Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Grado en matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

La paradoja de San Petersburgo

AUTOR:
Juan Chaguaceda Lasa

TUTOR:
Carlos Matrán Bea

Diciembre 2022

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La paradoja de San Petesburgo aparece por primera vez en una carta de Nicolas Bernoulli, matemático suizo de la conocida familia Bernoulli, al matemático francés Pierre Rémond de Montmort el 9 de septiembre de 1713. En palabras de Bernoulli, la paradoja de San Petersburgo dice lo siguiente:

Pedro tira una moneda al aire tantas veces como sea necesario para sacar cara. Si esto ocurre en la primera tirada, tiene que dar a Pablo un ducado; si en la segunda 2; si en la tercera 4; si en la cuarta, 8, y así sucesivamente, duplicando el número de ducados a cada jugada que es necesario efectuar. ¿Cuál es la esperanza de ganar correspondiente a Pablo? En otras palabras, ¿cuál es el precio justo que Pablo debe pagar por este juego?

De acuerdo con la teoría clásica, la idea de esperanza de ganancia en un juego se corresponde matemáticamente con lo siguiente:

$$E(X) = \sum_{i \in I} i \ P(X = i) \tag{1.1}$$

Donde I es el conjunto de los posibles resultados del juego y P la función que asigna la probabilidad de dichos resultados. En nuestro caso,

$$I = \{1, 2, 4, 8, 16, ...\}$$

los ducados que recibe Pablo si la cara se produce en la i-ésima tirada, y

$$P(X = 2^i) = 2^{-i}$$

la probabilidad de obtener i-1 cruces, seguidas de una cara.
Por lo tanto,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Esto sugiere lo siguiente: La ganancia esperada por Pablo es infinita, o lo que es lo mismo, Pablo debería estar dispuesto a pagar cualquier precio por jugar al juego de San Petersburgo,

por alto que fuera ese precio. Y aquí aparece la paradoja descrita por Bernoulli:
"Aunque los cálculos estándar muestran que el valor esperado por Pablo es infinitamente grande, He de admitir que... cualquier hombre razonable vendería su suerte, de buena gana, por 20 ducados. " [Bernoulli D. 1954],
En este trabajo realizamos un recorrido histórico y crítico de las soluciones del problema desde su publicación hasta la actualidad. Partiendo de las soluciones originales a la Paradoja de San Petersburgo, realizadas por Gabriel Cramer y Daniel Bernoulli. Los estudios de este último se consideran el origen de la **Teoría de la utilidad esperada**, campo muy prolífico de la economía al que también dedicaremos un capítulo. Una vez establecida la teoría de la probabilidad moderna, introducida por Kolmogorov en 1933, William Feller [Feller W. 1945] en 1945 da a la Paradoja de San Petersburgo un tratamiento contemporáneo al problema. El análisis de Feller supone el punto de partida del estudio de la Paradoja de San Petersburgo de todos los matemáticos posteriores a él. Feller pone el foco en el comportamiento asintótico de los juegos de San Petersburgo, es decir, ya no se analiza un solo juego de San Petersburgo, si no una cantidad grande de juegos consecutivos. Años después, en 1949, Hugo Steinhaus parte de lo propuesto por Feller desde un punto de vista estadístico, más que probabilístico. Frente a una cuota de entrada para el juego constante, Steinhaus [Steinhaus H. 1949] propone una sucesión de cuotas variables, la **sucesión de Steinhaus**. Tanto Feller como Steinhaus dan propuestas de cuotas de entrada razonables, pero no del todo satisfactorias, como veremos. No es hasta el trabajo presentado por Martin-Löf [Martin-Löf A. 1985] que aparece una expresión explícita de las ganancias del juego de San Petersburgo. A partir de esta, podemos dar una cuota de entrada que, con fiabilidad arbitraria, cubra los premios. Esta era la pregunta original de Bernoulli: por cuánto se debe vender la suerte de jugar al juego de San Petersburgo.

Capítulo 2

Primeras aportaciones

2.1. Nicolas Bernoulli

Por comodidad, y en la línea de los matemáticos clásicos, duplicaremos el pago del juego de San Petersburgo: si la primera cara se da en la primera tirada, Pablo obtendrá 2 ducados, si ocurre en la segunda 4, etcétera.
La primera solución, propuesta por Bernoulli, consiste en despreciar las probabilidades "pequeñas ". Supongamos que despreciamos las probabilidades menores que $\frac{1}{2^N}$ y sea X la variable aleatoria que denota el pago de un juego de San Petersburgo, con una particularidad: el juego termina si no se obtiene una cara después de la N-ésima tirada, con un pago de 0 ducados.

$$P(X = 2^k) = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{si} \quad k \leq N \\ 0 & \text{si} \quad k > N \end{cases} \tag{2.1}$$

Volviendo a 1.1,

$$E(X) = \sum_{i \in I} i \; P(X = i) = \sum_{k=1}^{N} \frac{2^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{N} 1 = N$$

Y entonces la esperanza es finita y hay un precio justo por el juego de San Petersburgo: N.

Esta solución tiene dos desventajas:
1. El umbral a partir del cuál se desprecian las probabilidades es subjetivo y completamente arbitrario,
2. Pese a ser probabilidades muy pequeñas, implican pagos muy altos, y por lo tanto ejercen influencia en el juego, sobre todo cuando se aumenta el número de juegos.

Podemos comprobar esto de forma muy sencilla mediante simulaciones con el ordenador, en este caso realizado con el programa de estadística R. Elegimos un número de lanzamientos arbitrario, digamos, K = 10. Esto significa que ignoraremos todo juego en el que se obtengan 10 caras seguidas o más, otorgándole un premio de 0. Afrontando el problema de una forma "humana": lanzamos una moneda, es decir, tomamos una muestra entre dos posibles valores. Si sale cara, "1", continuamos, y si es cruz,"0", el juego acaba. Puesto que no permitimos que

el número de caras exceda K, simplemente comprobamos cuando aparece una cruz antes de K lanzamientos en un bucle. Esta es una forma ingenua pero intuitiva de llevar a cabo la simulación del juego de San Petersburgo, aunque muy poco eficiente.
Un solo juego de San Petersburgo no sirve para sacar conclusiones relevantes, hagamos, por ejemplo, 10000:

```
    # Fijamos el numero de caras maximas
N = 10;
# Fijamos el numero de partidas
k = 10^5;
 # Inicializamos un vector donde vamos guardando el premio de cada tirada
 premio <- c();
 for (j in 1:k) {
for (i in 1:N) { # Tiramos como maximo N monedas
    # Si aparece la cruz otorgamos el premio y paramos
  if(sample(c(0,1),1) == 0) {premio <- c(premio,2^i); break}
}
}
summary(premio)
```

```
   Min.  1st Qu.   Median     Mean  3rd Qu.     Max.
  2.000    2.000    2.000    9.755    4.000 1024.000
```

Summary nos da un resumen sobre los resultados obtenidos en estos 10000 experimentos. El mínimo y valor mediano es 2, como era de esperar: el juego de San Petersburgo acaba la mitad de las veces en la primera tirada, cuando esta es una cruz. La media ha sido 9,755; cercana a la esperanza (10) del juego de San Petersburgo finito que hemos planteado.Además, el máximo premio ha sido el máximo admitido: $1024 = 2^{10}$. Finalmente el tiempo de computación en este caso ha sido de 13,72s. No es excesivamente elevado pero es considerable dada la relativamente pequeña de cantidad de juegos que hemos realizado.

Podemos mejorar esto: puesto que conocemos todos los posibles resultados y sus probabilidades (2.1). El programa informático de estadística R nos permite tomar una muestra aleatoria entre todos los posibles premios con sus correspondientes probabilidades, y de esta forma tomamos una única muestra:

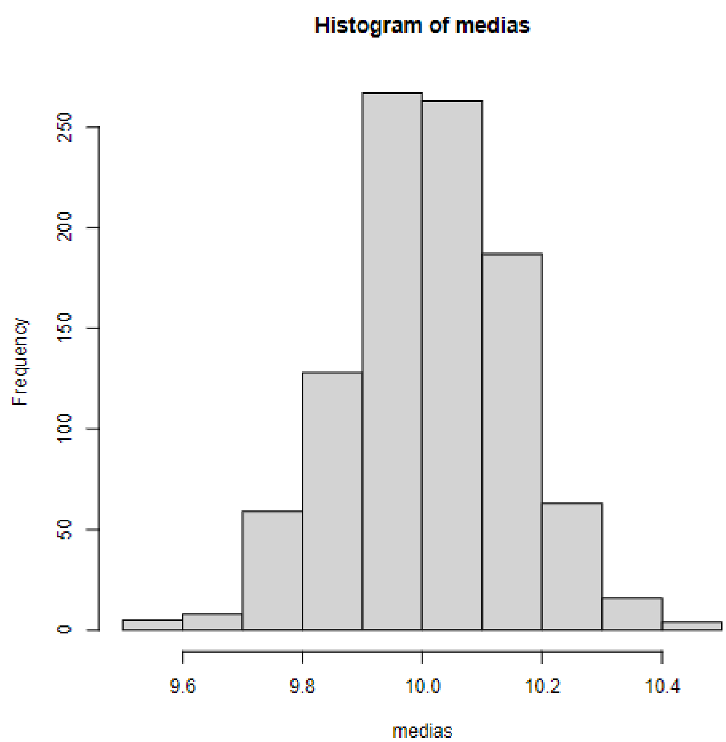
```
    #Elegimos el numero de caras maximas y el numero de partidas que queremos
    jugar
finite_st.petersburg <- function(caras_maximas,numero_de_partidas) {
#los posibles premios son tantos como caras maximas permitidas
  pagos <- c(2^(seq(1:caras_maximas)))
#fijamos las probabilidades
  probabilidades <-c(1/pagos)
#tomamos una muestra con reemplazamiento con tamano el numero de partida
    deseadas
 resultado <-sample(pagos,numero_de_partidas,replace = TRUE, prob =
    probabilidades)
resultado;
}
```

Por ejemplo, si fijamos el número de caras máximas en 10 y queremos hacer 10.000 juegos de San Petersburgo:

```
    x <-finite_st.petersburg(10,100000)
summary(x)
```

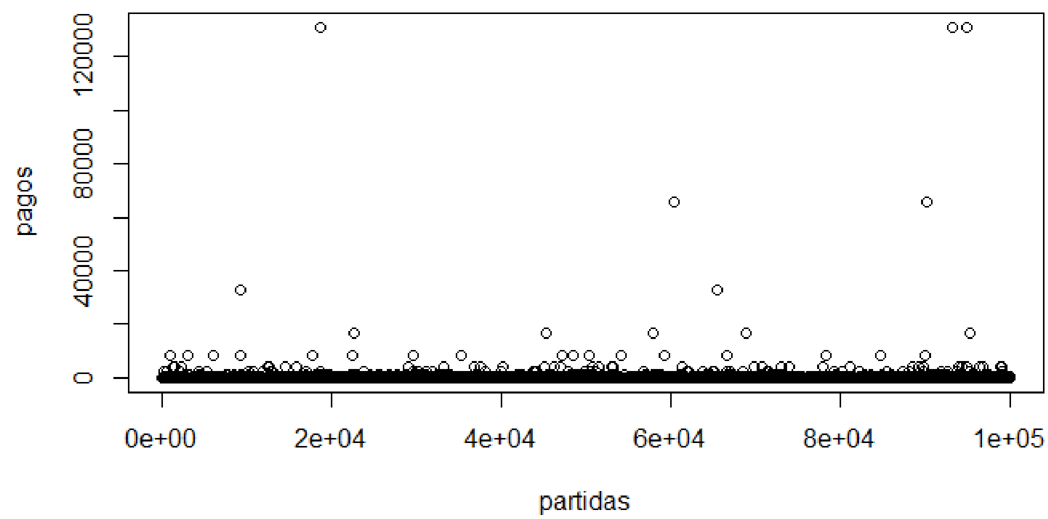
En este caso la media sale mayor, 10,14; pero en torno al valor esperado 10. Lo que difiere entre un método y otro es el tiempo de computación, en este caso prácticamente instantáneo, incluso habiendo hecho 10 veces más juegos. Este inciso quiere poner en relieve que, pese a haber muchas formas de realizar un juego de San Petersburgo, conviene realizarlo de la forma más optimizada posible: para sacar conclusiones sobre el comportamiento de este a largo plazo es necesario realizar muchos ensayos. Veamos como se ajustan los experimentos a los resultados teóricos sobre la esperanza del juego finito de San Petersburgo. Para ello, realizamos 100 ensayos en los que en cada uno, jugamos al juego de San Petersburgo finito 10^5 veces.

```
#Realizamos 1000 experimentos
x <- replicate(1e+03,finite_st.petersburg(10,1e+05))
medias <- colMeans(x)
hist(medias)
```



Como vemos, el premio medio se concentra en un intervalo relativamente pequeño en torno al 10, la esperanza.
Igual que observamos la virtud de tener una esperanza finita, podemos ver sus limitaciones.

Realizando experimentos de verdaderos Juegos de San Petersburgo, es decir, sin poner un límite de caras seguidas, podemos observar que esos eventos "raros" (obtener más de 10 caras seguidas) ocurren con cierta frecuencia al realizar una cantidad grande de partidas:



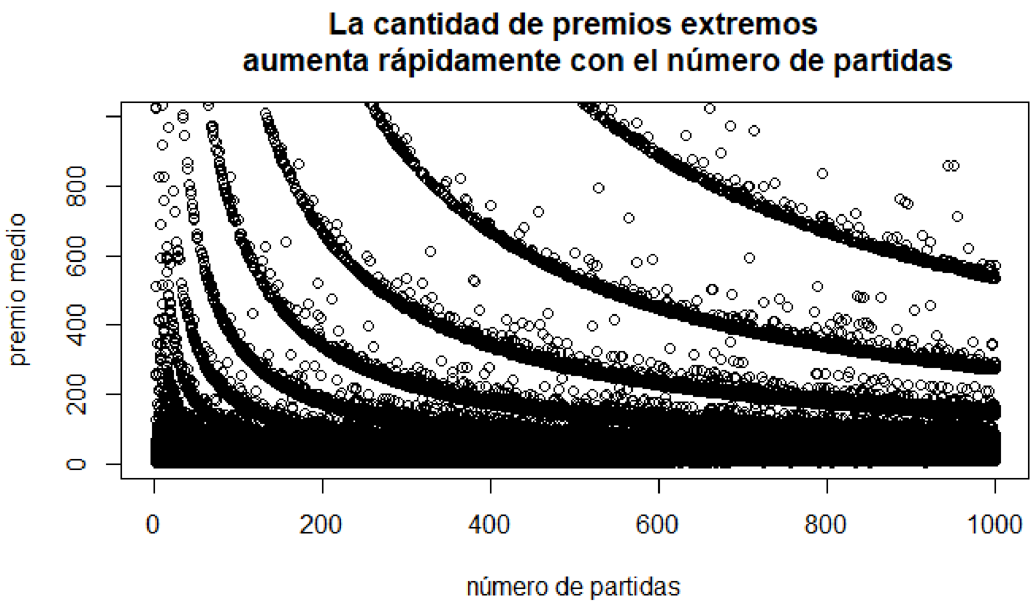
Como se ve en el gráfico, la mayoría de los pagos son pequeños, pero hay resultados que destacan por su tamaño del resto (los mayores ni siquiera aparecen por escala en el gráfico). Hay 116 resultados por encima de nuestro umbral de 10 caras seguidas. Esta cantidad relativamente pequeña de sucesos frente al total, contribuyen enormemente a la media. La media, en este caso, es de 20,69 euros de premio por partida. Es decir, 116 partidas de las 100.000 realizadas hacen que el premio medio pase del valor esperado de 10 en el juego de San Petersburgo finito, a, en esta simulación, un premio medio de 20,69. Lógicamente, la esperanza del Juego de San Petersburgo sigue siendo infinita; pero la media experimental siempre será finita.

Un solo ejemplo no tiene la rigurosidad suficiente como para sostener nuestra afirmación, pero realizando múltiples veces este experimento podemos ver ciertas tendencias.

El gráfico a continuación se ha generado de la siguiente forma:

- Para cada número de partidas,de 1 a 1000, hemos realizado 1000 series de juegos de San Petersburgo.
- En las primeras 1000 series se realiza una única partida. En las siguientes 1000 se realizan dos partidas. Sucesivamente, las 1000 últimas contienen 1000 partidas por serie.
- Para cada serie de juegos, obtenemos un único dato, el premio medio.

- En el gráfico aparecen las parejas número de partidas-premio medio



Podemos extraer conclusiones de los datos directamente. Lo primero que se hace patente es la arbitrariedad con la que hemos elegido qué son las probabilidades pequeñas. Cuando rechazábamos todas las tiradas con diez caras seguidas o más (con probabilidad 2^{-10}) el premio medio siempre se mantenía en torno a la esperanza, 10. Lo que podemos ver en el gráfico es que si no tomamos esa restricción, según aumenta el número de partidas, los premios medios que obtenemos se disparan sin ningún control (el máximo premio medio obtenido en este pequeño experimento es de 3633654). El umbral que hemos elegido es grande aparentemente: una secuencia de 10 caras seguidas no parece muy probable pero podríamos convencer a cualquier persona razonable que este suceso podría darse repitiendo suficientes experimentos. Si aumentáramos este número a 100, o, a 1000 es indiferente: con una cantidad suficiente de partidas obtendríamos una cantidad grande de premios medios muy por encima de 100 o 1000, respectivamente.

2.2. Cramer

De la misma forma que podemos "cortar" por las probabilidades que consideramos como pequeñas, podemos acotar superiormente los premios, argumentando que existe una cantidad tan grande de dinero que toda cantidad por encima es irrelevante. Por ejemplo, según las estimaciones del Fondo Monetario Internacional, el valor monetario de todos los bienes y servicios producidos en el mundo es de 94 billones de dólares estadounidenses, ¿Qué significado tiene una cantidad superior? Cramer da su solución en una carta a Nicolas Bernoulli el 21 de Mayo de 1728. Para solucionar la paradoja, Cramer aplica un concepto que más tarde será reconocido

como utilidad:
"Los matemáticos valoran el dinero en proporción a su cantidad, mientras que las personas razonables lo valoran en proporción a su uso."
Cramer defiende que cualquier pago superior a cierta gran cantidad de dinero fija, 2^K, tiene el mismo uso que K. Sea X la variable aleatoria que denota el pago de un juego de San Petersburgo pero con la condición de Cramer:

$$P(X = 2^k) = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{si} \quad k < N \\ \sum_{n=2^K}^{\infty} \frac{1}{2^n} & \text{si} \quad k = K \\ 0 & \text{si} \quad k > K \end{cases}$$

donde $\sum_{n=2^K}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es igual a $\frac{1}{2^{K-1}}$

Calculamos la esperanza,

$$E(X) = \sum_{i \in I} i \ P(X = i) = \sum_{n=1}^{K-1} 2^n \frac{1}{2^n} + \sum_{n=K}^{\infty} \frac{2^K}{2^n} = \sum_{n=1}^{K-1} 1 + \frac{2^K}{2^{K-1}} = K - 1 + 2 = K + 1$$

Y de nuevo la esperanza es finita. Las desventajas de la solución son análogas a las de la solución de Bernoulli:

1. De nuevo, el umbral es subjetivo y arbitrario.
2. Pese a tener probabilidades pequeñas, cuando se amplía el número de juegos, no tener en consideración la posibilidad de que la banca tenga que hacer frente a grandes pagos puede llevar a la "ruina".

Ruina, en el sentido de que los pagos, a la larga, excedan el total de lo recaudado con el precio de entrada exigido, K+1.
De todos modos, existe un problema mayor de fondo: cambiar, de una forma o de otra, el juego de San Petersburgo y obtener una solución para el precio de entrada, no resuelve la paradoja.

Capítulo 3

William Feller. Ley Débil de los Grandes Números

Hasta ahora hemos visto soluciones rudimentarias de la paradoja de San Petersburgo, donde modificaciones del juego de San Petersburgo permiten dar valores a la esperanza. El trabajo de Feller [Feller W. 1945] en 1945 lleva el estudio de la Paradoja de San Petersburgo a la madurez. Feller aplica en la paradoja de San Petersburgo una Ley Débil de los Grandes Números generalizada.

La Ley Débil de los Grandes Números se puede expresar de la siguiente forma:

Teorema 1. *Ley Débil de los Grandes Números*

Supongamos que tenemos $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d) con esperanza común $EX_1 = \xi < \infty$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left\{\left|\bar{X}_n - \xi\right| < \varepsilon\right\} \to 1, \; \textit{cuando } n \to \infty$$

donde $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

El límite anterior también se puede escribir como

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$$

Es decir, que $\bar{X}_n$ converge en probabilidad a ξ.

Feller enmarca la paradoja de San Petersburgo en lo que llama “Teoría de los Juegos Justos” en el contexto de la Ley de los Grandes Números (SLLN) y sus implicaciones. No interesa el estado probable del juego en un momento dado, sino solamente las mayores fluctuaciones que ocurrirán probablemente a largo plazo. Se interpretará la variable aleatoria X_k como la ganancia (o pérdida en caso de ser negativa) en el k-ésimo ensayo de un mismo juego. La suma $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ es la ganancia acumulada en n ensayos diferentes.

Si el jugador paga su cuota de entrada, μ' en cada ensayo, entonces nμ' representa el precio acumulado, y $S_n - n\mu'$ es la ganancia neta acumulada. La Ley de los Grandes Números nos dice que, en caso de existir $E(X_k) = \mu$, para n suficientemente grande, la diferencia $S_n - n\mu$ es

probablemente pequeña respecto a n. Por lo tanto si la cuota de entrada μ' es más pequeña que μ, entonces, para n grande es probable que el jugador tenga una ganancia positiva de magnitud $n(\mu - \mu')$. Por la misma razón $\mu' > \mu$ probablemente nos conduzca a pérdidas.
En el caso $\mu = \mu'$ debemos concluir que, para n suficientemente grande, la probabilidad de que $S_n - n\mu'$ sea pequeño en comparación con n es abrumadora. En la teoría clásica, se decía que $\mu' = \mu$ es un precio justo.
Feller asegura que es posible determinar las cuotas de entrada en las cuales el juego de San Petersburgo de tal forma que tenga todas las propiedades de un juego «justo» en el sentido clásico. Dichas cuotas dependerán del número de juegos consecutivos que se vayan a realizar, en vez de permanecer constantes. Las cuotas variables pueden resultar extrañas incluso imposibles en un casino, pero también lo es el juego de San Petersburgo, debido a la limitación de los recursos.

Definición 1. *Diremos que un juego con cuotas de entrada acumuladas e_n es justo en el sentido clásico, si,* $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{e_n} - 1\right| > \epsilon\right\} \to 0$$

Teorema 2. *El juego de San Petersburgo se convierte en "justo" para $e_n = n \operatorname{Log} n$, donde* $\operatorname{Log} n$ *es el logaritmo en base 2.*

Demostración. Definimos las variables U_k y V_k (k= 1,2,...,n) como

$$\begin{array}{lll} U_k = U_k & V_k = 0 & \text{si } X_k \leq n \operatorname{Log} n; \\ U_k = 0 & V_k = X_k & \text{si } X_k > n \operatorname{Log} n. \end{array}$$

Entonces

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mathbf{S}_n}{e_n} - 1\right| > \epsilon\right\} \leq \mathbf{P}\left\{|\mathbf{U}_1 + ... + \mathbf{U}_n - e_n| > \epsilon \cdot e_n\right\} + \mathbf{P}\left\{\mathbf{V}_1 + ... + \mathbf{V}_n \neq 0\right\}$$

ya que el evento de la izquierda no ocurre a menos que se realice uno de los eventos del miembro derecho. Ahora bien,

$$\mathbf{P}\left\{\mathbf{V}_1 + ... + \mathbf{V}_n \neq 0\right\} \leq n\mathbf{P}\left\{X_1 > n \operatorname{Log} n\right\} \leq \frac{2}{\operatorname{Log} n} \to 0$$

Por lo tanto basta ver que

$$\mathbf{P}\left\{|\mathbf{U}_1 + \cdots + \mathbf{U}_n - n \operatorname{Log} n| > \epsilon n \operatorname{Log} n\right\} \to 0$$

Denotemos por $\mu_n = E(U_k)$ y con $\sigma_n^2 = Var(U_k)$ que dependen de n, pero son iguales para cada $k \leq n$. Si r es el mayor entero tal que $2^r \leq n \operatorname{Log} n$, entonces $\mu_n = r$ y, por lo tanto, para n suficientemente grande, se tiene que

$$\operatorname{Log} n < \mu_n \leq \operatorname{Log} n + \operatorname{Log} \operatorname{Log} n$$

Del mismo modo,

$$\sigma_n^2 < E(U_k^2) = 2 + 2^2 + ... + 2^r < 2^{r+1} \leq 2n \operatorname{Log} n$$

Puesto que la suma $U_1 + ... + U_n$ tiene media $n\mu_n$ y varianza σ_n^2, por la desigualdad de Chebyshev,

$$\mathbf{P}\left\{|\mathbf{U}_1 + \cdots + \mathbf{U}_n - n \operatorname{Log} n| > \epsilon n \operatorname{Log} n\right\} \leq \frac{n\sigma_n^2}{\varepsilon^2 n^2 \mu_n^2} < \frac{2}{\varepsilon^2 \operatorname{Log} n} \to 0$$

□

De nuevo, lo único que se afirma es que, fijado un número de juegos de San Petersburgo ininterrumpibles,n, con cuota de entrada $n \operatorname{Log} n$, la razón entre S_n y e_n es aproximadamente 1 (es decir, que la diferencia $S_n - e_n$ es probablemente más pequeña en magnitud que e_n). No se puede asegurar nada sobre la "justicia" en el sentido intuitivo de la palabra.

En las aplicaciones al juego y en otras situaciones simples, donde X_k tienen esperanza y varianza finita resulta explicable la idea de "justicia", pero cuando la varianza es infinita la expresión "juego justo" es simplemente incorrecta. No hay razón para creer que la ganancia neta acumulada $S_n - n\mu$ varíe alrededor de 0. De hecho, existe la posibilidad de que un juego "justo" sea claramente desfavorable al jugador.

Veamos esto en un ejemplo:
Sea X la variable aleatoria que representa el resultado de este juego, tal que:

$$\mathbf{P}\{X = 2^k\} = p_k, \qquad \text{con} \quad p_k = \frac{1}{2^k k(k+1)}$$

y $p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k$. Podemos ver que la esperanza es finita:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k p_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... = 1$$

Queremos ver que, $\forall \epsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{S_n - n < \frac{(1-\epsilon)n}{\operatorname{Log} n}\right\} \to 1 \tag{3.1}$$

donde $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
Es decir, que las pérdidas exceden $n \operatorname{Log} n$ con probabilidad 1 cuando el número de partidas es grande. En adelante, $\operatorname{Log} n$ hace referencia al logaritmo en base 2 de n, es decir, que $2^{\operatorname{Log} n} = n$. Utilizamos el siguiente truncamiento de las variables aleatorias X_k para $k = 1, 2, ..., n$:

$$U_k = X_k \quad , \qquad V_k = 0 \qquad \text{si} \qquad X_k \leq \frac{n}{\operatorname{Log} n}$$

$$U_k = 0 \quad , \qquad V_k = X_k \qquad \text{si} \qquad X_k > \frac{n}{\operatorname{Log} n}$$

En términos de las variables U_k y V_k, puesto que un suceso no se da si se da el otro, la probabilidad contemplada en 3.1 es

$$\mathbf{P}\left\{S_n - n < \frac{(1-\epsilon)n}{\operatorname{Log} n}\right\} = \mathbf{P}\left\{U_1 + U_2 + ... + U_n - n < \frac{(1-\epsilon)n}{\operatorname{Log} n}\right\} + \mathbf{P}\left\{V_1 + V_2 + ... + V_n \neq 0\right\} \tag{3.2}$$

Veamos que el segundo término tiende hacia 0 cuando n tiende a infinito:

$$\mathbf{P}\left\{V_1+V_2+...+V_n\neq 0\right\}\leq n\cdot\mathbf{P}\left\{X_1>\frac{n}{\operatorname{Log} n}\right\}$$

$$n\cdot\mathbf{P}\left\{X_1>\frac{n}{\operatorname{Log} n}\right\}=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{n}{2^k(k(k+1))}$$

Por la distribución de la variable aleatoria X_1,
donde

$$r=\left\lceil \operatorname{Log}(\frac{n}{\operatorname{Log} n})\right\rceil$$

De la definición de r se deduce además que $r\geq \operatorname{Log}(\frac{n}{\operatorname{Log} n})*$ y además que $2^r\geq\frac{n}{\operatorname{Log} n}**$.

Llamemos ahora $\alpha=k-r$. Para cada término de la serie, se tiene lo siguiente:

$$\frac{n}{2^{r+\alpha}(r+\alpha)(r+\alpha+1)}=\frac{n}{2^r}\cdot\frac{1}{2^\alpha(r+\alpha)(r+\alpha+1)}\leq^{**}$$

$$\leq\frac{\operatorname{Log} n}{2^\alpha(r+\alpha)(r+\alpha+1)}\leq\qquad \text{pues r + }\alpha\geq\text{ r}$$

$$\leq\frac{1}{r2^\alpha}\cdot\frac{\operatorname{Log} n}{r}\leq^{*}\frac{1}{r2^\alpha}\cdot\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}(\frac{n}{\operatorname{Log} n})}$$

Desarrollando el segundo factor

$$\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}(\frac{n}{\operatorname{Log} n})}=\frac{1}{\frac{\operatorname{Log}(\frac{n}{\operatorname{Log} n})}{\operatorname{Log} n}}=\frac{1}{\operatorname{Log}_{\mathrm{n}}(\frac{n}{\operatorname{Log} n})}=\frac{1}{1-\operatorname{Log}_{\mathrm{n}}\operatorname{Log} n}=\frac{1}{1-\frac{\operatorname{Log}\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} n}}$$

Ahora puesto que cuando $n\to\infty$, $\beta=\operatorname{Log} n\to\infty$ entonces $\operatorname{Log}\beta/\beta\to 0$ y por lo tanto existe un k_o tal que si $n\geq k_0$,

$$\frac{1}{1-\frac{\operatorname{Log}\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} n}}\leq 2$$

Por lo tanto podemos acotar

$$\frac{1}{r2^\alpha}\cdot\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}(\frac{n}{\operatorname{Log} n})}\leq\frac{2}{r2^\alpha}\qquad\text{si } n\geq k_0$$

Cuya serie es

$$\sum_{\alpha\geq 0}\frac{2}{r2^\alpha}=\frac{4}{r}\to 0$$

Puesto que $r\to\infty$ cuando $n\to\infty$.

Visto esto, es suficiente entonces ver que, $\forall \epsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left\{U_1 + U_2 + ... + U_n - nE(U_1) < \frac{\epsilon \cdot n}{\operatorname{Log} n}\right\} \to 0$$

La esperanza y varianza de las variables es igual para cada $k \leq n$, pero depende del número total n. Denotemos, para cada $n \geq 1$

$$\mu_n = E(U_k) \qquad 1 \leq k \leq n$$

$$\sigma_n^2 = Var(U_k) \qquad 1 \leq k \leq n$$

Puesto que $|U_1| \leq \frac{n}{\operatorname{Log} n}$,

$$\mu_n = E(U_1) = \sum_{k=1}^{\tau} 2^k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\tau} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{\tau + 1}$$

Donde τ es el menor entero tal que $2^{\tau+1} > \frac{n}{\operatorname{Log} n}$
Se da la desigualdad

$$1 - \frac{1+\epsilon}{\operatorname{Log} n} \leq \mu_n \leq 1 - \frac{1}{\operatorname{Log} n}$$

De la misma forma

$$\sigma_n^2 \leq E(U_k^2) = \sum_{k=1}^{\tau} (2^k)^2 \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\tau} \frac{2^{2k}}{2^k(k(k+1))} = \sum_{k=1}^{\tau} \frac{2^k}{(k(k+1))} \leq \sum_{k=1}^{\tau} 2^k = 2(2^{\tau+1} - 1) =$$

$$= 4(2^{\tau}) - 2 < 4\frac{n}{\operatorname{Log} n} - 2$$

Puesto que τ es el menor entero tal que $2^{\tau+1} > \frac{n}{\operatorname{Log} n}$, $2^{\tau} < \frac{n}{\operatorname{Log} n}$.
Por lo tanto, por la desigualdad de Chebyshev:

$$\mathbf{P}\left\{U_1 + U_2 + ... + U_n - nE(U_1) \geq \frac{(1-\epsilon) \cdot n}{\operatorname{Log} n}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{\sigma_n^2}{\frac{(1-\epsilon)^2 n^2}{\operatorname{Log}^2 n}} = \left(4\frac{n}{\operatorname{Log} n} - 2\right) \frac{\operatorname{Log}^2 n}{(1-\epsilon)^2 n^2} \to 0$$

Cuando $n \to \infty$, para todo $\epsilon > 0$. Esto es lo mismo que decir que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left\{U_1 + U_2 + ... + U_n - nE(U_1) < \frac{(1-\epsilon) \cdot n}{\operatorname{Log} n}\right\} \to 1$$

Como queríamos ver.

En este ejemplo el jugador tiene la seguridad de que a la larga su pérdida excederá $n/\operatorname{Log} n$, pero sin embargo se trata de un juego “justo”.

Visto esto, podemos ilustrar mediante simulaciones en el programa de estadística R como se comporta el juego de San Petersburgo bajo las cuotas de Feller. Realizamos 10000 experimentos de San Petersburgo para cada n=10,100,1000. Es decir, cada experimento consiste en jugar n juegos de San Petersburgo consecutivos pagando una cuota total de $n \operatorname{Log} n$.

```r
N <- c(10^(seq(1:3))) #Muestras de 10,100 y 1000 juegos
premios <- c()
# Realizamos 10000 experimentos de cada tipo
for(i in N){ muestra<- replicate(10000,st.petersburg(i))
premios <- cbind(premios,colSums(muestra))
}
summary(premios2)
```

La cantidad de datos que obtenemos es grande, pero podemos sacar algunas conclusiones con un breve resumen:

```
> summary(premios)
       V1                   V2                    V3
 Min.   :  -13.22    Min.   :   -274.4    Min.   :  -3476
 1st Qu.:    6.78    1st Qu.:     39.6    1st Qu.:    352
 Median :   24.78    Median :    251.6    Median :   2592
 Mean   :  121.33    Mean   :   1448.8    Mean   :  12650
 3rd Qu.:   64.78    3rd Qu.:    661.6    3rd Qu.:   7172
 Max.   :66076.78    Max.   :1050455.6    Max.   :8390012
```

Por filas, vemos el mínimo premio obtenido, el primer cuartil, el premio mediano, la media, el tercer cuartil y el premio máximo obtenido en 10000 simulaciones. Por columnas, los resultados para n=10,100,1000. Si el resultado es positivo, el jugador ha reportado beneficios; si el resultado es negativo, el jugador tuvo perdidas. Lo primero que podemos observar es que el premio medio es positivo, es decir, que de media, los jugadores ganan dinero. Examinando los datos, de los 10000 experimentos realizados para cada n=10,100,1000; 8809,8014,7928 de los premios fueron positivos, respectivamente.

Basándonos en lo obtenido mediante simulación, la cuota de entrada total de $n \operatorname{Log} n$ parece insuficiente. Como podemos ver, para cada n, los premios medios están por encima del doble del precio pagado $10 \cdot \operatorname{Log} 10, 100 \cdot \operatorname{Log} 100, 1000 \cdot \operatorname{Log} 1000$ para n=10,100,1000 respectivamente. Csörgo y Simons prueban que la suma de n ensayos de San Petersburgo, S_n se comportan asintóticamente como $n \operatorname{Log} n$ si se eliminan los premios más altos [S. Csörgo G. Simons 1996]. Este es el caso: las cuotas de entrada no son suficientes porque los eventos raros son suficientemente probables, reportando premios muy altos que sobrepasan la cuota de entrada total.

En resumen, Feller prueba una suerte de WLLN para el juego de San Petersburgo, sugiriendo que el precio justo para jugar n juegos debe ser del orden de $n \operatorname{Log} n$. Posteriormente se desarrollan mejoras sobre los resultados de Feller: en 1961, Y. S. Chow y Herbert Robbins [Chow Y. S. y Robbins H. 1961] demuestran que la **convergencia casi seguro** no se sostiene, es decir que:

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \operatorname{Log} n} = 1 \right) = 0$$

Si el juego tiene esperanza finita, la razón de las ganancias y las cuotas de entrada si converge casi seguro. Si la esperanza de una variable aleatoria Y que representa los premios otorgados en un juego de azar y además $E(Y) = \mu$, con μ positiva y finita. Supongamos también que dicho juego de azar tiene una cuota de entrada fija μ para cada partida. La Ley Fuerte de los Grandes Números asegura que la razón de las ganancias acumuladas y las cuotas de entrada tiende a 1 casi seguro, es decir, que si $S_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ entonces

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\mu} = 1\right) = 1$$

Sin embargo esto no es cierto cuando E(X) $= \infty$.

Teorema 3. *Si $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ representa los premios obtenidos tras n juegos de San Petersburgo, entonces*

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \operatorname{Log} n} = 1\right) = 0$$

Demostración. Sea X una variable aleatoria que representa el pago de un juego de San Petersburgo entonces,

$$\mathbf{P}(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \sum_{k=0}^{\lfloor \operatorname{Log} a \rfloor} \frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{a} \text{ para a} \geq 1$$

Por lo tanto, para toda constante $c > 1$ y $n \geq 2$

$$\mathbf{P}(X > c(n \operatorname{Log} n) \geq \frac{1}{c(n \operatorname{Log} n)}$$

y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X > cn \operatorname{Log} n) = \infty$$

luego, por el lema de Borel-Cantelli:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n \operatorname{Log} n} > c \text{ ocurre infinitas veces }\right) = 1$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{P}\left(\limsup \frac{X}{n \operatorname{Log} n} = \infty\right) = 1$$

y

$$\mathbf{P}\left(\limsup \frac{S_n}{n \operatorname{Log} n} = \infty\right) = 1$$

Lo que implica

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \operatorname{Log} n} = 1\right) = 0$$

□

De hecho se puede ver más, pero excede los objetivos de este trabajo: no existe una sucesión de cuotas que sea justa en el sentido de Feller y que además cumpla la condición de convergencia casi seguro, si la esperanza del juego es infinita.

3.1. Distribución límite del juego de San Petersburgo

En esta sección afinaremos el resultado de Feller dando una distribución límite de la distribución

$$\frac{S_N - N \operatorname{Log} N}{N}$$

¿Es posible hacer la Ley de los Grandes Números de Feller más precisa, dando un teorema límite de S_n, análogo al teorema central del límite, que describa la distribución de S_n más precisamente, de tal forma que se pueda dar un precio de entrada que tenga con probabilidad cercana a 1, la propiedad de cubrir suficientemente la cantidad de S_n?
La respuesta es afirmativa y resulta sencilla [Martin-Löf A. 1985]:

Teorema 4. *Sea $N = 2^n$. Entonces*

$$\frac{S_N - N \operatorname{Log} N}{N} \to G(x) \qquad \textit{cuando } N \to \infty$$

cuya función característica viene dada por:

$$g(u) = \sum_{-\infty}^{0} (\exp(iu2^k) - 1 - iu2^k)2^{-k} + \sum_{1}^{\infty} (\exp(iu2^k) - 1)2^{-k}$$

También podemos ver en [Martin-Löf A. 1985] que

Teorema 5.

$$2^m \mathbf{P}\{S_N/N - n > 2^m + x\} \to 1 + \mathbf{P}\{S > x\} = 2 - G(x) \quad \textit{cuando } n,m \to \infty$$

Cuya conclusión inmediata es

$$\mathbf{P}\{S > 2^m + x\} \approx 2^{-m}(2 - G(x)) \quad \text{cuando m} \to \infty \tag{3.3}$$

Hemos llegado a una fórmula sencilla (asintótica) para las ganancias después de $N = 2^n$ partidas del juego de San Petersburgo. O lo que es lo mismo, una fórmula que le permite a Pedro, el banquero, determinar una cuota de entrada.
Una cuota de entrada de $2^m + n$ por partida tiene solo la pequeña probabilidad de $(1{,}8)2^{-m}$ de ser insuficiente para cubrir las ganancias S_n si se juegan $N = 2^n$ partidas.
Las implicaciones del análisis de Martin-Löf van más allá de haber dado una prima razonable para el juego de San Petersburgo. Este análisis se extiende fácilmente a problemas como por ejemplo, determinar primas de seguros con costes esperados infinitos.

Capítulo 4

Steinhaus. Precios de entrada variables

El punto central de la Paradoja de San Petersburgo es la no existencia de un número fijo, una esperanza finita, que represente la entrada "justa" para un *único* juego de San Petersburgo. Steinhaus, motivado por el estudio de Feller, intenta "resolver" esta paradoja, para una serie de partidas, probando que es posible aproximar "justamente" la sucesión de potenciales ganancias del jugador, Pablo, $X_1, X_2, ...$ por una sucesión de precios de entrada (variables) $x_1, x_2, ...$. Esta última la llamaremos **sucesión de Steinhaus**. La idea es claramente diferente de la de Feller. Las **Sumas de Steinhaus** $\mathbf{s}(n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$ son el equivalente determinista a las ganacias de Pablo $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ en una sucesión de juegos de San Petersburgo independientes. De esta forma, a la larga, se "compensarán" los premios obtenidos por Pablo con las cuotas de entrada.

4.1. La sucesión de Steinhaus

En la misma línea que Feller, Steinhaus concluye que no es posible determinar una cuota de entrada satisfactoria para un *único* juego de San Petersburgo que satisfaga a ambas partes, puesto que E(X) $= \infty$. Sin embargo, considerando una serie grande de juegos consecutivos, es posible dar ciertas propiedades límite de las ganancias, y entonces establecer una serie de precios de entrada "justos". Feller adopta el precio de $n \operatorname{Log} n$ para jugar n juegos de San Petersburgo, es decir, un precio medio de $c_n = \operatorname{Log} n$. El trabajo de Steinhaus es sucinto, de 60 líneas apenas. En [Csörgő S. y Simons G. 1993] Csörgo y Simmons exponen el trabajo original de Steinhaus explicando sus ideas y desarrollando sus implicaciones:
La **sucesión de Steinhaus** con la que trabajaremos comienza con una sucesión donde se alteran doses y espacios en blanco:

$$2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ 2 \_ ...$$

Rellenamos uno de cada dos espacios con un 4:

$$2\ 4\ 2 \_ 2\ 4\ 2 \_ 2\ 4\ 2 \_ 2\ 4\ 2 \_ 2\ 4\ 2 \_ 2\ 4\ 2 \_ 2\ 4\ 2 \_ 2\ 4\ 2 \_ 2\ 4\ 2 \_ 2\ 4\ 2 \_ ...$$

ahora, uno de cada dos espacios restantes con un 8:

2 4 2 8 2 4 2 _ 2 4 2 8 2 4 2 _ 2 4 2 8 2 4 2 _ 2 4 2 8 2 4 2 _ 2 4 2 8 2 4 2 _ ...

Y así sucesivamente con las potencias de 2. La sucesión resultante tiene doses con frecuencia $1/2$, cuatros con frecuencia $1/4$, y en general, que aparezca un 2^k tiene frecuencia 2^{-k}.
En el texto original de Steinhaus, las cantidades vienen divididas a la mitad, puesto que Bernoulli plantea el juego de San Petersburgo de tal forma que el pago es de 1 ducado, 2, ducados, 4 ducados, 8 ducados,etc. Hemos planteado, desde el primer momento, el juego de San Petersburgo como

$$\mathbb{P}(X = 2^k) = 2^{-k}$$

Podemos precisar más sobre la cantidad de veces que aparece cada número en la sucesión de Steinhaus,

$$\#\left\{1 \leq j \leq n; x_j = 2^k\right\} = \lfloor n/2^k + 1/2 \rfloor$$

Sea $< x >= x - \lfloor x \rfloor$. Entonces para las constantes:

$$\theta_{n,k} = 1 - 2 < (n + 2^{k-1})/2^k >, \; -1 < \theta_{n,k} \leq 1,$$

La proporción

$$\frac{\#\left\{1 \leq j \leq n; x_j = 2^k\right\}}{n} = \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{1}{2^k} + \frac{\theta_{n,k}}{2n},$$

que claramente converge a 2^{-k} cuando $n \to \infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Es decir, la potencia 2^k aparece en la sucesión de Steinhaus en una proporción de $1/2^k$ Mientras que Feller [Chow Y. S. y Robbins H. 1961] buscaba una ley "fuerte" que, como hemos visto, no es posible, Steinhaus buscaba algo análogo al teorema de Glivenko-Cantelli para las funciones de distribución empírica. Cuando se desconoce la función de distribución de una variable aleatoria, un método de aproximarla es a través de la función de distribución empírica.
Consideramos un espacio de probabilidad Ω del que podemos tomar muestras, a través de variables aleatorias. Es decir tenemos variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Fijado un ω de Ω, dejamos de tener variables aleatorias y tenemos una sucesión determinista:

$$X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega)$$

Definición 2. *La función de distribución empírica de las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ del espacio probabilístico Ω en $\mathbb{R}$ es la función de distribución $F_n(x, \omega)$ a trozos, con un salto de n^{-1} en cada $X_k(\omega)$:*

$$F_n(x, \omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{(-\infty,x]}(X_k(\omega)) \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } \omega \in \Omega \tag{4.1}$$

donde $I_{(-\infty,x]}(X_k(\omega))$ representa la función indicatriz:

$$I_{(-\infty,x]}(X_k(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X_k(w) \in (-\infty, x] \\ 0 & \text{si} \quad X_k(w) \notin (-\infty, x] \end{cases}$$

Teorema 6. *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes y con función de distribución común F. Si $D_n(\omega)$ es* ***el estadístico de Kolmogorov-Smirnov*** *definido como*

$$D_n(\omega) = \sup_x |F_n(x,\omega) - F(x)|$$

donde $F_n(x,\omega)$ es la función de distribución empírica de F, entonces $D_n \to 0$ con probabilidad 1

El teorema anterior establece la convergencia uniforme de la función de distribución empírica a la función de distribución de esta ley de probabilidad, para casi todo $\omega \in \Omega$.

Steinhaus fija un ω de tal forma que la distribución empírica es la siguiente:

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{n}\#\left\{1 \leq j \leq n; x_j = 2^k\right\}$$

la enésima función de distribución empírica de la sucesión de Steinhaus, para cada $x \geq 2$, vemos que converge a la función de distribución teórica del juego de San Petersburgo

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{F}_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \operatorname{Log} x \rfloor} \frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2}\right\rfloor = \sum_{k=1}^{\lfloor \operatorname{Log} x \rfloor} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{2})^{\lfloor \operatorname{Log} x \rfloor}}{1-(\frac{1}{2})} = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor \operatorname{Log} x \rfloor}}$$

Puesto que

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leq 2, \\ \\ 1 - 2^{-\lfloor \operatorname{Log} x \rfloor}, & \text{si} \quad x > 2, \end{cases}$$

es la distribución de un único juego de San Petersburgo, es inmediato

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\tilde{F}_n(x) - F(x)\right| \to 0 \qquad \text{cuando n} \to \infty$$

Esto es lo que describe, de manera informal, Steinhaus:

"Fijando x_n como la cuota de entrada de la partida enésima del juego de San Petersburgo podemos predecir con probabilidad 1 que la cantidad pagada a Pablo X_n tendrá una sucesión con la misma función de distribución como la sucesión $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ de cuota de entrada pagas de forma adelantada por Pablo. Tal igualdad justifica llamar al juego *justo* en un nuevo sentido de la palabra."

Como hemos visto, la idea de"juego justo" de Feller es engañosa: existen "juegos justos" que son asintóticamente desfavorables al jugador (la probabilidad de tener pérdidas converge hacia 1). Informalmente, la condición de Feller solo asegura que las pérdidas (o ganancias) no sean grandes en comparación con el número de juegos, no que no sean grandes en términos absolutos.

Con las cuotas variables de Steinhaus, puesto que la sucesión de Steinhaus se comporta como la función de distribución empírica del juego de San Petersburgo fijado un ω, veremos en la próxima sección cuánto se puede esperar ganar (o perder).

Ponemos ahora el foco en **las sumas de Steinhaus**. La primera pregunta que surje es, de acuerdo en lo visto en la sección sobre Feller, si las sumas de Steinhaus $s(n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$ cumplen la **condición de Feller**, es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{n \operatorname{Log} n} = 1 \tag{4.2}$$

Esto resulta cierto, y además podemos describir explicitamente ξ (lo haremos a continuación) definida en el intervalo [1/2,1] con imagen (0,2], tal que s(n)/n = $\xi(\gamma_n)$+$\operatorname{Log} n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde

$$\gamma_n = n/2^{\lceil \operatorname{Log} n \rceil} \tag{4.3}$$

es un indicador de la posición n entre dos potencias de 2 consecutivas.

Teorema 7. *Para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$s(n)/n - \operatorname{Log} n = \xi(\gamma_n)$$

Demostrado esto, es inmediato que s(n) cumple la condición de Feller, y, además, que $s(n)/n - \operatorname{Log} n$ es periódica, con periodo 1, en la variable $\operatorname{Log} n$.

Empezamos definiendo la función ξ:

$$\xi(\gamma) := 2 - \frac{1}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\epsilon_k}{2^k} - \operatorname{Log}\gamma \qquad \frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1 \tag{4.4}$$

La función ξ cumple una serie de propiedades que no probaremos:

- Toma el valor 2 en el punto $\gamma = 1/2$ y $\gamma = 1$
- La imagen de ξ es $\{\xi(\gamma) : 1/2 < \gamma < 1\} = (0, 2]$
- Es continua por la derecha
- Es continua por la izquierda excepto para los racionales diádicos mayores de 1/2
- Solo tiene discontinuidades de salto positivas, para los racionales diádicos, de tamaño 2 en $\gamma = 1$, de tamaño 2/3 en $\gamma = 3/4$, de tamaño 2/5 y 2/7 en $\gamma = 5/8$ y 7/8 respectivamente, de tamaño 2/9,2/11,2/13 en $\gamma = 9/16$, 11/16 y 13/16 respectivamente, etc. Es decir $\xi(\cdot)$ varía sin acotación incluso localmente.

Los términos ϵ_k de la función ξ son ceros o unos, y representan los dígitos de la **representación diádica de** γ :

$$\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{2^k}$$

Para evitar ambigüedades que alteren el valor de ξ, tomamos la **representación estándar**, es decir, requerimos que una cantidad infinita de los ϵ_k sean cero.
Por ejemplo,

$$(\epsilon_0, \epsilon_1, ...) = (1, 0, 0, ...) \text{ y } (0, 1, 1, ...)$$

son representaciones equivalentes del 1, pero nos quedaremos siempre con la primera (por tener una cantidad infinita de ceros).
A partir de la representación diádica, tenemos una nueva fórmula de las sumas de Steinhaus:

$$s(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor 2^k = \sum_{k=1}^{\lfloor \operatorname{Log} n \rfloor + 1} \left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor 2^k, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4.5}$$

Haciendo uso de la de la representación diádica de n, escrita como

$$n = \sum_{r=0}^{\infty} a_r 2^r = \sum_{r=0}^{\lfloor \operatorname{Log} n \rfloor} a_r 2^r$$

Lema 1. *En términos de los coeficientes anteriores, se cumple*

$$s(n) = \sum_{r=0}^{\infty} (2+r) a_r 2^r = \sum_{r=0}^{\lfloor \operatorname{Log} n \rfloor} (2+r) a_r 2^r$$

Demostración.

$$\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} = \sum_{r=k}^{\infty} a_r 2^{r-k} + \left\{ \sum_{r=0}^{k-1} a_r 2^{r-k} + \frac{1}{2} \right\}$$

donde el primer sumando es un entero y la cantidad entre llaves es un número en el intervalo $[2^{-1}, 1 - 2^{-k}]$ o en el intervalo $[2^{-1}, 3 \cdot 2^{-1} - 2^{-k}]$ dependiendo de si $a_{k-1} = 0$ o 1 y, por lo tanto

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor = a_{k-1} + \sum_{r=k}^{\infty} a_r 2^{r-k}$$

y por lo tanto la expresión de las sumas de Steinhaus se convierte en la siguiente:

$$s(n) = s(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_{k-1} 2^k + \sum_{r=k}^{\infty} a_r 2^r \right\}$$

Por una parte,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} 2^k = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} 2^{k-1} = 2 \sum_{r=0}^{\infty} a_r 2^r$$

en el otro sumando, se da la igualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=k}^{\infty} a_r 2^r = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{r} a_r 2^r$$

la expresión no depende de k, luego

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{r} a_r 2^r = \sum_{r=1}^{\infty} r a_r 2^r$$

Juntando ambos sumandos, obtenemos lo que buscábamos:

$$\sum_{r=1}^{\infty} r a_r 2^r + 2\sum_{r=1}^{\infty} a_r 2^r = \sum_{r=1}^{\infty}(2+r)a_r 2^r$$

□

De este lema se deduce la relación de duplicidad más importante para demostrar el Teorema 7:

Corolario 1. *Con s definida según 4.5,*

$$s(2n)/2n - \operatorname{Log} 2n = s(n)/n - \operatorname{Log} n \qquad n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Fijando $b_o = 0$ y $b_j = a_{j-1}, \quad j \in \mathbb{N}$ y aplicando el lema anterior,

$$s(2n) = \sum_{j=0}^{\infty}(2+j)a_j 2^j = \sum_{j=1}^{\infty}(2+j)a_{j-1}2^j = \sum_{r=0}^{\infty}(2+r)a_r 2^{r+1} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r 2^{r+1}$$

de tal forma que

$$s(2n) = 2s(n) + 2n$$

y, sustituyendo:

$$\frac{s(2n)}{2n} - \operatorname{Log} 2n = \frac{2s(n)+2n}{2n} - \operatorname{Log} n - \operatorname{Log} 2 = \frac{s(n)}{n} + 1 - \operatorname{Log} n - 1 = \frac{s(n)}{n} - \operatorname{Log} n$$

□

Tenemos ya entonces todas las herramientas para probar el teorema 7:
Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$s(n)/n - \operatorname{Log} n = \xi(\gamma_n)$$

donde γ_n y la función $\xi(\cdot)$ se definen según 4.3 y 4.4

Demostración. La definición de $\xi(\cdot)$ está en términos de los ϵ_k de la representación diádica de γ. Los valores que toman estos digitos cuando $\gamma = \gamma_n$ dependen de n, por lo tanto necesitamos obtener cual es la relación exacta:
Tenemos, por una parte que

$$\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{2^k} \quad \text{y} \quad n = \sum_{r=0}^{\lfloor \operatorname{Log} n \rfloor} a_r 2^r$$

Por la definición de γ_n,

$$n = \gamma_n 2^{\lceil \operatorname{Log} n \rceil} \quad \text{y} \quad \operatorname{Log} n = \lceil \operatorname{Log} n \rceil + \operatorname{Log} \gamma_n \tag{4.6}$$

Entonces tenemos que

$$\gamma_n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon_k(n)}{2^k} = \frac{n}{2^{\lceil \operatorname{Log} n \rceil}} = \frac{1}{2^{\lceil \operatorname{Log} n \rceil}} \sum_{r=0}^{\lfloor \operatorname{Log} n \rfloor} a_r 2^r = \sum_{k=0}^{\lfloor \operatorname{Log} n \rfloor} \frac{a_{\lceil \operatorname{Log} n \rceil - k}}{2^k}$$

y por lo tanto,

$$\varepsilon_k(n) = \begin{cases} a_{\lceil \operatorname{Log} n \rceil - k} & \text{for } k = 0, 1, \ldots, \lceil \operatorname{Log} n \rceil \\ 0 & \text{for } k > \lceil \operatorname{Log} n \rceil \end{cases}$$

Aplicando el lema 1,

$$s(n) - (\lceil \operatorname{Log} n \rceil + 2)n = \sum_{i=0}^{\lceil \operatorname{Log} n \rceil} (r - \lceil \operatorname{Log} n \rceil) a_r 2^r == - \sum_{k=0}^{\lceil \operatorname{Log} n \rceil} k a_{\lceil \operatorname{Log} n \rceil - k} 2^{\lceil \operatorname{Log} n \rceil - k} =$$

$$= -2^{\lceil \operatorname{Log} n \rceil} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \varepsilon_k(n)}{2^k}$$

Haciendo uso de 4.6,

$$\frac{s(n)}{n} - \operatorname{Log} n = 2 - \frac{2^{\lceil \operatorname{Log} n \rceil}}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \varepsilon_k(n)}{2^k} + \lceil \operatorname{Log} n \rceil - \operatorname{Log} n = 2 - \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \varepsilon_k(n)}{2^k} - \operatorname{Log} \gamma_n$$

que es exactamente $\xi(\gamma_n)$, de acuerdo con la definición dada en 4.4 □

Y, por lo tanto, las sumas de Steinhaus cumplen la **condición de Feller** 4.2, es decir, son cuotas “equivalentes” a la cuotas de Feller, de $\operatorname{Log} n$, en el sentido de que hacen “justo” el juego de San Petersburgo tanto para el jugador Pablo y el banquero, Peter.

Supongamos que, en vez de un juego de San Petersburgo, a Pablo se le ofrece la posibilidad de jugar a un “**juego de Steinhaus**”, un juego cuyos pagos dados por la función de distribución empírica $\tilde{F}_n(x)$:

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{n} \# \left\{ 1 \leq j \leq n; x_j = 2^k \right\}$$

¿Cómo de atractivo es el juego de Steinhaus?
Como hemos visto anteriormente, Pablo espera ganar, en una sola partida, la cantidad de s(n)/n, un poco más que $\operatorname{Log} n$. Comparado con la esperanza infinita del juego de San Petersburgo, parece menos atractivo. Pero este no es el único motivo por el que Pablo debería elegir el juego de San Petersburgo. Si F(x) es la función de distribución del juego de San Petersburgo, La cantidad X que Pablo consigue es *estocásticamente mayor* bajo el juego de San Petersburgo:

$$1 - F(x) = \mathbb{P}\{X > x\} \geq \tilde{\mathbb{P}}_n \{X > x\} = 1 - \tilde{F}_n(x)$$

Esto se sigue inmediatamente de
Para cada k $\in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left\{X > 2^k\right\} = \frac{1}{2^k} \text{ y } \tilde{\mathbb{P}}_n \left\{X > 2^k\right\} = \frac{1}{2^k} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{r=k}^{\infty} a_r 2^r \right\}$$

y por lo tanto

$$n \left\{ F(2^k) - \tilde{F}_n(2^k) \right\} = \frac{1}{2^k} \sum_{r=0}^{k-1} a_r 2^r$$

4.2. Resumen y Conclusiones

Las soluciones de Feller y Steinhaus requieren a Pablo pagar $n \operatorname{Log} n$ y $s(n) = x_1 + x_2 + ... x_n$ ducados para ganar $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ en n partidas, respectivamente. ¿Cómo de atractivos son estos juegos para Pablo? Puesto que $s(n) = n[\xi(\gamma_n) + \operatorname{Log} n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\xi(\gamma) > 0$ para cada $\gamma \in [1/2, 1]$ por la propiedad 2 de 4.4, Pablo ciertamente prefiere las cuotas de Steinhaus frente a las de Feller. De todos modos, la mejora, $n\xi(\gamma_n)$, es pequeña cuando n es un poco menos que una potencia de 2. Desde el punto de vista del banquero, Pedro, la mejor de las posibilidades es cuando n es una potencia de 2, o justo la acaba de pasar, en cuyo caso $\xi(\gamma_n) = 2$. Así que mientras las probabilidades de ganar aumentan para Pedro, seguirá descontento incluso con la mayor de las mejoras bajo las cuotas de Steinhaus: siempre se quedará corto de ganar al menos la mitad de las veces. Incluso en ese caso , Pedro no estará satisfecho: aunque superficialmente podría parecer atractivo, "La mitad del tiempo gano yo, y la otra mitad ganas tú", diría Pablo, Pedro nunca podrá ganar más de una cantidad fija, mientras que las posibles ganancias de Pablo pueden ser enormes.

Capítulo 5

Riesgo

El estudio de la paradoja de San Petersburgo está motivado por problemas a los que nos enfrentamos constantemente. En el ámbito económico es donde aparece realmente la paradoja: pese a que la esperanza del juego es infinita, nadie estaría dispuesto a jugar pagando sumas arbitrariamente grandes. ¿Cuál es el problema? El riesgo. Seguimos el trabajo de [Levy H. 2016] para exponer los fundamentos de la teoría del riesgo.
La idea principal del capítulo es la siguiente:
Nuestro actor Pablo decide jugar a un juego o no en función de que qué le es más "útil" o el equivalente en la literatura económica, elige una inversión u otra. Un concepto importante para entender la naturaleza de la paradoja de la utilidad es la aversión al riesgo:

Definición 3. *Se dice que un actor es averso al riesgo si prefiere una cantidad asegurada sobre una apuesta con el mismo valor esperado.*

Supongamos que a Pablo se le propone el siguiente juego: "Pablo tira una moneda justa, es decir, que tiene la misma probabilidad de salir cara que cruz. Si Pablo obtiene una cara, Pablo recibirá 2 ducados, en cambio, si obtiene una cruz, no recibirá ningún ducado. "

Ante este juego, Pablo calcula el valor esperado del juego:
Si X es la variable aleatoria que representa el resultado del juego, entonces

$$P(X = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$$

y por lo tanto, el valor esperado,

$$E(X) = 0P(X = 0) + 2\ P(X = 2) = 2\ \frac{1}{2} = 1$$

Matemáticamente, afirmaríamos lo siguiente,
"Pablo aceptaría cualquier precio por debajo de 1, y rechazaría jugar por un precio superior a 1 ducado. En el caso de que el precio fuera 1, sería un juego «justo», no puede esperar que las ganancias superen al precio de entrada a la larga."
Es el caso de que el precio sea 1 es donde entra en juego la aversión al riesgo: Si Pablo es averso al riesgo, prefiere mantener su ducado frente a arriesgarlo en una apuesta con valor esperado de, igualmente, 1 ducado.

Todos actuamos con cierta aversión al riesgo. El ejemplo anterior puede no parecer muy diferente una elección u otra, pero si aumentamos las ganancias, nuestra percepción cambia:
"En cierto concurso, al concursante se le presentan dos opciones: obtener 33.000 euros en el momento o jugar una lotería, con los premios de 1 euro y 100.000 euros con la misma probabilidad."
De igual manera, se nos presentan dos alternativas, X y X', de la siguiente forma:

$$P(X = 33{,}000) = 1$$

y

$$P(X' = 1) = P(X' = 100{,}000) = \frac{1}{2}$$

con esperanzas

$$E(X) = 33{,}000$$

$$E(X') = \frac{1 + 100{,}000}{2} = 50000{,}5$$

Si suponemos que nuestros actores no son aversos al riesgo, deberían elegir, sin dudar, participar en la lotería. Si nuestro propósito es modelar el comportamiento humano (meta sobreoptimista desde luego) es razonable asumir cierto grado de aversión al riesgo. El problema principal que nos hace elegir la lotería X' con toda certeza es no tener en cuenta la **varianza** del juego frente a la certeza de la "lotería" que nos ofrece 33.000 euros sin riesgo.

5.1. Riesgo. Medidas del riesgo

Definir el riesgo en sí mismo no es sencillo, pero si es fácil decir qué es una apuesta sin riesgo:

Definición 4. *Una apuesta no tiene riesgo, o lo que es lo mismo, es segura, si tiene un resultado seguro, es decir,*
Si X es la variable aleatoria que representa el resultado de una apuesta, entonces $\exists x \in I$, el conjunto de los posibles resultados, tal que P(X=x) = 1

Volviendo al ejemplo de la sección anterior, nuestro concursante se enfrenta a la elección entre dos apuestas X, donde el concursante obtiene, sin riesgo, 33.000 euros; y X', con iguales probabilidades de obtener 1 y 100.000 euros; ¿ en qué condiciones elegimos la apuesta arriesgada X' sobre X?

5.2. Índice de Domar y Musgrave

De acuerdo con la intuición, podemos entender el riesgo como posibilidad de pérdida. Domar y Musgrave [Musgrave R. 1959] formularon un índice cuantitativo del riesgo que tiene en cuenta todos los posibles malos resultados. Se formula así:
"De todas las posibles preguntas que se pueda hacer un inversor, la más importante, nos parece, tiene que ver con la posibilidad de que el rendimiento sea menor que cero. Esta es la esencia

del riesgo.”
De acuerdo con esto, propusieron el siguiente índice de riesgo (RI) (Risk index, en inglés).

$$RI(X) = -\sum_{x_i \leq 0} x_i \; P(R = x_i)$$

Domar y Musgrave hablan en términos de rendimientos, en tanto por ciento, de inversiones. De esta forma podemos ver la elección de nuestro concursante como elegir entre quedarse los 33.000 euros o invertirlos y podemos definir el rendimiento de una inversión:

Definición 5. *Definimos el rendimiento de una inversión,R, como*

$$R = \frac{\textit{Capital recibido-Capital invertido}}{\textit{Capital invertido}} \; 100\,\%$$

Reformulamos, de esta forma, la elección de nuestro concursante:
Puede o bien quedarse el dinero o bien invertirlo de tal forma que el rendimiento es el siguiente:

$$P\left(R = \frac{1 - 33{,}000}{33{,}000} \; 100\right) = P\left(R = \frac{100{,}000 - 33{,}000}{33{,}000} \; 100\right) = \frac{1}{2}$$

Un ejemplo desde luego, extremo en términos de inversiones. Si obtuviesemos el euro supondría una pérdida del casi 100 %, mientras que al obtener 100.000 euros supondría un rendimiento del 200 %. Volviendo al indíce de Domar y Musgrave,

$$RI(X) = -\sum_{x_i \leq 0} x_i \; P(R = x_i) = -\frac{1 - 33{,}000}{33{,}000} \; 100 \; P(R = \frac{1 - 33{,}000}{33{,}000}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1 - 33{,}000}{33{,}000} \; 100 \approx -\frac{1}{2} \; (-1) \; 100 = 50$$

Esto se relaciona directamente con nuestra definición de valor esperado de un juego: el RI se corresponde al valor esperado, en positivo, solo teniendo en cuenta los resultados negativos. En el caso de las inversiones, todas las que finalizan con un capital por debajo del invertido.
Por no alterar el problema original, podemos hacer la siguiente modificación del RI:

Definición 6. *frente a la opción segura (o sin riesgo) de X, el riesgo de elegir X' (RI*), en términos del índice RI, es:*

$$RI^*(\,X'|\,X) = -\sum_{x'_i \leq E(X)} [x'_i - E(X)] \;\; P(X' = x'_i)$$

Puesto que X es segura, si x es el valor que toma con probabilidad 1, E(X)=x, y, por lo tanto seguimos manteniendo la idea de Domar y Musgrave de cuantificar las pérdidas. En nuestro ejemplo,

$$RI^*(\,X'|\,X) = -\sum_{x'_i \leq E(X)} [x'_i - E(X)] \;\; P(X' = x'_i) = -\sum_{x'_i \leq 33{,}000} [x'_i - 33{,}000] \;\; P(X' = x'_i)$$

$$= -\,[1 - 30{,}000] \;\; \frac{1}{2} \approx 15{,}000$$

$RI^*(X'|X)$ nos da un valor razonable, en términos del valor esperado de un juego, definido con anterioridad, RI* nos da las **pérdidas esperadas**, es decir, como si calcularamos el valor esperado del juego sin tener en cuenta los buenos resultados.
Rápidamente, se le pueden poner objeciones:
Supongamos que frente a la apuesta segura X,de 33.000 euros, se plantean dos apuestas A y B, de la forma siguiente:

	Dinero obtenido	Probabilidad
Apuesta A	16.500	0.1
Apuesta B	29.700	0.5

Independientemente de los valores positivos que puedan tomar sus respectivos RI* son

$$RI^*(A|X) = -\sum_{a_i \leq E(X)} [a_i - E(X)]\ P(A = a_i) = -[16{,}500 - 33{,}000]\,\frac{1}{10} = \frac{16{,}500}{10} = 1{,}650$$

$$RI^*(B|X) = -\sum_{b_i \leq E(X)} [b_i - E(X)]\ P(B = b_i) = -[29{,}700 - 33{,}000]\,\frac{1}{2} = \frac{3{,}300}{2} = 1{,}650$$

De acuerdo con nuestro índice, las dos apuestas tienen el mismo riesgo, pero esto contradice nuestra intuición: pese a ser pequeña, la posibilidad de perder la mitad del dinero en la apuesta A nos hace pensar que es más arriesgada. Mientras que unas pérdidas del 10 % (la apuesta B) pueden ser asumibles, perder la mitad puede suponer la bancarrota.

5.3. Dispersión como medida de Riesgo

Utilizar la dispersión de los valores obtenidos como medida de riesgo es la forma más habitual de medir el riesgo actualmente.

Definición 7. *Definimos la dispersión como medida de riesgo de elegir una apuesta X' frente a una apuesta segura X*

$$\sigma^2_X(X') = \sum [x'_i - X]^2\, P(X' = x'_i)$$

Volviendo a nuestro concursante, se le presenta la siguiente apuesta frente a la opción segura de 33.000 euros:

Dinero obtenido	Probabilidad
0	.5
100000	.5

La dispersión es, de acuerdo con lo dicho,

$$\sigma^2_X(X') = \sum [x'_i - X]^2\, P(X' = x'_i) = [0 - 33{,}000]^2\,\frac{1}{2} + [100{,}000 - 33{,}000]^2\,\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}33{,}000^2 + \frac{1}{2}67{,}000^2 = 2789000000 = 2{,}789 \times 10^9$$

El resultado es casi trivial: la variabilidad de la apuesta es altísima.
De todos modos, la crítica a la dispersión como medida de riesgo es inmediata. Consideremos el siguiente par de apuestas, A y B, frente a una apuesta segura de 100 euros, con pagos y probabilidades según la siguiente tabla:

	Apuesta A		Apuesta B	
	x	P(A=x)	x	P(B=x)
	99	1/3	99	2/6
	102	1/3	102	3/6
	105	1/3	108	1/6
Valor esperado (E)	102		102	
Dispersión (σ^2)	6		9	

Ambas apuestas son rentables y bajo nuestra concepción de valor esperado, deberían considerarse como aceptables, pero eso aquí es irrelevante. Si utilizamos la dispersión como índice de riesgo, ¿es más "arriesgada" la apuesta B que la apuesta A? De ninguna forma. La mayor dispersión se explica fácilmente: el pago de 108 euros con probabilidad $\frac{1}{6}$ aumenta la dispersión. Si estamos hablando de riesgo, el "miedo a la pérdida", considerar las desviaciones positivas de la apuesta, es decir, los valores más favorables, no aporta nada a la hora de considerar el riesgo de una apuesta. Esto es, en términos generales. Esto se entrecruza con la paradoja de San Petersburgo: si es aceptable considerar las probabilidades muy pequeñas es por los pagos inconmesurables que suponen. Se ha de tener cuidado, no podemos hablar, en términos de lo definido hasta ahora, de la dispersión del juego de San Petersburgo: el valor esperado del juego de San Petersburgo es infinito. Una forma de solucionar que la dispersión se vea afectada por valores positivos alejados del valor seguro, es solo considerar la dispersión de las pérdidas, o semivarianza:
La semivarianza como medida del riesgo de elegir la apuesta arriesgada X' frente a la apuesta segura X se define como

$$SV_X(X') = \sum_{x'_i \leq E(X)} \left[x'_i - X\right]^2 P(X' = x'_i)$$

La idea que motiva la definición de la semivarianza como forma de medir el riesgo es no tener en cuenta los resultados positivos muy altos (aunque posiblemente poco probables). De esta forma no descartaríamos una apuesta, que, utilizando la varianza como medida del riesgo, pudiera parecer demasiado arriesgada. En términos económicos, una posible inversión que pudiera llevarnos a la ruina, aún con probabilidad pequeña, no puede ser aceptada. Sin embargo, una inversión con prospectos dentro de lo habitual,y, además, una pequeña posibilidad de obtener un gran beneficio, nunca puede ser considerada como "arriesgada".
La paradoja de San Petersburgo desvela que **la esperanza de un juego de azar, o en el terreno económico, de una inversión, no es suficiente para aceptar o rechazar dicho juego**: el riesgo juega un papel fundamental en la decisión.

Capítulo 6

Teoría de la utilidad esperada

Presentamos un marco alternativo en la teoría de decisión al del análisis del riesgo. En la sección anterior, la rentabilidad es la razón de ser de las apuestas o inversiones. Discutir el riesgo de las inversiones sirve simplemente para enfatizar que, al enfrentarnos a la decisión entre dos inversiones, el riesgo debe ser contrapuesto a su posible rentabilidad. Es decir, tanto rentabilidad como riesgo se debe tener en cuenta en el proceso de decisión.
En el marco de la teoría de la utilidad esperada no analizamos riesgo y utilidad por separado: consideramos el total de la distribución de resultados simultáneamente. Además, en este contexto, no hay ninguna necesidad de hablar de riesgo. Nuestros inversores se enfrentan a diferentes inversiones. Para poder comparar el riesgo y posibles beneficios, se necesitan criterios de decisión. Este capítulo se dedica a las bases de la teoría de la utilidad esperada. El paradigma de la utilidad esperada asume que el inversor es racional: prefiere más riqueza frente a menos riqueza. La utilidad esperada es criticada por psicólogos, demostrando en estudios empíricos que los inversores no son siempre racionales, y, además, en algunos casos, el inversor corriente altera las probabilidades objetivas de manera sistemática, lo que pone en duda la validez del paradigma de la utilidad esperada. Estos hallazgos experimentales son valiosos, ya que ayudan a explicar las anomalias observadas en las decisiones tomadas por inversores o nos ayudan a explicar las desviaciones observadas del precio de equilibrio esperado de activos arriesgados, según habrían sido predecidos por el paradigma de la utilidad esperada. De todas formas subrayamos desde el principio que los diversos modelos sugeridos por psicólogos pueden complementar el paradigma de la utilidad esperada, modificarlo, pero no pueden reemplazarlo, simplemente porque no se sugiere un modelo alternativo que provea una diversificación optima y precios de equilibrio.

6.1. Criterios de inversión

6.2. El criterio de máximo rendimiento

El criterio de máximo rendimiento (MRC, de “The Maximun Return Criterion”) se utiliza cuando no hay riesgo en absoluto. De acuerdo con esta regla, simplemente elegimos la inversión con el mayor rendimiento. Tomando la decisión correcta, nos aseguramos el rendimiento máximo de la cantidad invertida al final del periodo de inversión. Ilustremoslo con un ejemplo de

producción óptima:
Supongamos que P es el precio de un producto por unidad, Q la cantidad de productos fabricados y $C(Q)$ los costes de producción. El objetivo de la firma es decidir la cantidad óptima a producir, Q^* de forma que los beneficios, $\pi(Q)$, se maximicen.
Entonces, el objetivo de la firma es:

$$Max\ \pi(Q) = PQ - C(Q)$$

Derivando la ecuación e igualando a cero, obtenemos un resultado bien conocido: en el punto de producción óptima, lo siguiente es cierto:

$$P = C'(Q^*)$$

que el ingreso marginal (ingreso por unidad, el precio por unidad) será igual al coste marginal $C'(Q)$. El valor Q^* es el número óptimo de unidades a producir porque al elegir Q^* la firma maximiza $\pi(Q)$. La regla MRC no se puede aplicar a inversiones donde los rendimientos no son seguros. En el ejemplo anterior, se asume implicitamente que el precio del producto, P, y el coste $C(Q)$ son conocidos. Veamos en un ejemplo que el MRC no siempre es aplicable. Supongamos que queremos ordenar las siguientes 4 inversiones para tomar una decisión de inversión:

Inversión A		Inversión B		Inversión C		Inversión D	
x	P(A=x)	x	P(B=x)	x	P(C=x)	x	P(D=x)
4	1	5	1	-5	1/4	-10	1/5
				0	1/2	10	1/5
				40	1/4	20	2/5
						30	1/5

Donde x es el rendimiento (en euros o porcentajes) y P(X=x) la probabilidad de obtener x. La regla MRC nos dice que la inversión B domina a la A porque tiene un rendimiento mayor. Por otra parte, es ambigua respecto a los otros pares de inversiones, y, por lo tanto no es aplicable. Por ejemplo, si elegimos el rendimiento de -5 de la inversión C, la inversión B es mejor que la inversión C. Sin embargo, si comparamos el rendimiento de 40 de la inversión C con la inversión B, llegamos al orden inverso. Con inversiones inciertas, no obtenemos un orden unívoco con la regla MRC, el orden es una función de parejas de rendimientos arbitrarias, elegidas para ser comparadas. Por ello, el criterio MRC no se puede aplicar en caso de incertidumbre. Una versión modificada del MRC donde se elige el mayor rendimiento de todos los posibles de una inversión técnicamente solucionaría el problema de aplicabilidad, y, en nuestro ejemplo, la inversión C sería la elegida. Aunque aplicable, resulta engañosa y no recomendable: supongamos que su probabilidad disminuye a 1/1000 y aumentamos la probabilidad de obtener -5 a 999/1000 y cambiamos la probabilidad de x = 0 a 0. Según el criterio MRC modificado, la inversión más deseable sigue siendo C. Esto es una clara desventaja. Muy pocos inversores considerarían la inversión C con las nuevas probabilidades la mejor inversión.

6.3. El criterio del máximo rendimiento esperado

El criterio del máximo rendimiento esperado (MERC) identifica la inversión con el mayor rendimiento *esperado* y por lo tanto soluciona el problema de elegir entre inversiones con diferentes posibles resultados. Para emplear la regla, primero calculamos el rendimiento esperado de cada inversión. Para la inversión A, es 4, para B es 5, y para C y D:

$$E(C) = 1/4(-5) + 1/2(0) + 1/4(40) = 8{,}75$$

$$E(D)1/5(-10) + 1/5(10) + 2/5(20) + 1/5(30) = 14$$

por lo tanto MERC nos da un orden claro y preciso. En nuestro ejemplo, la inversión D tiene el mayor rendimiento esperado y por lo tanto, por MERC, la inversión D es clasificada como la mejor inversión. Técnicamente, el MERC es aplicable a inversiones seguras e inciertas, pero eso no quiere decir que el criterio deba utilizarse en todos los casos. La paradoja de San Petersburgo es un claro ejemplo de por qué la regla no es óptima, y lleva a paradojas. Nos preguntamos lo siguiente: ¿Qué cantidad aceptaríamos para ser indiferentes entre jugar al juego de San Petersburgo gratis o recibir esa suma?

Esta cantidad asegurada se denomina certeza equivalente (CE) del juego. Podemos ver el juego de San Petersburgo como una inversión arriesgada: si, por ejemplo, pagamos 100€ para jugar y la primera tirada sale cara, habremos perdido 99€. Como hemos visto, diversos experimentos muestran que la mayoría de los sujetos responden con una certeza equivalente muy pequeña (de 2€ o 3€ en la mayoría de los casos). Sin embargo, por el MERC, la certeza equivalente del juego de San Petersburgo es infinito; y de ahí la paradoja: los inversores solo están dispuestos a pagar una suma muy baja por una inversión cuyo valor esperado es infinito.

Nicolás Bernoulli y Gabriel Cramer sugirieron que los inversores, al tomar decisiones, buscan maximizar la utilidad esperada del dinero como

$$EU(w) = E(log(w)) \text{ o } EU(w) = E(w^{\frac{1}{2}})$$

donde $log(w)$ o $w^{\frac{1}{2}}$ son posibles funciones de utilidad, w es el capital y E el valor esperado. Por lo tanto, de acuerdo con Bernoulli y Cramer, lo que es importante para el inversor es la utilidad derivada del dinero recibido, más que el dinero en sí. Con la función $log(w)$, por ejemplo, log(10) = 1, log(100) = 2 y por lo tanto, la utilidad derivada de los 10 primeros euros es equivalente a la derivada de los 90 siguientes, mostrando una decreciente utilidad marginal del dinero.

En efecto, calculando la utilidad esperada, estas dos funciones de utilidad producen un resultado razonable. Con la función log(w), obtenemos:

$$E(logw) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} log 2^{x-1} = log2 \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x-1}{2^x} = log2$$

Y decimos que w=2 es la certeza equivalente.

Si ofrecemos al inversor una suma mayor, digamos, 3€ seguros o, alternativamente, la posibilidad de jugar al juego de San Petersburgo gratis, por el criterio de utilidad esperada, el inversor debería elegir los 3 euros, porque log(3) > E(log(w)) = log(2). Por supuesto, con tan pequeña cantidad la mayor parte de la gente ni siquiera prestaría atención a este juego, y podrían decir que se sienten indiferentes entre las dos opciones. La paradoja de San Petersburgo muestra porqué el MERC puede ser engañoso y económicamente inaceptable pese a ser aplicable. También hemos visto que asumiendo que los inversores toman decisiones por la utilidad esperada EU(x) y no por el rendimiento esperado E(x), somos capaces de explicar la paradoja de San Petersburgo. Surge lo siguiente: ¿Es esta solución a la paradoja suficiente para afirmar que los

inversores siempre deberían elegir entre las inversiones de acuerdo con el criterio de utilidad esperada(es decir, elegir la inversión con mayor utilidad esperada)?
Que explique el comportamiento de los actores económicos frente a la paradoja de San Petersburgo indica una buena propiedad de el criterio de máxima utilidad esperada (MEUC) no puede servir de justificación para utilizar el MEUC en todos los casos. Como probaremos debajo, el MEUC es la regla correcta siempre que se cumplan una serie de axiomas. Demostraremos que, si ciertos axiomas se cumplen, el MEUC es la regla de decisión óptima. Primero hablaremos de los axiomas y probaremos que el MEUC es la regla óptima dados esos axiomas. Finalmente, hablaremos de la relación entre MEUC,MERC y MRC, y analizaremos algunas de las propiedades del criterio de máxima utilidad esperada.

6.4. Axiomas y prueba del Criterio de Máxima Utilidad Esperada(MEUC)

Supongamos que tenemos que tomar una decisión entre dos inversiones, dos portfolios que por simplicidad llamaremos loterías, que se denotan L_1 y L_2. Estas dos inversiones también se pueden denotar:

$$L_1 = \{p_1, A_1; p_2, A_2; ...; p_n, A_n\}$$

$$L_2 = \{q_1, A_1; q_2, A_2; ...; q_n, A_n\}$$

donde A_1 son los posibles resultados con probabilidad p_1 y q_1, respectivamente, y los resultados son ordenados desde el menor (A_1) al mayor (A_n). Por lo tanto, bajo L_1 tenemos probabilidad p_1 de obtener A_1, probabilidad p_2 de obtener A_2, etc. Análogamente, bajo L_2 tenemos probabilidad q_1 de obtener A_1, probabilidad q_2 de obtener A_2, etc. Estos resultados son mutuamente exclusivos y $\sum p_i = \sum q_i = 1$. En la práctica, es raro que dos inversiones tengan la misma serie de resultados posibles, pero este hecho no supone ninguna restricción teórica: asignamos probabilidad 0 cuando sea necesario.

6.5. Axiomas

En esta sección introduciremos los axiomas necesarios en la teoría de loterías, suposiciones sobre el comportamiento del sujeto racional, que se corresponden con lo observado en los mercados. Visto esto, tenemos las herramientas necesarias para probar el teorema.

Axioma 1: *Comparabilidad.* Por este axioma, enfrentados a dos posibles resultados monetarios, digamos A_i y A_j, el inversor debe saber si prefiere A_i to A_j ($A_i \succ A_j$) donde el símbolo $\succ$ significa "se prefiere", o A_j to A_i ($A_j \succ A_i$) o si es indiferente entre los dos ($A_i \sim A_j$). Por este axioma, la respuesta "No sé qué resultado monetario prefiero" simplemente no es aceptada.

Axioma 2: *Continuidad.* Si A_3 es preferida frente a A_2 y A_2 es preferida frente a A_1 entonces debe haber una probabilidad $U(A_2)$ $(0 \leq U(A_2)) \leq 1))$ tal que

$$L = \{(1 - U(A_2)), A_1; (U(A_2)), A_3\} \sim A_2$$

Y por lo tanto el inversor se sentirá indiferente entre las dos opciones: recibir A_2 con certeza o bien recibir A_1 con probabilidad $1 - U(A_2)$ o A_3 con probabilidad $U(A_2)$. Dadas A_1 y A_3, estas probabilidades son función de A_2; de ahí la notación $U(A_2)$.
Previamente hemos usado p y q como notación para las probabilidades asociadas a sucesos en una lotería. Este cambio repentino se debe a que U resulta ser la función de utilidad de nuestro inversor, como veremos más adelante.

Axioma 3: Intercambiabilidad. Supongamos que tenemos una lotería (inversión) L_1 dada por

$$L_1 = \{p_1, A_1; p_2, A_2; p_3, A_3\}$$

Supongamos también que nos sentimos indiferentes entre A_2 y otra lotería B, donde

$$B = \{q, A_1; 1 - q, A_3\}$$

Entonces, el axioma de intercambiabilidad nos dice que nos sentiremos indiferentes entre L_1 y $L_2 = \{p1, A_1; p_2, B; p_3, A_3\}$

Axioma 4: Transtividad. Supongamos que existen tres loterías, L_1, L_2, L_3, donde $L_1 \succ L_2, L_2 \succ L_3$. Por el axioma de transitividad, $L_1 \succ L_3$. Análogamente, si $L_1 \sim L_2$ y $L_2 \sim L_3$ entonces $L_1 \sim L_3$.

Axioma 5: Descomponibilidad. Una lotería compuesta es una lotería cuyos premios son otras loterías. Una lotería **simple** tiene como premios únicamente valores monetarios. Supongamos que existe una lotería compuesta L^* tal que:

$$L^* = \{q, L_1; (1 - q), L_2\}$$

donde L_1 y L_2 son loterías simples, dadas por:

$$L_1 = \{p_1, A_1; 1 - p_1; A_2\}$$

$$L_2 = \{p_2, A_1; 1 - p_2; A_2\}$$

Entonces, por este axioma, la lotería compuesta L^* se puede descomponer a una lotería simple equivalente (mediante la relación $\sim$) que solo tiene A_1 y A_2 como premios:

$$L^* \sim L_3 = \{p^*, A_1; (1 - p^*), A_2\}$$

donde $p^* = qp_1 + (1 - q)p_2$

Axioma 6: Monotonía Si hay certeza, el axioma de monotonía determina que si $A_2 > A_1$ entonces $A_2 \succ A_1$. Si no existe certeza, se puede formular de dos formas equivalentes:

Primera forma:
Sea $L_1 = \{p, A_1; 1 - p; A_2\}$
y $L_2 = \{p, A_1; 1 - p; A_3\}$.
Si $A_3 > A_2$, entonces $A_3 \succ A_2$ y $L_2 \succ L_1$

Segunda forma:
Sea $L_1 = \{p, A_1; 1-p; A_2\}$
y $L_2 = \{q, A_1; 1-q; A_2\}$ y $A_2 > A_1$ (y por lo tanto $A_2 \succ A_1$)
Si $p < q$ (o si $(1-p) > (1-q)$) entonces $L_1 \succ L_2$

Estos 6 axiomas pueden ser aceptados o rechazados. Si son aceptados, podemos demostrar que el MEUC debería ser usado para elegir entre alternativas de inversión. Otro criterio de inversión será simplemente desaconsejable y puede llevar a decisiones incorrectas. Por ejemplo, si el inversor prefiriese una suma menor de dinero frente a una más alta, digamos, $A_2 > A_1$ pero $A_1 \succ A_2$. En este caso deberíamos modificar el modelo de utilidad esperada, por ejemplo, utilizar un modelo de utilidad bivariante donde aparte de considerar la riqueza personal, uno también tiene utilidad en la satisfacción por el nivel de riqueza de las otras personas. Dichos modelos existen en la literatura económica, conocidos como modelos de utilidad bivariante "Keeping up with the Joneses"(expresión que hace referencia a la comparación con el vecino de al lado como una marca para la clase social o la acumulación de bienes materiales.) En este caso, la función de utilidad $U(w, w_p)$ reemplaza a la función de una variable $U(w)$ donde w representa la riqueza personal frente la riqueza "del grupo" w_p.

6.6. Teorema del Criterio de Máxima Utilidad Esperada

Teorema 8. *El criterio de Máxima Utilidad Esperada (MEUC) es una regla de decisión óptima*

Demostración. Sean L_1, L_2 loterías que cumplen los axiomas mencionados anteriormente. Podemos suponer que L_1, L_2 están dadas por:

$$L_1 = \{p_1, A_1; p_2, A_2; ...; p_n, A_n\}$$

$$L_2 = \{q_1, A_1; q_2, A_2; ...; q_n, A_n\}$$

Podemos suponer que L_1, L_2 son loterías simples: si no lo fueran, por el axioma de descomposicionalidad, existen loterías simples L_1^*, L_2^* tal que $L_1 \sim L_1^*, L_2 \sim L_2^*$. Por transitividad, $L_1 \succ L_2$ si y solo si $L_1^* \succ L_2^*$, y viceversa en el caso contrario.

Podemos también suponer que L_1, L_2 tienen los mismos sucesos (que, en caso de que sean imposibles, tendrán probabilidad 0, pero no suponen un lastre). En caso contrario, sean L_1, L_2 de la forma:

$$L_1 = \{p_1, A_1; p_2, A_2; ...; p_i, A_i\}$$

$$L_2 = \{q_1, B_1; q_2, B_2; ...; q_j, B_j\}$$

Consideramos el conjunto de sucesos, ordenado,

$$C = \{C_1 < C_2 < ... < C_n\} = \{A_1, A_2, ..., A_i\} \cup \{B_1, B_2, ..., B_j\}$$

Sean

$$L_1' = \{C_1, w_1; C_2, w_2; ...; C_n, w_n\}$$

con

$$w_k = \begin{cases} p_i & \text{si} \quad C_k = A_i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

y

$$L_2' = \{C_1, w_1^*; C_2, w_2^*; ...; C_n, w_n^*\}$$

con

$$w_k^* = \begin{cases} q_j & \text{si} \quad C_k = B_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces $EU(L_1') = \sum_{k=1}^{n} w_k \; U(C_K) = \sum_{k=1}^{i} p_k \; U(A_k) = EU(L_1)$

Y por lo tanto $L_1 \sim L_1'$ según el criterio de la utilidad esperada. Análogamente, $L_2 \sim L_2'$ y por lo tanto es equivalente decir $L_1 \succ L_2$ a $L_1' \succ L_2'$.

Procedemos con la prueba.
Tenemos que $A_1 < A_2 < ... < A_n$ implica $A_1 \prec A_2 \prec ... \prec A_n$
Definimos $A_i^* = \{(1 - (U(A_i)), A_i; U(A_i), A_n\}$.
Por el *Axioma de continuidad*, para cada A_i existe una probabilidad $U(A_i)$ tal que $A_i \sim A_i^*$
Para A_1, $U(A_1) = 0$ y por lo tanto $A_1 \sim A_1$ y para A_n, $U(A_n) = 1$ y por lo tanto $A_n \sim A_n$.
Para el resto de los valores, tenemos $0 < U(A_i) < 1$ y, por monotonía y transitividad, $U(A_i)$ incrementa de 0 a 1 según aumenta A_i de A_1 a A_n.
Sustituyendo A_i por A_i^* en L_1 y, por el *axioma de intercambiabilidad*, obtenemos:

$$L_1 \sim L_1^{(1)} \equiv \{p_1, A_1; p_2, A_2; ...; p_i, A_i^*; ...; p_n, A_n\}$$

Donde el superíndice representa que un elemento A_i^* ha sido sustituido en L_1. Sustituimos un elemento más en $L_1^{(1)}$ y usando *intercambiabilidad* y *transitividad* obtenemos $L_1 \sim L_1^{(1)} \sim L_1^{(2)}$ continuamos este proceso hasta obtener $L_1^{(i)}$:

$$L_1 \sim L_1^{(i)} \equiv \{p_1, A_1^*; ...; p_n, A_n^*\}$$

Por *Descomponibilidad* y *transitividad*, tenemos

$$L_1 \sim L_1^{(i)} \sim L_1^* \equiv \{A_1, \sum p_i(1 - U(A_i)); A_n, \sum p_i U(A_i)\}$$

Repetimos el mismo proceso para la lotería L_2 para obtener

$$L_2 \sim L_2^{(j)} \sim L_2^* \equiv \{A_1, \sum q_i(1 - U(A_i)); A_n, \sum p_i U(A_i)\}$$

Recordemos que $A_n > A_1$. Por lo tanto, por el *Axioma de Monotonía*, L_1^* es preferida a L_2^* si lo siguiente es cierto:

$$\sum p_i U(A_i) > \sum q_i U(A_i)$$

y, por *transitividad*, esto también implica la misma desigualdad para las inversiones originales; por lo tanto $L_1 \succ L_2$.

$\square$

Asumamos por un momento que $U(A_i)$ es la utilidad de A_i. Entonces dado el anterior conjunto de axiomas, la inversión con mayor utilidad esperada es preferida, digamos

$$L_1 \succ L_2 \iff \sum p_i U(A_i) \equiv E_{L_1} U(x) > \sum q_i U(A_i) \equiv E_{L_2} U(x)$$

donde x representa los posibles resultados monetarios (los A_i de la demostración) y E_{L_1} y E_{L_2} denota la utilidad esperada de L_1 y L_2 respectivamente. Veremos ahora que las probabilidades $U(A_i)$ en efecto representan las preferencias del inversor con respecto a varios resultados, y por lo tanto también representan la utilidad correspondiente al resultado A_i. Por ello, veremos que $U(A_i)$ es la función de utilidad del inversor.

6.7. Propiedades de la función de utilidad

6.8. Preferencia y utilidad esperada

Hemos probado en la sección anterior que si la utilidad esperada de L_1 es mayor que la de L_2, entonces L_1 se preferirá a L_2. De hecho, la preferencia es una propiedad fundamental que refleja el gusto del inversor. Por lo tanto, es más lógico entenderlo al revés: si $L_1 \succ L_2$ entonces existe una función no decreciente U_1 tal que $E_{L_1} U_1(x) > E_{L_2} U_2(x)$. Es posible que $L_2 \succ L_1$ para otro inversor. Esto implica que existe otra función U_2 tal que $E_{L_2} U_2(x) > E_{L_1} U_1(x)$. Esta función no decreciente se llama función de utilidad. La razón por la que $U(A_i)$ refleja la utilidad derivada del dinero es por el axioma de continuidad: para dos valores cualesquiera A_1 y A_n y $A_1 < A_i < A_n$ existe una función (probabilidad) $U(A_i)$ tal que:

$$\{(1 - U(A_i)), A_1; U(A_i), A_n\} \equiv A_i^* \sim A_i$$

No todos los inversores estarán de acuerdo en el valor específico de $U(A_i)$, pero, para cada inversor, tal función $U(A_i)$ debe existir. Debido a que varía de un investor a otro, refleja su preferencia; y por lo tanto, se llama función de utilidad y refleja los gustos del inversor o su "curva de indiferencia". La "curva de indiferencia" normalmente se mide comparando entre una inversión incierta y una cantidad monetaria fija, veámoslo en un ejemplo:

Supongamos que $A_1 = 0$€, $A_2 = 10$€ y $A_3 = 20$€ Por el axioma de continuidad debe existir una función $0 < U(A_2) < 1$ tal que:

$$L* = \{(1 - U(A_2)), 0; U(A_2), 20\} \sim 10$$

Si se preguntara a diferentes inversores determinar $U(A_2)$ de tal forma que les hiciera sentirse indiferente entre recibir 10€ o L^*, probablemente darían diferentes valores para $U(A_2)$, y esto es justo lo que encierra la paradoja de San Petersburgo, aunque de forma menos aparente. Un investor podría decidir que $U(A_2) = 1/2$. Otro inversor al que le desagrade el riesgo podría quedarse con $U(A_2) = 3/4$. Puesto que $U(A_2)$ cambia de un inversor a otro, refleja sus gustos y preferencias; por eso la llamamos función de utilidad, o la utilidad asociada al valor A_2. De momento no le pedimos nada más que una propiedad: $U(A_1) = 0$ y $U(A_n) = 1$. Por el *axioma de monotonía* crece a la par que crecen los A_i.

6.9. ¿Es U(x) una función de probabilidad o una función de utilidad?

En la demostración del Criterio de máxima utilidad esperada, suponíamos que U(x) era una probabilidad, y por lo tanto $0 \leq U(x) \leq 1$. También hemos llamado a U(x) función de utilidad, pero esto no implica que la utilidad esté acotada entre 0 y 1, la utilidad, de hecho, puede tomar cualquier valor, incluso uno negativo.

Teorema 9. *Una función de utilidad está determinada salvo una transformación lineal positiva.*

Cuando hablamos de la determinación de la función de utilidad, nos referimos a que el ranking de las inversiones consideradas por el MEUC no cambia.

Demostración. Sea $U^*(x) = a + bU(x)$ una transformación lineal con $b > 0$. Supongamos que tenemos dos inversiones arriesgadas con rendimiento x e y. Queremos ver que

$$EU(x) > EU(y) \iff EU^*(x) > EU^*(y)$$

Tenemos que $EU^*(x) = a + bEU(x)$ $EU^*(y) = a + bEU(y)$ Y puesto que $b > 0$, esta claro que

$$EU(x) > EU(y) \iff EU^*(x) > EU^*(y)$$

□

Y por lo tanto, el ranking de inversiones dado por U o U^* es idéntico: si x tiene mayor utilidad esperada que y con U, también tiene mayor utilidad esperada con U^*

6.10. Significado de las "unidades de Utilidad"

Las unidades de utilidad, llamadas "utils", no tienen ningún significado: si la utilidad de la inversión A es 100 y la utilidad de la inversión B es 150, no podemos decir que la inversión A es 50 % mejor. El motivo es simple: puesto que una utilidad está determinada salvo una transformación lineal positiva, podemos alargar o contraer la diferencia entre la utilidad de la inversión A y la inversión B arbitrariamente.

Como podemos cambiar arbitrariamente de la utilidad U a la utilidad U^* sin cambiar el ranking de diferentes inversiones, podemos decir que lo único importante es el ranking de la inversión según su utilidad esperada y no tiene ningún significado.

6.11. Utilidad, patrimonio y diferencia en el patrimonio

Sea w el patrimonio inicial y x la diferencia de patrimonio derivado de la inversión que estamos considerando. Mientras que w es fijo, x es una variable aleatoria. La inclusión de w en la utilidad es esencial: la utilidad adicional derivada de la posesión de un activo arriesgado, por ejemplo acciones o un bono, depende de w. Por ejemplo, una persona con un patrimonio inicial

de w=10.000€ apreciaría más una adición de 1.000€ a su patrimonio que un millonario con 10 millones de euros.
Pese a la importancia de w en el paradigma de la utilidad esperada, existen pruebas de que los inversores, en el proceso de toma de decisiones, tienden a ignorar w y solo se fijan en la diferencia de riqueza. Y, por lo tanto, en vez de fijarse en U(x+w), el inversor toma decisiones solo teniendo en cuenta U(x). El primero en sugerir que, en la práctica, los inversores toman decisiones basándose en la diferencia de patrimonio fue Markowitz en 1952 [Markowitz H. 1952]. Sin embargo, no es hasta 1979 cuando Kahneman y Tversky publicaron su estudio de la Teoría de las Prospectivas [Kahneman D. y Tversky A. 1979], que este aspecto ha recibido atención por parte de los economistas. De hecho, una componente importante de la Teoría de las Prospectivas es que, en la práctica, **se toman decisiones en base a la diferencia de patrimonio, en vez de el patrimonio total.**

Capítulo 7

Variaciones del juego de San Petersburgo.

7.1. El problema de los dos Pablos

Pese a que la Paradoja de San Petersburgo es antigua, sigue siendo un problema que da paso a muchos otros estudiados con publicaciones hasta la actualidad. Sándor Csörgo y Gordon Simons [Csörgő S. y Simons G. 2006] plantean el siguiente problema:

Pedro les ofrece jugar a un solo juego de San Petersburgo con cada uno de 2 jugadores $Pablo_1$ y $Pablo_2$. Considerando todas las posibles **estrategias conjuntas** ¿pueden coordinarse de la forma que, respecto a participar de manera individual, obtengan algún tipo de valor añadido?

Primero debemos entender de que forma pueden coordinarse:

Definición 8. *Una **estrategia conjunta** entre n jugadores es todas las posibles distribuciones de probabilidad $p_k = (p_{k1}, p_{k2}, ..., p_{kn})$ con k=1,2,..,n que cumplen:*

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ik} = 1 \quad y \quad \sum_{k=1}^{n} p_{ik} = 1 \quad \text{para cada } i = 1, 2, ..., n$$

de tal forma que, como resultado de dicha estrategia, cada jugador obtiene el premio

$$V_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ki} X_i$$

donde X_i representa el premio obtenido en el juego del jugador i.

El vector p_k representa el premio que va a obtener el jugador k. Si la i-ésima componente del vector p_k es a_i, entonces el jugador k obtiene $a_i X_i$ del jugador i, y así sucesivamente. La primera restricción que imponemos es por el **reparto**, cada premio debe repartirse íntegramente entre los jugadores, y no puede repartirse más que la unidad. La segunda restricción es por **igualdad**,

cada jugador exigirá obtener una unidad de premio en total, y no menos. El premio obtenido por cada jugador en total será, por tanto, la suma de las fracciones de los premios de cada uno de los otros jugadores, según se haya acordado previamente.
Partimos de un juego con esperanza y varianza finita, digamos $E(X) = E < \infty$ y $Var(X) = V$ respectivamente. Supongamos que tenemos dos jugadores, $Pablo_1$ y $Pablo_2$. Pueden ponerse de acuerdo antes de jugar y repartir los premios a partes iguales: Si X_1, X_2 son dos variables aleatorias que representan los premios que obtienen $Pablo_1$ y $Pablo_2$ respectivamente, entonces su estrategia conjunta sería p=(1/2,1/2) y sus premios $\frac{X_1+X_2}{2}$. Por la linealidad de la esperanza,

$$E\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right) = \frac{E(X_1)+E(X_2)}{2} = \frac{2E(X)}{2} = E(X)$$

Es decir, no hay ninguna diferencia en la esperanza. Podemos esperar el mismo premio participando individualmente que colectivamente. Sin embargo, si que cambia la varianza:

$$Var\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right) = \frac{Var(X_1)+Var(X_2)}{4} = \frac{Var(X)}{2}$$

Se divide a la mitad, informalmente, "se reparte el riesgo". Como sabemos, la Paradoja de San Petersburgo no tiene esperanza finita (ni varianza). Si $Pablo_1$ y $Pablo_2$ juegan al juego de San Petersburgo, jueguen individualmente o conjuntamente, la esperanza es igualmente infinita. El resultado sorprendente [Csörgő S. 2003] es que la estrategia conjunta es demostrablemente superior a la individual: las ganacias conjuntas, $\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)$ son **estocásticamente mayores** que las ganancias individuales X_1 y X_2.

Definición 9. *Si A y B son variables aleatorias definidas en un mismo espacio muestral , decimos que A es estocásticamente mayor que B si*

$$\mathbf{P}\{A > x\} \geq \mathbf{P}\{B > x\} \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}$$

En términos análogos, podemos definir la ***igualdad o inferioridad*** *estocástica.*
En caso que no se dé ninguna de las anteriores, decimos que A y B ***no son estocásticamente comparables.***

Teorema 10. *Las variables independientes de San Petersburgo X e Y se pueden definir en un espacio de probabilidad suficientemente rico con otro par de variables aleatorias de San Petersburgo X' e Y' de tal forma que*

$$X + Y = 2X' + Y'I\{Y' \leq X'\} \quad \textit{casi siempre}$$

donde $I\{A\}$ representa la función indicatriz del evento $A \in \mathcal{A}$

Demostración. Sean X e Y definidas en un espacio de probabilidad con una tercera variable de San Petersburgo Z de tal forma que X,Y,Z son independientes. Este espacio es suficiente si definimos

$$X' = XI\{X = Y\} + \frac{\max(X,Y)}{2} I\{X \neq Y\}$$

$$Y' = XZI\{X = Y\} + \min(X,Y)I\{X \neq Y\}$$

Podemos comprobar que, si X = Y, entonces

$$2X' + Y'I\{Y' \leq X'\} = 2X + XZI\{XZ \leq X\} = 2X = X + Y$$

si $X \leq Y$

$$2X' + Y'I\{Y' \leq X'\} = 2\frac{\max(X,Y)}{2} + \min(X,Y)I\left\{\min(X,Y) \leq \frac{\max(X,Y)}{2}\right\} =$$

$$= \max(X,Y) + \min(X,Y) = X + Y$$

Puesto que $\max(X,Y)$ es al menos el doble que $\min(X,Y)$, si $X \neq Y$ □

Podemos comprobar que X' e Y' tienen la distribución conjunta que queremos, para cada j,k $\in \mathbf{N}$

$$\mathbf{P}\{X' = 2^j, Y' = 2^k\} = \mathbf{P}\{X' = 2^j, Y' = 2^k, X = Y\} + \mathbf{P}\{X' = 2^j, Y' = 2^k, X > Y\} +$$

$$+\mathbf{P}\{X' = 2^j, Y' = 2^k, X < Y\} =$$

$$= \mathbf{P}\{X = 2^j, XZ = 2^k, X = Y\} + \mathbf{P}\{X = 2^{j+1}, Y = 2^k, X > Y\} + \mathbf{P}\{Y = 2^{j+1}, X = 2^k, X < Y\}$$

$$\mathbf{P}\{X = 2^j, Y = 2^j, Z = 2^{k-j}\} + 2\mathbf{P}\{X = 2^{j+1}, Y = 2^k, X > Y\} =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{P}\{X = 2^j, Y = 2^j, Z = 2^{k-j}\} & \text{si} \quad k \geq j+1 \\ 2\mathbf{P}\{X = 2^{j+1}, Y = 2^k, X > Y\} & \text{si} \quad k < j+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{P}\{X = 2^j, Y = 2^j, Z = 2^{k-j}\} & \text{si} \quad k \geq j+1 \\ 2\mathbf{P}\{X = 2^{j+1}, Y = 2^k\} & \text{si} \quad k < j+1 \end{cases}$$

En ambos casos,

$$\mathbf{P}\{X' = 2^j, Y' = 2^k\} = \frac{1}{2^j}\frac{1}{2^k} = \mathbf{P}\{X = 2^j, Y = 2^k\}$$

que es,junto con el teorema anterior, justo lo que necesitamos:

$$X_1 + X_2 = S_2 =^{\mathcal{D}} T_2 = 2X_1 + X_2 I\{X_2 \leq X_1\} \tag{7.1}$$

Es decir, $T_2 \geq 2X_1$ (estocásticamente) con la desigualdad estricta en el caso de que $X_2 \leq X_1$ por lo tanto $Pablo_1$ debería escoger $T_2/2$ frente a X_1 y como consecuencia, $S_2/2$ sobre X_1. De la misma manera, $Pablo_2$ debería elegir $S_2/2$ frente a X_1.
Csörgo [Csörgő S. y Simons G. 2006] se refieren a este fenómeno como **'the two-Paul paradox'**, la paradoja de los dos Pablos, según lo hemos llamado. Igual que en la paradoja de San Petersburgo, el origen de esta paradoja es la esperanza *infinita* del juego de San Petersburgo. Si la esperanza del juego fuera finita, tendrían la misma esperanza (finita) de forma que no podría existir la posibilidad de que una fuera estocásticamente mayor que otra.
Ya solo cabe preguntarse **¿Cómo de superior es la estrategia conjunta sobre la individual?** Hay que tratar el tema cuidadosamente: todas las variables aleatorias, X_1, X_2 y $S_2/2$ tienen esperanza infinita, no podemos decir que ninguna tenga una esperanza mayor que otra. [Csörgő S. 2003] introduce un comparador de esperanzas infinitas:

Definición 10. *Definimos por comparador de esperanzas de dos variables aleatorias U y V la integral*

$$\mathbf{E}[U,V] = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{P}\{U > x\} - \mathbf{P}\{V > x\}] \, \mathrm{dx}$$

Podemos encontrar los detalles y propiedades de dicho comparador en el trabajo previamente citado. Lo introducimos nada más para dar un sentido matemático al *valor añadido* de elegir la estrategia conjunta frente a la individual, que sería precisamente $\mathbf{E}[S_2/2, X_1]$.

Teorema 11. *La estrategia conjunta provee un ducado de valor añadido*

Demostración. En el espíritu de la definición anterior, veremos la "esperanza de la diferencia" de las dos variables aleatorias $S_2/2$ y X_1.
Como hemos visto en 7.1, La diferencia entre una estrategia y otra es $X_2 I\{X_2 \leq X_1\}$. Es decir,

$$E(X_2 I\{X_2 \leq X_1\}) = E(X_2 \mathbf{P}\{X_1 \geq X_2 | X_2\}) \tag{7.2}$$

Vemos que

$$\mathbf{P}\{X_1 \geq 2^k | X_2 = 2^k\} = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 1 - \left[1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right] = \frac{2}{2^k} \qquad \text{para cada k} \in \mathbb{N}$$

y por lo tanto $\mathbf{P}\{X_1 \geq X_2 | X_2\} = 2/X_2$
Sustiyendo en 7.2:

$$E(X_2 \mathbf{P}\{X_1 \geq X_2 | X_2\}) = E\left(X_2 \frac{2}{X_2}\right) = 2$$

Es decir, un ducado extra para cada Pablo. □

Este resultado es consistente con el resultado obtenido con el comparador de esperanzas [Csörgő S. y Simons G. 2006].
Supongamos ahora que extendemos esta idea a una tercera Pablo, $Pablo_3$. El problema se complica notablemente. Podemos intuir que la estrategia conjunta, donde cada una obtiene $\frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{3} + \frac{X_3}{3}$, es superior a obtener las ganancias indiviudales X_1, X_2, X_3. Esto no es así. De hecho, las variables $S_3 = \frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{3} + \frac{X_3}{3}$ y X_1, X_2, X_3 **no son estócasticamente comparables**. (El motivo, que no desarrollaremos, es que la integral resultante de $\mathbf{E}[S_3, X_1]$ no está definida). Por lo tanto no hay motivo aparente para elegir una frente a la otra.
Por otra parte, la elección que hemos hecho de estrategia, $\mathbf{p}$=(1/3,1/3,1/3) es arbitraria, "la más razonable",nos puede parecer. Pero hay otras dos estrategias conjuntas que proveen de valor añadido:
La más sencilla es que cada Pablo dé sus ganancias a las otras dos Pablos, es decir,

$$\mathbf{p}_1 = (0, 1/2, 1/2) = \mathbf{p}_2 = (1/2, 0, 1/2) = \mathbf{p}_3 = (1/2, 1/2, 0)$$

Que de la misma forma que antes, provee de un ducado de valor añadido.
La segunda estrategia es que cada Pablo reparta la mitad de sus ganacias, quedándose la otra mitad, es decir,

$$\mathbf{p}_1 = (1/2, 1/4, 1/4) = \mathbf{p}_2 = (1/4, 1/2, 1/4) = \mathbf{p}_3 = (1/4, 1/4, 1/2)$$

Esta estrategia provee de un ducado y medio de valor añadido. El problema más general es el siguiente:
Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ es un vector no negativo que suma 1 que representa la estrategia de las tres Pablos, buscamos maximizar el operador de esperanza:

$$A(\mathbf{p}) = \mathbf{E}[p_1 X_1 + p_2 X_2 + p_3 X_3, X_1]$$

Que, en el caso de las 3 Pablos, resulta ser la segunda solución que hemos propuesto. El problema está estudiado más en general [Csörgő S. y Simons G. 2006] para n Pablos, que no expondremos en este trabajo.

7.2. Pablo está atrapado

Pablo se encuentra entre la espada y la pared, tras contraer numerosas deudas relacionadas con el juego. Pedro el prestamista le propone el siguiente juego, que Pablo no puede rechazar. Pablo tira una moneda equilibrada repetidamente. Cuando han hecho falta k lanzamientos para ver la primera cara, Pablo recibe $(-2)^k$ ducados. Es decir, si k es par, Pablo recibe 2^k ducados. y si es impar debe pagar 2^k ducados. La pregunta es la siguiente: ¿Debería estar Pablo contento con tal juego? La respuesta es que, paradójicamente, debería estar contento y descontento a la vez.
Si particionamos los enteros en los subconjuntos $\{1, 2, 4\}, \{3, 6, 8\}, \{5, 10, 12\}$,... de tal forma que la enésima partición consiste de los enteros $\{2n - 1, 4n - 2, 4n\}$. Entonces podemos ver el juego como un conjunto de "subjuegos" que corresponden a cada una de las particiones. Con probabilidad $2^{-(2n-1)} + 2^{-(4n-2)} + 2^{-4n}$ Pablo ha recibido el subjuego que da por premio $(-2)^k$ ducados con probabilidad

$$\frac{2^{-k}}{2^{-(2n-1)} + 2^{-(4n-2)} + 2^{-4n}}, \qquad k = 2n - 1, 4n - 2, 4n$$

Para cada uno de estos subjuegos es favorable para Pablo, es decir, que tiene un valor esperado positivo y por lo tanto Pablo debería estar contento.
Por otra parte, si particionamos los enteros de tal forma que la enésima partición es $2n, 4n - 3, 4n - 1$, entonces, con probabilidad $2^{-2n} + 2^{-(4r-3)} + 2^{-(4r-1)}$ Pablo recibe el subjuego que da como premio $(-2)^k$ ducados con probabilidad

$$\frac{2^{-k}}{2^{-2n} + 2^{-(4r-3)} + 2^{-(4r-1)}}, \qquad k = 2n, 4n - 3, 4n - 1$$

Cada uno de estos subjuegos es desfavorable para Pablo, con esperanza negativa, y por lo tanto debería estar descontento. Esta paradoja fue propuesta por Guttman a Székely en 1953 [Szekely Gabor y Richards 2004].

Recordamos que si X e Y son variables aleatorias con distribución conjunta y P(X/Y=y) denota la distribución de probabilidad condicionada de X, dado que Y=y, la esperanza condicionada E(X/Y) es la variable aleatoria que al valor y le asocia la esperanza E(X/Y=y) correspondiente a esa distribución de probabilidad.
El corazón de la paradoja consiste en que, sorprendentemente, existen variables aleatorias X,Y,Z de tal forma que $\mathbb{E}(X|Y) > 0 > \mathbb{E}(X|Z)$ con probabilidad 1. Si X representa las ganancias de este juego, Y = n, si Pablo recibe el n juego favorable tal que $X \in \{2n - 1, 4n - 2, 4n\}$. De la misma forma, sea Z=n, si Pablo recibe el n juego desfavorable tal que $X \in \{4n, 4n - 3, 4n - 1\}$. Entonces como hemos visto, $\mathbb{E}(X|Y) > 0 > \mathbb{E}(\mathbb{X}|\mathbb{Z})$ con probabilidad 1.

Capítulo 8

Aplicaciones

Una aplicación notable de la paradoja de San Petersburgo, debida a Durand [Durand D. 1957], se refiere a la valoración de las acciones ordinarias de las empresas de "crecimiento". En este caso, una empresa de "crecimiento" es aquella cuyos ingresos crecen mucho más rápido que la economía en general, y las acciones de estas empresas, o incluso las propias empresas, se denominan comúnmente "de crecimiento". Revisaremos esta aplicación en detalle debido a su aplicabilidad a los acontecimientos financieros de finales de los 90 y principios de los 2000. Como antecedente, recordamos que a principios de 2000 se habían producido aumentos sin precedentes de los precios de las acciones de crecimiento. Estos aumentos en los precios de las acciones provocaron un acalorado debate sobre si los inversores eran sabios al comprar éstas o si eran insensatos al no comprar mayores cantidades de acciones antes de que los precios aumentaran aún más. Por un lado estaban los escépticos, entre ellos Alan Greenspan presidente de la Junta de Gobernadores del Sistema de la Reserva Federal de los Estados Unidos, que expresó su preocupación por las presiones inflacionistas derivadas del aumento de los precios de las acciones. En un ahora famoso discurso del 5 de diciembre de 1996, la pregunta de Greenspan: "¿Pero cómo sabemos cuándo la exuberancia irracional ha aumentado indebidamente los valores de los activos, que luego se ven sometidos a contracciones inesperadas y prolongadas, como ha ocurrido en Japón durante la última década?" fue seguida por dramáticas fluctuaciones en los mercados financieros mundiales.

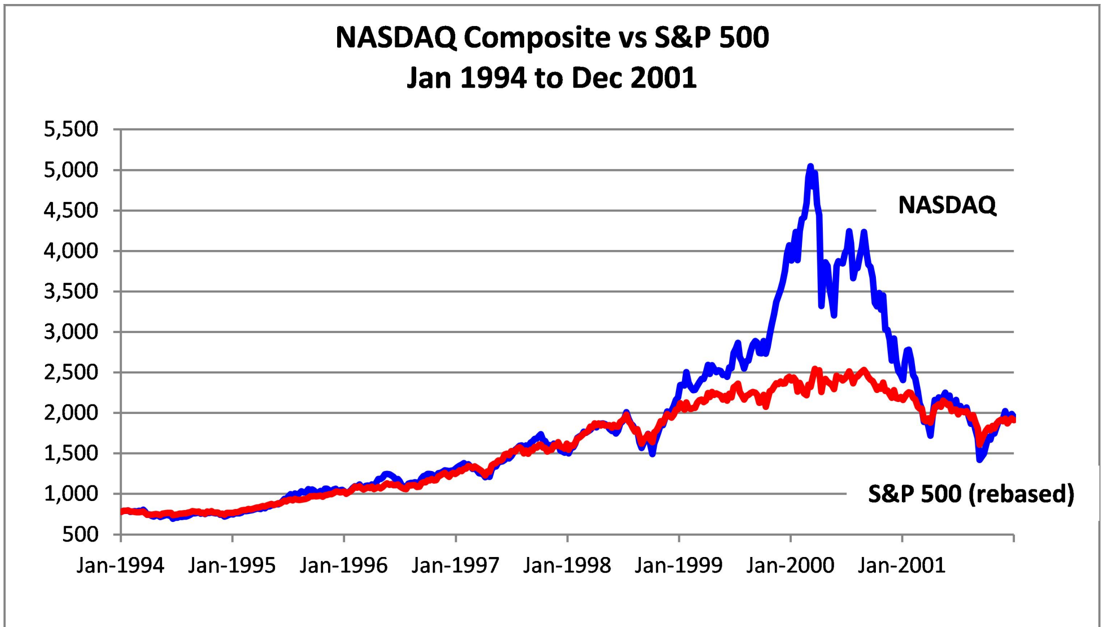


Chart 1.

Por otro lado, una gran cantidad de gente confiaba en estas nuevas empresas tecnológicas incluidos muchos fondos de inversión que habían adquirido un número considerable de acciones. De hecho, el Wall Street Journal informó el 19 de noviembre de 1999 [E.S. Browning Staff 1999], que 59 fondos de inversión habían acumulado aumentos de más del 100 % durante el período del 1 de enero al 17 de noviembre de 1999. Un fondo, el Nicholas-Applegate Global Technology Fund, especializado en acciones de tecnológicas, había aumentado su precio durante el mismo periodo en la asombrosa cantidad de 325 %, es decir, alrededor de un 1 % diario, una cantidad que el Journal comentó, en tono irónico, como posiblemente insuficiente para los "inversores pacientes". Siguiendo a Durand [Durand D. 1957], consideramos un juego de San Petersburgo modificado en el que Pedro es una empresa en crecimiento y Pablo es un posible comprador de las acciones de Pedro. Supongamos que la probabilidad de sacar cara es i/(1 + i), i > 0; entonces la probabilidad de cruz es 1/(1 + i). A continuación, supongamos que los pagos correspondientes son una serie de pagos crecientes en los que Pedro paga a Pablo D ducados si el primer lanzamiento resulta en una cruz, D(1 + g) ducados si el segundo lanzamiento es una cruz, $D(1+g)^2$ ducados si el tercer lanzamiento resulta en cruz, y así sucesivamente. Esto continúa hasta que el lanzamiento resulte en cara, momento en el que el juego termina. Si se necesitan k lanzamientos para que el juego termine, entonces el pago total a Pablo es

$$\sum_{j=0}^{k-2} D(1+g)^j = \frac{D[(1+g)^{k-1} - 1]}{g}$$

Puesto que las probabilidades de cara y cruz ocurren con probabilidad i/(i+1) y 1/(1+i), respectivamente, entonces, dicho pago, ocurre con probabilidad $i/(1+i)^k$. Por lo tanto el pago esperado por Pablo es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{(1+i)^k} \sum_{j=0}^{k-2} D(1+g)^j$$

que, cambiando el orden de sumación y calculando la primera suma resulta ser

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(1+g)^{k-1}}{(1+i)^k} = \begin{cases} D/(i-g) & \text{si} \quad g < i \\ \infty & \text{si} \quad g \geq i \end{cases} \tag{8.1}$$

Es decir, si $g < i$ la esperanza es finita y el pago esperado por Pablo es D/(i-g). Por otra parte, si $g \geq i$ entonces la serie diverge y el pago esperado de Pablo es infinito, en cuyo caso un Pablo realista puede rechazar sabiamente el pago de la cuota de entrada correspondiente. En el contexto de la apreciación de los valores financieros el parámetro i representa un tipo de interés compuesto (o un tipo de interés efectivo); en consecuencia, el valor actual de un préstamo de un dólar a devolver en un año en el futuro es 1/(1 + i). En la valoración del valor razonable de las acciones de una empresa, g representa la tasa de crecimiento de la empresa, medida por el aumento compuesto de los ingresos por acción. Un enfoque ampliamente aceptado para estimar el valor razonable de las acciones de Pedro es descontar todos los dividendos futuros a perpetuidad. En este caso, el valor razonable de las acciones de Pedro se calcula mediante el valor actual de todos los dividendos futuros. Denotemos por E_n las ganancias de Pedro (es decir beneficios) por acción en el año n. También, dejemos que B_n denote el valor contable de Pedro, o valor neto de los activos, por acción en el mismo año. Además denotemos por D_n el total de los dividendos pagados por Pedro por acción en el año n. Es claro que los cambios en valor contable de un año a otro son iguales a la diferencia entre los beneficios y los dividendos pagados, es decir, para todo $n \geq 1$

$$B_{n+1} - B_n = E_n - D_n$$

Cuando se estima el valor real de las acciones de Pedro, es común suponer que las razones $r = E_n/B_n$ y $p = D_n/E_n$ son independientes del año, n. Esta suposición implica que $B_{n+1} - B_n$, la diferencia del valor contable del año n al año n+1, es una constante múltiplo de E_n:

$$B_{n+1} - B_n = E_n - D_n = (1-p)E_n = (1-p)rB_n$$

Por ello, tanto los valores contables, dividendos y ganancias de Pedro están creciendo a un ritmo constante, g =(1-p)r. En este contexto, la suma de 8.1 representa una serie de pagos de dividendos perpetuos, empezando en D ducados, que crecen a un ritmo de g, descontados por i a perpetuidad. Si $i > g$, la suma converge; representa una estimación del valor real de una acción de Pedro. Sin embargo, si $i \leq g$, la serie 8.1 diverge, obteniendo una cara de la paradoja de San Petersburgo: la práctica de descontar futuros dividendos de manera uniforme a perpetuidad conduce a resultados paradójicos [Szekely Gabor y Richards 2004].
De esta forma la paradoja de San Petersburgo explica el aumento sin precedente de los precios de las acciones de las empresas tecnológicas "en crecimiento" a finales de los 90. Durante este periodo, el sistema de descuentos implantado por la Reserva Federal estaba prácticamente en mínimo históricos, en el contexto del artículo de Durand [Durand D. 1957], i era muy pequeño. Empeorando la situación, los compradores de las acciones "en crecimiento" asumieron que g, el crecimiento típico de una empresa tecnológica, iba a mantenerse alto *para siempre*. **El**

resultado real fue que i $<$ g. De hecho, en muchos casos, $i/g \approx 0$**.**
Descontando ganancias y dividendos a perpetuidad, cualquier uso de la fórmula 8.1 llevaba a que evaluaciones estimadas para muchas acciones de empresas tecnológicas fueran tan altas como el tasador quisiera. Habiendo aplicado dicha fórmula para obtener estimaciones desorbitadas para muchos valores, las acciones se compraban ávidamente subiendo el precio de manera extrema. A finales del año 2000 una serie de "prolongadas contracciones" trajeron pérdidas sin precedentes, tanto para empresas como particulares. 3 años después, empresas que mucho antes habían sido ávidamente compradas y fondos de inversión estaban extintos. Es sorprendente que las amenazas de Durand fueran ignoradas en los años 90, habiéndose escrito su artículo en los años 50, en un período económico similar. **"no he visto ninguna acción "en crecimiento" puesta en el mercado con el precio de infinitos dólares, pero seguiré mirando".**

Bibliografía

[Bernoulli D. 1954] *Exposition of a new theory on the measurement of risk.* Econometrica, 22(1):23-36

[Chow Y. S. y Robbins H. 1961] *On sums of independent random variables with infinite moments and "fair"games.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 47(3):330, 1961.

[Csörgő S. 2003] *Merge rates for sums of large winnings in generalized st. petersburg games.* Acta Scientiarum Mathematicarum, 69.

[Csörgő S. y Simons G. 1993] *On Steinhaus' resolution of the st. Petersburg Paradox.* Probability and Mathematical Statistics, 14(2):157-172.

[Csörgő S. y Simons G. 2006] *Pooling strategies for st petersburg gamblers.* Bernoulli, 12(6):971–1002.

[Durand D. 1957] *Growth Stocks and the Petersburg Paradox* The Journal of Finance, 12, 348–363.

[E.S. Browning Staff 1999] *Tech-Stock Rally Sparks Big Board, Nasdaq Gains* The Wall Street Journal

[Feller W. 1945] *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* Willey, 251-253

[Kahneman D. y Tversky A. 1979] *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk* Econometrica. 47 (2): 263–291.

[Levy H. 2016] *Stochastic Dominance Investment Decision Making under Uncertainty* Springer, 1-40

[Martin-Löf A. 1985] *A limit theorem which clarifies the 'petersburg paradox'.* Journal of Applied Probability, 22(3):634–643.

[Musgrave R. 1959] *theory of public finance* The Southern Economic Association

[Markowitz H. 1952] *Portfolio Selection* The Journal of finance

[S. Csörgo G. Simons 1996] *A strong law of large numbers for trimmed sums, with applications to generalized St. Petersburg games* Stat. Prob. Lett. 26 65–73.

[Steinhaus H. 1949] *The so-called petersburg paradox.* Colloq. Math, 2:56–58

[Szekely Gabor y Richards 2004] *The St. Petersburg Paradox and the Crash of High-Tech Stocks in 2000.* The American Statistician. 58. 225-231.