



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Matemáticas**

**Problemas de coloración de grafos y grafos fuertemente regulares**

**Autora: María Martínez Rodríguez**

**Tutor: José Enrique Marcos Naveira**

---

*A mi familia, por la vida y la educación que me han dado.  
Sin vuestro apoyo incondicional no estaría aquí.*

---

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Conceptos Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Definiciones básicas . . . . .	7
2.2. Representación de grafos . . . . .	9
2.3. Operaciones con grafos . . . . .	10
2.4. Algunos tipos de grafos . . . . .	11
2.5. Otros invariantes de grafos . . . . .	16
<b>3. Coloración de vértices</b>	<b>18</b>
3.1. Presentación del problema . . . . .	18
3.2. Complejidad del problema . . . . .	20
3.3. Estudio del número cromático de ciertas familias . . . . .	21
3.3.1. Grafos completos . . . . .	21
3.3.2. Grafos bipartitos . . . . .	22
3.3.3. Ciclos . . . . .	22
3.3.4. Ruedas . . . . .	23
3.4. Caso general . . . . .	23
3.4.1. Algoritmo GREEDY . . . . .	24
3.4.2. Cotas del número cromático . . . . .	28
3.4.3. Algoritmo DSatur . . . . .	33
3.5. Coloración de grafos planos . . . . .	36
3.6. Algunas aplicaciones . . . . .	40
<b>4. Otros problemas de coloración</b>	<b>43</b>
4.1. Coloración de aristas . . . . .	43
4.1.1. Definiciones básicas . . . . .	43
4.1.2. Relación con el problema de coloración de vértices . . . . .	44
4.1.3. Resultados sobre el índice cromático . . . . .	46
4.1.4. Algunos grafos de clase 2 . . . . .	53
4.2. Coloración de caras . . . . .	57
4.2.1. Presentación del problema y definiciones básicas . . . . .	57

---

4.2.2. Relación con el problema de coloración de vértices . . . . .	59
<b>5. Grafos fuertemente regulares y relación con otras familias de grafos</b>	<b>64</b>
5.1. Grafos fuertemente regulares . . . . .	64
5.2. Automorfismos de grafos . . . . .	73
5.3. Algunas familias de grafos definidas por automorfismos y relación con otros grafos .	75
5.4. Grafo de Paley . . . . .	79
5.4.1. Resultados previos . . . . .	79
5.4.2. Construcción del grafo de Paley . . . . .	80
<b>Bibliografía</b>	<b>86</b>

Se recomienda encarecidamente la impresión a color del presente trabajo.

---

# Capítulo 1

## Introducción

La Teoría de Grafos es un área de las matemáticas que estudia las propiedades y relaciones entre grafos: una estructura matemática constituída por vértices y los vínculos entre pares de vértices a los que llamamos aristas.

Leonhard Euler fue el primero en introducir la idea de grafo en 1736 en una publicación sobre el problema de los puentes de Königsberg. Dicho problema planteaba si era o no posible encontrar un recorrido que atravesara toda la ciudad prusiana pasando exactamente una vez por cada uno de sus puentes y acabando en el punto de partida. Lo que en inicio surgió como una herramienta destinada a resolver problemas recreativos, poco a poco fue motivando también un fructífero desarrollo teórico.

A mediados del siglo XIX, Francis Guthrie un estudiante del *University College* de Londres observó que las regiones de un mapa podían colorearse sin que quedaran del mismo color dos áreas adyacentes, utilizando solo cuatro colores; un hecho que pronto pasó a conocerse como la conjetura de los cuatro colores. Surgía así el problema de coloración de grafos, uno de los temas principales que nos ocuparán en este trabajo.

Fue a inicios del siglo XX cuando se formalizó la Teoría de Grafos tal y como la conocemos hoy en día. Además, el desarrollo durante el resto del siglo de la informática desembocó en el estudio de algoritmos de grafos, que supusieron una revolución en el área de los problemas de optimización, y como veremos más adelante también impulsaron nuevas vías de investigación sobre el problema de coloración. En 1976 los matemáticos Kenneth Appel y Wolfgang Haken, probaron el Teorema de los Cuatro Colores mediante la asistencia de un ordenador; más de cien años después de que se planteara la conjetura.

En la actualidad la teoría de grafos es una potente área de investigación, que confluye con otras áreas de las matemáticas como el álgebra, la investigación operativa o la probabilidad, y que además tiene numerosas aplicaciones en disciplinas como las ciencias sociales, la biología o las ciencias de datos.

Mi interés por estas estructuras surge al cursar la asignatura de Matemática Discreta, intrigada en parte por famosos resultados como el Teorema de los Cuatro Colores, y por la geometría de algunos grafos. Este trabajo es fruto de profundizar en esas cuestiones; por ello consta de dos partes bien diferenciadas: la primera dedicada al problema de coloración de grafos, y la segunda relativa al estudio de los grafos fuertemente regulares, una familia de grafos conocida por su estructura extremadamente regular y por las propiedades que se deducen de ésta.

Aunque hayamos hablado del problema de coloración, veremos que en realidad resulta más adecuado hablar de problemas de coloración. En este trabajo se estudiarán la coloración de vértices, la de aristas y, cuando sea oportuno, la de caras. Se probará, sin embargo, que los dos últimos casos pueden reducirse al estudio del primero: la coloración de vértices.

Tras un capítulo de preliminares donde se expondrán los conceptos y resultados básicos para el resto del trabajo, en los capítulos 3 y 4 presentaremos cada uno de los problemas de coloración y trataremos de responder a las siguientes preguntas: ¿existe siempre una coloración de un grafo? ¿Cómo se construye? ¿Cuál es el menor número de colores necesarios para colorear un grafo? ¿Sabemos construir una coloración que utilice el menor número de colores? Para responderlas recurriremos a diversos enfoques: el estudio de diversas familias importantes de grafos, procedimientos algorítmicos y razonamientos sobre unas propiedades de los grafos llamadas invariantes.

La coloración de grafos es uno de esos raros ejemplos en la matemáticas donde problemas cuyo enunciado puede entenderse y visualizarse de manera muy sencilla, pueden tratar aspectos excepcionalmente difíciles de resolver. Un ejemplo de esto es el ya mencionado Teorema de los Cuatro Colores. Pese a que no lo demostraremos, se dedicará una sección a la coloración de vértices de grafos planos con el objetivo de enunciarlo, de comprenderlo mejor, y de probar algunas versiones más débiles del mismo.

En el capítulo final estudiaremos los grafos fuertemente regulares, un tipo de grafos que fueron introducidos por primera vez en 1963 por el matemático indio Raj Chandra Bose, y que resultan interesantes por, como indica Peter J. Cameron en [Cam01], *encontrarse entre lo altamente estructurado y lo aleatorio*. Además, presentaremos diferentes familias de grafos con propiedades comunes y estudiaremos las relaciones entre ellas y con los grafos fuertemente regulares. A diferencia de los capítulos precedentes, en este se aborda el estudio de grafos desde un punto de vista más algebraico; mostrando la gran versatilidad de la teoría de grafos.

En resumen, el objetivo del trabajo ha sido estudiar de manera rigurosa y coherente varios problemas de teoría de grafos, aunando cuestiones más clásicas, con enfoques y herramientas más modernas. Todo ello del modo más claro y didáctico posible.

Como último comentario de esta introducción, se recomienda al lector la impresión a color del presente documento, o la visualización del mismo en un dispositivo electrónico; ya que por la naturaleza del tema a tratar, durante todo el trabajo y en particular en los capítulos de coloraciones, son útiles (y a menudo imprescindibles) las ilustraciones policromáticas.

---

## Capítulo 2

# Conceptos Preliminares

En este capítulo presentaremos unas primeras definiciones relativas a la Teoría de Grafos, notación, así como los resultados más elementales relativos a la misma, y que serán necesarios para el desarrollo de los siguientes capítulos. Estos se presentarán sin demostración o con pocos detalles, pues son resultados básicos que generalmente se abordan en la asignatura de Matemática Discreta (o equivalentes) del Grado en Matemáticas, y por tanto se consideran conocidos. Todos ellos pueden consultarse en la bibliografía utilizada para el trabajo; para este primer capítulo es particularmente útil el volumen [Die97].

### 2.1. Definiciones básicas

**Definición 1.** Un *grafo simple no dirigido* es un par ordenado  $G = (V, E)$ , donde:

- $V$  es un conjunto a cuyos elementos llamamos *vértices*.
- $E$  es un conjunto a cuyos elementos llamamos *aristas*, que verifica que  $E \subset \{\{a, b\} : a, b \in V \text{ y } a \neq b\}$ . A este conjunto,  $\{\{a, b\} : a, b \in V \text{ y } a \neq b\}$ , a menudo se le denota como  $\binom{V}{2}$ .

Por convención, al conjunto de vértices de un grafo simple no dirigido  $G$  nos referimos como  $V(G)$ , y al conjunto de aristas como  $E(G)$ . Estas convenciones son independientes del nombre que se haya dado a estos dos conjuntos: al conjunto de vértices  $W$  del grafo simple no dirigido  $H = (W, F)$  igualmente lo denotamos como  $V(H)$  y no como  $W(H)$ , y para referirnos al conjunto  $F$ , escribimos  $E(H)$ .

**Observación 2.** Para este trabajo, salvo que se indique lo contrario, nos restringiremos al estudio de grafos simples no dirigidos, y cuyo conjunto de vértices sea finito. Por ello, y para no recargar la terminología, a partir de ahora nos referiremos a ellos simplemente como *grafos*.

Si  $\{a, b\}$  es una arista de un grafo  $G = (V, E)$ ,  $a$  y  $b$  son los dos vértices *incidentes* en esa arista, y decimos que son sus *extremos*. Además, se dice que son vértices *adyacentes* o *vecinos*. Por simplificar la notación representamos la arista  $\{a, b\}$  como  $ab$ . De manera similar, llamamos *vecindario de un vértice*  $v \in V$ , al conjunto de los vértices adyacentes con él, esto es, a  $\{u \in V : uv \in E\}$ ; y lo denotamos como  $\Gamma(v)$ .

Es importante ahora introducir el concepto de *isomorfismo de grafos*, que como veremos más adelante nos va a permitir distinguir y estudiar propiedades inherentes a la estructura de los grafos.

**Definición 3.** Dados dos grafos  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$ , un *isomorfismo* entre ellos es una biyección  $f: V \rightarrow V'$ , que cumple que  $ab \in E$  si y solo si  $f(a)f(b) \in E'$  para cada  $a, b \in V$ .

Decimos por lo tanto, que  $G$  y  $G'$  son *isomorfos*, y se denota como  $G \cong G'$ .

Generalmente no distinguiremos si dos grafos son isomorfos, y trabajaremos con ellos como si fueran el mismo.

**Definición 4.** A un isomorfismo de  $G$  en sí mismo, se le llama *automorfismo*. Al conjunto de automorfismos de un grafo se le denota como  $Aut(G)$ .

**Teorema 5.** Dado un grafo  $G = (V, E)$ , el conjunto de los automorfismos de  $G$  junto con la operación composición ( $\circ$ ) constituyen un grupo.

Es importante definir también ciertos conceptos que nos permiten tener más información sobre un grafo  $G$  y sus vértices:

**Definición 6.** Dado un grafo  $G = (V, E)$ , al cardinal  $|V|$ , se le conoce como su *orden*.

**Definición 7.** El *grado* de un vértice  $v$  de un grafo  $G = (V, E)$ , es el número de aristas en las que incide  $v$ . Lo denotamos como  $deg_G(v)$  o  $deg(v)$  si está claro a qué grafo nos referimos. A un vértice que tenga grado 0 lo llamamos *vértice aislado*

**Proposición 8.** El número de vértices de grado impar de un grafo es siempre par.

*Demostración.* Se deduce del hecho de que un grafo sobre  $V$  tiene  $\frac{1}{2} \sum_{v \in V} deg(v)$  aristas, así que  $\sum_{v \in V} deg(v)$  es par, y necesariamente, el número de vértices de grado impar ha de ser par.  $\square$

**Definición 9.** Al número  $\delta(G) := \min\{deg(v) : v \in V\}$  lo llamamos *grado mínimo* de  $G$ .

**Definición 10.** Llamamos *grado máximo* de  $G$  al número  $\Delta(G) := \max\{deg(v) : v \in V\}$ .

**Definición 11.** Dado un grafo  $G$ , decimos que su *grado promedio* es el número

$$deg(G) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} deg(v).$$

El grado promedio cuantifica globalmente lo que se mide localmente con el grado de los vértices: el número de aristas de  $G$  por vértice.

Claramente se tiene esta relación:  $\delta(G) \leq \text{deg}(G) \leq \Delta(G)$ .

**Definición 12.** Si  $G$  es un grafo con  $n$  vértices y grados  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ , entonces llamamos *sucesión de grados* a la  $n$ -tupla  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

Esta sucesión, aunque los vértices de  $G$  puedan enumerarse de distintas maneras, es única por haberse considerado los grados en orden ascendente.

**Lema 13.** Sean  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  dos grafos isomorfos. Sea  $f: V \rightarrow V'$  el isomorfismo entre ellos. Entonces para cada  $v \in V$  se cumple que  $\text{deg}(v) = \text{deg}(f(v))$ , y además las sucesiones de grados de  $G$  y  $G'$  coinciden.

**Observación 14.** Es conocido que el recíproco no es cierto. Dos grafos pueden tener la misma sucesión de grados y no ser isomorfos.

A las propiedades de los grafos que se preservan por isomorfismos las llamamos *invariantes*. El orden de los grafos y su sucesión de grados son claramente invariantes por lo notado en el lema anterior. El estudio de estos invariantes es uno de los principales intereses de la Teoría de Grafos, y algunos de ellos son precisamente la motivación de este trabajo.

## 2.2. Representación de grafos

En Teoría de Grafos es habitual representar los grafos con dibujos: con un punto para cada vértice y dibujando una línea que una dos puntos si los correspondientes vértices forman una arista. Obviamente varios dibujos pueden representar un mismo grafo. A continuación, un ejemplo con fines meramente ilustrativos de esta idea:

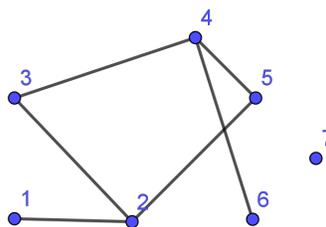


Figura 2.1: Una representación del grafo sobre el conjunto de vértices  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , que tiene por conjunto de aristas a  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 2\}\}$

Otra manera de representar un grafo  $G = (V, E)$ , es a través de su *matriz de adyacencia*  $A = (a_{i,j})_{n \times n}$  que está definida como:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $n$  es el orden del grafo  $G$  y  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es su conjunto de vértices.

Al ser los grafos que tratamos no dirigidos, es evidente que una matriz de adyacencia coincide con su traspuesta, pues  $v_i v_j$  es la misma arista que  $v_j v_i$  (siendo  $i \neq j$ ).

Determinamos que hay, como máximo, tantas matrices de adyacencia como formas de ordenar sus vértices, esto es,  $n!$ . Sin embargo, aunque la matriz no sea un invariante, sí lo es el determinante de la misma. Esto es así porque una matriz de adyacencia se obtiene a partir de otra del mismo grafo mediante permutaciones de filas y columnas, y sabemos que las transformaciones elementales no afectan al determinante.

**Ejemplo 15.** La matriz de adyacencia del ejemplo anterior 2.1, teniendo en cuenta que  $v_i = i$  para  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ , sería:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aunque menos habitual, otra matriz que nos permite conocer un grafo  $G = (V, E)$  con  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ , es su *matriz de incidencia*  $B = (b_{i,j})_{n \times m}$  que está definida de la siguiente manera:

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in e_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

### 2.3. Operaciones con grafos

Nos surge ahora la pregunta de cómo operar con grafos.

Dados dos grafos  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$ , definimos las operaciones de unión e intersección de los mismos de la manera natural:  $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$  y  $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$ .

Para definir la diferencia de grafos hará falta introducir algunos conceptos.

**Definición 16.** Si  $G \cap G'$  es el *grafo vacío*  $(\emptyset, \emptyset)$ , o más simplemente  $\emptyset$ , decimos que  $G$  y  $G'$  son *disjuntos*.

**Definición 17.** Si  $V' \subset V$  y  $E' \subset E$ , decimos que  $G'$  es un *subgrafo* de  $G$  y  $G$  un *supergrafo* de  $G'$ . Esto se representa como  $G' \subset G$ .

**Definición 18.** Si  $G' \subset G$ , y  $G'$  contiene todas las aristas  $ab \in E$ , tales que  $a, b \in V'$ , entonces se dice que  $G'$  es un *subgrafo inducido* de  $G$ . También es habitual decir que  $V'$  induce  $G'$  en  $G$ , y se denota como  $G' =: G[V']$ .

A consecuencia de la notación anterior, si  $W \subset V$  es cualquier conjunto de vértices, escribimos  $G[W]$  para denotar al grafo sobre  $W$  cuyas aristas son precisamente las aristas de  $G$  con ambos extremos en  $W$ .

Por otra parte, si  $H$  es un subgrafo de  $G$ , no necesariamente inducido, abreviamos  $G[V(H)]$  a  $G[H]$ .

Además, si  $U$  es cualquier conjunto de vértices (usualmente de  $G$ ), escribimos  $G - U$  para referirnos a  $G[V \setminus U]$ . Dicho de otra manera,  $G - U$  se obtiene de  $G$  borrando todos los vértices de  $U \cap V$ , y las aristas en las que estos inciden. Si  $U = \{v\}$ , tiene un solo elemento, solemos escribir  $G - v$ , en lugar de  $G - \{v\}$ . Finalmente, en lugar de  $G - V(G')$ , escribimos  $G - G'$ .

**Definición 19.** Si  $F \subset \binom{V}{2}$  es un conjunto de aristas, definimos  $G - F := (V, E - F)$  y  $G + F := (V, E \cup F)$ . Como antes, abreviaremos  $G + \{e\}$  y  $G - \{e\}$ , como  $G + e$  y  $G - e$ .

**Definición 20.** Si  $G$  y  $G'$  son disjuntos, denotamos por  $G * G'$  al grafo obtenido de  $G \cup G'$  si además se añaden las aristas resultantes de unir todos los vértices de  $G$  a todos los vértices de  $G'$ .

## 2.4. Algunos tipos de grafos

A continuación introduciremos algunos tipos de grafos y algunas caracterizaciones que por su notable importancia serán de utilidad durante el resto del trabajo.

**Definición 21.** Llamamos *grafo complementario* de  $G = (V, E)$ ,  $\overline{G}$ , al grafo sobre  $V$ , que tiene como conjunto de aristas a  $\binom{V}{2} - E$ .

**Definición 22.** Decimos que un grafo  $G$  es *k-regular* o *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado,  $k$ .

**Definición 23.** Se dice que un grafo  $G$  es *completo* si todo par de vértices está conectado por una arista. A un grafo completo de  $n$  vértices lo denotamos por  $K^n$ .

**Ejemplo 24.** El grafo de *Petersen* es un grafo 3-regular.

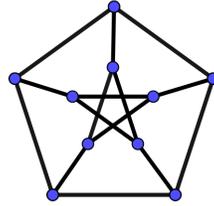


Figura 2.2: Grafo de *Petersen*

**Ejemplo 25.** Representación de los grafos completos de 1 a 5 vértices.

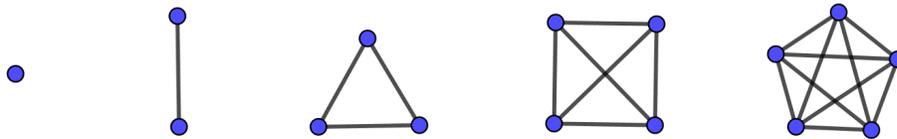


Figura 2.3: De izquierda a derecha  $K^1$ ,  $K^2$ ,  $K^3$ ,  $K^4$  y  $K^5$

**Definición 26.** Un *camino* es un grafo no vacío  $P = (V, E)$  de la forma

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$$

donde todos los  $x_i$  son distintos. A menudo, por simplicidad, nos referimos al camino mediante la secuencia natural de sus vértices:  $P = x_0x_1\dots x_k$ , y decimos que  $P$  es un camino de  $x_0$  a  $x_k$ , que son sus *extremos*. El número de aristas de un camino es su *longitud*; y al camino de longitud  $k$  lo denotamos como  $P^k$ .

El siguiente concepto, la distancia entre dos vértices de un grafo, surge de manera natural tras conocer lo que es un camino y su longitud.

**Definición 27.** La *distancia* en  $G$  de dos vértices,  $x$  e  $y$ , es la longitud del menor camino de  $x$  a  $y$  en  $G$ . Se denota como  $d_G(x, y)$ , o como  $d(x, y)$  si está claro el grafo al que nos referimos. Si tal camino no existe, por convención asumimos que  $d(x, y) := \infty$ .

La distancia en  $G$  entre dos puntos es un invariante de grafos, es decir, se preserva por isomorfismos.

**Definición 28.** Si  $P = x_0x_1\dots x_k$  es un camino y  $k \geq 3$  entonces al grafo  $C := P + x_kx_0$  se le llama *ciclo*.

Nuevamente, a  $C$  también se le denota por  $C := x_0x_1\dots x_kx_0$ . El número de aristas de un ciclo es su longitud, y a un ciclo de longitud  $k$  se le llama  $k$ -ciclo y se le denota por  $C^k$ .

**Ejemplo 29.** Representación de los ciclos con longitudes de 3 hasta 7.

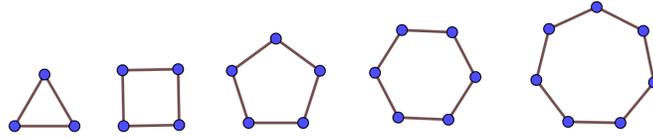


Figura 2.4: De izquierda a derecha  $C^3, C^4, C^5, C^6$  y  $C^7$ .

**Definición 30.** Sea  $r \geq 2$  un entero. Un grafo  $G = (V, E)$  es  $r$ -partito si  $V$  admite una partición en  $r$  clases tal que cada arista del grafo tiene a sus extremos en clases diferentes.

Si además, cada par de vértices de clases diferentes conforman una arista, decimos que es un *grafo  $r$ -partito completo*. Este se representa por  $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ , siendo los  $n_1, n_2, \dots, n_r$ , los cardinales de las  $r$  clases que conforman la partición.

Los grafos *bipartitos* (o 2-partitos) son los más recurrentes de esta familia, y están caracterizados de la siguiente manera:

**Proposición 31.** Un grafo es *bipartito* si y solo si no contiene ningún ciclo de longitud impar.

**Ejemplo 32.** Representación de dos grafos 3-partitos, el de la derecha, además, completo.



Figura 2.5: Dos grafos 3-partitos.

Otra noción elemental es la de conexión de un grafo:

**Definición 33.** Un grafo no vacío  $G$  es *conexo*, si dado cualquier par de vértices del grafo, éstos están unidos por un camino en  $G$ .

Un grafo que no es conexo, es unión de dos o más subgrafos conexos que dos a dos no tienen vértices en común. A esos subgrafos conexos se les llama *componentes conexas*.

**Definición 34.**  $G = (V, E)$  es un *grafo  $k$ -conexo* (con  $k \in \mathbb{N}$ ) si su orden es mayor que  $k$  y  $G - X$  es conexo para cada conjunto  $X \subset V$  con  $|X| < k$ . Dicho de otro modo, no hay dos vértices en  $G$  que queden desconectados entre sí al quitar menos de  $k$  vértices cualesquiera del grafo.

**Observación 35.** Cuando decimos que dos vértices de un grafo están desconectados entre sí, significa que no hay ningún camino en ese grafo que los tenga como extremos.

**Definición 36.** A un grafo que no contiene como subgrafo a ningún *ciclo*, lo llamamos *acíclico* o *bosque*. A un *bosque* conexo lo llamamos *árbol*.

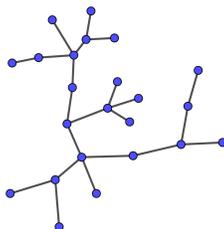


Figura 2.6: Un árbol.

**Observación 37.** Un *bosque* es un grafo cuyas componentes conexas son árboles. Los vértices de grado 1 son sus *hojas*, y se tiene que todo árbol no trivial tiene al menos dos hojas: considérense los extremos del camino más largo.

**Teorema 38.** Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grafo  $T$ :

1.  $T$  es un árbol;
2. Dos vértices cualesquiera de  $T$  están unidos por un único camino en  $T$ ;
3.  $T$  es minimalmente conexo, es decir,  $T$  es conexo, pero  $T - e$  no lo es para cualquier arista  $e \in T$ ;
4.  $T$  es maximalmente acíclico, es decir,  $T$  no contiene ningún ciclo, pero  $T + xy$  sí, para dos vértices  $x, y \in T$  no adyacentes.

## Grafos eulerianos

Aunque no son grafos, los *recorridos* son de notable importancia y son necesarios para la definición de grafos eulerianos.

**Definición 39.** Un *recorrido* (de longitud  $k$ ) en un grafo  $G$ , es una secuencia no vacía  $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots e_{k-1} v_k$  de vértices y aristas de  $G$  tales que  $e_i := \{v_i, v_{i-1}\}$  para cada  $i < k$ . Si  $v_0 = v_k$  decimos que el recorrido es *cerrado*.

Se tiene que si los vértices de un recorrido son todos distintos, entonces éste define naturalmente un camino en  $G$ .

Llamamos *recorrido euleriano* a un recorrido cerrado de un grafo que pasa por cada arista exactamente una vez, aunque pase varias veces por un mismo vértice.

**Definición 40.** Un grafo es *euleriano* si admite un recorrido euleriano.

**Teorema 41.** (Euler, 1736) Un grafo conexo es euleriano si y solo si cada vértice tiene grado par.

Este teorema responde a la pregunta de cuándo un grafo tiene un *recorrido euleriano*, un recorrido cerrado que pasa por cada arista del grafo exactamente una vez.

### Grafos hamiltonianos

De manera similar, es razonable preguntarnos cuándo un grafo  $G$  tiene un recorrido cerrado que contiene a cada vértice del grafo exactamente una vez. Todos los recorridos de esa forma con 3 o más vértices, son ciclos, y los llamamos *ciclos hamiltonianos*.

**Definición 42.** Un grafo  $G$  que contiene como subgrafo un *ciclo hamiltoniano* es un *grafo hamiltoniano*.

Determinar si un grafo es *hamiltoniano* es más complicado que determinar si es euleriano, y no hay caracterizaciones sencillas de ello, aunque es muy relevante la siguiente condición suficiente:

**Teorema 43.** (Dirac 1952) Todo grafo  $G$  con  $n \geq 3$  vértices y grado mínimo mayor o igual que  $\frac{n}{2}$ , tiene un ciclo hamiltoniano.

### Grafos planares y planos

Otra noción muy importante es la de *grafos planos* y *grafos planares*. Cuando dibujamos en papel un grafo, aunque ya dijimos que no había una única forma de hacerlo, generalmente tratamos de hacerlo del modo más sencillo y claro posible. Un modo de limitar el desastre creado por todas las líneas es evitar las intersecciones y superposiciones de las mismas, así que es razonable que nos preguntemos si es posible dibujar un grafo de manera que no haya dos aristas que se intersequen en un punto diferente a sus extremos. Surgen así las siguientes definiciones:

**Definición 44.** Llamamos *grafo plano* al dibujo que representa un grafo en el que no aparecen dos aristas superponiéndose ni intersecándose en puntos diferentes a sus extremos.

**Definición 45.** A los grafos abstractos  $G = (V, E)$  que se pueden dibujar de esta manera los llamamos *grafos planares*.

La relación entre estos conceptos es muy cercana, y no es extraño encontrarse con abusos de notación al respecto. Esto no es muy problemático pues todo grafo planar puede representarse con un grafo plano, y todo grafo plano es la representación de un grafo planar. Sin embargo, no toda representación de un grafo planar es un grafo plano. Sin ir más lejos la figura 2.1 no es un grafo plano, pero el grafo asociado a ese dibujo sí que es planar, pues podría representarse de la manera siguiente sin que dos aristas intersecaran en puntos diferentes a sus extremos:

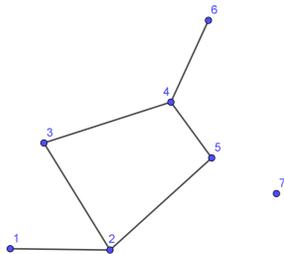


Figura 2.7: Representación alternativa (como grafo plano) del grafo 2.1

Los grafos planares son un tema muy amplio, y aunque no son el principal objeto de estudio de este trabajo, es necesario que mencionemos el *Teorema de la Fórmula de Euler* por su notable importancia. Primero que nada, nos hace falta la definición de *cara* de un grafo: dado un grafo plano, llamamos *caras* a las regiones delimitadas por aristas, y al espacio no acotado que rodea al grafo.

**Teorema 46.** (*Teorema de la Fórmula de Euler*). Sea  $G$  un grafo planar y conexo con  $V$  vértices,  $A$  aristas y  $C$  caras. Entonces se verifica que:

$$C + V = A + 2.$$

## 2.5. Otros invariantes de grafos

Muchas de las características mencionadas hasta ahora: conexión, regularidad, cantidad de ciclos de un grafo, sucesión de grados... son invariantes de grafos, esto es, propiedades que se mantienen en grafos isomorfos. La justificación en la mayoría de casos es inmediata usando la noción de isomorfismo de grafos.

Finalizamos el capítulo presentando otros tres invariantes que se encuentran muy estrechamente relacionados con el concepto de distancia:

**Definición 47.** La mayor distancia entre dos vértices cualesquiera de un grafo  $G$  es el *diámetro* de  $G$ . Se denota como  $diam(G)$ .

**Definición 48.** La menor longitud de un ciclo contenido en un grafo  $G$ , es su *cintura* (o *girth*, en inglés). Se denota por  $g(G)$ .

**Definición 49.** La mayor longitud de un ciclo contenido en un grafo  $G$ , es su *circunferencia*.

**Observación 50.** Si un grafo no contiene ningún ciclo, por convención asumiremos que su *cintura* es 0, y su *circunferencia* es  $\infty$ .

El diámetro y la cintura de un grafo están, como cabía esperar, relacionados:

**Proposición 51.** Todo grafo  $G$  que contiene un ciclo satisface que  $g(G) \leq 2diam(G) + 1$ .

---

## Capítulo 3

# Coloración de vértices

En el capítulo de preliminares presentamos diversos tipos de grafos y algunos invariantes. En este nos centraremos en el estudio de los problemas de coloración de grafos, en concreto en el de coloración de los vértices, que motivará la definición de nuevos tipos de grafos, como los *grafos  $k$ -coloreables*, y de nuevos invariantes, como el *número cromático*.

Este es uno de los problemas más famosos de la Teoría de Grafos, y en resumidas cuentas consiste en, dado un grafo cualquiera, buscar las maneras de asignar un color a cada vértice de forma que no haya dos vértices adyacentes del mismo color, y el número de colores utilizado sea mínimo. Se trata de un problema que no tiene una solución sencilla, por lo que recurriremos a razonamientos y algoritmos heurísticos para enfrentarnos a él. A parte de esto, profundizaremos en el problema de coloración de vértices para grafos planares, hasta llegar a enunciar el famoso *Teorema de los Cuatro Colores*.

Para este capítulo han sido particularmente útiles el quinto capítulo de [Die97] y los dos primeros de [Lew16].

### 3.1. Presentación del problema

El problema de coloración de vértices surgió por primera vez en 1852, cuando Francis Guthrie, un estudiante del *University College* de Londres, se dio cuenta de que para colorear un mapa de los condados de Inglaterra sin que hubiera dos de ellos colindantes que tuvieran el mismo color, no hacían falta más que cuatro colores.

Para ilustrar cómo están relacionados el coloreado de mapas y el coloreado de los vértices de un grafo, hemos recurrido al mapa de Castilla y León y de sus 9 provincias. Primero colocamos un vértice en el centro de cada provincia, y después, colocamos una arista entre cada par de vértices cuyas provincias tienen una frontera en común. De esta manera, si prestamos atención, podemos construir un grafo sin que dos aristas se corten más que en sus vértices, es decir, un grafo planar.

Y si conseguimos colorear los vértices sin que haya dos adyacentes del mismo color, obtenemos un coloreado del mapa de la manera deseada, y viceversa.

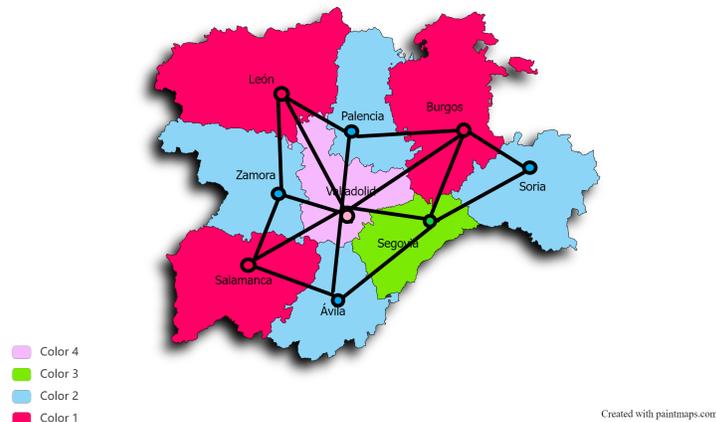


Figura 3.1: Ilustración de cómo los grafos pueden ser utilizados para colorear las regiones de un mapa.

En este capítulo abordaremos el problema de manera más general, y hasta la penúltima sección no nos centraremos exclusivamente en los grafos planares, aunque este es, en efecto, el modo en que surgió el problema.

Comencemos con la definición formal de coloración de vértices:

**Definición 52.** Una *coloración de vértices* de un grafo  $G = (V, E)$  es una aplicación  $c: V \rightarrow S$ , tal que  $c(v) \neq c(u)$  cuando  $u$  y  $v$  son vértices adyacentes. Los elementos del conjunto  $S$  se llaman colores disponibles.

Lo único que nos interesa de ese conjunto  $S$  es su tamaño. Cuando  $S$  es  $\{1, 2, \dots, k\}$ , siendo  $k$  un entero positivo, a una coloración de vértices  $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , la llamamos  $k$ -coloración.

En ocasiones es útil estudiar grafos que no tienen coloreados todos sus vértices, es decir, que tienen una *coloración parcial*. Más rigurosamente:

**Definición 53.** Dado un un grafo  $G = (V, E)$ , llamamos *coloración parcial de vértices*  $G$  a una aplicación  $\tilde{c}: N \rightarrow S$ , donde  $N$  es un subconjunto propio de  $V$  ( $N \subsetneq V$ ), y tal que  $\tilde{c}(u) \neq \tilde{c}(v)$  si  $u$  y  $v$  son dos vértices *adyacentes* pertenecientes a  $N$ .

De manera más formal, el problema de coloración de vértices busca asignar a cada grafo  $G = (V, E)$  una  $k$ -coloración donde  $k$  sea mínimo. Cuando se encuentra una coloración de dichas características decimos que tenemos una solución óptima del problema.

**Definición 54.** Dado un grafo  $G$ , llamamos *número cromático* de  $G$  al menor número  $k$  para el que  $G$  tiene una  $k$ -coloración. De ahora en adelante lo denotamos como  $\chi(G)$ .

**Proposición 55.** El número cromático de un grafo,  $\chi(G)$ , es un invariante de grafos.

*Demostración.* Sean  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  dos grafos isomorfos, y sea  $f: V' \rightarrow V$  el isomorfismo asociado. Sea  $k$  el número cromático de  $G$ . Veamos que coincide con el número cromático de  $G'$ .

Que  $\chi(G) = k$ , significa que existe una coloración de  $G$ ,  $c_1: V \rightarrow S$ , que solo involucra  $k$  colores. Definamos ahora otra aplicación:  $c_2: V' \rightarrow S$ , de manera que  $c_2(v') := c_1(f(v'))$  con  $v' \in V'$ . Evidentemente,  $c_2$  solo usa  $k$  colores. Veamos que  $c_2$  es coloración de  $G'$ : sean  $u, w \in V'$ , tales que  $uw \in E'$ , entonces se tiene que  $f(u)f(w) \in E$  (por ser  $f$  isomorfismo de grafos). Como  $c_1$  es una coloración tenemos que  $c_1(f(u)) \neq c_1(f(w))$ . Ahora, usando la definición que hemos dado a  $c_2$ , llegamos a que  $c_2(u) \neq c_2(w)$ , y por tanto  $c_2$  es coloración de  $G'$ .

Lo anterior nos permite afirmar que  $\chi(G') \leq k$ . Veamos ahora que es exactamente  $k$ . Supongamos que  $\chi(G')$  es menor que  $k$ , entonces existe una coloración de  $G'$   $c': V' \rightarrow S$  que involucra  $\chi(G')$  colores. Razonando como lo hemos hecho antes, por ser  $G \cong G'$  podemos encontrar una coloración de  $G$ ,  $c'': V \rightarrow S$ , que use  $\chi(G')$  colores, es decir menos de  $k$ ; pero esto es absurdo pues por hipótesis el número cromático de  $G$  es  $k$ .

□

**Definición 56.** Se dice que un grafo  $G$  es  $k$ -cromático si su número cromático es  $k$ . Si su número cromático es menor o igual que  $k$ , decimos que  $G$  es  $k$ -coloreable.

**Definición 57.** Dado un grafo  $G = (V, E)$ , decimos que un subconjunto de  $V$  es un *conjunto independiente* si ningún par de sus vértices conforma una arista, es decir, si no tiene dos vértices adyacentes.

**Observación 58.** Nótese que una  $k$ -coloración de un grafo es una partición del conjunto de vértices en  $k$  conjuntos independientes que llamamos *clases de colores*. Además, conviene destacar que de ahora en adelante utilizaremos las expresiones: “asignar un color a un vértice”, y “asignar un vértice a una cierta clase de color” de manera indistinta.

## 3.2. Complejidad del problema

Una vez enunciado el problema, la pregunta natural que nos surge es: ¿qué algoritmo podemos utilizar para resolverlo? Resolver aquí tiene un significado fuerte, es decir, un algoritmo resuelve el problema de coloración de los vértices de un grafo, si dado cualquier grafo es capaz de devolver una coloración óptima. ¿Se puede conseguir un algoritmo así? Y lo más importante, ¿es computacionalmente factible?

Decimos que un problema es de tipo  $P$  si se puede resolver con complejidad polinómica. Por otra parte, decimos que es de tipo  $NP$  si se puede comprobar que un candidato a solución realmente lo es con complejidad polinómica. Claramente,  $P \subset NP$  pues resolver un problema permite verificar una solución dada, pero no se sabe si  $P = NP$ . De hecho, se sospecha fuertemente que no es así, siendo uno de los 7 problemas del milenio.

Pues bien, el problema de coloración no solo es un problema  $NP$ , sino que es del tipo de problemas  $NP$  más complicados: los problemas  $NP$  – *completos*. El matemático Stephen Cook, probó en 1971 la existencia de esta clase de problemas, así como el conocido *Teorema de Satisfacibilidad*. Las demostraciones de esto pueden verse en [Coo71]. Una adecuada reducción del Problema de Satisfacibilidad en el problema de  $k$ -coloración es lo que permite probar la  $NP$  – *completitud* de este último.

### 3.3. Estudio del número cromático de ciertas familias

Por lo visto en la sección precedente, el problema de coloración de vértices es un problema que en general no tiene una solución sencilla, luego tampoco lo es la búsqueda del número cromático de un grafo. Así que por ahora tendremos que conformarnos con el estudio del número cromático de ciertas familias importantes de grafos.

El caso trivial es el del grafo compuesto por vértices aislados, esto es, que tiene  $E = \emptyset$ . En ese caso está claro que basta un único color para pintar todos los vértices, por lo que el número cromático es 1.

#### 3.3.1. Grafos completos

Como ya vimos, un grafo completo de  $n$  vértices,  $K_n$ , es un grafo que presenta una arista entre cada par de vértices. Tiene por tanto un total de  $\frac{n(n-1)}{2}$  aristas. Es obvio que como cada vértice de un grafo completo es adyacente al resto de los vértices del grafo, todos los vértices deben de tener asignado un color diferente al resto. Es decir, el número cromático de un grafo completo de  $n$  vértices es  $\chi(K_n) = n$ . En la siguiente figura, vemos coloraciones óptimas para los grafos completos de 1, 2, 3, 4 y 5 vértices:

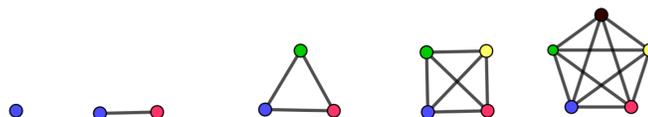


Figura 3.2: De izquierda a derecha, coloraciones óptimas de  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  y  $K_5$ .

### 3.3.2. Grafos bipartitos

Los grafos bipartitos, tal y como vimos en el capítulo anterior, son grafos cuyo conjunto de vértices admite una partición en dos clases,  $V_1$  y  $V_2$ , de manera que solo existen aristas en  $G$  con un extremo en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ . Como resultado, los grafos bipartitos se pueden colorear usando solo dos colores: uno para los vértices en  $V_1$  y otro para los vértices en  $V_2$ . Es obvio entonces que el número cromático de un grafo bipartito es 2.

Es cierto también, que si el número cromático de un grafo es 2, entonces es bipartito, puesto que puede considerarse una partición de los vértices según su color.

**Observación 59.** Los árboles, al no tener ningún ciclo por la Proposición 31, son también grafos bipartitos. Por lo que su número cromático también es 2.

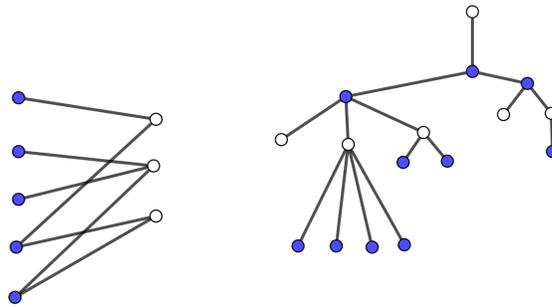
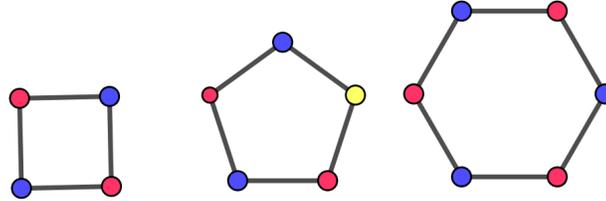


Figura 3.3: Coloraciones óptimas de dos grafos bipartitos. El de la derecha es un árbol.

Los grafos  $r$ -partitos admiten particiones en  $r$  conjuntos independientes. Por lo que, razonando de la misma manera que antes llegamos a un resultado más general: si utilizamos un color para cada clase obtenemos que el número cromático de estos grafos es como mucho  $r$ , pudiendo incluso ser menor. Es decir, estos grafos son  $r$ -coloreables.

### 3.3.3. Ciclos

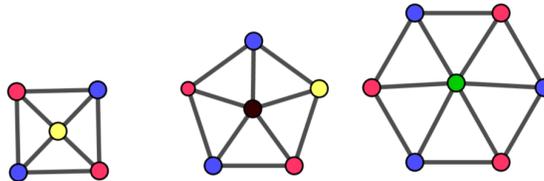
Para los ciclos de longitud  $n$ ,  $C^n$ , su número cromático depende de si  $n$  es par o impar. Si  $n$  es par basta con alternar 2 colores (son un tipo de grafos bipartitos) en los vértices del ciclo; y si es impar se necesitan 3 colores: un modo de verlo es comenzar intercalando dos colores como antes, y cuando quede un vértice por colorear, asignarle un tercer color para evitar que coincida con los dos adyacentes a él: el primero y el último que hemos coloreado, pues cada uno es de un color. En la siguiente figura, véanse coloraciones óptimas de los ciclos de longitudes 4, 5 y 6.

Figura 3.4: Coloraciones óptimas de  $C^4$ ,  $C^5$  y  $C^6$ .

### 3.3.4. Ruedas

Las *ruedas* de  $n$  vértices,  $W^n$ , son grafos que se obtienen a partir del grafo cíclico  $C^{n-1}$  añadiéndole un vértice extra,  $v_n$ , junto con las aristas que unen  $v_n$  con cada uno de los vértices del ciclo:  $v_1v_n$ ,  $v_2v_n, \dots$  y  $v_{n-1}v_n$ . Basándonos en los resultados de ciclos, podemos afirmar que si  $n$  es impar, el número cromático de  $W^n$  es 3, pues podemos usar dos colores para el ciclo de longitud  $n - 1$  (par) asociado, y colorear de un tercer color el vértice extra, que es adyacente al resto de vértices. Por otra parte, si  $n$  es par, el número cromático de  $W^n$  es 4, pues para el ciclo de longitud  $n - 1$  (impar) asociado necesitamos 3 colores, y para el vértice extra, otro más.

A continuación la figura asociada a coloraciones óptimas de ruedas de 5, 6 y 7 vértices:

Figura 3.5: Coloraciones óptimas de  $W^5$ ,  $W^6$  y  $W^7$ .

Es claro de las ilustraciones precedentes que los ciclos y las ruedas son ambos casos particulares de grafos planares, por lo que esos resultados adquirirán aún más coherencia cuando enunciemos el *Teorema de los Cuatro Colores* para grafos planares.

## 3.4. Caso general

Los resultados precedentes son interesantes, sin embargo, se restringen a un número limitado de familias de grafos. Por ello, ahora abandonamos los casos particulares para centrarnos en el estudio del problema de coloración desde un enfoque más general. En esta sección el objetivo será acotar el número cromático, y explorar algunos algoritmos constructivos que proporcionan coloraciones,

aunque éstas no sean óptimas.

### 3.4.1. Algoritmo GREEDY

El algoritmo *GREEDY* o *voraz*, en castellano, es uno de los algoritmos heurísticos más importantes de coloración de grafos. Si bien no proporciona de manera general una coloración óptima, probaremos que sí que la proporciona para una adecuada ordenación de los vértices del grafo. El algoritmo es como sigue:

---

#### Algorithm 1 Algoritmo Greedy

---

**Input:**  $G = (V, E)$

**Output:** Una coloración de vértices de  $G$

- 1: Tomar  $v_1, v_2, \dots, v_n$  una ordenación de los vértices de  $G$ .
  - 2: **for**  $i \leftarrow 1$  hasta  $n$  **do**
  - 3:   Asignar al vértice  $v_i$  el primer color disponible tal que no exista conflicto entre  $v_i$  y sus vecinos coloreados.
  - 4: **end for**
- 

Realicemos ahora un par de comentarios respecto al algoritmo:

En primer lugar, al conjunto de los colores disponibles (o de las clases de colores),  $\mathcal{S}$ , lo podemos asociar con  $\{1, 2, \dots, |\mathcal{S}|\}$ ; así que cuando hablamos del primer color disponible, nos referimos al orden habitual de los números naturales. A la clase de colores asociada al entero  $j$ , a menudo la denotamos por  $S_j$ . Por todo ello para representar una coloración  $c: V \rightarrow \mathcal{S}$ , a partir de ahora nos bastará con hacerlo así:  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_{|\mathcal{S}|}\}$ .

En segundo lugar, cuando decimos que no exista conflicto entre  $v_i$  y sus vecinos coloreados, nos referimos a asignar a  $v_i$  un color diferente al de sus vecinos que ya han pasado por el bucle y han sido asignados a una clase de color, que como mucho son  $i - 1$  vértices. El objetivo de esto es conseguir una coloración válida.

Y en tercer lugar, cuando decimos que se toma una enumeración u ordenación de los vértices, esta puede venir dada como una permutación de los mismos. Lo que nos importa es que en *GREEDY* se fija el orden en el que se irán tratando los vértices al inicio del algoritmo.

Estimemos ahora la complejidad computacional del algoritmo con respecto al número de restricciones que se tienen que comprobar en el peor caso. Partimos de una cierta enumeración de los vértices, y en cada iteración se colorea uno de ellos según la enumeración, o lo que es lo mismo, se asigna cada vértice a una clase de colores. Esto significa que se requieren  $n = |V|$  iteraciones en total. En la iteración  $i$  -ésima ( $1 \leq i \leq n$ ), se trata de buscar un color válido para el vértice  $i$  -ésimo. En el peor de los casos, como ya comentamos, hay que hacer  $i - 1$  comprobaciones de restricciones hasta que se elige el color adecuado. En efecto, si el grafo que estamos coloreando es  $K^n$ , el peor

caso ocurre para todos los vértices. Esto nos da un total de  $0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$  comprobaciones realizadas, lo que nos da una complejidad en el peor caso de  $O(n^2)$ .

**Ejemplo 60.** Ilustremos el mecanismo del algoritmo *GREEDY* con un ejemplo, usando la permutación  $\pi_i = v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Los vértices no coloreados los mostramos en blanco.

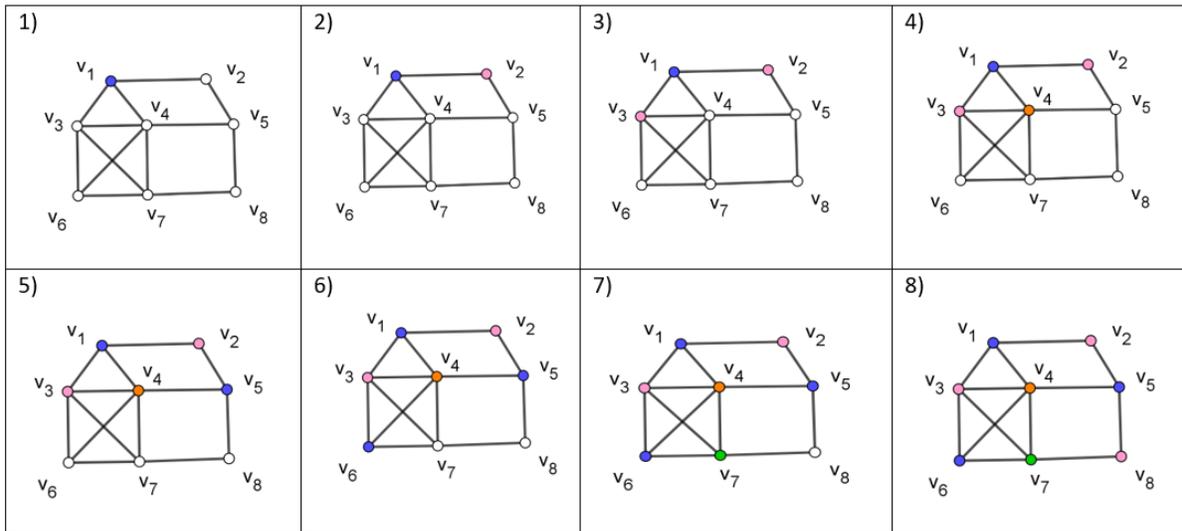


Figura 3.6: Ejemplo de aplicación de *GREEDY*.

En la práctica el algoritmo produce coloraciones bastante rápido aunque en ocasiones el número de colores usado dista mucho del número cromático.

**Ejemplo 61.** Veamos dos coloraciones diferentes del mismo grafo bipartito, obtenidas mediante el algoritmo *GREEDY* al utilizar diferentes ordenaciones. Claramente con la segunda ordenación la coloración obtenida es una solución óptima, pues solo se usan dos colores, mientras que con la otra se usan cuatro.



Figura 3.7: Dos coloraciones diferentes de un grafo bipartito obtenidas con *GREEDY*.

Como acabamos de ver en el ejemplo, la salida del algoritmo depende mucho de la enumeración de vértices que se tome. Un modo de mejorar *GREEDY* consiste en generar enumeraciones que proporcionen mejores resultados a partir de coloraciones conocidas. Consideremos la situación donde tenemos una coloración  $\mathcal{S}$  de un grafo  $G$ . Sea  $\pi$  una enumeración de los vértices de  $G$  tal que los vértices que pertenecen a la misma clase de color están ordenados consecutivamente. Si ahora usamos esta enumeración  $\pi$  con *GREEDY*, el resultado es una nueva coloración  $\mathcal{S}'$  que usa no más colores que  $\mathcal{S}$ , sino posiblemente menos. De manera más concisa:

**Teorema 62.** Sea  $\mathcal{S}$  una coloración de un grafo  $G$ . Si consideramos una enumeración de los vértices de  $G$ , tal que los vértices de cada clase de color  $S_i \in \mathcal{S}$  (para  $1 \leq i \leq |\mathcal{S}|$ ) se toman seguidos, y se toman todas las clases, entonces el resultado de aplicar el algoritmo *GREEDY* a esa enumeración es otra coloración  $\mathcal{S}'$ , que verifica  $|\mathcal{S}'| \leq |\mathcal{S}|$ .

*Demostración.* Dado que  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_{|\mathcal{S}|}\}$  es una posible coloración, cada conjunto  $S_i \in \mathcal{S}$  (para  $1 \leq i \leq |\mathcal{S}|$ ) es un conjunto independiente. Obviamente, cualquier subconjunto  $T \subset S_i$  es también un conjunto independiente. Ejecutemos el algoritmo *GREEDY* teniendo en consideración  $\mathcal{S}$  para construir otra coloración válida  $\mathcal{S}'$ . Elaboremos una enumeración de los vértices de manera que primero se coloquen todos los de  $S_1$ , después todos los de  $S_2$ , y así hasta llegar a los vértices de  $S_{|\mathcal{S}|}$ . Aplicamos el algoritmo con esta enumeración: en orden se toma cada vértice de la enumeración y es asignado a un conjunto  $S'_j \in \mathcal{S}'$  de acuerdo a las reglas del algoritmo, esto es, primero tratamos de incluir el correspondiente vértice en  $S'_1$ , y si esto no es posible en  $S'_2$ , y así sucesivamente. Entonces, si consideramos un vértice  $v \in S_i$ , dos situaciones y las resultantes acciones ocurren en el siguiente orden de prioridad:

- **Caso 1:** Existe un conjunto independiente  $S'_{j < i} \in \mathcal{S}'$  tal que  $S'_{j < i} \cup \{v\}$  es también un conjunto independiente. En caso de que esto ocurra para varios subíndices menores que  $i$ , se toma el menor de ellos, y  $v$  es asignado a la correspondiente clase.
- **Caso 2:** Existe un conjunto independiente  $S'_{j=i} \in \mathcal{S}'$  tal que  $S'_{j=i} \cup \{v\}$  es también un conjunto independiente. Aquí,  $v$  es asignado a  $S'_{j=i}$ .

En ambos casos es claro que  $v$  es asignado a una clase de  $\mathcal{S}'$  cuyo subíndice menor o igual que el tenía su clase de  $\mathcal{S}$ . Por supuesto, si nos encontramos en una situación en la que todos los elementos de un conjunto  $S_i$  se asignan de acuerdo al Caso 1, entonces cuando el algoritmo termine,  $\mathcal{S}'$  tiene menos colores que  $\mathcal{S}$ . Por tanto,  $|\mathcal{S}'| \leq |\mathcal{S}|$ .

Supongamos que es necesario asignar un vértice  $v \in S_i$  a un conjunto  $S'_{j > i}$ . Para que esto ocurra es necesario que no se dé ni la situación del Caso 1, ni la del Caso 2. Sin embargo,  $S'_i \subset S_i$  y es por tanto un conjunto independiente. Por definición,  $S'_i \cup \{v\} \subset S_i$  también es un conjunto independiente, por lo que se daría al menos el Caso 2 y tenemos una contradicción. Esto implica que siempre se va a dar o el Caso 1 o el Caso 2.  $\square$

**Ejemplo 63.** Para ver estos conceptos en la práctica, la coloración mostrada en la figura de la izquierda ha sido generada por *GREEDY* utilizando la permutación  $\pi = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)$ , dando como resultado una 4-coloración  $\mathcal{S} = \{\{v_1, v_4, v_8\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_5\}, \{v_6\}\}$ . Esta solución puede ser usada para formar una nueva permutación  $\pi' = (v_1, v_4, v_8, v_2, v_7, v_3, v_5, v_6)$  que puede ser reintroducida en el algoritmo. Nótese que reordenando los conjuntos y los elementos de dentro de los mismos pueden obtenerse otras permutaciones igualmente válidas para nuestro propósito, como por ejemplo  $\pi'' = (v_2, v_7, v_5, v_3, v_6, v_4, v_8, v_1)$ . En la figura de la derecha tenemos la coloración que nos devuelve el algoritmo *GREEDY* en caso de utilizar la ordenación que nos proporciona la permutación  $\pi''$ , que como vemos solo utiliza 3 colores.

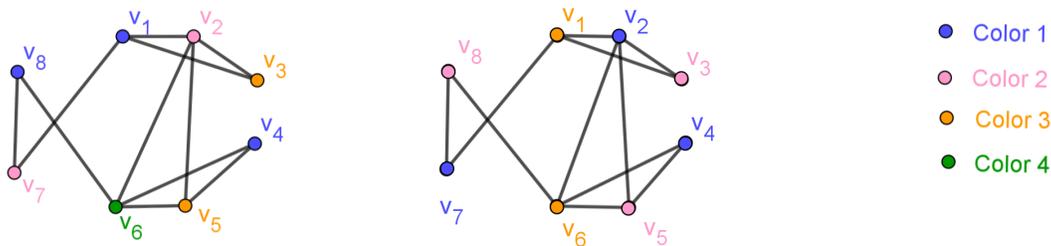


Figura 3.8: Dos coloraciones de un mismo grafo obtenidas con el algoritmo *GREEDY* utilizando diferentes permutaciones de los vértices: la primera  $\pi$ , y la segunda  $\pi''$ .

El teorema anterior da lugar al siguiente:

**Teorema 64.** Sea  $G$  un grafo con una coloración óptima  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$ , donde  $k = \chi(G)$ . Entonces hay al menos

$$\chi(G)! \prod_{i=1}^{\chi(G)} |S_i|!$$

permutaciones de vértices, tales que cuando se les aplica el algoritmo *GREEDY*, resultan en una solución óptima.

*Demostración.* Se obtiene inmediatamente del Teorema 62: dado que  $\mathcal{S}$  es una coloración óptima, cualquier permutación de los vértices generada de la manera vista proporcionará otra coloración óptima al aplicársele el algoritmo. Además, como las  $k$  clases de color (recuérdese que  $k = \chi(G)$ ) y los vértices dentro de cada una de ellas pueden a su vez permutarse, se tiene la fórmula anterior.  $\square$

**Observación 65.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo cuyo orden es  $n$ . Nótese que si  $\chi(G) = 1$  o  $\chi(G) = n$ , entonces, trivialmente, el número de permutaciones que dan lugar a una coloración óptima es  $n!$ . Esto es, toda permutación de los vértices del grafo da lugar a una coloración óptima usando *GREEDY*.

### 3.4.2. Cotas del número cromático

A continuación trataremos de acotar el número cromático de diferentes modos. Primero de manera más ingenua, y posteriormente de manera algo más fina.

**Proposición 66.** Todo grafo  $G$  con  $m$  aristas satisface

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

*Demostración.* Sea  $c$  una coloración de los vértices de  $G$  que utiliza  $k = \chi(G)$  colores. Entonces  $G$  tiene al menos una arista que une dos clases de colores; si no fuera así, podríamos haber usado el mismo color para las dos clases. Es decir,  $m \geq \frac{1}{2}k(k-1)$ . Resolviendo esta desigualdad para  $k$ , obtenemos la desigualdad deseada.  $\square$

Acotemos nuevamente el número cromático haciendo uso esta vez del algoritmo *GREEDY* :

**Proposición 67.** Sea un grafo  $G$  con grado máximo  $\Delta(G)$ . Se tiene que satisface la siguiente relación:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

*Demostración.* Considérese una enumeración de los vértices de  $G$ :  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , a la que se le va a aplicar el algoritmo *GREEDY*. Siguiendo el orden de la enumeración, a cada vértice  $v_i$  se le va asignando el primer color disponible, es decir, el menor entero que no haya sido usado para colorear a ningún vecino de  $v_i$  que se encuentre entre  $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ . Como cada vértice tiene como mucho  $\Delta(G)$  vecinos, no son necesarios más de  $\Delta(G) + 1$ , incluso para las enumeraciones menos ventajosas.  $\square$

Nótese que si  $G$  es un grafo completo o un ciclo de longitud impar, esta cota es la mejor posible. En general, sin embargo, esta cota superior de  $\Delta(G) + 1$  es más bien generosa. Una cota mejorada nos la da la siguiente proposición, aunque en la práctica es algo menos útil pues el número de subgrafos a menudo es demasiado grande. Recuérdese que  $\delta(G)$  es el grado mínimo del grafo  $G$ .

**Proposición 68.** Todo grafo  $G$  satisface

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \subset G\}. \quad (3.1)$$

*Demostración.* Sea  $n$  el número de vértices del grafo  $G$ . La idea es aplicar el algoritmo *GREEDY* con una enumeración de vértices que tenga en las primeras posiciones a los vértices con grado más alto, pues es cuando no se tienen en cuenta a la mayoría de los vecinos, y en las últimas a los vértices de menor grado. Sabemos que hay un vértice que tiene grado  $\delta(G)$ . Llamamos a

este vértice  $v_n$ . Tomamos ahora el vértice con menor grado del subgrafo  $G - v_n$ , al que podemos llamar  $v_{n-1}$ . Después podemos etiquetar como  $v_{n-2}$  al vértice con menor grado de  $G - \{v_n, v_{n-1}\}$ . Continuamos este proceso hasta que se hayan seleccionado todos los  $n$  vértices. Ahora aplíquese el algoritmo *GREEDY* a esta enumeración de los vértices:  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Cuando vamos a colorear  $v_i$ , se requieren como mucho  $deg_{G[v_1, \dots, v_i]}(v_i) + 1$  colores en vez de  $deg_G(v_i) + 1$  para proceder. Démonos cuenta de que con esa ordenación,  $\delta(G[v_1, \dots, v_i])$  a parte de indicar el grado mínimo de ese subgrafo, indica la cantidad de colores a los que no opta  $v_i$ , con respecto a los usados para colorear el subgrafo  $G[v_1, \dots, v_{i-1}]$  en el paso anterior. Teniendo esto en cuenta llegamos a que el número de colores que se utilizan con *GREEDY* y esta enumeración es como mucho:  $1 + \max\{\delta(G[v_1, \dots, v_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ , que claramente es menor o igual que  $1 + \max\{\delta(H) : H \subset G\}$ .  $\square$

Hemos visto en esta proposición una vez más, que una correcta ordenación de los vértices a la que aplicarle el algoritmo *GREEDY* puede suponer una mejora. En el caso anterior, al inicio de la ordenación se han tomado vértices con grado alto (cuando la mayoría de sus vecinos son ignorados, pues recordemos que el algoritmo ignora cualquier vecino  $v_j$  de  $v_i$  con  $j > i$ ), y al final los vértices de menor grado.

**Corolario 69.** Todo grafo  $G$  tiene un subgrafo cuyo grado mínimo es mayor o igual que  $\chi(G) - 1$ .

*Demostración.* Se deduce de la Proposición 68. Razonemos por reducción al absurdo: si no fuera así, significaría que todos los subgrafos de  $G$  tienen grado mínimo menor que  $\chi(G) - 1$ . Usando esto y (3.1) llegamos a que

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \subset G\} < 1 + (\chi(G) - 1) = \chi(G) \tag{3.2}$$

que, claramente, es absurdo.  $\square$

Antes de continuar necesitamos algo más de terminología:

**Definición 70.** Decimos que un vértice,  $v$ , es un *vértice de corte*, si su eliminación del grafo  $G$  (junto con todas las aristas que lo tienen como extremo) incrementa el número de componentes conexas del mismo. Por tanto, un *vértice de corte* de un grafo conexo es un vértice cuya eliminación *desconecta* al grafo. Más generalmente, un *conjunto que separa* un grafo  $G$ , es un conjunto de vértices cuya eliminación incrementa el número de componentes conexas del mismo.

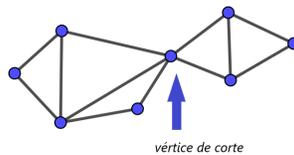


Figura 3.9: Grafo con un *vértice de corte*.

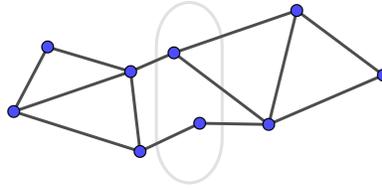


Figura 3.10: Ilustración de un grafo y un *conjunto* de dos vértices *que lo separa*.

**Definición 71.** Un *bloque* de un grafo  $G$  es un subgrafo conexo de  $G$  que no contiene vértices de corte (es 2-conexo) y que es maximal; esto es, que no se le puede añadir ningún otro vértice de  $G$  de modo que siga siendo conexo y siga sin tener vértices de corte.

Como hemos visto, todo grafo  $G$  satisface  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ , dándose la igualdad para grafos completos y ciclos de longitud impar. En el resto de casos esta cota puede mejorarse aún un poco, como veremos en el Teorema de Brooks. Pero primero es necesario presentar el siguiente lema:

**Lema 72.** Sea  $G$  un grafo conexo. Si  $\Delta(G) \leq 2$ , entonces  $G$  es un camino o un ciclo.

*Demostración.* Un grafo conexo  $G$  no tiene vértices aislados; luego la hipótesis de que  $\Delta(G) \leq 2$ , equivale a que todos los vértices de  $G$  tengan grado 1 o 2.

Probemos el resultado por inducción sobre el número de aristas. Si se trata de un grafo que solo tiene una arista, está claro que es un camino entre los extremos de la misma.

Sea  $m > 1$ . Esto implica que el grafo tiene al menos 3 vértices. Supongamos que el resultado se cumple para grafos con menos de  $m$  aristas. Sea  $G$  un grafo conexo que tiene  $m$  aristas, y cuyos vértices tienen grado 1 o 2. Si todos los vértices tuvieran grado 1, significaría que cada vértice es extremo de una única arista. Esto hace imposible que exista un camino entre dos vértices no adyacentes, contradiciendo la hipótesis de que  $G$  es conexo. De aquí extraemos dos conclusiones: que hay al menos un vértice de grado 2, y que dado un vértice de grado 1, éste es adyacente a uno de grado 2, puesto que si no tendríamos una arista aislada del resto del grafo, contradiciendo que es conexo. Ahora nos encontramos ante dos posibilidades:

1. Existe al menos un vértice,  $w$ , de grado 1. Sea  $e'$  la arista en la que incide  $w$ ; y consideremos  $G - w$ . El grafo  $G - w$  tiene menos de  $m$  aristas. Es conexo puesto que dados dos vértices de  $G - w$ , existe un camino en  $G$  que los une, y este camino también existe en  $G - w$ . Al eliminar  $w$ , el grado de todos los vértices sigue siendo el mismo salvo el del vértice adyacente a  $w$ , que pasa de 2 a 1. Por tanto, todos los vértices de  $G - w$  son de grado 1 o 2. Por hipótesis de inducción, tenemos que  $G - w$  es un camino o un ciclo. Por tener algún vértice de grado 1, podemos afirmar que es un camino. Y si a un camino se le añade en uno de sus extremos una arista,  $e'$ , sigue siendo un camino.

2. Todos los vértices son de grado 2. Entonces elimino una arista cualquiera,  $e''$ , y me quedo con  $G - e''$ . Llamamos  $x_1$  y  $x_2$  a los extremos de la arista  $e''$ . En este caso todos los grados se mantienen salvo los de los extremos de  $e''$  que pasan de grado 2 a 1. Veamos que  $G - e''$  sigue siendo conexo. Sean  $u$  y  $w$  dos vértices de dicho subgrafo. Si en  $G$  hay un camino de uno en otro que no pasa por la arista  $e''$ , entonces ese camino sigue existiendo en  $G - e''$ . Solo nos resultan conflictivos los caminos que pasan por  $e''$ , así que bastará con probar que existe un camino de  $x_1$  en  $x_2$  en  $G - e''$ . Partimos de  $x_1$ ; puesto que  $x_1$  tiene grado 1 sabemos que existe un vértice,  $u_1$ , adyacente a  $x_1$ . Formo el camino  $x_1u_1$ . Como  $u_1$  tiene grado 2, sabemos que existe otro vértice del grafo adyacente a él: si el vértice en cuestión es  $x_2$ , hemos acabado; si no, lo llamamos  $u_2$  y lo añadimos a nuestro camino  $x_1u_1u_2$ . En el segundo caso,  $u_2$  también tiene grado 2 y podemos repetir el proceso. Dado que  $G$  tiene un número finito de vértices, el proceso no puede repetirse indefinidamente, lo que garantiza que en cierto punto nos encontramos con un vértice de grado 1 que necesariamente es  $x_2$ . Huelga decir que en este proceso nunca se da el caso de que se repita un vértice, puesto que eso contradiría la hipótesis de que los vértices tienen grado menor o igual que 2. En definitiva, acabamos de ver que es posible construir un camino en  $G - e''$  de  $x_1$  en  $x_2$ , por lo que tenemos que es conexo. Luego  $G - e''$  verifica las condiciones del teorema y por hipótesis de inducción es un camino o un ciclo. Por tener dos vértices de grado 1 podemos afirmar que es un camino. Y si a un camino se le añade una arista que une sus dos extremos ( $e''$ ), éste se convierte en un ciclo.

Necesariamente ocurre una de las dos posibilidades y éstas son excluyentes, así que llegamos a la conclusión de  $G$  es un camino o un ciclo.  $\square$

**Observación 73.** La implicación contraria es inmediata: todos los vértices de un camino tienen por construcción grado 1 o grado 2; en particular los extremos de un camino son los únicos en tener grado 1. Asimismo, todos los vértices de un ciclo tienen grado 2.

Ya estamos listos para probar el Teorema de Brooks:

**Teorema 74.** (*Brooks, 1941*) Sea  $G$  un grafo conexo. Si  $G$  no es ni completo ni un ciclo de longitud impar se tiene que:

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

*Demostración.* Para  $\Delta(G) = 0$  y  $\Delta(G) = 1$ , los grafos correspondientes son  $K_1$  y  $K_2$  respectivamente, y por tanto no se incluyen en el Teorema. Por otra parte, para  $\Delta(G) = 2$ ,  $G$  es necesariamente un camino o un ciclo por lo visto en el lema precedente. Si  $G$  es un camino o un ciclo de longitud par, se tiene que  $\chi(G) = 2$ , luego se verifica el resultado; y si es un ciclo de longitud impar, no está incluido en el Teorema. Así que se tiene que el resultado es cierto para  $\Delta(G) \leq 2$ .

Consideremos ahora  $\Delta(G) \geq 3$ . Sea  $G$  un contraejemplo para el que el teorema no se verifica, y que tiene el menor número posible de vértices. Se tiene que:  $\chi(G) > \Delta(G)$ . Asumimos, por tanto,

que todos los grafos cuyo orden es menor que  $G$  pueden ser coloreados usando  $\Delta(G)$  colores.

Probemos 3 asertos:

- **Aserto 1:**  $G$  es conexo. Si  $G$  no fuera conexo, entonces las componentes conexas de  $G$  serían un contraejemplo con menor número de vértices, o todas las componentes serían  $\Delta(G)$  – coloreables. Ambos casos contradicen lo anterior.
- **Aserto 2:**  $G$  es 2-conexo. Si  $G$  no fuera 2-conexo, entonces,  $G$  tendría al menos un vértice de corte  $v$ , y cada bloque de  $G$  sería  $\Delta(G)$ -coloreable. Las coloraciones de cada bloque podrían combinarse para formar una  $\Delta(G)$ -coloración válida, lo que contradice nuestra suposición inicial.
- **Aserto 3:**  $G$  debe contener tres vértices  $v$ ,  $u_1$  y  $u_2$  tales que **(a)**  $u_1$  y  $u_2$  son no adyacentes; **(b)** ambos  $u_1$  y  $u_2$  son adyacentes a  $v$ ; y **(c)**  $G - \{u_1, u_2\}$  es conexo.

Consideremos estos dos casos posibles, mutuamente excluyentes:

- **Caso 1:**  $G$  es 3-conexo. Como  $G$  no es completo, debe haber dos vértices  $x$  e  $y$  que no son adyacentes. Consideremos el camino más corto entre  $x$  e  $y$  en  $G$ :  $x = v_0, \dots, v_r = y$ , donde  $r \geq 2$ . Dado que este es el camino más corto,  $v_0$  no es adyacente a  $v_2$ , así que podemos elegir  $u_1 = v_0$ ,  $v = v_1$  y  $u_2 = v_2$ . Esto satisface el Aserto 3.
- **Caso 2:**  $G$  es 2-conexo pero no 3-conexo. En este caso deben de existir dos vértices  $u$  y  $v$  tales que  $G - \{u, v\}$  está desconectado. Esto significa que el grafo  $G - \{u\}$  contiene un vértice de corte (que necesariamente es  $v$ ), pero que  $G$  no. En este caso,  $v$  debe de ser adyacente (en  $G - \{u\}$ ) a al menos un vértice de cada componente conexa del grafo  $G - \{u, v\}$ . Sean  $u_1$  y  $u_2$  dos vértices de dos componentes diferentes de  $G - \{u, v\}$  que son adyacentes a  $v$  (en  $G - \{u\}$ ). Los vértices  $u_1$ ,  $u_2$  y  $v$  ahora satisfacen el Aserto 3.

Habiendo probado los Asertos 1,2 y 3, ahora podemos construir una permutación  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  de los  $n$  vértices de  $G$  tal que  $\pi_1 = u_1$ ,  $\pi_2 = u_2$  y  $\pi_n = v$ . La parte restante de la permutación,  $\pi_3, \dots, \pi_{n-1}$ , está formada de manera que, para  $3 \leq i < j \leq n-1$ , la distancia de  $\pi_n$  a  $\pi_i$  es mayor o igual que la distancia de  $\pi_n$  a  $\pi_j$ . Esto es posible porque  $G$  es conexo y podemos considerar la distancia de cada vértice a  $\pi_n$  y ordenar en consecuencia. Esto nos va a permitir probar que  $\pi_i$  tiene al menos un vecino en  $\{\pi_{i+1}, \dots, \pi_n\}$ , para  $i \geq 3$ . El razonamiento será el mismo que el de inducción, pero en el orden contrario al habitual. En el caso en que  $i = n-1$  es evidente que  $\pi_n$  es vecino de  $\pi_{n-1}$ , ya que hemos ordenado los vértices de manera que el que está a menor distancia de  $\pi_n$  esté en penúltima posición, y al ser un grafo conexo existe un vértice que está a distancia 1 de  $\pi_n$ : éste debe ser  $\pi_{n-1}$ . Ahora supongamos que  $\pi_{s+1}$  tiene un vecino entre  $\{\pi_{s+2}, \dots, \pi_n\}$ , con  $(s+1 < n-1)$ . Queremos ver que  $\pi_s$  tiene un vecino entre  $\{\pi_{s+1}, \dots, \pi_n\}$ . Por la forma en la que hemos tomado los vértices, es claro que  $d(\pi_s, \pi_n) \geq d(\pi_k, \pi_n)$ , con  $k > s$ . Razonemos por reducción al absurdo: si  $\pi_s$  no

tuviera ningún vecino en el conjunto citado, por ser  $G$  conexo, sí tendría un vecino al que llamamos  $\pi_t$  (con  $t < s$ ) que pertenece al camino de menor longitud que tiene a  $\pi_s$  y  $\pi_n$  como extremos. De aquí deducimos que  $d(\pi_t, \pi_n) < d(\pi_s, \pi_n)$ , y esto va en contra de lo supuesto, puesto que  $t < s$ .

Si ahora aplicamos el algoritmo *GREEDY* a esta permutación/enumeración, los vértices  $\pi_1 = u_1$  y  $\pi_2 = u_2$  son ambos asignados a la primera clase de color,  $S_1$ , porque son no adyacentes. Además, cuando coloreamos los vértices  $\pi_i$  ( $3 \leq i < n$ ), siempre habrá al menos una clase de color  $S_{j \leq \Delta(G)}$  disponible para  $\pi_i$ . Esto es así por lo probado al final del párrafo anterior: al tener  $\pi_i$  con  $i \geq 3$  un vecino en  $\{\pi_{i+1}, \dots, \pi_n\}$ , cuando llega su turno en el algoritmo de ser coloreado, como mucho tiene  $\Delta(G) - 1$  vecinos entre los vértices ya coloreados; luego siempre hay un color disponible (de entre los  $\Delta(G)$  considerados). Finalmente, cuando vayamos a colorear el vértice  $\pi_n = v$ , como mucho  $\Delta(G) - 1$  colores habrán sido usados para colorear a los vecinos de  $v$  (dado que a sus vecinos  $u_1$  y  $u_2$  se les ha asignado el mismo color), así que al menos uno de los  $\Delta(G)$  colores está disponible para  $v$ . Con esto llegamos a que  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ , lo que contradice la existencia de un contraejemplo como el mencionado. Con esto queda probado el teorema.

□

### 3.4.3. Algoritmo DSatur

Después de haber analizado el comportamiento del algoritmo *GREEDY* y estudiado cotas para el número cromático, acabamos la sección abordando un nuevo algoritmo heurístico que nos permitirá construir nuevas coloraciones. Veremos además, que este algoritmo garantiza producir soluciones óptimas para algunas familias de grafos, y a menudo permite construir soluciones que mejoran las cotas superiores del número cromático vistas anteriormente.

El algoritmo *DSatur* (proveniente de *degree of saturation*, -grado de saturación-), es en realidad un algoritmo muy similar al *GREEDY*, dado que toma los vértices de uno en uno, siguiendo una ordenación, asignando la primera clase de color disponible a cada uno de ellos, y creando nuevas clases cuando es necesario. La diferencia entre ambos algoritmos reside en la forma en la que se generan esas enumeraciones de vértices. Con el algoritmo *GREEDY*, la ordenación se decide antes de colorear ningún vértice, mientras que con *DSatur* la elección de cuál es el siguiente vértice por colorear se decide heurísticamente basándose en características de la coloración parcial del grafo en dicho momento. Esta elección se basa en el *grado de saturación* del grafo, que definiremos a continuación. Primero es necesario recordar que  $\Gamma(v)$  es el conjunto de vértices adyacentes al vértice  $v$ .

**Definición 75.** Pongamos  $c(v) = NULL$  para todo vértice  $v \in V$  que no esté asignado a una clase de color. Dado  $v$  que no está asignado a una clase de color, el grado de saturación de  $v$ , denotado por  $sat(v)$ , es el número de colores diferentes asignados a vértices adyacentes. Es decir,

$$sat(v) = |\{c(u) : u \in \Gamma(v) \wedge (c(u) \neq NULL)\}|.$$

El algoritmo es de la siguiente manera:

---

**Algorithm 2** Algoritmo DSatur

---

**Input:**  $G = (V, E)$

**Output:** Una coloración de vértices de  $G$

- 1: Tomar el vértice no coloreado con mayor grado de saturación  $v$ . En caso de empate entre varios vértices, tomar de entre ellos el que tenga mayor grado en el subgrafo inducido por los vértices no coloreados. En caso de un nuevo empate, romper de manera arbitraria.
  - 2: Asignar a  $v$  el primer color disponible que no sea usado por ninguno de sus vecinos.
  - 3: Si todos los vértices han sido coloreados entonces acabar. En otro caso, volver al paso 1
- 

El Paso 2 del algoritmo asigna colores a vértices de la misma manera que el *GREEDY*, así que no es de extrañar que su complejidad sea también  $O(n^2)$ ; pero en la práctica se necesitan más posiciones de memoria para guardar el grado de saturación de los vértices no coloreados.

La mayor diferencia con respecto al algoritmo *GREEDY*, reside en que en este algoritmo se priorizan los vértices con "más restricciones", es decir, aquellos con grado de saturación más alto.

**Ejemplo 76.** Veamos un ejemplo de la aplicación del algoritmo *DSatur*. Entre paréntesis hemos indicado el grado de saturación de los vértices en cada paso. En color blanco indicamos los vértices que no han sido aún coloreados. Recordemos que en primer lugar se colorean los vértices con mayor grado de saturación, en caso de empate se escoge el de mayor grado en el subgrafo inducido por los vértices no coloreados, y finalmente si vuelve a haber un empate, éste se rompe arbitrariamente.

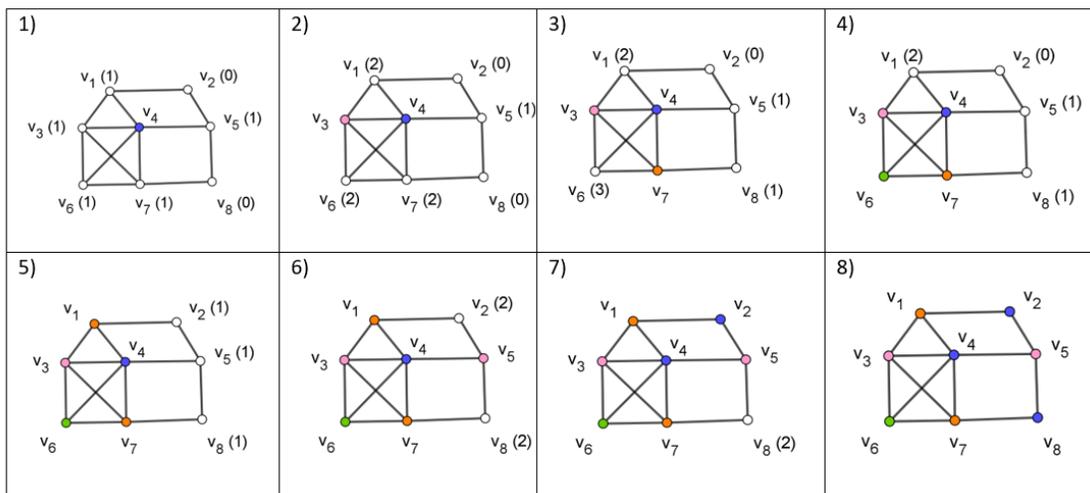


Figura 3.11: Ejemplo de aplicación de *DSatur*.

Antes vimos que el número de colores utilizados en soluciones producidas por *GREEDY* dependía de la ordenación inicial de los vértices, pudiendo variar mucho de una ordenación a otra. El algo-

ritmo *DSatur* reduce esta variación al generar la ordenación durante la ejecución del algoritmo de acuerdo a su heurística. Como resultado, *DSatur* es más predecible, y se puede probar que genera coloraciones óptimas para ciertas familias de grafos.

**Definición 77.** Decimos que un algoritmo de coloración es exacto si genera una solución óptima.

**Teorema 78.** (Brélaz, 1979) El algoritmo *DSatur* es exacto para grafos bipartitos.

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo conexo, bipartito y de  $n$  vértices. Es obvio que un grafo bipartito tiene al menos 2 vértices, y que para el caso de 2 vértices el resultado es trivial; así que consideramos  $n \geq 3$ . Si  $G$  no es conexo, basta considerar cada componente de  $G$  de manera separada.

Con el propósito de encontrar una contradicción, suponemos que durante la aplicación del algoritmo *DSatur* nos encontramos un vértice  $v$ , que tiene grado de saturación igual a 2. Esto significa que  $v$  tiene dos vecinos,  $u_1$  y  $u_2$ , asignados a diferentes clases de colores. A partir de estos dos vecinos podemos construir dos caminos de vértices coloreados (en la coloración parcial) que, como  $G$  es conexo, tienen un vértice en común,  $u$ . Si no lo tuvieran habría dos caminos independientes coloreados, lo que contradice el modo en que se eligen los vértices en *DSatur*.

Hemos localizado un ciclo que contiene los vértices  $v, u_1, u_2, u$ , y quizá otros (el ciclo formado por el camino  $u_1vu_2$ , y por los caminos de  $u_1$  a  $u$ , y de  $u$  a  $u_2$ ). Como  $G$  es bipartito, la longitud de este ciclo debe ser par por la Proposición 31; en consecuencia el camino que une  $u_1$  con  $u$ , y  $u$  con  $u_2$ , también tiene que ser de longitud par. Puesto que  $u$  pertenece a la clase de color de  $u_1$  o de  $u_2$ , llegamos a que  $u_1$  y  $u_2$  deben tener el mismo color, lo que contradice nuestra suposición inicial.

Por tanto, el grado de saturación salvo en la primera iteración que es 0, es 1; por lo que se usan solo 2 colores.  $\square$

Para ilustrar la utilidad de este teorema, considérese el grafo bipartito mostrado en el ejemplo 61. En ese ejemplo veíamos que ciertas enumeraciones de los vértices usadas conjuntamente con el algoritmo *GREEDY*, llevaban a coloraciones de más de dos colores. En contraste, *DSatur* garantiza devolver la solución óptima para grafos bipartitos, y otros como ciclos y ruedas.

**Teorema 79.** El algoritmo *DSatur* es exacto para ciclos y ruedas con al menos 5 vértices.

*Demostración.* Nótese que los ciclos de longitud par son 2-cromáticos y por tanto bipartitos. Utilizando el Teorema 78 tenemos la exactitud. Igualmente, es interesante considerar ambos, ciclos de longitud par e impar, para probar este teorema.

Sea  $C^n$  un ciclo. Dado que el grado de todos los vértices en  $C^n$  es 2, el primer vértice que coloreamos,  $v$ , es elegido arbitrariamente por *DSatur*. En los siguientes  $(n - 2)$  pasos, de acuerdo al comportamiento del algoritmo, se construye un camino de vértices de colores alternos que se extiende desde  $v$  tanto en sentido horario, como antihorario. Al final de este proceso, se ha formado un camino que comprende  $n - 1$  vértices, y solo queda un único vértice  $u$  que es adyacente a los dos vértices extremos del camino. Si  $C^n$  es un ciclo de longitud par,  $n - 1$  es impar, lo que significa que

los dos extremos del camino tienen el mismo color. Luego  $u$  puede colorearse con el segundo color. Si  $C^n$  es un ciclo de longitud impar,  $n - 1$  es par, lo que significa que los vértices extremos del camino tienen diferentes colores. Así que a  $u$  se le asigna un tercer color.

Para las ruedas  $W^n$  sirve un argumento muy similar. Supongamos que  $n \geq 5$ ,  $DSatur$  inicialmente colorea el vértice central  $v_n$ , puesto que tiene el mayor grado. Dado que  $v_n$  es adyacente al resto de vértices de  $W^n$ , el resto de vértices  $v_1, \dots, v_{n-1}$  tienen en ese momento grado de saturación 1. Se tiene entonces el mismo proceso de coloración que para el ciclo  $C^{n-1}$ , de donde se sigue el resultado.  $\square$

Aunque estos teoremas muestren que  $DSatur$  es exacto para ciertos tipos de grafos, obviamente no lo es para el caso general. A modo ilustrativo, la imagen de la izquierda proporciona una coloración óptima de un grafo, y la de la derecha la coloración obtenida para el mismo grafo utilizando  $DSatur$ . En el primer caso se han utilizado 3 colores mientras que para el segundo se han necesitado 4:



Figura 3.12: A la izquierda una coloración óptima de un grafo, y a la derecha la coloración obtenida con  $DSatur$ .

### 3.5. Coloración de grafos planos

En esta sección nos centraremos en el problema de coloración de vértices para grafos planos: los grafos que pueden ser representados de manera que las aristas solo se cruzan en sus extremos y sin superposiciones. A dichas representaciones las llamamos grafos planos. Nuestro objetivo principal es enunciar y comentar el *Teorema de los Cuatro Colores*. No será probado puesto que requiere una elevada capacidad computacional, pero sí se demostrarán una serie de resultados más débiles: el *Teorema de los Seis Colores* y el *Teorema de los Cinco Colores*.

Cuando tenemos un grafo plano, a los espacios comprendidos entre vértices y aristas, y al espacio no acotado que rodea al grafo, los llamamos *caras*, y al conjunto de aristas que rodean cada una de ellas los llamamos *frontera*. Estas nociones, junto con el *Teorema de la Fórmula de Euler* son esenciales para abordar los resultados de esta sección.

**Teorema 80.** (*Teorema de la Fórmula de Euler*). Sea  $G$  un grafo plano y conexo con  $V$  vértices,  $A$  aristas y  $C$  caras. Entonces se verifica que:

$$C + V = A + 2.$$

Se demuestra de manera sencilla mediante inducción sobre el número de aristas o sobre el número de caras, como puede comprobarse en [CH91]. Aquí omitiremos la prueba por tratarse de un resultado súmamente conocido y que se prueba generalmente en cursos introductorios de Matemática Discreta o Teoría de Grafos. No obstante, probaremos una serie de resultados que son consecuencia suya:

**Proposición 81.** Sea  $G$  un grafo planar conexo con  $n \geq 3$  vértices,  $m$  aristas,  $c$  caras. Entonces  $G$  tiene como mucho  $3n - 6$  aristas.

*Demostración.* Sea  $m_f$  el número de aristas que tiene la cara  $f$ , y denotemos por  $C$  al conjunto de las caras de nuestro grafo planar. Cada arista es como mucho frontera de dos caras, así que  $\sum_{f \in C} m_f \leq 2m$ . Además, teniendo en cuenta que cualquier cara tiene una frontera de al menos tres aristas, tenemos que  $\sum_{f \in C} m_f \geq 3c$ . Combinando esas dos desigualdades llegamos a que:

$$3c \leq \sum_{f \in C} m_f \leq 2m.$$

Por tanto  $c \leq \frac{2}{3}m$ . Ahora, utilizando la Fórmula de Euler tenemos que:  $2 = c + n - m \leq n - m + \frac{2}{3}m = n - \frac{1}{3}m$ ; y reordenando los términos llegamos a que:  $\frac{1}{3}m \leq n - 2$ . Así que  $m \leq 3n - 6$ , como queríamos probar.  $\square$

Este teorema es a menudo utilizado como criterio para decidir si un grafo es planar o no.

El siguiente resultado es básico para la demostración del *Teorema de los Seis Colores*.

**Lema 82.** Todo grafo planar tiene un vértice con grado menor o igual que 5.

*Demostración.* Supongamos que todos los vértices de un grafo planar  $G = (V, E)$  tienen grado mayor o igual que 6. Tenemos que  $\frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg(v) = |E|$ , es decir,  $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$  (ver la prueba del Teorema 8).

Pongamos que  $n := |V|$  y  $m := |E|$ . Por lo mencionado en el párrafo anterior tenemos que  $6n \leq 2m$ , o lo que es lo mismo:  $3n \leq m$  (1). Además, por la Proposición anterior tenemos que  $m \leq 3n - 6$  (2).

Estas dos desigualdades, (1) y (2), implican que  $3n \leq 3n - 6$ , es decir que  $0 \leq -6$ , que claramente es un absurdo. En conclusión, todo grafo planar tiene un vértice de grado menor o igual que 5.  $\square$

Teniendo estos dos resultados, ya podemos enfrentarnos al resultado más débil de coloración de grafos planares. La prueba que ofrecemos ha sido reescrita siguiendo las indicaciones de [Mar08].

**Teorema 83.** (*Teorema de los Seis Colores*) Todo grafo planar  $G$  es 6-coloreable.

*Demostración.* Razonemos por inducción sobre el número de vértices de  $G$ . Si  $|V| \leq 6$ , es trivial porque podemos colorear cada vértice de un color distinto.

Supongamos ahora que  $|V| = k$  con  $k > 6$ , y que el Teorema es cierto para todo grafo que tiene  $k - 1$  vértices o menos. Veamos que es cierto para  $k$ .

Por el lema previo,  $G$  debe contener al menos un vértice,  $v$ , de a lo máximo grado 5. Si eliminamos  $v$  y las aristas que lo tienen como extremo, el grafo resultante,  $G - v$ , tiene  $k - 1$  vértices, y por hipótesis de inducción es 6-coloreable. Dado que  $v$  tiene como mucho 5 vecinos, existe al menos un color disponible para él, y obtenemos así una 6-coloración de  $G$ .  $\square$

Con el siguiente teorema, el resultado anterior es inmediato, pero hemos decidido incluirlo en el trabajo con fines didácticos e ilustrativos. Asimismo, la idea subyacente en la prueba del próximo teorema es clave para la demostración del *Teorema de los Cuatro Colores*.

**Teorema 84.** (*Teorema de los Cinco Colores*) Todo grafo planar  $G$  es 5-coloreable.

*Demostración.* Probémoslo por contradicción. Sea  $G$  un grafo planar que no puede ser coloreado con 5 colores y que tiene el menor número de vértices posible, es decir, todo grafo planar con menos vértices que  $G$  es 5-coloreable.

Por el lema anterior, sabemos que  $G$  tiene un vértice,  $v$ , de grado menor o igual que 5. Consideremos dos casos:

- **Caso 1:** Supongamos que  $\deg(v) \leq 4$ . Consideremos  $G - v$ , que por hipótesis puede ser coloreado con 5 colores. Dado que  $v$  tiene a lo sumo cuatro vecinos, hay al menos un color que está disponible para él. Hemos llegado a una contradicción puesto que habíamos supuesto que  $G$  no era 5-coloreable.
- **Caso 2:** Supongamos que  $\deg(v) = 5$ . Tenemos que  $G - v$  puede ser coloreado con 5 colores. Si dos de los vecinos de  $v$  están coloreados con el mismo color entonces hay un color disponible para  $v$ , y llegamos a una contradicción. Suponemos por tanto, que a cada vértice adyacentes a  $v$  se le ha asignado un color diferente. Llamamos a los colores 1, 2, 3, 4 y 5. Considerando una representación de  $G$  como grafo plano, podemos asignar estos colores en sentido horario. A los vértices a los que han sido asignados los llamamos  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$  respectivamente.

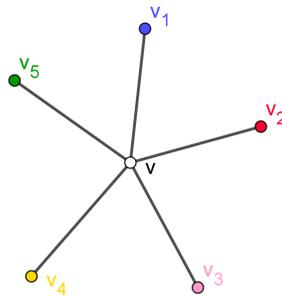


Figura 3.13: Representación esquemática de  $v$  y los vértices adyacentes a él.

Consideremos el subgrafo inducido por los vértices de color 1 y 3; es decir, el subgrafo que los contiene a ellos y a todas las aristas que los tienen como extremos. Si este subgrafo no

es conexo y tiene a  $v_1$  y a  $v_3$  en componentes diferentes, entonces podemos intercambiar los colores 1 y 3 en la componente que contiene a  $v_1$ , quedando este vértice de color 3. Tras este intercambio, seguimos teniendo una 5-coloración de  $G - v$ , pero ahora el color 1 está disponible para poder utilizarlo en  $v$ . De esta forma hemos conseguido de nuevo una 5-coloración de  $G$  y tenemos contradicción. Por tanto,  $v_1$  y  $v_3$  deben estar en la misma componente conexa en ese subgrafo; y podemos afirmar que existe un camino de  $v_1$  a  $v_3$  tal que todos los vértices de dicho camino tienen asignado el color 1 o con el color 3. Llamémoslo *camino A*.

Consideremos ahora el subgrafo inducido por los vértices que tienen asignado el segundo o el cuarto color. Si  $v_2$  y  $v_4$  no se encuentran en la misma componente conexa, entonces podemos intercambiar los colores en la componente en la que se encuentra  $v_2$ . De esta manera  $v_2$  queda coloreado con el cuarto color y tenemos el segundo color libre para  $v$ . Nuevamente llegamos a una 5-coloración de  $G$ , contradiciendo lo supuesto. En consecuencia, se tiene que  $v_2$  y  $v_4$  se encuentran en la misma componente conexa, lo que implica que hay un camino de  $v_2$  a  $v_4$  tal que todos los vértices en ese camino tienen color o 2 o 4. Llamémoslo *camino B*.

El hecho de que asignáramos los colores en sentido horario, implica que los **caminos A** y **B** se cruzan, es decir, debe haber dos aristas que se superponen. Esto contradice la planaridad del grafo y concluimos la prueba.

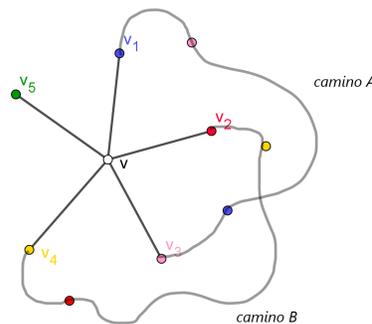


Figura 3.14: Representación esquemática de por qué no es planar

□

Detengámonos un momento a comentar uno de los argumentos vistos en la prueba: el argumento de intercambio de dos colores. Se trata de un razonamiento muy extendido en Coloración de Grafos, y volverá a explorarse en el próximo capítulo. El hecho de que este intercambio se realice dentro de una componente conexa de un subgrafo inducido por vértices de dos colores, garantiza que no hay dos vértices adyacentes del mismo color dentro del grafo en cuestión, y permite generar una nueva  $k$ -coloración.

Llegamos finalmente al resultado más fuerte de coloración de grafos planos:

**Teorema 85.** Todo grafo planar  $G$  es 4-coloreable.

Finalizamos la sección y el capítulo haciendo un par de comentarios respecto a dicho teorema. La idea de la demostración del *Teorema de los Cuatro Colores* tiene un enfoque similar al *Teorema de los Cinco Colores*. Se razona por reducción al absurdo, suponiendo que existe un grafo  $G$  que no es 4-coloreable y que tiene el menor número de vértices posible. Explorando una gran cantidad de casos, se logra probar que tal contraejemplo no puede existir. El problema es que tal cantidad de casos no pueden ser estudiados a mano.

En 1976, 120 años después de que se planteara el problema por primera vez y tras muchos intentos fallidos, Kenneth Appel y Wolfgang Haken profesores en la Universidad de Illinois, fueron los primeros en demostrar el resultado mediante métodos computacionales: necesitaron unas 1200 horas de computación para estudiar los 1824 casos planteados inicialmente. La prueba se encuentra detallada en [AH89]. El hecho de que fuera uno de los primeros teoremas demostrados gracias a la asistencia de un ordenador generó numerosas suspicacias en un primer momento, aunque en la actualidad es ampliamente aceptado y apoyado por otras pruebas más cortas, que también requieren la comprobación por ordenador.

### 3.6. Algunas aplicaciones

Es legítimo preguntarse sobre la utilidad de la coloración de grafos. Por ello, a modo de conclusión del capítulo presentaremos un par de problemas que pueden ser resueltos con lo visto hasta ahora:

- Creación de equipos: supongamos que tenemos un conjunto de  $n$  individuos que queremos distribuir por equipos de manera que individuos que no tienen una buena relación no tengan que acabar juntos. Podemos construir un grafo en el cada vértice simbolice un individuo, y haya una arista entre dos vértices si no queremos que las personas asociadas a dichos vértices estén en el mismo equipo. Una coloración de vértices de este grafo nos proporciona un modo de distribuir a las personas, donde vértices que pertenecen a una misma clase de color se encuentran en un mismo equipo. Y una coloración óptima nos proporciona el menor número de equipos que se pueden constituir. A modo de ejemplo consideremos el conjunto  $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$  y la siguiente tabla de restricciones (nótese que se trata de una relación simétrica):

Individuo	Restricciones
A	B, C, G
B	A, C, E, F
C	A, B
D	E, F
E	B, D, F
F	B, D, E, H
G	A, H
H	F, G

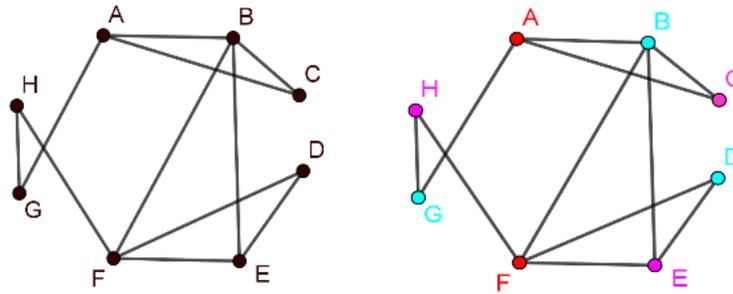
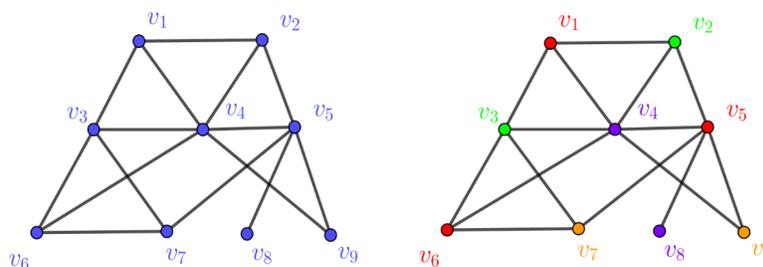


Figura 3.15: Tabla de restricciones, grafo asociado y una 3-coloración de dicho grafo.

El hecho de que el grafo asociado a la tabla de restricciones admita una 3-coloración indica que este problema puede resolverse con tres grupos. Obviamente este es un caso muy sencillo, pero la idea subyacente puede adaptarse a multitud de problemas con distintos tipos de restricciones.

- Organización de horarios: otra sencilla aplicación surge al tratar de diseñar horarios de, por ejemplo, instituciones educativas. En estas situaciones, dada una serie de eventos (como cursos o exámenes), queremos organizarlos en ciertas franjas horarias teniendo en cuenta algún tipo de restricciones. Por ejemplo, si se precisa que una persona (o recurso) esté presente en dos eventos, éstos deben encontrarse en diferentes franjas horarias para que pueda acudir a ambos.

Al igual que antes, esta cuestión puede transformarse fácilmente en un problema de coloración de vértices convirtiendo cada evento en un vértice y añadiendo una arista entre pares de vértices que tengan alguna incompatibilidad. De este modo, cada franja horaria está asociada a un color, y nuestra tarea es encontrar una coloración de vértices de manera que el número de colores sea menor que el número de franjas horarias disponibles. A continuación vemos un grafo que representa nueve eventos y las restricciones entre ellos. El hecho de que admita una 4-coloración nos indica que los eventos pueden repartirse en 4 franjas horarias.



Franja 1	Franja 2	Franja 3	Franja 4
Evento 1	Evento 2	Evento 7	Evento 4
Evento 5	Evento 3	Evento 9	Evento 8
Evento 6			

Cuadro 3.1: Resolución de un problema sencillo de organización de horarios.

Estos ejemplos, aun siendo sencillos, revelan el potencial de la coloración de grafos y su versatilidad para resolver muchos otros problemas.

---

## Capítulo 4

# Otros problemas de coloración

Cuando se habla de problemas de coloración de grafos, generalmente se piensa en el problema de coloración de vértices estudiado en el capítulo anterior, pero la realidad es que hay otros problemas como el de coloración de aristas y el de coloración de caras. En este capítulo los presentaremos, y probaremos que pueden ser adecuadamente reducidos al problema de coloración de vértices si se utilizan los conceptos de *grafo dual* y *grafo de línea*.

### 4.1. Coloración de aristas

La idea intuitiva es la misma que la de coloración de vértices: consiste en asignar colores a las aristas de manera que no haya dos aristas *adyacentes* del mismo color, y en utilizar el menor número de colores posible. Cuando decimos que dos aristas son *adyacentes*, nos referimos a que comparten uno de sus extremos.

#### 4.1.1. Definiciones básicas

Comencemos definiendo los conceptos básicos de este nuevo problema. Nótese que muchos son muy similares a los de coloración de vértices:

**Definición 86.** Una *coloración de aristas* de un grafo  $G = (V, E)$  es una aplicación  $c: E \rightarrow S$  donde  $c(e) \neq c(f)$  si  $e$  y  $f$  son dos aristas *adyacentes*. Al igual que antes, los elementos del conjunto  $S$  se llaman colores disponibles.

En el caso en que  $S$  sea el conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$ , donde  $k$  es un entero positivo, a una coloración de aristas  $c: E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , la llamamos *k-coloración de aristas*. Si además  $k$  es el menor entero positivo posible, decimos que tenemos una *coloración de aristas óptima* de dicho grafo.

Por otra parte, si tenemos un grafo  $G = (V, E)$ , llamamos *coloración parcial de aristas* de  $G$  a una aplicación  $\tilde{c}: F \rightarrow S$ , donde  $F$  es un subconjunto propio de  $E$  ( $F \subsetneq E$ ), y tal que  $\tilde{c}(e) \neq \tilde{c}(f)$  si  $e$  y  $f$  son dos aristas *adyacentes* pertenecientes a  $F$ .

**Definición 87.** Dada una coloración de aristas de un grafo  $G$ , y  $\alpha$  un color de dicha coloración, decimos que  $\alpha$  está *presente* en un vértice  $v$ , si  $v$  incide en una arista de color  $\alpha$ . Si  $v$  no incide en ninguna arista de color  $\alpha$ , entonces decimos que  $\alpha$  está *ausente* de  $v$ .

El equivalente al *número cromático* de un grafo para el problema de coloración de aristas, es el *índice cromático*:

**Definición 88.** Dado un grafo  $G$ , el menor entero  $k$  para el que existe una  $k$ -coloración de aristas es el *índice cromático* de  $G$ . Lo denotamos como  $\chi'(G)$ .

Al igual que el *número cromático*, el *índice cromático* es un invariante de grafos. La demostración es análoga a la de la proposición 55, y únicamente precisa del concepto de isomorfismo de grafos.

Recordemos que en el capítulo anterior habíamos visto que si el número cromático de un grafo era menor o igual que  $k$ , entonces decíamos que era  $k$ -coloreable. En caso de que no haya ambigüedad y se sepa que estamos tratando un problema de coloración de aristas, si el índice cromático de un grafo es menor o igual que  $k$ , entonces -en un abuso de terminología- también se dice que es  $k$ -coloreable. Lo mismo ocurre con conceptos como  $k$ -cromático, que puede ser utilizado tanto para indicar que el número cromático de un grafo es  $k$ , como para indicar que su índice cromático es  $k$ . En caso de que pueda inducir a confusión, es preferible evitar estos términos, o explicitar a qué nos estamos refiriendo. En este capítulo, salvo que se indique lo contrario, estos términos se referirán al problema de coloración de aristas.

#### 4.1.2. Relación con el problema de coloración de vértices

Como avanzamos al inicio del capítulo, el problema de coloración de vértices y el de coloración de aristas están muy relacionados gracias al concepto de *grafo de línea*:

El *grafo de línea* de un grafo  $G$ , es otro grafo  $L(G)$  que representa las adyacencias entre aristas de  $G$ . El grafo  $L(G)$  se construye de la siguiente manera: para cada arista de  $G$ , hágase un vértice en  $L(G)$ , y para cada dos aristas de  $G$  que tienen un vértice en común, hágase una arista entre sus correspondientes vértices en  $L(G)$ .

El siguiente ejemplo ilustra la construcción del grafo de línea asociado a un grafo:

**Ejemplo 89.** Dado el grafo  $G$ , con vértices  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , y aristas  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 4\}\}$ , su *grafo de línea* tiene por vértices a las aristas de  $G$ . Dos vértices de  $L(G)$  constituyen una arista, si las dos aristas asociadas de  $G$ , son adyacentes.

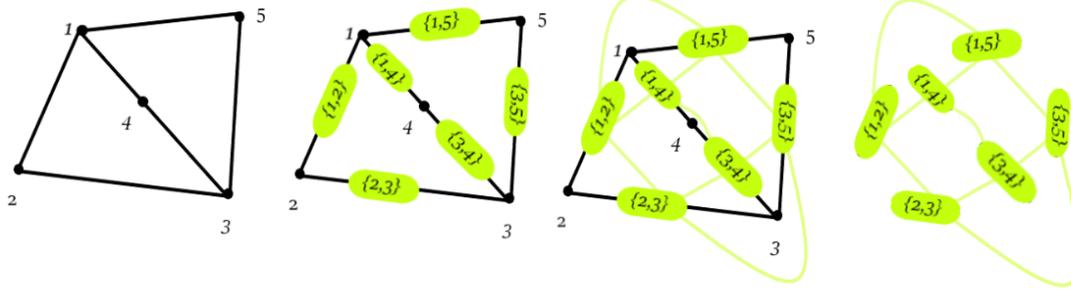


Figura 4.1: Proceso de construcción de un grafo de línea. A la izquierda  $G$ , y a la derecha, en verde, el grafo de línea de  $G$ .

Debido a este proceso de conversión de un grafo a su grafo de línea, es razonable pensar que el número de vértices y de aristas de  $L(G)$  están relacionados con el número de vértices y aristas de  $G$ . El siguiente resultado formaliza esa relación:

**Proposición 90.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo con  $n$  vértices y  $m$  aristas. Entonces su grafo de línea  $L(G)$  tiene  $m$  vértices y  $\frac{1}{2} \sum_{v \in V} (deg(v)^2) - m$  aristas.

*Demostración.* Tal y como se ha definido el grafo de línea, su conjunto de vértices es el conjunto de aristas de  $G$ , luego naturalmente tiene  $m$  vértices.

Supongamos ahora que  $xy$  es una arista en  $G$ . Esto significa que  $xy$  es un vértice en  $L(G)$  con grado  $deg(x) + deg(y) - 2$ . Luego el número total de aristas en  $L(G)$  es:

$$\frac{1}{2} \sum_{xy \in E} (deg(x) + deg(y) - 2) = \frac{1}{2} \sum_{xy \in E} (deg(x) + deg(y)) - m. \quad (4.1)$$

Nótese que el grado de cada vértice  $x$ , aparece exactamente  $deg(x)$  veces en la suma. Así que podemos simplificar la expresión (4.1), y obtenemos la propuesta en el enunciado del teorema:

$$\frac{1}{2} \sum_{xy \in E} (deg(x) + deg(y)) - m = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} (deg(x)^2) - m. \quad (4.2)$$

□

**Teorema 91.** Sea  $G$  un grafo, y  $L(G)$  su grafo de línea. Existe una  $k$ -coloración de aristas de  $G$  si y solo si existe una  $k$ -coloración de vértices de  $L(G)$ .

*Demostración.* El razonamiento de ambas implicaciones es sencillo y similar. Está basado en una reducción al absurdo y en la definición de grafo de línea.

$\Rightarrow$  Supongamos que tenemos una  $k$ -coloración de aristas de  $G$ . Coloreemos cada vértice de  $L(G)$  del color de su arista asociada de  $G$ . Por construcción, tenemos que dos vértices de un grafo de línea son vecinos si las aristas asociadas en el grafo original son adyacentes. Si hubiera dos vértices adyacentes de  $L(G)$  del mismo color, esto significaría que hay dos aristas adyacentes en  $G$  del mismo color, contradiciendo la hipótesis de que teníamos una  $k$ -coloración de aristas de  $G$ . Por tanto, hemos conseguido una  $k$ -coloración de vértices de  $L(G)$ .

$\Leftarrow$  Supongamos ahora que tenemos una  $k$ -coloración de vértices de un grafo de línea  $L(G)$ . Cada vértice de  $L(G)$  está asociado a una aristas de  $G$ ; asignemos a cada una de esas aristas el mismo color que al vértice asociado. Si hubiera dos aristas adyacentes de  $G$  del mismo color, significaría que los dos vértices correspondientes de  $L(G)$  también son del mismo color. Por construcción de los grafos de línea esos dos vértices también son vecinos, lo que contradice la hipótesis de que teníamos una  $k$ -coloración de vértices.

□

El resultado anterior nos dice que para obtener una  $k$ -coloración de aristas de un grafo  $G$ , basta con poder obtener una  $k$ -coloración de vértices de su grafo de línea. Es decir, pueden usarse los algoritmos y muchos de los resultados vistos en el capítulo anterior. Lo más difícil sigue siendo, al igual que en el caso de vértices, encontrar una coloración óptima, que es un *problema NP*.

### 4.1.3. Resultados sobre el índice cromático

En esta subsección el objetivo será estudiar el índice cromático. Comenzaremos demostrando cuál es su valor para grafos completos y bipartitos, y terminaremos probando unas cotas para el caso general en el *Teorema de Vizing*.

En primer lugar, dado que dos aristas que tienen un extremo en común no pueden tener asignado el mismo color, tenemos que necesariamente  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$  para cualquier grafo  $G$ .

Antes de continuar con algunos resultados importantes relativos al índice cromático de un grafo, necesitamos más terminología:

**Definición 92.** Dado un grafo  $G$ , un *emparejamiento* es un subconjunto de aristas que no son adyacentes dos a dos; es decir, no hay dos aristas que tengan un extremo en común.

La demostración del siguiente resultado sobre el índice cromático de los grafos completos, es una combinación de las ideas presentadas en [Lew16] y [CH91]:

**Teorema 93.** Sea  $K_n$  un grafo completo con  $n > 1$  vértices. Entonces  $\chi'(K_n) = n - 1$  si  $n$  es par, y  $\chi'(K_n) = n$  si es impar.

*Demostración.* Para esta demostración tienen mucha importancia la representación del grafo y su geometría:

- Cuando  $n$  es impar podemos obtener una  $n$ -coloración de aristas con el siguiente proceso: primero dibujamos los vértices de  $K_n$  como los vértices de un polígono regular de  $n$  lados y las correspondientes aristas: hay  $n$  aristas que conforman los *lados* o el *borde* del polígono, y el resto decimos que son *internas*. Después, seleccionamos arbitrariamente una arista del borde de este polígono y le asignamos junto a todas las aristas paralelas a ella el *color 1*. Moviéndonos en el sentido de las agujas del reloj, seleccionamos la siguiente arista del borde y las paralelas a ella, y les asignamos el *color 2*. Todas las aristas internas son paralelas a una de la frontera, así que podemos asegurar que tras repetir  $n$  veces este proceso, todas las aristas han sido coloreadas. De este modo hemos conseguido una  $n$ -coloración de aristas. Veamos ahora que las aristas de  $K_n$  no se pueden colorear usando menos de  $n$  colores. Nos damos cuenta de que estamos construyendo *emparejamientos* y de que estamos asignando un color a cada emparejamiento; luego lo que queremos ver es si esos emparejamientos son lo más grande posible. Al ser  $n$  impar, siempre queda al menos un vértice excluido de las aristas de los emparejamientos. En consecuencia, el mayor número de aristas que pueden tener un mismo color es  $\frac{n-1}{2}$ . De aquí y del hecho de que  $K_n$  tiene  $\frac{n(n-1)}{2}$  aristas, se deduce que se necesitan al menos  $n$  colores.

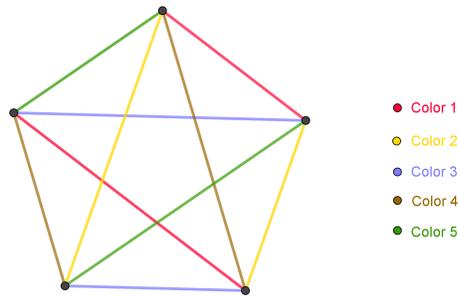


Figura 4.2: Coloración de aristas de  $K_5$  resultante de aplicar el método anterior.

- Si  $n$  es par, fijamos un vértice  $v$  de  $K_n$ . Tenemos que  $K_n - v$  es un grafo completo de  $n - 1$  vértices. Dado que  $n - 1$  es impar, sabemos que existe una  $(n - 1)$ -coloración de aristas como la descrita anteriormente. En esta coloración hay un color ausente en cada vértice, y se tiene que vértices distintos tienen diferentes colores ausentes. Podemos volver a construir  $K_n$  a partir de  $K_n - v$  si unimos cada vértice  $w$  de  $K_n - v$  con  $v$  mediante una arista. Asignemos a la arista  $wv$  el color que está ausente de  $w$ , para cada  $w \in V(K_n - v)$ . Esto nos proporciona una  $(n - 1)$ -coloración de  $K_n$

□

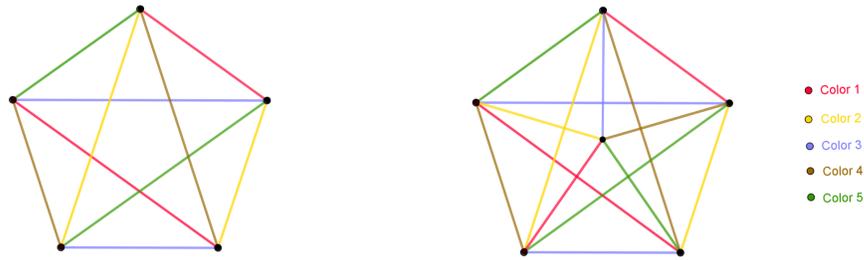


Figura 4.3: Coloración de aristas de  $K_6$  inducida por la de  $K_5$ .

El siguiente corolario adquirirá más coherencia cuando veamos el *Teorema de Vizing*.

**Corolario 94.** Sea  $K_n$  un grafo completo con  $n > 1$  vértices. Entonces su índice cromático es:

$$\chi(K_n) = \begin{cases} \Delta(K_n) & \text{si } n \text{ es par,} \\ \Delta(K_n) + 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración.* Inmediato del teorema anterior, dado que en un grafo completo de  $n$  vértices, el grado de todos los vértices (y por tanto el grado máximo) es  $n - 1$ .  $\square$

Antes de abordar el resto de resultados del número cromático, es necesario presentar el concepto de cadena de Kempe:

Sea  $G$  un grafo con una coloración de aristas que involucra al menos dos colores:  $i$  y  $j$ . Sea  $H(i, j)$  el subgrafo de  $G$  inducido por todas las aristas coloreadas de  $i$  o  $j$ . Sea  $K$  una componente conexa de este subgrafo. Puede probarse que  $K$  es un camino o un ciclo: al ser una componente conexa, no tiene ningún vértice aislado, esto es, de grado 0. Supongamos que existe un vértice,  $v$ , con grado mayor o igual que tres. Entonces ese vértice incide en al menos 3 aristas, por lo que al menos dos de ellas tienen el mismo color, lo que contradice que partiéramos de una coloración de aristas. Por tanto, todos los vértices tienen grado 1 o 2. Por el lema 72, que probamos en el capítulo anterior, tenemos que un grafo conexo cuyos vértices tienen grado 1 o 2, necesariamente es un camino o un ciclo. Más concretamente, se trata de un camino o ciclo cuyas aristas están coloreadas de  $i$  y  $j$  de manera intercalada; y si intercambiamos los colores de estas aristas pero se dejan inalterados los colores del resto de aristas de  $G$ , el resultado es una nueva coloración de  $G$  que involucra los colores iniciales. Decimos que la componente  $K$  es una *cadena de Kempe*, y a esta técnica de recoloreado la llamamos argumento de la cadena de Kempe, y será de mucha utilidad en los teoremas siguientes.

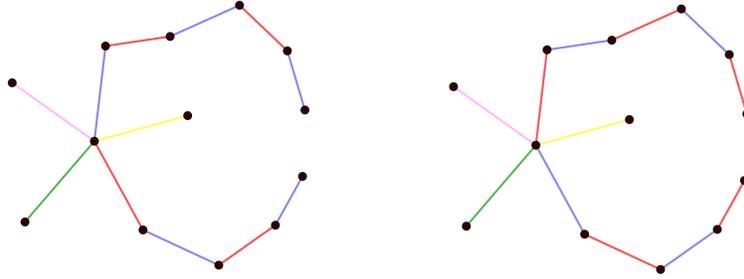


Figura 4.4: Dos coloraciones de aristas de un mismo grafo. Una ha sido obtenida a partir de la otra mediante el argumento de la cadena de Kempe

Ahora ya estamos preparados para demostrar los resultados más importantes sobre el índice cromático. El siguiente teorema, atribuido al matemático húngaro *Dénes König*, ha sido consultado en [Die97] y [CH91].

**Proposición 95.** (König, 1916) Todo grafo bipartito  $G = (V, E)$  satisface  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

*Demostración.* Apliquemos inducción sobre el número de aristas de  $G$ . Para  $|E| = 0$  el enunciado se cumple, pues si no hay aristas significa que todos los vértices del grafo tienen grado 0. Del mismo modo, es cierto si  $G$  tiene una única arista, pues el índice cromático es 1 y el grado máximo también.

Supongamos ahora que  $|E| > 1$ , y que la proposición se cumple para grafos bipartitos con menos aristas que  $G$ . Para simplificar, a  $\Delta(G)$  a partir de ahora lo denotamos como  $k$ .

Sea  $e$  una arista de  $G$ . El grafo  $G - e$  es claramente bipartito, luego por hipótesis de inducción, existe una  $\Delta(G - e)$ -coloración de aristas. Dado que  $\Delta(G - e) \leq \Delta(G) = k$ , entonces podemos colorear  $G - e$  utilizando  $k$  colores. Queremos ver que estos  $k$  colores pueden ser utilizados para colorear las aristas de  $G$ .

A los extremos de  $e$  los llamamos  $x$  e  $y$ . Tenemos que  $\deg_G(x), \deg_G(y) \leq k$ , luego en  $G - e$  tanto  $x$  como  $y$  inciden en como mucho  $k - 1$  aristas. Por tanto, existe un color  $\alpha$ , y otro color  $\beta$ , con  $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, k\}$  tales que  $\alpha$  no está presente en  $x$  y  $\beta$  no está presente en  $y$ . Si  $\alpha = \beta$ , podemos colorear la arista  $e$  con este color y hemos acabado. Así que nos queda por considerar el caso en que hay un color  $\beta$  presente en  $x$  y ausente en  $y$ , y un color  $\alpha$  presente en  $y$  y ausente en  $x$ .

Sea  $K$  la cadena de Kempe que contiene a  $x$  en el subgrafo  $H(\alpha, \beta)$  inducido por las aristas coloreadas de  $\alpha$  o de  $\beta$ . Supongamos que  $y$  también pertenece a  $K$ . Entonces hay un camino  $P$  en  $K$  de  $x$  a  $y$ . Puesto que  $G$  es bipartito, y  $x$  e  $y$  son adyacentes,  $x$  pertenece a uno de los dos conjuntos de la partición de vértices de  $G$ , e  $y$  al otro. Por tanto, el camino  $P$  debe tener longitud impar. Además, dado que  $\beta$  está presente en  $x$ , la primera arista de  $P$  debe ser de color  $\beta$ . Como las aristas de  $P$  se colorean de  $\beta$  y  $\alpha$  de manera alterna, y tiene longitud impar, la última arista también ser de color  $\beta$ . Llegamos a contradicción puesto que habíamos dicho que  $\beta$  no estaba

presente en  $y$ . Así que  $y$  no pertenece a la cadena de Kempe  $K$ .

Utilizamos ahora el argumento de intercambio de colores de las cadenas de Kempe sobre  $K$ . Este intercambio hace que  $\beta$  esté ahora ausente de  $x$ , pero no afecta a los colores de las aristas que tienen a  $y$  como extremo. Luego en esta nueva  $k$ -coloración de aristas,  $\beta$  está ausente de  $x$  e  $y$ . Así que coloreando la arista  $e$  con el color  $\beta$ , extendemos a una  $k$ -coloración de aristas de  $G$ .

□

En el teorema anterior hemos visto que el índice cromático de un grafo bipartito  $G$  es  $\Delta(G)$ . Además, ya vimos en el corolario 94, que el índice cromático de un grafo completo  $G$  es  $\Delta(G)$  o  $\Delta(G) + 1$ . El siguiente resultado, probado por Vizing (véase [CH91]), demuestra que esas dos posibilidades son en realidad las únicas para cualquier grafo  $G$ .

**Teorema 96.** (Vizing, 1964) Todo grafo  $G = (V, E)$  satisface

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

*Demostración.* La primera desigualdad está clara por lo comentado anteriormente, así que nos centramos en probar la segunda desigualdad.

Probémosla por inducción sobre el número de aristas de  $G$ . Si  $|E| = 1$ , está claro que  $\Delta(G) = \chi'(G) = 1$ ; así que suponemos que  $G$  tiene más de una arista y que el resultado es cierto para todos los grafos con menos aristas que  $G$ .

Sea  $e$  una arista a cuyos extremos llamamos  $v_1$  y  $v_2$ . Por hipótesis, tenemos que las aristas de  $G - e$  pueden colorearse utilizando  $\Delta(G - e) + 1$  colores, y como claramente  $\Delta(G - e) \leq \Delta(G)$ , también puede colorearse utilizando  $\Delta(G) + 1$  colores. Para simplificar la notación pongamos que  $\Delta(G) = k$ .

Es importante notar que como  $k$  es el mayor grado del grafo  $G$ , entonces en todos sus vértices hay al menos un color (de los  $k + 1$  que tenemos) ausente. En particular, hay al menos un color ausente en  $v_1$ , y otro que ausente en  $v_2$ . Si el color ausente para ambos vértices es el mismo, entonces podemos asignarle este color a  $e$ , y producir así una  $(k + 1)$ -coloración de aristas de  $G$ , consiguiendo lo que queríamos:  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Ahora asumimos que hay un color, -llamémoslo 1-, ausente de  $v_1$  pero presente en  $v_2$ , y otro, -llamémoslo 2-, ausente de  $v_2$  pero presente en  $v_1$ .

Empezando con  $v_1$  y  $v_2$ , vamos a ir construyendo una secuencia de vértices distintos:  $v_1, v_2, \dots, v_j$ , donde cada  $v_i$ , con  $i \geq 2$  es adyacente a  $v_1$ . El proceso de construcción es el siguiente: el vértice  $v_3$  se elige de manera que  $v_1v_3$  tiene asignado el color 2. El vértice  $v_3$  existe puesto que el color 2 está presente en  $v_1$ , pero ausente en  $v_2$ . En caso de ser posible, se elige un nuevo color, 3, ausente de  $v_3$  pero presente en  $v_1$ , y llamamos  $v_1v_4$  a la arista que tiene asignado el color 3. Siempre que sea posible, continuamos con el proceso: eligiendo un nuevo color  $i$ , ausente de  $v_i$ , pero presente en  $v_1$ , y llamando  $v_1v_{i+1}$  a la arista coloreada con  $i$ . De esta manera obtenemos una secuencia de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_j$  tales que:

- (a)  $v_i$  es adyacente a  $v_1$  para cada  $i > 1$ ,
- (b) el color  $i$  está ausente de  $v_i$  para cada  $i = 1, 2, \dots, j - 1$ , y
- (c) la arista  $v_1v_{i+1}$  tiene asignado el color  $i$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, j - 1$ .

Ilustramos esta idea parcialmente en la siguiente imagen:

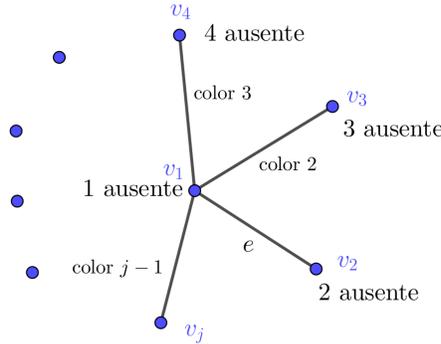


Figura 4.5: Representación de cómo se escoge la secuencia descrita.

Nótese que no se encuentran dos aristas del mismo color en este proceso, puesto que serían adyacentes y esto contradiría la suposición de que tenemos una coloración de aristas de  $G - e$ .

Dado que  $\deg(v_1) \leq k$ , se sigue de (a) que una secuencia de ese estilo tiene como mucho  $k + 1$  términos. Es decir,  $j \leq k + 1$ . Supongamos ahora que la secuencia  $v_1, v_2, \dots, v_j$  es lo más larga posible, es decir, que no es posible encontrar un nuevo color  $j$ , ausente de  $v_j$ , junto con un nuevo vecino  $v_{j+1}$  de  $v_1$ , tal que  $v_1v_{j+1}$  está coloreada de  $j$ . Nos encontramos ante dos casos:

- El color  $j$ , ausente de  $v_j$  por construcción, también está ausente de  $v_1$ . Ahora coloreamos la arista  $e = v_1v_2$  con 2, y recoloreamos las aristas  $v_1v_i$  de color  $i$  para  $i = 3, \dots, j - 1$ . Dado que  $i$  estaba ausente de  $v_i$  para cada  $i = 2, \dots, j - 1$ , esto nos proporciona una  $(k + 1)$ -coloración del subgrafo  $G - v_1v_j$ . Además, como el color  $j$  está ausente de  $v_j$  y de  $v_1$ , podemos usarlo para recolorar  $v_1v_j$  produciendo así una  $(k + 1)$ -coloración de  $G$ .

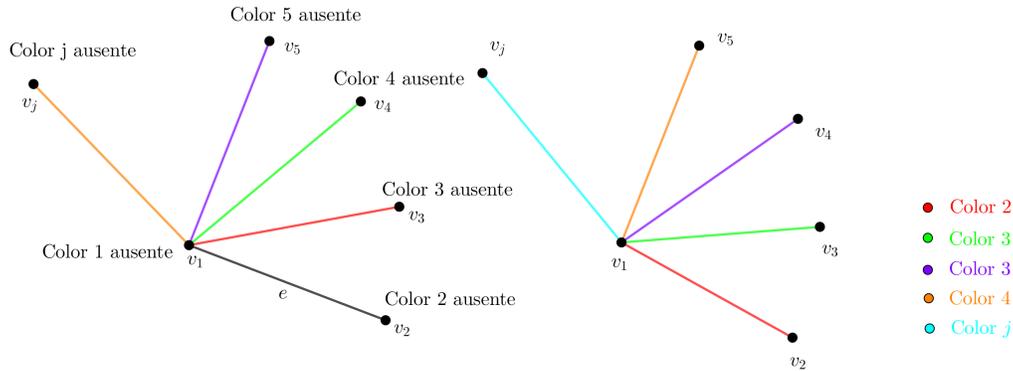


Figura 4.6: Representación del proceso de recolocación descrito arriba.

- El color  $j$ , ausente de  $v_j$  por construcción, está presente en  $v_1$ . Como habíamos supuesto que nuestra secuencia de vértices era lo más larga posible, no puede darse el caso de que exista otro vecino de  $v_1$ , al que llamamos  $v_{j+1}$ , que no esté en la secuencia, y tal que la arista que los une sea de color  $j$ , pues si no podríamos extender la secuencia. Necesariamente una de las aristas  $v_1v_3, v_1v_4, \dots, v_1v_{j-1}$  debe ser de color  $j$ . Pongamos que esa arista es  $v_1v_l$ . Ahora coloreemos la arista  $e = v_1v_2$  de 2, y recoloreemos cada arista  $v_1v_i$  con  $i$ , para  $i = 3, \dots, l-1$ . Quitemos el color  $j$  de  $v_1v_l$  (el color  $j$  es exactamente el color  $l-1$ ). Entonces tenemos una  $(k+1)$ -coloración del subgrafo  $G - v_1v_l$  que queremos extender a  $G$ . Nótese que  $j$  está ausente de  $v_l$  y  $v_j$ . Estudiemos los siguientes casos:

1. Si el color 1 está ausente de  $v_l$ , se lo asignamos a la arista  $v_1v_l$  y tenemos una  $(k+1)$ -coloración.
2. Si el color 1 está ausente de  $v_j$ , recoloreemos cada arista  $v_1v_i$  con  $i$ , para  $i = l, \dots, j-1$ , y asignemos el color 1 a la arista  $v_1v_j$ . Obtenemos de nuevo una  $(k+1)$ -coloración.

Si no se da ninguno de estos casos, consideramos  $H(1, j)$ , el subgrafo de  $G$  inducido por las aristas coloreadas por 1 o por  $j$  en esta coloración parcial de  $G$ . Necesariamente  $v_1, v_l$  y  $v_j$  están en este subgrafo. Ya vimos que cada componente de  $H(1, j)$  es un camino o un ciclo. Como el color 1 está ausente de  $v_1$  y  $j$  está ausente tanto de  $v_j$  como de  $v_l$ , se puede deducir que estos 3 vértices no pertenecen a la vez a la misma componente conexa de  $H(1, j)$ . Si estuvieran en la misma componente conexa, podríamos encontrar un camino que pasa por los 3 vértices. Así que uno de los vértices tendría grado 2, y en ese vértice estarían presentes los dos colores: tanto 1 como  $j$ , una contradicción. Por tanto, si denotamos como  $K$  y  $L$  a las correspondientes cadenas de *Kempe* que contienen a  $v_j$  y a  $v_l$  respectivamente, o bien  $v_1 \notin K$ , o bien  $v_1 \notin L$ :

- Supongamos que  $v_1 \notin L$ . El argumento de intercambio de los colores de la cadena de *Kempe* utilizado sobre  $L$ , da una nueva  $(k+1)$ -coloración de  $G - v_1v_l$ . Al intercambiar

los colores, el color ausente de  $v_l$  pasa a ser 1, y si asignamos 1 a la arista  $v_1v_l$  obtenemos una  $(k + 1)$ -coloración de  $G$ .

- Finalmente, si  $v_1 \notin K$  coloreamos la arista  $v_1v_l$  de  $l$  y recoloreamos las aristas  $v_1v_i$  para  $i = l + 1, \dots, j - 1$  con  $i$  pero eliminamos el color  $j - 1$  de  $v_1v_j$ . Entonces, por como hemos construido la secuencia  $v_1, v_2, \dots, v_j$ , obtenemos una  $(k + 1)$ -coloración de  $G - v_1v_j$  que no ha afectado al subgrafo de dos colores  $H(1, j)$ . Ahora utilizamos el argumento de la cadena de *Kempe* para intercambiar los colores en la componente  $K$  y obtenemos otra  $(k + 1)$ -coloración de  $G - v_1v_j$  en la que 1 está ausente de ambos:  $v_1$  y  $v_j$ . Colorear  $v_1v_j$  con 1 nos da una  $(k + 1)$ -coloración de  $G$ .

□

Lo que nos dice este teorema, es que los grafos finitos pueden clasificarse en dos categorías dependiendo de su índice cromático. Un grafo  $G$  cuyo *índice cromático* es  $\Delta(G)$  pertenece a la *clase 1*, mientras que si su *índice cromático* es  $\Delta(G) + 1$ , pertenece a la *clase 2*.

Naturalmente, estas definiciones suscitan muchas preguntas sobre cuándo un grafo pertenece a una clase u a otra. Ya hemos visto que los grafos bipartitos y los grafos completos de orden impar pertenecen a la *clase 1*, y los grafos completos de orden par a la *clase 2*, pero en general no se conoce una caracterización sencilla de esta propiedad. Sin embargo, gracias al siguiente teorema demostrado por Paul Erdős, sabemos que lo más probable es que un grafo aleatorio sea de clase 1. No lo probaremos puesto que su demostración, que puede consultarse en [EW77], se aleja mucho de los conceptos y objetivos de este trabajo.

**Teorema 97.** (Erdős) Casi todos los grafos son de clase 1. Es decir, si  $U_n$  es el conjunto de los grafos de clase 1 de  $n$  vértices, y  $V_n$  es el conjunto de todos los grafos de  $n$  vértices, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{|U_n|}{|V_n|} = 1.$$

#### 4.1.4. Algunos grafos de clase 2

Aunque hemos visto que la mayoría de grafos son de clase 1, otros como los grafos completos de orden par son de clase 2. En esta sección presentaremos una serie de grafos que son de clase 2. Estos y otros casos pueden ser consultados en [Gre15].

Comencemos con los grafos regulares. Recordemos que un grafo es *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado. Más específicamente, decimos que es un grafo *k-regular* si todos sus vértices tienen grado  $k$ . En particular, si  $G$  es un grafo  $k$ -regular se tiene que  $\Delta(G) = k$ .

**Teorema 98.** Un grafo regular con un número impar de vértices es de *clase 2*.

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo  $k$ -regular de  $n = 2t + 1$  vértices. En un grafo de orden impar como este, necesariamente  $k$  tiene que ser par. Esto es así porque como  $G$  es regular, tiene  $\frac{kn}{2}$  aristas (un

número entero), y dado que  $n$  es impar,  $k$  tiene que ser divisible entre 2. Se tiene por tanto que  $k$  es de la forma  $k = 2l$ . Como hemos dicho,  $G$  tiene  $\frac{kn}{2}$  aristas, es decir  $\frac{(2l)n}{2} = ln$ .

Razonemos por reducción al absurdo: supongamos que tenemos una coloración de aristas de  $G$  que solo utiliza  $k$  colores. El número promedio de aristas por color es  $\frac{ln}{k} = \frac{l(2t+1)}{k} = t + \frac{1}{2}$ , así que al menos hay un color que aparece en  $t + 1$  aristas. Pero  $G$  tiene solo  $2t + 1$  vértices, así que dos de esas aristas del mismo color deben compartir un vértice y hemos llegado a una contradicción. Por el Teorema de Vizing, la única opción posible es que el índice cromático sea  $k + 1$ .  $\square$

Ya vimos lo que era un *emparejamiento*: un conjunto de aristas de un grafo donde ninguna comparte extremo con otra. A partir de este concepto surge el siguiente:

**Definición 99.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. El *número de independencia de aristas* de un grafo  $G$ , es el tamaño de un emparejamiento lo más grande posible en  $G$ . Lo denotamos como  $\alpha(G)$ .

Es claro que ningún grafo puede tener un emparejamiento de tamaño mayor que  $\frac{|V|}{2}$ ; es decir,  $\alpha(G) \leq \frac{|V|}{2}$ . Si no fuera así, existiría un emparejamiento formado por más de  $\frac{|V|}{2}$  aristas sin vértices en común, lo que implicaría que contiene más de  $|V|$  vértices distintos; esto es absurdo.

Por otra parte, puesto que una coloración de aristas es una asignación de colores a emparejamientos de aristas, y el índice cromático indica el número mínimo de conjuntos que conforman una partición de  $E$  en emparejamientos, es sencillo observar que:

$$\chi'(G) \geq \frac{|E|}{\alpha(G)}.$$

Estos dos comentarios son de utilidad para probar otra condición suficiente para que un grafo sea de clase 2:

**Teorema 100.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Si  $|E| > \alpha(G)\Delta(G)$  entonces  $G$  es de clase 2.

*Demostración.* Por hipótesis y por el comentario hecho arriba tenemos las siguientes desigualdades:

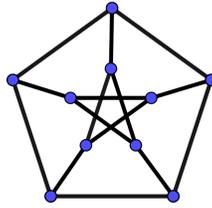
$$\chi'(G) \geq \frac{|E|}{\alpha(G)} > \frac{\alpha(G)\Delta(G)}{\alpha(G)} = \Delta(G).$$

Y si  $\chi'(G) > \Delta(G)$ , por el Teorema de Vizing necesariamente  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ .  $\square$

Para finalizar, probaremos que el conocido grafo de *Petersen* es de clase 2; para ello probaremos que no puede ser coloreado por solo 3 colores:

**Teorema 101.** El grafo de Petersen es de clase 2.

*Demostración.* Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe una 3-coloración de aristas del grafo de *Petersen*.



Obsérvese en esta representación del grafo de *Petersen* que tiene dos 5-ciclos, uno exterior, y el otro interior.

Consideremos el 5-ciclo externo del grafo de *Petersen*. Necesariamente, los tres colores deben aparecer en él (pues los ciclos de longitud impar requieren 3 colores). Llamemos a estos colores 1, 2 y 3.

Uno de estos colores aparece una vez, mientras que los otros aparecen dos veces cada uno. Supongamos sin pérdida de generalidad que la coloración de aristas del 5 – ciclo externo en el sentido de las agujas del reloj es: 1, 2, 3, 1, 2. Esto determina los colores de las 5 aristas que conectan el 5-ciclo interno con el externo.

A su vez, esto determina el color de cuatro de las aristas del 5-ciclo interno, dos de las cuales son adyacentes entre sí, y reciben el mismo color. Luego tenemos una contradicción.

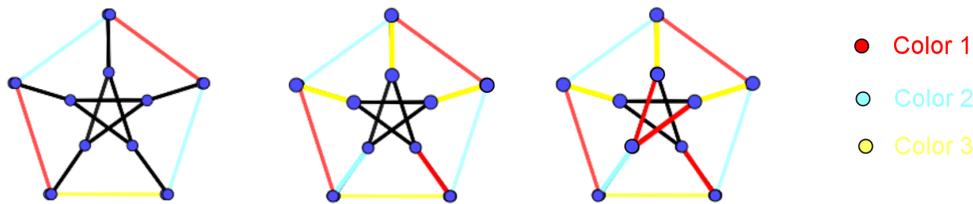


Figura 4.7: De izquierda a derecha proceso de coloración de aristas planteado en la demostración, que conduce a contradicción.

□

**Definición 102.** Llamamos *snarks* a los grafos 3-regulares y de clase 2.

Por lo probado, el grafo de Petersen es un *snark*<sup>1</sup>. De hecho, es el más sencillo de ellos, y fue el único conocido hasta 1946, cuando se probó que existían una cantidad infinita de ellos.

<sup>1</sup>El término *snark* proviene del título del poema “*The hunting of the Snark*” (1876) del matemático Lewis Carroll, autor de obras como “*Alicia en el País de las Maravillas*”, donde el *snark* es un animal fantástico probablemente con características de un tiburón (*shark*) y de una serpiente (*snake*).

Finalizamos la sección construyendo una familia infinita de *snarks*: los *snarks flores*. Fueron introducidos por Rufus Isaacs en 1975, y la demostración de que, efectivamente, son de clase 2 puede consultarse en [Isa75].

El *snark flor*  $J_n$ , donde  $n$  es impar, se puede construir con el siguiente proceso:

- Construyamos  $n$  copias del grafo estrella de 4 vértices. Llamemos  $A_i$  al vértice central de cada estrella, y  $B_i$ ,  $C_i$  y  $D_i$  a los vértices exteriores. Esto da como resultado un grafo desconectado de  $4n$  vértices con  $3n$  aristas ( $A_iB_i$ ,  $A_iC_i$  y  $A_iD_i$  para  $1 \leq i \leq n$ ).

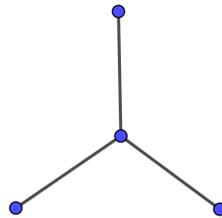


Figura 4.8: Grafo estrella de 4 vértices.

- Construyamos el  $n$ -ciclo  $B_1 \dots B_n B_1$ . Esto añade  $n$  aristas.
- Finalmente, construyamos el  $2n$ -ciclo  $C_1 \dots C_n D_1 \dots D_n C_1$ . Esto añade  $2n$  aristas.

Por construcción, el *snark flor*  $J_n$  es un grafo 3-regular, con  $4n$  vértices y  $6n$  aristas. Además, exigimos que  $n$  sea impar.

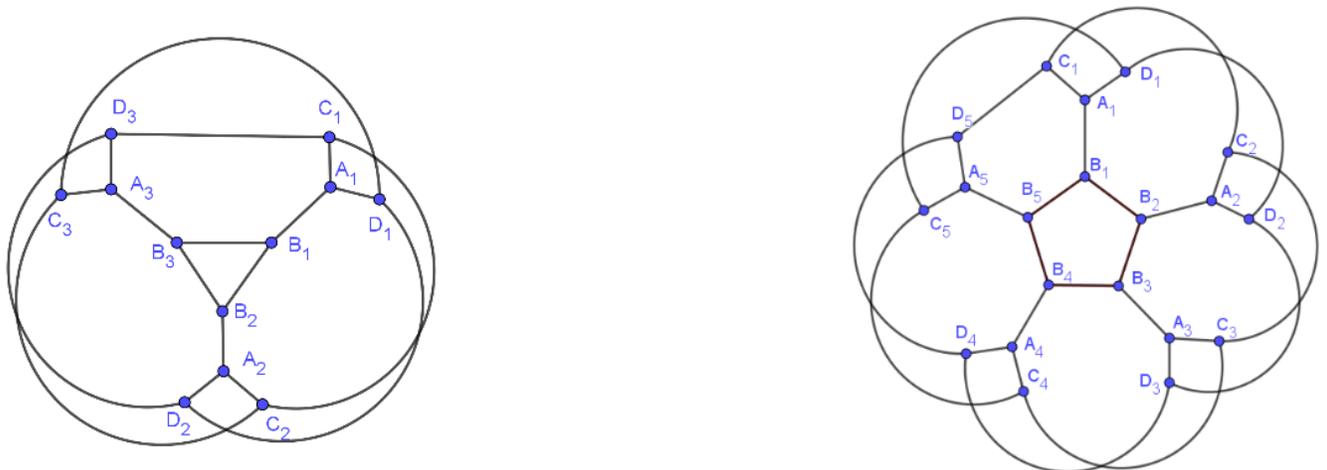


Figura 4.9: Snarks flores; a la izquierda  $J_3$  y a la derecha  $J_5$ .

## 4.2. Coloración de caras

Ya hemos visto anteriormente en este trabajo que cuando un grafo está dibujado como grafo plano, a los espacios comprendidos entre vértices y aristas, y al espacio no acotado que rodea al grafo, los llamamos *caras*; y al conjunto de aristas que rodean cada una de ellas lo llamamos *frontera*. Además, decimos que dos caras son *adyacentes* si comparten alguna arista de sus respectivas fronteras.

El problema que estudiaremos en esta sección es el de coloración de caras. Como podemos imaginar por lo visto sobre coloración de vértices y de aristas, consiste en asignar colores a las caras de un grafo de manera que no haya dos caras adyacentes del mismo color, y en utilizar el menor número de colores posible.

### 4.2.1. Presentación del problema y definiciones básicas

La descripción anterior es en realidad algo simplista, puesto que a diferencia de los problemas de coloración de vértices y aristas, es necesario restringirse a cierto tipo de grafos para poder tratar el problema de coloración de caras. En primer lugar, dado que la noción de cara se ha definido para grafos planos, no estudiaremos el problema en grafos que no lo sean. Y en segundo lugar, puesto que nuestro objetivo es colorear las caras del grafo plano de manera que al cruzar una arista  $e$  pasemos a otra cara de diferente color,  $e$  no puede ser un *punte*. Esto es así porque las aristas puente son frontera de una única cara. Recordemos la definición de *punte*:

**Definición 103.** Dado un grafo  $G$ , un *punte* es una arista cuya eliminación del grafo aumenta el número de componentes conexas.

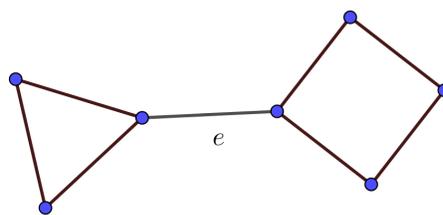


Figura 4.10: Grafo cuya arista  $e$  es un puente

Por las consideraciones hechas, es razonable restringirse a grafos planos sin puentes para tratar el problema de coloración de caras.

Esto nos lleva a la definición de *mapa* que utilizaremos de ahora en adelante:

**Definición 104.** Dado un grafo planar conexo y sin puentes,  $G$ , llamamos *mapa* a su representación como grafo plano.

Por este motivo, a este problema se le conoce también como coloración de mapas. La elección de esta palabra se debe al modo en que surgió el problema de coloración de vértices, como ya comentamos en el capítulo 2: tratando de colorear con el menor número posible de colores las regiones de un mapa cartográfico, de manera que no hubiera dos regiones colindantes del mismo color. Pueden pensarse estas regiones como las caras de un grafo. Ya en el capítulo 2 evidenciamos la relación entre la coloración de las regiones y los vértices de un grafo mediante la figura 3.1 del mapa de Castilla y León. En esta sección, formalizaremos dicha relación mediante el concepto de *grafo dual*, y presentaremos algunos resultados consecuencia de la misma. Aunque primero que nada, es necesario introducir otros conceptos más básicos.

Denotamos por  $C$  al conjunto de las regiones o caras de un *mapa*. Definimos una *coloración de caras* de un mapa como sigue:

**Definición 105.** Una *coloración de caras* de un mapa  $G$  es una aplicación  $c: C \rightarrow S$ , tal que  $c(f) \neq c(m)$  cuando  $f$  y  $m$  son dos caras adyacentes. A los elementos del conjunto  $S$  los llamamos colores disponibles.

Lo único que nos interesa de ese conjunto  $S$  es su tamaño. Cuando el conjunto  $S$  es  $\{1, 2, \dots, k\}$ , siendo  $k$  un entero positivo, decimos que es una  $k$ -coloración de caras.

Cuando un *mapa* admite una  $k$ -coloración *de caras*, decimos que es  $k$ -coloreable. Esta expresión también se utiliza, como ya vimos, en el problema en los problemas de coloración de vértices y de aristas; sin embargo el término *mapa* es exclusivo del problema de coloración de caras, luego no debería inducir a confusión.

**Ejemplo 106.** A continuación un mapa y una 4-coloración del mismo. El fondo se encuentra coloreado puesto que es la cara exterior del grafo.

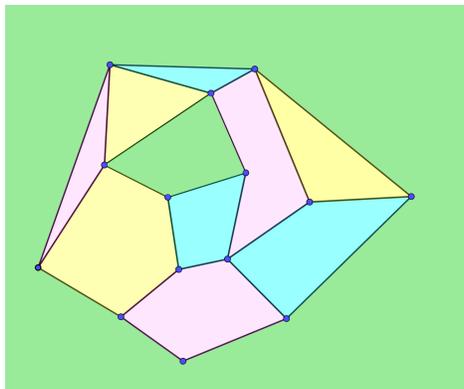


Figura 4.11: Coloración de caras de un mapa.

### 4.2.2. Relación con el problema de coloración de vértices

A partir de aquí, nuestro objetivo será demostrar que el problema de coloración de caras se puede reducir al problema de coloración de vértices ya tratado. Para ello necesitamos conocer el concepto de *grafo dual* de un grafo  $G$ . Los resultados presentados en esta subsección se han consultado en [CH91] y [Lew16].

Sea  $G$  un grafo plano sin puentes, es decir, un mapa. Definimos el *dual* de  $G$  ( $G^*$ ) de la manera siguiente: por cada cara  $f$  de  $G$ , construimos un vértice asociado,  $f^*$ , en  $G^*$ ; y para cada arista  $e$  de  $G$ , hay una arista  $e^*$  en  $G^*$ , tal que si la arista  $e$  se encuentra en la frontera de dos caras  $f$  y  $g$  de  $G$ , entonces la arista  $e^*$  une los correspondientes vértices  $f^*$  y  $g^*$  de  $G^*$ .

Se tiene que el dual  $G^*$  de un grafo plano sin puentes  $G$  también es planar. Justifiquémoslo viendo que es posible representar  $G^*$  como un grafo plano: dado el grafo plano  $G$ , colóquese el vértice  $f^*$  de  $G^*$  dentro de la correspondiente cara  $f$ . Sea  $g$  una cara adyacente a la cara  $f$ , y tomemos una arista  $e$  que se encuentre en la frontera de ambas; unamos los dos vértices  $f^*$  y  $g^*$  mediante la arista  $e^*$  de manera que cruce la arista  $e$  exactamente una vez y no cruce ninguna otra arista de  $G$ . Con la siguiente figura ilustramos el proceso de construcción del dual de un grafo:

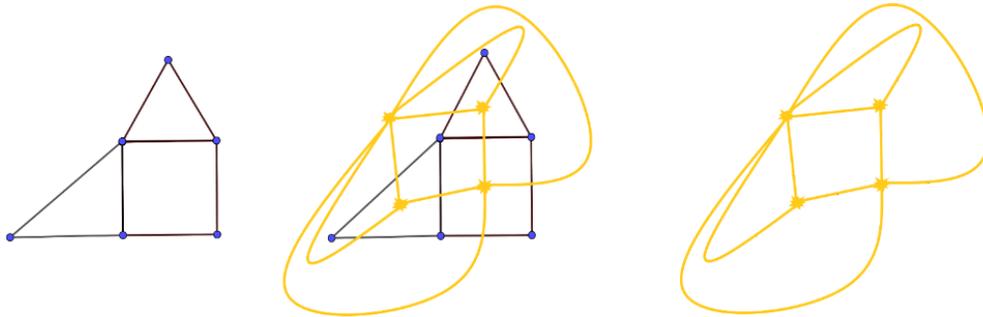


Figura 4.12: A la izquierda un grafo plano  $G$  y a la derecha su dual  $G^*$ .

**Observación 107.** El procedimiento anterior es posible incluso si la arista  $e$  es un puente: la tratamos como si estuviera dos veces en la frontera de la cara  $f$  en la que se encuentra, y en consecuencia la correspondiente arista  $e^*$  es una arista del vértice  $f^*$  en sí mismo. A este tipo de aristas de un vértice en sí mismo las llamamos *bucles*. Hasta ahora en este trabajo, hemos tratado exclusivamente *grafos simples no dirigidos*, es decir, grafos cuyo conjunto de aristas está contenido en  $\binom{V}{2} := \{\{a, b\} : a, b \in V \text{ y } a \neq b\}$  y por tanto no admiten bucles. Con el método de construcción del dual que hemos descrito, es inmediato comprobar que una arista  $e$  es un puente en  $G$  si y solo si  $e^*$  es un bucle en  $G^*$ , y que una arista  $e$  es un bucle en  $G$  si y solo si  $e^*$  es un puente en  $G^*$ . Sintetizando, estos hechos explican que consideremos grafos sin puentes, pues así se evitan grafos duales que tengan bucles. Sin embargo, es demasiado afirmar que esta condición sea

suficiente para que los duales sean grafos *simples no dirigidos*. Es frecuente que el dual de un grafo tenga *aristas paralelas*, es decir, aristas diferentes que comparten ambos extremos. Este hecho está caracterizado de la siguiente manera: dadas dos caras  $f$  y  $g$  de  $G$ , hay  $k$  aristas paralelas entre  $f^*$  y  $g^*$  si y solo si  $f$  y  $g$  tienen  $k$  aristas en su frontera común. En el dual de la figura anterior (4.12) pueden observarse aristas paralelas. A estas generalizaciones de los grafos que admiten aristas paralelas (pero no bucles) las llamamos *multigrafos* o *pseudografos*. En general estas aristas no nos suponen ningún problema para las construcciones que estamos haciendo, luego nuestros razonamientos pueden extenderse a grafos planos que las tengan, y en un abuso de la terminología nos referiremos a ellos simplemente como *grafos*.

**Observación 108.** Nótese que hemos definido el dual de un grafo plano y no de un grafo planar. El motivo es que diferentes grafos planos  $G_1$  y  $G_2$  de un mismo grafo pueden resultar en duales  $G_1^*$  y  $G_2^*$  no isomorfos. Un ejemplo de esto nos lo da la siguiente figura. En azul tenemos dos grafos planos distintos de un mismo grafo, y en rojo sus duales. Es sencillo darse cuenta de que los duales no son isomorfos puesto que el grafo rojo de arriba tiene un vértice de grado 6 (el correspondiente a la cara externa del grafo azul), mientras que en el de abajo, todos los vértices tienen grado menor que 6.

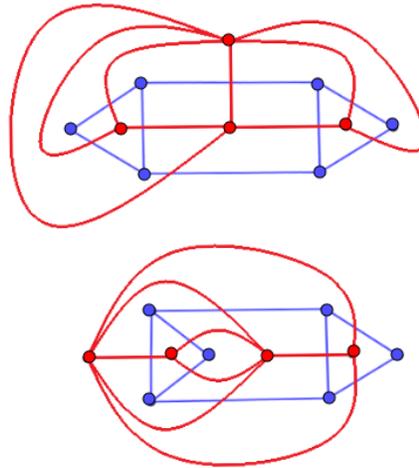


Figura 4.13: En azul dos grafos planos diferentes de un mismo grafo. En rojo sus duales.

Como consecuencia de la construcción del grafo dual se tiene que el número de vértices, caras y aristas de  $G$  y  $G^*$  están estrechamente relacionados. Dicha relación se materializa en el siguiente resultado:

**Teorema 109.** Sea  $G$  un grafo plano conexo sin puentes, con  $n$  vértices,  $m$  caras y  $f$  caras. Sea  $G^*$  el dual de  $G$ , que tiene  $n^*$  vértices,  $m^*$  aristas y  $f^*$  caras. Entonces se tiene que:  $n^* = f$ ,  $m^* = m$  y  $f^* = n$ .

*Demostración.* Con el método que hemos utilizado para construir el dual, colocamos un vértice de  $G^*$  en cada cara de  $G$ ; luego claramente:  $n^* = f$ . De manera similar se tiene que  $m^* = m$ , puesto que cada arista de  $G^*$  interseca exactamente una arista en  $G$  (y viceversa). La tercera igualdad se deduce sustituyendo los valores anteriores en la fórmula del Teorema de Euler ( $C + V = A + 2$ ) aplicada a  $G$  y  $G^*$ .

□

Hagamos una observación sobre las caras de un grafo dual  $G^*$ :

**Observación 110.** Nótese que tal y como construimos los grafos duales, cada cara de un grafo dual  $G^*$ , contiene un vértice del grafo original  $G$ . Obsérvense las imágenes precedentes: 4.12 y 4.13. Sea  $\phi$  una cara del grafo dual  $G^*$ , y sean  $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ , las aristas de su frontera. Por construcción de  $G^*$ , cada una de estas aristas  $e_i^*$  cruza la correspondiente arista  $e_i$  de  $G$ , y todas estas aristas  $e_i$ , tienen un extremo en común al que llamamos  $v$ . Se sigue que la cara  $\phi$  de  $G^*$  contiene al vértice  $v$  de  $G$ .

Dado que  $G^*$  es un grafo plano, podemos construir también el dual de  $G^*$ , al que llamamos *doble dual de  $G$*  y denotamos como  $G^{**}$ . Teniendo en cuenta lo comentado en la observación anterior podemos probar el siguiente resultado:

**Teorema 111.** Sea  $G$  un grafo plano conexo. Entonces  $G$  es isomorfo a su doble dual  $G^{**}$ .

*Demostración.* Nótese que toda cara del grafo  $G^*$  está asociada con un vértice de  $G^{**}$ . Por lo visto anteriormente, cualquier cara  $f$  del dual  $G^*$ , contiene al menos un vértice de  $G$ , al que llamamos  $v$ . De hecho, este es el único vértice de  $G$  contenido por  $f$ , puesto que por el Teorema 112 el número de caras de  $G^*$  es el mismo que el número de vértices de  $G$ . Luego, podemos tomar el vértice  $v$  de  $G$ , y asignarle el vértice de  $G^{**}$  asociado con la cara  $f$  de  $G^*$ . Esta elección nos da el isomorfismo buscado.

□

Ya estamos preparados para probar el resultado que permite convertir un problema de coloración de caras en un problema de coloración de vértices:

**Teorema 112.**

- (a) Un mapa  $G$  admite una  $k$ -coloración de caras si y solo si su dual  $G^*$  admite una  $k$ -coloración de vértices.
- (b) Sea  $G$  un grafo plano conexo sin bucles. Entonces  $G$  admite una  $k$ -coloración de vértices si y solo si su dual  $G^*$  admite una  $k$ -coloración de caras.

*Demostración.* Denotemos a las caras y a las aristas de  $G$  como  $f_1, \dots, f_t$  y  $e_1, \dots, e_m$  respectivamente. Tal y como construimos el dual tenemos que los vértices de  $G^*$  son:  $f_1^*, \dots, f_t^*$ , y las aristas son:  $e_1^*, \dots, e_m^*$ , y se encuentran en una correspondencia biunívoca con las caras y aristas de  $G$ . Además, dos vértices de  $G^*$ ,  $f^*$  y  $g^*$ , están unidos mediante una arista  $e^*$  si y solo si las caras asociadas de  $G$ ,  $f$  y  $g$ , son adyacentes y la correspondiente arista  $e$  pertenece a su frontera común.

- (a) Escojamos una  $k$ -coloración de caras de  $G$ . Entonces, si asignamos al vértice  $f^*$  de  $G^*$  el color asignado a la cara  $f$  de  $G$ , obtenemos una  $k$ -coloración de vértices de  $G^*$ . Esto es así pues las caras  $f$  y  $g$  de  $G$  son adyacentes si y solo si los correspondientes vértices de  $G^*$  son adyacentes.

De manera similar, tomemos una  $k$ -coloración de vértices de  $G^*$ . Si asignamos a la cara  $f$  de  $G$  el color asignado al vértice  $f^*$  de  $G^*$ , obtenemos una  $k$ -coloración de caras de  $G$ . La razón es la misma que en el caso anterior.

- (b) La hipótesis de que no tenga bucles es redundante si consideramos que  $G$  es un grafo simple no dirigido. Sin embargo, se ha incluido para enfatizar que este resultado puede extenderse a una definición de grafo más general que incluya a aquellos que tienen aristas paralelas siempre que no tengan bucles. Su dual  $G^*$  no tiene puentes y es por tanto un mapa. Por el apartado (a),  $G^*$  admite una  $k$ -coloración de caras si y solo si el doble dual  $G^{**}$  admite una  $k$ -coloración de vértices. Por ser  $G$  conexo y por el Teorema 111, tenemos que  $G$  es isomorfo a  $G^{**}$ , y tenemos el resultado.

□

Finalicemos la sección y el capítulo con unos resultados que son consecuencia del teorema anterior. Para el primero de ellos es necesario que recordemos que un grafo *euleriano* es aquel que contiene un recorrido cerrado que pasa por cada arista exactamente una vez; y que por el Teorema 41, un grafo conexo es euleriano si y solo si todo vértice tiene grado par. Es necesario también el siguiente lema:

**Lema 113.** Sea  $G$  un grafo plano y conexo. El grafo  $G$  es bipartito si y solo si  $G^*$  es euleriano.

*Demostración.*

⇒ Todas las caras de ese grafo son ciclos de longitud par (puesto que por la Proposición 31 los grafos bipartitos no contienen ciclos de longitud impar), lo que implica que todos los vértices de  $G^*$  son de grado par y por tanto  $G^*$  es euleriano.

⇐ Supongamos que  $G$  no es bipartito. Entonces por la Proposición 31,  $G$  contiene algún ciclo de longitud impar, es decir, una cara con un número impar de aristas en la frontera. Así que tenemos que  $G^*$  contiene un vértice grado impar, lo que contradice que  $G^*$  sea euleriano. Así que lo supuesto es falso.

□

**Teorema 114.** Un mapa  $G$  admite una 2-coloración de caras si y solo si es un grafo euleriano.

*Demostración.*

$\Rightarrow$  Supongamos que  $G$  tiene una 2-coloración de caras. Por el Teorema 112,  $G^*$  admite una 2-coloración de vértices, así que el número cromático de  $G^*$  es 1 o 2. Si es 1, por ser  $G^*$  conexo ha de ser el grafo de un vértice, y trivialmente,  $G$  también es el grafo de un único vértice (no consideramos que el mapa vacío sea coloreable). Evidentemente el vértice de  $G$  tiene grado 0; luego por el Teorema 41,  $G$  es euleriano. En caso de que el número cromático de  $G^*$  sea 2, sabemos que es bipartito (por lo visto en el capítulo anterior) y por el lema anterior  $G^{**}$  es euleriano. Dado que  $G \cong G^{**}$ , se tiene que  $G$  es euleriano.

$\Leftarrow$  Recíprocamente, supongamos que  $G$  es un grafo euleriano. Entonces su doble dual  $G^{**}$  también lo es, y de nuevo por el lema anterior  $G^*$  es bipartito. Se tiene entonces que  $\chi(G^*) = 2$ , y por el Teorema 112,  $G$  admite una 2-coloración de caras.

□

Este último resultado es consecuencia del Teorema 112 y del *Teorema de los Cuatro Colores* visto para coloración de vértices, y prueba la conjetura establecida por Francis Guthrie en 1852:

**Teorema 115.** Todo mapa  $G$  puede colorearse utilizando un máximo de 4 colores.

*Demostración.* Construyamos el dual de  $G$ . Por el Teorema de los Cuatro Colores sabemos que  $G^*$  admite una 4-coloración de vértices. Como  $G$  por hipótesis no tiene puentes (pues es un mapa),  $G^*$  no tiene bucles, y aplicando el Teorema 112 b) llegamos a que  $G^{**}$  admite una 4-coloración de caras. Hemos visto que  $G \cong G^{**}$ , luego  $G$  admite una 4-coloración de caras. □

Concluimos aquí la parte del trabajo dedicada a los problemas de coloración de grafos; y hemos visto que tanto la coloración de caras como la coloración de aristas pueden reducirse a la coloración de vértices mediante los conceptos de grafo de línea y de grafo dual. Estos que hemos estudiado son los tres problemas más conocidos de coloración de grafos; pero pese a tratarse de cuestiones clásicas en teoría de grafos, su estudio sigue motivando nuevas preguntas y definiciones, el estudio de algunas familias de grafos, y el desarrollo de nuevas aplicaciones y métodos.

---

## Capítulo 5

# Grafos fuertemente regulares y relación con otras familias de grafos

A diferencia de capítulos anteriores, en este nos centraremos en el estudio de los grafos fuertemente regulares. Los grafos fuertemente regulares fueron introducidos por Raj Chandra Bose en 1963, y se caracterizan por una estructura que les proporciona una extrema regularidad. En la primera sección del capítulo estudiaremos sus principales propiedades, abordando algunas de ellas desde un punto de vista más algebraico.

Por otra parte, ahondaremos en la noción de automorfismo de grafos, presentaremos una serie de familias de grafos definidas mediante automorfismos, y estudiaremos las relaciones entre ellas y los grafos fuertemente regulares.

Finalizaremos la sección construyendo el grafo de Paley, uno de los más notables grafos fuertemente regulares, sirviéndonos de lo visto en el capítulo.

### 5.1. Grafos fuertemente regulares

**Definición 116.** Un grafo fuertemente regular de parámetros  $(n, k, \lambda, \mu)$ , es un grafo de orden  $n$ ,  $k$ -regular y que verifica las siguientes propiedades:

- dados dos vértices vecinos, hay exactamente  $\lambda$  vértices adyacentes a ambos;
- dados dos vértices que no son vecinos, hay exactamente  $\mu$  vértices adyacentes a ambos.

Por convención, de esta definición se excluyen los grafos completos y los grafos que no tienen aristas.

Es habitual denotar a un grafo fuertemente regular de parámetros  $(n, k, \lambda, \mu)$  como  $srg(n, k, \lambda, \mu)$ , donde  $srg$  procede de las iniciales de estos grafos en inglés: *strongly regular graphs*.

Veamos a continuación una serie de ejemplos de grafos fuertemente regulares:

**Ejemplo 117.** El conocido grafo de Petersen es de orden 10 y es 3-regular. Puede observarse que la mayor distancia entre dos vértices cualesquiera del grafo es 2, lo que quiere decir que el *diámetro* del grafo es 2. Además, es sencillo darse cuenta de que el grafo no tiene ningún 3-ciclo ni 4-ciclo, pero sí que tiene al menos un 5-ciclo; de aquí deducimos que la *cintura* del grafo de Petersen es 5. De estos dos hechos (que el diámetro sea 2 y la cintura 5), se deduce lo siguiente: que dados dos vértices adyacentes no hay ningún vértice adyacente a ambos, y que dados dos vértices no adyacentes hay exactamente un vértice adyacente a ambos. Se tiene por tanto que el grafo de Petersen es un grafo fuertemente regular de parámetros  $(10, 3, 0, 1)$ .

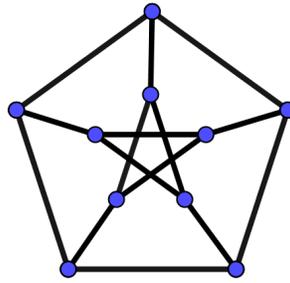


Figura 5.1: Grafo de Petersen.

**Ejemplo 118.** Definimos un grafo de la siguiente manera: sea  $n$  un entero positivo, y consideremos  $\{1, 2, \dots, n\}^2$  el conjunto de vértices. Dados dos vértices  $(a, b)$  y  $(c, d)$ , estos constituyen una arista si  $a = c$  o  $b = d$ . Si disponemos los vértices en  $n$  filas y  $n$  columnas, colocando el vértice  $(i, j)$  en la fila  $i$  y la columna  $j$ , se tiene que un vértice es adyacente con los vértices que están en su misma fila o en su misma columna.

A este grafo se le conoce como *grafo de la torre* pues representa los movimientos de la pieza de la torre en un tablero de ajedrez de tamaño  $n \times n$ .

Obviamente este grafo tiene  $n^2$  vértices, y cada vértice tiene grado  $2(n - 1)$ . Además, dados dos vértices adyacentes (esto es, que están en la misma fila o en la misma columna), estos tienen  $(n - 2)$  vecinos comunes. De manera similar, dados dos vértices no adyacentes,  $(i, j)$  y  $(k, l)$  tienen exactamente dos vecinos en común:  $(i, l)$  y  $(k, j)$ . Por tanto hemos comprobado que este grafo es un grafo fuertemente regular de parámetros  $(n^2, 2(n - 1), n - 2, 2)$ .

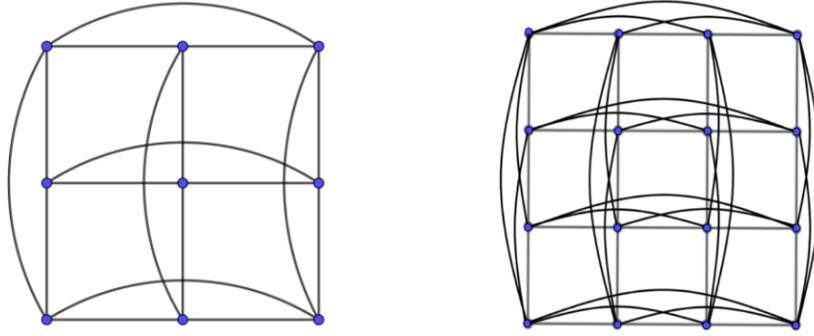


Figura 5.2: Grafo de la torre de 9 vértices ( $n = 3$ ) y grafo de la torre de 16 vértices ( $n = 4$ ).

**Ejemplo 119.** Otro modo similar de construir grafos fuertemente regulares es mediante cuadrados latinos. Sea  $A$  un conjunto de  $n$  elementos. Un cuadrado latino sobre  $A$  de tamaño  $n$  es una matriz  $n \times n$ , en la que en cada posición de la matriz hay un elemento de  $A$ , y tal que ningún elemento aparece dos veces en una misma fila o una misma columna. Si consideramos  $A = \{1, 2, 3\}$ , un cuadrado latino de tamaño 3 es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Consideremos ahora  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ . A partir de un cuadrado latino sobre  $A$  podemos construir un grafo que sea fuertemente regular de la siguiente manera: disponemos  $n^2$  vértices en  $n$  filas y  $n$  columnas (como en el ejemplo anterior del grafo de la torre). Cada vértice representa una posición del cuadrado latino de partida. Establecemos una arista entre dos vértices si:

1. están en la misma fila,
2. están en la misma columna, o
3. en el cuadrado latino asociado tienen el mismo número.

Cada vértice de este grafo tiene grado  $3(n - 1)$ . Al vértice en la fila  $i$  y la columna  $j$  lo denotamos como  $(i, j)$ , con  $1 \leq i, j \leq n$ . Veamos ahora cuántos vecinos comunes tienen dos vértices adyacentes. Sean  $(i, j)$  e  $(i, k)$  dos vértices de una misma fila (la  $i$ -ésima); éstos son adyacentes a los otros  $n - 2$  vértices de esa fila, y además son adyacentes a otros dos vértices: el vértice en la columna  $j$ -ésima que tiene el mismo número que  $(i, k)$ , y el vértice en la columna  $k$ -ésima que tiene el mismo número que  $(i, j)$ . De manera análoga tenemos que dos vértices de una misma columna también tienen  $n$  vecinos comunes. Consideremos ahora dos vértices que tienen el mismo número en el cuadrado latino asociado:  $(i, j)$  y  $(k, l)$  (obviamente  $i \neq k$  y  $j \neq l$ ). Hay otros  $n - 2$  vértices con el mismo número asociado. Además son adyacentes a otros dos vértices:  $(i, l)$  y  $(k, j)$ . Por tanto se tiene que cada par de vértices adyacentes de este grafo tiene  $\lambda = n$  vecinos en común.

Por otra parte, sean  $(i, j)$  y  $(k, l)$  (con  $i \neq k$  y  $j \neq l$ ) dos vértices no adyacentes, esto es, que no están en la misma fila, ni en la misma columna, ni tienen el mismo número. El vértice  $(i, j)$  tiene dos vecinos comunes con  $(k, l)$  en su fila (la  $i$ -ésima) : el vértice  $(k, j)$  y el vértice que tiene el mismo número que  $(k, l)$ . Razonando del mismo modo  $(i, j)$  tiene otros dos vecinos comunes con  $(k, l)$  en su columna (la  $j$ -ésima). Por último, podemos encontrar otros dos vecinos comunes a ambos que no están ni en la misma fila ni en la misma columna que  $(i, j)$ : los vértices que tienen el mismo número que  $(i, j)$  y que están en la misma fila o columna que  $(k, l)$ . Luego  $\mu = 6$ .

Por tanto, un grafo asociado a un cuadrado latino de tamaño  $n$  es un grafo fuertemente regular de parámetros  $(n^2, 3(n - 1), n, 6)$ . Puesto que  $\lambda > 0$ , es inmediato que todos los grafos de esta forma contienen un 3-ciclo y por tanto su cintura es 3. Y como  $\mu > 0$ , su diámetro es 2.

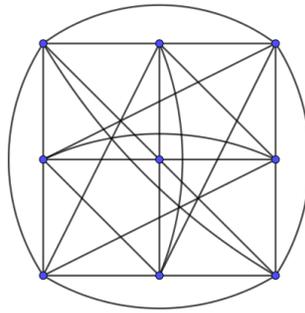


Figura 5.3: Grafo asociado al cuadrado latino anterior.

Los cuatro parámetros  $(n, k, \lambda, \mu)$  no son independientes. Con un sencillo estudio combinatorio (siguiendo las indicaciones de [Cam01]) puede probarse que satisfacen la siguiente relación :

**Proposición 120.** Los parámetros  $(n, k, \lambda, \mu)$  de un grafo fuertemente regular satisfacen la siguiente ecuación:

$$k(k - \lambda - 1) = (n - k - 1)\mu. \tag{5.2}$$

*Demostración.* Sea  $v$  un vértice del grafo. Contemos de dos maneras diferentes la cantidad de pares de vértices adyacentes  $(x, y)$  que hay, tales que  $x$  es un vértice adyacente a  $v$  e  $y$  es un vértice no adyacente a  $v$ :

- Por una parte, dado que es un grafo  $k$ -regular,  $v$  es adyacente a  $k$  vértices; luego existen  $k$  posibilidades de escoger el primer vértice del par. Hay exactamente  $\lambda$  vértices adyacentes a  $v$  y al vértice que ya tenemos; luego hay  $k - \lambda - 1$  vértices adyacentes al ya escogido, que no sean ni  $v$  ni adyacentes a  $v$ . En total hay  $k(k - \lambda - 1)$  posibilidades.
- Por otra parte, hay  $(n - k - 1)$  posibilidades de elegir un vértice no adyacente a  $v$ : pues en total hay  $n$  vértices pero hay que excluir los  $k$  que son adyacentes a él, y él mismo. Solo falta por contar cuántos vértices hay que sean simultáneamente adyacentes al vértice ya elegido y

a  $v$ . Hay exactamente  $\mu$ , puesto que  $v$  y el vértice elegido anteriormente no son vecinos. En total hay  $(n - k - 1)\mu$  posibilidades.

Se tiene por tanto la igualdad del enunciado.

□

La ecuación anterior (5.2) es un ejemplo sencillo de una condición de factibilidad que deben cumplir los parámetros de cualquier grafo fuertemente regular. Además, encontrar grafos fuertemente regulares no es sencillo; por ello es una estrategia habitual construir 4-uplas de posibles parámetros que verifiquen condiciones de factibilidad como la que acabamos de ver y posteriormente tratar de construir el grafo asociado a dichos valores.

Otro modo de obtener nuevos grafos fuertemente regulares es considerando el complementario de grafos fuertemente regulares ya conocidos:

**Proposición 121.** El complementario de un grafo fuertemente regular de parámetros  $(n, k, \lambda, \mu)$  es otro grafo fuertemente regular de parámetros  $(n, n - k - 1, n - 2 - 2k + \mu, n - 2k + \lambda)$ .

*Demostración.* Por construcción, el grafo complementario de un grafo  $G$  tiene el mismo número de vértices que  $G$ , es decir,  $n$ .

Nuevamente por la construcción de un grafo complementario, si  $G$  es  $k$ -regular, entonces su complementario es  $(n - k - 1)$ -regular; con lo que tenemos el segundo parámetro.

Para calcular los otros dos parámetros consideremos los siguientes casos:

- Sean  $u$  y  $v$  dos vértices adyacentes en  $\overline{G}$ . Queremos ver cuántos vértices adyacentes a ambos hay en dicho grafo: si los excluimos a ellos mismos hay  $n - 2$  vértices que podrían ser vecinos. Recordemos que en  $G$ ,  $u$  y  $v$  no son adyacentes y tienen  $k$  vecinos cada uno; además  $\mu$  de esos vecinos son comunes, lo que nos da un total de:  $k + k - \mu = 2k - \mu$  vértices adyacentes a  $u$  o  $v$  en  $G$ . En  $\overline{G}$  hay aristas entre dos vértices si esos dos vértices no conforman una arista en  $G$  y viceversa; luego en total hay  $(n - 2) - (2k - \mu) = n - 2k + \mu - 2$  vértices adyacentes a ambos,  $u$  y  $v$ , en  $\overline{G}$ .
- Sean  $u$  y  $v$  dos vértices no adyacentes en  $\overline{G}$ . Queremos ver cuántos vértices adyacentes a ambos hay en dicho grafo: si los excluimos a ellos mismos hay  $n - 2$  vértices que podrían ser vecinos. Recordemos que en  $G$ ,  $u$  es adyacente a  $k$  vértices, a  $k - 1$  si excluimos a  $v$ ; del mismo modo  $v$  tiene  $k$  vecinos,  $k - 1$  si excluimos a  $u$ ; y hay  $\lambda$  vértices adyacentes a ambos; esto nos da un total de  $(k - 1) + (k - 1) - \lambda = 2k - 2 - \lambda$  vértices adyacentes a  $u$  o  $v$  en  $G$ , sin contar a los propios  $u$  y  $v$ . En  $\overline{G}$  hay aristas entre dos vértices si esos dos vértices no conforman una arista en  $G$  y viceversa; luego en total hay  $(n - 2) - (2k - 2 - \lambda) = n - 2k + \lambda$  vértices adyacentes a ambos,  $u$  y  $v$ , en  $\overline{G}$ .

□

**Ejemplo 122.** Por lo visto en la proposición anterior, el complementario del grafo de Petersen es un grafo fuertemente regular de parámetros  $(10, 6, 3, 4)$ . Se trata de un grafo cuya cintura es 3 puesto que dados dos vértices adyacentes, existen 3 vértices adyacentes a ambos, y por tanto el grafo contiene algún 3-ciclo. Además, puesto que el último parámetro es mayor que cero se tiene que el diámetro de este grafo es 2.

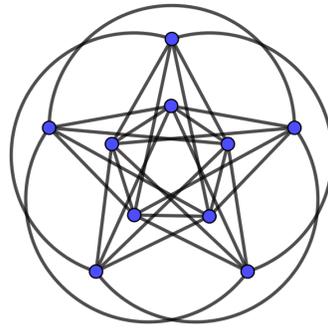


Figura 5.4: Complementario del grafo de Petersen.

Finalizamos la sección estudiando los grafos fuertemente regulares desde un punto de vista más algebraico. Nuestro objetivo último es encontrar otras condiciones necesarias para ser un grafo fuertemente regular.

Sea  $G$  un grafo cuyo conjunto de vértices es  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , y sea  $A$  la matriz de tamaño  $n \times n$  que en la posición  $(i, j)$ , (con  $1 \leq i, j \leq n$ ) tiene un 1 si  $v_i v_j$  constituyen una arista de  $G$ , y 0 en caso contrario. Es decir,  $A$  es una matriz de adyacencia de  $G$  (recordemos que no es única, depende del orden en que tomemos los vértices).

**Observación 123.** Recordemos que una matriz de adyacencia de un grafo simple no dirigido es una matriz simétrica real, y por tanto es diagonalizable y sus autovalores son reales (véase Lema 8.4.2 de [GR01]).

De la definición de esta matriz se tiene que  $A^2 = AA$  es la matriz cuadrada de tamaño  $n \times n$ , que en la posición  $(i, j)$  tiene la cantidad de recorridos de longitud 2 de  $v_i$  a  $v_j$  que hay en  $G$ . También podemos ver  $A^2$  como la matriz que en la posición  $(i, j)$  indica el número de vecinos comunes a  $v_i$  y  $v_j$  (y si  $i = j$  como el grado de  $v_i$ ). Esta relación nos permite probar el siguiente resultado:

**Proposición 124.** Sea  $G$  un grafo fuertemente regular de parámetros  $(n, k, \lambda, \mu)$  cuyo conjunto de vértices es  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , y sea  $A$  su matriz de adyacencia, como antes. Además sea  $I$  la matriz identidad de orden  $n$  y  $J$  la matriz de orden  $n$  con unos en todas las posiciones. Se tiene la siguiente relación:

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A). \tag{5.3}$$

*Demostración.* Hagamos una serie de consideraciones que nos ayudarán a probar el resultado:

1. La matriz  $kI$  obviamente solo tiene elementos no nulos en la diagonal.
2.  $A$  es la matriz de adyacencia de  $G$ , y por ser  $G$  un grafo simple no dirigido, (los grafos que estamos considerando en este trabajo), los elementos de la diagonal son nulos. Para el resto de posiciones  $(i, j)$ , con  $i \neq j$ , depende de si existe una arista entre  $v_i$  y  $v_j$  o no.
3.  $(J - I - A)$  es la matriz de adyacencia del complementario de  $G$ . También es nula en la diagonal, y en el resto de posiciones irá al contrario que  $A$ : si en la posición  $(i, j)$  de la matriz  $A$  hay un 1, en la posición  $(i, j)$  de  $(J - I - A)$  hay un 0 y viceversa.

Luego podemos afirmar que la posición  $(i, j)$  de las 3 matrices  $kI$ ,  $kA$  y  $\mu(J - I - A)$  no es simultáneamente no nula en más de una de las tres matrices. Estudiemos la posición  $(i, j)$  de la matriz  $A^2$ , y comprobemos si coincide con la posición  $(i, j)$  de una de las 3 matrices citadas:  $kI$ ,  $\lambda A$  y  $\mu(J - I - A)$ . Veámoslo:

- Si  $i = j$  nos encontramos en la diagonal de  $A^2$ . Puesto que  $G$  es un grafo  $k$ -regular, hay exactamente  $k$  vértices adyacentes a  $v_i$ , y por tanto  $k$  recorridos de longitud 2 de  $v_i$  a  $v_i$ . La matriz  $kI$  es la única que tiene la posición  $(i, j)$  (con  $i = j$ ) no nula, y en efecto en la posición  $(i, j)$  se encuentra  $k$ .
- Si  $i \neq j$  nos encontramos ante dos posibilidades:
  - Los vértices  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes en  $G$ . Por ser  $G$  fuertemente regular sabemos que existen exactamente  $\lambda$  vértices adyacentes a ambos, y por tanto hay  $\lambda$  recorridos entre  $v_i$  y  $v_j$ : los recorridos que pasan por uno de esos  $\lambda$  vértices intermedios. Si  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes, la matriz  $\lambda A$  es la única que no tiene necesariamente la posición  $(i, j)$  nula, y de hecho en la posición  $(i, j)$  hay un  $\lambda$ , por lo que coincide con lo anterior. Nótese que si el parámetro  $\lambda$  es 0, la posición  $(i, j)$  de esa matriz es 0, pero tampoco hay recorridos de longitud 2 entre  $v_i$  y  $v_j$ .
  - Los vértices  $v_i$  y  $v_j$  no son adyacentes en  $G$ . Por ser  $G$  fuertemente regular sabemos que existen exactamente  $\mu$  vértices adyacentes a ambos, y por tanto hay  $\mu$  recorridos entre  $v_i$  y  $v_j$ : los recorridos que pasan por uno de esos  $\mu$  vértices intermedios. Como  $v_i$  y  $v_j$  no son adyacentes, la matriz  $\mu(J - I - A)$  es la única que no tiene necesariamente la posición  $(i, j)$  nula, y de hecho en la posición  $(i, j)$  hay un  $\mu$ , por lo que coincide con lo anterior. Nótese que si el parámetro  $\mu$  es 0, la posición  $(i, j)$  de esa matriz es 0, pero tampoco hay recorridos entre  $v_i$  y  $v_j$ .

Por los casos considerados se da la igualdad deseada:

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A).$$

□

La ecuación anterior (5.3) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$A^2 - (\lambda - \mu)A - (k - \mu)I = \mu J.$$

Podemos utilizar esta ecuación para obtener los autovalores de  $A$ , y conseguir así una nueva condición necesaria de los grafos fuertemente regulares.

Puesto que  $G$  es un grafo  $k$ -regular, se tiene que  $k$  es un autovalor de  $A$  con autovector  $\mathbf{1}$  (el autovector en el que todas sus componentes son 1), ya que en cada fila y en cada columna de  $A$  hay  $k$  unos y el resto ceros. Antes de continuar necesitamos probar el siguiente lema:

**Lema 125.** Sea  $A$  una matriz simétrica real. Si  $u$  y  $v$  son autovectores de  $A$  que están asociados a diferentes autovalores, entonces  $u$  y  $v$  son ortogonales.

*Demostración.* Supongamos que  $Au = \lambda u$ , y que  $Av = \tau v$ . Puesto que  $A$  es simétrica,  $u^T Av = (v^T Au)^T$ . Sin embargo el lado izquierdo de esta ecuación es  $\tau u^T v$  y el lado derecho es  $\lambda u^T v$ , y puesto que por hipótesis  $\tau \neq \lambda$ , necesariamente se tiene que  $u^T v = 0$ .  $\square$

Dado que la matriz de adyacencia de un grafo es simétrica, se tiene que cualquier otro autovector de  $A$  cuyo autovalor sea diferente de  $k$ , es ortogonal a  $\mathbf{1}$ . Sea  $z$  un autovector de  $A$  cuyo autovalor sea  $\theta$  (con  $\theta \neq k$ ). Entonces se tiene que:

$$A^2 z - (\lambda - \mu)Az - (k - \mu)Iz = \mu Jz = \mathbf{0},$$

luego

$$\theta^2 - (\lambda - \mu)\theta - (k - \mu) = 0.$$

Por tanto, los autovalores de  $A$  diferentes de  $k$  deben ser ceros de la ecuación de segundo grado:  $x^2 - (\lambda - \mu)x - (k - \mu) = 0$ . Sea  $\Delta := (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$  el discriminante de dicha ecuación cuadrática, y denotemos como  $\theta$  y  $\tau$  a los dos ceros de esta ecuación. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{(\lambda - \mu) + \sqrt{\Delta}}{2}, \\ \tau &= \frac{(\lambda - \mu) - \sqrt{\Delta}}{2}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Se comprueba fácilmente que el producto  $\theta\tau$  es igual a  $(\mu - k)$ ; luego, siempre que se tenga que  $k > \mu$ , se tiene que los autovalores  $\theta$  y  $\tau$ , son no nulos y de signo opuesto. Y hemos llegado a que los autovalores de un grafo fuertemente regular están determinados por sus parámetros.

Recordemos que la multiplicidad algebraica de un autovalor es su multiplicidad como raíz del polinomio característico de la matriz correspondiente. Veamos ahora que las multiplicidades algebraicas de los autovalores también están determinadas por los parámetros del grafo fuertemente regular. Sean  $m_\theta$  y  $m_\tau$  las multiplicidades de  $\theta$  y  $\tau$ . Sabemos que  $k$  tiene multiplicidad igual a 1, que la

dimensión de  $A$  es  $n$  y que la suma de todos los autovalores es la traza de  $A$  (que es 0 pues es la suma de los elementos de la diagonal principal de  $A$ ), así que tenemos que:

$$\begin{cases} m_\theta + m_\tau = n - 1 \\ m_\theta\theta + m_\tau\tau = -k \end{cases} .$$

Despejando tenemos que:

$$m_\theta = -\frac{(n-1)\tau + k}{\theta - k}, \quad m_\tau = \frac{(n-1)\theta + k}{\theta - \tau}.$$

Ahora desarrollemos la expresión  $(\theta - \tau)^2$ :

$$(\theta - \tau)^2 = (\theta + \tau)^2 - 4(\theta\tau) = (\lambda - \mu)^2 - 4(\mu - k) = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = \Delta.$$

Sustituyendo los valores de  $\theta$  y  $\tau$  en las expresiones de las multiplicidades, obtenemos que:

$$m_\theta = \frac{1}{2} \left( (n-1) - \frac{2k + (n-1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{\Delta}} \right)$$

y

$$m_\tau = \frac{1}{2} \left( (n-1) + \frac{2k + (n-1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{\Delta}} \right).$$

Razonando de este modo hemos obtenido una condición necesaria para ser grafo fuertemente regular mucho más potente que las vistas hasta ahora: dada una 4-upla de posibles parámetros, se pueden computar  $m_\theta$  y  $m_\tau$  mediante estas ecuaciones. Si los valores resultantes no son números enteros positivos, entonces no puede existir un grafo fuertemente regular con estos parámetros.

**Ejemplo 126.** Utilizando las fórmulas (5.4) podemos computar los autovalores de grafos fuertemente regulares. Por ejemplo, si consideramos el grafo de Petersen, tenemos que 3 es un autovalor por ser 3-regular. Y recordando que sus parámetros como grafo fuertemente regular son  $(10, 3, 0, 1)$ , podemos calcular que los otros dos autovalores son 1 y -2, con multiplicidades 5 y 4 respectivamente.

Acabamos de ver que la matriz de adyacencia de un grafo fuertemente regular tiene exactamente 3 autovalores; y concluimos probando (siguiendo las indicaciones de [GR01] y [Spi09]) que un grafo regular conexo cuya matriz de adyacencia tiene exactamente 3 autovalores distintos es fuertemente regular:

**Teorema 127.** Sea  $G$  un grafo  $k$ -regular y conexo cuya matriz de adyacencia tiene exactamente tres autovalores distintos, entonces  $G$  es fuertemente regular.

*Demostración.* Sea  $A$  la matriz de adyacencia de  $G$ ; y sean  $k$ ,  $\theta$  y  $\tau$  los 3 autovalores de ésta.

Definamos la siguiente matriz:

$$M := \frac{1}{(k-\theta)(k-\tau)}(A-\theta I)(A-\tau I).$$

Claramente todos los autovalores de  $M$  son 0 o 1. Cualquier autovector de  $A$  con autovalor asociado  $\theta$  o  $\tau$  se encuentra en el núcleo de  $M$  ( $\ker(M)$ ), así que se tiene que el rango de  $M$  es exactamente la multiplicidad de  $k$  como autovalor de  $A$ . Puesto que  $G$  es conexo la multiplicidad de  $k$  es 1 y el rango de  $M$  es 1; y como  $M\mathbf{1} = \mathbf{1}$ , se llega a que  $M = \frac{1}{n}J$ . Ahora tenemos que:

$$\frac{(k-\theta)(k-\tau)}{n}J = (A-\theta I)(A-\tau I).$$

Si definimos  $\beta := \frac{(k-\theta)(k-\tau)}{n}$  llegamos a que:

$$(A-\theta I)(A-\tau I) = \beta \Rightarrow A^2 - (\theta + \tau)A + \tau\theta I = \beta J \Rightarrow$$

$$A^2 = (\theta + \tau)A + \tau\theta I + \beta J = (\theta + \tau + \beta)A + \beta(J - A - I) + (\theta\tau + \beta)I. \quad (5.5)$$

Recordemos que podemos ver  $A^2$  como la matriz que en la posición  $(i, j)$  indica el número de vecinos comunes a  $v_i$  y  $v_j$  (y si  $i = j$  como el grado de  $v_i$ ). Puesto que en la ecuación (5.5) hemos llegado a que el número de vecinos comunes a dos vértices depende de si son o no vecinos, entonces tenemos que  $A$  es la matriz de adyacencia de un grafo fuertemente regular.  $\square$

Con este resultado tenemos caracterizados los grafos fuertemente regulares y conexos. Como último comentario, en [BV22], Andries E. Brouwer y H. Van Maldeghem definen los grafos fuertemente regulares de manera totalmente equivalente a la nuestra, utilizando este resultado.

## 5.2. Automorfismos de grafos

En esta sección recordaremos lo que es un automorfismo de grafos y algunas implicaciones de esta noción:

**Definición 128.** Un automorfismo de un grafo, es un isomorfismo de un grafo en sí mismo. Dicho de otro modo, un automorfismo de un grafo  $G$  es una biyección  $f: V(G) \rightarrow V(G)$ , tal que  $ab \in E(G)$  si y solo si  $f(a)f(b) \in E(G)$  para cada  $a, b \in V(G)$ .

**Observación 129.** Nótese que por definición un automorfismo preserva la *adyacencia*: envía aristas adyacentes en aristas adyacentes. Es inmediato que también preserva la *no-adyacencia*: no envía vértices no vecinos en aristas.

Denotamos como  $Aut(G)$  al conjunto de todos los automorfismos de un grafo  $G$ .

**Teorema 130.** Dado un grafo  $G = (V, E)$ , el conjunto de los automorfismos de  $G$  junto con la operación composición ( $\circ$ ) constituyen un grupo.

*Demostración.*

- (i)  $Aut(G)$  es cerrado para la operación composición.
- (ii) La función composición es en general asociativa, luego es asociativa en  $Aut(G)$ .
- (iii) Hay un elemento identidad en  $Aut(G)$ : el automorfismo  $id$  que envía todo vértice en sí mismo ( $id(v) = v$  para cada  $v \in V(G)$ ).
- (iv) Para todo elemento  $\phi \in Aut(G)$  hay un elemento inverso  $\phi^{-1} \in Aut(G)$ . Esto es así porque  $\phi$  es una biyección, luego tiene un inverso que por definición es un automorfismo.

□

Ahora nos interesa probar que los automorfismos de un grafo  $G$  inducen una partición en el conjunto de vértices, en la que dos vértices pertenecen al mismo subconjunto si y solo si existe un automorfismo que lleva un vértice en el otro. Para ello hay que ver que dicha relación es, en efecto, una relación de equivalencia:

- **Reflexividad:** la identidad  $id$  siempre pertenece al conjunto de automorfismos. Como  $id(v) = v$ , para cada  $v \in V(G)$ , se tiene que todo vértice está relacionado consigo mismo.
- **Simetría:** sean  $u, v \in V(G)$ . Si  $u$  está relacionado con  $v$  entonces existe un automorfismo  $f \in Aut(G)$  que envía  $u$  en  $v$ . Consideramos  $f^{-1}$  (el inverso de  $f$ ), que también es un automorfismo. Ahora se tiene que  $f^{-1}(v) = u$ , luego  $v$  también está relacionado con  $u$ .
- **Transitividad:** sean  $u, v, w \in V(G)$ . Supongamos que  $u$  está relacionado con  $v$ , y que  $v$  está relacionado con  $w$ , es decir, que existen dos automorfismos  $f$  y  $g \in Aut(G)$  tales que  $f(u) = v$  y  $g(v) = w$ . Ahora tenemos que  $g \circ f(u) = g(f(u)) = g(v) = w$ , por lo que  $u$  y  $w$  están relacionados.

A cada una de las clases que conforman esta clase de equivalencia las llamamos *órbitas*. Dado un vértice  $v \in V(G)$ , denotamos a su órbita como  $Aut(G)(v)$ .

Finalizamos esta sección presentando una serie de implicaciones de las nociones de automorfismo y de grupo de automorfismos, y que serán de utilidad en la parte final del capítulo.

1. Los automorfismos de un grafo  $G$  preservan el grado de los vértices. Dicho de otro modo, para cada  $u \in V(G)$  y para cada  $\phi \in Aut(G)$ , el grado de  $u$  coincide con el grado de  $\phi(u)$ .

Si recordamos del capítulo 1, el grado es un invariante de grafos; es decir, se preserva por isomorfismos y por tanto, por automorfismos. La justificación reside en la preservación de la adyacencia por isomorfismos.

2. Los automorfismos de un grafo  $G$  preservan la *distancia*. Es decir, para cada  $u, v \in V(G)$  y para cada  $\phi \in \text{Aut}(G)$ , se tiene que:  $d(u, v) = d(\phi(u), \phi(v))$ .

Al igual que antes, la distancia entre dos puntos es un invariante de grafos; aunque en este caso daremos una justificación más detallada: sea  $u = u_0v_1, \dots, u_{d-1}, u_d = v$  el camino más corto de  $u$  a  $v$ . Nótese que al preservarse la adyacencia,  $\phi(u) = \phi(u_0)\phi(u_1)\dots\phi(u_{d-1})\phi(u_d) = \phi(v)$  es un camino de  $\phi(u)$  a  $\phi(v)$ . De aquí se tiene que:  $d(\phi(u), \phi(v)) \leq d(u, v)$ .

Supongamos ahora que  $\phi(u)v_1\dots v_{m-1}\phi(v)$  es el camino más corto de  $\phi(u)$  a  $\phi(v)$ , que tiene distancia  $m$ . Entonces se tiene que  $u, \phi^{-1}(v_1)\dots\phi^{-1}(v_{m-1}), v$  es un camino de  $u$  a  $v$  también de distancia  $m$ . Llegamos a que  $d(u, v) \leq d(\phi(u), \phi(v))$ , y al tener las dos desigualdades obtenemos la igualdad deseada.

3. El grupo de automorfismos de un grafo  $G = (V, E)$  coincide con el grupo de automorfismos del grafo complementario  $\overline{G}$ .

Esto se debe a que los automorfismos preservan la adyacencia y la no adyacencia: envían vértices vecinos en vértices vecinos, y vértices no adyacentes en vértices no adyacentes. Recordemos que para  $\overline{G}$ , el conjunto de vértices ( $V$ ) es el mismo que en  $G$ , y el conjunto de aristas es  $\binom{V}{2} - E$ . Luego los pares de vértices que en  $G$  no constituyen una arista, sí que la constituyen en  $\overline{G}$  y viceversa. Por tanto,  $\phi \in \text{Aut}(G)$  si y solo si  $\phi \in \text{Aut}(\overline{G})$ ; y se tiene que  $\text{Aut}(G) = \text{Aut}(\overline{G})$ .

### 5.3. Algunas familias de grafos definidas por automorfismos y relación con otros grafos

Con los comentarios anteriores ya estamos preparados para presentar una serie de familias de grafos definidas por sus familias de automorfismos. A su vez estudiaremos las relaciones entre ellas y con grafos de otras familias como los regulares o los fuertemente regulares.

- ◇ Un **grafo asimétrico** es un grafo cuyo único automorfismo es la identidad.
- ◇ Decimos que un grafo es **transitivo para vértices** si su grupo de automorfismos actúa transitivamente sobre el conjunto de vértices de ese grafo; es decir, si para cada par de vértices  $v_1$  y  $v_2$ , existe un automorfismo que envía  $v_1$  en  $v_2$ .

Puesto que el grado se preserva por automorfismos, tenemos que todos los grafos transitivos para vértices son *regulares*. El recíproco, como muestra el contraejemplo de la imagen, no es cierto: se trata de un grafo 3-regular, y puede observarse que el vértice central pertenece a tres 5-ciclos y que es el único del grafo con dicha propiedad; por tanto no es transitivo para vértices.

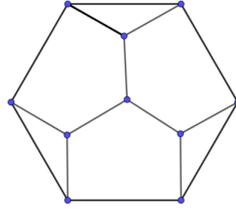


Figura 5.5: Grafo regular pero no transitivo para vértices.

- ◊ Un grafo es **transitivo para aristas** si su grupo de automorfismos actúa transitivamente sobre el conjunto de aristas de ese grafo; esto es, si para cada par de aristas  $e_1$  y  $e_2$ , existe un automorfismo que envía  $e_1$  en  $e_2$ .

Veamos que un grafo transitivo para aristas no tiene que ser transitivo para vértices. Consideremos el grafo bipartito completo  $K_{n,m}$ : es transitivo para aristas, pero a menos que  $m = n$  no es transitivo para vértices, ya que ningún automorfismo puede enviar un vértice de grado  $m$  en uno de grado  $n$ . Para los grafos de este tipo que son transitivos para aristas pero no transitivos para vértices puede probarse el siguiente resultado:

**Proposición 131.** Sea  $G$  un grafo conexo y transitivo para aristas. Si  $G$  no es transitivo para vértices, entonces  $G$  es bipartito

*Demostración.* Como  $G$  es conexo, no hay ningún vértice aislado. Sea  $e$  una arista a cuyos extremos llamaremos  $a$  y  $b$ . Si probamos que el grafo tiene exclusivamente dos órbitas:  $Aut(G)(a)$  y  $Aut(G)(b)$ , entonces tenemos que el grafo es bipartito.

Sea  $c$  otro vértice. Como  $G$  es conexo, no hay ningún vértice aislado, y necesariamente  $c$  es incidente en alguna arista: llamémosla  $\tilde{e}$ . Por ser  $G$  transitivo para aristas, sabemos que existe un automorfismo que envía  $e$  en  $\tilde{e}$ , luego necesariamente  $c$  pertenece a la órbita de  $a$  o a la órbita de  $b$ .

Veamos ahora que  $Aut(G)(a) \neq Aut(G)(b)$ . Si no fuera así, existiría un automorfismo que envía  $a$  en  $b$ ; y en consecuencia dado cualquier par de vértices sería posible enviar uno en otro mediante un automorfismo, contradiciendo la hipótesis de que no es transitivo para vértices.

Hemos llegado a que el grafo tiene exactamente dos órbitas. Éstas inducen una partición de los vértices en dos subconjuntos, tales que cada arista de  $G$  tiene un extremo en cada uno de los dos subconjuntos; es decir,  $G$  es bipartito.

□

- ◊ Un grafo es **simétrico** si su grupo de automorfismos actúa de manera transitiva sobre el conjunto de los pares ordenados de vértices adyacentes. Es decir, dados  $(u_1, u_2)$  y  $(v_1, v_2)$ ,

donde cada par de vértices constituye una arista, existe un automorfismo  $f$  tal que  $f(u_1) = u_2$  y  $f(v_1) = v_2$ .

Si un grafo simétrico no tiene vértices aislados es obvio que es transitivo para vértices, y por tanto regular. Es obvio de la definición que un grafo simétrico es transitivo para aristas. Sin embargo, un grafo transitivo para aristas no tiene por qué ser simétrico ya que una arista  $ab$ , puede ser enviada a otra arista  $cd$  de dos maneras diferentes: enviando  $a$  en  $c$ , y  $b$  en  $d$ , o enviando  $a$  en  $d$ , y  $b$  en  $c$ . Un ejemplo sencillo de un grafo transitivo para aristas pero que no es simétrico ni transitivo para vértices es el grafo estrella:

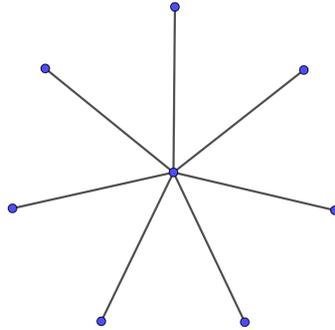


Figura 5.6: Grafo estrella de 8 vértices.

- ◊ Un grafo **transitivo para la distancia** es un grafo cuyo grupo de automorfismos actúa de manera transitiva sobre pares de vértices situados a la misma distancia. Es decir, dado un par ordenado de vértices  $(u_1, u_2)$  que están a distancia  $d$ , y otro par de vértices  $(v_1, v_2)$  que se encuentran a la misma distancia, existe un automorfismo que envía  $u_1$  en  $v_1$ , y  $u_2$  en  $v_2$ .

De la definición es obvio que los grafos transitivos para la distancia son simétricos, puesto que los pares de vértices adyacentes son vértices a distancia 1.

Aunque no son grafos definidos por su grupo de automorfismos es interesante presentar a los grafos *regulares para la distancia*: grafos tales que dados dos vértices  $u$  y  $v$ , el número de vértices a distancia  $j$  de  $u$  y a distancia  $k$  de  $v$  depende exclusivamente de los números  $j$  y  $k$ , y de la distancia entre  $u$  y  $v$ . Los grafos transitivos para la distancia resultan una generalización de los grafos regulares para la distancia. Veámoslo:

**Proposición 132.** Sea  $G$  un grafo transitivo para la distancia, entonces  $G$  es un grafo regular para la distancia.

*Demostración.* Sean  $(u, w)$  dos vértices de  $G$  a distancia  $d$ . Y sean  $(\tilde{u}, \tilde{w})$  también a distancia  $d$ . Por ser  $G$  transitivo para la distancia sabemos que existe un automorfismo  $\phi$  que envía  $u$  en  $\tilde{u}$  y  $w$  en  $\tilde{w}$ .

Sea  $A$  el conjunto de los vértices a distancia  $i$  de  $u$  que también están a distancia  $j$  de  $w$ . Puesto que el autormorfismo  $\phi$  preserva las distancias, se tiene que los vértices de  $\phi(A)$  están a distancia  $i$  de  $\tilde{u}$  y a distancia  $j$  de  $\tilde{w}$ , en  $\phi(G)$ . Obviamente  $|A| = |\phi(A)|$ . Puesto que  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  son automorfismos, los vértices de  $\phi(A)$  son los únicos a distancia  $i$  de  $\tilde{u}$  y a distancia  $j$  de  $\tilde{w}$ .

Se ha visto por tanto que la cantidad de vértices a distancia  $i$  de  $u$  y a distancia  $j$  de  $w$ , depende solo de  $i$ ,  $j$  y de la distancia  $d_G(u, w)$ .

□

Otro motivo por el que los grafos regulares para la distancia nos resultan interesantes es por el siguiente resultado:

**Proposición 133.** Sea  $G$  un grafo fuertemente regular de parámetros  $(n, k, \lambda, \mu)$ , donde  $\mu > 0$ . Entonces  $G$  tiene diámetro 2 y es un grafo regular para la distancia.

*Demostración.* Recordemos que el diámetro de un grafo es la mayor distancia a la que se encuentran dos vértices cualesquiera de un grafo. Por ser  $\mu > 0$  se tiene que dados dos vértices no adyacentes, siempre existe al menos un vértice adyacente a ambos, y por tanto el diámetro es 2.

Sean  $v$  y  $w$  dos vértices de  $G$ . Puesto que el diámetro es 2, cualquier otro vértice,  $z$ , está a distancia 1 o 2 de  $v$  y de  $w$ . Así que solo hay que estudiar esos casos:

- Si  $d(v, w) = 1$ , entonces hay  $\lambda$  vértices que están al mismo tiempo a distancia 1 de  $v$  y a distancia 1 de  $w$ .

Hay además  $k - \lambda - 1$  vértices a distancia 1 de  $v$  y a distancia 2 de  $w$ . Del mismo modo hay  $k - \lambda - 1$  vértices a distancia 1 de  $w$  y a distancia 2 de  $v$ .

Finalmente hay  $n - (2(k - \lambda - 1) + \lambda) - 2 = n - 2k + \lambda$  vértices que están a la vez a distancia 2 de  $v$  y a distancia 2 de  $w$  (todos menos los casos anteriores, y menos los propios  $v$  y  $w$ ).

- Si  $d(v, w) = 2$ , entonces hay  $\mu$  vértices que están a distancia 1 de  $v$  y distancia 1 de  $w$ .

Hay además  $k - \mu$  vértices a distancia 1 de  $v$  y a distancia 2 de  $w$ . Del mismo modo hay  $k - \mu$  vértices a distancia 1 de  $w$  y a distancia 2 de  $v$ .

Por último hay  $n - (2(k - \mu) + \mu) - 2 = n - 2k + \mu - 2$  vértices que están a la vez a distancia 2 de  $v$  y a distancia 2 de  $w$  (todos menos los casos anteriores, y menos los propios  $v$  y  $w$ ).

Luego hemos considerados todos los casos y se tiene que  $G$  es regular para la distancia.

□

### Diagrama de implicaciones entre familias de grafos

Concluimos el capítulo con un diagrama que sintetiza las relaciones vistas entre las familias de grafos estudiadas:

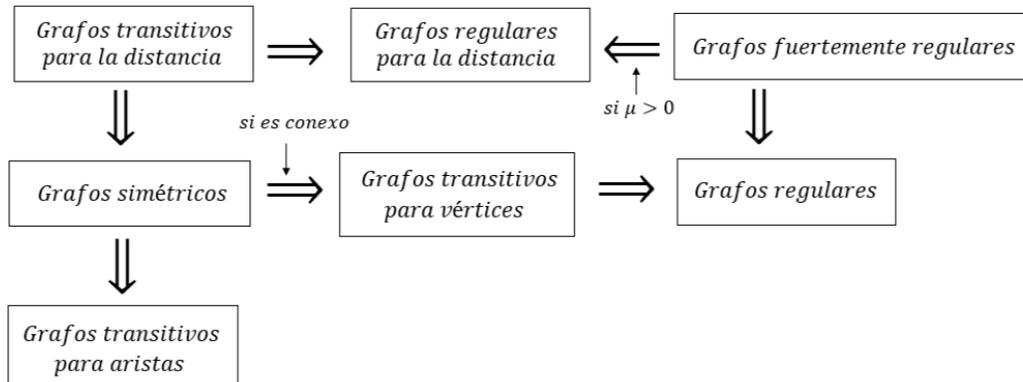


Figura 5.7: Diagrama de implicaciones.

## 5.4. Grafo de Paley

Finalizamos el capítulo construyendo el grafo de Paley de  $p$  vértices (donde  $p$  es un número primo de la forma  $p = 4k + 1$ , con  $k \in \mathbb{Z}_+$ ), y probando que se trata de un grafo fuertemente regular. Para ello nos apoyaremos en nociones como la de simetría vista en la sección anterior. Para esta sección se ha consultado [Els12].

### 5.4.1. Resultados previos

Recordemos que el anillo de los enteros módulo  $n$  consiste en el conjunto  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$  con las operaciones suma y producto módulo  $n$  habituales. Es un resultado conocido que si  $p$  es un número primo,  $\mathbb{Z}_p$  es un cuerpo; y lo denotamos también como  $\mathbb{F}_p$ . Además,  $\mathbb{F}_p^*$ , el grupo multiplicativo de las unidades de  $\mathbb{F}_p$ , (elementos invertibles de  $\mathbb{F}_p$ ) es cíclico y tiene orden  $p - 1$ .

**Definición 134.** Sea  $k \in \mathbb{F}_p$ , con  $p$  primo. Decimos que  $k$  es un *cuadrado* en  $\mathbb{F}_p$  si existe un elemento  $x$  en el cuerpo tal que  $x^2 = k$ .

Ya estamos listos para probar el siguiente lema:

**Lema 135.** Sea  $p$  un primo de la forma  $p = 4k + 1$ . Se tiene que  $-1$  es un cuadrado en  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$ .

*Demostración.* Puesto que  $p - 1 = 4k$ , se tiene que  $4|(p - 1)$ .

Consideremos  $\mathbb{F}_p^*$  el grupo multiplicativo de  $\mathbb{F}_p$ , que es cíclico y de orden  $p - 1$ . Sea  $a$  un generador de  $\mathbb{F}_p^*$ , entonces se tiene que:

$$a^{p-1} = (a^{\frac{p-1}{2}})^2 = 1.$$

Esto implica que o bien  $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$  o bien  $a^{\frac{p-1}{2}} = -1$ . Puesto que el orden de  $a$  es  $p - 1$ , no puede darse la primera, así que se tiene la segunda:  $a^{\frac{p-1}{2}} = -1$ .

Finalmente se tiene que:

$$(a^k)^2 = a^{2k} = a^{\frac{4k}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} = -1,$$

luego  $-1$  es un cuadrado en  $\mathbb{F}_p$ .

□

Ahora ya podemos proceder a construir los grafos de Paley.

### 5.4.2. Construcción del grafo de Paley

Sea  $p$  un primo de la forma  $p = 4k + 1$  con  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Definimos el grafo de Paley de orden  $p$  como el grafo que tiene como vértices a los elementos del cuerpo finito  $\mathbb{F}_p$ ; y decimos que dos elementos  $a$  y  $b$  de  $\mathbb{F}_p$  constituyen una arista,  $ab$ , si y solo si  $a - b$  es un cuadrado en  $\mathbb{F}_p$ . Veamos que está bien definido.

Puesto que la arista que tiene por extremos a  $a$  y  $b$  (con  $a \neq b$ ) puede denotarse como  $ab$  o  $ba$ , hay que comprobar que:

$$a - b \text{ es un cuadrado en } \mathbb{F}_p \iff b - a \text{ es un cuadrado en } \mathbb{F}_p.$$

Supongamos que  $a - b$  es un cuadrado en  $\mathbb{F}_p$ , es decir,  $a - b = k^2$ . Por el lema 135 visto anteriormente tenemos que  $-1$  también es un cuadrado ( $j^2 = -1$ ) en  $\mathbb{F}_p$ . Se tiene por tanto que:

$$b - a = -(a - b) = -k^2 = (-1)k^2 = (j)^2k^2 = (jk)^2,$$

y hemos llegado a que  $b - a$  es un cuadrado en  $\mathbb{F}_p$ .

Por simetría entre  $a$  y  $b$ , con demostrar esa implicación basta.

Al conjunto de los cuadrados no nulos de  $\mathbb{F}_p$ , lo denotamos como  $(\mathbb{F}_p^*)^2$ .

Ahora queremos demostrar que para cada  $p$  primo de la forma  $p = 4k + 1$ , el grafo de Paley de orden  $p$  es fuertemente regular. Para ello habrá que probar primero que es simétrico e isomorfo a su complementario:

**Proposición 136.** Los grafos de Paley son transitivos para vértices y simétricos.

*Demostración.* Sea  $P$  el grafo de Paley de orden  $p$  (con  $p$  primo y  $p = 4k + 1$ ).

Queremos probar que para cada dos vértices  $x$  e  $y$  de  $V(P)$ , existe un automorfismo  $\phi \in \text{Aut}(P)$  tal que  $\phi(x) = y$ ; y que para cada dos pares de vértices adyacentes  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2) \in E(P)$ , existe un  $\theta \in \text{Aut}(P)$  tal que  $\theta(x_1) = x_2$  y  $\theta(y_1) = y_2$ .

Fijamos  $a, b \in V(P)$  donde  $a$  es un cuadrado no nulo en  $\mathbb{F}_p$  ( $a \in (\mathbb{F}_p^*)^2$ ) y definimos la siguiente

función:

$$\phi : V(P) \longrightarrow V(P) \quad \text{con} \quad \phi(x) = ax + b \quad \forall x \in V(P).$$

Queremos ver que  $\phi$  es un automorfismo:

- Se tiene que  $\phi$  es **inyectiva** porque:

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Hemos utilizado que  $a$  es invertible (pues  $a \neq 0$  y  $\mathbb{F}_p$  es un cuerpo).

- Veamos que dado  $y \in V(P)$ , existe  $x \in V(P)$  tal que  $\phi(x) = y$ . Definimos  $x := a^{-1}y - a^{-1}b$ , que obviamente pertenece a  $V(P)$ ; y tenemos que:

$$\phi(x) = a(a^{-1}y - a^{-1}b) + b = y.$$

Luego  $\phi$  es **sobreyectiva**.

- Por último, se tiene que  $\phi$  envía **aristas en aristas**, puesto que:

$$\begin{aligned} xy \in E(P) &\Leftrightarrow x - y \in (\mathbb{F}_p^*)^2 \Leftrightarrow a(x - y) + b - b \in (\mathbb{F}_p^*)^2 \Leftrightarrow (ax + b) - (ay + b) \in (\mathbb{F}_p^*)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \phi(x) - \phi(y) \in (\mathbb{F}_p^*)^2 \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E(P). \end{aligned}$$

Así que hemos probado que  $\phi \in \text{Aut}(P)$ .

Sean  $x$  e  $y$  dos vértices de  $P$ . Si tomamos  $a := 1 \in (\mathbb{F}_p^*)^2$  y  $b := y - x \in V(P)$ , la aplicación  $\phi : V(P) \longrightarrow V(P)$  definida por  $\phi(x) = ax + b$ , es un automorfismo que verifica  $\phi(x) = y$ . Así que  $\text{Aut}(P)$  actúa de manera transitiva sobre  $V(P)$ .

Por último, sean  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  dos pares de vértices adyacentes. Definamos  $a := (x_2 - y_2)(x_1 - y_1)^{-1} \in (\mathbb{F}_p^*)^2$ , y  $b = x_2 - ax_1 \in V(P)$ . Se tiene que  $\theta : V(P) \longrightarrow V(P)$  definida por  $\theta(x) = ax + b$  es un automorfismo que verifica que  $\theta(x_1) = x_2$  y que  $\theta(y_1) = y_2$ . Luego  $\text{Aut}(G)$  actúa transitivamente sobre pares de vértices adyacentes, y por tanto, es simétrico.  $\square$

**Proposición 137.** Sea  $P$  el grafo de Paley de orden  $p$ . Se tiene que  $P$  es isomorfo a su grafo complementario.

*Demostración.* Sea  $r \in \mathbb{F}_p^*$  que no es cuadrado. Consideremos la función:

$$f : V(P) \longrightarrow V(\overline{P}) \text{ definida por } f(x) = rx.$$

La función está bien definida puesto que:

$$xy \in E(P) \Leftrightarrow (x - y) \in (\mathbb{F}_p^*)^2 \Leftrightarrow f(x) - f(y) = rx - ry = r(x - y) \notin (\mathbb{F}_p^*)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)f(y) \in E(\overline{P}).$$

Ahora veamos que  $f$  es una biyección. Claramente,  $f$  es inyectiva dado que:

$$(x - y) = 0 \Leftrightarrow 0 = r(x - y) = rx - ry = f(x) - f(y).$$

Puesto que  $p$  es primo,  $\text{mcd}(r, p) = 1$ . Por la conocida identidad de Bézout sabemos que existen  $a$  y  $b \in \mathbb{Z}$  tales que  $1 = pa + rb$ ; luego necesariamente  $rb \equiv 1 \pmod{p}$ , y se tiene que en  $\mathbb{F}_p$ ,  $rb = 1$ .

En consecuencia tenemos que  $f(bx) = rbx = x$  y  $f$  es sobreyectiva.  $\square$

**Teorema 138.** Sea  $P$  el grafo de Paley de orden  $p$  (con  $p$  primo y de la forma  $p = 4k + 1$ ). Se tiene que  $P$  es un grafo fuertemente regular de parámetros:

$$\left( p, \frac{p-1}{2}, \frac{p-5}{4}, \frac{p-1}{4} \right).$$

*Demostración.* En primer lugar probemos que cada vértice tiene grado  $\frac{p-1}{2}$ .

Fijemos  $x$ , un vértice de  $P$ . El conjunto de los vecinos de  $x$  es el siguiente:

$$\Gamma(x) = \{ z \in V(P) : x - z = s \in (\mathbb{F}_p^*)^2 \}.$$

Si se tuviera que existen dos vértices,  $z_1$  y  $z_2$ , tales que  $x - z_1 = s$ , y  $x - z_2 = s$ , se tendría que  $z_1 = x - s = z_2$ . Luego para cada  $s \in (\mathbb{F}_p^*)^2$  existe un único  $z \in V(P)$  tal que  $x - z = s$ .

Por tanto, se tiene que existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de  $\Gamma(x)$  y los elementos de  $(\mathbb{F}_p^*)^2$ ; luego todos los vértices tienen el mismo grado:  $\text{deg}(x) = |\Gamma(x)| = |(\mathbb{F}_p^*)^2|$ .

Ahora calculemos  $|(\mathbb{F}_p^*)^2|$ . Se tiene que  $|\mathbb{F}_p^*| = p - 1$ . Supongamos que  $x$  e  $y$  son dos vértices distintos, entonces se tiene que:

$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \Leftrightarrow x = -y.$$

Así que  $|(\mathbb{F}_p^*)^2| = \frac{p-1}{2}$ .

En segundo lugar, probemos que cada par de vértices adyacentes tienen  $\frac{p-5}{4}$  vecinos comunes, y que cada par de vértices no adyacentes tienen  $\frac{p-1}{4}$  vecinos comunes.

Sea  $x \in V(P)$ . Definamos los siguientes conjuntos:

$$A := \Gamma(x) \quad \text{y} \quad B := V(P) - (A \cup \{x\}).$$

Si  $y \in A$  y  $z \in B$ , queremos probar que:

$$|A \cap \Gamma(y)| = \frac{p-5}{4} \quad \text{y que} \quad |A \cap \Gamma(z)| = \frac{p-1}{4}.$$

Por ser  $P$  simétrico, sabemos que existe un entero  $l$  tal que cada vértice  $y \in A$  es adyacente a  $l$  vértices de  $B$  ( $|\Gamma(y) \cap B| = l$ ). Además, puesto que  $P$  es isomorfo a su complementario, todo vértice  $z \in B$  no es adyacente a  $l$  vértices de  $A$  ( $|(V(P) - \Gamma(z)) \cap A| = l$ ).

Para calcular  $l$ , computamos  $|A||B|$  de dos maneras diferentes:

- En primer lugar,

$$|A| = |\Gamma(x)| = \frac{p-1}{2}, \quad \text{y} \quad |B| = |V(P)| - |A \cup \{x\}| = p - \left( \frac{p-1}{2} + 1 \right) = p - \frac{p+1}{2} = \frac{p-1}{2}.$$

$$\text{Esto significa que } |A||B| = \left( \frac{p-1}{2} \right)^2.$$

- En segundo lugar,

$$\begin{aligned} |A||B| &= |A \times B| = |\{(a, b) : a \in A, b \in B \text{ y } ab \in E(P)\}| + |\{(a, b) : a \in A, b \in B \text{ y } ab \notin E(P)\}| = \\ &= \left( \frac{p-1}{2} \right) l + l \left( \frac{p-1}{2} \right) = 2l \left( \frac{p-1}{2} \right). \end{aligned}$$

Entonces se tiene que  $|A||B| = \left( \frac{p-1}{2} \right)^2 = 2l \left( \frac{p-1}{2} \right)$ , lo que implica que  $2l = \frac{p-1}{2}$ . Finalmente  $l = \frac{p-1}{4}$ .

Ahora calculamos  $|A \cap \Gamma(y)|$  y  $|A \cap \Gamma(z)|$ :

- ◊ Tenemos que  $\frac{p-1}{2} = |\Gamma(y)|$ . Desarrollemos  $|\Gamma(y)|$ :

$$\begin{aligned} |\Gamma(y)| &= |A \cap \Gamma(y)| + |B \cap \Gamma(y)| + |\{x\} \cap \Gamma(y)| = \\ &= |A \cap \Gamma(y)| + l + 1 = |A \cap \Gamma(y)| + \frac{p-1}{4} + 1 = |A \cap \Gamma(y)| + \frac{p+3}{4}. \end{aligned}$$

Así que se tiene que:

$$|A \cap \Gamma(y)| = \frac{p-1}{2} - \frac{p+3}{4} = \frac{2p-2-p-3}{4} = \frac{p-5}{4}.$$

- ◊ Por otra parte  $|A| = \frac{p-1}{2}$ . Desarrollemos  $|A|$ :

$$|A| = |(V(P) - \Gamma(z)) \cap A| + |\Gamma(z) \cap A| = l + |\Gamma(z) \cap A| = \frac{p-1}{4} + |\Gamma(z) \cap A|.$$

Luego se llega a que:

$$|\Gamma(z) \cap A| = \frac{p-1}{2} - \frac{p-1}{4} = \frac{p-1}{4}.$$

Por consiguiente,  $P$  es un grafo fuertemente regular de parámetros  $\left( p, \frac{p-1}{2}, \frac{p-5}{4}, \frac{p-1}{4} \right)$ .

□

Para finalizar representaremos los 3 primeros grafos de Paley, que son los que tienen 5, 13 y 17 vértices.

**$p=5$**  En este caso se tiene que  $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}_5$  y que el conjunto de cuadrados no nulos es el siguiente:  $(\mathbb{F}_5^*)^2 = \{1, 4\}$ . Es coherente que haya exactamente dos cuadrados no nulos, pues en la demostración del teorema anterior hemos visto que  $|(\mathbb{Z}_p^*)^2| = \frac{p-1}{2}$ . Por tanto el grafo de Paley de 5 vértices es  $srg(5, 2, 0, 1)$ , que es exactamente un 5-ciclo. Se trata del grafo fuertemente regular más sencillo que se puede construir.

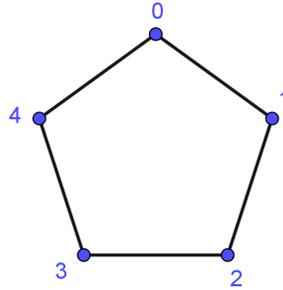


Figura 5.8: Grafo de Paley de 5 vértices.

**$p=13$**  Sea  $\mathbb{F}_{13} = \mathbb{Z}_{13}$  y el conjunto de cuadrados no nulos de dicho cuerpo  $(\mathbb{F}_{13}^*)^2 = \{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$ . El grafo de Paley de 13 vértices ( $srg(13, 6, 2, 3)$ ) es el siguiente:

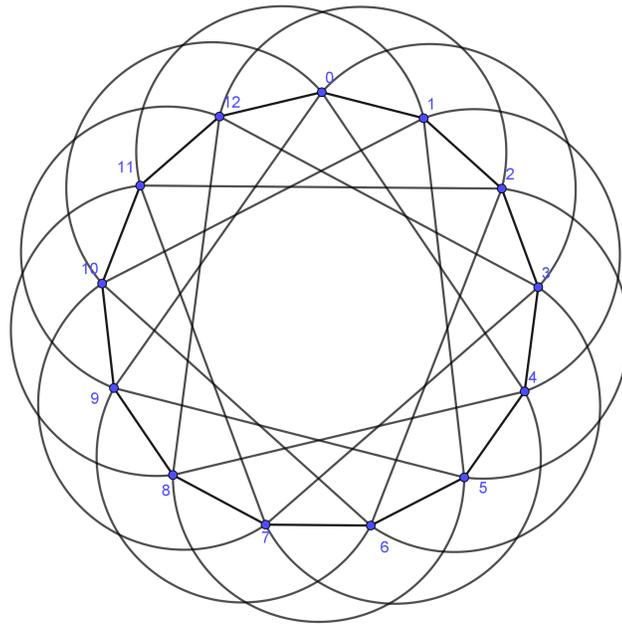


Figura 5.9: Grafo de Paley de 13 vértices.

Como ya vimos en la Proposición 133, por ser un grafo fuertemente regular con  $\mu > 0$ , su *diámetro* es 2. Además, puesto que dados dos vértices vecinos existen 2 vértices adyacentes a ambos podemos afirmar que el grafo de Paley de 13 vértices contiene 3-ciclos, luego la *cintura* de dicho grafo es 3.

**p=17** Sea  $\mathbb{F}_{17} = \mathbb{Z}_{17}$  y el conjunto de cuadrados no nulos de dicho cuerpo  $(\mathbb{F}_{17}^*)^2 = \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$ . El grafo de Paley de 17 vértices  $(srg(17, 8, 3, 4))$  es el siguiente:

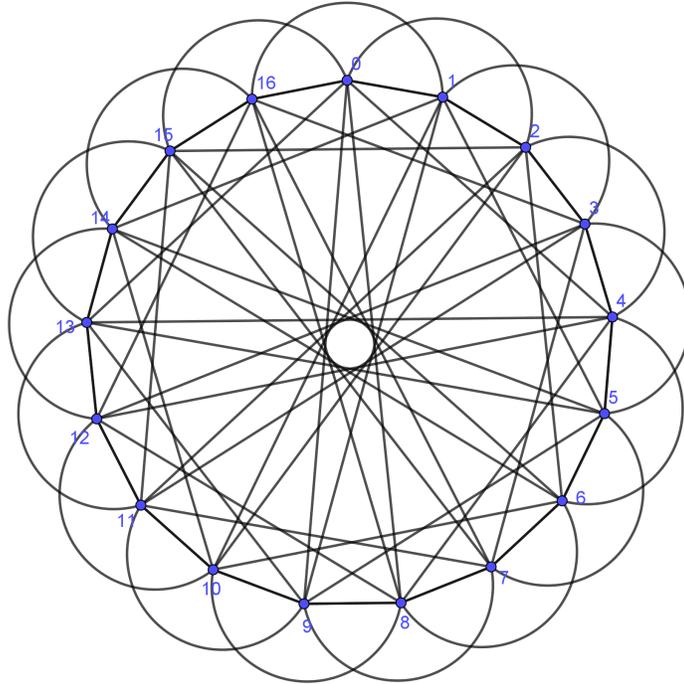


Figura 5.10: Grafo de Paley de 17 vértices.

Del mismo modo que para el caso de  $p = 13$ , el diámetro del grafo de Paley de 17 vértices es 2 y su cintura 3.

Finalizamos aquí el capítulo. Hemos visto que los grafos fuertemente regulares, inicialmente interesantes por sus propiedades estructurales y en ocasiones (como en el grafo de Paley) por sus representaciones extremadamente regulares, esconden mucho más y están estrechamente relacionadas con otras áreas de las matemáticas como la combinatoria o la teoría espectral. Con todo, no solo son interesantes desde un punto de vista teórico, sino que además tienen multitud de aplicaciones como la creación de diseños combinatorios y de redes de comunicación.

---

# Bibliografía

- [AH89] Kenneth Appel y Wolfgang Haken. “Every Planar Map Is Four Colorable”. En: *Contemporary Mathematics*, Vol. 98 (1989).
- [Bai02] Robert F. Bailey. “Distance-Transitive Graphs”. En: (2002). URL: <https://people.math.carleton.ca/~robertb/dtg.pdf>.
- [Bol98] Béla Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer, 1998.
- [BR99] R. Balakrishnan y K. Ranganathan. *A Textbook of Graph Theory*. Springer, 1999.
- [BV22] Andries E. Brouwer y H. Van Maldeghem. *Strongly Regular Graphs*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2022.
- [Cam01] Peter J. Cameron. “Strongly regular graphs”. En: (2001). URL: [http://vlsicad.eecs.umich.edu/BK/SAUCY/papers/srg\\_cameron.pdf](http://vlsicad.eecs.umich.edu/BK/SAUCY/papers/srg_cameron.pdf).
- [CH91] John Clark y Derek Allan Holton. *A First Look at Graph Theory*. World Scientific, 1991.
- [Cha77] Gary Chartrand. *Introductory Graph Theory*. Dover Publications, 1977.
- [Coo71] Stephen A. Cook. “The Complexity of Theorem-Proving Procedures”. En: (1971), págs. 151-158. URL: <https://doi.org/10.1145/800157.805047>.
- [CZ97] Gary Chartrand y Ping Zang. *A First Course in Graph Theory*. Springer, 1997.
- [Die97] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer, 1997.
- [Els12] Ahmed Elsayy. “Paley Graphs and Their Generalizations”. En: (2012). URL: <https://arxiv.org/pdf/1203.1818.pdf>.
- [EW77] Paul Erdős y Robin J. Wilson. “On the chromatic index of almost all graphs”. En: *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 23 (1977), págs. 255-257.
- [Gal17] Severino Fernández Galán. “Simple decentralized graph coloring”. En: *Computational Optimization and Applications*, Vol. 66 (2017), págs. 163-185.
- [GR01] Chris Godsil y Gordon F. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Springer, 2001.
- [Gre15] Robert Green. “VIZING’S THEOREM AND EDGE-CHROMATIC GRAPH THEORY”. En: 2015. URL: <https://math.uchicago.edu/~may/REU2015/REUPapers/Green.pdf>.
- [Har69] Frank Harary. *Graph Theory*. Perseus Books, 1969.
- [HN90] Pavol Hell y Jaroslav Nešetřil. “On the complexity of H-coloring”. En: *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 48. No. 1, (1990), págs. 92-110.

- [Irv83] Robert W. Irving. “NP-completeness of a family of graph-colouring problems”. En: *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 5. No. 1, (1983), págs. 111-117.
- [Isa75] Rufus Isaacs. “Infinite Families of Nontrivial Trivalent Graphs Which are not Tait Colourable”. En: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 82, No. 3, (1975), págs. 221-239. URL: <https://doi.org/10.1080/00029890.1975.11993805>.
- [Lew16] R.M.R Lewis. *A Guide to Graph Colouring: Algorithms and Applications*. Springer, 2016.
- [Mar08] Daniel A. Marcus. *Graph Theory: A Problem Oriented Approach*. The Mathematical Association of America, 2008.
- [Spi09] Daniel A. Spielman. “Strongly regular graphs, part 1”. En: (2009). URL: <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/2009/lect23-09.pdf>.