Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Teoría de Representación de Grupos en el Aprendizaje Automático Cuántico Geométrico

Autor: Pablo Rey Valiente

Tutores: Fernando Gómez Cubillo, Juan José Álvarez Sánchez

Año: 2023

Índice general

Introducción

El “aprendizaje automático cuántico” (Quantum Machine Learning) es un área de investigación reciente que combina las teorías de información y computación cuánticas y de aprendizaje automático. El desarrollo de modelos que consideran las simetrías del sistema ha dado lugar al campo del “aprendizaje automático cuántico geométrico” (Geometric Quantum Machine Learning, GQML) [1]. En el programa GQML, la teoría de representación de grupos (cuyo origen se le atribuye al matemático alemán F.G Frobenius en torno al año 1896) ocupa un lugar central para manipular las simetrías subyacentes en la información y entender la relación entre estas simetrías y el proceso de aprendizaje cuántico.

El objetivo de este trabajo, que se coordina con el TFG en Ingeniería Informática de Servicios y Aplicaciones “Teoría de representación aplicada al Geometric Quantum Machine Learning”, es presentar una introducción a la teoría de representación de grupos desde la óptica del aprendizaje cuántico, guiada por ejemplos arquetípicos que involucran grupos discretos y continuos. Por lo tanto, este documento contiene la base teórica necesaria, realizando una introducción a los grupos de Lie matriciales, a sus álgebras de Lie y a la teoría de representación correspondiente.

En el primer capítulo introducimos algunos conceptos de la teoría general de grupos, grupos topológicos y grupos de Lie. A partir de la Sección 1.3 nos enfocamos específicamente en los grupos de Lie matriciales, que definiremos como subgrupos cerrados del grupo lineal general. De esta manera, también podemos abordar los grupos de Lie minimizando la cantidad de teoría de variedades necesaria, la cual no es primordial en este trabajo. Mostraremos entonces ejemplos importantes de grupos de Lie matriciales así como estudiaremos propiedades de algunos de ellos.

En el segundo capítulo comenzaremos estudiando la exponencial matricial. Esta será la base para definir el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada a un grupo de Lie matricial G y la relación entre ellos. Veremos que $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial. En general, es más cómodo trabajar con espacios vectoriales que con grupos, por lo que la idea es que cuando tengamos un problema de grupos de Lie lo pasemos a su álgebra de Lie, lo analicemos y lo devolvamos al grupo de Lie. Como estudiaremos en la Sección 2.3, la clave para moverse entre ambos es la aplicación exponencial, la cual es un difeomorfismo local entre $\mathfrak{g}$ y un entorno de la identidad I en G. Cerraremos este capítulo con dos resultados fundamentales. El primero de ellos, que de todo homomorfismo entre dos grupos de Lie matriciales se deriva un homomorfismo entre las álgebras de Lie asociadas a dichos grupos. El segundo resultado nos da la relación opuesta para grupos de Lie matriciales simplemente conexos.

Por último, en el Capítulo 3 introduciremos la teoría de representación para grupos de Lie matriciales que, de forma concisa, estudia cómo los grupos actúan sobre espacios vectoriales a través de transformaciones lineales. Mostraremos el Lema de Schur, el cual desempeña un papel fundamental en toda la teoría de representaciones y sus aplicaciones, al darnos información de los subespacios invariantes y por tanto del caracter irreducible de cada una de las representaciones del grupo. También veremos cómo, gracias a los dos últimos resultados del anterior capítulo, podemos relacionar las representaciones entre grupos y sus álgebras de Lie. Además, estudiaremos algunos ejempos, prestando especial atención en los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$. Serán de especial interés las representaciones unitarias y los grupos compactos, cuya teoría de representación es bien conocida y puede describirse en términos de las representaciones irreducibles.

Capítulo 1

El Grupo Lineal y sus Subgrupos

Continuando con lo comentado en la introducción, en la primera sección de este capítulo comenzaremos viendo algunos conceptos básicos sobre grupos, grupos topológicos, variedades y grupos de Lie. En la segunda sección introduciremos el grupo lineal general $GL(V)$ sobre espacios de dimensión finita y su estructura natural de grupo de Lie. También estudiaremos algunos subgrupos cerrados del grupo lineal general, también llamados grupos de Lie matriciales. En particular trataremos los subgrupos ortogonales, unitarios y especiales, y los tendremos en consideración a lo largo de todo el trabajo. Para cerrar este primer capítulo, trataremos las propiedades de conexión y conexión simple, que serán necesarias para resultados posteriores.

1.1. Conceptos previos

Comencemos desde lo más básico de este trabajo, hablando de la noción de grupo.

Definición 1.1. *Dado G un conjunto no vacío y $\cdot$ una operación binaria definida en G, $(G, \cdot)$ es un **grupo** si se cumple:*

1. *La operación $\cdot$ es una **operación interna**, es decir, toma dos elementos de G y los lleva a otro elemento también de G.*

2. *La operación toma la **propiedad asociativa**, es decir, dado tres elementos g,h y k en G se cumple que:*
$$(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$$

3. *G tiene un único elemento llamado **elemento neutro o identidad** denotado como e, con la siguiente propiedad: para todo g en G:*

$$e \cdot g = g \cdot e = g$$

4. *Todo elemento g en G tiene un* ***elemento inverso*** *en el mismo G, que se denota por g^{-1} y se lee 'inverso de g' con la propiedad de que:*

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$$

Sea un grupo (G,·), se dice que un subconjunto no vacío H de G es un **subgrupo** de G si la restricción de · a H cumple los axiomas de grupo. Además, decimos que un subgrupo H de G es **propio** si H es un subconjunto propio de G, es decir, H no es ni G ni el subgrupo trivial (el grupo formado por un solo elemento, el elemento neutro del grupo).

Observación 1.2. La operación no tiene por que ser conmutativa, es decir que $g{\cdot}h = h{\cdot}g$ no se cumple en principio. Si se cumpliera para todo g y h $g \cdot h = h \cdot g$ lo llamaríamos **grupo abeliano o conmutativo**.

Definición 1.3. *Dados dos grupos (G,·) y (H,+), un* ***homomorfismo de grupos*** *es una aplicación ϕ: $G \to H$ que verifica:*

$$\phi(g \cdot g') = \phi(g) + \phi(g) \textit{ para todo g,g' de G}$$

Se dice que el homomorfismo mantiene la estructura algebraica, y si la aplicación ϕ es una biyección, se dice que existe un **isomorfismo de grupos**.

Definición 1.4. *Un* ***grupo topológico*** *es un grupo equipado con una topología tal que las aplicaciones*

$$(x, y) \mapsto xy,\ G \times G \to G,$$

$$x \mapsto x^{-1},\ G \to G,$$

son continuas.

Observación 1.5. a) Las topologías de la Definición 1.4 son invariantes por la acción del grupo. Dichas topologías son Haussdorff (esto es, puntos disjuntos tienen entornos disjuntos) si y solo si $\{e\}$ (el elemento identidad) es cerrado.

b) Sea H un subgrupo del grupo topológico G. Si H es abierto entonces es también cerrado: si $g \notin H$, gH es un entorno de g contenido en H^c, luego H^c es abierto.

c) Sea G_0 la componente conexa de e (se suele llamar **componente de la identidad**). Entonces G_0 es un subgrupo normal de G. Recordemos que un subgrupo normal es un subgrupo invariante bajo conjugación (es decir, $gng^{-1} \in G_0$ para todo $n \in G_0$ y $g \in G$). Probémoslo: si $g \in G_0$, entonces $g^{-1}G_0$ es conexo y contiene a e, luego $g^{-1}G_0 \subset G_0$ y G_0 es un subgrupo de G. Además, si $g \in G$, entonces gG_0g^{-1} es conexo y contiene a e, luego $gG_0g^{-1} \subset G_0$, por tanto G_0 es un subgrupo normal.

El siguiente resultado afirma que un grupo topológico conexo está generado por cualquier entorno del elemento identidad.

Proposición 1.6. *Sea V un entorno conexo de e en el grupo topológico G, entonces*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n = G_0,$$

donde G_0 denota la componente de la identidad.

Demostración. Si V es un entorno de e, la unión creciente $U = \cup_{n=1}^{\infty} V^n$ es un conjunto abierto ya que V^{n+1} es un entorno de cada punto de V^n (ya que cada punto $v \in V^n$ se puede escribir como $ve \in V^{n+1}$). Si V es conexo, entonces U es conexo al ser la unión de conjuntos conexos y todos contienen a e. Luego $U \subset G_0$. Sea $W = V \cap V^{-1}$, entonces

$$U' = \bigcup_{n=1}^{\infty} W^n$$

es un subgrupo abierto de G, luego cerrado también. Como $U' \subset G_0$ ya que $U' \subset U$, entonces $U' = G_0$ y, por tanto, $U = G_0$. $\square$

Definición 1.7. *Un* ***homeomorfismo*** *es una función de un espacio topológico a otro que es biyectiva, continua y cuya inversa es continua. Diremos que los dos espacios son homeomorfos.*

Ahora hablaremos de los conceptos de variedad topológica y diferenciable. Aunque no entraremos mucho en detalle en este área, será necesario para tratar los grupos de Lie.

Definición 1.8. *Una* ***variedad topológica*** *M de dimensión n es un espacio topológico (asumimos que es Haussdorff y verifica el segundo axioma de numerabilidad) que es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Observación 1.9. Esto quiere decir que, para cada punto $m \in M$, existe un entorno U de m y una aplicación continua uno-a-uno φ de U en $\mathbb{R}^n$ sobre algun conjunto abierto $\varphi(U)$ en $\mathbb{R}^n$ tal que la aplicación inversa $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ es también continua. La aplicación φ determina funciones de coordenadas locales $x_1, ..., x_n$ donde cada x_k es la función continua de U en $\mathbb{R}$ dada por $x_k(m) = \varphi(m)_k$ (la componente k-ésima de $\varphi(m)$). El par (U, φ) se denomina sistema de coordenadas.

Definición 1.10. *Una* ***estructura diferenciable*** *$\mathcal{F}$ de clase C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ en una variedad topológica $\mathcal{M}$ es un conjunto de sistemas de coordenadas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ cumpliendo las siguientes tres propiedades:*

(a) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathcal{M}$.

(b) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ *es* C^k *para todo* $\alpha, \beta \in A$.

(c) El conjunto $\mathcal{F}$ *es maximal con respecto a (b); esto es, si* (U, φ) *es un sistema de coordenadas tal que* $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ *y* $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ *son* C^k *para todo* $\alpha \in A$*, entonces* $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

*Una **variedad diferenciable** de clase* C^k *es un par* $(M, \mathcal{F})$ *que consiste en una variedad topológica* M *junto con una estructura diferenciable* $\mathcal{F}$.

En lo que sigue consideraremos variedades diferenciables de clase C^∞. Denotaremos la variedad diferenciable $(M, \mathcal{F})$ simplemente por M.

Ejemplo 1.11. La estructura diferenciable estándar en el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ se obtiene tomando $\mathcal{F}$ como el conjunto maximal que contenga el par $(\mathbb{R}^n, i)$, donde $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la aplicación identidad.

Definición 1.12. *Sea* U *un abierto en una variedad diferenciable* M*. Decimos que* $f : U \to \mathbb{R}$ *es una función* C^∞ *en* U *si* $f \circ \varphi^{-1}$ *es* C^∞*, en el sentido usual, para cada función de coordenadas* φ *en* M.
Una función entre variedades diferenciables $\psi : M \to N$ *se dice que es **diferenciable de clase*** C^∞ *si* $g \circ \psi$ *es una función* C^∞ *(en el sentido usual) en* ψ^{-1}*(dominio de* g*) para todas las funciones* g *que son* C^∞ *de la forma anterior definidas en abiertos de* N.

Definición 1.13. *Un **difeomorfismo** es una aplicación diferenciable* C^∞ *entre variedades diferenciables, biyectiva y su inversa también es* C^∞.

Definición 1.14. *Una **subvariedad inmersa diferenciable** de dimensión* m *de una variedad en el espacio real de dimensión finita* $\mathbb{R}^n$ *es un subconjunto* M *con la siguiente propiedad: para cada* $x \in M$ *existe un entorno* U *de* 0 *en* $\mathbb{R}^n$*, un entorno* W *de* x *en* $\mathbb{R}^n$ *y un difeomorfismo* Φ *de* U *en* W *tal que*

$$\Phi(U \cap \mathbb{R}^m) = W \cap M.$$

Definición 1.15. *Un **grupo de Lie*** G *es una variedad diferenciable que también esta dotado de una estructura de grupo tal que la aplicación* $G \times G \to G$ *definida por* $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ *es* C^∞.

Dados dos grupos de Lie G *y* H*, **homomorfismo de grupos de Lie** entre* G *y* H *es un homomorfismo de grupos* $\Phi : G \to H$ *infinitamente diferenciable. Además hablaremos de **isomorfismo de grupos de Lie** cuando la aplicación sea biyectiva y con inversa continua.*

Ejemplo 1.16. El espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie real con la suma de vectores. Otro ejemplo sencillo es el espacio $\mathbb{C}^*$ (los números complejos menos el cero) que es un grupo de Lie con la multiplicación.
Un ejemplo muy simple e interesante de homomorfismo de grupos de Lie es el determi-

nante, el cual es un homomorfismo de $GL(n, \mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^*$. Otro ejemplo es la aplicación $\Phi : \mathbb{R} \to SO(2)$ dada por

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

la cual es claramente continua y mediante cálculo directo se comprueba que es un homomorfismo.

Observación 1.17. En particular, este trabajo se centra en los grupos de Lie matriciales, es decir, subgrupos del grupo lineal general que introduciremos en la siguiente sección.

1.2. El grupo GL(n)

Definición 1.18. *Dado un espacio vectorial V, el* ***grupo lineal general GL(V)*** *es el grupo formado por todos los isomorfismos de V sobre si mismo. Cuando el espacio vectorial es $V = \mathbb{F}^n$ donde $\mathbb{F}$ denota un cuerpo (como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) se escribe $GL(n, \mathbb{F})$ (o simplemente $GL(n)$ cuando el cuerpo está claro) y decimos que tiene grado n sobre el cuerpo.*

Como a lo largo de este trabajo vamos a servirnos de las matrices, pensaremos este grupo como el grupo de matrices invertibles $n \times n$ con las entradas en $\mathbb{F}$, con la multiplicación de matrices como operación de grupo (es obvio que el producto de dos matrices invertibles es invertible así como la inversa de una invertible). En concreto vamos a trabajar principalmente con $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$). Este grupo tendrá una gran importacia en la teoría de representaciones de grupos y en el estudio de las simetrías en espacios vectoriales como veremos más adelante.

Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma Euclídea $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ asociado al producto interno $(x|y) = x_1 y_1 + \cdots x_n y_n$, y en $M(n, \mathbb{R})$ la norma

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Recordemos que todas las normas son equivalentes en un espacio de dimensión finita. Notemos también que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Proposición 1.19. *EL grupo $GL(n, \mathbb{R})$ es abierto en $M(n, \mathbb{R})$. La inversa $g \mapsto g^{-1}$ de $GL(n, \mathbb{R})$ en sí mismo y la multiplicación son aplicaciones continuas.*

Demostración. Se puede probar esto con la fórmula de Cramer:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{g \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(g) \neq 0\}$$

$$\text{y} \quad g^{-1} = \frac{1}{\det g} g^*$$

si denotamos por g^* a la matriz de cofactores cuyos elementos son polinomios en las entradas de g. Que el producto es continuo es obvio ya que podemos escribir la multiplicación de matrices como entradas polinómicas, que son continuas. □

Corolario 1.20. *EL grupo $GL(n, \mathbb{R})$, junto con la topología heredada de M(n,$\mathbb{R}$), es un grupo topológico.*

Ya hemos visto que $GL(n, \mathbb{R})$ es un subconjunto abierto del espacio vectorial $M(n, \mathbb{R})$ (con las operaciones de adición y multiplicación que ya conocemos) y en consecuencia es una variedad con la estructura diferenciable heredada de $\mathbb{R}^{n^2}$ (la estructura estándar mostrada en el Ejemplo 1.11): Si identificamos de la forma obvia los puntos de $\mathbb{R}^{n^2}$ con las matrices reales $n \times n$, entonces el determinante se convierte en una función continua

$$\det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R},$$

y $GL(n, \mathbb{R})$ obtiene su estructura de variedad como el subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n^2}$ donde la función determinante es no nula. Es claro que la multiplicación $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ es diferenciable, y por la fórmula de Cramer vista anteriormente la aplicación inversa $GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ también. Por tanto podemos afirmar lo siguiente:

Teorema 1.21. *El grupo $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.*

1.3. Subgrupos de GL(n)

Definición 1.22. *Un **grupo de Lie matricial** (o grupo de Lie lineal) G es un subgrupo cerrado de GL(n,$\mathbb{C}$) (o GL(n,$\mathbb{R}$)), esto es, si $A_m \in G$ es una sucesión de matrices con $\lim_{m\to\infty} A_m = A \in GL(n, \mathbb{C})$, entonces $A \in G$.*

Los grupos de dimensión finita se comportarán bien para estudiar su teoría de representación como comprobaremos más adelante cuando veamos algunas de sus propiedades. La condición análoga a 'comportarse bien' para los grupos matriciales de Lie es la compacidad. Un grupo de Lie matricial es **compacto** si es un subconjunto cerrado y acotado del espacio vectorial de las matrices $n \times n$ $M_n(\mathbb{C})$ (o $M_n(\mathbb{R})$).

Ejemplo 1.23. Algunos ejemplos relevantes de subgrupos de $GL(n)$ sobre $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) son:

1. EL **grupo especial lineal** $SL(n)$:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det g = 1\}$$

Es un subgrupo cerrado de $GL(n, \mathbb{R})$, el cual es normal al ser el núcleo (conjunto de elementos cuya imagen es la identidad) del homomorfismo de grupos continuo

$$det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*.$$

2. EL **grupo ortogonal** $O(n)$ definido por:

$$O(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n, \; \|gx\| = \|x\|\}.$$

Se podría ver polarizando que esto es equivalente a decir que $g \in O(n)$ si o solo si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \; (gx|gy) = (x|y) \text{ , es decir, } \; g^T g = I, \text{ o } \; g^{-1} = g^T.$$

donde g^T denota la matriz traspuesta de g. Luego si $g \in O(n)$, $\det g = \pm 1$, ya que como bien sabemos el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta. Las columnas y filas de $g \in G$ son vectores unitarios ortogonales, y, como $\|g\| = 1$, $\|g^{-1}\| = 1$ se podría probar que el subgrupo $O(n)$ es un subgrupo compacto de $GL(n, \mathbb{R})$.

El **grupo especial ortogonal** $SO(n)$ es el subgrupo de matrices ortogonales con determinante igual a 1:

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}).$$

3. Como hemos mencionado anteriormente también podemos extener muchas nociones a $\mathbb{C}$ considerando el siguiente producto interno Hermitiano en $\mathbb{C}^n$:

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i.$$

El **grupo unitario** $U(n)$ es el subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ de matrices que preservan su producto interno. Esto es:

$$U(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid g^* g = I\}.$$

El **grupo especial unitario** $SU(n)$ es el grupo de matrices unitarias con determinante igual a 1.

1.4. Grupos conexos y simplemente conexos

Definición 1.24. *Un grupo de Lie matricial G se dice que es* ***conexo*** *si, dadas dos matrices cualesquiera $A, B \in G$, existe un camino continuo $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, en G con $\gamma(a) = A$ y $\gamma(b) = B$.*

Esta propiedad se llama **conexo por caminos** en topología, que no es lo mismo que conexo (en general, conexo por caminos implica conexo pero no al revés). Sin embargo, veremos (aunque no es obvio ahora mismo) que un grupo de Lie matricial es conexo si y solo si es conexo por caminos.

Un grupo de Lie matricial que no sea conexo se puede descomponer, de forma única, en la unión de varias piezas denomindas **componentes**, tal que dos elementos de la misma componente se pueden unir por un camino continuo, pero dos elementos de distintas componentes no.

Definición 1.25. *Un grupo de Lie matricial se dice que es* ***simplemente conexo*** *si es conexo y, además, todo lazo en G (es decir, un camino continuo $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, en G con $\gamma(0) = \gamma(1)$) puede reducirse continuamente a un punto de G.*

Más precisamente, asumamos que G es conexo. Entonces G es simplemente conexo si dado cualquier lazo γ en G, existe una función continua $\gamma(s,t)$, $0 \leq s,t \leq 1$, tomando valores en G y con las siguientes propiedades: (1) $\gamma(s,0) = \gamma(s,1)$ *para todo s,* (2) $\gamma(0,t) = \gamma(t)$, *y* (3) $\gamma(1,t) = \gamma(1,0)$ *para todo t.*

Uno puede pensar en $\gamma(t)$ como un lazo, y $\gamma(s,t)$ como una familia de lazos parametrizada por el valor s que reduce $\gamma(t)$ a un punto. La condición (1) dice que para cada valor s tenemos un lazo; la condición (2) dice que cuando $s = 0$ el lazo es el lazo específico $\gamma(t)$; y la condición (3) dice que cuando $s = 1$ nuestro lazo es un punto.

Proposición 1.26. *El grupo $SU(2)$ es simplemente conexo.*

Demostración. Es facil comprobar que

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Entonces podemos considerar el difeomorfismo que lleva esta matriz en el punto (α, β) de $\mathbb{C}^2$. Por tanto, $SU(2)$ puede pensarse como la esfera tridimensional S^3 contenida en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, y sabemos que S^3 es simplemente conexa. $\square$

El siguiente resultado no lo demostraremos pero nos será útil cuando veamos algún ejemplo que relacione los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$. Podemos encontrar una prueba en el Capítulo 1 del libro de Faraut [3].

Proposición 1.27. *El grupo $O(n)$ no es conexo y tiene dos componentes conexas:*

$$O(n)_+ = \{g \in O(n) \mid \det g = 1\} = SO(n),$$

$$O(n)_- = \{g \in O(n) \mid \det g = -1\}.$$

La condición de ser simplemente conexo es de gran importancia para nosotros puesto que será necesaria para un resultado fundamental que estudiaremos, el Teorema 2.33, gracias al cual podemos establecer correspondencias uno a uno entre grupos y álgebras de Lie.

Capítulo 2

Grupos y Álgebras de Lie Matriciales

En este capítulo veremos la relación existente entre un grupo de Lie matricial y su álgebra de Lie asociada (que definiremos en la Sección 2.2) y cómo podremos movernos entre ellos. Esto será fundamental para tratar los problemas a los que nos enfrentemos, debido a que los cálculos son más sencillos al nivel de las álgebras de Lie. La aplicación exponencial será el mecanismo para pasar la información entre los grupos y álgebras de Lie. De la aplicación exponencial también obtendremos resultados de gran relevancia, entre ellos, que un grupo de Lie matricial es una subvariedad de $M(n, \mathbb{R})$, o que el espacio tangente al grupo en la identidad es el álgebra de Lie asociada a dicho grupo.

Además, presentaremos la estructura de homomorfismo para álgebras de Lie, aparte de la que ya vimos para grupos de Lie en el Capítulo 1, y estudiaremos dos resultados fundamentales, los Teoremas 2.24 y 2.33. Aquí mostraremos como los homomorfismos entre grupos de Lie matriciales dan lugar de forma natural a aplicaciones entre sus álgebras de Lie asociadas (y el inverso se dará cuando tratemos grupos de Lie simplemente conexos). Para ello, será necesario exponer primero los conceptos de la aplicación adjunta y la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff.

2.1. La Exponencial de una Matriz

La primera definición fundamental que presentaremos es la de la función exponencial. A través del cálculo funcional, podemos extender las funciones exponenciales y logarítmicas como funciones que toman valores matriciales de una variable matricial.

Definición 2.1. *La **exponencial de una matriz** $X \in M(n, \mathbb{C})$ (o $M(n, \mathbb{R})$) se define* *como la suma de la serie:*

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

Observación 2.2. Como $\|X^k\| \leq \|X\|^k$, la serie converge normalmente para cada matriz X y uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $M(n,\mathbb{C})$.
Si X e Y conmutan, es decir, $XY = YX$ entonces $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$. De esto observamos que $\exp(X)$ es invertible y su inversa es $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.
También nos será de utilidad que, si C es invertible, entonces $\exp\big(CXC^{-1}\big) = C\exp(X)C^{-1}$ ya que $(CXC^{-1})^k = CX^kC^{-1}$.

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la aplicación exponencial es una apliación de $M(n,\mathbb{R})$ a $GL(n,\mathbb{R})_+$. Como es real en el ámbito analítico, es C^∞.

Teorema 2.3. *a) La diferencial de la aplicación exponencial en* 0 *es la identidad:*

$$(D\exp)_0 = I$$

b) Existe un entorno U *de* 0 *en* $M(n,\mathbb{R})$ *tal que la restricción de a* U *de la exponencial es un difeomorfismo de* U *en* $\exp U$*.*

Demostración. a) Podemos escribir

$$\exp X = I + X + R(X) \text{ , siendo } \; R(X) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

$$\text{y} \;\; \|R(X)\| = \|X\| \; \epsilon(X), \quad \lim_{X \longrightarrow 0} \epsilon(X) = 0. \;\; \text{Por tanto,} \;\; D(\exp)_0 = I + D(R)_0 = I$$

b) Esto se deduce automáticamente del Teorema de Inversión Local.

□

Ahora definiremos la inversa de la aplicación exponencial en un entorno de la identidad I. Sea $M \in M(n,\mathbb{R})$. Si $\|M\| < 1$ tenemos que

$$\|(I+M)^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k M^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|M\|^k = \frac{1}{1-\|M\|}.$$

Luego $I + M$ es invertible. Por tanto, la bola

$$B(I,1) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid \|X - I\| < 1\}$$

está contenida en $GL(n,\mathbb{R})$. Si $\|g - I\| < 1$, definimos el **logaritmo de la matriz** g por:

$$\log(g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(g-I)^k.$$

A continuación veremos algunos resultados relacionados con la exponencial y el logaritmo que nos serán de utilidad posteriormente.

Proposición 2.4. *Sean $X, Y \in M(n, \mathbb{R})$, se cumple que:*

(1) $\exp(tX)\exp(tY) = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\right)$

(2) $\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY) = \exp\left(t^2[X,Y] + O(t^3)\right)$

Demostración. Definamos $F(t) = \exp(tX)\exp(tY)$,

$$F(t) = \left(I + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + O(t^3)\right)\left(I + tY + \frac{t^2}{2}Y^2 + O(t^3)\right)$$

$$= I + t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3).$$

Para t suficientemente pequeño, $\|F(t) - I\| < 1$, y usando la serie de Taylor del logartimo natural de $F(t)$ alrededor de $t = 0$, tenemos:

$$\log F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2+2XY+Y^2) + O(t^3)\right)^n}{n}$$

$$= t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) - \frac{t^2}{2}(X+Y)^2 + O(t^3)$$

$$= t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)$$

Con lo que queda probado (1). Para probar (2) consideramos:

$$G(t) = \exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY)$$

$$= \left(I + t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3)\right)$$

$$\cdot\left(I - t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3)\right)$$

$$= I + t^2[X,Y] + O(t^3)$$

Y tomando $\log G(t)$ concluiríamos. □

Corolario 2.5. *Para $X, Y \in M(n, \mathbb{R})$,* *(1)* $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\exp\frac{X}{k}\exp\frac{Y}{k}\right)^k = \exp(X+Y)$

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\exp\frac{X}{k}\exp\frac{Y}{k}\exp-\frac{X}{k}\exp-\frac{Y}{k}\right)^{k^2} = \exp([X,Y])$

Demostración. Por la proposición anterior,

$$\exp\frac{X}{k}\exp\frac{Y}{k} = \exp\left(\frac{1}{k}(X+Y)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right),$$

$$\left(\exp\frac{X}{k}\exp\frac{Y}{k}\right)^k = \exp\left((X+Y)+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

y esto prueba (1), y de forma parecida probamos (2) de lo siguiente:

$$\left(\exp\frac{X}{k}\exp\frac{Y}{k}\exp-\frac{X}{k}\exp-\frac{Y}{k}\right)^{k^2} = \exp\left([X+Y]+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

□

Teorema 2.6 (Fórmula del producto de Lie). *Sea X e Y matrices complejas n por n. Entonces:*

$$e^{X+Y} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\right)^m.$$

Demostración. Si multiplicamos series de potencias de $e^{\frac{X}{m}}$ y $e^{\frac{X}{m}}$, todos menos tres de los términos tendrán $1/m^2$ o potencias más grandes que $1/m$. Luego,

$$e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}} = I+\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Ahora, como $e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}} \to I$ si $m\to\infty$, $e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}$ es el dominio del logaritmo para m suficientemente grande. Se cumple:

$$\log\left(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\right) = \log\left(I+\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)$$

$$= \frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O\left(\left\|\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\|^2\right) = \frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Exponenciando el logaritmo queda:

$$e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}} = \exp\left(\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)$$

y, elevando todo por m:

$$\left(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\right)^m = \exp\left(X+Y+O\left(\frac{1}{m}\right)\right).$$

Entonces, por continuidad de la exponencial, concluimos la fórmula del producto de Lie

$$\lim_{m\to\infty} \left(e^{\frac{X}{m}} e^{\frac{Y}{m}}\right)^m = \exp(X+Y).$$

$\square$

2.2. Álgebra de Lie de un grupo de Lie matricial

Un grupo de Lie matricial, como hemos definido anteriormente, es un subgrupo cerrado de $GL(n)$ y, a este le asociaremos su álgebra de Lie. De esta manera las propiedades del grupo son trasladadas en términos de propiedades de álgebra lineal en su álgebra de Lie, que es mucho más simple al tratarse (como veremos más adelante) de un espacio vectorial.

Definición 2.7. *Sea G un grupo topológico. Un* ***subgrupo uniparamétrico*** *de G es un homomorfismo continuo de grupos $\gamma : \mathbb{R} \to G$, con $\mathbb{R}$ equipado con la estructura de grupo aditivo.*

Teorema 2.8. *Sea $\gamma : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ un subgrupo uniparamétrico de $GL(n, \mathbb{R})$. Entonces γ es C^∞ y*

$$\gamma(t) = \exp(tA), \quad \textit{con } A = \gamma'(0).$$

Demostración. Primero asumiremos que γ es C^1. Entonces:

$$\gamma'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s} = \gamma(t) \lim_{s\to 0} \frac{\gamma(s) - \gamma(0)}{s} = \gamma(t)\gamma'(0)$$

Y denotando $A = \gamma'(0)$ tenemos $\gamma'(t) = A\gamma(t)$. La ecuación diferencial tiene una única solución γ tal que $\gamma(0) = I$, y está dada por:

$$\gamma(t) = \exp(tA).$$

Ahora veremos que γ sí es C^1, de hecho probaremos que es C^∞. Sea α una función C^∞ en $\mathbb{R}$ con soporte compacto, y consideramos la función regularizada f de γ formada por la convolución de esta y α:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t-s)\gamma(s)ds.$$

Entonces $f : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$ es C^∞, y

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s)\gamma(t-s)ds = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s)\gamma(-s)ds\right) \cdot \gamma(t) = B \cdot \gamma(t).$$

Eligiremos una función α tal que la matriz B denotada antes sea invertible. De esto tendremos que γ es C^∞. Si $\|B - I\| < 1$ entonces se cumple. Sea $\alpha \geq 0$, con integral igual a uno. Entonces

$$\|B - I\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s)\|\gamma(-s) - I\|ds.$$

Como γ es continua en 0, para cada $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que, si $|s| \leq \eta$, entonces $\|\gamma(s) - I\| \leq \epsilon$. Si es soporte de α esta contenido en $[-\eta, \eta]$, entonces $\|B - I\| \leq \epsilon$. □

Definición 2.9. *Sea G un grupo matricial de Lie y le asociamos el siguiente conjunto denominado* ***álgebra de Lie*** *asociada a G.*

$$\mathfrak{g} = Lie(G) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tX} \in G\}$$

Observación 2.10. Esto quiere decir que $X \in \mathfrak{g}$ si y solo si el subgrupo uniparamétrico generado por X esta en G. Notemos que, aunque G es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ (y no necesariamente de $GL(n, \mathbb{R})$, no exigimos que $e^{tX} \in G$ para todo número complejo t, pero solo para todos los múmeros t reales.

Teorema 2.11. *Sean G un grupo matricial de Lie y $\mathfrak{g}$ el conjunto anterior. Entonces:*

a) El conjunto $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial de $M(n, \mathbb{R})$.

b) Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces $[X, Y] := XY - YX \in \mathfrak{g}$.

Demostración. a) Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ significa que $\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tX), \exp(tY) \in G$, entonces:

$$\left(\exp \frac{t}{k}X\ \exp \frac{t}{k}X\right)^k \in G$$

y como por defición, G es cerrado, cuando $k \to \infty$ por el Corolario 2.5 se da que

$$\exp\left(t(X + Y)\right) \in G$$

por tanto, $X + Y \in G$. Además, el hecho de que es cerrado bajo la multiplicación por escalar es claro ya que $e^{t(sX)} = e^{(ts)X}$.

b) Análogamente, para $t > 0$,

$$\lim_{k \to \infty} \left(\exp \frac{\sqrt{t}}{k}X \exp \frac{\sqrt{t}}{k}Y \exp -\frac{\sqrt{t}}{k}X \exp -\frac{\sqrt{t}}{k}Y\right)^{k^2} = \exp(t[X, Y]) \in G$$

por lo tanto $[X, Y] \in \mathfrak{g}$.

□

Observación 2.12. Más generalmente, un álgebra de Lie es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) con un corchete de Lie $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisface los siguientes axiomas para todo $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g}$ y $a, b \in \mathbb{C}$:

1. Antisimetría: $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$

2. Bilinearidad: $[aX_1 + bX_2, X_3] = a[X_1, X_3] + b[X_2, X_3]$

3. Identidad de Jacobi: $[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0$

Las álgebras de Lie no son asociativas siempre, dándose $[[X_1, X_2], X_3] \neq [X_1, [X_2, X_3]]$. Diremos que dos elementos $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ **conmutan** si $[X_1, X_2] = 0$ y si todo par de elementos en $\mathfrak{g}$ conmutan diremos que $\mathfrak{g}$ es una Lie álgebra conmutativa.

Notemos que el espacio $M(n)$ da lugar a un álgebra de Lie cuando tomamos el corchete de Lie igual al conmutador, esto es, $[X, Y] = XY - YX$. Si $G \subset GL(n)$ es un grupo de Lie matricial, entonces $\mathfrak{g} = Lie(G)$ es una subálgebra de $M(n)$, el álgebra de Lie de G.

Observación 2.13. Si G es un grupo matricial de Lie, veremos más adelante en la Proposición 2.23 que su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se puede identificar con $T_I G$, el espacio tangente a la identidad $I \in G$ (o tambíen se suele hablar de espacio vectorial de derivadas direccionales), junto con el conmutador matricial. Equivalentemente, $\mathfrak{g}$ es el conjunto de todas las matrices X tales que el subgrupo uniparamétrico e^{tX} está en G para todo t real. Esto significa que podemos recuperar cualquier $X \in \mathfrak{g}$ si comenzamos con un subgrupo uniparamétrico $e^{tX} \subseteq G$ y tomamos derivadas en la identidad $I = e^0$:

$$X = \frac{d}{dt}(e^{tX})\Big|_{t=0}$$

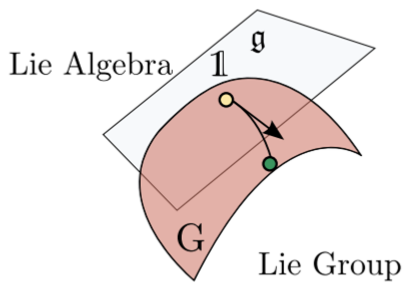

Figura 2.1: Grupo y álgebra de Lie, de [1]. $\mathbb{1} = I$ denota la identidad en G.

Definición 2.14. *Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ dos álgebras de Lie sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Un **homomorfismo de álgebras de Lie** de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{h}$ es una aplicacición lineal $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ que cumple:*

$$[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y]).$$

Si la aplicación es biyectiva, diremos que es un ***isomorfismo de álgebras de Lie****. Además, un isomorfismo de un álgebra de Lie en sí misma es un* ***automorfismo del álgebra de Lie****.*

Ejemplo 2.15. Mostremos ejemplos de algunos de los grupos vistos hasta ahora gracias a la ayuda de un truco para trabajar con el espacio tangente. Cualquier elemento de un grupo de Lie $g \in G$ cerca de $\mathbb{1}$ se puede expandir con Taylor: $g = \mathbb{1} + \epsilon X + O(\epsilon^2)$ con $X \in \mathfrak{g}$. Entonces las equaciones matriciales que definen el grupo de Lie G inducen ecuaciones que definen el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

1. Por ejemplo si G es un grupo unitario $g^* g = \mathbb{1}$ y entonces

$$\left(\mathbb{1} + \epsilon X + O(\epsilon^2)\right)^* \left(\mathbb{1} + \epsilon X + O(\epsilon^2)\right) = \mathbb{1}$$

   Igualando términos obtenemos que $X^* = -X$ por lo tanto:
   $Lie(U(n)) = \{X \in M(n) \mid X^* = -X\}$ (matrices antihermitianas) y se denota por $\mathfrak{u}(n)$.

2. El mismo argumento se podría usar para el grupo ortogonal y obtendríamos que: $Lie(O(n)) = \mathfrak{o}(n) = \{X \in M(n) \mid X^T = -X\}$ (matrices antisimétricas)

3. Como e^{tX} es invertible, $Lie(GL(n)) = \mathfrak{gl}(n) = M(n)$

4. Si añadimos la condición especial, es decir, $\det(g) = 1$, como $\det\left(e^{tX}\right) = e^{Tr[tX]}$, tendremos en la condición aparte de lo estudiado, que $Tr[X] = 0$.

5. Sea $G = SL(2, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ su álgebra de Lie. Las siguientes matrices constituyen unsa base de $\mathfrak{g}$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{y} \quad [H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H$$

2.3. La Aplicación Exponencial

En general, es más cómodo trabajar con espacios vectoriales que con grupos, por lo que la idea es que cuando tengamos un problema de grupos de Lie lo pasemos a su ágebra de Lie, lo analicemos y lo devolvamos al grupo de Lie. La clave para moverse entre las dos es la **aplicación exponencial**, la cual es un difeomorfismo local (aplicación infinitamente diferenciable y su inversa también) entre $\mathfrak{g}$ y G cerca de la identidad I en G. En esta sección, nos dedicaremos al estudio de este tema particular y exploraremos varios resultados de suma importancia que se derivan de él.

Recordemos primero la definición de subvariedad en un espacio vectorial real de dimensión finta. Una **subvariedad inmersa diferenciable** de dimensión m de una variedad en el espacio real de dimensión finita $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto M con la siguiente propiedad: para cada $x \in M$ existe un entorno U de 0 en $\mathbb{R}^n$, un entorno W de x en $\mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo Φ de U en W tal que

$$\Phi(U \cap \mathbb{R}^m) = W \cap M$$

Teorema 2.16. *Sea G un grupo de Lie matricial y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Existe un entorno U de 0 en $\mathfrak{g}$ y un entorno V de I en G tal que la aplicación*

$$\exp : U \to V$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Sea $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ un grupo de Lie matricial, y $\mathfrak{g} \subset M(n, \mathbb{R})$ su álgebra de Lie. Sea U_0 un entorno de 0 en $M(n, \mathbb{R})$ y V_0 un entorno de I en $GL(n, \mathbb{R})$, para el cual $\exp : U_0 \to V_0$ es un difeomorfismo. Esto lo sabemos por el Teorema 2.3 al ser $GL(n)$ el álgebra de Lie de $M(n)$. Entonces $U_0 \cap \mathfrak{g}$ es un entorno de 0 en $\mathfrak{g}$, la restricción de la aplicación exponencial a $U_0 \cap \mathfrak{g}$ es inyectiva y lleva $U_0 \cap \mathfrak{g}$ en $V_0 \cap G$. Sin embargo, todavía no podemos afirmar que G sea una subvariedad, es decir, queremos ver que $\exp(U_0 \cap \mathfrak{g}) = V_0 \cap G$.

Lema 2.17. *Sea (g_k) una sucesión de elementos de G que convergen a I. Asumimos que, para todo k, $g_k \neq I$. Entonces los puntos de acumulación de la sucesión*

$$X_k = \frac{\log g_k}{\|\log g_k\|}$$

pertenecen a $\mathfrak{g}$.

Demostración. Asumiremos que $\lim\limits_{k \to \infty} X_k = X \in M(n, \mathbb{R})$. Sea $Y_k = \log g_k$ y para $t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_k = \frac{t}{\|logg_k\|}, \quad \text{entonces: } \exp(tX) = \lim_{k \to \infty} \exp(\lambda_k Y_k).$$

Denotemos por $[\lambda_k]$ la parte entera de λ_k. Entonces podemos escribir

$$\exp(\lambda_k Y_k) = \exp(Y_k)^{[\lambda_k]} \exp\left((\lambda_k - [\lambda_k])Y_k\right),$$

$$\text{y} \quad \|(\lambda_k - [\lambda_k])Y_k\| \leq \|Y_k\| \to 0.$$

Por tanto, como $\exp Y_k = g_k$, tenemos que $X \in \mathfrak{g}$ ya que

$$\exp(tX) = \lim_{k \to \infty} (g_k)^{[\lambda_k]}$$

□

Lema 2.18. *Sea* $\mathfrak{m}$ *un subespacio de* $M(n,\mathbb{R})$*, complementario a* $\mathfrak{g}$*. Entonces existe un entorno* U *de* 0 *en* $\mathfrak{m}$ *tal que* $\exp U \cap G = \{I\}$

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces existe una sucesión $X_k \in \mathfrak{m}$ con límite 0 tal que:

$$g_k = \exp X_k, \quad g_k \neq I, \quad g_k \in G.$$

Sea Y un punto de acumulación de la sucesión $X_k/\|X_k\|$. Por el Lema 2.17, $Y \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}$, pero esto es imposible ya que $\|Y\| = 1$. □

Lema 2.19. *Sean* E *y* F *dos subespacios complementarios en* $M(n,\mathbb{R})$*. Entonces la aplicación*

$$\Phi : E \times F \to GL(n,\mathbb{R}),$$

$$(X,Y) \mapsto \exp X \exp Y$$

es diferenciable, y

$$D\Phi_{(0,0)}(X,Y) = X + Y.$$

Demostración. Dado que $\exp(X)$ y $\exp(Y)$ son funciones diferenciables en sus respectivos subespacios de $M(n,\mathbb{R})$, podemos afirmar que su producto, además de ser invertible, también lo es. Podemos identificar $M(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, luego vemos Φ como una aplicación de $\mathbb{R}^{n^2}$ en sí mismo. Sabemos por las propiedades de la matriz exponencial que

$$\frac{d}{dt}\Phi(tX,0)\Big|_{t=0} = X, \qquad \frac{d}{dt}\Phi(0,tY)\Big|_{t=0} = Y.$$

De donde se deduce el resultado por la regla del producto. □

Una vez vistos estos resultados previos podemos finalizar la prueba del Teorema 2.16. Sea $\mathfrak{m}$ un subespacio de $M(n,\mathbb{R})$ complementario a $\mathfrak{g}$, y consideramos la aplicación:

$$\Phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{m} \to GL(n,\mathbb{R}),$$

$$(X,Y) \mapsto \exp X \exp Y.$$

Existe un entorno U de 0 en $\mathfrak{g}$, un entorno V de 0 en $\mathfrak{m}$, y un entorno W de I en $GL(n,\mathbb{R})$ tal que la restricción de Φ a $U \times V$ es un difeomorfismo sobre W. Observemos que

$$\exp U = \Phi(U \times \{0\}) \subset W \cap G.$$

Por el Lema 2.18 el entorno V puede ser elegido tal que $\exp V \cap G = \{I\}$. Veamos ahora que $\exp U = W \cap G$. Sea $g \in W \cap G$, podemos escribir $g = \exp X \exp Y$, con

$X \in U, Y \in V$, luego tenemos:

$$\exp Y = \exp(-X)g \in \exp V \cap G = \{I\},$$

por tanto, $g = \exp X$. $\square$

Corolario 2.20. *Si G es un grupo de Lie matricial conexo entonces todo elemento $A \in G$ se puede escribir de la forma*

$$A = e^{X_1} e^{X_2} \cdots e^{X_m}$$

para algunos elementos $X_1, X_2, ..., X_m \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Como G es conexo, podemos encontrar un camino continuo $\gamma(t)$ en G con $\gamma(0) = I$ y $\gamma(1) = A$. Sea V un entorno de I en G como en el Teorema 2.16, luego cada elemento de V es la exponencial de un elemento de $\mathfrak{g}$. Un argumento estándar usando la compacidad del intervalo $[0, 1]$ muestra que podemos tomar una serie de números $t_0, ..., t_m$ con $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ tales que

$$\gamma_{t_{k-1}}^{-1} \gamma_{t_k} \in V$$

para todo $k = 1, , , m$. Entonces,

$$A = (\gamma_{t_0}^{-1} \gamma_{t_1})(\gamma_{t_1}^{-1} \gamma_{t_2}) \cdots (\gamma_{t_{m-1}}^{-1} \gamma_{t_m}).$$

Si elegimos $X_k \in \mathfrak{g}$ con $\exp X_k = \gamma_{t_{k-1}}^{-1} \gamma_{t_k}$ $(k = 1, , , m)$, tenemos que:

$$A = e^{X_1} e^{X_2} \cdots e^{X_m}.$$

$\square$

Ahora veremos que efectivamente un grupo de Lie matricial G es una subvariedad. Esto además implica que un grupo de Lie matricial es necesariamente localmente conexo por caminos. Se deduce entonces que G es conexo (en el sentido topológico habitual) si y solo si es conexo por caminos. Nuestra definición por lo tanto en la Sección 1.4 es equivalente a la usual.

Corolario 2.21. *Un grupo de Lie matricial $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ es una subvariedad de $M(n, \mathbb{R})$ de dimensión $m = \dim \mathfrak{g}$.*

Demostración. Sea $g \in G$ y sea $L(g)$ la aplicación

$$L(g) : GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R}),$$

$$h \mapsto gh.$$

Sea U un entorno de 0 en $M(n,\mathbb{R})$ y W_0 un entorno de I en $GL(n,\mathbb{R})$ tal que la aplicación exponencial es un difeomorfismo de U en W_0 que lleva $U\cap\mathfrak{g}$ sobre $W_0\cap G$. La aplicación compuesta $\Phi = L(g)\circ\exp$ lleva U en $W = gW_0$, y $U\cap\mathfrak{g}$ en $W\cap G$. □

Otra consecuencia importante del Teorema 2.16 es que el conjunto $\exp\mathfrak{g}$ es un entorno de I en G, luego genera la componente de la identidad G_0 de G por la Proposición 1.6:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(\exp\mathfrak{g})^k = G_0.$$

Corolario 2.22. *Si dos subgrupos cerrados G_1 y G_2 de $GL(n,\mathbb{R})$ tienen la misma álgebra de Lie, entonces las componentes de la identidad de G_1 y G_2 son iguales.*

Una vez visto que un grupo de Lie matricial es una subvariedad, probemos la relación mencionada anteriormente entre el espacio tangente y su álgebra de Lie. Recordemos que dado una subvariedad V de $\mathbb{R}^N$, y un punto $x_0\in V$. Un vector tangente X en x_0 puede escribirse

$$X = \gamma'(t_0),$$

donde γ es una curva C^1 en V tal que $\gamma(t_0)=x_0$. Los vectores tangentes en x_0 forman un espacio vectorial en en $\mathbb{R}^N$ el cual llamamos espacio vectorial tangente de V en x_0 y se denota por $T_{x_0}(V)$.

Sean ahora V y W dos subvariedades en $\mathbb{R}^N$, y φ una aplicación diferencial de V en W. La imagen bajo φ de γ, una curva C^1, dibujada en V a través de x_0 es una curva $\varphi\circ\gamma$ que está en W pasando por $y_0=\varphi(x_0)$ y ,

$$\frac{d}{dt}\varphi\circ\gamma(t)\Big|_{t=t_0} = D\varphi_{x_0}\left(\gamma'(t_0)\right).$$

Si V y W tienen la misma dimensión y φ es un difeomorfismo, entonces la diferencial $(D\varphi)_x$ de φ en cada punto $x\in V$ es un isomorfismo de $T_x(V)$ en $T_y(W)$, donde $y=\varphi(x)$. Si V y W tienen la misma dimensión y, para cada $x\in V$, la diferencial $(D\varphi)_x$ es un isomorfismo, entonces (V,φ) es un recubrimiento de W.

Proposición 2.23. *El espacio tangente a G en el elemento identidad $e=I$ es el álgebra de Lie $\mathfrak{g}=Lie(G)$ de G.*

Demostración.

1. Sea $X\in\mathfrak{g}$. Entonces $\gamma(t)=\exp tX$ es una curva en G que pasa por e para $t=0$, y $\gamma'(0)=X$, luego $X\in T_e(G)$ y $\mathfrak{g}\subset T_e(G)$.

2. Por el contrario sea $\gamma(t)$ una curva en G que pasa por e en $t=t_0$. Para t cerca de t_0, $X(t)=\log\gamma(t)$ está bien definido y $t\mapsto X(t)$ es una curva en $\mathfrak{g}$. Ádemás,

$$\gamma'(t_0) = (D\exp)_0\left(X'(t_0)\right).$$

Como $(D\exp)_0 = Id$, $\gamma'(t_0) = X'(t_0) \in \mathfrak{g}$. Y esto prueba que $T_e(G) \subset \mathfrak{g}$.

$\square$

2.4. Homomorfismos de Grupos y Álgebras de Lie

2.4.1. Aplicación Asociada a un Homomorfismo de Grupos de Lie

El siguiente teorema es un resultado fundamental. Nos muestra que un homomorfismo de grupos de Lie entre dos grupos de Lie matriciales da lugar de forma natural a una aplicación entre las correspondientes álgebras de Lie. En particular, nos dice que dos grupos de Lie matriciales isomorfos tendrán las "mismas" álgebras de Lie. Veremos más adelante que el inverso es cierto bajo ciertas circuntancias, específicamente necesitaremos que G sea simplemente conexo.

Teorema 2.24. *Sean G y H grupos matriciales de Lie, con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, respectivamente. Supongamos que $\Phi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces, existe una única aplicación real $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que*

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$$

para cada $X \in \mathfrak{g}$. La aplicación ϕ tiene la siguientes propiedades también:

1. $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$, *para cada* $X \in \mathfrak{g}, A \in G$.

2. $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$, *para cada* $X, Y \in \mathfrak{g}$.

3. $\phi(X) = \frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})\Big|_{t=0}$, *para cada* $X \in \mathfrak{g}$.

Supongamos que G, H Y K son grupos de Lie matriciales y $\Phi : H \to K$ y $\Psi : G \to H$ son homomorfismos de grupos de Lie. Sea $\Lambda : G \to K$ la composición de Φ y Ψ, $\Lambda(A) = \Phi(\Psi(A))$. Sean ϕ, ψ y λ las aplicaciones de las álgebras de Lie asociadas. Entonces:

$$\lambda(X) = \phi(\psi(X)).$$

Demostración. Como Φ es un homomorfismo continuo de grupos, $\Phi(e^{tX})$ será un subgrupo uniparamétrico de H, para cada $X \in \mathfrak{g}$. Luego, por el Teorema 2.8, existe una única matriz Z tal que

$$\Phi(e^{tX}) = e^{tZ} \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Está matriz Z debe estar en $\mathfrak{h}$ ya que $e^{tZ} = \Phi(e^{tX}) \in H$. Ahora definimos $\phi(X) = Z$ y comprobaremos en varios pasos que ϕ cumple las propiedades pedidas.

Paso 1: $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$.
Esto se tiene de (2.1) y nuestra definición de ϕ poniendo $t = 1$.

Paso 2: $\phi(sX) = s\phi(X)$ para cada $s \in \mathbb{R}$.
Esto es inmediato, ya que si $\Phi(e^{tX}) = e^{tZ}$, entonces $\Phi(e^{tsX}) = e^{tsZ}$.

Paso 3: $\phi(X + Y) = \phi(X) + \phi(Y)$.
Por los Pasos 1 y 2:

$$e^{t\phi(X+Y)} = e^{\phi[t(X+Y)]} = \Phi\left(e^{t(X+Y)}\right).$$

Por la fórmula del producto de Lie y el hecho de que Φ es un homomorfismo continuo, tenemos

$$e^{t\phi(X+Y)} = \Phi\left(\lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{tX}{m}}e^{\frac{tY}{m}}\right)^m\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\Phi\left(e^{\frac{tX}{m}}\right)\Phi\left(e^{\frac{tY}{m}}\right)\right)^m.$$

Sin embargo, tenemos que:

$$e^{t\phi(X+Y)} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{t\phi(X)}{m}}e^{\frac{t\phi(Y)}{m}}\right)^m = e^{t(\phi(X)+\phi(Y))}.$$

Diferenciando esto en $t = 0$ tenemos el resultado.

Paso 4: $\phi(AXA^{-1}) = \phi(A)\phi(X)\phi(A)^{-1}$.
Por los Pasos 1 y 2:

$$\exp t\phi(AXA^{-1}) = \exp\phi(tAXA^{-1}) = \Phi(\exp tAXA^{-1}) = \Phi(Ae^{tX}A^{-1})$$

$$= \Phi(A)\Phi(e^{tX})\Phi(A)^{-1} = \Phi(A)e^{t\phi(X)}\Phi(A)^{-1}.$$

Y diferenciando esto en $t = 0$ obtenemos lo buscado.

Paso 5: $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$.

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}\Big|_{t=0}.$$

Luego, usando que la derivada conmuta con una transformación lineal nos queda:

$$\phi([X, Y]) = \phi\left(\frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}\Big|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}\phi(e^{tX}Ye^{-tX})\Big|_{t=0}.$$

Por último, por el Paso 4,

$$\phi([X, Y]) = \frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})\phi(Y)\Phi(e^{-tX})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{t\phi(X)}\phi(Y)e^{-t\phi(X)}\Big|_{t=0} = [\phi(X), \phi(Y)].$$

Paso 6: $\phi(X) = \frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})\Big|_{t=0}$.
Esto es claro de (2.1) y de nuestra definición de ϕ.

Paso 7: *ϕ es la única aplicación lineal tal que $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$.*

Supongamos que ψ es otra aplicación que cumple esto. Entonces:

$$e^{t\psi(X)} = e^{\psi(tX)} = \Phi(tX), \quad \text{luego} \quad \psi(X) = \frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})\Big|_{t=0}.$$

Entonces por el Paso 6 tenemos que ψ coincide con ϕ.

Paso 8: $\lambda = \phi \circ \psi$.

Para cualquier $X \in \mathfrak{g}$,

$$\Lambda(e^{tX}) = \Phi(\Psi(e^{tX})) = \Phi(e^{t\psi(X)}) = e^{t\phi(\psi(X))}.$$

Por tanto, $\lambda(X) = \phi(\psi(X))$.

□

Observación 2.25. En la práctica, dado un homomorfismo de grupos de Lie Φ, la forma de calcular ϕ es usando la Propiedad 3, y, al ser ϕ lineal y real, será suficiente con calcular ϕ en una base de $\mathfrak{g}$. En el ámbito de las variedades diferenciables, la Propiedad 3 dice que ϕ es la diferencial de Φ en la identidad (véase la Proposición 2.23).

Corolario 2.26. *Supongamos que G es grupo de Lie matricial conexo, H es un grupo de Lie matricial, y Φ_1 y Φ_2 son homomorfismos de grupos de Lie de G en H. Sean ϕ_1 y ϕ_2 los homomorfimos de álgebras de Lie asociados. Si $\phi_1 = \phi_2$, entonces $\Phi_1 = \Phi_2$.*

Demostración. Sea $g \in G$. Como G es conexo, el Corolario 2.20 nos dice que g se puede escribir como $g = e^{X_1}e^{X_2}\cdots e^{X_n}$, con $X_i \in \mathfrak{g}$. Entonces,

$$\Phi_1(g) = \Phi_1(e^{X_1})\cdots\Phi_1(e^{X_n}) = e^{\phi_1(X_1)}\cdots e^{\phi_1(X_n)}$$

$$= e^{\phi_2(X_1)}\cdots e^{\phi_2(X_n)} = \Phi_2(e^{X_1})\cdots\Phi_2(e^{X_n}) = \Phi_2(g).$$

□

2.4.2. La Aplicación Adjunta

Definición 2.27 (La Aplicación Adjunta). *Sea G un grupo de Lie matricial con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces, para cada $A \in G$, definimos una aplicación lineal $\mathrm{Ad}_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ por la fórmula:*

$$\mathrm{Ad}_A(X) = AXA^{-1}.$$

Proposición 2.28. *Sea G un grupo de Lie matricial y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Sea $GL(\mathfrak{g})$ el grupo de todas las transformaciones lineales invertibles de $\mathfrak{g}$. Entonces, para cada $A \in G$, Ad_A es una transformación lineal invertible de $\mathfrak{g}$ con inversa $\mathrm{Ad}_{A^{-1}}$ y la aplicación*

$A \to \mathrm{Ad}_A$ *es un homomorfismo de grupos de* G *en* $GL(\mathfrak{g})$*. Además, para cada* $A \in G$, Ad_A *cumple que*

$$\mathrm{Ad}_A([X,Y]) = [\mathrm{Ad}_A(X), \mathrm{Ad}_A(Y)] \quad \textit{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Demostración. La demostración es sencilla. Notemos que por definición del álgebra de Lie, la exponencial es una aplicación de $\mathfrak{g}$ en G, $\exp : \mathfrak{g} \to G$. Para $A \in G, X \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}$:

$$A \exp(tX) A^{-1} = \exp\big(tAXA^{-1}\big).$$

Luego $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$. □

Como $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial real de dimensión finita digamos k, $GL(\mathfrak{g})$ es esencialmente lo mismo que $GL(k, \mathbb{R})$ y podemos pensar en él como un grupo de Lie matricial. Es fácil ver que $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ es continua, y luego un homomorfismo de grupos de Lie. Por el Teorema 2.24, existe una aplicación lineal real asociada $X \to \mathrm{ad}_X$ del álgebra de Lie de G al álgebra de Lie de $GL(\mathfrak{g})$ (es decir, de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$), con la propiedad de

$$e^{\mathrm{ad}_X} = \mathrm{Ad}(e^X).$$

Aquí, $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es el álgebra de Lie de $GL(\mathfrak{g})$, el espacio de todas las aplicaciones lineales de $\mathfrak{g}$ en sí mismo.

Proposición 2.29. *Sea* G *un grupo de Lie matricial,* $\mathfrak{g}$ *su álgebra de Lie y* $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ *el homomorfismo de grupos definido anteriormente. Sea* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *la aplicación asociada de álgebras de Lie. Entonces, para todo* $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

Demostración. Recordemos que por el Punto 3 del Teorema 2.24, ad se puede calcular como:

$$\mathrm{ad}_X = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(e^{tX})\bigg|_{t=0}.$$

Entonces,

$$\mathrm{ad}_X(Y) = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(e^{tX})(Y)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX}\bigg|_{t=0} = [X, Y].$$

□

A partir de ahora, dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Para $X \in \mathfrak{g}$, definimos la aplicación lineal $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ por

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

Proposición 2.30. *Si* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie, entonces* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *es un homomor-*

fismo de álgebras de Lie, esto es,

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_X = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y].$$

Demostración. Observemos que

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) = [[X,Y],Z],$$

mientras que

$$[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z) = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]].$$

Luego queremos probar que

$$[[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]$$

o, lo que es lo mismo,

$$0 = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]],$$

que es exactamente la identidad de Jacobi. □

2.4.3. La Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

En esta subsección presentaremos el Teorema de Baker-Campbell-Hausdorff, del cual nos serviremos para el desarrollo de nuestros resultados. No lo demostraremos debido a su larga extensión y necesidad de resultados previos que alargarían este trabajo y no son objetivo del mismo, pero haremos mención a alguna de sus partes. (Para la prueba completa veáse el libro de Brian C. Hall [2]).

Consideremos la función

$$g(z) = \frac{\log z}{1 - 1/z}.$$

Esta función esta definida y es analítica en el disco $\{|z-1| < 1\}$, y luego, para z en este conjunto, $g(z)$ se puede expresar como

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-1)^m,$$

siendo $\{a_m\}$ un conjunto de constantes. Estas series tienen radio de convergencia igual a uno. Ahora, supongamos que V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Elegimos una base arbitraria de V de modo que V puede ser identificado con $\mathbb{C}^n$ y, por tanto, la norma de un operador lineal en V puede ser definida. Entonces, para cualquier operador A en V con $\|A - I\| < 1$, definimos:

$$g(A) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (A - I)^m.$$

Ahora estamos listos para establecer la integral de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff.

Teorema 2.31 (**Baker-Campbell-Hausdorff**).
Para todas matrices X e Y complejas $n \times n$, con normas $\|X\|$ y $\|Y\|$ suficientemente pequeñas,

$$\log\bigl(e^X e^Y\bigr) = X + \int_0^1 g(e^{adX} e^{tad_Y})(Y)dt. \tag{2.2}$$

Observemos que $e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}$ y, por lo tanto, $g(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y})$ son operadores lineales del espacio $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ de todas las matrices complejas $n \times n$. Este operador se aplica a la matriz Y. El hecho de que X e Y se asuman pequeños garantiza que $e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y}$ está cerca al operador identidad en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ para $0 \leq t \leq 1$, asegurado que $g(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y})$ esté bien definido. Además, si X e Y conmutan, la fórmula nos da correctamente lo esperado: $\log\bigl(e^X e^Y\bigr) = \log\bigl(e^{X+Y}\bigr) = X + Y$.

Ahora demostraremos un importante coroloario de este teorema.

Corolario 2.32. *Sea G un grupo de Lie matricial y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Supongamos que $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Entonces, para todas X e Y suficientemente pequeñas en $\mathfrak{g}$, $\log\bigl(e^X e^Y\bigr) \in \mathfrak{g}$ y*

$$\phi[\log\bigl(e^X e^Y\bigr)] = \log\Bigl(e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)}\Bigr). \tag{2.3}$$

Demostración. Observemos que si X e Y están en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces ad_X y ad_Y dejarán $\mathfrak{g}$ invariante, y por tanto, también $g(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y})(Y)$. Luego, si la fórmula (2.2) se cumple, $\log\bigl(e^X e^Y\bigr)$ estará en $\mathfrak{g}$. Solo queda verificar (2.3). Como ϕ es un homomorfismo de álgebras de Lie,

$$\phi[Y, X] = [\phi(Y), \phi(X)] \quad \text{o} \quad \phi(\mathrm{ad}_Y(X)) = \mathrm{ad}_{\phi(Y)}(\phi(X)).$$

Más generalmente,

$$\phi((\mathrm{ad}_Y)^n(X)) = (\mathrm{ad}_{\phi(Y)})^n(\phi(X)).$$

Teniendo esto en cuenta,

$$\phi(e^{t\mathrm{ad}_Y}(X)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\phi((\mathrm{ad}_Y)^m(X)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}(\mathrm{ad}_{\phi(Y)})^m(\phi(X)) = e^{t\mathrm{ad}_{\phi(Y)}}(\phi(X)).$$

De forma parecida llegamos a

$$\phi((e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y})(Y)) = e^{\mathrm{ad}_{\phi(X)}} e^{t\mathrm{ad}_{\phi(Y)}}(\phi(Y)).$$

Ahora asumamos que X e Y son suficientemente pequeñas tal que la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff se puede aplicar a X e Y, y a $\phi(X)$ y $\phi(Y)$. Entonces usando la linearidad de la integral y razonando de forma similar a lo anterior, tenemos:

$$\phi[\log(e^X e^Y)] = \phi(X) + \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} a_m \phi[(e^{\mathrm{ad}_X} e^{t\mathrm{ad}_Y} - I)^m (Y)] dt$$

$$= \phi(X) + \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} a_m (e^{\mathrm{ad}_{\phi(X)}} e^{t\mathrm{ad}_{\phi(Y)}} - I)^m (\phi(Y)) dt = \log\left(e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)}\right).$$

□

2.4.4. Aplicación Asociada a un Homomorfismo de Álgebras de Lie

Ahora probaremos la versión opuesta al Teorema 2.24. Este resultado es extremadamente importante porque implica que, si G es simplemente conexo, entonces existe una correspondencia natural uno a uno entre las representaciones de G y las representaciones de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ (como explicaremos en el siguente capítulo). En la práctica es mucho más sencillo hallar las representaciones de álgebras de Lie que directamente las representaciones del grupo correspondiente.

Teorema 2.33. *Sean G y H grupos matriciales de Lie, con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$, respectivamente. Supongamos que $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Si G es simplemente conexo, entonces existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : G \to H$ tal que*

$$\Phi(\exp X) = \exp(\phi(X))$$

para cada $X \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Paso 1: *Definimos Φ en un entorno de la identidad.*

Por el Teorema 2.16, la aplicación exponencial para G tiene una inversa local que lleva un entorno V de la identidad en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Si tomamos V suficientemente pequeño, entonces podemos asumir que para todo $A, B \in V$, tenemos $\log A$ y $\log B$ lo suficientemente pequeños que cumplen el Teorema de Baker-Campbell-Hausdorff. A partir de ahora fijaremos este entorno V para el resto de la prueba. En V podemos definir $\Phi : V \to H$ por

$$\Phi(A) = \exp(\phi(\log A)), \quad \text{luego en } V \text{ tenemos } \quad \Phi = \exp \circ \phi \circ \log .$$

(Notemos que si hay un homomorfismo Φ como en el teorema, entonces Φ debe seguir esta fórmula).

Paso 2: *Definimos Φ a lo largo de un camino.*

Recordemos que parte de lo que significa que G es simplemente conexo es que es conexo. Recordemos que cuando decimos que G es conexo, nos referimos realmente a que G conexo por caminos. Entonces, para cualquier $A \in G$ existe un camino $\gamma(t) \in G$ con $\gamma(0) = I$ y $\gamma(1) = A$. Usando la compacidad del intervalo $[0,1]$ y la continuidad de γ existen una serie de números $t_0, ..., t_m$ con $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ tales que para todo s y t que satisfacen $t_i \leq s \leq t \leq t_{i+1}$ (para algun i), tenemos:

$$\gamma(t)\gamma(s)^{-1} \in V. \tag{2.4}$$

En particular, como $t_0 = 0$ y $\gamma(0) = I$, tenemos $\gamma(t_1) \in V$. Ahora escribimos $A = \gamma(1)$ de la forma

$$A = [\gamma(1)\gamma(t_{m-1})^{-1}][\gamma(t_{m-1})\gamma(t_{m-2})^{-1}] \cdots [\gamma(t_2)\gamma(t_1)^{-1}]\gamma(t_1).$$

Como buscamos que Φ sea un homomorfismo, es razonable definir $\Phi(A)$ por:

$$\Phi(A) = \Phi(\gamma(1)\gamma(t_{m-1})^{-1}) \cdots \Phi(\gamma(t_2)\gamma(t_1)^{-1})\Phi(\gamma(t_1)), \tag{2.5}$$

donde cada factor del lado derecho esta definido como en el Paso 1.

Paso 3: *Probar la independencia de la partición.*
Para que esta definición de $\Phi(A)$ sea válida, debemos probar que el valor de $\Phi(A)$ es independiente de la elección del camino e independiente para la elección de la partición $(t_0, ..., t_m)$ para un camino dado. Tratemos primero la independencia de la partición. Este es el único paso de la demostración en el que utilizaremos el Teorema de Baker-Campbell-Hausdorff. Primero mostraremos que pasar de una partición particular a un refinamiento de la partición no cambia el resultado. (Un refinamiento de una partición es aquel que contiene todos los puntos de la partición original, junto a algunos otros). Notemos que si la partición dada cumple (2.4), entonces cualquier refinamiento de la partición también cumple la condición. Supongamos ahora que insertamos un punto extra s entre t_i y t_{i+1}. Entonces, el factor $\Phi(\gamma(t_{i+1})\gamma(t_i)^{-1})$ en (2.5) sera sustituido por

$$\Phi(\gamma(t_{i+1})\gamma(s)^{-1})\Phi(\gamma(s)\gamma(t_i)^{-1}).$$

Como s está entre t_i y t_{i+1}, la condición (2.4) de la partición original garantiza garantiza que $\gamma(t_{i+1})\gamma(s)^{-1}$ y $\gamma(s)\gamma(t_i)^{-1}$, además de $\gamma(t_{i+1})\gamma(t_i)^{-1}$, están todos en V. Ahora, del Corolario 2.3 de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff tenemos que Φ, definido como en el Paso 1, es un "homomorfismo local", esto es, $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$ para todos A y B suficientemente cercanos a la identidad. (Cuando aplicamos el corolario escribimos A como e^X y B como e^Y). Esto quiere decir que

$$\Phi(\gamma(t_{i+1})\gamma(t_i)^{-1}) = \Phi(\gamma(t_{i+1})\gamma(s)^{-1})\Phi(\gamma(s)\gamma(t_i)^{-1})$$

y por lo tanto, el valor de $\Phi(A)$ permanecerá inalterado al añadir el punto extra de la partición. Repitiendo este argumento vemos que el valor de $\Phi(A)$ no cambia aunque añadamos cualquier cantidad finita de puntos a la partición. Ahora, dadas dos particiones, tienen un refinamiento en común, la unión. Los argumentos anteriores muestran que el valor de $\Phi(A)$ es el mismo para el refinamiento en común, y es igual también para la segunda partición. Esto demuestra la independencia de la partición.

Paso 4: *Probar la independencia del camino.*
Habiendo probado que el valor de $\Phi(A)$ es independiente de la partición para un camino fijado, ahora necesitamos probar que $\Phi(A)$ es independiente de la elección del camino. En este paso es dónde usaremos que G es simplemente conexo. Supongamos que $\gamma_0(t)$ y $\gamma_1(t)$ son dos caminos que unen la identidad a algún $A \in G$. Entonces, como G es simplemente conexo, un argumento estándar topológico muestra que γ_0 y γ_1 son homótopas con puntos finales fijos. Esto quiere decir que existe un aplicación continua $\gamma : [0,1] \times [0,1] \to G$ con

$$\gamma(0,t) = \gamma_0(t), \quad \gamma(1,t) = \gamma_1(t)$$

para todo $t \in [0,1]$ y también

$$\gamma(s,0) = I, \quad \gamma(s,1)$$

para todo $s \in [0,1]$. La compacidad de $[0,1] \times [0,1]$ garantiza que existe un entero N tal que para todo (s,t) y (s',t') en $[0,1] \times [0,1]$ con $|s-s'| < 2/N$ y $|t-t'| < 2/N$, tenemos que $\gamma(s,t)\gamma(s',t')^{-1} \in V$. Ahora empleamos un truco para deformar γ_0 "un poco cada vez" en γ_1. Esto quiere decir que definimos una sucesión $B_{k,l}$ de caminos, con $k = 0,...,N-1$ y $l = 0,...,N$. Definimos estos caminos de tal manera que $B_{k,l}(t)$ coincide con $\gamma((k+1)/N, t)$ para t entre 0 y $(l-1)/N$, y $B_{k,l}(t)$ coincide con $\gamma(k/N,t)$ para t entre l/N y 1. Para t entre $(l-1)/N$ y l/N, definimos $B_{k,l}(t)$ para que coincida con los valores de $\gamma(\cdot,\cdot)$ en el camino que va "diagonalmente" en el plano (s,t), como se ve en la imagen 2.2. Cuando calculamos $B_{k,0}$ no hay valores de t entre 0 y $(l-1)/N$, luego $B_{k,0}(t) = \gamma(k/n,t)$ para todo $t \in [0,1]$. En particular $B_{0,0}(t) = \gamma_0(t)$.

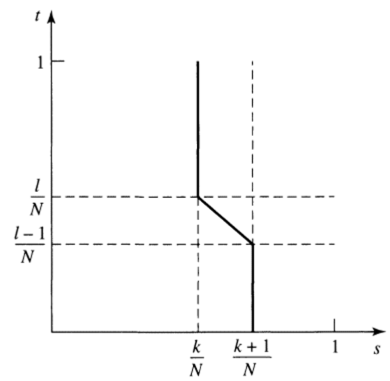

Figura 2.2: El camino $B_{k,l}$, de [2]

Pensamos en deformar el camino γ_0 en γ_1 en pasos. Primero, deformamos $\gamma_0 = B_{0,0}$ en $B_{0,1}$ y luego en $B_{0,2}, B_{0,3}$ y así hasta llegar a $B_{0,N}$, y este camino podemos deformarlo en $B_{1,0}$ y luego en $B_{1,1},...,B_{1,N}$. Repetimos este proceso hasta llegar a $B_{N-1,N}$, el cual deformamos finalmente en γ_1. Queremos probar que el valor de $\Phi(A)$ calculado a lo largo de cada uno de estos caminos es el mismo que el valor de $\Phi(A)$ calculado a lo largo del siguiente. Ahora, notemos que para $k < l$, $B_{k,l}(t)$ y $B_{k,l+1}(t)$ son iguales excepto para t en el intervalo $[(l-1)/N, (l+1)/N]$. Entonces usaremos la independencia de la partición que acabamos de comprobar. Podemos elegir cualquier partición que cumpla la condición 2.4. Luego tanto para $B_{k,l}$ como para $B_{k,l+1}$ elegimos los siguientes puntos de la partición:

$$0, \frac{1}{N}, ..., \frac{l-1}{N}, \frac{l+1}{N}, \frac{l+2}{N}, ..., 1.$$

La forma en la que hemos elegido N garantiza que esta partición es válida. Observemos ahora que, de (2.5), el valor de $\Phi(A)$ depende solo de los valores del camino en los puntos de la partición. Hemos elegido nuestra partición de tal manera que $B_{k,l}$ y $B_{k,l+1}$ son iguales en todos los puntos de la partición y, luego, el valor de $\Phi(A)$ es el mismo en estos dos caminos. Un argumento análogo muestra que el valor de $\Phi(A)$ calculado a lo largo de $B_{k,N}$ el mismo que a lo largo de $B_{k+1,0}$. (Notemos que $B_{k,N}(1) = B_{k+1,0}(1) = A$). Por tanto, el valor de $\Phi(A)$ es el mismo para cada camino desde $\gamma_0 = B_{0,0}$ hasta el final a $B_{N-1,N}$ y entonces (por el mismo argumento) igual que γ_1. Con esto hemos probado la independencia del camino.

Paso 5: *Demostar que Φ es un homomorfismo y está correctamente relacionado con ϕ.* Dejaremos indicado como se procedería para demostrar que Φ es un homomorfismo: Dadas $A, B \in G$, consideramos dos caminos, el primero $A(t)$ que conecta I con A y el segundo $B(t)$ que conecta I con B. Ahora definimos un tercer camino $C(t)$ como combinación de los dos y que conecte I a AB, pongamos $C(t) = A(2t)$ para $0 \leq t \leq 1/2$ y $C(t) = A \cdot B(2t-1)$ para $1/2 \leq t \leq 1$. Si $t_0, ..., t_m$ es una partición válida para $A(t)$ y $s_0, ..., s_M$ es una partición válida para $B(t)$ tendremos que

$$\frac{t_0}{2}, ..., \frac{t_m}{2}, \frac{1}{2} + \frac{s_0}{2}, ..., \frac{1}{2} + \frac{s_M}{2}$$

es una partición válida para $C(t)$. Ahora calculando los valores de $\Phi(A)$, $\Phi(B)$ y $\Phi(AB)$ para estas particiones y caminos comprobaríamos que efectivamente $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$.

Queda solo comprobar que Φ está adecuadamente relacionada con ϕ. Sin embargo, como Φ esta definida cerca de la identidad como $\Phi = \exp \circ \phi \circ \log$, vemos que

$$\frac{d}{dt}\Phi(e^{tX})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{t\phi(X)}\Big|_{t=0} = \phi(X).$$

Por tanto, ϕ es el homomorfismo de álgebras de Lie asociado al homomorfismo de grupos de Lie Φ. Esto completa la prueba del Teorema 2.33.

□

Corolario 2.34. *Supongamos que G y H son grupos de Lie matriciales simplemente conexos, con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{g}$ es isomorfo a $\mathfrak{h}$, entonces G es isomorfo a H.*

Demostración. Sea $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo de grupos de Lie. Por el Teorema 2.33, existe un homomorfismo de grupos de Lie asociado $\Phi : G \to H$. Como $\phi^{-1} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ es también un homomorfismo de álgebras de Lie, existe un homomorfismo de grupos de Lie asociado $\Psi : H \to G$. Queremos ver que Φ y Ψ son inversas el una de la otra. Sin embargo, la aplicación de álgebras de Lie asociada con la composición es la composición de las aplicaciones de álgebras de Lie (como vimos en el Teorema 2.24), la cual es la identidad. Por tanto, por el Corolario 2.26, $\Phi \circ \Psi = I_H$. De la misma forma, $\Psi \circ \Phi = I_G$. □

Capítulo 3

Teoría de Representación

A pesar del origen del término, la cuestión de la teoría de representación, al menos en este trabajo, no es la de representar grupos como grupos de matrices ya que al fin y al cabo nuestros grupos ya son grupos matriciales. La clave de la teoría de representación es que estudia cómo los grupos pueden actuar en espacios vectoriales a través de transformaciones lineales. Estas acciones (representaciones) surgen de forma natural en muchas ramas de las matemáticas y la física, y es importante comprenderlas. Analizar las representaciones de un grupo G (o de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$) puede dar información sobre el grupo (o del álgebra de Lie).

En este capítulo nos centraremos principalmente en el cálculo de las representaciones de dimensión finita de los grupos de Lie matriciales y sus álgebras de Lie asociadas, al igual que veremos algunos ejemplos de algunas de ellas y cómo se constuyen. Mostraremos que en algunos casos el problema se reduce prácticamente a calcular las representaciones de dimensión finita irreducibles del álgebra de Lie asociada. Serán de especial interés las representaciones unitarias y los grupos compactos, ya que tendrán la propiedad llamada reducibilidad completa, esto es, que las representaciones se pueden descomponer como suma directa de un número finito de representaciones irreducibles. Además, en este capítulo probaremos el Lema de Schur, un resultado fundamental sobre las aplicaciones de entrelazamiento para representaciones irreducibles. Finalmente estudiaremos con detalle algunas representaciones de los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$, y la relación que existe entre ellos.

3.1. Representaciones

Definición 3.1. *Sea G un grupo matricial de Lie. Una* ***representación compleja de dimensión finita*** *de G es un homomorfismo de grupos de Lie*

$$\Pi : G \to GL(n, \mathbb{C})$$

($n \geq 1$) o, más generalmente, un homomorfismo de grupos de Lie

$$\Pi : G \to GL(V),$$

donde V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita (con dimensión ≥ 1). Una ***representación real de dimensión finita*** *de G es un homomorfismo de grupos de Lie Φ de G en $GL(n, \mathbb{R})$ o en $GL(V)$, donde V es un espacio vectorial real de dimensión finita.*

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie real o complejo, entonces una ***representación compleja de dimensión finita*** *de $\mathfrak{g}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie π de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ o en $\mathfrak{gl}(V)$, donde V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Igual que antes podemos considerar también una* ***representación real de dimensión finita*** *de $\mathfrak{g}$.*

Si Π o π es un homomorfismo uno-a-uno (inyectivo), la representación se dice que es ***fiel****.*

Uno debe pensar en las representaciones como acciones lineales de un grupo o álgebra de Lie en un espacio vectorial (ya que, por ejemplo, a cada $A \in G$, se asocia un operados $\Pi(A)$ que actúa sobre el espacio vectorial V).

Definición 3.2. *Sea Π una representación real o compleja de dimensión finita de un grupo de Lie matricial G, actuando sobre el espacio V. Un subespacio W de V se llama* ***invariante*** *si $\Pi(A)w \in W$ para todo $w \in W$ y todo $A \in G$. Un espacio invariante se llama* ***no trivial*** *si $W \neq \{0\}$ y $W \neq \{V\}$. Una representación sin subespacios invariantes no triviales se denomina* ***irreducible****.*

Los términos ***invariante, no trivial*** *y* ***irreducible*** *se definen de igual manera para representaciones de álgebras de Lie.*

Definición 3.3. *Sea G un grupo de Lie matricial, sea Π una representación de G actuando sobre el espacio V, y sea Σ una representación de G actuando sobre el espacio W. Una aplicación lineal $\phi : V \to W$ se llama una* ***aplicación de entrelazamiento*** *de representaciones si*

$$\phi(\Pi(A)v) = \Sigma(A)\phi(v) \quad \text{para todo } A \in G, v \in V.$$

De forma análoga se define para representaciones de un álgebra de Lie.

Si ϕ es una aplicación de entrelazamiento de representaciones y, además, ϕ es invertible, entonces se dice que ϕ es una ***equivalencia*** *de representaciones. Si existe un isomorfismo entre V y W, entonces las representaciones son* ***equivalentes****.*

Dos representaciones equivalentes deben considerarse como "la misma" representación. Un problema típico en teoría de representación es determinar, hasta equivalencias, todas las representaciones irreducibles de un grupo o álgebra de Lie particular.

Teorema 3.4. *Sea G un grupo de Lie matricial con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea Π una representación de G (de dimensión finita real o compleja), actuando sobre el espacio V. Entonces, existe una única representación π de $\mathfrak{g}$ actuando sobre el mismo espacio tal que*

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. La representación π se puede calcular como

$$\pi(X) = \frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})\Big|_{t=0}$$

y cumple que

$$\pi(AXA^{-1}) = \Pi(A)\pi(X)\Pi(A)^{-1}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$ y todo $A \in G$.

Demostración. El Teorema 2.24 afirma que para cada homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : G \to H$, existe un homomorfismo de álgebras de Lie asociado $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Tomemos $H = GL(V)$ y $\Phi = \Pi$. Como el álgebra de Lie de $GL(V)$ es $\mathfrak{gl}(V)$ (la exponencial de cualquier operador es invertible), el homomorfismo de álgebras de Lie asociado $\phi = \pi$ lleva $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{gl}(V)$ y, por lo tanto, constituye una representación de $\mathfrak{g}$. Las propiedades de π se tienen de las propiedades de ϕ dadas en el Teorema 2.24. □

Además por el Teorema 2.33, si razonamos de la misma manera que en el caso anterior, podemos afirmar lo siguiente:

Teorema 3.5. *Sea G un grupo de Lie matricial simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea π una representación de $\mathfrak{g}$ (de dimensión finita real o compleja), actuando sobre el espacio V. Entonces, existe una única representación Π de G actuando sobre el mismo espacio, con la siguiente propiedad:*

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)} \quad \textit{para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

Observación 3.6. Hemos establecido entonces que, para grupos de Lie matriciales simplemente conexos, existe de manera natural una correspondencia uno a uno entre las representaciones del grupo y del álgebra de Lie asociada.

Proposición 3.7.

1. *Sea G un grupo de Lie matricial conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Sea Π una representación de G y π la representación de $\mathfrak{g}$ asociada. Entonces Π es irreducible si y solo si π es irreducible.*

2. *Sea G un grupo de Lie matricial conexo, sean Π_1 y Π_2 representaciones de G, y sean π_1 y π_2 las representaciones de álgebras de Lie asociadas. Entonces, π_1 y π_2 son equivalentes si y solo si Π_1 y Π_2 son equivalentes.*

Demostración. Para el Punto 1, supongamos primero que Π es irreducible. Queremos probar que π es irreducible. Entonces, sea W un subespacio de V que es invariante bajo $\pi(X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Queremos probar que W es o $\{0\}$ o V. Ahora, supongamos que A es un elemento de G. Como G es conexo, por el Corolario 2.20 sabemos que A puede ser escrito como $A = e^{X_1} \cdots e^{X_m}$ para algunos $X_1, ..., X_m \in \mathfrak{g}$. Como W es invariante bajo $\pi(X_i)$, también lo será bajo $\exp(\pi(X_i)) = I + \pi(X_i) + \pi(X_i)^2/2 + \cdot$ y luego, bajo

$$\Pi(A) = \Pi(e^{X_1} \cdots e^{X_m}) = \Pi(e^{X_1}) \cdots \Pi(e^{X_m}) = e^{\pi(X_1)} \cdots e^{\pi(X_m)}.$$

Como Π es irreducible y W es invariante bajo cada $\Pi(A)$, W debe ser o $\{0\}$ o V. Esto prueba que π es irreducible.

En la otra dirección, asumamos que π es irreducible y W es un subespacio irreducible para Π. Entonces, W es invariante bajo $\Pi(\exp tX)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ y, luego, bajo

$$\pi(X) = \frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})\Big|_{t=0}.$$

Por tanto, como π es irreducible, W es $\{0\}$ o V, y concluimos que Π es irreducible.

Para probar el Punto 2 se realizaría de forma análoga a lo anterior expuesto pero ahora con nuestra condición de equivalencia, es decir, considerando un isomorfismo $\phi : V \to W$ tal que

$$\phi(\Pi(A)v) = \Sigma(A)\phi(v) \quad \text{para todo } A \in G, v \in V.$$

□

Definición 3.8. *Sea G un grupo matricial de Lie, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert (es decir, un espacio vectorial con un producto interior y que es completo respecto a la norma asociada), Y sea $U(\mathcal{H})$ el grupo de operadores unitarios en $\mathcal{H}$ (recordemos que un operador es unitario si es invertible y su inversa es igual a su conjugada traspuesta). Entonces, un homomorfismo $\Pi : G \to U(\mathcal{H})$ se llama* ***representación unitaria*** *de G si para cada $A \in G$, $\Pi(A)$ es un operador unitario, esto es,*

$$\forall A \in G,\ \forall v \in \mathcal{H}, \quad \|\Pi(A)v\| = \|v\|.$$

O equivalentemente, la representación Π es unitaria si y solo si

$$\Pi(A)^{-1} = \Pi(A)^*, \quad \textit{para todo } A \in G.$$

Proposición 3.9. *(a) El álgebra de Lie del núcleo del homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : G \to H$ es igual al núcleo del homomorfismo de álgebras de Lie asociado $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$:*

$$Lie(\ker(\Phi)) = \ker(\phi).$$

Por tanto, el núcelo de Φ es discreto si y solo si ϕ es inyectiva.

(b) Si ϕ es sobreyectiva, entonces la imagen de Φ contiene la componente identidad H_0 de H.

(c) Si G y H son conexos y ϕ es un isomorfismo, entonces (G, Φ) es una cubierta (universal) de H.

Recordemos la definición de **cubierta (universal)**. Sean X e Y espacios topológicos conexos y $\Phi : X \to Y$ una aplicación continua. El par (X, Φ) se llama una cubierta de Y si Φ es sobreyectiva y, para cada $x \in X$, existen entornos V de x y W de $y = \Phi(x)$ tal que la restricción de Φ a V es un homeomorfismo de V en W.
Sea (X, Φ) una cubierta de Y. Si para $y_0 \in Y$, la contraimagen $\Phi^{-1}(y_0) \subset X$ es un conjunto finito, entonces lo mismo ocurre para cada $y \in Y$, y las contraimágenes $\Phi^{-1}(y)$ tienen todas el mismo número k de elementos. Se dice entonces que (X, Φ) es una cubierta de orden k de Y.

Demostración. (a) Del Teorema 2.24 sabemos que para $X \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\exp tX) = \exp(t\phi(X)).$$

Luego

$$Lie(\ker(\Phi)) = \ker(\phi).$$

En particular, ϕ es inyectiva si y solo si el álgebra de Lie de $\ker \Phi$ se reduce a $\{0\}$, esto es, si $\ker \Phi$ es discreto.

(b) Recordemos que G_0 denota la componente identidad de G. Asumamos que ϕ es sobreyectiva. Esto significa que la diferencial de Φ en el elemento identidad e de G es sobreyectiva. Entonces $V = \Phi(G_0)$ es un entorno del elemento identidad e' de H. Vimos en la Proposición 1.6 que

$$H_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} V^k.$$

Luego, como Φ es un homomorfismo de grupos, $V = \Phi(G_0)$ es un subgrupo de H, y $V^K = V$, por tanto $H_0 = \Phi(G_0)$.

(c) Supongamos que G y H son conexos y que ϕ es un isomorfismo. Veamos que (G, Φ) es una cubierta de H. De (b) se deduce que Φ es sobreyectiva. Usando el Teorema 2.16, y la relación

$$\Phi(\exp tX) = \exp(t\phi(X)), \quad X \in \mathfrak{g},$$

se puede ver que existe un entorno $V \subset G$ del elemento identidad de G, y un entorno $W \subset H$ del elemento identidad de H tal que Φ es un isomorfismo de V en W. Resulta que, para cada $g \in G$, Φ es un homeomorfismo del entorno gV de g en el entorno hW de $h = \Phi(g)$ ya que

$$\Phi(gv) = h\Phi(v), \quad v \in V.$$

Si $\ker\Phi$ es un grupo finito, entonces (G,Φ) es una cubierta de orden k de H, donde k el el número de elementos en $\ker\Phi$.

□

3.2. Ejemplos de Representaciones

1. **La representación estándar**.
   Un grupo de Lie matricial es, por definición, un subconjunto de $GL(n,\mathbb{C})$. La aplicación de inclusión de G en $GL(n,\mathbb{C})$, es decir, $\Pi(A)=A$ es una representación de G llamada la representación estándar de G. Si G está contenido en $GL(n,\mathbb{R})\subset GL(n,\mathbb{C})$ podemos pensar en la representación estándar como una represenatción real si lo preferimos. Por ejemplo, la representación estándar de $SU(2)$ es aquella en la que $SU(2)$ actúa de la manera usual en $\mathbb{C}^2$.

   Si G es un subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$ o $GL(n,\mathbb{C})$, entonces su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ será una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ o $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. La inclusión de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ o $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ es una representación de $\mathfrak{g}$ llamada también la representación estándar.

2. **La representación trivial**.
   Consideramos el espacio vectorial complejo unidimensional $\mathbb{C}$. Dado cualquier grupo de Lie matricial G podemos definir la representación trivial de G, $\Pi: G\to GL(1,\mathbb{C})$, por la fórmula
   $$\Pi(A)=I$$
   para todo $A\in G$. Está es claramente una representación irreducible ya que $\mathbb{C}$ no tiene subespacios no triviales (luego tampoco subespacios no triviales invariantes). Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie podemos también definir la representación trivial de $\mathfrak{g}$, $\pi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(1,\mathbb{C})$ por
   $$\pi(X)=0$$
   para todo $X\in\mathfrak{g}$. Es una representación irreducible.

3. **La representación adjunta**.
   Sea G un grupo de Lie matricial con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Ya hemos definido la aplicación adjunta
   $$\mathrm{Ad}: G\to GL(\mathfrak{g}),\quad \mathrm{Ad}_A(X)=AXA^{-1}.$$
   Recordemos que Ad es un homomorfismo de grupos de Lie. Como Ad es un homomorfismo de grupos de Lie en un grupo de operadores invertibles, vemos que de hecho, Ad es una representación de G actuando sobre el espacio $\mathfrak{g}$, llamada la representación adjunta de G. La representación adjunta es una representación real de G (si $\mathfrak{g}$ es un subespacio complejo de $M(n,\mathbb{C})$ podemos pensar en la representación adjunta como una representación compleja).

De forma similar, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie la aplicación

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$$

sabemos que es un homomorfismo de álgebras de Lie y, luego, es la representación adjunta de $\mathfrak{g}$. En el caso que $\mathfrak{g}$ sea el álgebra de Lie de algún grupo G, ya hemos establecido anteriormente que Ad y ad están relacionados por $e^{\mathrm{ad}_X} = \mathrm{Ad}_{e^X}$.

4. **La representación suma directa**.
Dado G un grupo de Lie matricial y sean $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_m$ representaciones de G actuando sobre espacios vectoriales $V_1, V_2, ..., V_m$. Entonces la **suma directa** de $\Pi_1, ..., \Pi_m$ es una representación $\Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_m$ de G actuando sobre el espacio $V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, definida por

$$[\Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_m(A)](v_1, ..., v_m) = (\Pi_1(A)v_1, ..., \Pi_m(A)v_m)$$

para todo $A \in G$. Además, puede ser útil pensar en la suma directa en la forma diagonal en bloque: la representación $\Pi_1 \oplus \Pi_2$ actuando sobre $V_1 \oplus V_2$ puede ser escrita como:

$$(\Pi_1 \oplus \Pi_2)(A) = \begin{pmatrix} \Pi_1(A) & 0 \\ 0 & \Pi_2(A) \end{pmatrix}, \qquad \text{para todo } A \in G.$$

De forma análoga se puede definir la representación de la suma directa para un álgebra de Lie.

Una propiedad importante de algunos grupos y álgebras de Lie matriciales en relación a la suma directa de representaciones irreducibles es la llamada propiedad de **reducibilidad completa** que estudiaremos en la Sección 3.5.

5. **La representación producto tensorial**.
Si U y V son espacios vectoriales de dimensión finita reales o complejos, entonces un producto tensorial de U con V es un espacio vectorial W junto con una aplicación bilineal $\phi : U \times V \to W$ con las siguientes propiedades: Si ψ es cualquier aplicación lineal de $U \times V$ en un espacio vectorial X, entonces existe una única aplicación lineal $\widetilde{\psi}$ de W en X tal que el siguiente diagrama conmuta:
Observemos que la aplicación bilineal ψ de $U \times V$ en X se convierte en una aplica-

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \stackrel{\phi}{\to} & W \\ \psi \searrow & & \swarrow \widetilde{\psi}\cdot \\ & X & \end{array}$$

ción lineal $\widetilde{\psi}$ de W en X. El espacio $U \times V$ es entonces el espacio de combinaciones de los productos de un elemento u de U con un elemento v de V, esto es, $u \otimes v$ es de la forma

$$a_1 u_1 \otimes v_1 + \cdots a_n u_n \otimes v_n.$$

Si $e_1, ..., e_n$ es una base de U y $f_1, ..., f_m$ es una base de V, entonces $\{e_i \otimes f_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ es base del espacio $U \otimes V$.

Sea G un grupo de Lie matricial y sean Π_1 y Π_2 representaciones de G, actuando sobre los espacios V_1 y V_2. Entonces el **producto tensorial** de Π_1 y Π_2 es una representación de G actuando sobre $V_1 \otimes V_2$ definida por

$$\Pi_1 \otimes \Pi_2(A) = \Pi_1(A) \otimes \Pi_2(A), \quad \forall A \in G.$$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y sean π_1 y π_2 representaciones de $\mathfrak{g}$, actuando sobre los espacios V_1 y V_2. Entonces el **producto tensorial** de π_1 y π_2 es una representación de $\mathfrak{g}$ actuando sobre $V_1 \otimes V_2$ definida por

$$\pi_1 \otimes \pi_2(X) = \pi_1(X) \otimes I + I \otimes \pi_2(X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

6. **La representación dual**.
Supongamos que π es una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ actuando sobre un espacio vectorial de dimensión finita V. Sea V^* es espacio dual de V, es decir, el espacio de funciones lineales en V. Si A es un operador lineal en V, sea A^{tr} el operador dual o traspuesto en V^*,

$$(A^{tr}\phi)(v) = \phi(Av)$$

para $\phi \in V^*, v \in V$. Si $v_1, ..., v_n$ es una base de V, entonces existe una "base dual" asociada $\phi_1, ..., \phi_n$ tal que $\phi_k(v_l) = \delta_{kl}$. Entonces, la matriz para A^{tr} en la base dual es simplemente la traspuesta (notemos que no nos referimos a la conjugada traspuesta). Si A y B son operadores lineales en V entonces

$$(AB)^{tr} = B^{tr}A^{tr}.$$

Supongamos que G es un grupo de Lie matricial y Π una representación de G actuando sobre un espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces, la **representación dual** Π^* de Π es la representación en G actuando sobre V^* dada por

$$\Pi^*(g) = [\Pi(g^{-1})]^{tr}.$$

De forma similar, si π es una representación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ actuando sobre un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces π^* es la representación de $\mathfrak{g}$ actuandos aobre V^* dada por

$$\pi^*(X) = -\pi(X)^{tr}.$$

3.3. Representaciones de SU(2) y SO(3)

Como hemos comentado en la introducción, en esta sección estudiaremos algunas representaciones que permiten describir la relación entre los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$.

3.3.1. Una Representación Unitaria de SU(2) y SO(3)

Veamos en este ejemplo cómo los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$ son casi (pero no del todo) isomorfos. Específicamente, existe un homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : SU(2) \to SO(3)$ que es dos-a-uno. Ahora describiremos esta aplicación.

Consideremos el espacio V de matrices complejas 2×2 que son autoadjuntas (o hermíticas, es decir, $A^* = A$) y tienen traza cero. Esto es un espacio real tridimensional con la siguiente base:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definiremos el siguiente producto interno en V (es sencillo comprobar que lo es) por la fórmula

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AB).$$

Con cálculo directo se puede ver que $\{A_1, A_2, A_3\}$ es una base ortonormal de V, luego podemos identificar V con $\mathbb{R}^3$ a través de esta base ya que dado $A \in V$, se puede escribir como

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Ahora, supongamos que U es un elemento de $SU(2)$ y A es un elemento de V, y consideramos UAU^{-1}. Además, tenemos que

$$\operatorname{tr}(XY) = \sum_{k=1}^{n} (XY)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} X_{kl} Y_{lk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} Y_{kl} X_{lk} = \operatorname{tr}(YX).$$

Entonces aplicando esto a las matrices UA y U^{-1} tenemos que $\operatorname{tr}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr}(A) = 0$ y

$$(UAU^{-1})^* = (U^{-1})^* A U^* = UAU^{-1},$$

y entonces $UAU^{-1} \in V$. Además, para U fijado, la aplicación $A \to UAU^{-1}$ es lineal en A. Por tanto, para cada $U \in SU(2)$, podemos definir una aplicación lineal Φ_U de V en sí mismo por la fórmula

$$\Phi_U(A) = UAU^{-1}.$$

Notemos que $U_1 U_2 A U_2^{-1} U_1^{-1} = (U_1 U_2) A (U_1 U_2)^{-1}$, y luego $\Phi_{U_1 U_2} = \Phi_{U_1} \Phi_{U_2}$. Además, dado $U \in SU(2)$ y $A, B \in V$, tenemos:

$$\langle \Phi_U(A), \Phi_U(B) \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(UAU^{-1}UBU^{-1}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB) = \langle A, B \rangle.$$

Por tanto, Φ_U es un operador unitario de V y $\{\Phi_U \ : \ U \in SU(2)\}$ es una representación unitaria de $SU(2)$ en V.

Una vez hemos identificado V con $\mathbb{R}^3$ (usando la base ortonormal anterior), de la relación $\det \Phi_U(A) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, se deduce que la correspondiente transformación Φ_U en $\mathbb{R}^3$ es un elemento de $O(3)$ (el grupo de transformaciones que conservan la métrica Euclídea). Como $\Phi_{U_1 U_2} = \Phi_{U_1}\Phi_{U_2}$, vemos que Φ (es decir, la aplicación $U \to \Phi_U$) es un homomorfismo de grupos de $SU(2)$ en $O(3)$. También Φ es un homomorfismo de grupos de Lie. Recordemos que cada elemento de $O(3)$ tiene determinante ± 1. Ahora, $SU(2)$ es conexo, Φ es continua, y Φ_I es igual a I que tiene determinante 1. Se deduce que Φ lleva $SU(2)$ en la componente de la identidad de $O(3)$, en concreto, $SO(3)$.

La aplicación $U \to \Phi_U$ no es uno a uno, ya que para cada $U \in SU(2)$, $\Phi_U = \Phi_{-U}$ (observemos que si U está en $SU(2)$, también lo está $-U$). El significado de este homomorfismo es que $SO(3)$ no es simplemente conexo pero $SU(2)$ sí. La aplicación Φ nos permite relacionar problemas en el grupo no simplemente conexo $SO(3)$ con problemas del grupo simplemente conexo $SU(2)$.

3.3.2. La Aplicación Adjunta de SU(2) en SO(3)

En esta subsección primero introduciremos la forma de Killing. Sea ρ una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en un espacio de dimensión finita V. Seam $X, Y \in \mathfrak{g}$ y pongamos

$$B_\rho(X, Y) = \operatorname{tr}(\rho(X), \rho(Y)).$$

Esta es una forma bilineal simétrica en $\mathfrak{g}$ que es asociativa:

$$B_\rho([X, Y], Z) = B_\rho(X, [Y, Z]).$$

Esto significa que las transformaciones $\operatorname{ad}X$ son antisimétricas con respecto a la forma B_ρ.

Definición 3.10. *La **forma de Killing** se define como la forma bilineal simétrica asociada a la representación adjunta ($\rho = \operatorname{ad}$):*

$$B(X, Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}X \ \operatorname{ad}Y).$$

Además, de la relación

$$\operatorname{ad}(\operatorname{Ad}(g)X) = \operatorname{Ad}(g) \ \operatorname{ad}X \ \operatorname{Ad}(g^{-1}) \quad (g \in G, \ X \in \mathfrak{g}),$$

y de la propiedad ya vista de que la traza es conmutativa se tiene que

$$B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = B(X,Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{g}).$$

Esto significa que $\mathrm{Ad}(g)$ pertenece al grupo ortogonal de B.

Ahora consideremos un ejemplo donde aplicaremos este concepto recién introducido. Recordemos que el grupo $SU(2)$ consiste en las matrices

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

La inversa de esta matriz es

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{pmatrix}.$$

El grupo $SU(2)$ ya hemos probado en el Capítulo 1 que es homeomorfo a la esfera unidad en $\mathbb{C}^2$, luego es compacto, conexo y simplemente conexo.
Las matrices

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

forman una base de su álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$: cada matriz T en $\mathfrak{su}(2)$ puede escribirse de forma única como

$$T = t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3 = \begin{pmatrix} it_1 & t_2 + it_3 \\ -t_2 + it_3 & -it_1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}.$$

Las relaciones de conmutación son las siguientes:

$$[X_1, X_2] = 2X_3, \quad [X_2, X_3] = 2X_1, \quad [X_3, X_1] = 2X_2.$$

Ahora consideremos el grupo $SO(3)$ que no es conexo, y su álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ el espacio de matrices reales antisimétricas 3×3. Las matrices

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

forman una base del álgebra de Lie y cumplen $[L_1, L_2] = L_3,\ [L_2, L_3] = L_1,\ [L_3, L_1] = L_2$. Se tiene que estos espacios vectoriales son isomorfos:

$$\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3).$$

La identifiación ϕ viene dado por $X_k \mapsto \phi(X_k) = L_k$, extendiéndose por linealidad. Entonces, como son álgebras de Lie isomorfas, deberán tener "las mismas" representaciones. En concreto, aunque no lo probaremos, si π es una representación de $\mathfrak{su}(2)$, entonces $\pi \circ \phi^{-1}$ será una representación de $\mathfrak{so}(3)$.

Respecto de la base mencionada antes, si $T = t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3$, la representación adjunta puede ser escrita como (recordemos que $[X_i, X_j] = -[X_j, X_i]$):

$$\operatorname{ad}(T) = \begin{pmatrix} 0 & -2t_3 & 2t_2 \\ 2t_3 & 0 & -2t_1 \\ -2t_2 & 2t_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se deduce fácilmente entonces la fórmula de la forma de Killing:

$$B(T,T) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}T)^2 = -8(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2).$$

Como la forma de Killing es invariante bajo $\operatorname{Ad}(g)$ ($g \in SU(2)$), la representación adjunta Ad es un homomorfismo de $SU(2)$ en $O(3)$. De la fórmula anterior para $\operatorname{ad}(T)$ se tiene que la representación adjunta ad es un isomorfismo de $\mathfrak{su}(2)$ en $\mathfrak{so}(3)$. Como $SU(2)$ es conexo, la imagen de la aplicación Ad está contenida en $SO(3)$ (la componente identidad de $O(3)$). Por la Proposición 3.9, la imagen es igual a $SO(3)$. El núcleo de Ad es, por definición, el centro de $SU(2)$ (los elementos $g \in SU(2)$ tales que $g = hgh^{-1}$, $h \in SU(2)$), que es $\{\pm e\}$ (e es la identidad). Podemos afirmar entonces lo siguiente:

Proposición 3.11. *La aplicación* Ad *es un homomorfismo sobreyectivo de $SU(2)$ en $SO(3)$. Su núcleo, que es el centro de $SU(2)$, es igual a $\{\pm e\}$.*

Por tanto, $(SU(2), \operatorname{Ad})$ es una cubierta de orden 2 de $SO(3)$.

3.4. Lema de Schur

El Lema de Schur es un resultado de gran importancia que trata sobre aplicaciones de entrelazamiento de representaciones irreducibles. Vamos a realizar abuso de notación con el objetivo de declarar el Lema de Schur tanto para grupos como para álgebras de Lie. Digamos que, si Π es una representación de G actuando sobre el espacio V, nos referiremos a V como la representación.

Teorema 3.12 (Lema de Schur).

1. *Sean V y W representaciones irreducibles reales o complejas de un grupo o álgebra de Lie y sea $\phi : V \to W$ una aplicación de entrelazamiento. Entonces, o $\phi = 0$ o ϕ es un isomorfismo.*

2. *Sea V una representación irreducible compleja de un grupo o álgebra de Lie y sea ϕ una aplicación de entrelazamiento de V en sí mismo. Entonces, $\phi = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.*

3. *Sean V y W representaciones irreducibles complejas de un grupo o álgebra de Lie y sean $\phi_1, \phi_2 : V \to W$ aplicaciones de entrelazamiento no nulas. Entonces,*

$\phi_1 = \lambda\phi_2$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Antes de probar el lema, obtenemos dos corolarios de él. En esta sección probaremos el caso del grupo; para álgebras se realiza de forma similar (con su cambios de notación correspondientes).

Corolario 3.13. *Sea Π una representación irreducible compleja de un grupo de Lie matricial G. Si A está en el centro de G, entonces $\Pi(A) = \lambda I$. (El centro de un grupo G es el conjunto de todos los $g \in G$ tales que $gh = hg$ para todo $h \in G$). De forma análoga, si π es una representación irreducible compleja de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y X está en el centro de $\mathfrak{g}$ (es decir, $[X, Y] = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$), entonces $\pi(X) = \lambda I$.*

Demostración. Si A esta en el centro de G entonces, para cada $B \in G$,

$$\Pi(A)\Pi(B) = \Pi(AB) = \Pi(BA) = \Pi(B)\Pi(B).$$

Pero esto significa que $\Pi(A)$ es una aplicación de entrelazamiento del espacio consigo mismo. Luego por el Punto 2 del Lema de Schur, $\Pi(A)$ es un múltiplo de la identidad. $\square$

Corolario 3.14. *Una representación irreducible compleja de un grupo o álgebra de Lie conmutativo es unidimensional.*

Demostración. Si G es conmutativo, entonces el centro de G es todo G, luego por el corolario anterior $\Pi(A)$ es un múltiplo de la identidad para cada $A \in G$. Sin embargo, esto significa que todo subespacio de V es invariante. Por tanto, la única manera de que V no tenga subespacios invariantes no triviales es que V no tenga ningún subespacio no trivial. Esto quiere decir que V es unidimensional (recordemos que no permitimos que V tenga dimensión 0). $\square$

Procedemos ahora con la demostración del Lema de Schur:

Demostración.
Punto 1: Decir que ϕ es una aplicación de entrelazamiento significa que $\phi(\Pi(A)v) = \Sigma(A)(\phi(v))$ para todo $v \in V$ y todo $A \in G$. Ahora supongamos que $v \in \ker(\phi)$, entonces

$$\phi(\Pi(A)v) = \Sigma(A)\phi(v) = 0.$$

Esto muestra que $\ker\phi$ es un subespacio invariante de V. Como V es irreducible, debe ser $\ker\phi = 0$ o $\ker\phi = V$. Por tanto, ϕ es o inyectiva o cero.
Supongamos que es inyectiva. Entonces, la imagen de ϕ es un subespacio no nulo de W. Por otro lado, la imagen de ϕ es invariante, ya que si $w \in W$ es de la forma $\phi(v)$ para algún $v \in V$, entonces

$$\Sigma(A)w = \Sigma(A)\phi(v) = \phi(\Pi(A)v).$$

Como W es irreducible y $\mathrm{Im}(V)$ es no nulo e invariante, debe ser $\mathrm{Im}(V) = W$. Por tanto, ϕ es o cero, o inyectiva y sobreyectiva.

Punto 2: Supongamos que V es una representación compleja irreducible y que $\phi : V \to V$ es una aplicación de entrelazamiento. Esto significa que $\phi\Pi(A) = \Pi(A)\phi$ para todo $A \in G$ (esto es, ϕ conmuta con todos los $\Pi(A)$). Ahora, como estamos trabajando sobre sobre un espacio algebraicamente cerrado, ϕ debe tener al menos un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea U el espacio propio para ϕ asociado al autovalor λ y sea $u \in U$. Entonces, para cada $A \in G$,

$$\phi(\Pi(A)u) = \Pi(A)\phi(u) = \lambda\Pi(A)u.$$

Luego, aplicando $\Pi(A)$ a un elemento del λ espacio propio de ϕ tenemos otro elemento del λ espacio propio. Entonces, U es invariante.
Como λ es un autovalor, $U \neq \{0\}$, y luego debe ser $U = V$. Esto quiere decir que $\phi(v) = \lambda v$ para todo $v \in V$ (esto es, $\phi = \lambda I$).

Punto 3: Si $\phi_2 \neq \{0\}$, entonces por el Punto 1, ϕ_2 es un isomorfismo. Ahora consideremos $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$. Es fácil ver que la composición de dos aplicaciones de entrelazamiento es otra también, luego $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ es una aplicación de entrelazamiento de W en sí mismo. Por tanto, por el Punto 2, $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} = \lambda I$, y entonces $\phi_1 = \lambda\phi_2$. □

3.5. Reducibilidad Completa

Definición 3.15. *Una representación de dimensión finita en un grupo o álgebra de Lie se dice que es* ***completamente reducible*** *si es isomorfa a una suma directa de un número finito de representaciones irreducibles.*

Un grupo o álgebra de Lie se dice que tiene la ***propiedad de reducibilidad completa*** *si cada representación de dimensión finita de él es completamente reducible.*

Si Π es una representación de G en un espacio vectorial V completamente reducible (también podemos escribir esto para un álgebra de Lie), entonces existe una descomposición en suma directa de V en subespacios $W_1, ..., W_k$:

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

donde cada W_j es un subespacio invariante para Π tal que la restricción $\Pi_j = \Pi|_{W_j}$ es irreducible. Por tanto, existirá una base de V en la que tendremos la siguiente diagonalización en bloque:

$$\Pi(A) = \begin{pmatrix} \Pi_1(A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_2(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_k(A) \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } A \in G.$$

Para estos grupos, una vez conocemos todas las representaciones irreducibles, conocemos todas las representaciones que se construyen sobre estas como bloques, lo que facilita el análisis considerablemente. Sin embargo, la mayoría de grupos y álgebras de Lie no tienen esta propiedad.

Proposición 3.16. *Sea G un grupo de Lie matricial. Sea Π una representación unitaria de G actuando sobre un espacio de Hilbert V real o complejo de dimensión finita. Entonces, Π es completamente reducible.*

Demostración. Sea V el espacio de Hilbert de dimensión finita en el que Π actúa y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno en V. Ahora sea $W \subset V$ un subespacio invariante. Sea $W^{\perp}$ el complementario ortogonal a W, es decir, $W^{\perp}$ es el espacio de todos los vectores $v \in V$ tales que $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in W$. Entonces, $V = W + W^{\perp}$.
Veamos que $W^{\perp}$ es también un subespacio invariante. Para ver esto, notemos que como Π es unitaria, $\Pi(A)^* = \Pi(A)^{-1} = \Pi(A^{-1})$ para todo $A \in G$. Entonces, para cualquier $w \in W$ y cualquier $v \in W^{\perp}$, tenemos:

$$\langle \Pi(A)v, w \rangle = \langle v, \Pi(A)^* w \rangle = \langle v, \Pi(A^{-1})w \rangle = \langle v, w' \rangle = 0.$$

En el último paso hemos usado que $w' = \Pi(A^{-1})w$ está en W ya que W es invariante. Esto muestra que $\Pi(A)v$ es ortogonal para cada elemento de W, esto es, $\Pi(A)w \in W^{\perp}$. Hemos establecido que, para representaciones unitarias, el complementario ortogonal de un subespacio invariante es también invariante. Supongamos ahora que V no es irreducible. Entonces podemos encontrar subespacios invariantes que ni son $\{0\}$ ni V, y ahora descomponemos V como $W^{\perp}$. Entonces, W y $W^{\perp}$ son ambos subespacios invariantes y, luego, propiamente representaciones unitarias de G. Entonces, W es o bien irreducible o bien se descompone como suma directa ortogonal de subespacios invariantes, y de forma similar para $W^{\perp}$. Continuamos este proceso y, como V es de dimensión finita, no puede durar para siempre. Cada vez, las dimensiones de los espacios se vuelven más pequeñas, así que al final debemos obtener piezas irreducibles (cuando la dimensión llegue a uno si no antes). Por tanto, al final tendremos de forma correcta V descompuesto como suma directa de subespacios irreducibles invariantes. $\square$

Proposición 3.17. *Todo grupo finito tiene la propiedad de reducibilidad completa.*

Demostración. Supongamos que Π es una representación de G actuando sobre V. Elijamos un producto interno arbitrario $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en V. Entonces definimos un nuevo producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ en V por

$$\langle v_1, v_2 \rangle_G = \sum_{g \in G} \langle \Pi(g)v_1, \Pi(g)v_2 \rangle.$$

Es sencillo comprobar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ es en efecto un producto interno. Además, si $h \in G$, entonces

$$\langle \Pi(h)v_1, \Pi(h)v_2\rangle_G = \sum_{g\in G}\langle \Pi(g)\Pi(h)v_1, \Pi(g)\Pi(h)v_2\rangle = \sum_{g\in G}\langle \Pi(gh)v_1, \Pi(gh)v_2\rangle.$$

Sin embargo, ya que g se extiende sobre G, también lo hace gh. Por tanto,

$$\langle \Pi(h)v_1, \Pi(h)v_2\rangle_G = \langle v_1, v_2\rangle_G,$$

esto significa que Π es una representación unitaria con respecto el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$. Luego, por la Proposición 3.16, Π es isomorfa a una suma directa de irreducibles. $\square$

Proposición 3.18. *Si G es un grupo de Lie matricial compacto, G tiene la propiedad de reducibilidad completa.*

El argumento usado a continuación se suele denominar “El truco unitario de Weyl”.

Demostración. Esta demostración requiere la noción de medida de Haar. Aunque no entraremos mucho en detalle, sí daremos los conceptos básicos para trabajar en la prueba. Una **medida izquierda de Haar** en un grupo de Lie matricial G es una medida distinta de cero μ en el σ-álgebra de Borel en G con las siguientes propiedades: (1) Es localmente finita (es decir, cada punto en G tiene un entorno con medida finita); (2) es invariante por traslación izquierda.
El álgebra de Borel es la σ-álgebra generada por todos los subconjuntos compactos de G. (Recordemos que una σ-álgebra sobre un conjunto G un una familia no vacía de subconjuntos de G, cerrada bajo complementarios y uniones numerables). Invariante por translación izquierda quiere decir que $\mu(gE) = \mu(E)$ para todo $g \in G$ y para todos conjuntos de Borel $E \subset G$, donde

$$gE = \{ge \mid e \in E\}.$$

Se tiene de hecho, aunque no lo podremos probar en este trabajo, que cada grupo de Lie matricial tiene una medida izquierda de Haar y que esta medida es única hasta multiplicación por una constante. (De forma análoga se podria definir una medida derecha de Haar y cumple un teorema similar. La medida izquierda de Haar y la medida derecha de Haar pueden no coincidir, un grupo para el cual lo hagan se llama **unimodular**.)

Ahora, la clave para nuestro propósito es que una medida izquierda de Haar es finita si y solo si el grupo G es compacto. Supongamos entonces que Π es una representación de dimensión finita de un grupo compacto G actuando sobre V. Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto interno arbitrario en V y definamos un nuevo producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ en V por

$$\langle v_1, v_2\rangle_G = \int_G \langle \Pi(g)v_1, \Pi(g)v_2\rangle \; d\mu(g),$$

donde μ es una medida izquierda de Haar. De nuevo, es sencillo comprobar que en efecto $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ define un producto interno. Además, si $h \in G$, entonces por ser μ invariante por translación izquierda:

$$\langle \Pi(h)v_1, \Pi(h)v_2 \rangle_G = \int_G \langle \Pi(g)\Pi(h)v_1, \Pi(g)\Pi(h)v_2 \rangle \; d\mu(g)$$

$$= \int_G \langle \Pi(gh)v_1, \Pi(gh)v_2 \rangle \; d\mu(g) = \langle v_1, v_2 \rangle_G.$$

Luego Π es una representación unitaria con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ y, por tanto, completamente irreducible. Notemos que la integral definida en $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ es convergente porque μ es finita.

$\square$

Referencias

[1] Michael Ragone, Paolo Braccia, Quynh T. Nguyen, Louis Schatzki, Patrick J. Coles, Frédéric Sauvage, Martín Larocca y M. Cerezo, *Representation Theory for Geometric Quantum Machine Learning*, arXiv preprint arXiv:2210.07980v1 (2022).

[2] Brian C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras and Representations: An Elementary Introduction*, Springer, New York (2003).

[3] Jacques Faraut, *Analysis on Lie Groups: An Introduction*, Cambridge University Press, New York (2008).

[4] Frank W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, New York (1983).

[5] William Fulton y Joe Harris, *Representation Theory: A First Course*, Springer, New York (1991).