Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

TEORÍA DE GALOIS DE RECUBRIMIENTOS

Autora: Sabela Alicia Iglesias Sánchez
Tutora: Carolina Ana Núñez Jiménez
2023

A Ana Núñez, por su paciencia y dedicación.

A mis padres y mis abuelas, por apoyarme en todo.

Y, especialmente, a mi abuelo Eduardo.

Índice general

Introducción

La Teoría de Galois estudia la relación entre los grupos de automorfismos de extensiones de cuerpos y las extensiones de cuerpos. Estableciendo, en el caso de las extensiones de Galois, una biyección entre los subgrupos del grupo de Galois y las extensiones intermedias. Correspondencias en la misma línea pueden establecerse a partir de un espacio recubridor de un espacio topológico y su grupo de transformaciones recubridoras. En esta analogía, conceptos como el de normalidad, cuerpo intermedio o clausura algebraica tendrán su análogo en el escenario de los recubrimientos intermedios.

En este trabajo estudiamos esta "Teoría de Galois"de recubrimientos, empezando dando el concepto de recubrimiento, hasta llegar a explicitar dicha analogía con la Teoría de Galois. Veremos también que en el caso de espacios semi-localmente simplemente conexos, conexos y localmente conexos por caminos el grupo fundamental del espacio base sirve para clasificar los recubrimientos.

El trabajo se estructura de la siguiente manera. En el capítulo 1 se llevará a cabo una revisión acerca del grupo fundamental, la homotopía de funciones y los homomorfismos inducidos. La motivación de este capítulo es recordar y exponer resultados que serán necesarios a lo largo del trabajo.

En el capítulo 2 se introducirá el objeto de estudio principal de este texto, los recubrimientos, los cuales se presentarán a través de algunas propiedades y ejemplos iniciales. Además, en este segundo capítulo se estudiarán algunos teoremas clave sobre recubrimientos, tales como el Teorema de la Unicidad del Levantamiento, el Teorema de Elevación de Caminos y el Teorema de Elevación de Homotopías.

Durante el capítulo 3 se estudiará la relación entre el grupo fundamental de un espacio recubridor y el del espacio base, a través del homomorfismo inducido por la aplicación recubridora. A su vez, se introducirán dos conceptos clave sobre recubrimientos: los recubrimientos normales y los grupos de transformaciones recubridoras de un recubrimiento. Además, se explicitará la relación entre los grupos fundamentales de los espacios de un recubrimiento y su grupo de transformaciones recubridoras.

En el capítulo 4 se introduce el concepto de recubrimiento intermedio de uno dado. Este capítulo está dedicado a estudiar la correspondencia entre estos recubrimientos intermedios de un recubrimiento y los subgrupos del grupo de transformaciones recubridoras del mismo. Para ello se presentará el concepto de isomorfismo de recubrimientos, de modo que se podrá hablar de recubrimientos módulo isomorfismo. Finalmente, se establecerá un análogo al Teorema de Galois y se explicitará dicha analogía.

El capítulo 5 profundiza en el concepto de isomorfismo de recubrimientos y aborda la noción de recubrimiento universal. Para ello, se introducirá el concepto de espacio semi-localmente simplemente conexo y se estudiaran algunos resultados sobre este tipo de recubrimientos hasta llegar al Teorema de Existencia del Recubrimiento Universal. Por último, se estudia el interés de este tipo de recubrimientos en dos vías: para calcular el grupo fundamental de un espacio y para clasificar recubrimientos.

El trabajo sigue principalmente los libros [2] y [6]. Ambos textos son introducciones a la topología algebraica que profundizan en el concepto de recubrimiento y se siguen durante todo el trabajo. El [Massey] especialmente en el capítulo 5 para el estudio de recubrimiento universal. Las referencias [4] y [8] son textos más básicos acerca, respectivamente, de Teoría de Grupos y Topología. Para el estudio del grupo fundamental de un espacio recubridor se siguen los capítulos 18 y 19 de [5]. En lo referente a la Teoría de Galios se ha utilizado de guía [1] y [7].

Capítulo 1

Conceptos básicos sobre el grupo fundamental

Durante este trabajo se pondrá de manifiesto una estrecha relación entre espacios recubridores y el grupo fundamental de un espacio topológico. Por ejemplo, a través del estudio del grupo fundamental de un espacio recubridor se darán condiciones para la existencia de un levantamiento o de un isomorfismo de recubrimientos. Será de especial interés el concepto de espacio recubridor simplemente conexo que se estudiará detenidamente en el capítulo 5. Esto motiva la existencia de este capítulo, una revisión sin demostraciones de los conceptos y resultados más importantes acerca del grupo fundamental que serán necesarios a lo largo de todo el texto.

1.1. Definición de grupo fundamental

De ahora en adelante se denotará $I = [0, 1]$, dotado de la topología usual.

Definición 1.1. Sean X un espacio topológico, x_0, $x_1 \in X$ y σ y γ caminos en X con $\sigma(0) = \gamma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = \gamma(1) = x_1$. Se dice que σ y γ son *homótopos relativamente a* $\{0,1\}$ si existe una aplicación continua $F : I \times I \longrightarrow X$ tal que para todo s, $t \in I$:

(a) $F(t, 0) = \sigma(t)$

(b) $F(t, 1) = \gamma(t)$

(c) $F(0, s) = x_0$

(d) $F(1, s) = x_1$

y se escribe:

$$\sigma \sim \gamma \qquad rel\{0, 1\}$$

Esta función F se llama *homotopía de* σ *a* γ y se escribe:

$$F : \sigma \sim \gamma \qquad rel\{0, 1\}$$

Si F es una homotopía entre los caminos σ y γ, entonces existe $F' : \gamma \sim \sigma \ rel\{0,1\}$ donde $F'(t,s) = F(t, 1-s)$. Por otro lado, $G : I \times I \longrightarrow X$ definida como $G(t,s) = \sigma(s)$ es una homotopía del camino σ en sí mismo. Finalmente, si se tiene $F_1 : \sigma \sim \gamma \ rel\{0,1\}$ y $F_2 : \gamma \sim \alpha \ rel\{0,1\}$ entonces $\sigma \sim \alpha \ rel\{0,1\}$ a través de la homotopía:

$$F(t,s) = \begin{cases} F_1(t,2s) & si \quad s \in [0,1/2] \\ \\ F_2(t,2s-1) & si \quad s \in [1/2,1] \end{cases}$$

De estos tres hechos se deduce el siguiente resultado:

Proposición 1.2. *La relación de homotopía $rel\{0,1\}$ entre caminos en un espacio topológico es una relación de equivalencia.*

Definición 1.3. Un camino σ en X con punto inicial y final en $x_0 \in X$ se dice *lazo en* x_0.

Si dos caminos σ y γ son homótopos relativamente a $\{0,1\}$ se dice que ambos pertenecen a la clase de homotopía $[\sigma]$. En particular, si σ es homótopo relativamente al lazo constante en x_0 se dice que σ es *homotópicamente trivial*.

En el caso concreto en el que $\sigma(1) = \alpha(0)$ para dos caminos σ y α en X, se puede definir el producto de ambos caminos $\sigma\alpha$. Así, $\sigma\alpha$ será un camino con punto inicial $\sigma(0)$ y punto final $\alpha(1)$ que recorrerá primero σ y luego α de la manera siguiente:

Definición 1.4. Sean X un espacio topológico y σ, α caminos en X tales que $\sigma(1) = \alpha(0)$. Se define el producto $\sigma\alpha$ como:

$$\sigma\alpha = \begin{cases} \sigma(2t) & t \in [0,1/2] \\ \alpha(2t-1) & t \in [1/2,1] \end{cases}$$

Proposición 1.5. *El producto de caminos anterior verifica las siguientes propiedades:*

(a) Sean σ, σ', α y α' caminos tales que $\sigma(1) = \alpha(0)$ y $\sigma'(1) = \alpha'(0)$. Si $\sigma \sim \sigma' \ rel\{0,1\}$ y $\alpha \sim \alpha' \ rel\{0,1\}$, entonces $\sigma\alpha \sim \sigma'\alpha' \ rel\{0,1\}$.

(b) Sean σ, γ y α caminos tales que $\sigma(1) = \gamma(0)$ y $\gamma(1) = \alpha(0)$. Se tiene que $(\sigma\gamma)\alpha \sim \sigma(\gamma\alpha) \ rel\{0,1\}$.

Del resultado 1.5(a) se sigue la definición de producto de clases de homotopía relativa a $\{0,1\}$ como la clase del producto de sus representantes, mientras que el resultado 1.5(b) demuestra que dicha multiplicación es asociativa.

Definición 1.6. Sean X un espacio topológico y $[\sigma]$, $[\alpha]$ las clases homotopía relativa a $\{0,1\}$ de dos caminos σ y α con $\sigma(1) = \alpha(0)$. Se define el producto de las clases como $[\sigma][\alpha] = [\sigma\alpha]$.

Proposición 1.7. *El producto de la definición anterior es asociativo.*

Obsérvese que los productos de caminos y clases de homotopía relativa a $\{0, 1\}$ de los que hablamos solo están correctamente definidos en el caso en que el extremo del primer camino coincida con el punto inicial del segundo. Nos centraremos ahora en un conjunto de caminos donde el producto anterior siempre estará definido. Dado un punto $x_0 \in X$ estudiamos el conjunto de lazos en x_0. Sea $\Pi_1(X, x_0)$ el conjunto de clases de homotopía de los lazos en x_0, el siguiente resultado nos permite deducir que $\Pi_1(X, x_0)$ tiene estructura de grupo:

Proposición 1.8. *Sean X un espacio topológico, $x_0 \in X$ y $e = [c_{x_0}]$ la clase del lazo constante en x_0. Para todo lazo σ en x_0 se tiene que:*

(a) $e[\sigma] = [\sigma]e = [\sigma]$

(b) $[\sigma][\sigma^{-1}] = e$ *donde* σ^{-1} *se define como* $\sigma^{-1}(t) = \sigma(1 - t)$, $t \in I$

Como consecuencia de la proposición anterior se tiene el siguiente teorema, donde $\cdot$ es el producto de clases de la definición 1.6.

Teorema 1.9. $(\Pi_1(X, x_0), \cdot)$ *es un grupo donde* $e = [x_0]$ *es el elemento neutro y* $[\sigma^{-1}]$ *es el inverso de* $[\sigma]$.

Definición 1.10. Al grupo $(\Pi_1(X, x_0), \cdot)$ de un espacio topológico X se le llama *grupo fundamental* o *grupo de Poincaré* de X en el punto x_0.

El siguiente resultado prueba que el grupo fundamental de un espacio topológico X no depende del punto x_0 siempre que se suponga X conexo por caminos.

Teorema 1.11. *Sean X un espacio topológico conexo por caminos, x_0, $y_0 \in X$ y α un camino de x_0 a y_0. La aplicación entre grupos fundamentales definida como:*

$$\begin{array}{rccc} \sigma_*\colon & \Pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \Pi_1(X, y_0) \\ & [\sigma] & \longmapsto & [\alpha^{-1}\sigma\alpha] \end{array}$$

es un isomorfismo de grupos.

Una noción importante relativa al grupo fundamental es la de espacio simplemente conexo.

Definición 1.12. Se dice que un espacio topológico es *simplemente conexo* si es conexo por caminos y su grupo fundamental es trivial.

Proposición 1.13. *Si X es conexo por caminos entonces es simplemente conexo si y solo si para todo x_0, $x_1 \in X$ y τ, σ caminos de x_0 a x_1 se tiene $\tau \sim \sigma$ rel$\{0, 1\}$.*

1.2. Homotopía de funciones y homomorfismos inducidos

La siguiente definición es una generalización del concepto de homotopía de caminos:

Definición 1.14. Sean X e Y espacios topológicos y $f,\ g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas y $A \subset X$. Se dice que *f y g son homótopas relativamente a A* si existe una función $F : X \times I \longrightarrow Y$ continua de forma que:

(a) $F(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$

(b) $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$

(c) $F(a, t) = f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$

y se escribe

$$f \sim g \qquad rel\ A$$

La función F se llama *homotopía de f a g* y se escribe: $F : f \sim g\ rel\ A$. Si $A = \emptyset$ se dice que f y g son *homótopas.*

La relación anterior es una relación de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas de X a Y.

Proposición 1.15. *Sean $f, g : X \longrightarrow Y$, $\tilde{f}, \tilde{g} : Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones continuas, $A \subset X$ y $B \subset Y$ donde $f(A) \subset B$. Si $f \sim g\ rel\ A$ y $\tilde{f} \sim \tilde{g}\ rel\ B$ entonces $\tilde{f} \circ f \sim \tilde{g} \circ g$ $rel\ A$.*

Veamos ahora una serie de resultados que permiten deducir que el grupo fundamental de un espacio es constante por homeomorfismos:

Proposición 1.16. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua y f_* la aplicación definida como:*

$$\begin{array}{rccc} f_*: & \Pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \Pi_1(Y, y_0) \\ & [g] & \longmapsto & [f \circ g] \end{array}$$

Entonces f_* está bien definida y es un homomorfismo de grupos. Llamaremos a esta aplicación homomorfismo inducido por f.

De aquí en adelante usaremos la siguiente notación: para X e Y espacios topológicos, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación tal que $f(x_0) = y_0$, escribiremos $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.

Proposición 1.17. *Sean $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, $g : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ y $h = Id_X$ aplicaciones continuas. Se verifica:*

(a) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

(b) h_* *es la identidad en* $\Pi_1(X, x_0)$.

El siguiente resultado es una consecuencia de la proposición anterior.

Teorema 1.18. *Si* $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ *es un homeomorfismo, entonces induce un isomorfismo* $f_*\colon \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y, y_0)$ *entre los respectivos grupos fundamentales.*

El teorema anterior da una condición suficiente para que el homomorfismo inducido sea un isomorfismo, pero esta condición se puede suavizar. Basta con que f satisfaga una condición menos restrictiva que la de ser homeomorfismo.

Definición 1.19. Sean X e Y espacios topológicos. Se dicen que son *homotópicamente equivalentes* si existen dos aplicaciones continuas $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ tales que:

$$g \circ f \sim Id_X \qquad\qquad f \circ g \sim Id_Y$$

Una función f como en la definición 1.19 se llama *equivalencia homotópica*. Es suficiente con que f sea una equivalencia homotópica para que f_* sea un isomorfismo.

Teorema 1.20. *Si* $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ *es una equivalencia homotópica, entonces* $f_* : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y, y_0)$ *es un isomorfismo.*

Capítulo 2

Espacios recubridores

En este capítulo exploraremos los fundamentos de los recubrimientos, sus propiedades básicas y algunos ejemplos sencillos e ilustrativos que nos permitirán conocer este concepto. Además, a lo largo de la segunda sección estudiaremos resultados clave como la unicidad del levantamiento de aplicaciones continuas o los teoremas de elevación de caminos y elevación de homotopías.

2.1. Conceptos básicos

Definición 2.1. Un *recubrimiento* es una aplicación $p : E \longrightarrow X$ donde E y X son dos espacios topológicos, p es una aplicación continua y sobreyectiva y para todo $x \in X$ existe un entorno abierto U de x y un conjunto no vacío $\{S_j\}_{j \in J}$ de abiertos disjuntos de E tal que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} S_j \qquad \text{y} \qquad p_{|S_j} : S_j \longrightarrow U$$

es un homeomorfismo para todo $j \in J$.

Parémonos un momento a nombrar los distintos elementos de la definición previa. Los abiertos U se llaman *abiertos básicos* o *abiertos elementales* de X, la aplicación p *aplicación recubridora* o *proyección*, el espacio E se dice *espacio recubridor*, por último, los abiertos del conjunto $\{S_j\}_{j \in J}$ se dicen *hojas* en E sobre U.

De la definición de recubrimiento se siguen algunas propiedades básicas.

Proposición 2.2. *Sea $p : E \longrightarrow X$ un recubrimiento. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *p es una aplicación cociente, es decir, la topología de X es la topología cociente definida por p.*

2. *Para cualquier $x \in X$, la fibra $p^{-1}(x)$ es un espacio discreto.*

3. *p es un homeomorfismo local, es decir, para cada $e \in E$ existe un entorno abierto S de e tal que $p_{|S} : S \longrightarrow p(S)$ es un homeomorfismo.*

4. *Si $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ y $q : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ son dos recubrimientos, entonces $p \times q : \tilde{X} \times \tilde{Y} \longrightarrow X \times Y$ definida como $p \times q(x, y) = (p(x), q(y))$ es un recubrimiento.*

Demostración.

1. Para demostrar que p es una aplicación cociente basta probar que es una aplicación sobreyectiva, continua y abierta. Por definición de aplicación recubridora se tiene la continuidad y la sobreyectividad de p. Para probar que p es una aplicación abierta veamos que cualquier abierto B de E cumple que $p(B)$ es también abierto. Sea $e \in B$ y $x = p(e)$. Tomamos un abierto básico U de x. Sea S la hoja de U que contiene a e. Tenemos que $e \in B \cap S$ que es un abierto de S, por tanto, $p(B \cap S)$ es un abierto de U. Como U es abierto de X, $p(B \cap S)$ es también abierto de X. Por último, el conjunto $p(B)$ es unión de abiertos de la forma $p(B \cap S)$, por tanto, también es abierto de X.

2. Para cualquier $x \in X$ existe un abierto básico U tal que $x \in U$. Sabemos que $p^{-1}(x) \subset p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} S_j$. Como cada espacio S_j es homeomorfo a U por p, $|p^{-1}(x) \cap S_j| = 1$ y $p^{-1}(x) \cap S_j$ es abierto de $p^{-1}(x) = \bigcup_{j \in J}(p^{-1}(x) \cap S_j)$. Por tanto, la topología de $p^{-1}(x)$ es la discreta.

3. Sean $e \in E$ y $x = p(e)$. Consideramos U un abierto básico que contiene a x y S la hoja sobre U en la que se encuentra e. Entonces, por definición de espacio recubridor $U = p(S)$ y $p_{|S} : S \longrightarrow U$ es un homeomorfismo.

4. De la continuidad y sobreyectividad de p y q se deducen directamente la continuidad y sobreyectividad de $p \times q$. Dado $(x, y) \in X \times Y$ y U_x y U_y dos abiertos elementales de x e y. Sean $\{S_j^x\}_j$ y $\{S_i^y\}_i$ las hojas de U_x y U_y respectivamente. Se tiene que $U_x \times U_y = \cup_j S_j^x \times \cup_i S_i^y$, luego $U_x \times U_y$ es abierto elemental del punto (x, y).

□

Proposición 2.3. *Si U es un abierto elemental conexo, entonces las hojas sobre U son exactamente las componentes conexas de $p^{-1}(U)$.*

Demostración. Si U es un abierto elemental conexo, consideramos $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} S_i$ la descomposición en hojas de $p^{-1}(U)$. Cada hoja S_i es un espacio conexo por ser homeomorfo a U. Por otra parte, si A es un subespacio de $p^{-1}(U)$ con $S_i \subsetneq A$, entonces A está contenido en la unión de dos o más hojas de U con intersección no vacía con A. Esto implica que A no es un espacio conexo. □

La proposición 2.3 muestra que, si U es un espacio conexo sus hojas quedan determinadas por U. En cambio, si U no es conexo la descomposición en hojas de $p^{-1}(U)$ no tiene por qué ser única. Veamos este hecho en el siguiente ejemplo, que estudia el caso del recubrimiento clásico de $\mathbb{S}^1$ por $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.4. La aplicación $\phi(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definida como $\phi(x) = e^{2\pi i x}$ es un recubrimiento, pues es conocido que para todo $t \in \mathbb{R}$, la restricción $\phi_t = \phi_{|(t,t+1)} : (t, t+1) \longrightarrow \mathbb{S}^1 - \{\phi(t)\}$ es un homeomorfismo. Dado $p = \phi(t)$ y $U \subset \mathbb{S}^1 - \{p\}$ abierto, se tiene que $\phi^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\phi_{t+n})^{-1}(U)$. Por tanto, todos los abiertos de $\mathbb{S}^1$ distintos del propio $\mathbb{S}^1$ son abiertos elementales. En particular, la unión de dos intervalos abiertos de la circunferencia es un abierto elemental no conexo.

Tomamos un abierto U no conexo de $\mathbb{S}^1$:

$$U = \{e^{2\pi i x} \quad | \quad x \in (1/4, 1/2) \cup (3/4, 1)\}$$

La definición más evidente de las hojas sobre U es

$$S_j = \left(\frac{1}{4} + j, \frac{1}{2} + j\right) \cup \left(\frac{3}{4} + j, 1 + j\right)$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$. Pero estas descomposición en hojas del espacio $p^{-1}(U)$ no es única. La siguiente definición de las hojas corresponde, intuitivamente, con avanzar una de ellas una unidad:

$$V_j = \left(\frac{1}{4} + (j+1), \frac{1}{2} + (j+1)\right) \cup \left(\frac{3}{4} + j, 1 + j\right)$$

El ejemplo de $\mathbb{R}$ como espacio recubridor de $\mathbb{S}^1$ es uno de los más importante y sencillos. Normalmente, para representar gráficamente este recubrimiento se utiliza el homeomorfismo $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}$ dado por $\psi(t) = (cos(t), sen(t), t)$. Este homeomorfismo justifica la representación gráfica de $\mathbb{R}$ como una hélice. Utilizando lo anterior, la figura 2.1 muestra las distintas definiciones de las hojas del abierto U descritas arriba.

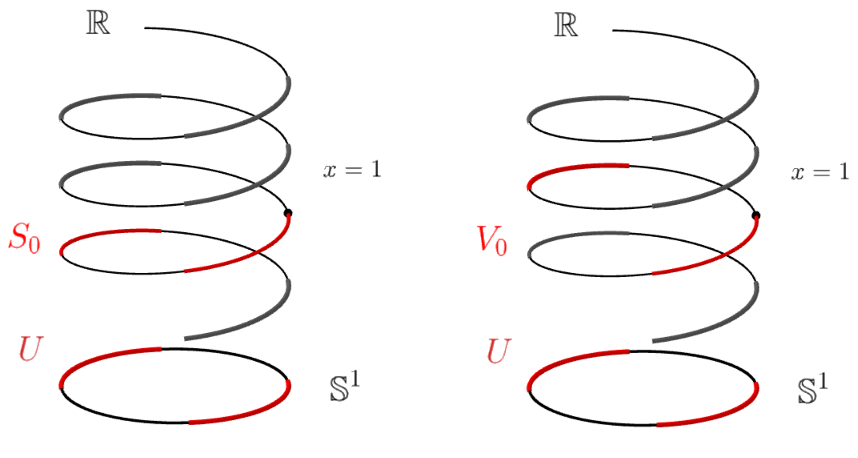

Figura 2.1: Distintas definiciones de las hojas de un abierto elemental no conexo.

Ejemplo 2.5. Estudiamos ahora dos posibles recubrimientos del toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. En primero lugar, el toro como espacio recubridor de sí mismo. Dada la aplicación identidad

$Id : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ esta constituye un recubrimiento del espacio $\mathbb{T}$, este es el recubrimiento más trivial posible. De hecho, cualquier espacio topológico puede ser recubierto por sí mismo a través de la aplicación identidad. Buscamos un recubrimiento del toro por sí mismo no tan trivial. Describimos primero la siguiente aplicación recubridora de la circunferencia de radio 1 en coordenadas polares:

$$\begin{array}{rccc} p_n\colon & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & (1,\theta) & \longmapsto & (1,n\theta) \end{array}$$

Esta aplicación es un recubrimiento que enrolla la circunferencia sobre sí misma n veces. Ahora, utilizando la propiedad 2.2.4, sabemos que la siguiente aplicación es un recubrimiento del toro sobre sí mismo:

$$\begin{array}{rccc} p = p_2 \times p_3\colon & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ & ((1,\theta_1),(1,\theta_2)) & \longmapsto & ((1,2\theta_1),(1,3\theta_2)) \end{array}$$

Esta aplicación actúa "enrollando" al toro dos veces sobre la primera circunferencia y tres veces sobre la segunda, la figura 2.2 ayuda a visualizar la acción de p.

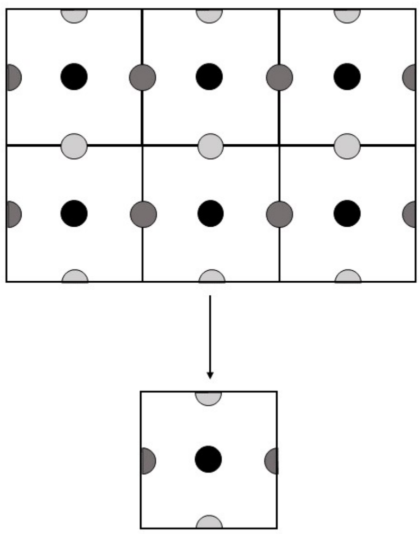

Figura 2.2: Un recubrimiento del toro sobre sí mismo.

Por otra parte, utilizando el recubrimiento del ejemplo 2.4 de la recta $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{S}^1$ y de nuevo la propiedad 2.2.4 podemos expresar el plano $\mathbb{R}^2$ como un recubrimiento de $\mathbb{T}$. Mediante la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} p\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ & (t,r) & \longmapsto & (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i r}) \end{array}$$

Intuitivamente, la proyección p enrolla sobre sí mismo el plano en las dos direcciones.

2.2. Levantamiento de caminos, aplicaciones y homotopías a un espacio recubridor

De esta sección en adelante se supondrán todos los espacios involucrados conexos y localmente conexos por caminos. Bajo estas hipótesis las componentes conexas de cualquier abierto del espacio coincidirán con sus componentes conexas por caminos y serán abiertas. Además, ambas condiciones garantizan que todos los espacios serán conexos por caminos. Otra consecuencia de estas condiciones es la existencia de abiertos elementales conexos para los cuales, según hemos visto, la descomposición en hojas es única.

Veamos una condición suficiente y necesaria para que una aplicación sea recubridora si los espacios son conexos y localmente conexos por caminos.

Proposición 2.6. *Sea E conexo y localmente conexo por caminos y $p : E \longrightarrow X$ una función continua. p será recubrimiento si y solo si para todo $x \in X$ existe un entorno abierto conexo $U \subset X$ tal que si C es una componente conexa de $p^{-1}(U)$, entonces la restricción de p a C es un homeomorfismo entre C y U.*

Demostración. Veamos que la condición es suficiente. Para todo abierto U de este tipo, si $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} C_i$ es la descomposición de $p^{-1}(U)$ en componentes conexas que son disjuntas, por ser E conexo y localmente conexo por caminos, las C_i son abiertas. Además, por hipótesis, $p_{|C_i} : C_i \longrightarrow U$ es un homeomorfismo para todo i luego p es un recubrimiento. Por otro lado, de la proposición 2.3 y de que X es localmente conexo se deduce de forma inmediata que la condición es necesaria para que p sea un recubrimiento. $\square$

Se sabe que, dado un recubrimiento $p : E \longrightarrow X$ y $\tilde{\alpha}$ un camino en E, entonces $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ es un camino en X. Por ello, tiene sentido hablar de la proyección de caminos del espacio recubridor al espacio X. El siguiente resultado prueba que la relación de homotopía relativa a $\{0, 1\}$ se conserva mediante proyección de los caminos.

Proposición 2.7. *Sean $p : E \longrightarrow X$ un recubrimiento y α_0, $\alpha_1 : I \longrightarrow E$ tales que $\alpha_0 \sim \alpha_1$ $rel\{0, 1\}$. Entonces $p \circ \alpha_0 \sim p \circ \alpha_1$ $rel\{0, 1\}$.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia directa de la proposición 1.15(b) y de que $p \sim p$ *rel* E. $\square$

Exploraremos ahora la idea inversa, que consiste en elevar los caminos en X en caminos en E.

Introducimos primero la noción de levantamiento:

Definición 2.8. Sean $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento y $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ una función continua. Se dice que $\tilde{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (E, e_0)$ es un *levantamiento* o *elevación* de f si es continua y $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "p\circ\alpha"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (E,e_0) \arrow[d, "p"] \\ (I,0) \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

Figura 2.3: Diagramas de la proyección y levantamiento de caminos.

La proyección de un camino en E a un camino en X es obviamente única. Sin embargo, el levantamiento de un camino no es único en general. De hecho, veremos que existe un levantamiento para cada punto de $p^{-1}(x_0)$, donde x_0 es el punto inicial del camino a elevar. Para poder hablar de unicidad del levantamiento habrá que fijar el punto $e_0 \in E$ al que se levanta el punto $x_0 \in X$.

En primer lugar, estudiemos la unicidad del levantamiento de una aplicación continua $f : Y \longrightarrow X$ en general, una vez fijada la elevación de un punto $f(y_0)$. Más adelante estudiaremos el caso particular donde esta aplicación es un camino.

Teorema 2.9 (**Unicidad del levantamiento**). *Sea $p : (E,e_0) \longrightarrow (X,x_0)$ un recubrimiento y $f : (Y,y_0) \longrightarrow (X,x_0)$ una aplicación continua. Si existe un levantamiento $\tilde{f} : (Y,y_0) \longrightarrow (E,e_0)$ de f, este es único.*

Demostración. En primer lugar, recordamos que siempre suponemos todos los espacios conexos y localmente conexos por caminos, en particular, Y es conexo. Sea g otro levantamiento de f tal que $g(y_0) = e_0$ y $p \circ g = f$. Veamos que $\tilde{f} = g$ utilizando que Y es un espacio conexo. Consideramos los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{y \in Y | \tilde{f}(y) = g(y)\} \\ Y - A &= \{y \in Y | \tilde{f}(y) \neq g(y)\} \end{aligned}$$

Obviamente, $A \cup (Y - A) = Y$. Veamos que ambos espacios son abiertos y, puesto que $y_0 \in A$, A es el espacio total Y.

En primer lugar, estudiemos el espacio A. Consideramos $y \in A$, veamos que existe un entorno abierto de y contenido en A. Sea $x = f(y)$, U un abierto elemental de x y S la hoja de U que contiene al punto $\tilde{f}(y) = g(y)$. Consideramos el conjunto $B = \tilde{f}^{-1}(S) \cap g^{-1}(S)$. B es un abierto en Y por la continuidad de $\tilde{f}$ y g. Probemos que $B \subset A$, es decir, que $\tilde{f}(z) = g(z)$ para cada $z \in B$. Dado $z \in B$ se tiene que $\tilde{f}(z)$, $g(z) \in S$. Es decir, las imágenes de z por ambas elevaciones están en la misma hoja de U. Además, por definición de levantamiento se tiene que $p \circ \tilde{f} = p \circ g = f$. Luego $p(\tilde{f}(z)) = p(g(z))$. Por tanto, $\tilde{f}(z)$, $g(z)$ pertenecen a la misma fibra y a la misma hoja, es decir, son el mismo punto. Se tiene que B es un entorno abierto de y en A, luego A es abierto.

Por otro lado, tomamos $y \in Y - A$. Por ser $\tilde{f}$ y g levantamientos de f se tiene que $p(\tilde{f}(y)) = p(g(y))$, es decir, $\tilde{f}(y)$ y $g(y)$ pertenecen a la misma fibra. Puesto que $\tilde{f}(y) \neq g(y)$ cada punto debe estar en una hoja distinta de U, $g(y) \in S_1$ y $\tilde{f}^{-1}(y) \in S_2$.

Se toma el conjunto $B = g^{-1}(S_1) \cap \tilde{f}^{-1}(S_2)$, abierto de Y. Veamos que B está contenido en $Y - A$. Sea $z \in B$ se tiene que:

$$\tilde{f}(z) \in \tilde{f}(B) \subset \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(S_2)) = S_2$$
$$g(z) \in g(B) \subset \tilde{g}(\tilde{g}^{-1}(S_1)) = S_1$$

Esto implica que $\tilde{f}(z) \neq g(z)$ pues S_1 y S_2 son disjuntas. Por tanto, $Y - A$ es abierto y, debido a que Y es conexo, A debe ser igual a Y. □

El siguiente teorema prueba la existencia del levantamiento de cualquier camino en X.

Teorema 2.10. *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento y α un camino en X con punto inicial en x_0. Existe un único levantamiento $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow E$ con origen en e_0.*

Demostración. Primero estudiamos un caso particular al que llamaremos CASO 1. Suponemos que la imagen del camino α está completamente contenida en un abierto elemental U de X. Probemos la existencia de $\tilde{\alpha}$. Sea S la hoja de E que contiene a e_0 entonces $(p_{|U})^{-1} : U \longrightarrow S$ es un homeomorfismo, por tanto, $\tilde{\alpha} = (p_{|U})^{-1} \circ \alpha : I \longrightarrow S$ es un camino en S. Como $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$ y $\tilde{\alpha}(0) = (p_{|S})^{-1} \circ \alpha(0) = (p_{|S})^{-1}(x_0) = e_0$ se sigue que $\tilde{\alpha}$ es la elevación que buscamos.

Estudiamos ahora el caso general, en el que el camino no está enteramente contenido en un abierto básico. La idea de esta demostración es trocear cualquier camino en X en caminos suficientemente pequeños como para que cada uno esté contenido en un abierto elemental. En estas condiciones podremos aplicar el razonamiento anterior a cada "trozo" y concatenando todos estos pequeños caminos levantados obtendremos $\tilde{\alpha}$.

Antes de empezar, recordamos el lema de Lebesgue:

Si Y es un espacio métrico, compacto y $\{A_\lambda\}_\lambda$ un recubrimiento por abiertos de Y, entonces existe un número real δ (llamado número de Lebesgue del recubrimiento) tal que cualquier subconjunto de Y con diámetro menor a δ está completamente contenido en un abierto del recubrimiento.

Por definición de espacio recubridor, existe un recubrimiento de X por abiertos elementales $X = \bigcup_\lambda U_\lambda$. Puesto que α es una aplicación continua $\{\alpha^{-1}(U_\lambda)\}_\lambda$ es un recubrimiento abierto del espacio compacto I. Aplicando ahora el lema de Lebesgue al espacio I podemos asegurar que existe una partición $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$ de $[0, 1]$ tal que α envía cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ en un abierto elemental de X.

Como $[0, t_1]$ está contenido en un abierto básico podemos aplicar el razonamiento del CASO 1 y construir un levantamiento $\tilde{\alpha}_1$ de $\alpha_{|[0,t_1]}$ con punto inicial e_0. Asumimos como hipótesis de inducción que existe un levantamiento $\tilde{\alpha}_i$ del camino $\alpha_{|[0,t_i]}$. Ahora, usamos el CASO 1 para construir, $\tilde{\alpha}_{|[t_i,t_i+1]}$ el levantamiento de $\alpha_{|[t_i,t_i+1]}$ que verifica $\tilde{\alpha}_{|[t_i,t_i+1]}(t_i) = \tilde{\alpha}_i(t_i)$. Por tanto, tiene sentido concatenar ambos caminos en E. El camino

$\tilde{\alpha}_{i+1} = \tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_{|[t_i, t_i+1]}$ es una elevación de $\alpha_{|[0,t_{i+1}]}$ con punto inicial $\tilde{\alpha}_1(0) = e_0$. Queda demostrado por inducción la existencia del levantamiento $\tilde{\alpha}_n : I \longrightarrow X$ de α. La unicidad es consecuencia del teorema 2.9. □

Teorema 2.11 (Teorema de Elevación de Homotopías). *Sean $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento y $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ una aplicación continua con levantamiento $\tilde{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (E, e_0)$. Entonces cualquier homotopía $F : Y \times I \longrightarrow X$ con $F(y, 0) = f(y)$ puede ser elevada a una homotopía $\tilde{F} : Y \times I \longrightarrow E$ con $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$.*

$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (E, \tilde{f}(y)) \arrow[d, "p"] \\ (Y \times I, (y, 0)) \arrow[ur, "\tilde{F}"] \arrow[r, "F"] & (X, f(y)) \end{tikzcd}$$

Figura 2.4: Diagramas de levantamiento de una función continua y una homotopía.

Demostración. Dividimos la demostración de este problema en cuatro pasos:

(1)Estudiamos primero el caso más sencillo, en el que el propio espacio X es un abierto elemental.

Sea S la hoja de X que contiene a e_0. Entonces $(p_{|S})^{-1} : X \longrightarrow S$ es un homeomorfismo y se puede definir $\tilde{F} = (p_{|S})^{-1} \circ F$. Además, $\tilde{F}(y, 0) = (p_{|S})^{-1} \circ F(y, 0) = (p_{|S})^{-1} \circ f$. Esto quiere decir que $\tilde{F}(y, 0)$ es un levantamiento de f, y $\tilde{F}(y_0, 0) = (p_{|S})^{-1} \circ F(y_0, 0) = (p_{|S})^{-1}(x_0) = e_0$. Aplicando el teorema de unicidad del levantamiento se tiene que $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$.

(2) Para cada y existe un abierto N_y y una partición $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ de $[0, 1]$ de manera que $F(N_y \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ donde U_i es un abierto básico de X.

Sea $\{U_\lambda\}_\lambda$ un recubrimiento por abiertos básicos de X. Entonces, $\{F^{-1}(U_\lambda)\}_\lambda$ es un recubrimiento por abiertos de $Y \times I$, en particular, es un recubrimiento por abiertos de $\{y\} \times I$. Como $\{y\} \times I$ es compacto, en virtud del teorema de Lebesgue, existe una partición $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ de $[0, 1]$ de forma que, para todo i, existe $F^{-1}(U_i) \in \{F^{-1}(U_\lambda)\}_\lambda$ que verifica que $\{y\} \times [t_i, t_{i+1}] \subset F^{-1}(U_i)$. Como $[t_i, t_{i+1}]$ es compacto, se cumplen las hipótesis del lema del tubo, por tanto, existe N_y^i un abierto de Y que contiene a y tal que $\{y\} \times [t_i, t_{i+1}] \subset N_y^i \times [t_i, t_{i+1}] \subset F^{-1}(U_i)$. Sea $N_y = \bigcap_{i=1}^n N_y^i$. Se verifica que $N_y \times [t_i, t_{i+1}] \subset F^{-1}(U_i)$. Es decir, $F(N_y \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ para todo i.

(3) Para cada $y \in Y$ existe una elevación $\tilde{F}_y : N_y \times I : I \longrightarrow E$ de $F_{|N_y \times I}$ tal que $\tilde{F}_y(\tilde{y}, 0) = \tilde{f}(\tilde{y})$ para todo $\tilde{y} \in N_y$.

Vamos a construir de forma recursiva elevaciones $\tilde{F}_i : N_y \times [0, t_i] \longrightarrow E$ para $1 \leq i \leq n$. De esta manera, $\tilde{F}_n$ será la aplicación $\tilde{F}_y$ buscada. Si $i = 1$ la restricción de F, $F_1 : N_y \times [0, t_1] \longrightarrow U_1$ cumple $F_1(\tilde{y}, 0) = f(\tilde{y})$. Por lo visto en *(1)* existe $\tilde{F}_1 : N_y \times [0, t_1] \longrightarrow E$ tal que $\tilde{F}_1(\tilde{y}, 0) = \tilde{f}(\tilde{y})$ para todo $\tilde{y} \in N_y$, ya que U_1 es un abierto elemental.

Sea $i \geq 1$ y supongamos construida una elevación $\tilde{F}_i : N_y \times [0, t_i] \longrightarrow E$ de la restricción de F, $F_i : N_y \times [0, t_i] \longrightarrow X$ tal que $\tilde{F}_i(\tilde{y}, 0) = \tilde{f}(\tilde{y})$ para todo $\tilde{y} \in N_y$.

Consideramos las aplicaciones continuas $g : N_y \longrightarrow X$ con $g(\tilde{y}) = F_i(\tilde{y}, t_i)$ y $\tilde{g} : N_y \longrightarrow E$ con $\tilde{g}(\tilde{y}) = \tilde{F}_i(\tilde{y}, t_i)$ que es una elevación de g. Además, tomamos la restricción de F, $F^i : N_y \times [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow U_i$ que cumple que $F^i(\tilde{y}, t_i) = g(\tilde{y})$. Estamos otra vez en la situación estudiada en *(1)*, luego existe una elevación de F^i, $\tilde{F}^i : N_y \times [t_i, t_i + 1] \longrightarrow S_i$ tal que $\tilde{F}^i(\tilde{y}, t_i) = \tilde{g}(\tilde{y}) = \tilde{F}_i(\tilde{y}, t_i)$ para todo $\tilde{y} \in N_y$. Es decir, tiene sentido construir $\tilde{F}_{i+1} : N_y \times [0, t_{i+1}] \longrightarrow E$:

$$\tilde{F}_{i+1} = \begin{cases} \tilde{F}_i(\tilde{y}, t) & si \quad (\tilde{y}, t) \in N_y \times [0, t_i] \\ \tilde{F}^i(\tilde{y}, t) & si \quad (\tilde{y}, t) \in N_y \times [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

que es una elevación de $F_{|N_y \times [0, t_{i+1}]}$ con $\tilde{F}_{i+1}(\tilde{y}, 0) = \tilde{f}(\tilde{y})$. Por último, $\tilde{F}_y = \tilde{F}_n : N_y \times [0, 1] \longrightarrow E$ es una elevación de $F_n : N_y \times [0, 1] \longrightarrow X$ tal que $\tilde{F}_y(\tilde{y}, 0) = \tilde{f}(\tilde{y})$ para todo $\tilde{y} \in N_y$.

(4) Construcción de $\tilde{F}$ a partir de $\tilde{F}_y$. Si distintos levantamientos $\tilde{F}_{y_1}$ y $\tilde{F}_{y_2}$ coinciden en $(N_{y_1} \cap N_{y_2}) \times I$ podremos definir $\tilde{F}(y, t) = \tilde{F}_y(t)$ para todo $(y, t) \in Y \times I$. Además, $\tilde{F}(\tilde{y}, 0) = F_y(\tilde{y}, 0) = \tilde{f}(\tilde{y})$. Solo falta demostrar que, efectivamente, $\tilde{F}_{y_1} = \tilde{F}_{y_2}$ en $(N_{y_1} \cap N_{y_2}) \times I$.

Sea $y \in N_{y_1} \cap N_{y_2}$. $\tilde{F}_{y_1}(y, t)$ y $\tilde{F}_{y_2}(y, t)$ son dos levantamientos del camino $F(y, t)$, que coinciden en el punto $\tilde{F}_{y_1}(0, t) = \tilde{F}_{y_2}(0, t) = \tilde{f}(y)$. Por el teorema de unicidad del levantamiento, dos elevaciones del mismo camino que coinciden en un punto deben ser iguales. Así, $\tilde{F}_{y_1}(y, t) = \tilde{F}_{y_2}(y, t)$ para todo $(y, t) \in (N_{y_1} \cap N_{y_2}) \times I$. □

Un caso particular del teorema anterior es la elevación de una homotopía entre caminos. Veremos a continuación que dados dos caminos en X homótopos relativamente a $\{0, 1\}$, esta relación se mantendrá entre ambas elevaciones siempre y cuando envíen el punto inicial de los caminos originales al mismo punto de su fibra.

Antes de probar la afirmación anterior, introducimos la siguiente notación. Sea σ un camino en X con punto inicial $x_0 = p(e_0)$, llamaremos $\tilde{\sigma}_{e_0}$ a la elevación de σ que comienza en e_0. Además, de ahora en adelante notaremos por c_y al camino constante en un punto y.

Corolario 2.12. *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento, σ, $\tau : (I, 0) \longrightarrow (X, x_0)$ caminos tales que $\sigma \sim \tau$ $rel\{0, 1\}$. Entonces, $\tilde{\sigma}_{e_0} \sim \tilde{\tau}_{e_0}$ $rel\{0, 1\}$.*

Demostración. Sea F la homotopía entre σ y τ, $x_1 = \tau(1) = \sigma(1)$ y $e_1 = \tilde{\sigma}_{e_0}(1)$. $F : I \times I \longrightarrow X$ verifica $F(0, s) = c_{x_0}$, $F(1, s) = c_{x_1}$, $F(t, 0) = \sigma(t)$ y $F(t, 1) = \tau(t)$. Sea $\tilde{F}$ la homotopía descrita en el teorema 2.11. Veamos que $\tilde{F}(0, s) = c_{e_0}$, $\tilde{F}(t, 0) = \tilde{\sigma}_{e_0}(t)$, $\tilde{F}(t, 1) = \tilde{\tau}_{e_0}(t)$ y $\tilde{F}(1, s) = c_{e_1}$.

Por construcción de $\tilde{F}$ se tiene que $\tilde{F}(t, 0) = \tilde{\sigma}_{e_0}(t)$. El resto de igualdades serán consecuencia de la unicidad del levantamiento y de que $F = p \circ \tilde{F}$:

$c_{x_0}(s) = F(0, s) = p \circ \tilde{F}(0, s)$ y $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{\sigma}_{e_0}(0) = e_0$. Por esto, $\tilde{F}(0, s)$ es la elevación de c_{x_0} con punto inicial e_0, es decir, $\tilde{F}(0, s) = c_{e_0}(s)$.

$\tau(t) = F(t, 1) = p \circ \tilde{F}(t, 1)$ y $\tilde{F}(0, 1) = c_{e_0}(1) = e_0$. Por esto, $\tilde{F}(t, 1)$ es la elevación de τ con punto inicial e_0, es decir, $\tilde{F}(t, 1) = \tilde{\tau}_{e_0}(t)$.

$c_{x_1}(s) = F(1, s) = p \circ \tilde{F}(1, s)$ y $\tilde{F}(1, 0) = \tilde{\sigma}_{e_0}(1) = e_1$. Por esto, $\tilde{F}(1, s)$ es la elevación de c_{x_1} con punto inicial e_1, es decir, $\tilde{F}(1, s) = c_{e_1}(s)$.

$\square$

Capítulo 3

Espacio recubridor y grupo fundamental

Como ya adelantamos en el capítulo 1, la relación entre los recubrimientos de X y su grupo fundamental es muy estrecha. Este capítulo se adentra en esta relación a través del estudio los homomorfismos inducidos por aplicaciones recubridoras.

Además introduciremos el concepto de recubrimiento normal, también llamado recubrimiento de Galois en algunos textos, y la relación en este tipo de recubrimientos entre el grupo de sus transformaciones recubridoras y el grupo fundamental de X. Este tipo de recubrimientos nos permitirán establecer un análogo a las correspondencias de Galois en extensiones de cuerpos.

Proposición 3.1. *Sea* $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *un recubrimiento, entonces el homomorfismo inducido* $p_* : \Pi_1(E, e_0) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0)$ *descrito en la proposición 1.16 es un monomorfismo.*

Demostración. Veamos que $ker(p_*) = [c_{e_0}]$. Sea $\tilde{\sigma}$ un lazo en e_0 tal que $p_*([\tilde{\sigma}]) = [p \circ \tilde{\sigma}] = [c_{x_0}]$. Se tiene que $p \circ \tilde{\sigma} \sim c_{x_0}\ rel\{0, 1\}$. Aplicando el corolario 2.12 se deduce que $(\widetilde{p \circ \tilde{\sigma}})_{e_0} \sim c_{e_0}\ rel\{0, 1\}$. Como el punto inicial de $\tilde{\sigma}$ es e_0 se tiene que $(\widetilde{p \circ \tilde{\sigma}})_{e_0} = \tilde{\sigma}$. Por tanto, $[\tilde{\sigma}] = [c_{e_0}]$.

□

La proposición anterior garantiza que dados dos lazos en e_0 no homótopos relativamente a $\{0, 1\}$ sus proyecciones tampoco serán homótopas relativamente a $\{0, 1\}$.

Por lo anterior, dado un recubrimiento $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ se tiene que $\Pi_1(E, e_0) \simeq p_*(\Pi_1(E, e_0))$, es decir, que el grupo fundamental de cualquier punto de la fibra de x_0 es isomorfo a un subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$. Podemos entonces asociar a cada punto de $p^{-1}(x_0)$ un subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$. Estudiaremos como varía este subgrupo asociado a medida que nos movemos por la fibra.

Veamos primero un resultado más general acerca de la relación entre grupos fundamentales de dos puntos cualesquiera del espacio recubridor.

Teorema 3.2. *Sea* $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *un recubrimiento,* e_0*,* $e_1 \in E$*,* $\tilde{\tau}$ *un camino en* E *de* e_0 *a* e_1 *y* $\tau = p \circ \tilde{\tau}$ *un camino de* x_0 *a* $x_1 = p(e_1)$*. Entonces se tiene que* $(\tau_* \circ p_*)(\Pi_1(E, e_0)) = p_*(\Pi_1(E, e_1))$*, donde* $\tau_* : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(X, x_1)$ *es el isomorfismo definido en el teorema 1.11.*

Demostración. Dado $\tilde{\tau}$ un camino de e_0 a e_1 se tiene que $\tilde{\tau}_*(\Pi_1(E, e_0)) = \Pi_1(E, e_1)$. Aplicando p_* obtenemos $p_* \circ \tilde{\tau}_*(\Pi_1(E, e_0)) = p_*(\Pi_1(E, e_1))$. Veamos que $p_* \circ \tilde{\tau}_* = \tau_* \circ p_*$:

$$
\begin{aligned}
p_* \circ \tilde{\tau}_*([\sigma]) &= p_*([\tilde{\tau}^{-1}\sigma\tilde{\tau}]) = [p \circ (\tilde{\tau}^{-1}\sigma\tilde{\tau})] \\
\tau_* \circ p_*([\sigma]) &= \tau_*([p \circ \sigma]) = [\tau^{-1}(p \circ \sigma)\tau]
\end{aligned}
$$

Tenemos también que $p \circ (\tilde{\tau}^{-1}) = (p \circ \tilde{\tau})^{-1} = \tau^{-1}$, pues $(p \circ \tilde{\tau})^{-1}(t) = (p \circ \tilde{\tau})(1 - t) = p(\tilde{\tau}(1 - t)) = p \circ \tilde{\tau}^{-1}(t)$. Por esto, se tiene que $p \circ (\tau^{-1}\sigma\tau) = (p \circ \tau^{-1})(p \circ \sigma)(p \circ \tau) = \tau^{-1}(p \circ \sigma)\tau$. □

Corolario 3.3. *Bajo las hipótesis del resultado anterior, si* e_0*,* $e_1 \in p^{-1}(x_0)$*, entonces* $[\tau] \in \Pi_1(X, x_0)$ *y* $[\tau]^{-1}(p_*(\Pi_1(E, e_0)))[\tau] = p_*(\Pi_1(E, e_1))$*. En particular,* $p_*(\Pi_1(E, e_0))$ *y* $p_*(\Pi(E, e_1))$ *son conjugados.*

Demostración. En esta situación τ es un lazo en x_0, por tanto, $[\tau] \in \Pi_1(X, x_0)$, y $(\tau_* \circ p_*)(\Pi_1(E, e_0)) = [\tau^{-1}]p_*(\Pi_1(E, e_0))[\tau] = p_*(\Pi_1(E, e_1))$. □

La figura 3.1 representa la situación descrita en el teorema 3.2. Es importante señalar que el homomorfismo inducido p_* no es necesariamente un isomorfismo entre $\Pi_1(X, x_0)$ y $\Pi_1(E, e_0)$. Como ya hemos visto, pueden existir lazos en x_0 cuyos levantamientos en e_0 no sean lazos.

$$
\begin{array}{ccc}
\Pi_1(E, e_0) & \xrightarrow{\quad \tilde{\tau}_* \quad} & \Pi_1(E, e_1) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle p_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_*} \\
\Pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\quad \tau_* \quad} & \Pi_1(X, x_1)
\end{array}
$$

Figura 3.1: Diagrama de cambio de punto base en el grupo fundamental de un espacio recubridor.

El corolario 3.3 estudia la relación entre los grupos fundamentales de distintos puntos de una misma fibra. A medida que nos movemos por la fibra, el subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$ asociado varía siempre en la misma clase de conjugación. De hecho, se dará un resultado aún más fuerte, estos subgrupos conforman exactamente una clase de conjugación de $\Pi_1(X, x_0)$.

Teorema 3.4. *El conjunto* $\{p_*(\Pi_1(E, e)) \mid e \in p^{-1}(x_0)\}$*, donde* $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *es un recubrimiento, es exactamente una clase de conjugación de* $\Pi_1(X, x_0)$*.*

Demostración. Ya hemos visto que todos los elementos del conjunto dado forman parte de la misma clase de conjugación de $\Pi_1(X, x_0)$. Por otro lado, sean $p_*(\Pi_1(E, e_0))$ un subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$ y H otro subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$ conjugado a este, vamos a ver que $H = p_*(\Pi_1(E, e_1))$ para cierto $e_1 \in p^{-1}(x_0)$.

Se tiene, por hipótesis, que $H = [\sigma]^{-1} p_*(\Pi_1(E, e_0))[\sigma]$ para cierto $[\sigma] \in \Pi_1(X, x_0)$. Tomamos $\tilde{\sigma}_{e_0}$ la elevación de σ con punto inicial e_0 y consideramos $e_1 = \tilde{\sigma}_{e_0}(1)$. Aplicando el teorema 3.2 se tiene la igualdad $p_*(\Pi_1(E, e_1)) = \sigma_*(p_*(\Pi_1(E, e_0)) = [\sigma]^{-1} p_*(\Pi_1(E, e_0))[\sigma] = H$. $\square$

3.1. Acción del grupo fundamental sobre una fibra

Sea x_0 un punto de X y σ un lazo en x_0. Cualquier levantamiento de σ tiene punto inicial y final en la fibra $p^{-1}(x_0)$. Elegimos el punto $e \in p^{-1}(x_0)$. En este contexto, el corolario 2.12 asegura que el punto final del levantamiento quedará completamente determinado por la clase de homotopía relativa a $\{0, 1\}$ de σ. En otras palabras, dados dos lazos σ, τ en x_0 homótopos relativamente a $\{0, 1\}$ y un punto $e \in E$ se tendrá que $\tilde{\sigma}_e(1) = \tilde{\tau}_e(1)$. Tiene sentido entonces definir la operación:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & p^{-1}(x_0) \times \Pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & p^{-1}(x_0) \\ & (e, [\sigma]) & \longmapsto & e \cdot [\sigma] = \tilde{\sigma}_e(1) \end{array}$$

Proposición 3.5. *La aplicación Φ es una acción del grupo fundamental $\Pi_1(X, x_0)$ sobre el conjunto $p^{-1}(x_0)$.*

Demostración. Hay que probar que $e \cdot 1 = e$ y que $(e \cdot [\sigma])[\tau] = e \cdot [\sigma\tau]$ para todo $e \in E$ y $[\sigma]$, $[\tau] \in \Pi_1(X, x_0)$.

En primer lugar, $e \cdot 1 = e \cdot [c_{x_0}] = (\widetilde{c_{x_0}})_e(1) = c_e(1) = e$.

Para probar la segunda igualdad, primero nombramos $e_1 = \tilde{\sigma}_e(1)$. Por un lado, $(e \cdot [\sigma])[\tau] = \tilde{\sigma}_e(1) \cdot [\tau] = e_1 \cdot [\tau] = \tilde{\tau}_{e_1}(1)$. Por otro lado, $e \cdot [\sigma\tau] = (\widetilde{\sigma\tau})_e(1) = \tilde{\sigma}_e \tilde{\tau}_{e_1}(1) = \tilde{\tau}_{e_1}(1)$. $\square$

En general, definida la acción de un grupo G sobre un conjunto S y dado un punto $s \in S$ existen dos subconjuntos de G asociados a s de especial interés: el estabilizador y la órbita de s. A continuación, estudiaremos estos subconjuntos en el contexto que nos ocupa.

Definición 3.6. Sea S un conjunto, G un grupo que actúa sobre S y $s \in S$. El *estabilizador de s*, que denotaremos por G_s, es el subgrupo de G que actúa trivialmente sobre S. Es decir, $G_s = \{g \in G \mid s \cdot g = s\}$.

Proposición 3.7. *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento. El estabilizador de un punto e_0 es el conjunto $p_*(\Pi(E, e_0))$. Es decir, $p_*(\Pi_1(E, e_0)) = \{[\sigma] \in \Pi_1(X, x_0) \mid e_0 \cdot [\sigma] = e_0\}$.*

Demostración. Sea $[\sigma] \in \Pi_1(E, e_0)$. $[\sigma]$ pertenece al estabilizador de e_0 si y solo si $\tilde{\sigma}_{e_0}$ es un lazo. Esto ocurre si y solo si σ es la imagen por p de un lazo en e_0. En otras palabras si $[\sigma] \in p_*(\Pi_1(E, e_0))$. □

Definición 3.8. Sean S un conjunto, G un grupo que actúa sobre S y $s \in S$. La *órbita de s*, que denotaremos por O_s, es el conjunto de imágenes de s por la acción de elementos de G. Es decir, $O_s = \{x = s \cdot g \mid g \in G\}$.

En general, se dice que un grupo G *actúa transitivamente sobre S* si para cada $s_1, s_2 \in S$ existe $g \in G$ tal que $s_1 = g \cdot s_2$. Es decir, si la orbita de cualquier elemento $s \in S$ es el propio S.

Proposición 3.9. *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento. Entonces $\Pi_1(X, x_0)$ opera transitivamente sobre $p^{-1}(x_0)$. En otras palabras, para todo $e \in p^{-1}(x_0)$ la propia fibra $p^{-1}(x_0)$ es la órbita de e.*

Demostración. Sean e_0, $e_1 \in p^{-1}(x_0)$ y $\tilde{\sigma}$ un camino de e_0 a e_1. Dado $\sigma = p \circ \tilde{\sigma}$ se tiene que $e_1 = e_0 \cdot [\sigma]$. □

Teorema 3.10. *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento. Existe una biyección entre el conjunto de clases laterales por la derecha, $\{p_*(\Pi_1(E, e_0))[\sigma] \mid [\sigma] \in \Pi_1(X, x_0)\}$, y la fibra $p^{-1}(x_0)$.*

Demostración. Sea ϕ la aplicación de $H = \{p_*(\Pi_1(E, e_0))[\sigma] \mid [\sigma] \in \Pi_1(X, x_0)\}$ en $p^{-1}(x_0)$ dada por $\phi(p_*(\Pi_1(E, e_0))[\sigma]) = e_0 \cdot [\sigma]$. Para probar que la aplicación ϕ está correctamente definida debemos comprobar que la imagen $e_0 \cdot [\sigma]$ no depende del elemento elegido $[\sigma]$ para generar la clase lateral. Sean $[\sigma_1]$, $[\sigma_2] \in \Pi_1(X, x_0)$ tal que $p_*(\Pi_1(E, e_0))[\sigma_1] = p_*(\Pi_1(E, e_0))[\sigma_2]$. De la igualdad anterior se sigue que existe $[\omega] \in p_*(\Pi_1(E, e_0))$ tal que $[\sigma_1] = [\omega][\sigma_2]$. Entonces $e_0 \cdot [\sigma_1] = e_0 \cdot [\omega][\sigma_2] = e_0 \cdot [\sigma_2]$. La última igualdad se sigue de que $p_*(\Pi_1(E, e_0))$ es el estabilizador de e_0.

En segundo lugar, construimos $\psi : p^{-1}(x_0) \longrightarrow H$. Dado un punto e de la fibra, consideramos $\tilde{\tau}$ un camino de e_0 a e y $\tau = p \circ \tilde{\tau}$ su proyección, que es un lazo en x_0. Así, definimos $\psi(e) = p_*(\Pi_1(E, e_0))[\tau]$. La función estará correctamente definida siempre y cuando todos los caminos de e_0 a e tengan sus proyecciones en la misma clase por la derecha. Sean $\tilde{\tau}_1$ y $\tilde{\tau}_2$ dos caminos de e a e_0 y τ_1 y τ_2 sus proyecciones. Se tiene que $[\tau_1] = [\tau_1\tau_2^{-1}\tau_2] = [\tau_1\tau_2^{-1}][\tau_2] \in p_*(\Pi_1(E, e_0))[\tau_2]$ pues $\widetilde{(\tau_1\tau_2^{-1})}_{e_0}$ es un lazo en e_0. Puesto que las clases por la derecha forman una partición de $\Pi_1(X, x_0)$ se tiene la igualdad $p_*(\Pi_1(E, e_0))[\tau_1] = p_*(\Pi_1(E, e_0))[\tau_2]$.

Por último, veamos que $\psi \circ \phi = Id_H$ y que $\phi \circ \psi = Id_{p^{-1}(x_0)}$. Sea σ un lazo en x_0 cuyo levantamiento en e_0 tiene punto final e. Por un lado, $\psi \circ \phi(p_*(\Pi_1(E, e_0))[\sigma]) = \psi(e_0 \cdot [\sigma]) = \psi(e) = p_*(\Pi_1(E, e_0))[\sigma]$. Por otro lado, $\phi \circ \psi(e) = \phi(p_*(\Pi_1(E, e_0))[\sigma]) = e_0 \cdot [\sigma] = e$. □

Del teorema anterior se deduce que si el conjunto $p^{-1}(x_0)$ es finito, el cardinal de la fibra será exactamente el índice de $p_*(\Pi_1(E, e_0))$ en $\Pi_1(X, x_0)$.

Si añadimos sobre E la hipótesis de ser simplemente conexo se obtiene un resultado más fuerte que el anterior. Ahora, todas las fibras tendrán el mismo cardinal que $\Pi_1(X, x_0)$.

Corolario 3.11. *Sea* $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *un recubrimiento con* E *simplemente conexo. Entonces existe una biyección entre los conjuntos* $\Pi_1(X, x_0)$ *y* $p^{-1}(x_0)$.

Demostración. Si el espacio E es simplemente conexo, entonces $\Pi_1(E, e_0) = \{1\} = \{[c_{e_0}]\}$. Por tanto, $p_*(\Pi_1(E, e_0)) = p_*([c_{e_0}]) = \{[c_{x_0}]\} = \{1\}$. Aplicando el resultado anterior, se tiene una biyección entre $\{1 \cdot [\sigma] \mid [\sigma] \in \Pi_1(X, x_0)\}$ y $p^{-1}(x_0)$, de donde se deduce la biyección entre $\Pi_1(X, x_0)$ y $p^{-1}(x_0)$. □

3.2. Recubrimientos normales

Hasta ahora hemos estudiado la relación entre $p_*(\Pi_1(E, e_0))$ y $p_*(\Pi_1(E, e_1))$ en general y en el caso particular en el que e_0 y e_1 pertenecen a la misma fibra. Si además imponemos la condición de que $p_*(\Pi_1(E, e_0))$ sea un subgrupo normal de E, entonces se tiene un resultado aún más fuerte, $p_*(\Pi_1(E, e_0)) = p_*(\Pi_1(E, e_1))$. Los recubrimientos que verifican esta hipótesis adicional serán de especial interés y, en cierto sentido que irá quedando patente, serán análogos a las extensiones de Galois de cuerpos.

Definición 3.12. Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento. Si $p_*(\Pi_1(E, e_0))$ es un subgrupo normal de $\Pi_1(X, x_0)$, se dice que el recubrimiento es *normal.*

Es importante aclarar que la definición anterior no depende de los puntos e_0 y x_0 fijados. Si un recubrimiento es normal, entonces para cada $e \in E$ el subgrupo $p_*(\Pi_1(E, e))$ será normal en $\Pi_1(E, p(e))$.

Proposición 3.13. $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *es un recubrimiento normal si y solo si lo es* $p : (E, e_1) \longrightarrow (X, x_1)$.

Demostración. Sea $\tilde{\tau}$ camino de e_0 a e_1. En virtud del teorema 3.2, se sabe que, $p_*(\Pi_1(E, e_1)) = \tau_*(p_*(\Pi_1(E, e_0)))$. Como τ_* es un isomorfismo, $p_*(\Pi_1(E, e_1))$ es normal en $\Pi_1(X, x_1)$ si y solo si lo es $p_*(\Pi_1(E, e_0))$ en $\Pi_1(X, x_0)$. □

3.3. Transformaciones recubridoras

En esta sección, estudiaremos un grupo de homeomorfismos especialmente interesante vinculado a un recubrimiento: el grupo de transformaciones recubridoras.

Definición 3.14. Sea $p : E \longrightarrow X$ se llama *transformación recubridora* a un homemorfismo $\phi : E \longrightarrow E$ que preserva las fibras, es decir, tal que $p = \phi \circ p$.

Si ϕ es una transformación recubridora, entonces los espacios E y $\phi(E)$ se proyectan de igual forma en X, es decir, $p(e) = p(\phi(e))$ para cualquier $e \in E$. Será útil entender la aplicación ϕ como una elevación de la propia proyección p, como se ilustra en la figura 3.3. En esta idea se basa el siguiente resultado, que garantiza que una transformación recubridora queda totalmente definida por su acción sobre un punto. Más adelante, en la demostración del teorema 3.17 veremos la definición de ϕ en función únicamente de la imagen de un punto.

$$\begin{tikzcd}
(E, e_0) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & (E, \phi(e_0)) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& (E, \phi(e_0)) \arrow[d, "p"] \\
(E, e_0) \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "p"] & (X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Figura 3.2: Diagramas de un recubrimiento y una transformación recubridora.

Lema 3.15. *Sea $p : E \longrightarrow X$ un recubrimiento y ϕ_1, $\phi_2 \in G$. Si $\phi_1(e) = \phi_2(e)$ para algún $e \in E$, entonces $\phi_1 = \phi_2$.*

Demostración. Puesto que $p = p \circ \phi_1$, $p = p \circ \phi_2$ y $\phi_1(e) = \phi_2(e)$, en virtud del teorema de unicidad del levantamiento se tiene que $\phi_1 = \phi_2$, pues ϕ_1 y ϕ_2 son dos levantamientos de p. $\square$

Proposición 3.16. *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento. El conjunto de transformaciones recubridoras G del recubrimiento tiene estructura de grupo con la composición de aplicaciones.*

Demostración. Como subconjunto del grupo de homeomorfismos de E en E sabemos que G será grupo si es cerrado para la composición y contiene al elemento neutro. Por un lado, Id_E obviamente preserva las fibras del recubrimiento, por tanto, $Id_E \in G$. Por otro lado, dados ϕ, $\psi \in G$, $\psi \circ \phi : E \longrightarrow E$ es un homeomorfismo y $p \circ (\psi \circ \phi) = (p \circ \psi) \circ \phi = p \circ \phi = p$. $\square$

Más adelante estudiaremos la relación entre los grupos de transformaciones recubridoras de distintos recubrimientos. En estos casos, la notación G para este grupo resultará insuficiente. Por ello, de ahora en adelante, dado un recubrimiento $p : E \longrightarrow X$ utilizaremos $G(E/X)$ para referirnos a su grupo de transformaciones recubridoras. Es importante señalar que esta notación no especifica la aplicación p, pero la usaremos siempre que no haya confusión posible.

Obsérvese que en el siguiente teorema el grupo $G(E/X)$ no depende de la elección de x_0 y e_0, por lo que ocurre lo mismo para $\Pi_1(X, x_0)/p_*(\Pi_1(E, e_0))$. Esto no es sorprendente, ya se podía deducir a partir del teorema 3.2 y la proposición 3.13.

Teorema 3.17. *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento normal. Entonces $G = G(E/X)$ es isomorfo a $\Pi_1(X, x_0)/p_*(\Pi_1(E, e_0))$.*

Demostración. La demostración se divide en varios pasos:

(1) Definición de un homomorfismo $\chi : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow G$.

$\chi([\sigma]) = \phi_{[\sigma]}$, donde definimos $\phi_{[\sigma]}$ como sigue. Dado $e \in E$, consideramos $\tilde{\tau}$ un camino de e_0 a e y $\tau = p \circ \tilde{\tau}$. Puesto que $\tau^{-1}\sigma\tau$ es un lazo en $p(e)$ se puede definir $\phi_{[\sigma]}(e) = e \cdot [\tau^{-1}\sigma\tau]$. Obsérvese que en particular $\phi_{[\sigma]}(e_0) = e_0 \cdot [\sigma]$.

(2) $\phi_{[\sigma]}$ *no depende de la elección de* σ *ni del camino* $\tilde{\tau}$ *elegido de* e_0 *a* e.

En primer lugar, si σ' es tal que $[\sigma] = [\sigma']$, entonces $[\tau^{-1}\sigma\tau] = [\tau^{-1}\sigma'\tau]$, luego $e \cdot [\tau^{-1}\sigma\tau] = e \cdot [\tau^{-1}\sigma'\tau]$.

Para probar que $\phi_{[\sigma]}(e)$ no depende de la elección de $\tilde{\tau}$ consideramos $\tilde{\gamma}$ otro camino de e_0 a e y $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Así, $[\tau\gamma^{-1}] \in p_*(\Pi_1(E, e_0))$, y como este subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$ es normal, también $[\sigma\tau\gamma^{-1}\sigma^{-1}] \in p_*(\Pi_1(E, e_0))$. Es decir, existe un lazo δ en e_0 tal que $[p \circ \delta] = [\sigma\tau\gamma^{-1}\sigma^{-1}]$. Tomando $[\tau^{-1}\sigma\tau][\gamma^{-1}\sigma\gamma]^{-1} = [\tau^{-1}\sigma\tau\gamma^{-1}\sigma^{-1}\gamma] = [\tau^{-1}(p \circ \delta)\gamma)] = [p \circ (\tilde{\tau}^{-1}\delta\tilde{\gamma})] = p_*([\tilde{\tau}^{-1}\delta\tilde{\gamma}]) \in p_*(\Pi_1(E, e))$. Es decir, $e \cdot [\tau^{-1}\sigma\tau][\gamma^{-1}\sigma\gamma]^{-1} = e$, luego $e \cdot [\tau^{-1}\sigma\tau] = e \cdot [\gamma^{-1}\sigma\gamma]$.

(3) Resultado auxiliar. Sean e, $e_1 \in E$ *y sean* $\tilde{\alpha}$ *un camino de* e_1 *a* e *en* E, $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_{\phi_{[\sigma]}(e_1)}$. *Entonces* $\phi_{[\sigma]}(e) = \tilde{\alpha}_1(1)$.

Consideramos $\tilde{\tau}$ un camino de e_0 a e_1, $\tau = p \circ \tilde{\tau}$, $\tilde{\alpha}$ un camino de e_1 a e y $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$. Por definición de $\phi_{[\sigma]}$ sabemos que $\phi_{[\sigma]}(e_1) = \widetilde{(\tau^{-1}\sigma\tau)}_{e_1}(1)$ luego $\widetilde{(\tau^{-1}\sigma\tau)}_{e_1}$ es un camino de e_1 a $\phi_{[\sigma]}(e_1)$ que levanta $\tau^{-1}\sigma\tau$. $\tilde{\alpha}_1$ es un camino de $\phi_{[\sigma]}(e_1)$ a $\tilde{\alpha}_1(1)$ que levanta α, y $\tilde{\alpha}^{-1}$ es un camino de e a e_1 que también levanta α. Concatenando los tres caminos construimos $\tilde{\alpha}^{-1}\widetilde{(\tau^{-1}\sigma\tau)}_{e_1}\tilde{\alpha}_1$ que es un camino de e a $\tilde{\alpha}_1(1)$ que eleva $(\alpha\tau)^{-1}\sigma(\alpha\tau)$. Si usamos el camino $\tau\alpha$ para calcular $\phi_{[\sigma]}(e)$ tenemos $\phi_{[\sigma]}(e) = e \cdot [(\tau\alpha)^{-1}\sigma(\tau\alpha)] = \tilde{\alpha}^{-1}\widetilde{(\tau^{-1}\sigma\tau)}_{e_1}\tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{\alpha}_1(1)$.

(4) $\phi_{[\sigma]}$ *es continua.*

Sea $\phi = \phi_{[\sigma]}$. Probemos que ϕ es continua en e_1, para todo $e_1 \in E$. Para ello veamos que para todo $V \in \mathcal{E}(\phi(e_1))$ abierto, existe U abierto elemental conexo por caminos con $p(e_1) \in U$ tal que si S es la hoja de U que contiene a $\phi(e_1)$, entonces $S \subset V$.

Consideramos $S \subset V$ conexo por caminos y entorno de $\phi(e_1)$. Es posible elegir S de manera que $U = p(S)$ esté contenido en un abierto elemental, por tanto, U es también elemental para $p(\phi(e_1)) = p(e_1)$. Además, la hoja V_i de U que contiene a $\phi(e_1)$ debe contener a S por ser S conexo. Puesto que $p(S) = U = p(V_i)$ y $p_{|V_i} : V_i \longrightarrow U$ es biyectiva, $V_i = S$.

Consideramos S' la hoja de U que contiene a e_1. Dado $e \in S'$, tomamos $\tilde{\tau}$ un camino de e_1 a e en S'. El camino $p \circ \phi \circ \tilde{\tau} = p \circ \tilde{\tau}$ va de $p(e_1)$ a $p(e)$ en U, por tanto, $\phi \circ \tilde{\tau}$ es el levantamiento de $p \circ \tilde{\tau}$ con punto inicial $\phi(e_1)$, es decir, $\phi \circ \tilde{\tau} = \widetilde{(p \circ \tilde{\tau})}_{\phi(e_1)}$, y $\widetilde{(p \circ \tilde{\tau})}_{\phi(e_1)}$ es un camino en S por ser elevación de un camino en U y S componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$. Por último, utilizando *(3)* se sabe que $\phi(e) = \widetilde{(p \circ \tilde{\tau})}_{\phi(e_1)}(1) \in S$. Es decir, para todo $e \in S'$ se tiene que $\phi(e) \in S \subset V$, por lo que $e_1 \in S' \subset \phi^{-1}(V)$ y se deduce que $\phi^{-1}(V) \in \mathcal{E}(e_1)$.

(5) χ *es suprayectiva.*

Dado $\phi \in G$ vamos a construir $[\sigma]$ tal que $\phi = \phi_{[\sigma]}$. Sean $\tilde{\sigma}$ un camino de e_0 a

$\phi(e_0) \in p^{-1}(x_0)$ y $\sigma = p \circ \tilde{\sigma}$. Para calcular $\phi_{[\sigma]}(e_0)$ se toma $\tilde{\tau} = c_{e_0}$ y así, $\phi_{[\sigma]}(e_0) = e_0[\sigma] = \tilde{\sigma}_{e_0}(1) = \phi(e_0)$. Por tanto, $\phi_{[\sigma]} = \phi$.

(6) χ es un homomorfismo y $\phi_{[\sigma]}$ es un homeomorfismo.

Sean $[\alpha], [\sigma] \in \Pi_1(X, x_0)$ y $e_1 = \tilde{\sigma}_{e_0}(1)$. $\phi_{[\alpha]} \circ \phi_{[\sigma]}(e_0) = \phi_{[\alpha]}(e_1) = e_1 \cdot [\sigma^{-1}\alpha\sigma] = (e_1 \cdot [\sigma^{-1}])[\alpha\sigma] = (\tilde{\sigma}^{-1})_{e_1}(1) \cdot [\alpha\sigma]$. Dado que $(\tilde{\sigma}^{-1})_{e_1}(1) = (\tilde{\sigma}_{e_0})^{-1}(1) = e_0$ se sigue la igualdad $\phi_{[\alpha]} \circ \phi_{[\sigma]}(e_0) = e_0 \cdot [\alpha\sigma] = \phi_{[\alpha\sigma]}(e_0)$.

En particular, $\phi_{[\sigma]}$ es el homeomorfismo inverso de $\phi_{[\sigma^{-1}]}$ y χ es un homomorfismo de grupos.

(7) $ker(\chi) = p_*(\Pi_1(E, e_0))$.

$[\alpha] \in p_*(\Pi_1(E, e_0))$ si y solo si $\phi_{[\sigma]} = Id_E$. Esto ocurre siempre y cuando $\phi_{[\sigma]}(e_0) = e_0$, es decir, cuando $e_0 \cdot [\sigma] = e_0$. En otras palabras, $[\sigma] \in ker(\chi)$ si y solo si $\tilde{\sigma}_{e_0}$ es un lazo en e_0, es decir, $[\sigma] \in p_*(\Pi_1(E, e_0))$. □

Nota 3.18. El teorema 3.17 demuestra que existe un isomorfismo $\Psi : G(E/X) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0)/p_*(\Pi_1(E, e_0))$ donde $\Psi(\phi)$ esta definido como en el punto *(5)* de la demostración. Es decir, si $\tilde{\sigma}$ es un camino de e_0 a $\phi(e_0)$ y $\sigma = p \circ \tilde{\sigma}$, se define $\Psi(\phi) = p_*(\Pi_1(E, e_0))[\sigma]$.

Corolario 3.19. *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento. Si E simplemente conexo y localmente conexo por caminos, entonces $G(E/X)$ y $\Pi_1(X, x_0)$ son isomorfos.*

Demostración. Si E es simplemente conexo $\Pi_1(E, e_0) = [c_{e_0}]$ y $p_*(\Pi_1(E, e_0)) = \{[c_{x_0}]\} = \{1\}$. Del isomorfismo del teorema 3.17 se sigue un isomorfismo entre $G(E/X)$ y $\Pi_1(X, x_0)$. □

De la propia definición de transformación recubridora se deduce que, dado $\phi \in G(E/X)$, la imagen de $p^{-1}(x_0)$ por ϕ es igual a $p^{-1}(x_0)$. Es decir, ϕ es una permutación en la fibra $p^{-1}(x_0)$. Definimos la aplicación Φ como:

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & p^{-1}(x_0) \times G & \longrightarrow & p^{-1}(x_0) \\ & (e, \phi) & \longmapsto & e \cdot \phi = \phi(e) \end{array}$$

Vamos a ver que la aplicación anterior es una acción de $G(E/X)$ sobre $p^{-1}(x_0)$. Además, utilizando esta acción podremos dar una condición suficiente y necesaria para que un recubrimiento sea normal.

Proposición 3.20. *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$. La aplicación Φ es una acción del grupo de transformaciones recubridoras $G = G(E/X)$ sobre el conjunto $p^{-1}(x_0)$.*

Demostración. Sea $Id \in G$, obviamente, $e \cdot Id = e$ para todo $e \in E$. Por otro lado, sean ϕ, $\psi \in G$ se tiene $(e \cdot \phi) \cdot \psi = (\phi(e)) \cdot \psi = \psi(\phi(e)) = (\psi \circ \phi)(e) = e \cdot (\psi \circ \phi)$. □

Llegamos finalmente a una caracterización de los recubrimientos normales que pone de manifiesto la relación entre un recubrimiento normal al que se le asocia su grupo de transformaciones recubridoras y una extensión normal de cuerpos con su grupo de Galois.

En esta analogía, la fibra $p^{-1}(x_0)$ juega el papel del conjunto de raíces de un polinomio. La diferencia es que aquí basta con fijarse en un único punto x_0.

Teorema 3.21. *Un recubrimiento* $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *es normal si y solo si* $G = G(E/X)$ *actúa transitivamente sobre* $p^{-1}(x_0)$.

Demostración. En primer lugar, suponemos que el recubrimiento es normal. Sea $e_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\tilde{\sigma}$ un camino de e_0 a e_1 y $\sigma = p \circ \tilde{\sigma}$. La transformación recubridora $\phi_{[\sigma]}$ definida en la demostración del teorema 3.17 es el elemento de G que envía e_0 a e_1. Por tanto, G actúa transitivamente. Nótese que el punto base $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ en dicha demostración es un punto arbitrario de la fibra. Es decir, podemos construir $\phi_{[\sigma]}$ tomando $e_0 = e_1$.

Supongamos ahora que G actúa transitivamente sobre $p^{-1}(x_0)$. Dado $[\tau] \in \Pi_1(X, x_0)$ queremos ver que $[\tau][\sigma][\tau^{-1}] \in p_*(\Pi_1(E, e_0))$ para todo $[\sigma] \in p_*(\Pi_1(E, e_0))$. Sea $e_1 = \tilde{\tau}_{e_0}(1)$ y ϕ la transformación recubridora tal que $\phi(e_0) = e_1$. El camino $\phi \circ \tilde{\sigma}_{e_0}$ va de $\phi(e_0)$ a $\phi(e_0)$, es decir, es un lazo en e_1. Como $p \circ \tilde{\sigma}_{e_0} = p \circ (\phi \circ \tilde{\sigma}_{e_0}) = \sigma$ se tiene $\tilde{\sigma}_{e_1} = \phi \circ \tilde{\sigma}_{e_0}$, que es un lazo en e_1. Tenemos que $[\tau\sigma\tau^{-1}] = [p \circ (\tilde{\tau}_{e_0}\tilde{\sigma}_{e_1}\tilde{\tau}_{e_1}^{-1})] = p_*([\tilde{\tau}_{e_0}\tilde{\sigma}_{e_1}\tilde{\tau}_{e_1}^{-1}]) \in p_*(\Pi_1(E, e_0))$ pues $\tilde{\tau}_{e_0}(0) = e_0$ y $\tilde{\tau}_{e_1}^{-1}(1) = e_0$.

$\square$

Capítulo 4

Recubrimientos intermedios y subgrupos de $G(E/X)$

La Teoría de Galios establece una correspondencia entre las extensiones intermedias de una extensión de Galois y los subgrupos de su grupo de Galois. Durante este capítulo estudiaremos la situación análoga para recubrimientos. Dado un recubrimiento, definiremos las correspondencias entre los recubrimientos intermedios a este módulo isomorfismo, y los subgrupos de su grupo de transformaciones recubridoras. Construiremos primero las aplicaciones, desde el recubrimiento intermedio al subgrupo de transformaciones recubridoras y viceversa y, después, estudiaremos la relación entre ambas. El resultado principal de este capítulo es el corolario 4.16 que expone esta relación, y es análogo al Teorema de Galois.

Para ellos será necesario introducir conceptos como el de recubrimiento intermedio o isomorfismo de recubrimientos.

Definición 4.1. Sean E, Y y X tres espacios topológicos y $p : E \longrightarrow X$ un recubrimiento normal. Llamaremos *recubrimiento intermedio* de p a un recubrimiento $p_2 : E \longrightarrow Y$ tal que existe una aplicación continua $p_1 : Y \longrightarrow X$ con $p = p_1 \circ p_2$.

$$\begin{tikzcd}
(E,e_0) \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
& (Y,y_0) \arrow[dl, "p_1"] \\
(X,x_0) &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1: Recubrimiento intermedio.

La definición anterior es una definición de trabajo que nos ha parecido cómoda para este texto. No habría inconveniente en llamar recubrimiento intermedio a p_1, en lugar de a p_2, o al par (p_1, p_2).

Antes de seguir con resultados acerca de los recubrimientos intermedios haremos una observación sobre la existencia de p_1. Sean E, Y y X tres espacios topológicos, $p_2 : E \longrightarrow Y$ una aplicación cociente y $p : E \longrightarrow X$ una aplicación no necesariamente continua. Se sabe que existe una aplicación $p_1 : Y \longrightarrow X$ tal que $p = p_1 \circ p_2$ si y solo si dados dos elementos e_1, $e_2 \in E$ tal que $p_2(e_1) = p_2(e_2)$ se tiene que $p(e_1) = p(e_2)$. En este caso, dado $y \in Y$ se toma $e \in p_2^{-1}(y)$ y se define $p_1(y) = p(e)$, luego p_1, si existe, es única y queda determinada por p. Además, puesto que p_2 es una aplicación cociente, aplicando la propiedad fundamental de la topología cociente se deduce que p_1 será continua si y solo si lo es p. También se tiene que p_1 es cociente si y solo si lo es p.

Volvamos al escenario visto en la definición 4.1 donde p y p_2 son ambos recubrimientos y p es normal. En este caso, la observación anterior garantiza que p_2 será un recubrimiento intermedio de p si y solo si $p_2(e_1) = p_2(e_2)$ implica que $p(e_1) = p(e_2)$ para todo e_1, $e_2 \in E$. Ahora veamos que, en estas condiciones, p_1 también será un recubrimiento.

Proposición 4.2. *Sean $p : E \longrightarrow X$ y $p_2 : E \longrightarrow Y$ dos recubrimientos y $p_1 : Y \longrightarrow X$ una aplicación continua tal que $p = p_1 \circ p_2$. Entonces $p_1 : Y \longrightarrow X$ es un recubrimiento.*

Demostración. Sean $x \in X$, U un abierto conexo básico para p con $x \in U$ y $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$ con $\{V_i\}_{i \in I}$ las hojas de U. Queremos probar que, dada cualquier componente conexa T de $p_1^{-1}(U)$, T es homeomorfa a U vía p_1. Si probamos lo anterior, por la proposición 2.6 tendremos que p_1 es un recubrimiento.

Sea $J = \{i \in I \mid p_2^{-1}(T) \cap V_i \neq \emptyset\}$. Vamos a ver que $p_2^{-1}(T) = \bigcup_{i \in J} V_i$. Dado $e \in p_2^{-1}(T)$ se tiene que $e \in V_i$ para algún i pues $p_2^{-1}(T) \subset (p_2^{-1} \circ p_1^{-1})(U) = p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$. Como $e \in V_i \cap p_2^{-1}(T)$ se tiene que $i \in J$. Es decir, $p_2^{-1}(T) \subset \bigcup_{i \in J} V_i$. Recíprocamente, sea V_i tal que $i \in J$. Entonces $T \cap p_2(V_i) \neq \emptyset$. Como $p_2(V_i)$ es un conexo contenido en $p_1^{-1}(U)$ y T es una componente conexa de $p_1^{-1}(U)$, se sigue que $p_2(V_i) \subset T$. Es decir, $V_i \subset p_2^{-1}(T)$. Por tanto, $p_2^{-1}(T) = \bigcup_{i \in J} V_i$.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\tilde{\sigma}_{\tilde{e}}"] \arrow[dr, "\sigma"'] & V_i \arrow[d, "\tilde{p}_2"] \arrow[dd, bend left, "\tilde{p}"] \\
& T \arrow[d, "\tilde{p}_1"] \\
& U
\end{tikzcd}$$

Figura 4.2: Diagrama de la demostración 4.2

Sea $i \in J$ y consideremos $\tilde{p}_2 = p_{2|V_i}$, $\tilde{p} = p_{|V_i}$ y $\tilde{p}_1 = p_{1|T}$ como en la figura 4.2. Puesto que $\tilde{p}$ es un homeomorfismo, si $\tilde{p}_2$ también es un homeomorfismo tendremos que $\tilde{p}_1$ será un homeomorfismo entre T y U, como queríamos probar. Recordemos que $\tilde{p}_2$ es abierta y continua por ser la restricción a un abierto de una aplicación recubridora. Además, puesto que $\tilde{p} = \tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2$ es biyectiva, $\tilde{p}_2$ es inyectiva. Para probar la suprayectividad consideramos $y \in T$ y veamos que es la proyección por p_2 de un punto en V_i. Sean $\tilde{e} \in V_i \cap p_2^{-1}(T)$ e

$\tilde{y} = p_2(\tilde{e})$. Tomamos σ un camino de $\tilde{y}$ a y en T, que existe pues T es una componente conexa por caminos de $p_1^{-1}(U)$. Sea $\tilde{\sigma}_{\tilde{e}}$ la elevación de σ a E con punto inicial $\tilde{e}$. Entonces, puesto que $Im(p_2 \circ \tilde{\sigma}_{\tilde{e}}) = Im(\sigma) \subset T$, $Im(\tilde{\sigma}_{\tilde{e}})$ está contenida en una de las componentes conexas por caminos de $p_2^{-1}(T)$, que son exactamente $\{V_i\}_{i\in J}$. Puesto que $\tilde{e} \in V_i$, la imagen de $\tilde{\sigma}_{\tilde{e}}$ está enteramente contenida en V_i, en particular, $\tilde{e}_1 = \tilde{\sigma}_{\tilde{e}}(1) \in V_i$. Por último, $p_2(\tilde{e}_1) = p_2 \circ \tilde{\sigma}_{\tilde{e}}(1) = \sigma(1) = y$. Así, p_2 es suprayectiva y por tanto, es un homeomorfismo. □

El diagrama 4.1, cuando todas las aplicaciones son recubridoras, esquematiza la situación de la definición anterior.

El resultado anterior garantiza que si p_2 es un recubrimiento también lo es p_1. De hecho, si p_1 es un recubrimiento y p_2 una aplicación continua que p_2 también será un recubrimiento:

Proposición 4.3. *Sean $p : E \longrightarrow X$ y $p_1 : Y \longrightarrow X$ dos recubrimientos y $p_2 : E \longrightarrow Y$ una aplicación continua tal que $p = p_1 \circ p_2$. Entonces $p_2 : E \longrightarrow Y$ es un recubrimiento.*

Demostración. Sea $y \in Y$ y sea T un abierto conexo que contiene a y. Podemos elegir T de forma que $U = p_1(T)$, que es un abierto conexo de X, sea básico para p y para p_1.

En primer lugar, veamos que T es una hoja de U. Sea $p_1^{-1}(U) = \bigcup_{i\in K} W_i$ la descomposición en hojas de $p_1^{-1}(U)$. Puesto que T es conexo y las hojas son las componentes conexas de $p_1^{-1}(U)$ se tiene que $T \subset W_i$ para cierto $i \in K$. Además. $p_{1|W_i} : W_i \longrightarrow U$ es un homeomorfismo luego $p_{1|T} : T \longrightarrow p_1(T)$ también. Por último, recordamos que $p_1(T) = U$ luego $T = W_i$.

Por otro lado, sea $p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} V_i$ la descomposición en hojas de $p^{-1}(U)$ de U. Una prueba análoga a la vista en el resultado anterior demuestra que $p_2^{-1}(T) = \bigcup_{i\in J} V_j$ para $J = \{i \in I \mid p_2^{-1}(T) \cap V_i \neq \emptyset\}$.

Sea $i \in J$ y consideremos $\tilde{p}_2 = p_{2|V_i}$, $\tilde{p} = p_{|V_i}$ y $\tilde{p}_1 = p_{1|T}$. Puesto que $\tilde{p} : V_i \longrightarrow U$ y $\tilde{p}_1 : T \longrightarrow U$ son homeomorfismos y $\tilde{p} = \tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2$, se tiene que $\tilde{p}_2$ también es un homeomorfismo. Hemos probado que, para cada punto $y \in Y$ existe un abierto conexo T homeomorfo a todas las componentes conexas de $p_2^{-1}(T)$. Es decir, p_2 es un recubrimiento. □

Comencemos ya con la construcción de la correspondencia.

4.1. Del recubrimiento intermedio al subgrupo de $G(E/X)$

En esta sección describiremos los grupos de transformaciones recubridoras de los distintos recubrimientos involucrados en la figura 4.1 y asociaremos a cada recubrimiento intermedio su grupo $G(E/Y)$. Es claro que, en el contexto que nos ocupa, el grupo $G(E/Y)$ es un subgrupo de $G(E/X)$. Esta idea, junto con el teorema 3.17, nos dice que el grupo de transformaciones recubridoras de un recubrimiento intermedio es isomorfo a un subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)/p_*(\Pi_1(E, e_0))$. El siguiente teorema describe este subgrupo.

Teorema 4.4. *Sean $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento normal, $p_1 : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ y $p_2 : (E, e_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ recubrimientos con $p = p_1 \circ p_2$. Denotemos $G = G(E/X)$ y $H = G(E/Y)$. Sea $\Psi : G \longrightarrow \Pi_1(X, x_0)/p_*(\Pi_1(E, e_0))$ el isomorfismo descrito en la nota 3.18. Entonces $\Psi(H) = p_{1*}(\Pi_1(Y, y_0))/p_*(\Pi_1(E, e_0))$.*

Demostración. En primer lugar, recordamos la definición de Ψ. Dado $\phi \in G$ tomamos un camino $\tilde{\sigma}$ de e_0 a $\phi(e_0)$ y σ su proyección por p, es decir, $\sigma = p \circ \tilde{\sigma}$. Se define la imagen de ϕ por Ψ como $\Psi(\phi) = p_*(\Pi_1(E, e_0))[\sigma]$.

Queremos probar que $\phi \in H$ si y solo si $[\sigma] \in p_{1*}(\Pi_1(Y, y_0))$. En otras palabras, dado $\tilde{\sigma}_{y_0}$, el levantamiento de σ por p_1 en el punto y_0, buscamos demostrar que $\phi \in H$ si y solo si $y_0 \cdot [\sigma] = y_0$, es decir, $p_2 \circ \phi = p_2$ si y solo si $\tilde{\sigma}_{y_0}$ es un lazo en y_0.

$$\begin{tikzcd}
(I,0) \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[ddr, "\sigma"'] & (E,e_0) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "p_2"] & & (E,\phi(e_0)) \arrow[dl, "p_2"] \\
& & (Y,y_0) \arrow[dl, "p_1"] & \\
& (X,x_0) & &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.3: Dos levantamientos de p a (Y, y_0).

Como paso previo, vamos a demostrar que $p_2 \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{y_0}$. Partimos de las igualdades $p_2 \circ \tilde{\sigma}(0) = p_2(e_0) = y_0$ y $\tilde{\sigma}_{y_0}(0) = y_0$. Además, $p_1 \circ p_2 \circ \tilde{\sigma} = \sigma$ y $p_1 \circ \tilde{\sigma}_{y_0} = \sigma$ luego $p_2 \circ \tilde{\sigma}$ y $\tilde{\sigma}_{y_0}$ son dos elevaciones de σ que coinciden en un punto, es decir, $p_2 \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{y_0}$.

Supongamos que $\phi \in H$. Aplicando la igualdad anterior se tiene que $\tilde{\sigma}_{y_0}(1) = p_2(\tilde{\sigma}(1)) = p_2(\phi(e_0)) = p_2(e_0) = y_0$. Es decir, $\tilde{\sigma}_{y_0}$ es un lazo en y_0.

Recíprocamente, supongamos que $\tilde{\sigma}_{y_0}$ es un lazo. Puesto que $\phi \in G$ tenemos $p_1 \circ p_2 = p = p\circ = p_1 \circ (p_2 \circ \phi)$. Por tanto, p_2 y $p_2 \circ \phi$ son dos levantamientos de p. Puesto que $p_2 \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{y_0}$, se tiene que $p_2 \circ \phi(e_0) = p_2(\tilde{\sigma}(1)) = \tilde{\sigma}_{y_0}(1) = y_0 = p(e_0)$ luego $p_2 = p_2 \circ \phi$ ya que coinciden en un punto. $\square$

El siguiente teorema muestra un resultado fácilmente identificable con el resultado análogo de la Teoría de Galois.

Teorema 4.5. *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento normal y sean $p_1 : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ y $p_2 : (E, e_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ dos recubrimientos con $p = p_1 \circ p_2$, Denotamos $G = G(E/X)$, $H = G(E/Y)$ y $K = G(Y/X)$. Se tiene:*

1. *p_2 es normal.*

2. *p_1 es normal si y solo si H es un subgrupo normal de G y, en este caso, $K \cong G/H$.*

Demostración. 1. Por el teorema 3.21, p_2 es normal si y solo si H actúa transitivamente sobre $p_2^{-1}(y_0)$. Sea $e_1 \in p_2^{-1}(y_0)$, veamos que existe $\phi \in H$ tal que $\phi(e_0) = e_1$. Se tiene que e_0, $e_1 \in p_2^{-1}(y_0) \subset p_2^{-1}(p_1^{-1}(x_0)) = p^{-1}(x_0)$. Por tanto, existe $\phi \in G$ tal que $\phi(e_0) = e_1$ pues G actúa transitivamente sobre $p^{-1}(x_0)$. Vamos a probar que $\phi \in H$, es decir, que $p_2 \circ \phi = p_2$. Por hipótesis, $p = p_1 \circ p_2$ y, dado que $\phi \in G$, $p = p_1 \circ p_2 = p_1 \circ p_2 \circ \phi$. Por tanto, p_2 y $p_2 \circ \phi$ son dos elevaciones de p. Además, $p_2 \circ \phi(e_0) = p_2(e_1) = y_0 = p_2(e_0)$, es decir, p_2 y $p_2 \circ \phi$ son dos elevaciones de p que coinciden en un punto, por tanto, $p_2 = p_2 \circ \phi$.

2. Por la proposición 4.4 y el teorema 3.17 se tiene que H será normal en G si y solo si el grupo $p_{1*}(\Pi_1(Y, y_0))/p_*(\Pi_1(E, e_0))$ es normal en $\Pi_1(X, x_0)/p_*(\Pi_1(E, e_0))$, lo que equivale a que $p_{1*}(\Pi_1(Y, y_0))$ sea normal en $\Pi_1(X, x_0)$. Es decir, si y solo si p_1 es un recubrimiento normal.

   Por otro lado puesto que p es normal si además p_1 lo es, del teorema 3.17 se siguen los isomorfismos $K \cong \Pi_1(X, x_0)/p_{1*}(\Pi_1(Y, y_0))$, $H \cong p_{1*}(\Pi_1(Y, y_0))/p_*(\Pi_1(E, e_0))$ y $G \cong \Pi_1(X, x_0)/p_*(\Pi_1(E, e_0))$. El isomorfismo $G/H \cong K$ es una consecuencia directa del segundo teorema de isomorfía.

$$\begin{tikzcd}
(E, e_0) \arrow[dd, "p"', "H"] \arrow[dr, "p_2", "H"'] & \\
& (Y, y_0) \arrow[dl, "p_1", "G/H"'] \\
(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.4: Recubrimiento intermedio y sus grupos de transformaciones recubridoras.

□

4.2. Del subgrupo de $G(E/X)$ al recubrimiento intermedio

El propósito de esta sección es asociar a cada subgrupo de $G(E/X)$ un recubrimiento intermedio. En general, para construir recubrimientos en base a sus grupos de transformaciones recubridoras se requerirá que dichos grupos cumplan cierta condición que se expone a continuación.

Definición 4.6. Si E es un espacio topológico y G un grupo de homeomorfismos de E, se dice que G *actúa de forma propiamente discontinua sobre* E si para todo $e \in E$ existe un abierto V tal que $e \in V$ y $V \cap \phi(V) = \emptyset$ para todo $\phi \in G - \{Id_E\}$.

En el contexto que nos ocupa, esta condición no supondrá un obstáculo pues, como veremos, si $G = G(E/X)$ es el grupo de transformaciones recubridoras de un recubrimiento, cualquier subgrupo de G actuará de forma propiamente discontinua sobre E.

Proposición 4.7. *Si $p : E \longrightarrow X$ es un recubrimiento, $G = G(E/X)$ actúa de forma propiamente discontinua sobre E.*

Demostración. Sean $\phi \in G - \{Id_E\}$, $e \in E$, $x = p(e)$, U un abierto elemental que contiene a x y V la hoja sobre U que contiene a e. Se tiene que $\phi(V)$ es un abierto homeomorfo a U tal que $p(\phi(V)) = U$, por tanto, $\phi(V)$ es una hoja de U. Sea $e_1 = \phi(e)$. Se tiene que $p(e_1) = x$ y como $\phi \neq Id_E$ los puntos e_1 y e son distintos. Así, $e \in V$ y $e_1 \in \phi(V)$ son dos puntos distintos que se proyectan en x, por tanto, las hojas V y $\phi(V)$ son distintas, luego son disjuntas. □

El siguiente resultado estudia como construir un recubrimiento $p : E \longrightarrow X$ a partir de un grupo G de homeomorfismos de E a E cuyo grupo de transformaciones recubridoras será G. Esta construcción requerirá necesariamente, según la proposición 4.7, que G actúe de forma propiamente discontinua sobre E.

Teorema 4.8. *Sea E un espacio topológico y sea G un grupo de homeomorfismos de E que actúa de forma propiamente discontinua sobre E. Entonces el paso al cociente $q : E \longrightarrow E/G$ es un recubrimiento normal, y su grupo de transformaciones recubridoras es G.*

Demostración. En primer lugar, recordamos que E/G es el conjunto cociente sobre E por la relación de equivalencia definida como $e_1 \sim e_2$ si y solo si $e_1 = \phi(e_1)$ para algún $\phi \in G$. De esta definición se deduce que, dado $A \subset E$ cualquiera, $q(A) = q(\cup_{\phi \in G}\phi(A))$. A partir de aquí, dividiremos la demostración en varios pasos:

(1) $q : E \longrightarrow E/G$ es un recubrimiento.

Sea $eG \in E/G$, $e \in p^{-1}(eG)$ y V un entorno abierto de e tal que $V \cap \phi(V) = \emptyset$ para todo $\phi \in G - \{Id\}$. El conjunto $\bigcup_{\phi \in G} \phi(V)$ de E es, por definición, un abierto de E saturado para q. Consideramos $U = q(V) = q(\bigcup_{\phi \in G} \phi(V))$, este será nuestro abierto básico. En primer lugar, U es abierto por ser la imagen por q de un abierto saturado. Además, $q^{-1}(U) = \bigcup_{\phi \in G} \phi(V)$. Veamos que esta es exactamente la descomposición en hojas de $q^{-1}(U)$. Vamos a probar que los conjuntos $\phi(V)$ son disjuntos por reducción al absurdo. Dado $e \in \phi_1(V) \cap \phi_2(V)$, existen e_1, $e_2 \in V$ de forma que $e = \phi_1(e_1) = \phi_2(e_2)$. Se sigue que existe $\phi = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} \in G$ tal que $e_1 = \phi(e_2)$, es decir, $e_1 \in V \cap \phi(V)$, lo que, por la forma en la que se eligió V, implica que $\phi = Id$, es decir, $\phi_1 = \phi_2$. Puesto que todos los conjuntos $\phi(V)$ son homeomorfos, solo falta demostrar que $q_{|V} : V \longrightarrow U = q(V)$ es un homeomorfismo. La aplicación $q_{|V}$ es sobreyectiva y continua por serlo q. La inyectividad de $q_{|V}$ se deduce de lo siguiente. Si e_1 y $e_2 \in V$ son tal que $q(e_1) = q(e_2)$, entonces existe $\phi \in G$ tal que $\phi(e_1) = e_2$, y en este caso $e_1 \in V \cap \phi(V)$, de lo que se deduce $\phi = Id$ y $e_1 = e_2$. Por último, dado un abierto A de E y $q(A) = q(\bigcup_{\phi \in G} \phi(A))$ que es la imagen de un abierto saturado luego es abierto de E/G. Por tanto q es abierta y también lo es su restricción al abierto V. Así, $q_{|V}$ es homeomorfismo.

(2) G es el grupo de transformaciones recubridoras del recubrimiento.
Dado $\phi \in G$, se tienen las igualdades $q \circ \phi(e) = \phi(e)G = eG$ y $q(e) = eG$. Es decir, ϕ es una transformación recubridora del recubrimiento $q : E \longrightarrow E/G$. Por otro lado, sea ψ una transformación recubridora del recubrimiento $q : E \longrightarrow E/G$. Por definición se tiene que $q(\psi(e)) = q(e)$ para todo $e \in E$, es decir $\psi(e)G = eG$. En particular, dado $e \in E$ existe $\phi \in G$ tal que $\phi(e) = \psi(e)$ y por el lema 3.15 se tiene la igualdad $\phi = \psi$.

(3) El recubrimiento $q : E \longrightarrow E/G$ es normal.
Sean $eG \in E/G$ y $e_1 \in q^{-1}(eG)$. Se tiene que $e_1G = eG$, luego existe $\phi \in G$ tal que $e_1 = \phi(e)$. Es decir, G actúa transitivamente sobre $p^{-1}(eG)$. Por el teorema 3.21 el recubrimiento $q : E \longrightarrow E/G$ es normal.

□

Dado el espacio recubridor E y un subgrupo G de los homeomorfismos de E en sí mismo, el resultado anterior construye $p : E \longrightarrow E/G$ un recubrimiento con $G = G(E/(E/G))$. Sin embargo, este no es el único recubrimiento posible con grupo de transformaciones recubridoras G. El siguiente resultado garantiza que cualquier otro recubrimiento que verifique estas condiciones es, en un sentido preciso, isomorfo a E/G.

Teorema 4.9. *Si $p : E \longrightarrow X$ es un recubrimiento normal, entonces $X \cong E/G$ con $G = G(E/X)$. Más concretamente, el recubrimiento $q : E \longrightarrow E/G$ induce un homeomorfismo $f : E/G \longrightarrow X$ tal que $f \circ q = p$.*

Demostración. Veamos que la relación de equivalencia en E asociada a p es igual a la relación de equivalencia asociada a q. Dados e_1, $e_2 \in E$ se tiene que $q(e_1) = q(e_2)$ si y solo si existe $\phi \in G$ tal que $e_2 = \phi(e_1)$. Además, si $e_2 = \phi(e_1)$ entonces $p(e_1) = p(e_2)$. Recíprocamente, por ser p normal la acción de G sobre la fibra es transitiva, luego si $p(e_1) = p(e_2)$ entonces existe $\phi \in G$ tal que $e_1 = \phi(e_2)$. Esto implica que $q(e_2) = q(e_1)$. Hemos probado que las relaciones de equivalencia inducidas por p y q son iguales. Definimos $f : E/G \longrightarrow X$ como $f(eG) = p(e)$, que por lo anterior, está correctamente definida y es biyectiva. Además, por la propiedad fundamental de la topología cociente, f es continua y, puesto que p es cociente, f es cociente. Por tanto, f es un homemorfismo.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "p=f\circ q"] & \\ E/G \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Figura 4.5: Aplicación de la propiedad fundamental de la topología cociente.

□

La situación del resultado anterior se puede generalizar en el siguiente sentido.

Definición 4.10. Dados dos recubrimientos $p_1 : E_1 \longrightarrow X_1$ y $p_2 : E_2 \longrightarrow X_2$ llamaremos *isomorfismo de recubrimientos* entre ambos a un par (f, g) donde $f : E_1 \longrightarrow E_2$ y $g : X_1 \longrightarrow X_2$ son ambos homeomorfismos tales que $p_2 \circ f = g \circ p_1$. En este caso diremos que ambos recubrimientos son *isomorfos* o *equivalentes*.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ X_1 \arrow[r, "g"] & X_2 \end{tikzcd}$$

Figura 4.6: Isomorfismo de recubrimientos.

Un caso particular de especial interés de este concepto se dará cuando $X_1 = X_2$ y $g = Id_{X_1}$. En este caso, nos referiremos f como isomorfismo de recubrimientos entre $p_1 : E_1 \longrightarrow X_1$ y $p_2 : E_2 \longrightarrow X_1$. Veamos algunas consecuencias directas de la definición anterior que nos permitirán trabajar más cómodamente con este tipo de recubrimientos.

Proposición 4.11. *Sean dos aplicaciones continuas $p_1 : E_1 \longrightarrow X_1$ y $p_2 : E_2 \longrightarrow X_2$ y (f, g), $f : E_1 \longrightarrow E_2$ y $g : X_1 \longrightarrow X_2$ un isomorfismo de recubrimientos. Se cumple:*

1. *p_1 es un recubrimiento si y solo si lo es p_2.*

2. *Suponemos que p_1 y p_2 son recubrimientos. Si $\phi : E_2 \longrightarrow E_2$ es una trasformación recubridora para p_2, entonces $f^{-1} \circ \phi \circ f$ es una transformación recubridora para p_1. De hecho, la aplicación $h : G(E_2/X_2) \longrightarrow G(E_1/X_2)$ dada por $h(\phi) = f^{-1} \circ \phi \circ f$ es un isomorfismo de grupos.*

3. *p_1 es normal si y solo si p_2 es normal.*

Demostración. 1. Suponemos que p_2 es un recubrimiento. Sean $x_1 \in X_1$ elegimos $U_2 \subset X_2$ un abierto elemental para p_2 que contenga a $x_2 = g(x_1)$ y $U_1 = g^{-1}(U_2)$. Veamos que U_1 es elemental para p_1. Sea $p_2^{-1}(U_2) = \bigcup_{i\in I} V_i$ la descomposición en hojas de $p_2^{-1}(U_2)$. Se tiene que $p_1^{-1}(U_1) = p_1^{-1} \circ g^{-1}(U_2) = f^{-1} \circ p_2^{-1}(U_2) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$. Falta probar que cada $f^{-1}(V_i)$ es homeomorfo a U_1 por p_1. Por un lado, $p_1(f^{-1}(V_i)) = g^{-1}(p_2(V_i)) = g^{-1}(U_2) = U_1$. Por otro lado tenemos que $p_{1|f^{-1}(V_i)} = g^{-1} \circ p_2 \circ f_{|f^{-1}(V_i)} = g^{-1} \circ p_{2|V_i}$ que es homeomorfismo luego p_1 es un recubrimiento.

2. De la expresión $p_2 \circ f = g \circ p_1$ se siguen las igualdades $p_1 = g^{-1} \circ p_2 \circ f$ y $p_2 = g \circ p_1 \circ f^{-1}$. Ya que ϕ es una transformación recubridora para p_2 se tiene que $p_2 = p_2 \circ \phi$. Calculamos $p_1 = g^{-1} \circ p_2 \circ f = g^{-1} \circ (p_2 \circ \phi) \circ f = g^{-1} \circ g \circ p_1 \circ f^{-1} \circ \phi \circ f = p_1 \circ (f^{-1} \circ \phi \circ f)$. Por tanto, $(f^{-1} \circ \phi \circ f)$ es una transformación recubridora para p_1. Veamos ahora que h es un isomorfismo: sean ϕ_1 y ϕ_2 transformaciones recubridoras de p_2. Se tiene la igualdad $h(\phi_1) \circ h(\phi_2) = f^{-1} \circ \phi_1 \circ f \circ f^{-1} \circ \phi_2 \circ f = f^{-1} \circ \phi_1 \circ \phi_2 \circ f = h(\phi_1 \circ \phi_2)$. Además, h es una biyección, luego es un isomorfismo.

3. Suponemos que $p_2 : E_2 \longrightarrow X_2$ es un recubrimiento normal. Sean $x_1 \in X_1$ y $x_2 = g(x_1)$. Dados e_1, $\tilde{e}_1 \in p_1^{-1}(x_1)$, $e_2 = f(e_1)$ y $\tilde{e}_2 = f(\tilde{e}_1)$ se tiene que $e_2, \tilde{e}_2 \in p_2^{-1}(x_2)$ pues $p_2(e_2) = p_2 \circ f(e_1) = g \circ p_1(e_1) = g(x_1) = x_2$. Puesto que p_2 es un recubrimiento normal, por el teorema 3.21, existe $\phi \in G(E_2/X_2)$ tal que $\phi(e_2) = \tilde{e}_2$. Aplicando la propiedad 4.11(2) se deduce que $f^{-1} \circ \phi \circ f \in G(E_1/X_1)$, es decir, $f^{-1} \circ \phi \circ f \in p_1^{-1}(x_1)$. Por último, basta notar que $f^{-1} \circ \phi \circ f(e_1) = f^{-1} \circ \phi(e_2) = f^{-1}(\tilde{e}_2) = \tilde{e}_1$. Aplicando nuevamente la proposición 4.11 se tiene que $p_1 : E_1 \longrightarrow X_1$ es un recubrimiento normal. La otra implicación se deduce de forma simétrica.

□

Vamos a enunciar el teorema principal de esta sección que establece que todo subgrupo $G = G(E/X)$ es el grupo de transformaciones recubridoras asociado a un recubrimiento intermedio de p.

Teorema 4.12. *Sean $p : E \longrightarrow X$ un recubrimiento normal y $H \subset G = G(E/X)$ un subgrupo. Entonces existen recubrimientos $p_2 : E \longrightarrow Y$ y $p_1 : Y \longrightarrow X$ tal que $p = p_1 \circ p_2$ y $G(E/Y) = H$. En particular, H será normal en G si y solo si p_1 es normal, y en este caso, $G(Y/X) \cong G/H$.*

Demostración. Sea (f, Id) el isomorfismo de recubrimientos entre $p : E \longrightarrow X$ y $q : E \longrightarrow E/G$ descrito en el teorema 4.9. Por la proposición 4.11 podemos suponer $X = E/G$. La figura 4.7 esquematiza esta situación.

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[ddl, "p"'] \arrow[d, "p_2"] \arrow[ddr, "q"] & \\
& E/H \arrow[dl, "f^{-1}\circ p_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
X \arrow[rr, "f", "\sim"'] & & E/G
\end{tikzcd}$$

Figura 4.7: Diagrama conmutativo sobre el teorema 4.12.

Sean $Y = E/H$ y $p_2 : E \longrightarrow E/H$ la aplicación de paso al cociente. Del teorema 4.8 se deduce que p_2 es un recubrimiento normal con $G(E/(E/H)) = H$. Definimos $p_1 : E/H \longrightarrow E/G$ como $p_1(eH) = eG$. Esta aplicación está bien definida pues, si $e_1H = e_2H$, entonces $e_1G = e_2G$ ya que $H \subset G$. Además, $p(e) = eG$ y $p_1(p_2(e)) = p_1(eH) = eG$ luego $p = p_1 \circ p_2$. La continuidad de p_1 es consecuencia de la última igualdad y de la propiedad fundamental de la topología cociente.

Por último, por el teorema 4.5 se sabe que H es normal en G si y solo si p_1 es normal y, en este caso, $G((E/H)/(E/G)) \cong G/H$. □

4.3. Relación entre ambas correspondencias

Recordemos el objetivo principal de este capítulo: crear dos correspondencias entre los recubrimientos intermedios de un recubrimiento normal $p : E \longrightarrow X$ y los subgrupos de $G(E/X)$. En la sección anterior, dado un subgrupo H de G hemos construido un recubrimiento intermedio que tiene como grupo asociado a H, pero este recubrimiento no tiene por que ser único. En esta sección estudiaremos esto en mayor profundidad. Recordamos también que dado un recubrimiento intermedio le hemos asociado su grupo de transformaciones recubridoras H que es un subgrupo de $G(E/X)$ y nos podemos preguntar si estas asignaciones son inversas la una de la otra.

Por el teorema 4.12 ya sabemos que, si partimos de un subgrupo H de G, construimos el recubrimiento intermedio y luego calculamos su grupo asociado, obtendremos nuevamente H. Sin embargo, en el otro sentido no se recupera necesariamente el mismo recubrimiento intermedio, sino uno isomorfo, como se explica a continuación.

Teorema 4.13. *Sean $p_2 : E \longrightarrow Y$ y $\tilde{p}_2 : E \longrightarrow \tilde{Y}$ recubrimientos normales tales que $G = G(E/Y)$ y $\tilde{G} = G(E/\tilde{Y})$ coinciden. Entonces:*

1. *Existe un homeomorfismo $f : Y \longrightarrow \tilde{Y}$ tal que $f \circ p_2 = \tilde{p}_2$. (figura 4.8)*

2. *Si además existen dos recubrimientos $p_1 : Y \longrightarrow X$ y $\tilde{p}_1 : \tilde{Y} \longrightarrow X$ con $p = p_1 \circ p_2 = \tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2$, entonces $\tilde{p}_1 \circ f = p_1$. (figura 4.9)*

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "\tilde{p}_2"] & \\
Y \arrow[r, "g^{-1}"'] & E/H \arrow[r, "\tilde{g}"'] & \tilde{Y}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.8: Homeomorfismo entre Y e $\tilde{Y}$.

Demostración. 1. Sea $H = G = \tilde{G}$ y $q : E \longrightarrow E/H$ la aplicación de paso al cociente. En virtud del teorema 4.9, puesto que p y $\tilde{p}$ son recubrimientos normales, q induce dos homeomorfismos $g : E/H \longrightarrow Y$ y $\tilde{g} : E/H \longrightarrow \tilde{Y}$. Por tanto, $f = g^{-1} \circ \tilde{g} : Y \longrightarrow \tilde{Y}$ es el homeomorfismo buscado.

2. De las igualdades $p_1 \circ p_2 = \tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2$ y $\tilde{p}_2 = f \circ p_2$ se sigue que $p_1 \circ p_2 = \tilde{p}_1 \circ f \circ p_2$. Por tanto, $p_1 = \tilde{p}_1 \circ f$, dado que, como ya se comentó al principio del tema, si p_1 existe es único y queda determinado por p_2.

□

Definición 4.14. Un homeomorfismo f como en el teorema anterior se dice *isomorfismo de recubrimientos intermedios*. (Véase la figura 4.9).

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[drr, "\tilde{p}_2"] & & \\
& Y \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dl, "p_1"] & \tilde{Y} \arrow[dll, "\tilde{p}_1"] \\
X & &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.9: Isomorfismo de recubrimientos intermedios.

Un isomorfismo de recubrimientos intermedios es siempre un isomorfismo de recubrimientos. Más concretamente, en la situación definida en el teorema 4.13 el homeomorfismo f es un isomorfismo de recubrimientos entre $p_1 : Y \longrightarrow X$ y $\tilde{p}_1 : \tilde{Y} \longrightarrow X$.

Teorema 4.15. *Sean $p : E \longrightarrow X$ un recubrimiento normal, $p_2 : E \longrightarrow Y$, $p_1 : Y \longrightarrow X$, $\tilde{p}_2 : E \longrightarrow \tilde{Y}$ y $\tilde{p}_1 : \tilde{Y} \longrightarrow X$ recubrimientos con $p = p_1 \circ p_2 = \tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2$. Sean $H = G(E/Y)$ y $\tilde{H} = G(E/\tilde{Y})$. Entonces $H = \tilde{H}$ si y solo si existe un isomorfismo de recubrimientos $f : Y \longrightarrow \tilde{Y}$. Además f es único.*

Demostración. Si $H = \tilde{H}$ el teorema 4.13 garantiza la existencia de f. Por otro lado, supongamos que existe f, entonces, es isomorfismo de recubrimientos luego $H = \tilde{H}$.

Por último, probemos la unicidad. Sean f y $\tilde{f}$ dos homeomorfismos que cumplen lo anterior. Se tienen las igualdades $\tilde{p}_1 \circ f = p_1$ y $\tilde{p}_1 \circ \tilde{f} = p_1$ luego f y $\tilde{f}$ son dos elevaciones de p_1. Además, $f \circ p_2(e) = \tilde{p}_2(e)$ y $\tilde{f} \circ p_2(e) = \tilde{p}_2(e)$, por tanto, aplicando el teorema 2.9 se sigue que $f = \tilde{f}$. □

Se tiene, por lo tanto, el siguiente resumen de la situación:

Corolario 4.16. *Sea $p : E \longrightarrow X$ un recubrimiento normal, S el conjunto de subgrupos de $G(E/X)$ y Γ el conjunto de recubrimientos intermedios de p módulo isomorfismo. Existe una biyección $h : S \longrightarrow \Gamma$. Esta aplicación h actúa como sigue:*

- *Sea $H \in S$ y $q : E \longrightarrow E/H$ la aplicación de paso al cociente. Entonces $h(H) = [q]$.*
- *Sea $[p_2] \in \Gamma$. Si $H \in S$ es el grupo de transformaciones recubridoras de p_2 y por tanto de cualquier recubrimiento intermedio, $h^{-1}([p_2]) = H$.*

Por todo lo anterior, tenemos la siguiente analogía con la Teoría de Galois:

Los recubrimientos $p : E \longrightarrow X$ juegan el papel de extensión de cuerpos y los recubrimientos intermedios el de los cuerpos intermedios.

El grupo de transformaciones recubridoras juega el papel del grupo de Galois de la extensión.

No hay un concepto análogo al de separabilidad en recubrimientos, podríamos decir que todos los recubrimientos son separables.

El concepto de extensión normal se ve reflejado en el de recubrimiento normal. Recordamos que en una extensión normal el grupo de Galois actúa transitivamente sobre las raíces de los polinomios, de la misma forma, el grupo de transformaciones recubridoras de un recubrimiento actúa transitivamente sobre las fibras del mismo.

Finalmente, la biyección entre subgrupos y cuerpos intermedios tiene su análogo en el corolario 4.16.

Capítulo 5

Recubrimiento universal

El objetivo principal de este capítulo estudiar un caso particular de los recubrimientos: el recubrimiento universal de un espacio X. A lo largo de la segunda sección estudiaremos que este recubrimiento siempre existe y es único salvo isomorfismo. Además, cualquier otro recubrimiento sobre X será intermedio a este, lo que continúa la analogía con la Teoría de Galois, ya que un resultado similar ocurre para la clausura algebraica de un cuerpo.

5.1. Existencia del levantamiento de una aplicación

En la sección 2.1, exploramos resultados que asumían la existencia de la elevación de una función continua como hipótesis. Resulta natural preguntarse ahora sobre las condiciones en las que esta elevación existirá. Durante esta sección abordaremos esta cuestión proporcionando condiciones suficiente y necesarias para la existencia del levantamiento. Más adelante, la existencia del levantamiento nos permitirá demostrar resultados importante acerca del recubrimiento universal.

Teorema 5.1. *Sean* $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *un recubrimiento y* $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ *una aplicación continua. Existe el levantamiento* $\tilde{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (E, e_0)$ *si y solo si* $f_*(\Pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\Pi_1(E, e_0))$.

Demostración. En primer lugar, veamos que la condición es necesaria. Suponemos que existe la elevación $\tilde{f}$. Usando la proposición 1.17 se tiene que $p_* \circ \tilde{f}_* = (p \circ \tilde{f})_* = f_*$, es decir, el diagrama 5.1 es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} & \Pi_1(E, e_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \Pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, "\tilde{f}_*"] \arrow[r, "f_*"] & \Pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

Figura 5.1: Diagrama conmutativo de homomorfismos.

La contención del enunciado se debe a que $f_*(\Pi_1(Y,y_0)) = p_* \circ \tilde{f}_*(\Pi_1(Y,y_0)) \subset p_*(\Pi_1(E,e_0))$.

En segundo lugar, veamos que dicha contención es suficiente para garantizar la existencia del levantamiento. Dado cualquier $y \in Y$ daremos una expresión para $\tilde{f}(y)$. Se elige un camino σ de y_0 a y y se define $\tilde{f}(y) = (\widetilde{f \circ \sigma})_{e_0}(1)$. Es claro que $p \circ \tilde{f}(y) = p \circ (\widetilde{f \circ \sigma})_{e_0}(1) = f \circ \sigma(1) = f(y)$ y que, eligiendo $\sigma = c_{y_0}$, $\tilde{f}(y_0) = e_0$ luego si $\tilde{f}$ es una aplicación bien definida y continua será la elevación de f buscada.

Para que $\tilde{f}$ esté correctamente definida la expresión de $\tilde{f}(y)$ no debe depender del camino σ escogido. Probaremos que $\tilde{f}(y)$ no depende del camino σ. Sea τ otro camino en Y de y_0 a y. Buscamos demostrar la igualdad $(\widetilde{f \circ \tau})_{e_0}(1) = \tilde{f}(y)$. Consideramos el lazo $\sigma\tau^{-1}$ en y_0. De nuestra hipótesis de sigue que $[f \circ \sigma\tau^{-1}] \in f_*(\Pi_1(X,x_0)) \subset p_*(\Pi_1(E,e_0))$, por tanto, $f \circ (\sigma\tau^{-1})$ es la proyección por p de un lazo en e_0. Tenemos entonces que $(\widetilde{f \circ \sigma\tau^{-1}})_{e_0}$ es un lazo en e_0 y $(\widetilde{f \circ \sigma})_{e_0}(1) = \tilde{f}(y)$, por lo que $(\widetilde{f \circ \sigma\tau^{-1}})_{e_0} = (\widetilde{(f \circ \sigma)(f \circ \tau^{-1})})_{e_0} = (\widetilde{f \circ \sigma})_{e_0}(\widetilde{f \circ \tau^{-1}})_{\tilde{f}(y)}$ y se deduce que $(\widetilde{f \circ \tau^{-1}})_{\tilde{f}(y)}$ es un camino de $\tilde{f}(y)$ a e_0. Es decir, la elevación de $f \circ \tau^{-1}$ en $\tilde{f}(y)$ tiene punto final e_0. Por tanto, la elevación del camino inverso $f \circ \tau$ en e_0 es tiene punto final $\tilde{f}(y)$. Queda probado que $(\widetilde{f \circ \tau})_{e_0}(1) = \tilde{f}(y)$.

Vamos a probar además que $\tilde{f}(y)$ no depende del punto base y_0 escogido. Sea cualquier otro punto $y_1 \in Y$ distinto de y_0 veamos que este también puede actuar como punto base de la aplicación. En otras palabras, para $e_1 = \tilde{f}(y_1)$, $y \in Y$ y ω un camino cualquiera de y_1 a y vamos a demostrar que $\tilde{f}(y) = (\widetilde{f \circ \omega})_{e_1}(1)$. Tomando σ un camino de y_0 a y_1, se tiene $\tilde{f}(y) = (\widetilde{f \circ (\sigma\omega)})_{e_0}(1) = (\widetilde{(f \circ \sigma)(f \circ \omega)})_{e_0}(1) = (\widetilde{f \circ \sigma})_{e_0}(\widetilde{f \circ \omega})_{e_1}(1) = (\widetilde{f \circ \omega})_{e_1}(1)$.

Por último, veamos que $\tilde{f}$ es continua en cualquier punto $y_1 \in Y$. Sea $e_1 = \tilde{f}(y_1)$. Por lo visto en la demostración del resultado 3.17 sabemos que, para cada $V \in \mathcal{E}(\tilde{f}(y_1))$ abierto existe $\tilde{U}$ un abierto elemental en X tal que si $\tilde{S}$ es la hoja de $\tilde{U}$ que contiene a $\tilde{f}(y_1)$, entonces $\tilde{S} \subset V$. Puesto que X e Y son localmente conexos por caminos podemos elegir $U \subset \tilde{U}$ con $p(e_1) \in U$ de forma que U y $W = f^{-1}(U)$ sean conexos por caminos. Además, si S es la hoja sobre U que contiene a e_1 entonces $S \subset \tilde{S} \subset V$. Dado $y \in W$ construimos un camino τ en W de y_0 a y. Así, $f \circ \tau$ es un camino en U y $(\widetilde{f \circ \tau})_{e_1}$ es un camino en S. De esta forma, $\tilde{f}(y) = (\widetilde{f \circ \tau})_{e_1}(1) \in S \subset V$. Por tanto, $\tilde{f}(W) \subset V$, es decir, $W \subset \tilde{f}^{-1}(V)$. Como W es un abierto de Y se deduce que $\tilde{f}^{-1}(V) \in \mathcal{E}(y_1)$. $\square$

En el capítulo anterior introdujimos el concepto de isomorfismo de recubrimientos, ahora el teorema 5.1 nos permitirá dar condiciones suficientes y necesarias para la existencia de estos.

Proposición 5.2. *Sean $p_1 : (E_1,e_1) \longrightarrow (X,x_0)$ y $p_2 : (E_2,e_2) \longrightarrow (X,x_0)$ dos recubrimientos. Existe un isomorfismo de recubrimientos $\phi : (E_1,e_1) \longrightarrow (E_2,e_2)$ si y solo si $p_{1*}(\Pi_1(E_1,e_1)) = p_{2*}(\Pi_1(E_2,e_2))$.*

Demostración. Del teorema 5.1 se sigue que $p_{1*}(\Pi_1(E_1,e_1)) = p_{2*}(\Pi_1(E_2,e_2))$ si y solo si existen dos funciones continuas $\phi : (E_1,e_1) \longrightarrow (E_2,e_2)$ y $\tilde{\phi} : (E_2,e_2) \longrightarrow (E_1,e_1)$ que verifican que $p_1 = p_2 \circ \phi$ y $p_2 = p_1 \circ \tilde{\phi}$.

Suponemos que $p_{1*}(\Pi_1(E_1,e_1)) = p_{2*}(\Pi_1(E_2,e_2))$. Veamos que este ϕ es un isomorfismo de recubrimientos. De las igualdades anteriores se sigue que $p_1 = p_1\circ\tilde{\phi}\circ\phi$ y $p_2 = p_2\circ\phi\circ\tilde{\phi}$. Es decir, $\tilde{\phi}\circ\phi$ y $\phi\circ\tilde{\phi}$ son transformaciones recubridoras, respectivamente, de $p_1 : E_1 \longrightarrow X$ y $p_2 : E_2 \longrightarrow X$. Por último, $\tilde{\phi}\circ\phi(e_1) = e_1$ y $\phi\circ\tilde{\phi}(e_2) = e_2$ luego, por el lema 3.15, $\tilde{\phi}\circ\phi = Id_{E_1}$ y $\phi\circ\tilde{\phi} = Id_{E_2}$. Hemos visto que $\tilde{\phi} = \phi^{-1}$ y puesto que ϕ y $\tilde{\phi}$ son continuas se tiene que ϕ es un homeomorfismo. Es decir, si $p_{1*}(\Pi_1(E_1,e_1)) = p_{2*}(\Pi_1(E_2,e_2))$ entonces ϕ es un homeomorfismo, por tanto, un isomorfismo de recubrimientos.

Por otro lado, si existe el homeomorfismo $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ con $p_1 = \phi\circ p_2$ entonces se tiene que $\phi : (E_1,e_1) \longrightarrow (E_2,e_2)$ y $\phi^{-1} : (E_2,e_2) \longrightarrow (E_1,e_1)$ verifican que $p_1 = p_2\circ\phi$ y $p_2 = p_1\circ\phi^{-1}$, de donde se sigue la igualdad $p_{1*}(\Pi_1(E_1,e_1)) = p_{2*}(\Pi_1(E_2,e_2))$. □

Proposición 5.3. *Sean $p : (E,e_0) \longrightarrow (X,x_0)$ un recubrimiento y $e_1 \in p^{-1}(x_0)$. Existe un automorfismo $\phi \in G(E/X)$ tal que $\phi(e_0) = e_1$ si y solo si $p_*(\Pi_1(E,e_0)) = p_*(\Pi_1(E,e_1))$.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia directa de la proposición 5.2, un caso particular en el que $E = E_1 = E_2$. □

El resultado anterior generaliza el hecho de que si p es normal, $G(E/X)$ actúa transitivamente sobre $p^{-1}(x_0)$, dado que $p_*(\Pi_1(E,e_0))$ y $p_*(\Pi_1(E,e_1))$ son conjugados en $\Pi_1(X,x_0)$.

5.2. Recubrimiento universal

Un caso especialmente interesante del teorema 5.1 se da si el espacio Y es simplemente conexo, pues en esta situación, se garantiza la existencia del levantamiento de cualquier aplicación $f : Y \longrightarrow X$.

5.2.1. Definición y unicidad del recubrimiento universal

Corolario 5.4. *Sean $p : (E,e_0) \longrightarrow (X,x_0)$ un recubrimiento y $f : (Y,y_0) \longrightarrow (X,x_0)$ continua. Si Y es simplemente conexo, existe la elevación $\tilde{f} : (Y,y_0) \longrightarrow (E,e_0)$ de f.*

Demostración. Si Y es simplemente conexo entonces $f_*(\Pi_1(Y,y_0)) = f_*(\{[c_{y_0}]\}) = \{[f\circ c_{y_0}]\} = \{[c_{x_0}]\} \subset p_*(\Pi_1(E,e_0))$ pues $p_*(\Pi_1(E,e_0))$ es un subgrupo de $\Pi_1(X,x_0)$. □

El corolario anterior, pese a ser una consecuencia directa del teorema 5.1 resultará especialmente interesante. En el siguiente capítulo volveremos a este resultado para estudiar más profundamente sus consecuencias. Por ahora, veamos otro resultado sobre recubrimientos tales que el espacio recubridor es simplemente conexo.

Teorema 5.5. *Sean $p_1 : (E_1,e_1) \longrightarrow (X,x_0)$ y $p_2 : (E_2,e_2) \longrightarrow (X,x_0)$ dos recubrimientos. Si E_1 y E_2 son simplemente conexos entonces los recubrimientos son isomorfos.*

Demostración. Si E_1 y E_2 son simplemente conexos se tiene que $p_{1*}(\Pi_1(E_1, e_1)) = \{[c_{x_0}]\} = p_{2*}(\Pi_1(E_2, e_2))$. Aplicando la proposición 5.2 se tiene que existe un isomorfismo de recubrimientos $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ de $p_1 : (E_1, e_1) \longrightarrow (X, x_0)$ a $p_2 : (E_2, e_2) \longrightarrow (X, x_0)$. $\square$

Los resultados anteriores motivan la siguiente definición.

Definición 5.6. Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento con E simplemente conexo. Se dice que $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ es un recubrimiento universal.

Observación 5.7. Una vez expuesto el teorema 5.5 resulta evidente que un recubrimiento universal sobre X es único salvo isomorfismo de recubrimientos.

5.2.2. Existencia del recubrimiento universal

Nuestro propósito es establecer una condición suficiente y necesaria para que el recubrimiento universal exista. Para lograrlo, comenzaremos examinando una condición suficiente.

Teorema 5.8. *Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento universal. Si U es un abierto básico arco-conexo que contiene a x_0 e $i : U \longrightarrow X$ la inclusión, entonces $i_*(\Pi_1(U, x_0)) = \{1\}$.*

Demostración. Consideramos V la hoja sobre U que contiene a e_0 y $j : V \longrightarrow E$ la inclusión de V en E. Obviamente el diagrama 5.2 es conmutativo. Además, en virtud del resultado 1.17 la conmutatividad del diagrama 5.2 implica la conmutatividad del diagrama 5.3. Por último, la proposición 1.18 garantiza que $(p_{|V})_*$ es un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
(V, e_0) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p_{|V}"'] & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\
(U, x_0) \arrow[r, "i"] & (X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Figura 5.2: Diagrama conmutativo de funciones continuas.

$$\begin{tikzcd}
\Pi_1(V, e_0) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "(p_{|V})_*"'] & \Pi_1(E, e_0) = \{1\} \arrow[d, "p_*"] \\
\Pi_1(U, x_0) \arrow[r, "i_*"] & \Pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Figura 5.3: Diagrama conmutativo de homomorfismos inducidos.

Por hipótesis, $\Pi_1(E, e_0) = \{1\}$. Vamos a ver que i_* es un homomorfismo trivial, es decir, que envía todos los elementos de $\Pi_1(U, x_0)$ a $1 \in \Pi_1(X, x_0)$. Sea $[\sigma] \in \Pi_1(U, x_0)$. Por definición, σ es un camino en x_0 tal que $Im(\sigma) \subset U$. Sea $\tilde{\sigma}$ la elevación de σ con punto inicial en e_0 cuya imagen estará contenida en V. Por lo anterior, se tiene que $\sigma = p_{|V} \circ \tilde{\sigma}$, por tanto, $[\sigma] = (p_{|V})_*([\tilde{\sigma}])$.

De la igualdad $p_* \circ j_* = i_* \circ (p_{|V})_*$ se deduce que $i_*([\sigma]) = i_* \circ (p_{|V})_*([\tilde{\sigma}]) = p_* \circ j_*([\tilde{\sigma}]) = p_*(1) = 1$. Por tanto, $i_*(\Pi_1(U, x_0)) = \{1\}$.

$\square$

El teorema no garantiza que el grupo fundamental de U sea trivial, si no que lo es su imagen por i_* en $\Pi(X, x_0)$. En otras palabras, el resultado anterior asegura que todos los lazos en x_0 con soporte en U son homótopos al lazo c_{x_0} en X, pero no en U.

Hasta ahora, hemos visto una condición necesaria para garantizar la existencia del recubrimiento universal sobre X: si existe un recubrimiento universal, entonces para todo $x \in X$ existe un abierto básico U que lo contiene tal que $i_*(U) = \{1\}$. Esta condición motiva la siguiente definición.

Definición 5.9. Se dice que un espacio topológico X es *semi-localmente simplemente conexo* si cumple la siguiente propiedad: todo punto $x \in X$ posee un entorno U tal que el homomorfismo $i_* : \Pi_1(U, x) \longrightarrow \Pi_1(X, x)$ inducido por la inclusión de U en X es trivial. Llamaremos *abiertos trivializantes* a los abiertos de este tipo que además son conexos por caminos.

Por tanto, la condición de ser semi-localmente simplemente conexo es necesaria para que un espacio X admita un recubrimiento universal. Veamos ahora que esta condición también es suficiente.

Teorema 5.10. *Sea X un espacio topológico conexo y localmente conexo por caminos. Existe un recubrimiento universal de X si y solo si X es semi-localmente simplemente conexo.*

Demostración. Si existe el recubrimiento universal el teorema 5.8 garantiza que el espacio X es semi-localmente simplemente conexo. Recíprocamente, suponemos que X es conexo, localmente conexo y semi-localmente simplemente conexo. La demostración de que, bajo estas hipótesis, existe el recubrimiento universal de X consiste en construir este recubrimiento. Es decir, construir el espacio E simplemente conexo a partir del espacio X y una aplicación p de forma que $p : E \longrightarrow X$ sea un recubrimiento.

Empezamos por definir el espacio E. Fijamos un punto $x_0 \in X$. Sea $\sim$ la relación de homotopía relativa a $\{0, 1\}$ descrita en la definición 1.1. Definimos E como es el conjunto de las clases de equivalencia de los caminos en X con punto inicial x_0 por la relación $\sim$.

Demos ahora una definición para la aplicación $p : E \longrightarrow X$. Sea σ un camino en X tal que $\sigma(0) = x_0$ y denotamos por $\langle\sigma\rangle$ la clase de σ en E. Definimos $p(\langle\sigma\rangle) = \sigma(1)$. La aplicación p envía la clase de equivalencia de σ al punto final de este camino. De esta forma, para $x \in X$ todas las clases de caminos con final en x se proyectarán en x. Más adelante veremos que estas clases conformarán la fibra de x.

Ahora que tenemos definido el conjunto E vamos a dotarlo de una topología de forma que sea simplemente conexo. Para ello, daremos una base $\mathcal{B}$. Observamos que la topología de X tiene una base de abiertos trivializantes, por tanto, para cada punto de X existe un entorno trivializante.

Sean $\langle\sigma\rangle \in E$ y U un abierto de X trivializante que contiene a $\sigma(1)$. Se define

$$(\sigma, U) = \{\langle\sigma\beta\rangle \;\mid\; \beta \text{ es un camino en } U \text{ con } \beta(0) = \sigma(1)\}.$$

El conjunto anterior está conformado por las clases de equivalencia de los caminos obtenidos al concatenar σ con cualquier camino en U siempre que esto sea posible. De esta forma, cada elemento de (σ, U) se proyecta en un punto de U.

Definimos $\mathcal{B} = \{(\sigma, U) \mid \sigma$ es un camino en X con $\sigma(0) = x_0$ y U es un entorno trivializante de $\sigma(1)\}$. Vamos a ver que $\mathcal{B}$ es base de una topología en E.

Como paso previo, veamos que, dado $\langle\alpha\rangle \in (\sigma, U)$ se verifica la igualdad $(\alpha, U) = (\sigma, U)$. En efecto, sea $\langle\alpha\beta\rangle \in (\alpha, U)$, donde β es un camino en U con $\beta(1) = \alpha(0)$, se tiene que $\langle\alpha\rangle = \langle\sigma\beta'\rangle$ para cierto camino β' en U con $\beta'(0) = \sigma(1)$. Por tanto, $\langle\alpha\beta\rangle = \langle\sigma\beta'\beta\rangle$ donde $\beta'\beta$ es un camino en U con punto inicial $\sigma(1)$. De lo anterior se deduce que $\langle\alpha\beta\rangle \in (\sigma, U)$ para cualquier $\langle\alpha\beta\rangle \in (\alpha, U)$. Por otro lado, sea $\langle\sigma\beta\rangle \in (\sigma, U)$, probemos que $\langle\sigma\beta\rangle \in (\alpha, U)$. Sea $\beta' : I \longrightarrow U$ como antes. Notamos que $\alpha(1) = \sigma\beta'(1) = \beta'(1) = \beta'^{-1}(0)$. Se tiene que $\langle\sigma\beta\rangle = \langle\sigma\beta'\beta'^{-1}\beta\rangle = \langle\sigma\beta'\rangle\langle\beta'^{-1}\beta\rangle = \langle\alpha\rangle\langle\beta'^{-1}\beta\rangle = \langle\alpha(\beta'^{-1}\beta)\rangle$ donde $\beta'^{-1}\beta$ es un camino en V con $\beta'^{-1}\beta(0) = \alpha(1)$ luego $\langle\sigma\beta\rangle \in (\alpha, U)$.

Probemos ahora que $\mathcal{B}$ es base de una topología en E. La igualdad $E = \bigcup_{(\alpha,U)\in\mathcal{B}}(\alpha, U)$ es obvia pues $\langle\alpha\rangle = \langle\alpha c_{x_0}\rangle \in (\alpha, U)$ siendo U cualquier abierto trivializante que contiene a $x_0 = \alpha(1)$. Por otro lado, dados dos conjuntos (α, U) y $(\beta, V) \in \mathcal{B}$ veamos que $Y = (\alpha, U) \cap (\beta, V)$ es el vacío o es unión de elementos de $\mathcal{B}$. Supongamos que existe $\langle\gamma\rangle \in Y$. Como $\gamma(1) \in U \cap V$ sabemos que existe un abierto $W \subset U \cap V$ con $\gamma(1) \in W$. Tenemos que, por la observación anterior, $(\gamma, W) \subset (\gamma, U) = (\alpha, U)$ y $(\gamma, W) \subset (\gamma, V) = (\beta, V)$. Por tanto, $\langle\gamma\rangle \in (\gamma, W) \subset Y$, es decir, $Y = \bigcup_{\langle\gamma\rangle\in Y}(\gamma, W_\gamma)$ donde W_γ está construido como hemos hecho antes. Se deduce que existe una topología en E con base $\mathcal{B}$.

Antes de seguir vamos a probar dos afirmaciones que nos serán de utilidad:

(1) Sean $\langle\alpha\rangle \in E$ y U un entorno trivializante de $\alpha(1)$. Entonces $p_{|(\alpha,U)}$ es una biyección.

Veamos que si $\langle\alpha\rangle \in p^{-1}(x)$ entonces $p_{|(\alpha,U)} : (\alpha, U) \longrightarrow U$ es una biyección. En primer lugar, estudiemos la inyectividad de $p_{|(\alpha,U)}$. Sean $\langle\alpha\beta\rangle$ y $\langle\alpha\gamma\rangle$ dos puntos de (α, U) tal que $p(\langle\alpha\beta\rangle) = p(\langle\alpha\gamma\rangle)$, consideramos $y = p(\langle\alpha\beta\rangle)$. Se tiene que $\beta(0) = \gamma(0) = x$ y $\beta(1) = \gamma(1) = y$. Puesto que β y γ están contenidos en U y este es un abierto trivializante se sigue que $\beta \sim \gamma$ en X luego $\alpha\beta \sim \alpha\gamma$, es decir, $\langle\alpha\beta\rangle = \langle\alpha\gamma\rangle$. Queda probada la inyectividad de p. En segundo lugar, estudiamos su sobreyectividad. Sea $z \in U$ consideramos $\beta : I \longrightarrow U$ continua con $\beta(0) = x$ y $\beta(1) = z$. El punto $\langle\alpha\beta\rangle$ verifica que $p(\langle\alpha\beta\rangle) = z$ y $\langle\alpha\beta\rangle \in (\alpha, U)$.

(2) Sean U un abierto trivializante, $x \in U$ y $J = \{\langle\alpha\rangle \in E \mid \alpha(1) = x\} = p^{-1}(x)$. Entonces $p^{-1}(U) = \bigcup_{\langle\alpha\rangle\in J}(\alpha, U)$, y los abiertos $\{(\alpha, U) \mid \langle\alpha\rangle \in J\}$ son disjuntos dos a dos.

En primer lugar, veamos que la unión es disjunta razonando por reducción al absurdo. Sea $\beta \in (\alpha_i, U) \cap (\alpha_j, U)$ con $\langle\alpha_i\rangle \neq \langle\alpha_j\rangle$. Según hemos visto se tiene la igualdad $(\alpha_i, U) = (\beta, U) = (\alpha_j, U)$. Por tanto, existe un camino ρ en x contenido en U tal que $\langle\alpha_j\rangle = \langle\alpha_i\rho\rangle$ y, en particular, ρ es un lazo en X. Puesto que ρ está contenido en U y hemos elegido U trivializante se sabe que $\rho \sim c_x$. Se tiene $\langle\alpha_j\rangle = \langle\alpha_i\rho\rangle = \langle\alpha_i c_x\rangle = \langle\alpha_i\rangle$, por tanto, $\langle\alpha_i\rangle = \langle\alpha_j\rangle$ lo que contradice la hipótesis. Veamos ahora que, dado $\langle\beta\rangle \in p^{-1}(U)$, $\langle\beta\rangle \in \langle\alpha_i, U\rangle$

para cierto $\langle\alpha_i\rangle \in J$. Por definición, β es un camino en X de x_0 a $z \in U$. Sea μ un camino en U de z a x. Entonces $\beta\mu$ es un camino en X de x_0 a x luego $\langle\beta\mu\rangle \in J$ y puesto que $\langle\beta\mu\rangle \in (\beta, U)$, se deduce $\langle\beta\rangle \in (\beta\mu, U)$.

Para probar que p es un recubrimiento falta por tanto demostrar que es una aplicación continua y que $p_{|(\alpha,U)} : (\alpha, U) \longrightarrow U$ es homeomorfismo para todo $(\alpha, U) \in \mathcal{B}$. En primer lugar, sea W un abierto de X, para cada $x \in W$ consideramos U_x un abierto trivializante con $x \in U_x \subset W$. Hemos visto en el resultado anterior que $p^{-1}(U_x)$ es un abierto de E, luego $p^{-1}(W) = \bigcup_{x\in W} p^{-1}(U_x)$ es también abierto de E. Queda demostrado que p es una aplicación continua. Además, para cualquier abierto básico (β, V) de E se tiene que $p((\beta, V)) = V$ es un abierto de X luego p es abierta y, en particular, la aplicación $p_{|(\alpha,U)}$ es un homeomorfismo, ya que es biyectiva abierta y continua.

Para terminar, falta comprobar las propiedades topológicas de E. En primer lugar veamos que E es conexo por arcos. Sea $e_0 \in E$ la clase del camino constante c_{x_0}, $\langle\alpha\rangle \in E$ un punto cualquiera de E y $x = p(\langle\alpha\rangle) = \alpha(1)$. Vamos a construir un camino en E de e_0 a $\langle\alpha\rangle$. Definimos $\alpha_s : I \longrightarrow X$ como $\alpha_s(t) = \alpha(st)$, que es un camino en X de x_0 a $\alpha(s)$. Construimos ahora la aplicación $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow E$ dada por $\tilde{\alpha}(s) = \langle\alpha_s\rangle$.

Probemos que $\tilde{\alpha}$ es el camino buscado. En primer lugar, $\tilde{\alpha}(0) = \langle\alpha_0\rangle = \langle c_{x_0}\rangle = e_0$ y $\tilde{\alpha}(1) = \langle\alpha_1\rangle = \langle\alpha\rangle$. En segundo lugar, veamos que $\tilde{\alpha}$ es continua. Sea $s_0 \in I$ y $\tilde{U}$ un abierto de E tal que $\tilde{\alpha}(s_0) \in \tilde{U}$ buscamos un entorno abierto J de s_0 tal que $\tilde{\alpha}(J) \subset \widetilde{U}$. Existe entonces $(\alpha_{s_0}, U) \in \mathcal{B}$ con $(\alpha_{s_0}, U) \subset \widetilde{U}$. Por la continuidad de α existe un $\delta > 0$ tal que $\alpha(s) \in U$ para todo $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. Por tanto, para todo $s \in J = (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ se tiene que $\alpha_s(1) \in U$ luego $\tilde{\alpha}(s) = \langle\alpha_s\rangle \in (\alpha_{s_0}, U)$, es decir, $\tilde{\alpha}(J) \subset \tilde{U}$.

Comprobemos finalmente que E es simplemente conexo.

Puesto que p_* es un homomorfismo inyectivo, basta probar que $p_*(\Pi_1(E, e_0)) = \{1\}$. La proposición 3.7 asegura que $p_*(\Pi_1(E, e_0))$ es el estabilizador de e_0 para la acción de $\Pi_1(X, x_0)$ sobre $p^{-1}(x_0)$. Vamos a estudiar como actúa $\Pi_1(E, e_0)$ sobre la fibra en el contexto de esta demostración.

Sea $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$, $e_0 \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_{e_0}(1)$. En este caso, la elevación de α en e_0 es el camino $\tilde{\alpha}$ definido antes, pues $p(\tilde{\alpha}(s)) = p(\langle\alpha_s\rangle) = \alpha_s(1) = \alpha(s)$ y $\tilde{\alpha}(0) = \langle\alpha_0\rangle = e_0$. Por tanto, $e_0 \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_{e_0}(1) = \tilde{\alpha}(1) = \langle\alpha\rangle$. En el caso particular en el que $[\alpha] \in p_*(\Pi_1(E, e_0))$ se tiene que $\langle\alpha\rangle = e_0 \cdot [\alpha] = e_0 = \langle c_{x_0}\rangle$, por tanto, $[\alpha] = [c_{x_0}]$, es decir, $[\alpha] = 1$. Hemos probado que el estabilizador de e_0 es trivial, por tanto, también lo es $\Pi_1(E, e_0)$ y E es un espacio simplemente conexo que recubre a X mediante p. $\square$

La demostración anterior, que construye sobre X un recubrimiento universal $p : E \longrightarrow X$ se basa en la siguiente idea. Sea $p : (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un recubrimiento universal e $y \in E$. Existe un camino α de y a x_0 pues E es conexo por arcos. Además, por ser E simplemente conexo, cualquier otro camino σ de e_0 a y verifica que $[\sigma] = [\alpha]$, donde $[\sigma]$ y $[\alpha]$ son, respectivamente, las clases de homotopía relativa a $\{0, 1\}$ de σ y α. Por tanto, cada punto $y \in E$ se puede identificar con su clase $[\alpha]$. Consideramos ahora la función que envía al punto y en la clase $p_*([\alpha])$. En virtud la unicidad del levantamiento y la invarianza homotópica de los levantamientos de caminos se tiene que esta aplicación es una biyección. Todo lo anterior justifica identificar cada punto de E con una clase de homotopía relativa a $\{0,1\}$ de los caminos en X con origen en x_0.

5.3. Interés de la existencia del recubrimiento universal

En realidad, el interés de la existencia del recubrimiento universal va más allá de la analogía entre recubrimientos y Teoría de Galois. En esta sección nos centraremos solo en los resultados que nos permitan explicitar dicha correspondencia.

Reescribiendo el corolario 5.4 se tiene: sea $p : E \longrightarrow X$ es una aplicación continua con E simplemente conexo y $p_1 : Y \longrightarrow X$ un recubrimiento. Entonces existe una aplicación $p_2 : E \longrightarrow Y$ continua. Estudiamos ahora el caso particular en el que $p : E \longrightarrow X$ es un recubrimiento, por tanto, un recubrimiento universal. Del corolario 5.4 y la proposición 4.3 se deduce que la aplicación $p_2 : E \longrightarrow Y$ tal que $p = p_1 \circ p_2$ existe y es un recubrimiento. Es decir, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.11. *Si $p : E \longrightarrow X$ es universal, para todo recubrimiento $p_1 : Y \longrightarrow X$ existe un recubrimiento intermedio $p_2 : E \longrightarrow Y$ tal que $p = p_1 \circ p_2$.*

Teorema 5.12. *Si $p : E \longrightarrow X$ es un recubrimiento universal, entonces es normal y $G(E/X) \simeq \Pi_1(X, x_0)$.*

Demostración. Debido a que que E es simplemente conexo, se tiene que $p_*(\Pi_1(E, e_0)) = p_*(\{[c_{e_0}]\}) = \{[c_{x_0}]\}$ que es un subgrupo normal de $\Pi_1(X, x_0)$. La igualdad $G(E/X) \simeq \Pi_1(X, x_0)$ es una consecuencia directa del teorema 3.17. □

El resultado anterior es de gran interés pues permite calcular el grupo fundamental de un espacio X a través de su recubrimiento universal.

Ejemplo 5.13. Volvamos al ejemplo clásico 2.4 y calculemos el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ utilizando el teorema 5.12. Recordamos que el recubrimiento $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ estaba definido como $p(t) = e^{2\pi i t}$. Además, este recubrimiento es universal pues $\mathbb{R}$ es simplemente conexo.

Vamos a utilizar la aplicación p para calcular el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$. Sea ϕ un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se tiene que $\phi \in G(\mathbb{R}/\mathbb{S}^1)$ si y solo si $p(\phi(t)) = p(t)$. Es decir, si y solo si $e^{2\pi t\phi(t)} = e^{2\pi i t}$. En otras palabras, $\phi \in G(\mathbb{R}/\mathbb{S}^1)$ si y solo si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi(t) = t + m$. Marcaremos esta dependencia nombrando a ϕ como ϕ_m a partir de ahora. Es claro que la aplicación $h : G(\mathbb{R}/\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ dado por $h(\phi_m) = m$ es un isomorfismo entre ambos grupos. Por tanto, aplicando el teorema 5.12 y el isomorfismo anterior se tiene que $\Pi_1(\mathbb{S}^1, 0) \cong G(\mathbb{R}/\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

Finalmente, el teorema siguiente relaciona los recubrimientos universales con lo estudiado anteriormente y permite la clasificación de los recubrimientos sobre$X$ a través del estudio de su grupo fundamental:

Teorema 5.14 (**Teorema de clasificación de recubrimientos**). *Sea X es conexo, localmente conexo por caminos y semi-localmente simplemente conexo. Existe una biyección entre el conjunto de las clases de conjugación de los subgrupos de $\Pi_1(X, x_0)$ y el conjunto de clases de isomorfía de los recubrimientos sobre X.*

Demostración. Si $p : Y \longrightarrow X$ es un recubrimiento, se considera la clase de conjugación en $\Pi_1(X, x_0)$ de $p_*(\Pi_1(Y, y_0))$ que, en virtud del teorema 3.4, es $\phi(p) = \{p_*(\Pi_1(Y, y)) \ \mid \ y \in p^{-1}(x_0)\}$.

Si $p : Y \longrightarrow X$ y $\tilde{p} : \tilde{Y} \longrightarrow X$ son recubrimientos isomorfos, por la proposición 5.2 se tiene que $\phi(p) = \phi(\tilde{p})$. Por tanto, ϕ induce una aplicación del conjunto de clases de isomorfismo de los recubrimientos sobre X en el de clases de conjugación $\Pi_1(X, x_0)$.

Veamos que esta asignación es inyectiva. Sean $p : Y \longrightarrow X$ y $\tilde{p} : \tilde{Y} \longrightarrow X$ recubrimientos con $\phi(p) = \phi(\tilde{p})$. Eligiendo $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ e $\tilde{y}_0 \in \tilde{p}^{-1}(x_0)$ se tiene que $\tilde{p}_*(\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$ es conjugado a $p_*(\Pi_1(Y, y_0))$ y, de nuevo del teorema 3.4 se deduce que $\tilde{p}_*(\Pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)) = p_*(\Pi_1(Y, y))$ para algún $y \in p^{-1}(x_0)$. Entonces, por la proposición 5.2, p y $\tilde{p}$ son isomorfos.

Por último, estudiamos la sobreyectividad de ϕ. Sea $p : E \longrightarrow X$ universal. Dada una clase de conjugación de $\Pi_1(X, x_0)$ consideramos un representante $\tilde{H}$. Vamos a ver que existe un recubrimiento $p_1 : Y \longrightarrow X$ tal que $\phi(p_1) = [\tilde{H}]$. Para ello, recordamos que $G = G(E/X) \cong \Pi_1(X, x_0)$ a través del isomorfismo Ψ descrito en la nota 3.18. Sea $H = \Psi^{-1}(H)$, que es un subgrupo de G. Por el teorema 4.12 existen dos recubrimientos $p_1 : Y \longrightarrow X$ y $p_2 : E \longrightarrow Y$ tales que $p = p_1 \circ p_2$ y $G(E/Y) = H$. Aplicando ϕ a p_1 se tiene que $\phi(p_1) = \{(p_1)_*(\Pi_1(Y, y)) \ \mid \ y \in p^{-1}(x_0)\}$. Por último, por el teorema 4.4 $\tilde{H} = \Psi(H) = (p_1)_*(\Pi_1(Y, y_0))$ luego $\phi(p_1)$ coincide con la clase de conjugación de $\tilde{H}$. $\square$

Observación 5.15. Nótese que, en la biyección anterior, las clases de isomorfismo de recubrimientos normales se corresponden con los subgrupos normales de $\Pi_1(X, x_0)$.

Finalizamos el trabajo mencionando que, a parte de lo descrito en este capítulo, la existencia del recubrimiento universal tiene aplicaciones interesantes en varios campos como la teoría de grafos, las superficies de Riemann, y otros aspectos de la topología algebraica y de la geometría diferencial.

Bibliografía

[1] F. Delgado, C. Fuertes, and S. Xambó. *Introdución al Álgebra*. Universidad de Valladolid, 1998.

[2] M. J. Greenberg and J. R. Harper. *Algebraic topology: A first course*. Addison-Wesley, 1981.

[3] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2000.

[4] J. F. Humphreys. *A course in group theory*. Oxford University Press, 1996.

[5] C. Kosniowski. *Topología Algebraica*. Editorial Reverté, 1986.

[6] W. S. Massey. *Introducción a la topología algebraica*. Editoral Reverte, 1972.

[7] R. Mehta. Galois covers and the fundamental group. https://rmehtany.github.io/research/galoisgroups.pdf, 2019.

[8] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2nd edition, 2000.