo con varias definiciones que necesitaremos en los capítulos 3 y 4.

Definición 2.5.6. Según [Thurston1], un orbifold \mathcal{O} es **bueno** si puede ser recubierto por una variedad M (vista como orbifold). Si no se puede recubrir por una variedad, se dice que \mathcal{O} es **malo**.

Podemos clasificar los orbifolds buenos según su característica de Euler. Según [Thurston1], los nombres vienen dados según *el tipo de geometría* que admiten los orbifolds.

Definición 2.5.7. Sea \mathcal{O} un orbifold topológico bidimensional bueno. Diremos que es

- **parabólico** si $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) = 0$,
- **elíptico** si $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) > 0$ o
- **hiperbólico** si $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) < 0$.

Capítulo 3

Clasificación de orbifolds parabólicos

Nuestro objetivo es clasificar los grupos cristalográficos G del plano euclídeo \mathbb{E}^2 . Para ello, estudiaremos los orbifolds de la forma \mathbb{E}^2/G , cuando G es cristalográfico. Nos restringiremos por tanto a los (\mathbb{E}^2, G) -orbifolds geométricos, que de hecho serán los orbifolds parabólicos (los buenos con característica de Euler nula).

3.1. Notación Conway-Thurston

Empecemos por introducir la notación de Conway y Thurston para orbifolds de dimensión 2 compactos. Para ello tenemos que describir los posibles espacios subyacentes y lugares singulares.

Teorema 3.1.1 (Clasificación de superficies compactas y conexas). [Kinsey, teorema 4.17]. Toda superficie S compacta y conexa es homeomorfa a una y solo una de las siguientes superficies:

- La **esfera** \mathbb{S}^2 con $n \geq 0$ **bordes** (eliminando n discos abiertos disjuntos).
- La suma conexa de $g \geq 1$ **toros** \mathbb{T}^2 con $n \geq 0$ **bordes**.
- La suma conexa de $k \geq 1$ **planos proyectivos reales** \mathbb{P}^2 con $n \geq 0$ **bordes**.

Nota. Gracias a este teorema, cada superficie compacta y conexa S se puede ver como una serie de operaciones (conmutativas y asociativas) que le hacemos a la esfera \mathbb{S}^2 (módulo homeomorfismo). Estas operaciones son:

- Añadir un borde quitando un disco abierto $S - \mathbb{D}^2$.
- Realizar una suma conexa con el toro $S \# \mathbb{T}^2$.
- Realizar una suma conexa con el plano proyectivo real $S \# \mathbb{P}^2$.

Es importante notar que $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ [Kinsey, lema 4.15].

Teorema 3.1.2 (Clasificación de singularidades en (\mathbb{E}^2, G) -orbifolds). Un punto singular x de un orbifold de la forma \mathbb{E}^2/G , siendo G cristalográfico, es de uno de los siguientes tipos:

- **Punto de espejo:** $\Gamma_x = D_1 = \{1, \sigma\}$ con σ reflexión.
- **Punta de cono** de orden $n \geq 2$: $\Gamma_x = C_n$ el grupo de giros cíclico de orden n .
- **Esquina** de orden $n \geq 2$: $\Gamma_x = D_n$ el grupo diédrico de orden $2n$, con n giros y n reflexiones.

Demostración. Si G es un grupo cristalográfico, \mathbb{E}^2/G es un orbifold con cartas que tienen asociado un subgrupo finito de $E(2)$. Luego si x es singular, $\Gamma_x \leq O(2)$ es un subgrupo finito no trivial. Y los subgrupos finitos no triviales de $O(2)$ son exactamente los cíclicos C_n con $n \geq 2$, los diédricos D_n con $n \geq 2$, y D_1 formado por la identidad y una reflexión (proposición 1.2.20). \square

Proposición 3.1.3 (Propiedades topológicas de los (\mathbb{E}^2, G) -orbifolds). Sea \mathcal{O} un (\mathbb{E}^2, G) -orbifold con G cristalográfico. Entonces \mathcal{O} cumple las siguientes propiedades:

1. El espacio subyacente $X_{\mathcal{O}}$ es una superficie compacta y conexa.
2. El orbifold \mathcal{O} es compacto y conexo.
3. Las puntas de cono son finitos puntos aislados de $\Sigma_{\mathcal{O}}$.
4. Si \mathcal{O} tiene puntos de espejo o esquina, estos están en el borde de $X_{\mathcal{O}}$. De hecho, el borde de $X_{\mathcal{O}}$ está formado exclusivamente por puntos de espejo y finitos puntos de esquina.

Demostración. (1) Es fácil comprobar que $X_{\mathcal{O}}$ es una superficie, puede que con borde. Ya que los puntos regulares y las puntas de cono tienen entornos homeomorfos a discos del plano. Y los puntos de espejo y de esquina tienen entornos homeomorfos a un disco del borde de \mathbb{R}_+^2 . Por otro lado, $X_{\mathcal{O}}$ es compacto por ser el espacio cociente de \mathbb{E}^2 por un grupo G cristalográfico. Por

último, $X_{\mathcal{O}}$ es conexo por ser imagen del conexo \mathbb{E}^2 a través de la aplicación continua de paso al cociente. Esto prueba también (2).

(3) Dado una punta de cono x , tomemos una carta fundamental de x y que denotaremos $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma_x)$. Entonces $\Gamma_x = C_n$, lo que implica que los puntos de $\tilde{U} - \{p^{-1}(x)\}$ tienen estabilizador trivial. Luego $U - \{x\}$ solo contiene puntos regulares. Y dado que $\{x\} = \Sigma_{\mathcal{O}} \cap U$ es un abierto del lugar singular, x es un punto aislado de $\Sigma_{\mathcal{O}}$.

El subespacio C de $X_{\mathcal{O}}$ formado por las puntas de cono es discreto. Veamos que además es cerrado. Dado $x \in \overline{C}$, tenemos puntas de cono en cualquier carta fundamental de x . Luego x debe ser una punta de cono ($\Gamma_x = C_n$). Ya que de lo contrario habría puntas de cono $y \neq x$ en todas las cartas fundamentales de x , lo que significa que $\Gamma_y = C_n \leq \Gamma_x$. Pero $\Gamma_y = C_n$ estabiliza $y \neq x$ por lo que no puede ser subgrupo de Γ_x , llegando a un absurdo. Como C es discreto y cerrado en el compacto $X_{\mathcal{O}}$, C es compacto y discreto, concluyendo que es finito.

(4) Como vimos al probar (1), los puntos de espejo y de esquina están en el borde de la superficie $X_{\mathcal{O}}$. Pero además son los únicos, ya que los puntos regulares y las puntas de cono no pueden estar en el borde.

Para ver que el subespacio de los puntos de esquina E es finito razonamos como en (3). En toda carta fundamental $(\phi : \tilde{U} \rightarrow U, \Gamma_x)$ de una esquina x solo hay puntos regulares y de espejo. Ya que si $y \in U$ fuera una esquina o una punta de cono, $\Gamma_y = C_n$ o $\Gamma_y = D_n$ no puede ser subgrupo de Γ_x por tener algún elemento que no deja x fijo. Esto contradice que ϕ sea una carta fundamental. De esta manera tenemos, como en (3), que E es discreto y cerrado en $X_{\mathcal{O}}$ luego finito. \square

A continuación se define la notación que Conway y Thurston idearon para los (\mathbb{E}^2, G) -orbifolds como se explica en [Conway] o en el artículo [Conway1].

Definición 3.1.4. La **signatura** de un orbifold (si la tiene) es una cadena finita de **símbolos**. Partiendo de \mathbb{S}^2 , que tiene la signatura *vacía* (sin símbolos), añadir un símbolo representa una operación sobre \mathbb{S}^2 :

- \circ : la suma conexa con un toro \mathbb{T}^2 .
- $A \geq 2$: sustituir un punto regular por una punta de cono de orden A .
- $*$: añadir un borde de puntos de espejo.
- $a \geq 2$: sustituir un punto de espejo en el borde $*$ que precede a a por una esquina de orden a .
- \times : la suma conexa con un plano proyectivo real \mathbb{P}^2 .

Un orbifold \mathcal{O} tiene *signatura* si se puede obtener tras un número finito de las operaciones sobre \mathbb{S}^2 anteriores. Las operaciones no conmutan del todo pero los símbolos de la signatura se pueden ordenar de la siguiente manera:

$$\circ \circ \cdots \circ ABC \cdots * a_1 b_1 c_1 \cdots * a_2 b_2 c_2 \cdots \times \times \cdots \times$$

La única restricción es que los puntos de esquina han de aparecer después de un símbolo $*$, indicando que se encuentran en ese borde.

Nota. Todo (\mathbb{E}^2, G) -orbifold tiene una única signatura, ya que su espacio subyacente es una superficie compacta a la que se le añaden finitas puntas de cono al interior y finitas esquinas al borde (de espejos). Esta descripción determina un único orbifold módulo isomorfismo de orbifolds gracias al corolario 2.4.3.

Nota. Todas las superficies compactas y conexas tienen signatura como orbifolds y según el teorema 3.1.1 son de la forma $\circ^g *^n$, $*^n \times^k$ o $*^n$, con $n \geq 0$, $g, k \geq 1$.

Ejemplo 3.1.5. Veamos la signatura de algunos orbifolds conocidos.

- La esfera \mathbb{S}^2 tiene la signatura vacía $()$. En el capítulo 4 escribiremos la signatura vacía como 1 o 11, ya que las puntas de cono de orden 1 son puntos regulares.
- El toro y el plano proyectivo: $\mathbb{T}^2 = \circ$ y $\mathbb{P}^2 = \times$.
- La botella de Klein es suma conexa de dos planos proyectivos, luego su signatura es: $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 = \times \times$.
- La suma conexa de g toros o k planos proyectivos se puede abreviar como: $g \# \mathbb{T}^2 = \circ^g$ y $k \# \mathbb{P}^2 = \times^k$.
- Como comentamos antes, la suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de tres planos proyectivos [Kinsey, lema 4.15]: $\circ \times = \times \times \times$.
- La funda de almohada (ejemplo 2.3.5) es una esfera con cuatro puntas de cono de orden 2, luego en esta notación se escribe: 2222.
- La mesa de billar (ejemplo 2.3.4) es un rectángulo, el borde está formado por puntos de espejo y cuatro esquinas de orden 2: *2222.
- El cilindro sin tapas compacto se obtiene añadiéndole dos bordes a la esfera: **.
- La banda de Möbius se obtiene creando un borde en el plano proyectivo real: * \times .

3.2. Fórmula de la característica de Euler

La característica de Euler de un orbifold no depende de triangulaciones, y en esta sección lo comprobaremos en el caso particular de los (\mathbb{E}^2, G) -orbifolds con G cristalográfico. De hecho daremos una fórmula (3.1) que relacione χ_{orb} con la signatura del orbifold. Pero primero recordemos resultados para la característica de Euler χ_{top} de superficies compactas y conexas, como se prueba en [Kinsey].

Teorema 3.2.1. [Doyle, Corolario 1]. Toda superficie compacta es triangulable.

Teorema 3.2.2. [Kinsey, teorema 5.13] La característica de Euler de una superficie compacta y conexa es un invariante topológico, y por tanto no depende de triangulaciones.

Proposición 3.2.3. La característica de Euler de una superficie compacta y conexa es la siguiente:

- $\chi_{\text{top}}(\mathbb{S}^2) = 2$
- $\chi_{\text{top}}(X_{(\circ^g *^n)}) = 2 - 2g - n$
- $\chi_{\text{top}}(X_{(*^n \times^k)}) = 2 - k - n$

Una vez visto que χ_{top} es un invariante topológico para superficies compactas y conexas podemos proceder a probar que χ_{orb} tampoco depende de triangulaciones compatibles en el caso de los (\mathbb{E}^2, G) -orbifolds.

Teorema 3.2.4. Sea \mathcal{O} un orbifold bidimensional que cumple lo siguiente:

- El espacio subyacente $X_{\mathcal{O}}$ es una superficie compacta y conexa.
- Si $X_{\mathcal{O}}$ tiene borde, $\partial X_{\mathcal{O}}$ está formado únicamente por puntos de espejo y finitas esquinas de órdenes a_1, \dots, a_m , $m \geq 0$.
- El lugar singular $\Sigma_{\mathcal{O}}$ está formado por los puntos en el borde (si tuviera) y finitas puntas de cono de órdenes A_1, \dots, A_n , $n \geq 0$.

Entonces $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O})$ no depende de triangulaciones compatibles y se calcula con la siguiente fórmula:

$$\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) = \chi_{\text{top}}(X_{\mathcal{O}}) - \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{A_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{a_i}\right) \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) se suele llamar *fórmula de Riemann-Hurwitz generalizada*.

Demostración. Como ya sabemos que χ_{top} no depende de triangulaciones para superficies compactas y conexas (teorema 3.2.2), veamos lo que ocurre al añadir cada tipo de singularidad a una superficie subyacente.

Para empezar tratemos los puntos de espejo. Supongamos que $\Sigma_{\mathcal{O}} = \partial X_{\mathcal{O}}$ está formado por puntos de espejo. Cada componente conexa C de $\Sigma_{\mathcal{O}}$ es homeomorfa a \mathbb{S}^1 . Luego toda triangulación de C tiene el mismo número de vértices que de 1-símplices. Es decir, la suma alternada de símlices en el borde es nula. Luego si esa suma tuviera un factor $\frac{1}{2} = \frac{1}{|D_1|}$ (el orden del grupo local según la definición 2.5.3) también valdría 0. Por lo tanto, no importa que \mathcal{O} sea una superficie con borde o un orbifold con $\Sigma_{\mathcal{O}}$ formado por puntos de espejo, su característica de Euler vale lo mismo y no depende de triangulaciones: $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) = \chi_{\text{top}}(X_{\mathcal{O}})$.

Supongamos ahora que en el borde hubiera también finitas esquinas de orden a_1, \dots, a_m . Una triangulación compatible debe contener cada punto de esquina en uno de los vértices. Y entonces en la suma alternada de símlices (2.5.3) tenemos el factor $\frac{1}{2a_i} = \frac{1}{|D_{a_i}|}$ en la i -ésima esquina, cuyo grupo local es D_{a_i} . Luego si consideramos la misma triangulación $K_{\mathcal{O}}$ en el orbifold y su espacio subyacente tenemos que

$$\chi_{\text{top}}(X_{\mathcal{O}}) - \chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) = \sum_{\sigma \in K_{\mathcal{O}}} (-1)^{\dim(\sigma)} \left(1 - \frac{1}{|\Gamma(\sigma)|}\right).$$

Y todo se cancela como antes salvo las m esquinas y otros m 1-símplices. Separemos los sumandos que no se cancelan en dos partes. La primera reúne los vértices y la segunda las aristas de la triangulación $K_{\mathcal{O}}$:

$$\sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{2a_i}\right) + \sum_{i=1}^m (-1) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{a_i}\right).$$

Por tanto, la característica de un orbifold con puntos de espejo y finitas esquinas no depende de triangulaciones ya que solo se le han añadido finitas esquinas a una variedad con borde.

Veamos por último el caso de las puntas de cono. Sea \mathcal{O}' un orbifold como el de la hipótesis. Es decir, hemos añadido n puntas de cono de orden A_1, \dots, A_n al orbifold \mathcal{O} que teníamos en el párrafo anterior ($X_{\mathcal{O}'} = X_{\mathcal{O}}$), cuyo lugar singular $\Sigma_{\mathcal{O}}$ consiste en puntos de espejo y esquina. Las puntas de cono de \mathcal{O}' están en vértices de cualquier triangulación compatible, y fuera de $\partial X_{\mathcal{O}'}$. Luego si \mathcal{O} y \mathcal{O}' tienen la misma triangulación compatible, de acuerdo con la definición 2.5.3 tenemos $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) - \chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}') = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{A_i}\right)$, ya que el orden del grupo local C_{A_i} de cada punta de cono es A_i .

De esta manera queda probado que la característica de Euler de orbifolds que cumplan las hipótesis de este teorema no depende de triangulaciones y se puede calcular utilizando la fórmula de Riemann-Hurwitz generalizada (3.1). \square

Nota. Los (\mathbb{E}^2, G) -orbifolds con G cristalográfico satisfacen las hipótesis del teorema 3.2.4. Lo que nos permite calcular rápidamente su característica de Euler. De hecho podemos calcular $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O})$ dada la signatura de \mathcal{O} gracias a los costes de Conway que ahora definimos.

Definición 3.2.5. (Costes de Conway) Cada símbolo s de la signatura de un orbifold aporta un sumando $-c(s)$ para calcular la característica de Euler. El valor $c(s)$ se denomina en [Conway] **coste** asociado al símbolo s .

Tabla 3.1: Tabla de costes.

Nombre	Símbolo	Coste
Toro	\circ	2
Punta de cono de orden:	A	$\frac{A-1}{A}$
Borde de puntos de espejo	$*$	1
Esquina de orden:	a	$\frac{a-1}{2a}$
Plano proyectivo	\times	1

Nota. Si el orbifold \mathcal{O} tiene signatura $s_1 \cdots s_l$, entonces su característica de Euler es

$$\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) = 2 - c(s_1) \cdots - c(s_l).$$

3.3. El teorema *mágico* de Conway

En lo que queda de capítulo clasificaremos los grupos cristalográficos G mediante el estudio de los (\mathbb{E}^2, G) -orbifolds como proponen Conway y Thurston. El primer paso es el teorema *mágico* de Conway [Conway, teorema 3.1].

Teorema 3.3.1 (Teorema *mágico* para grupos cristalográficos del plano). Sea \mathcal{O} un (\mathbb{E}^2, G) -orbifold con G grupo cristalográfico. Entonces la signatura de \mathcal{O} tiene un *coste total* de 2. Es decir $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) = 0$.

Demostración. Sea \mathcal{O} un (\mathbb{E}^2, G) -orbifold con G cristalográfico. Entonces podemos calcular $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O})$ utilizando la fórmula de Riemann-Hurwitz generalizada (3.1). Pero teniendo en cuenta que G es un grupo cristalográfico, el

subgrupo de traslaciones $T(G) \simeq \mathbb{Z}^2$ tiene índice finito r en G por el teorema 1.3.4. Esto nos da un diagrama conmutativo formado por recubrimientos de orbifold.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{E}^2 & \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 \mathbb{T}^2 \cong \mathbb{E}^2/T(G) & \xrightarrow{p} & \mathbb{E}^2/G = \mathcal{O}
 \end{array} \tag{3.2}$$

En particular, p es un recubrimiento de $r = [G : T(G)] \geq 1$ hojas en virtud del teorema 2.4.7. Y aplicando el teorema 2.5.5 tenemos que

$$\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) = \frac{1}{r}\chi(\mathbb{T}^2) = 0.$$

□

Recapitemos todo lo que hemos conseguido hasta ahora. Sea G un grupo cristalográfico y $\mathcal{O} = \mathbb{E}^2/G$ el orbifold asociado. En la primera sección de este capítulo hemos probado que \mathcal{O} , módulo isomorfismo de orbifolds, tiene una única signatura de Conway-Thurston. En la segunda sección hemos dado una fórmula para calcular $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O})$ según el coste de cada símbolo de dicha signatura. Como consecuencia del teorema mágico de Conway tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.2. Existe una aplicación que envía cada clase de isomorfía de un grupo cristalográfico G en la clase de isomorfía de un orbifold parabólico compacto y conexo. Es decir, si $G \simeq H$, entonces $\mathbb{E}^2/G \cong \mathbb{E}^2/H$.

Demostración. Solo queda por probar que la aplicación está bien definida. Si G y H son grupos cristalográficos isomorfos, entonces son conjugados por una afinidad a del plano (ver 1.3.4), es decir $aGa^{-1} = H$. Veamos que la afinidad a induce un isomorfismo de orbifolds entre \mathbb{E}^2/G y \mathbb{E}^2/H .

Comprobamos que la aplicación $\tilde{a} : \mathbb{E}^2/G \rightarrow \mathbb{E}^2/H$ está bien definida, siendo $\tilde{a}(G \cdot x) = H \cdot a(x)$. Si $G \cdot x = G \cdot y$, entonces existe $g \in G$ tal que $gx = y$, luego $h = aga^{-1}$ es un elemento de H tal que $ha(x) = a(y)$ y entonces $H \cdot a(x) = H \cdot a(y)$. La aplicación \tilde{a} es biyección, ya que su inversa es $\tilde{a}^{-1}(H \cdot x) = G \cdot a^{-1}(x)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{E}^2 & \xrightarrow{a} & \mathbb{E}^2 \\
 \downarrow p_G & & \downarrow p_H \\
 \mathbb{E}^2/G & \xrightarrow{\tilde{a}} & \mathbb{E}^2/H
 \end{array} \tag{3.3}$$

Probemos por último que \tilde{a} es morfismo de orbifolds (definición 2.4.1), por lo tanto \tilde{a}^{-1} también lo será y entonces los dos son isomorfismos. La continuidad viene garantizada por la propiedad universal de la topología cociente de \mathbb{E}^2/G , ya que a , p_H y $p_H \circ a = \tilde{a} \circ p_G$ son continuas. Y para ver que cada punto tiene levantamientos locales compatibles, basta con tomar cartas fundamentales como las del lema 2.3.3. Es decir, restringiendo el diagrama (3.3) a abiertos $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ para cada $\tilde{x} \in \mathbb{E}^2$, nos queda el diagrama (2.8) de los levantamientos locales compatibles. Así concluye la prueba. \square

Para llegar a la clasificación de los grupos G cristalográficos del plano vamos a clasificar los (\mathbb{E}^2, G) -orbifolds. Primero reduciremos las posibles naturas a 17 en el teorema 3.3.3. Después, en la sección 3.4, veremos que efectivamente son orbifolds buenos (están recubiertos por el plano \mathbb{E}^2). Y a la vez se demostrará que provienen únicamente de una clase de isomorfía de grupo cristalográfico, no de varias. De esta manera, quedará establecida una biyección entre los 17 grupos cristalográficos y sus 17 orbifolds asociados.

Teorema 3.3.3. Sea \mathcal{O} un (\mathbb{E}^2, G) -orbifold con G cristalográfico. Entonces \mathcal{O} tiene una de las naturas de la tabla 3.2.

Tabla 3.2: Los 17 posibles orbifolds parabólicos.

\circ			
2222	333	244	236
2 * 22	3 * 3	4 * 2	22*
*2222	*333	*244	*236
**	* \times	$\times \times$	22 \times

Demostración. Para ver que solamente 17 naturas anulan la característica de Euler hay que comprobar que son las únicas combinaciones de símbolos con coste total 2. Nótese que todos los costes son positivos y que $c(A)$ y $c(a)$ son crecientes, tendiendo a 1 y $\frac{1}{2}$ respectivamente. Separemos la demostración en casos.

La primera forma de llegar a coste 2 = $c(\circ)$ es trivial: \circ (el toro) tiene característica de Euler nula. Por tanto el resto de naturas no pueden tener el símbolo \circ ya que sobrepasarían el coste 2.

El siguiente caso sencillo son las naturas con el símbolo \times , que tiene coste $c(\times) = 1$. Luego \times puede estar una o dos veces. La única natura posible con dos \times es $\times \times$. Veamos ahora todas las que tienen un solo \times (y ningún \circ).

Si tiene espejos, $*\times$ ya alcanza el coste total 2, luego no podemos incluir puntos de esquina o más espejos. Por lo que el resto de firmas con un \times solo pueden tener puntas de cono con coste total 1. La única posible es $22\times$, ya que $2c(2)+c(\times) = 2\cdot\frac{1}{2}+1 = 2$ y si tuvieran orden mayor superarían el coste 2. No puede haber solo una punta de cono porque $c(A) < 1$. Tampoco puede haber tres puntas de cono ya que como mínimo tendrían coste $3c(2) = \frac{3}{2} > 1$. El resto de firmas no pueden tener \times ni \circ .

Tras este, el siguiente caso más sencillo es suponer que \mathcal{O} no tiene $*$ en su firma (tampoco \circ ni \times). Es decir, es una esfera con puntas de cono. El orden de una punta de cono es $A \geq 2$, luego su coste es $c(A) = 1 - \frac{1}{A} < 1$ creciente respecto de A . Por lo tanto \mathcal{O} debe tener como mínimo tres puntas de cono porque $c(A) + c(B) < 2$ para cualquier $A, B \geq 2$.

Si la firma de \mathcal{O} es ABC , entonces su coste vale $\frac{A-1}{A} + \frac{B-1}{B} + \frac{C-1}{C} = 2$. Simplificando, nos queda la ecuación $1 = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$. Luego las soluciones son, ordenadas de menor a mayor, las siguientes.

- Si $A = 2$, entonces $\frac{1}{2} = \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$. Si $B = 2$, no hay solución a $0 = \frac{1}{C}$. Si $B = 3$, entonces $C = 6$. Y si $B = 4$, tenemos que $C = 4$. Pero si $B = 5$, no hay solución entera. El caso $B = 6, C = 3$ ya fue considerado intercambiando B y C . Por último si $B \geq 7$, C debería valer $\frac{2B}{B-2}$, pero no es entero ya que $\frac{2B}{B-2} > \frac{2B}{B} = 2$ y $\frac{2B}{B-2} < \frac{3B-6}{B-2} = 3$. Es decir, las posibles firmas en este caso son 236 y 244.
- Si $A = 3$ y $B, C \geq 3$, la mínima firma es 333 y satisface la ecuación. Y si B o C fueran mayores, $\frac{2}{3} > \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$. Por tanto no se pueden dar casos de mayor orden $A, B, C \geq 4$, ya que entonces $1 > \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$.

La única firma tipo $ABCD$ es 2222, con $4c(2) = 2$, ya que aumentar el orden de cualquier símbolo superaría el coste total 2, por ser $c(A)$ creciente. Finalmente, si hubiera $n \geq 5$ puntas de cono, $\sum c(A_i) \geq nc(2) \geq \frac{5}{2} > 2$.

El resto de las posibles firmas deben tener algún $*$ y ningún \circ ni \times . Salvo $**$, que es válida ya que $c(*) = 1$, las demás firmas tienen exactamente un $*$ y puntas de cono o esquinas. Y como pasó con \times , la única firma con solo un $*$ y puntas de cono es $22*$.

Con el mismo razonamiento usado para las firmas que únicamente tienen puntas de cono, obtenemos todas las firmas posibles con solo un $*$ y esquinas: $*2222$, $*236$, $*244$ y $*333$. La razón es que al añadir un borde y sustituir las puntas de cono de orden A por esquinas de orden a tenemos

$$\sum_i c(A_i) = \sum_i \frac{A_i - 1}{A_i} = 2 = 1 + \sum_i \frac{a_i - 1}{2a_i} = c(*) + \sum_i c(a_i).$$

Y se obtiene la misma ecuación para las esquinas a_i que para las puntas de cono A_i .

Veamos para acabar los casos mixtos: alguna punta de cono y alguna esquina con un borde $*$. Estas signaturas no pueden tener más de una punta de cono (ya que $22*$ es la única posibilidad con dos) ni menos de una, pues estaríamos en el caso anterior. Es decir, busquemos las signaturas de tipo $A * bcd \dots$ de coste 2 y terminaremos la demostración del teorema 3.3.3.

Si $A = 2$, entonces $\sum_i \frac{a_i - 1}{2a_i} = \frac{1}{2}$. Es decir, $\sum_i 1 - \frac{1}{a_i} = 1$. Y como vimos en el caso $22 \times$ y $22*$, la única solución es $b, c = 2$, es decir, $2 * 22$.

Si $A = 3$, tenemos que solamente la signatura $3 * 3$ es válida. Ya que si solo hay una esquina:

$$2 = c(A) + c(*) + c(b) = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b}\right).$$

Es decir, $b = 3$. Y si hubiera más de una esquina, $c(A) + c(*) + \sum_i c(a_i) \geq \frac{5}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{6} > 2$.

Si $A = 4$, solo puede haber una esquina por haber aumentado el coste de la punta de cono respecto del caso anterior. Resolviendo

$$2 = c(A) + c(*) + c(b) = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b}\right).$$

Nos queda $b = 2$. Luego la signatura es $4 * 2$.

Si $A \geq 5$, por monotonía del coste solo puede haber una esquina y debería tener orden menor que 2, que es imposible.

De esta forma hemos agotado todas las posibilidades dividiéndolas en casos dicotómicos. Hemos enumerado las 17 posibles signaturas de orbifolds parabólicos. \square

Antes de seguir con la clasificación de grupos cristalográficos, comentemos brevemente un famoso teorema que es consecuencia del teorema 3.3.3.

Teorema 3.3.4 (Restricción cristalográfica). [Blanco, teorema 9.1]. Si G es un grupo cristalográfico del plano, las rotaciones de G no tienen orden 5 ni superior a 6. Es decir, deben tener orden 2, 3, 4 o 6.

Demostración. Si G tuviera una rotación de uno de estos órdenes: 5, 7, 8, ..., entonces la signatura de \mathbb{E}^2/G tendría un símbolo $A = 5$ o $7, 8, \dots$ o $*a$ con $a = 5, 7, 8, \dots$. Consultando la tabla 3.2 concluimos que esto es imposible. \square

3.4. Desarrollando cada orbifold

Antes de desarrollar cada orbifold veamos el siguiente resultado. Es importante tenerlo en mente ya que nos ayudará a restringir el tipo de grupo cristalográfico que da lugar a un orbifold.

Lema 3.4.1. Sea G un grupo cristalográfico y $\mathcal{O} = \mathbb{E}^2/G$ orbifold.

1. G contiene reflexiones si y solo si la signatura de \mathcal{O} tiene algún $*$.
2. Existen $a \geq 2$ ejes de reflexión de G que se corten en un punto de \mathbb{E}^2 si y solo si \mathcal{O} tiene alguna esquina $*a$ en su signatura.
3. G contiene un subgrupo de giros C_A alrededor de un punto por el que no pasan ejes de reflexión si y solo si \mathcal{O} tiene alguna punta de cono A en su signatura.
4. \mathcal{O} tiene \times en su signatura si y solo si existe una reflexión con deslizamiento $\sigma_l^v \in G$ tal que $G_x = \{1\}$ para todo $x \in l$.
5. Si $\sigma_l^v, \sigma_L^u \in G$ son reflexiones con deslizamiento tales que l y L se cortan en un punto con ángulo θ , entonces $\sigma_l^v \sigma_L^u \in G$ es un giro de ángulo 2θ .
6. Si $\sigma_l^v \in G$ es una reflexión con deslizamiento tal que $x \in l$ tiene un giro $g_{x,\pi}$ en su estabilizador G_x , entonces $g_{x,\pi} \sigma_l^v$ es una reflexión en G .
7. Si $\sigma_l^v \in G$ es una reflexión con deslizamiento tal que $x \notin l$ tiene un giro $g_{x,\pi}$ en su estabilizador G_x , entonces $g_{x,\pi} \sigma_l^v \in G$ es una reflexión con deslizamiento σ_L^u con l y L perpendiculares.

Demostración. (1) Sea $\sigma_l \in G$ una reflexión respecto de la recta l en \mathbb{E}^2 . Al proyectar un punto x de l cuyo estabilizador es $\{\text{id}, \sigma_l\}$ en \mathcal{O} , tendremos un punto de espejo. Y por tanto la signatura de \mathcal{O} debe tener algún $*$.

Si por el contrario G no tuviera reflexiones, \mathcal{O} no tendría puntos de espejo (ni esquinas). Y por tanto $*$ no aparece en la signatura de \mathcal{O} .

(2) Si tenemos que a ejes de reflexión pasan por $x \in l$, entonces $G_x \simeq D_a$ el grupo diédrico. Es decir, la clase de x en \mathcal{O} es un punto de esquina de orden a . Luego la signatura de \mathcal{O} tiene un símbolo $*a$. Si por el contrario ningún eje de reflexión de G se corta en \mathbb{E}^2 , \mathcal{O} no puede tener puntos de esquina $*a$.

Lo mismo ocurre en (3). Existe x con $G_x \simeq C_A$ si y solo si \mathcal{O} tiene un A en su signatura.

(4) Supongamos que G contiene una reflexión con deslizamiento σ_l^v tal que G actúa libremente en los puntos de l . Tomemos un $r > 0$ y sea

$$B_r = \{x \in \mathbb{E}^2 : d(x, l) \leq r\}$$

Podemos tomar r lo suficientemente pequeño para que todos sus puntos tengan estabilizador trivial, ya que G actúa de forma propiamente discontinua y los puntos de l tienen estabilizador trivial. Entonces la proyección de B_r en \mathcal{O} es una banda de Möbius. Por tanto, $X_{\mathcal{O}}$ no es orientable y debe tener algún \times en su signatura.

En el otro sentido, supongamos que $\mathcal{O} = \mathbb{E}^2/G$ tiene en su signatura algún \times . Entonces $X_{\mathcal{O}}$ es una superficie no orientable que contiene una banda de Möbius M como subvariedad, por haber llevado a cabo la suma conexas con un plano proyectivo real. De hecho, como hay finitas puntas de cono se puede escoger M regular en \mathcal{O} . La imagen inversa $p^{-1}(M) \subseteq \mathbb{E}^2/T(G)$ por el recubrimiento $p : \mathbb{E}^2/T(G) \rightarrow \mathbb{E}^2/G$ de finitas hojas (ver teorema 2.4.7) es una región regular del orbifold \circ , que es orientable. Los giros y las reflexiones de G no pueden provocar que el paso de $p^{-1}(M)$ a M pierda la orientabilidad. Por lo que deben existir reflexiones con deslizamiento en G como hemos descrito en el párrafo anterior.

(5) Está claro que el producto de dos reflexiones con deslizamiento es un movimiento directo. Será una traslación cuando los ejes de reflexión sean paralelos. Pero si son secantes con $l \cap L = \{x\}$ y ángulo θ , tenemos que existe un $y \in \mathbb{E}^2$:

$$\sigma_l^v \sigma_L^u = t_v \sigma_l \sigma_L t_u = t_v g_{x, 2\theta} t_u = g_{y, 2\theta}$$

(6) El producto $g_{x, \pi} \sigma_l^v \in G$ es un movimiento indirecto. Además deja fijo al punto $x - \frac{1}{2}v$, por lo que debe ser una reflexión.

(7) El producto $g_{x, \pi} \sigma_l^v$ es un movimiento indirecto. Si tuviera un punto fijo y , entonces $\sigma_l^v(y) = g_{x, \pi}(y)$. Como x está en el punto medio entre y y $g_{x, \pi}(y) = \sigma_l^v(y)$, se tiene que $x \in l$, lo que contradice la hipótesis. Luego $g_{x, \pi} \sigma_l^v$ no tiene puntos fijos, por lo que es una reflexión con deslizamiento. Además, las rectas perpendiculares a l lo siguen siendo tras aplicar $g_{x, \pi} \sigma_l^v$, luego una de estas será el eje L de $g_{x, \pi} \sigma_l^v$.

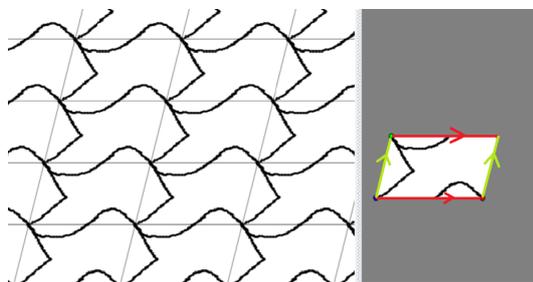
□

Con estos resultados auxiliares tenemos suficientes herramientas como para desarrollar cada orbifold y comprobar que de hecho se obtiene únicamente por un grupo cristalográfico módulo isomorfismo.

El toro: \circ

El orbifold parabólico más sencillo es el toro: \circ . Ya vimos que es parabólico en la figura 2.1, ya que $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ da el toro. Veamos que \mathbb{Z}^2 es la única opción módulo isomorfismo de grupos.

Si la signatura de \mathbb{E}^2/G es \circ , sabemos por el lema 3.4.1 que G no puede contener reflexiones, giros o reflexiones con deslizamiento. Esto obliga a que G sea un grupo cristalográfico formado por traslaciones, luego existen $t_u, t_v \in G$ que lo generan. Por otro lado, \mathbb{Z}^2 está generado por $t_{(1,0)}, t_{(0,1)}$. Entonces existe $a \in GL(2)$ tal que $a(1,0) = u, a(0,1) = v$ y por tanto $G = a\mathbb{Z}a^{-1}$.

Figura 3.1: \circ **Los 4 caleidoscopios:** $*2222, *236, *244, *333$

Otra familia de orbifolds parabólicos \mathbb{E}^2/G sencilla de desarrollar son los llamados caleidoscopios: $*2222, *236, *244, *333$. El nombre se debe a que son los grupos de simetría que generan algunos caleidoscopios. Su espacio subyacente es un disco cerrado en cuyo borde se encuentran los puntos de esquina indicados. No contiene puntas de cono, luego por el lema 3.4.1 los estabilizadores en G son grupos diédricos de orden $2n \geq 2$ en el borde. Es decir, G está generado por reflexiones, ya que los centros de los giros de G están en la intersección de ejes de reflexión, y las traslaciones y reflexiones con deslizamiento de G también se descomponen en reflexiones de G .

Si G cumple que \mathbb{E}^2/G tiene signatura $*2222$ (la mesa de billar: figura 2.3), los ejes de reflexión de G en \mathbb{E}^2 son paralelos o se cortan en ángulos rectos. Tomemos una pareja de ejes de reflexión paralelos consecutivos l_1, l_2 y también otra pareja L_1, L_2 en la dirección perpendicular. El rectángulo abierto que encierran estas cuatro rectas es un dominio fundamental de G (ver 1.3.3). El producto de dos reflexiones paralelas $\sigma_{v+l}\sigma_l$ (con $v \perp l$) es una traslación $t_{2v} \in G$. Luego 4 copias del rectángulo cerrado como se muestra

en la figura 3.2 forman la adherencia de una región fundamental para el subgrupo de traslaciones $T(G)$.

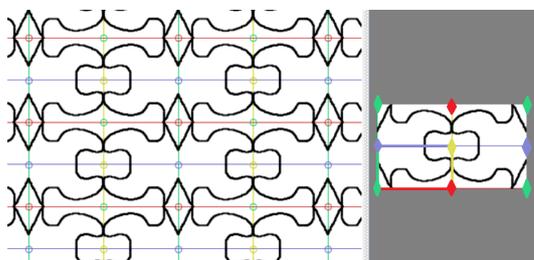


Figura 3.2: *2222

Lo que quiere decir que σ_{l_1} , σ_{l_2} , σ_{L_1} y σ_{L_2} generan G . Y el resto de ejes de reflexión están equiespaciados, como dicta el rectángulo fundamental que hemos visto. Por lo tanto tenemos que, salvo proporción de los lados del rectángulo y una semejanza, los grupos de simetría con signatura *2222 son isomorfos. Luego todos los grupos con signatura orbifold *2222 son isomorfos mediante una afinidad, como queríamos probar.

De la misma manera, los orbifolds *236, *244 y *333 deben ser los asociados a un grupo generado por reflexiones cuyos ejes forman un triángulo. Sus ángulos serán $(\pi/2, \pi/3, \pi/6)$, $(\pi/2, \pi/4, \pi/4)$ y $(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$ respectivamente. Luego salvo semejanza, el grupo queda únicamente determinado. Y en este caso también podemos asignarle las signaturas *2222, *236, *244, *333 a estos grupos cristalográficos.

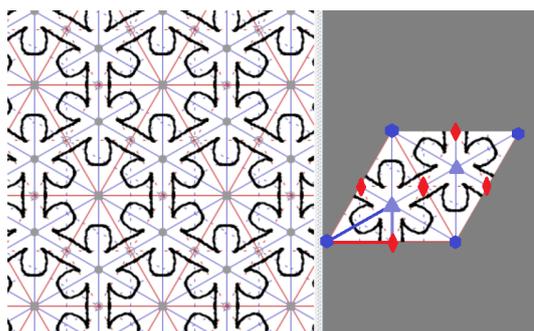


Figura 3.3: *236

La figura 3.3 es un ejemplo de grupo/orbifold con signatura *236. Podemos considerar un dominio fundamental que esté delimitado por ejes de reflexión y que sea el interior de un triángulo rectángulo con un ángulo de $\frac{\pi}{3}$

(cartabón). Nótese que podemos crear un dominio fundamental para el subgrupo de traslaciones $T(G)$ juntando 12 copias del triángulo fundamental, formando un rombo.

En la figura 3.4 podemos ver un grupo con signatura $*244$. Un dominio fundamental que esté delimitado por ejes de reflexión y sea el interior de un triángulo rectángulo isósceles (escuadra) aparece en la parte derecha de la figura. Con 8 copias de este triángulo obtenemos un dominio cuadrado fundamental de $T(G)$.

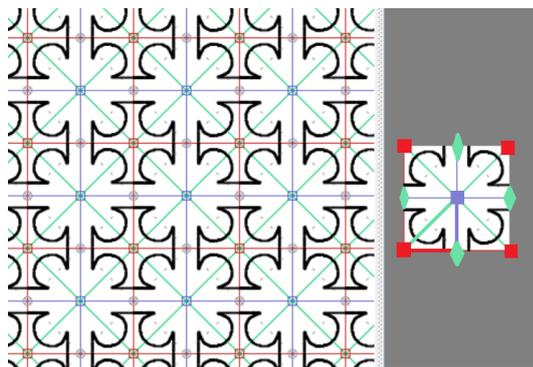


Figura 3.4: $*244$

Por último, veamos en la figura 3.5 un grupo cristalográfico con signatura $*333$. En este caso un dominio fundamental está formado por el interior de un triángulo equilátero. Y 6 copias del triángulo nos permiten construir un dominio fundamental hexagonal de $T(G)$.

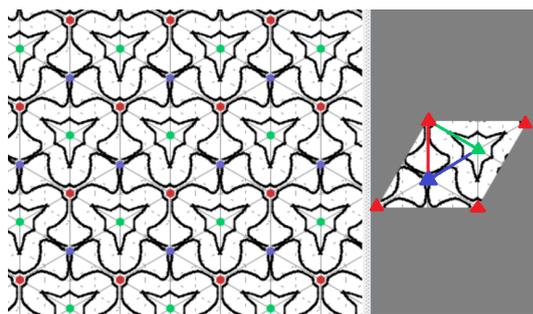


Figura 3.5: $*333$

Las 4 fundas de almohada: 2222, 236, 244, 333

Un orbifold con signatura 2222, 236, 244 o 333 es una esfera con puntas de cono. Si nos lo imaginamos en el espacio, puede recordarnos a la funda de

una almohada (cuadrada o triangular). Veamos que las fundas de almohada son (\mathbb{E}^2, G) -orbifolds con G cristalográfico. La signatura de \mathbb{E}^2/G hace que los estabilizadores no triviales de G sean subgrupos cíclicos de giros. De hecho, los giros de G generan todo el grupo. Ya que si $t_v, g_{x,\theta} \in G$, entonces $t_v g_{x,\theta} = g_{y,\eta} \in G$ y por lo tanto t_v es producto de giros $g_{y,\eta} \cdot g_{x,-\theta}$.

Los subgrupos directos G^+ de los grupos de los caleidoscopios G dan lugar a los orbifolds 2222 (la funda de almohada rectangular: figura 2.4), 236, 244 y 333. Esto es porque al quedarnos con los movimientos directos, los grupos G^+ solo contienen traslaciones y las rotaciones donde antes se cortaban ejes de reflexión en \mathbb{E}^2 . Luego estos cuatro tipos de orbifold provienen de grupos cristalográficos. Veamos que salvo isomorfismo, solo hay un grupo cristalográfico que dé lugar a cada una de las fundas de almohada.

Supongamos primero que \mathbb{E}^2/G tiene la signatura 2222. Es decir, G solo tiene traslaciones y giros de orden 2. Como G es discreto por ser cristalográfico, los puntos de \mathbb{E}^2 con estabilizador no trivial C_2 forman un conjunto R de puntos aislados. De hecho, veamos que son un retículo generado por dos vectores no proporcionales del plano.

Para probarlo, fijemos $x \in R$ y tomemos otro punto $y \in R$. Definimos el punto $z = g_{x,\pi}(y)$. Sabemos que el producto $g_{x,\pi}g_{y,\pi} = t_{2(x-y)} = t$ es una traslación $t \in G$. Por lo tanto $g_{z,\pi} = tg_{y,\pi}t^{-1} \in G$. Es decir, el punto z también tiene estabilizador no trivial, luego $z \in R$. Lo que prueba que el grupo de simetría $G(R)$ de R (definición 1.3.1) contiene a G , ya que contiene a sus giros y estos generan G . En particular, el subgrupo de traslaciones $T(G)$ deja R invariante. Sea $\{t_{e_1}, t_{e_2}\}$ una base de $T(G)$ siendo la norma de e_1, e_2 la mínima posible y sean $u = \frac{1}{2}e_1, v = \frac{1}{2}e_2$. Las traslaciones t_u y t_v no pertenecen a G por no estar generadas por $\{t_{e_1}, t_{e_2}\}$. Veamos que t_u y t_v siguen dejando R invariante. Tomemos $x \in R$ y veamos que $t_u(x), t_v(x) \in R$. Como t_{e_1}, t_{e_2} son traslaciones de G , los productos $t_{e_1}g_{x,\pi} = g_{t_u(x),\pi}$ y $t_{e_2}g_{x,\pi} = g_{t_v(x),\pi}$ son giros de G . Por lo que $t_u(x), t_v(x) \in R$.

Luego tenemos un par de vectores linealmente independientes $\{u, v\}$ que genera el retículo

$$R = \{t_{nu+mv}(x) : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

La inclusión \subseteq se deduce de haber elegido e_1 y e_2 con norma mínima. Y la inclusión \supseteq la da la invarianza de R por $\{t_u, t_v\}$.

Esto nos proporciona un paralelogramo del plano. Duplicándolo, tenemos un dominio fundamental de G . Y extendiendo esta construcción de $\{t_u, t_v\}$ a $\{t_{e_1}, t_{e_2}\}$, tenemos un dominio fundamental del subgrupo de traslaciones $T(G)$ como se puede ver en la figura 3.2.

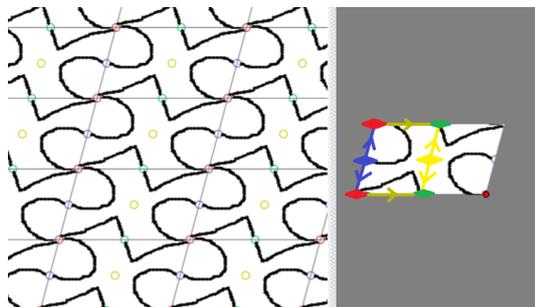


Figura 3.6: 2222

Hemos probado que salvo una afinidad que modifique un paralelogramo fundamental generado por vectores de norma mínima, el grupo cristalográfico G que da lugar a 2222 es único. Nótese que no todos los grupos G que dan lugar al orbifold 2222 son el subgrupo directo de uno tipo $*2222$. Solamente lo será si los paralelogramos fundamentales son rectángulos. Esto contrasta con las otras tres fundas de almohada 236, 244 y 333. Sus grupos asociados siempre son subgrupo directo de grupos tipo $*236$, $*244$ y $*333$ respectivamente. Veámoslo.

Empecemos con el orbifold 236. Dado un grupo cristalográfico G tal que \mathbb{E}^2/G tiene signatura 236, veamos que es el subgrupo directo de un grupo con signatura $*236$. De esta forma quedará garantizado que G es único salvo semejanza. Pero antes nótese que los giros de orden 6 de G generan el resto de giros de G y por consiguiente todo G . Y es que se puede comprobar por la configuración de los ángulos que para cualquier giro g en G de orden 3 (resp. 2) existe un giro h de orden 6 en G tal que gh (resp. gh^2) es otro giro de orden 6. Por lo que al despejar g , tenemos que es producto de giros de G de orden 6.

Como ahora los estabilizadores de puntos del plano pueden tener orden 2, 3 o 6, será mejor centrarnos en los de un solo tipo. Veamos que G deja invariante el retículo $R = \{x \in \mathbb{E}^2 : G_x = C_6\}$. Para ello, solo necesitamos comprobar que $gR = R$, siendo g cualquier giro de orden 6 de G . Sean $x, y \in R$ distintos y $g = g_{x, \frac{\pi}{3}}$. Tomemos también los puntos $y_k = g^k(y)$ para $k = 1, \dots, 5$. Entonces tenemos que $g^k(g_{y, \frac{\pi}{3}})g^{-k} = g_{y_k, \frac{\pi}{3}} \in G$. Es decir, $G_{y_k} = C_6$ y por tanto $y_k \in R$. Razonando de la misma manera con g^{-1} , tenemos que g es una biyección de R en R , por tanto g pertenece a $G(R)$, el grupo de simetría de R .

Hemos conseguido probar que G está contenido en el grupo de simetría de R . Tomemos $x \neq y$ en R que estén a la mínima distancia posible, lo que tiene sentido por ser G discreto (ver 1.2.6). Sean $u = y - x$ y $v = z - x$,

siendo $z = g_{x, \frac{\pi}{3}}(y)$. Entonces $\{t_u, t_v\}$ genera el retículo R . Pero a diferencia del caso 2222, este retículo es único salvo semejanza. Ya que estos vectores generadores tienen el mismo módulo y forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$.

Dado que $G \leq G(R)$, los centros de giro de orden 2 y 3 de G deben dejar R invariante. Sea $C \in \mathbb{E}^2$ un centro de giro de orden 3 de G y tomemos un punto x de R a distancia mínima de C . Entonces los puntos girados de x con centro C son los vértices de un triángulo equilátero, con centro C . Luego la única posición del plano para centros de giro de orden 3 es el centro de los triángulos dados por R . De la misma manera, si C fuera de orden 2, sería el punto medio entre los dos puntos de R más próximos. Por lo que esta es la única posición posible de los centros de giro de orden 2 de G .

Veamos que en todas las posiciones posibles, hay centros de giro. Dados $x \neq y$ a distancia mínima en R , y sean $g = g_{x, \frac{\pi}{3}}$, $h = g_{y, \frac{\pi}{3}}$. Llamemos $z = h(x) \in R$ y C al centro del triángulo equilátero xyz . Entonces $hg = g_{C, \frac{2\pi}{3}}$ y $ghg = g_{M, \pi}$, siendo M el punto medio entre x e y .

Esta configuración de centros de giro coincide con la de las esquinas de los grupos con signatura $*236$. Por lo que G es el subgrupo directo de uno con signatura $*236$. Podemos ver en la figura 3.7 que el dominio fundamental del retículo generado por $\{t_u, t_v\}$ coincide con un dominio fundamental de $T(G)$. Este dominio fundamental de $T(G)$ está formado por 6 copias de un dominio fundamental de G .

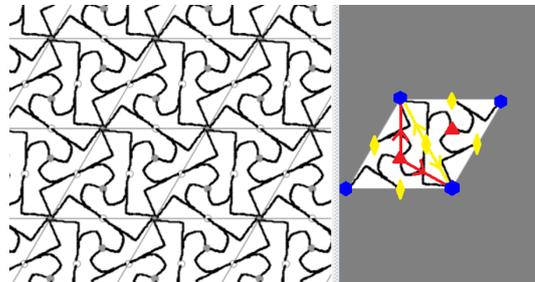


Figura 3.7: 236

Veamos ahora el orbifold 244. Sea G un grupo cristalográfico tal que al proyectar el plano $p : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2/G$ obtenemos un orbifold \mathcal{O} con signatura 244. El lugar singular de \mathcal{O} está formado por A, B dos puntas de cono de orden 4 y C una punta de cono de orden 2. Veamos que $R = p^{-1}(A)$ es un retículo del plano \mathbb{E}^2 . Nótese que como ocurría en el caso 236, los centros de giro de R generan G .

Tomemos dos puntos $x, y \in R$ distintos y $g = g_{x, \frac{\pi}{2}}$. Tomemos también los puntos $y_k = g^k(y)$ para $k = 1, 2, 3$. Entonces tenemos que el producto $g^k(g_{y, \frac{\pi}{2}})g^{-k} = g_{y_k, \frac{\pi}{2}}$ es un giro de G . Es decir, $G_{y_k} = C_4$ y además es repre-

sentante del punto $p(y_k) = p(y) = A$ en el orbifold \mathcal{O} , luego $y_k \in R$. Por lo tanto, los giros de G con centro en un punto de R dejan R invariante. Lo que implica que $G \leq G(R)$.

Tomemos ahora $u = y - x$ y $v = z - x$, siendo x, y puntos de R a distancia mínima y $z = g_{x, \frac{\pi}{2}}(y)$. Al igual que con 236, tenemos que $\{t_u, t_v\}$ genera el retículo R . Pero en este caso R es un retículo cuadrado, porque el ángulo que forman u y v mide $\frac{\pi}{2}$ y tienen el mismo módulo. Como el plano está teselado periódicamente por un cuadrado fundamental de R (los vértices son los puntos de R) nos restringiremos a uno de estos. En un cuadrado fundamental, la única posición para un centro de giro de orden 4 que sea enviado por p en B (es decir, no pertenece a R) es el centro del cuadrado. Y los centros de giro de orden 2 son los puntos medios de los lados del cuadrado.

De esta manera vemos que G debe ser el subgrupo directo de un grupo tipo $*244$. Y así G queda unívocamente determinado salvo semejanza. Podemos ver un ejemplo en la figura 3.8. El dominio fundamental de $T(G)$ está formado por 4 copias de un dominio fundamental de G .

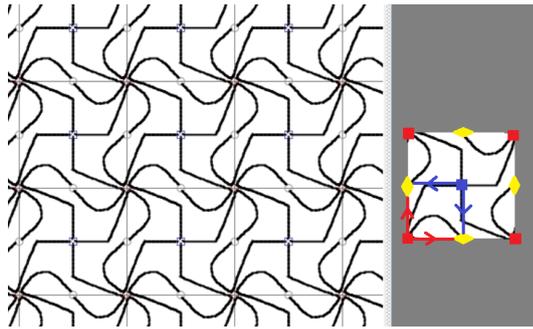


Figura 3.8: 244

Hagamos la misma comprobación para los orbifolds \mathcal{O} con signatura 333. Sea G un grupo cristalográfico que da lugar a un orbifold como \mathcal{O} al cocientar el plano $p : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2/G = \mathcal{O}$. El lugar singular de \mathcal{O} está formado por tres puntas de cono de orden 3, digamos, A , B y C . Llamando R a $p^{-1}(A)$ podemos comprobar, como hemos hecho antes, que R es un retículo. Esta vez podemos tomar como generadores $\{t_u, t_v\}$ cuyos vectores forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$.

Falta ubicar el resto de centros de giro de G , todos de orden 3. Para ello, por periodicidad, nos restringiremos a un dominio fundamental de R dado por $\{t_u, t_v\}$. Es decir, es un rombo tal que solo sus cuatro esquinas son puntos de R . La proporción de las diagonales de este rombo es $\sqrt{3}$, luego está formado por dos triángulos equiláteros. Los únicos centros de giro de orden 3 que dejan R invariante son las esquinas y los dos centros de los triángulos

equiláteros. De hecho, uno de estos centros es enviado por p en B y el otro en C .

Así queda determinado G . Es subgrupo directo de un grupo con signatura $*333$, luego G queda determinado salvo semejanza. Podemos ver un ejemplo de este tipo de grupo en la figura 3.9. Un dominio fundamental de $T(G)$ (es decir de R) está formado por 3 copias de un dominio fundamental de G .

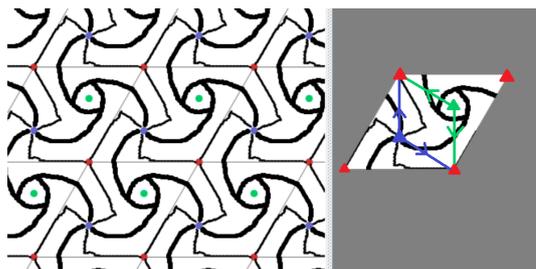


Figura 3.9: 333

Los 4 conos mixtos: 22^* , $2 * 22$, $3 * 3$, $4 * 2$

Desarrollemos ahora los orbifolds 22^* , $2*22$, $3*3$ y $4*2$ caso a caso. Si \mathbb{E}^2/G tiene signatura 22^* , G debe tener reflexiones y giros de orden 2. Pero como la signatura no contiene esquinas, el lema 3.4.1 dice que los ejes de reflexión en \mathbb{E}^2 no se pueden cortar. Luego G debe estar generado por dos reflexiones con ejes paralelos y dos giros de orden 2 equidistantes a los dos ejes de reflexión. Y salvo la posición del dominio fundamental rectangular y el tamaño de los lados (afinidad), la clase de G queda unívocamente determinada. En la figura 3.10 podemos ver que con 4 copias de un dominio fundamental obtenemos un rectángulo fundamental de $T(G)$.

Los casos $2 * 22$, $3 * 3$ y $4 * 2$ son más sencillos. Esto es porque por el lema 3.4.1, las esquinas $*a$ determinan el ángulo entre los ejes de reflexión: π/a . Luego los ejes de reflexión forman una teselación de \mathbb{E}^2 rectangular, triangular y cuadrada respectivamente, y el centro de cada polígono tiene estabilizador cíclico de orden 2, 3 y 4 respectivamente. Lo que determina una única clase de isomorfía para los grupos G que dan lugar a estos tres orbifolds. Veamos un ejemplo de cada.

En la figura 3.11 podemos ver un patrón con grupo de simetría de tipo $2 * 22$. Un dominio fundamental de G puede tener forma rectangular, y con 4 copias tenemos un dominio fundamental de $T(G)$. Pero el dominio fundamental de $T(G)$ en la figura se ha tomado rómbico, y el de G triangular. Esto ilustra que los dominios fundamentales de un grupo no son únicos.

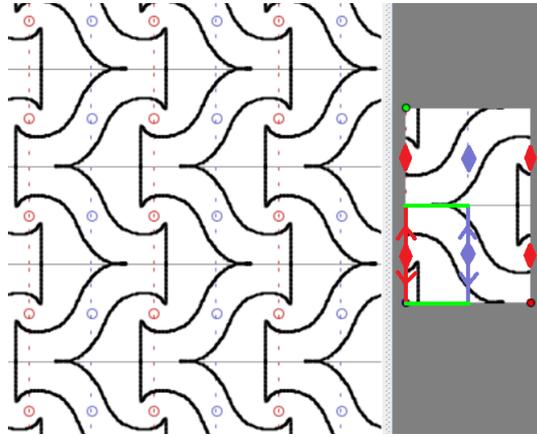


Figura 3.10: 22^*

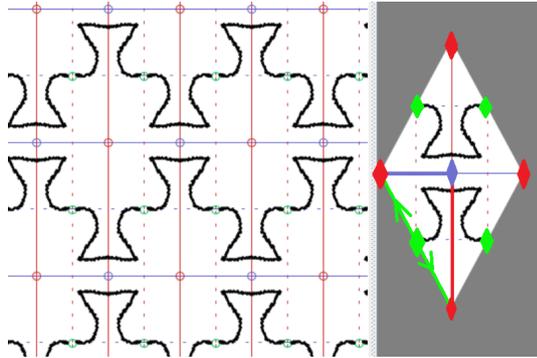


Figura 3.11: $2 * 22$

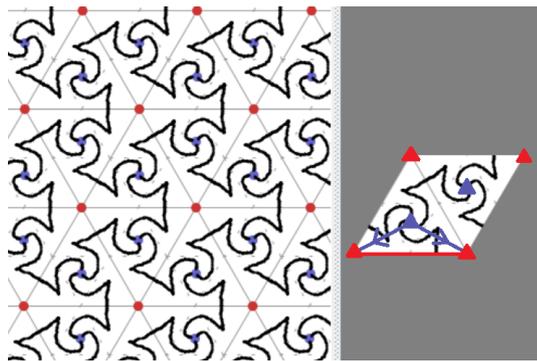


Figura 3.12: $3 * 3$

Se puede ver en la figura 3.12 un ejemplo de un grupo G con signatura asociada $3 * 3$. Un dominio fundamental de G es un tercio de un triángulo

equilátero limitado por ejes de reflexión, ya que en el centro del triángulo hay un centro de giro de orden 3. Juntando 6 copias del triángulo fundamental tenemos un dominio fundamental de $T(G)$.

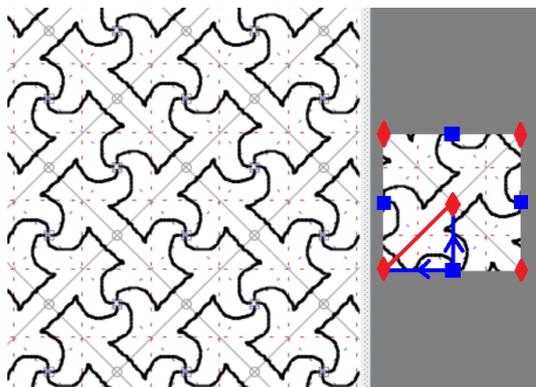


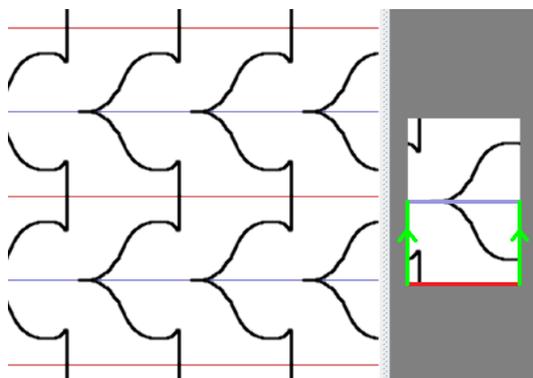
Figura 3.13: $4 * 2$

Para acabar con los *conos mixtos*, en la figura 3.13 podemos ver un patrón con grupo de simetría G de signatura $4 * 2$. Un dominio fundamental de G viene dado por un cuarto de cuadrado limitado por ejes de reflexión. Ya que en el centro de este cuadrado tenemos un centro de giros de orden 4. Y con 8 copias del dominio fundamental tenemos un dominio fundamental de $T(G)$.

Los 4 orbifolds restantes: $**$, $*\times$, $\times\times$, $22\times$

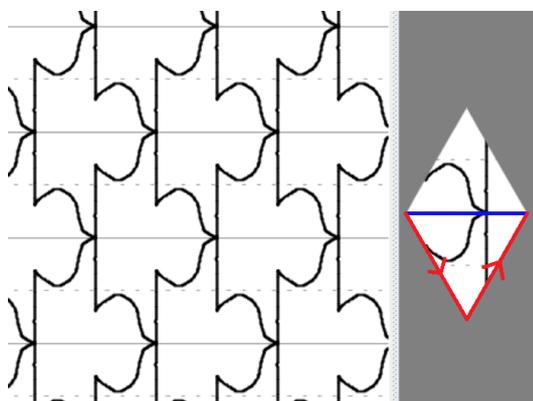
Finalmente desarrollaremos orbifolds \mathcal{O} con signatura $**$, $*\times$, $\times\times$ y $22\times$. Veamos primero $**$ por ser el único orientable. Es un cilindro sin tapas compacto en cuyos bordes hay puntos de espejo. Como no hay esquinas, los ejes de simetría de un grupo G tal que $\mathbb{E}^2/G = \mathcal{O}$ deben ser paralelos gracias al lema 3.4.1. Por la signatura, sabemos que G no puede contener giros, reflexiones con ejes secantes o reflexiones con deslizamiento σ_l^v con $\sigma_l \notin G$. Por lo tanto G está generado por dos reflexiones σ_l , σ_L y una traslación t_v tal que l , L y v son paralelos. Luego podemos elegir un dominio fundamental de G rectangular que al duplicarlo nos da un dominio fundamental de $T(G)$. Luego salvo semejanza y proporción de esta región fundamental (afinidad), G queda unívocamente determinado. Se puede ver un ejemplo en la figura 3.14.

Un grupo G asociado a la banda de Möbius $*\times$, por el lema 3.4.1, debe tener reflexiones con deslizamiento tales que todos los puntos de su eje tienen estabilizador trivial. Por la signatura, en G también hay reflexiones con ejes paralelos pero no tiene giros. Luego G está generado por una reflexión y una reflexión con deslizamiento con ejes paralelos. Los ejes paralelos del resto de

Figura 3.14: $*x$

reflexiones (con deslizamiento o no) de G están distribuidos por el plano de forma equidistante. Por lo que salvo la dirección y separación entre ejes, y el módulo del vector de las traslaciones (afinidad) G es único. Es decir, $*x$ es el cociente del plano por una única clase de isomorfía de grupo cristalográfico G .

Un dominio fundamental de G puede ser un rectángulo tal que al identificar sus lados volvemos a obtener la banda de Möbius. Pero en la figura 3.15 se ha elegido un dominio fundamental con forma de triángulo. Igualmente podemos identificar los lados que se indican para recuperar el orbifold $*x$.

Figura 3.15: $*x$

La botella de Klein $\times\times$ es un orbifold plano, recordemos que en la figura 2.2 hemos descrito un grupo cristalográfico G asociado. Para ver que es el único posible, notemos que su signatura prohíbe que G pueda tener giros o reflexiones. Vimos en el lema 3.4.1 que si G tuviera reflexiones con deslizamiento en ejes no paralelos, G tendría giros. Luego la única posibilidad es que G esté generado por una reflexión con deslizamiento σ_l^v y una traslación

t_u en direcciones perpendiculares. Si u, v no fueran perpendiculares (ni proporcionales), su composición daría una reflexión con deslizamiento con eje no paralelo a l en σ_l^v . Concluimos que, salvo afinidad, G es único.

En la figura 3.16 podemos ver otro ejemplo de grupo G con signatura $\times \times$. Y si duplicamos un rectángulo fundamental obtenemos un dominio fundamental de $T(G)$.

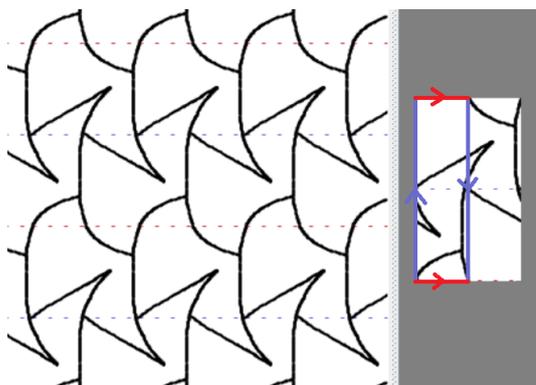
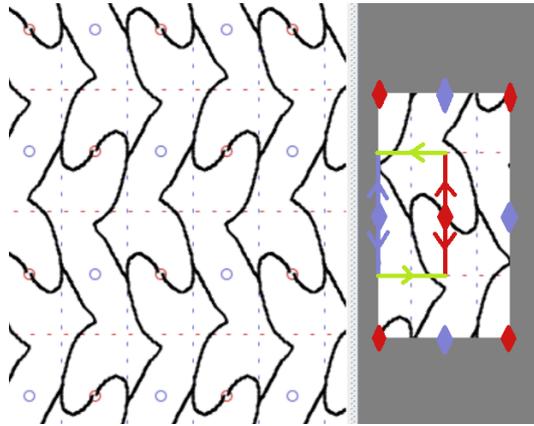


Figura 3.16: $\times \times$

Por último, el orbifold $22 \times$ es un plano proyectivo con dos puntas de cono de orden 2. Luego si $\mathcal{O} = \mathbb{E}^2/G$ tiene signatura $22 \times$, G no puede contener reflexiones, pero sí tiene reflexiones con deslizamiento y giros de orden 2. Por el lema 3.4.1, los puntos con estabilizador cíclico no pueden estar en los ejes de reflexión con deslizamiento, ya que de lo contrario, G contendría reflexiones.

Veamos que una reflexión con deslizamiento σ_l^v y un giro $g_{x,\pi}$ generan G . Se demostró en el lema 3.4.1 que $g_{x,\pi}\sigma_l^v$ es otra reflexión con deslizamiento $\sigma_{L'}^u$ perpendicular a la primera. Luego $\sigma_{L'}^u\sigma_l^v = g_{x,\pi}\sigma_l^v\sigma_l^v$ es un giro $g_{y,\pi}$ con centro en $y = \sigma_{L'}(x)$. Gracias a los dos giros, podemos generar reflexiones con deslizamiento $\sigma_{l'}^v$ y $\sigma_{L'}^u$ paralelas a las primeras. Los ejes l', L' crean una teselación regular del plano por rectángulos. En el centro de cada rectángulo tenemos el centro de un giro de orden 2. Y los productos de los giros y reflexiones con deslizamiento que tenemos nos da el resto de movimientos de G .

En la figura 3.17 podemos ver un dominio fundamental rectangular de G . Con 4 copias de el rectángulo podemos construir un dominio fundamental de $T(G)$. Y de esta manera queda probado que G , salvo afinidad, es único.

Figura 3.17: $22\times$

Los 17 grupos cristalográficos

Como resumen, recopilamos en la tabla 3.3 los 17 grupos cristalográficos con la notación de la signatura orbifold y la cristalográfica internacional (o de Hermann-Mauguin). La relación entre la notación orbifold y la cristalográfica se puede consultar también en [Hyde].

Además, en la tabla 3.3 se indica el tipo de subgrupo de traslaciones que tiene según el retículo de puntos que genera. Lo que se conoce en cristalografía como la red de Bravais del grupo. Hay cinco tipos de redes de Bravais planas, según el dominio o *celda* fundamental del retículo: oblicua (paralelogramo), rectangular, cuadrada, rectangular centrada (rombo) y hexagonal (rombo con proporción $\sqrt{3}$ entre las diagonales).

Por último, incluimos el índice $[G : T(G)]$. Es fácil de calcular, ya que por el teorema 2.4.7 equivale al número de hojas con las que el toro $\mathbb{E}^2/T(G)$ recubre el orbifold \mathbb{E}^2/G . O lo que es lo mismo, el número de copias de un dominio fundamental de G necesarias para construir un dominio fundamental de $T(G)$.

Tabla 3.3: Los 17 grupos cristalográficos.

N. orbifold	N. cristalográfica	Red de Bravais	$[G : T(G)]$
\circ	$p1$	Oblicua	1
2222	$p2$	Oblicua	2
**	pm	Rectangular	2
*2222	pmm	Rectangular	4
$\times\times$	pg	Rectangular	2
22 \times	pgg	Rectangular	4
22*	pmg	Rectangular	4
* \times	cm	Rectangular centrada	2
2 * 22	cmm	Rectangular centrada	4
244	$p4$	Cuadrada	4
*244	$p4m$	Cuadrada	8
4 * 2	$p4g$	Cuadrada	8
333	$p3$	Hexagonal	3
*333	$p3m1$	Hexagonal	6
3 * 3	$p31m$	Hexagonal	6
236	$p6$	Hexagonal	6
*236	$p6m$	Hexagonal	12

Capítulo 4

Clasificación de orbifolds elípticos

Una vez clasificados los grupos cristalográficos podemos generalizar el resultado a otros espacios. Siguiendo las ideas de Conway, clasificaremos los grupos discretos de isometrías de \mathbb{S}^2 . Es decir, los subgrupos finitos de $O(3)$ (ver proposición 1.2.19).

4.1. El teorema *mágico* para la esfera

Como hicimos con los grupos cristalográficos, vamos a limitar la posible signatura del orbifold asociado a un subgrupo finito de $O(3)$. Este orbifold va a ser elíptico. Pero antes de todo eso hay que comprobar que podemos darle una signatura a los (\mathbb{S}^2, G) -orbifolds con los que vamos a trabajar.

Proposición 4.1.1. Sea $G \leq O(3)$ finito actuando sobre \mathbb{S}^2 . Entonces \mathbb{S}^2/G es un orbifold compacto y conexo que tiene una única signatura orbifold $s_1 \cdots s_r$. Además, $\chi_{\text{orb}}(\mathbb{S}^2/G) = 2 - c(s_1) \cdots - c(s_r)$.

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{O} = \mathbb{S}^2/G$ es un orbifold conexo y compacto. Dado que G es finito, actúa de forma propiamente discontinua en \mathbb{S}^2 . Luego por el teorema 2.3.5, el paso al cociente $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2/G$ induce en $\mathcal{O} = \mathbb{S}^2/G$ una estructura de orbifold. Para probar que \mathcal{O} es compacto y conexo, por definición, debe serlo su espacio subyacente. Como $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow X_{\mathcal{O}}$ es una aplicación continua cociente, y \mathbb{S}^2 es compacto y conexo, tenemos que $X_{\mathcal{O}} = p(\mathbb{S}^2)$ también es compacto y conexo.

Estudiemos qué clase de singularidades puede tener \mathcal{O} . Si x es un punto de $\Sigma_{\mathcal{O}}$, su grupo local Γ_x debe ser no trivial. Pero $\Gamma_x = G_{\tilde{x}}$ es el estabilizador de algún $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Por lo que las singularidades dependen de la clase

de estabilizadores que tenga G en \mathbb{S}^2 . Teniendo en cuenta la proposición 1.2.17, las únicas isometrías de $O(3) - \{\text{id}_{\mathbb{S}^2}\}$ que fijan puntos de \mathbb{S}^2 son las reflexiones σ_{Π} (fijan una circunferencia máxima) y los giros $g_{l,\theta}$ (fijan dos puntos antipodales). Luego tenemos las mismas singularidades que en el plano:

- Puntas de cono de orden $n \geq 2$: si $\Gamma_x = C_n$ es cíclico de giros.
- Puntos de espejo: si $\Gamma_x = \{\text{id}_{\mathbb{S}^2}, \sigma_{\Pi}\} = D_1$ tiene una reflexión.
- Puntos de esquina de orden $n \geq 2$: si $\Gamma_x = D_n$ es diédrico de orden n .

Como en el caso de los grupos cristalográficos, las puntas de cono y las esquinas son finitas, por serlo G . Esto garantiza que $X_{\mathcal{O}}$ es una superficie (puede que con borde), ya que los puntos regulares y las puntas de cono tienen entornos homeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^2 , mientras que los puntos de espejo y esquina forman el borde de $X_{\mathcal{O}}$.

Resumiendo, \mathcal{O} es un orbifold compacto y conexo. Su espacio subyacente es una superficie compacta y conexa, puede que con borde. Y su lugar singular está formado por finitas puntas de cono fuera del borde, y puntos de espejo y finitas puntas de esquina en el borde. Por lo que podemos asignarle una única signatura a \mathcal{O} , según la hemos definido en 3.1.4. En particular, podemos calcular la característica de Euler χ_{orb} de \mathcal{O} con la fórmula de Riemann-Hurwitz generalizada (3.1), pues se siguen verificando las hipótesis requeridas. Y podemos usar los costes asociados a la signatura (tabla 3.1) para agilizar este cálculo. \square

Teorema 4.1.2 (Teorema *mágico* para la esfera). Sea \mathcal{O} un (\mathbb{S}^2, G) -orbifold con $G \leq O(3)$ finito. Entonces la signatura de \mathcal{O} tiene un *coste total* menor que 2. Es decir $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O}) > 0$ (\mathcal{O} es elíptico).

Demostración. Sea \mathcal{O} un (\mathbb{S}^2, G) -orbifold con $G \leq O(3)$ finito actuando sobre \mathbb{S}^2 . Entonces podemos calcular $\chi_{\text{orb}}(\mathcal{O})$ utilizando los costes de su signatura. Pero teniendo en cuenta que G es un grupo finito, el corolario 2.4.8 nos dice que $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2/G$ es un recubrimiento de orbifolds de $|G|$ hojas. Y aplicando el teorema 2.5.5 tenemos que

$$\chi_{\text{orb}}(\mathbb{S}^2/G) = \frac{1}{|G|} \chi(\mathbb{S}^2) = \frac{2}{|G|} > 0.$$

\square

Teorema 4.1.3. Sea \mathcal{O} un (\mathbb{S}^2, G) -orbifold con G finito. Entonces la signatura de \mathcal{O} pertenece a alguna de las familias de la tabla 4.1. Donde A , B , a y b números naturales.

Tabla 4.1: Los 14 tipos de orbifold esférico.

AB	$22A$	233	234	235
$A*$	$2*a$	$3*2$	$A\times$	
$*ab$	$*22a$	$*233$	$*234$	$*235$

Demostración. Como hicimos con los grupos cristalográficos, veamos cuáles son todas las firmas con característica de Euler positiva. O lo que es lo mismo, todas las posibles combinaciones de símbolos cuyo coste no supera 2. Por lo tanto, el símbolo \circ queda automáticamente descartado.

Empecemos con las firmas con el símbolo \times . Como $c(\times) = 1$, solo puede haber un \times para que el coste total sea menor que 2. La firma \times es válida y se denota $1\times$ para distinguirla de un símbolo suelto. Veamos cuántos símbolos podemos añadir antes de llegar al coste total 2.

No puede haber ningún $*$ si hay un \times , porque $c(*) = 1$. Luego, dado que no puede haber esquinas por no haber espejos, la firma solo puede tener puntas de cono además de un \times . Si hubiera dos o más puntas de cono, el coste sería mayor que $c(A) + c(B) + c(\times) > c(2) + c(2) + c(\times) = 2$. Es decir, si la firma tiene un \times , solo puede tener una punta de cono. Y para todo $A \geq 2$ la firma $A\times$ es válida, pues $c(A) + c(\times) = 2 - \frac{1}{A} < 2$. A partir de ahora, las firmas no pueden tener símbolos \circ ni \times . Solo tendrán puntas de cono A , espejos $*$ y esquinas a .

Veamos todas las posibles combinaciones únicamente con puntas de cono $ABC\dots$. La esfera es el orbifold asociado al grupo trivial, luego incluimos en la lista la firma 11 por convenio para denotar la firma vacía (no es una punta de cono de orden 11, son dos *puntas de cono* de orden 1, es decir, puntos regulares). Si solo hay una punta de cono $A \geq 2$, escribiremos la firma como $1A$ y su coste es $c(A) < 1$. Si tenemos únicamente dos puntas de cono $A, B \geq 2$ también tenemos que $c(A) + c(B) < 2$, luego AB es otra firma válida. Si tenemos cuatro o más puntas de cono, el coste total será mayor o igual que el de la firma 2222, que es 2.

Desarrollemos las posibles firmas de tipo ABC con $A, B, C \geq 2$ ordenadas de forma creciente para evitar casos redundantes. Supongamos que $A = 2$.

- Si $B = 2$, cualquier firma $22C$ tiene coste $2c(2) + c(C) = 2 - \frac{1}{C} < 2$.
- Si $B = 3$, entonces 233, 234 y 235 son válidas. Tienen coste total $\frac{11}{6}$, $\frac{23}{12}$ y $\frac{59}{30}$ respectivamente. Pero si $C \geq 6$, tenemos que el coste será mayor o

igual que el de la signatura 236, que es 2 por estar asociada a un grupo cristalográfico.

- Si $B, C \geq 4$, el coste total de la signatura será mayor o igual que el de 244, que es 2.

Y si $A, B, C \geq 3$ su coste está acotado inferiormente por el de la signatura 333, que también es 2. Así quedan agotadas todas las posibles signaturas con tres puntas de cono. De aquí en adelante las signaturas no pueden tener \circ ni \times pero deben tener un símbolo $*$.

El siguiente caso es breve: signaturas con puntas de cono y espejos, pero sin esquinas. Si hubiera dos o más puntas de cono en la signatura, el coste sería mayor que el de $22*$, que sabemos que es 2. Por lo tanto, en este caso las únicas signaturas válidas son las de tipo $A*$, con coste $c(A) + c(*) = 2 - \frac{1}{A} < 2$. El caso $1*$ representa la ausencia de puntas de cono, que también es válido.

Ahora busquemos todas las signaturas con $*$ y esquinas, pero sin puntas de cono. Como en el teorema mágico de plano, hay una biyección con las signaturas que solo tienen puntas de cono. Tenemos que dadas las signaturas $A_1 \cdots A_r$ y $*a_1 \cdots a_r$, siendo $A_i = a_i$ y $\sum_i c(A_i) < 2$, entonces

$$c(*) + \sum_i c(a_i) = 1 + \sum_i \frac{a_i - 1}{2a_i} = 1 + \frac{1}{2} \left(\sum_i \frac{A_i - 1}{A_i} \right) = 1 + \frac{1}{2} \left(\sum_i c(A_i) \right) < 2.$$

Pero si $\sum_i c(A_i) \geq 2$, tenemos que

$$c(*) + \sum_i c(a_i) = 1 + \frac{1}{2} \left(\sum_i c(A_i) \right) \geq 2.$$

Luego en este caso las signaturas válidas son $*ab$, $*22a$, $*233$, $*234$ y $*235$. Escribiremos $*11$ y $*1a$ por convenio, aunque el símbolo 1 es un símbolo sin coste por representar un punto regular, lo que llamamos un símbolo vacío. Nótese que $*11$ y $1*$ representan la misma signatura: $*$.

Estudiemos para acabar los casos mixtos: signaturas con puntas de cono y esquinas. Ya hemos comprobado que no puede haber dos puntas de cono si tenemos un $*$, luego tenemos que ver qué posibilidades hay con una punta de cono $A \geq 2$.

- Si $A = 2$, $2*a$ es válida para cualquier a , ya que su coste es $2 - \frac{1}{2a} < 2$. Y no puede haber dos o más esquinas, ya que su coste sería mayor o igual que el de $2*22$, que es 2.
- Si $A = 3$, la signatura $3*2$ tiene coste total $\frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{23}{12} < 2$. Pero más esquinas de orden superior tendrán coste mayor que la signatura $3*3$ de coste 2.

Y si $A \geq 4$, la signatura tendrá un coste mayor o igual que $4 * 2$ de coste 2. Ya no quedan más posibilidades por lo que hemos enumerado todas las signaturas con coste total menor a 2. \square

4.2. Desarrollando cada orbifold

Por brevedad, no incluiremos los detalles del desarrollo de cada orbifold. Nos limitaremos a exponer un ejemplo de cada familia para ilustrar que el grupo G del que proviene el orbifold \mathbb{S}^2/G existe. Los argumentos serían los mismos que en la sección 3.4, si no más sencillos por ser \mathbb{S}^2 compacto y G finito. Pero primero debemos descartar los orbifolds malos.

Los orbifolds malos

Lo que sí cambia respecto de la sección 3.4 es que entre las signaturas de la tabla 4.1, hay algunas que corresponden a orbifolds malos (definición 2.5.6). Es decir, los orbifolds tipo AB (resp. $*ab$) están finitamente recubiertos por la esfera si y solo si $A = B$ (resp. $a = b$). De hecho, en [Thurston1] se prueba que AB y $*ab$ con $A \neq B$ y $a \neq b$ son los únicos orbifolds malos de dimensión 2.

Veamos que si $a \neq b$, $*ab$ no puede ser un (\mathbb{S}^2, G) -orbifold. Si lo fuera, el grupo G estaría generado por las reflexiones respecto de dos circunferencias máximas (como ocurre si $a = b$). Pero dos circunferencias máximas distintas en la esfera \mathbb{S}^2 se cortan con el mismo ángulo $\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{b}$ en los dos puntos antipodales de intersección, por lo que $a = b$.

Lo mismo ocurre con los orbifolds AB con $A \neq B$. Supongamos que existe un grupo $G \leq O(3)$ finito tal que \mathbb{S}^2/G tiene signatura AB . Añadiéndole a G reflexiones que pasen por los centros de giro, podemos obtener el grupo H tal que $G = H^+$. Entonces \mathbb{S}^2/H tendría signatura $*ab$, pero ya sabemos que si $a \neq b$, no existe tal grupo H .

Los orbifolds buenos

Observemos ahora un ejemplo de la realización como grupo finito de isometrías de la esfera \mathbb{S}^2 de uno de los orbifolds que pertenecen a cada familia de la tabla 4.1. Empecemos por los grupos de simetría de los sólidos platónicos. En la figura 4.1 podemos ver que $*233$ es el grupo de simetría del tetraedro regular, $*234$ del octaedro y el cubo, y $*235$ del icosaedro y el dodecaedro.

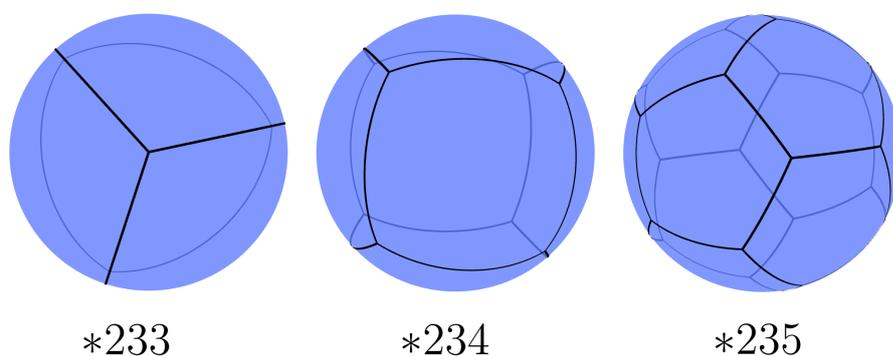


Figura 4.1: Tres sólidos platónicos.

Tomemos los subgrupos directos de los tres grupos anteriores. Si dibujamos patrones con simetría cíclica en las caras del tetraedro, tenemos el grupo 233. Lo mismo ocurre con 234 y 235. En la figura 4.2 podemos ver que el cubo romo tiene 234 como grupo de simetría, mientras que el grupo de simetría del dodecaedro romo es 235.

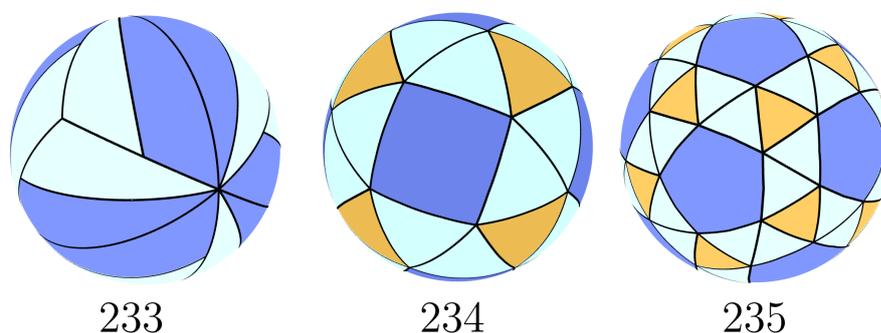


Figura 4.2: Los subgrupos directos de los anteriores.

Pasemos ahora a grupos de simetría cíclica, según la notación de Schönflies (ver la tabla 4.3 y [Hyde]). Nótese que a partir de ahora, en las familias con parámetros n o N hemos escogido como ejemplo el orden 5.

En la figura 4.3 tenemos el patrón de una pirámide regular, con simetría $*55$, y el patrón de una pirámide deformada con simetría 55 . En el centro de la figura tenemos el grupo de simetría $5*$, que se obtiene al añadirle una reflexión por el ecuador al grupo 55 .

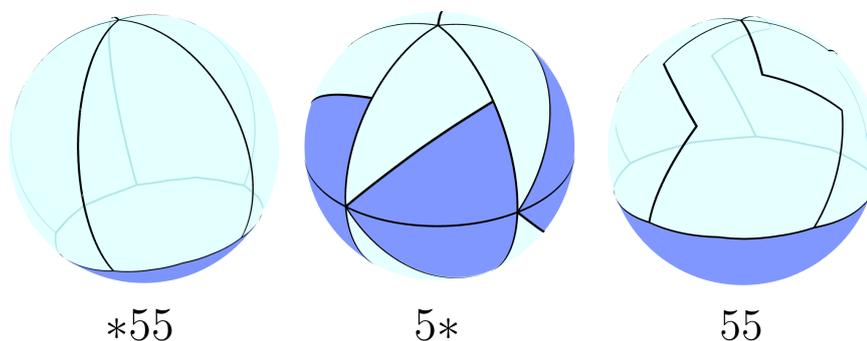


Figura 4.3: Tres tipos de simetría cíclica.

Veamos ahora los grupos de simetría diédrica, según Schönflies. Podemos ver en la figura 4.4 que como ejemplo de $*225$ tenemos un prisma regular, como ejemplo de $2*5$ tenemos un antiprisma, y como ejemplo de 225 tenemos un patrón con simetría cíclica dibujado sobre un prisma.

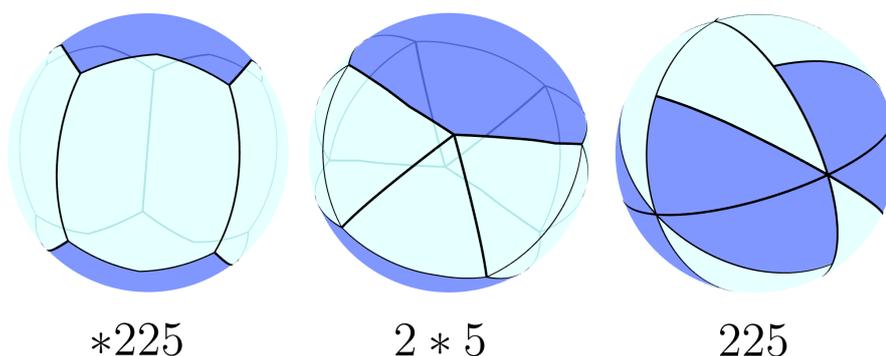


Figura 4.4: Tres tipos de simetría diédrica.

Por último, veamos las dos familias que nos quedan. En la parte izquierda de la figura 4.5 podemos ver un patrón con simetría $3*2$, que es la simetría de los clásicos balones blancos de voleibol. En la parte derecha tenemos un ejemplo de patrón con simetría $5\times$.

Se pueden ver los subgrupos finitos de $O(3)$ recopilados en la tabla 4.3. Incluimos el orden del grupo, la notación de Schönflies y la estructura abstracta del grupo (cíclico C , diédrico D , alternado A o simétrico S).

Como hemos hecho hasta ahora, la letra N representa un número natural como orden de punta de cono, mientras que n es el orden de un punto de esquina. En la notación orbifold, $2N$ y $2n$ son dos símbolos. Pero en el resto

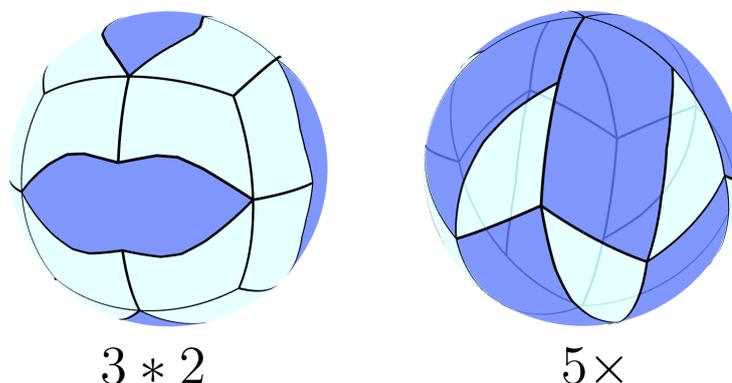


Figura 4.5: Los dos tipos de simetría restantes.

de columnas $2n$ es el doble de n . También hay que tener en cuenta que si n es impar tenemos que $C_2 \times C_n \simeq C_{2n}$ y que $C_2 \times D_n \simeq D_{2n}$.

Nota. En cristalografía no se habla de 14 familias (algunas infinitas) de subgrupos finitos de $O(3)$. Esto se debe a que en el estudio de las redes cristalinas solo son de interés los subgrupos de $O(3)$ que sean estabilizadores de grupos cristalográficos del espacio euclídeo \mathbb{E}^3 .

Los estabilizadores de los grupos cristalográficos tridimensionales se conocen como **grupos puntuales espaciales**. Solo hay 32 de ellos, y los recogemos en la tabla 4.2, vista en [Hyde]. En la tabla se compara la signatura orbifold con la notación cristalográfica internacional.

Tabla 4.2: Los 32 grupos puntuales cristalográficos del espacio.

Orb.	Crist.	Orb.	Crist.	Orb.	Crist.	Orb.	Crist.
11	1	\times	$\bar{1}$	22	2	*	m
222	222	*222	mmm	*22	$mm2$	2*	$2/m$
44	4	2 \times	$\bar{4}$	*44	$4mm$	4*	$4/m$
224	422	*224	$4/mmm$	2 * 2	$\bar{4}2m$	2 * 3	$\bar{3}m$
33	3	3 \times	$\bar{3}$	*33	$3m$	3 * 2	$m\bar{3}$
223	32	*223	$\bar{6}m2$	233	23	*233	$\bar{4}3m$
66	6	3*	$\bar{6}$	*66	$6mm$	6*	$6/m$
226	622	*226	$6/mmm$	234	432	*234	$m\bar{3}m$

Tabla 4.3: Los grupos finitos de $O(3)$, donde $n \geq 2$.

N. orbifold	N. Schönflies	Grupo abstracto	Orden
11	C_1	C_1	1
NN	C_n	C_n	n
$*, 1*, *11$	C_s	C_2	2
$N*$	C_{nh}	$C_2 \times C_n$	$2n$
$*nn$	C_{nv}	D_n	$2n$
$\times, 1\times$	C_i	C_2	2
$N\times$	S_n (n par), C_{ni} (n impar)	C_{2n}	$2n$
$22N$	D_n	D_n	$2n$
$2 * n$	D_{nd}	D_{2n}	$4n$
$*22n$	D_{nh}	$C_2 \times D_n$	$4n$
233	T	A_4	12
$3 * 2$	T_h	$C_2 \times A_4$	24
$*233$	T_d	S_4	24
234	O	S_4	24
$*234$	O_h	$C_2 \times S_4$	48
235	I	A_5	60
$*235$	I_h	$C_2 \times A_5$	120

4.3. Los grupos de frisos

Para acabar la memoria comentamos la signatura orbifold generalizada a los grupos de frisos, sin presentar ninguna demostración. Esta idea, expuesta en [Conway], es más gráfica que rigurosa. Pero nos permite visualizar rápidamente el tipo de simetría que tiene un friso.

Definición 4.3.1. Un **grupo de frisos** G es un grupo discreto de isometrías del plano \mathbb{E}^2 tal que $T(G) \simeq \mathbb{Z}$.

Tomemos un patrón P en el plano \mathbb{E}^2 cuyo grupo de simetría $G(P)$ sea un grupo de frisos. Luego $T(G)$ está generado por una traslación t_v . Sea $u \in \mathbb{R}^2$ un vector ortogonal a v . Entonces podemos tomar dominio fundamental de $T(G)$ de la forma

$$D = \{x = \lambda v + \mu u \in \mathbb{E}^2 \mid \lambda \in (0, 1), \mu \in \mathbb{R}\},$$

que claramente no es acotada.

Tomemos n copias seguidas del dominio fundamental D para formar la región R . Hay una recta L con dirección v por donde pasan los posibles centros de giro o ejes de reflexión (con o sin deslizamiento). Entonces podemos proyectar las n copias de D sobre una esfera \mathbb{S}^2 salvo los polos norte y sur, de manera que $L \cap R$ sea el ecuador de \mathbb{S}^2 . Esta proyección transforma las simetrías de la siguiente manera:

- Las reflexiones respecto de L pasan a ser reflexiones respecto del ecuador de \mathbb{S}^2 .
- Las reflexiones respecto de rectas ortogonales a L pasan a ser reflexiones respecto de meridianos de \mathbb{S}^2 .
- Los giros con centro en puntos de L pasan a ser giros cuyo eje pasa por el ecuador y el centro de \mathbb{S}^2 .
- Las traslaciones en dirección v pasan a ser giros en torno al eje polar de \mathbb{S}^2 .
- Las traslaciones con deslizamiento con eje en L pasan a ser giros indirectos en torno al eje polar de \mathbb{S}^2 .

De esta manera tenemos un patrón simétrico en \mathbb{S}^2 , que puede variar según el número n de copias seguidas de D que tomemos del plano. Por lo que su grupo de simetría pertenece a una de las 7 familias de la tabla 4.3 que dependen de un parámetro n o N .

Considerando que el patrón P es el caso límite cuando tomamos cada vez más copias de D , sustituiremos los símbolos N y n por ∞ . Una punta de cono generalizada ∞ querrá decir que hay traslaciones. Mientras que un punto de esquina generalizado $*\infty$ indica la presencia de ejes de reflexión paralelos, que son ortogonales a L . Téngase en cuenta que estamos omitiendo las demostraciones de esta sección.

Para terminar, enumeramos en la tabla 4.4 los 7 grupos de frisos, con la notación orbifold y la notación cristalográfica.

Tabla 4.4: Los 7 grupos de frisos.

N. Orbifold	N. Cristalográfica	Ejemplo
$\infty\infty$	$p1$	bbbbbbb
$*\infty\infty$	$p1m1$	bdbdbdb
$\infty*$	$p11m$	bbbbbbb ppppppp
$\infty\times$	$p11g$	bpbpbp
22∞	$p2$	bqbqbqb
$*22\infty$	$p2mm$	bdbdbdb pqpqpqp
$2*\infty$	$p2mg$	bdpqbdp

Bibliografía

- [Arens] ARENS, Richard F. «A topology for spaces of transformations.» *Ann. of Math.* 2, 47, n^o 3, (1946), 480–495. URL <https://doi.org/10.2307/1969087>.
- [Blanco] BLANCO, María F. *Movimientos y simetrías*. Universidad de Valladolid, Valladolid, 1994.
- [Caramello] CARAMELLO, Francisco C. «Introduction to orbifolds.», 2019. ArXiv:1909.08699.
- [Conway1] CONWAY, John H. «The orbifold notation for surface groups.» En *Groups, Combinatorics and Geometry* (Martin W. Liebeck, y JanEditors Saxl, eds.), Cambridge University Press, 1992, London Mathematical Society Lecture Note Series. 438–447.
- [Conway] CONWAY, John H., Heidi BURGIEL, y Chaim GOODMAN-STRAUSS. *The symmetries of things*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008.
- [Conway2] CONWAY, John H., Olaf DELGADO, Daniel H. HUSON, y William P. THURSTON. «On three-dimensional space groups.» *Beitr. Algebra Geom.*, 42, n^o 2, (2001), 475–507. URL <http://eudml.org/doc/233409>.
- [Delgado] DELGADO, Félix, Concha FUERTES, y Sebastián XAMBÓ. *Introducción al Álgebra*. Editorial Paraninfo, Madrid, 2021. Segunda edición.
- [Deo] DEO, Satya, y Kalathoor VARADARAJAN. «Discrete groups and discontinuous actions.» *Rocky Mountain J. Math.*, 27, n^o 2, (1997), 559–583. URL <https://doi.org/10.1216/rmjm/1181071925>.

- [Dijkstra] DIJKSTRA, Jan J. «On Homeomorphism Groups and the Compact-Open Topology.» *Amer. Math. Monthly*, 112, nº 10, (2005), 910–912. URL <https://doi.org/10.2307/30037630>.
- [Doyle] DOYLE, P. H., y Daniel A. MORAN. «A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated.» *Invent. Math.*, 5, nº 2, (1968), 160–162. URL <https://doi.org/10.1007/BF01425546>.
- [Dress] DRESS, Andreas. «Newman’s theorems on transformation groups.» *Topology*, 8, nº 2, (1969), 203–207. URL [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(69\)90010-X](https://doi.org/10.1016/0040-9383(69)90010-X).
- [Dugundji] DUGUNDJI, James. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1966.
- [Gagern] VON GAGERN, Martin. «Morenaments: Ornament drawing applet using crystallographic groups.», 2011. TU München, URL <https://www.imaginary.org/es/program/morenaments>.
- [Hyde] HYDE, Stephen T., Stuart J. RAMSDEN, y Vanessa ROBINS. «Unification and classification of two-dimensional crystalline patterns using orbifolds.» *Acta Crystallogr. A: Found. Adv.*, 70, (2014), 319–337. URL <https://doi.org/10.1107/S205327331400549X>.
- [Kinsey] KINSEY, L. Christine. *Topology of surfaces*. Springer New York, NY, 1993.
- [Lerman] LERMAN, Eugene. «Orbifolds as stacks?» *Enseign. Math.*, 56, nº 3-4, (2008), 315–363. URL <https://doi.org/10.4171/LEM/56-3-4>.
- [Moerdijk] MOERDIJK, Ieke. «Orbifolds as groupoids: an introduction.» En *Orbifolds in mathematics and physics*. (Madison, WI, 2001), 2002, Contemp. Math., 310, AMS, 205–222.
- [Montesinos] MONTESINOS, José M. «Grupos cristalográficos y Topología en Escher.» *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. (Esp)*, 104, nº 1, (2010), 27–47.
- [Munkres] MUNKRES, James R. *Topology*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. Segunda edición.

- [Ratcliffe] RATCLIFFE, John G. *Foundations of hyperbolic manifolds*, tomo 149 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, 2019. Tercera edición.
- [Satake] SATAKE, Ichirō. «On a generalization of the notion of manifold.» *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 42, n^o 6, (1956), 359–363. URL <https://doi.org/10.1073/pnas.42.6.359>.
- [Scott] SCOTT, Peter. «The geometries of 3-manifolds.» *Bull. London Math. Soc.*, 15, n^o 5, (1983), 401–487. URL <https://doi.org/10.1112/blms/15.5.401>.
- [Thurston1] THURSTON, William P. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton University, Princeton, NJ, 1979. Notas de conferencia, URL <http://library.msri.org/books/gt3m/>.
- [Thurston2] —. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, tomo 35 de *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [Zeller] ZELLER, Rüdiger, Olaf DELGADO-FRIEDRICHS, y Daniel H. HUSON. «Tegula – exploring a galaxy of two-dimensional periodic tilings.» *Comput. Aided Geom. Design*, 90, (2021), 102027. URL <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2021.102027>.

Índice de figuras

2.1. El toro como cociente $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$	32
2.2. La botella de Klein como cociente \mathbb{E}^2/G	33
2.3. Mesa de billar.	39
2.4. Funda de almohada.	40
2.5. El toro cubre con 2 hojas la botella de Klein.	49
3.1. \circ	68
3.2. $*2222$	69
3.3. $*236$	69
3.4. $*244$	70
3.5. $*333$	70
3.6. 2222	72
3.7. 236	73
3.8. 244	74
3.9. 333	75
3.10. 22^*	76
3.11. $2 * 22$	76
3.12. $3 * 3$	76
3.13. $4 * 2$	77
3.14. $**$	78
3.15. $*\times$	78
3.16. $\times\times$	79
3.17. $22\times$	80
4.1. Tres sólidos platónicos.	88
4.2. Los subgrupos directos de los anteriores.	88
4.3. Tres tipos de simetría cíclica.	89
4.4. Tres tipos de simetría diédrica.	89
4.5. Los dos tipos de simetría restantes.	90

Índice de tablas

3.1. Tabla de costes.	61
3.2. Los 17 posibles orbifolds parabólicos.	63
3.3. Los 17 grupos cristalográficos.	81
4.1. Los 14 tipos de orbifold esférico.	85
4.2. Los 32 grupos puntuales cristalográficos del espacio.	90
4.3. Los grupos finitos de $O(3)$, donde $n \geq 2$	91
4.4. Los 7 grupos de frisos.	93