Universidad de Valladolid

Facultad de ciencias

Trabajo fin de grado

Grado en matemáticas

Lema de Sperner y topología simplicial

Autor: Ignacio Jolín Rodrigo

Tutor: Jesús M. Domínguez Gómez

Curso 2022-2023

Contenido

Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo es probar el Lema de Sperner, un resultado clásico de Topología Combinatoria que permite obtener, sin acudir a la teoría de Homología, el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, que es un resultado fundamental de Topología. Lo anterior puede considerarse continuación natural de los resultados de Topología Simplicial expuestos en la asignatura “Topología Algebraica” del Grado en Matemáticas de la UVa.

El Lema de Sperner es valido para cualquier subdivisión del complejo $K(\Delta)$ asociado a un símplice $\Delta :=< a_0, a_1, \ldots, a_n >$, pero nosotros solo lo probaremos para las subdivisiones baricéntricas $K^{(l)}(\Delta)$, basándonos en las demostraciones expuestas en [Eng1] y [ES]. Estas dos demostraciones son esencialmente equivalentes, en la primera de ellas se utiliza un lenguaje combinatorio (etiquetados de Sperner), mientras que en la segunda se utiliza el lenguaje de las aplicaciones simpliciales (aplicaciones de Sperner). Ambas demostraciones se apoyan en el siguiente lema fundamental: un $(n-1)$-símplice de $K^{(l)}(\Delta)$ que esté contenido en la frontera geométrica de Δ es cara de un único n-símplice de $K^{(l)}(\Delta)$, mientras que un $(n-1)$-símplice de $K^{(l)}(\Delta)$ que no esté contenido en dicha frontera es cara de exactamente dos n-símplices de $K^{(l)}(\Delta)$.

La extensión del anterior lema fundamental a cualquier subdivisión K del complejo $K(\Delta)$ es la clave para poder extender a K el Lema de Sperner, pero dicha extensión no es sencilla (véase [ES]). En gran parte de las demostraciones del Lema de Sperner que nosotros hemos consultado, o bien se acepta el mencionado resultado fundamental como evidente, sin plantearse la necesidad de su demostración, (véase, por ejemplo, [Lon] o [AFV]), o bien se indica que su demostración se deja a cargo del lector, dando a entender que esta es fácil. Encontramos razonable la primera postura cuando se trata de trabajos de divulgación (como es el caso de [AFV]), pero ninguna de las dos posturas nos parece satisfactoria en el caso de textos académicos. La versión del Lema de Sperner expuesta en [May] no se apoya en el mencionado lema fundamental, pero, como explicamos detalladamente en la memoria, es más débil que la versión tradicional y no permite probar el

Teorema de Brouwer.

La primera versión que presentamos del Teorema de Brouwer se basa en la expuesta en [Eng1], donde se sigue el esquema tradicional siguiente: se demuestra en primer lugar el Lema de Sperner, a partir de él se obtiene el Lema KKM (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz) y, finalmente, se concluye con el Teorema de Brouwer.

La segunda versión que presentamos del Teorema de Brouwer se basa en la expuesta en [ES], donde también se demuestra en primer lugar el Lema de Sperner (usando, como ya hemos dicho antes, el lenguaje de las aplicaciones simpliciales), a continuación se usa el Lema de Sperner para probar que la esfera S^{n-1} no es un retracto de la bola E^n y, a partir de aquí, se obtiene el Teorema de Brouwer.

Llegados aquí, habríamos probado

$$Sperner \quad \Rightarrow \quad KKM \quad \Rightarrow \quad Brouwer$$

Demostramos después la equivalencia de estos tres resultados, probando en la sección 2.5 que el Lema de Sperner puede obtenerse a partir del Teorema de Brouwer.

Como consecuencia del Teorema de Brouwer probamos que la esfera S^{n-1} no es un espacio contráctil, y que los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos si $n \neq m$. Es claro que si $n > 1$, entonces $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos, pues si a $\mathbb{R}$ le quitamos un punto, el espacio resultante deja de ser conexo, mientras que sigue siendo conexo el espacio obtenido al quitarle cualquier punto a $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, si $n > m > 1$, no conocemos ninguna forma elemental de probar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos.

Aunque es bien conocido que el Teorema de la Curva de Jordan puede obtenerse de forma elemental a partir del Teorema de Brouwer para dimensión dos, decidimos desde un principio no incluir este resultado en la memoria, ya que la demostración del Teorema de Brouwer para dimensión dos puede obtenerse también de forma elemental, sin acudir al Lema de Sperner, como puede verse en [GP].

Pasamos a resumir el contenido de cada capítulo, mencionando la bibliografía utilizada en cada uno de ellos.

Este trabajo consta de dos capítulos. El primer capítulo está compuesto por dos secciones. En la primera, demostramos algún resultado no trivial de topología general del que hacemos uso mas adelante. La segunda sección contiene los resultados de topología simplicial que necesitaremos en el segundo capítulo, como es el caso del teorema de aproximación simplicial. Estos resultados han sido estudiados en la asignatura “Topología Algebraica”. La bibliografía utilizada para este primer capítulo ha sido [ADQ], [Mun1], [Mun2] y [Mau].

El segundo capítulo es más extenso que el anterior y consta de varias secciones. En la primera, ponemos especial énfasis en las subdivisiones baricéntricas, enunciando y probando algún resultado que nos sirve para las secciones posteriores. En la segunda sección, estudiamos el Lema de Sperner a partir, principalmente, de la referencia [Eng1]. A continuación seguimos el esquema clásico de demostrar el Lema KKM y, como consecuencia, el Teorema de Brouwer. En la tercera sección hemos enunciado el Lema de Sperner de una forma equivalente, en la cual hacemos uso de las aplicaciones simpliciales. Seguimos un esquema distinto al anterior ya que en primer lugar demostramos la no retracción de la bola $\mathbb{E}^n$ sobre $\mathbb{S}^{n-1}$, para demostrar posteriormente el Teorema de Brouwer de nuevo. Para esta parte hemos hecho uso de la referencia [ES] para el Lema de Sperner, y de [Wil] para la no retracción y el teorema del punto fijo. En la cuarta sección hemos tratado de demostrar nuevamente el Teorema de Brouwer con la variante del lema de Sperner de [May], la cual pensábamos que era equivalente a las anteriores. Más adelante nos percatamos de que esta versión es más débil que las anteriores y, como ya hemos mencionado, no permite demostrar el Teorema de Brouwer. Algunos argumentos usados en [May] no son correctos. En la quinta sección vemos que el Lema de Sperner, el Lema KKM y el Teorema de Brouwer son equivalentes. Para ello, solamente hemos necesitado probar que el Teorema de Brouwer implica el Lema de Sperner, usando como referencia [PJ], ya que las demás implicaciones han sido demostradas en secciones anteriores. En la sexta sección demostramos la equivalencia entre que la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ no es contráctil, que $\mathbb{E}^n$ tiene la propiedad del punto fijo y que $\mathbb{S}^{n-1}$ no es un retracto de $\mathbb{E}^n$. En la última sección hacemos una introducción al concepto de dimensión de recubrimiento de Lebesgue. Seguimos el esquema de demostración propuesto en [May], pero algunas de sus demostraciones son incorrectas y otras son muy poco explícitas. Subsanamos estas deficiencias acudiendo al texto [Eng2]. Nuestro objetivo es probar que si $m \neq n$, los espacios topológicos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos. Para demostrar este resultado hacemos uso del Lema KKM probado en secciones anteriores.

Capítulo 1

Conceptos previos

Este capítulo consta de dos secciones. En la primera, demostramos algún resultado no trivial de topología general del que hacemos uso mas adelante. La segunda sección contiene los resultados de topología simplicial que necesitaremos en el segundo capítulo, como es el caso del teorema de aproximación simplicial. Estos resultados han sido estudiados en la asignatura “Topología Algebraica”. La bibliografía utilizada para este primer capítulo ha sido [ADQ], [Mun1], [Mun2] y [Mau].

1.1 Algunos resultados de topología general

Lema 1 (Lema del recubrimiento de Lebesgue:)**.** Para todo recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de un espacio métrico compacto (X, d), existe un número $\delta > 0$ tal que, todo subconjunto de X con diámetro menor que δ, está contenido en algún elemento del recubrimiento $\mathcal{A}$. Al número δ se le conoce como un *número de Lebesgue* para el recubrimiento $\mathcal{A}$.

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento por abiertos de X. Si X es un elemento de $\mathcal{A}$, entonces cualquier número positivo en un número de Lebesgue para $\mathcal{A}$.

Supongamos ahora que X no es un elemento de $\mathcal{A}$. Dado que X es un espacio compacto, podemos extraer de $\mathcal{A}$ un subrecubrimiento finito de X, dado por $\{A_1, \dots A_n\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos el cerrado $C_i := X - A_i$. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la función dada por:

$$f(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i).$$

Dado un $x \in X$, elegimos i tal que $x \in A_i$, y tomamos $\varepsilon > 0$ de tal forma que la bola abierta de radio ε y centro x esté contenida en A_i. Esto implica que $d(x, C_i) \geq \varepsilon$, luego $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{n}$. Dado que f es continua y está acotada inferiormente, tiene un valor mínimo, al que denominaremos δ. Tomamos ahora un subconjunto B de diámetro menor que δ. Si tomamos un punto $x_0 \in B$, se tiene que $B \subseteq B(x_0, \delta)$. Como

$$\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_j), \text{ para cierto } j \in \{1, \ldots, n\},$$

la bola abierta de radio δ y centrada en x_0 está contenida en A_j. Luego $B \subseteq A_j$. $\square$

Nos va a ser útil una versión del lema anterior utilizando cerrados en vez de abiertos.

Corolario 2. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto de cerrados de un espacio métrico compacto (X, d), tal que

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \emptyset.$$

Existe un número $\delta > 0$ tal que, para todo subconjunto $B \in \mathcal{P}(X)$ con un diámetro menor que δ, se tiene que $B \cap C = \emptyset$ para cierto $C \in \mathcal{C}$.

Demostración: En primer lugar, definimos la familia abierta $\mathcal{A}$ formada por los abiertos de la forma $A := X \setminus C$, donde $C \in \mathcal{C}$. Tenemos que $\mathcal{A}$ es un recubrimiento de X ya que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (X \setminus C) = X \setminus \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = X.$$

Sea $\delta > 0$ un número de Lebesgue de $\mathcal{A}$, veamos que este número cumple la propiedad del enunciado. Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existe un subconjunto $B \in \mathcal{P}(X)$ de diámetro menor que δ tal que $B \cap C \neq \emptyset$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Esto significa que $B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$, o lo que es lo mismo, que no está contenido en ningún $A \in \mathcal{A}$, lo cual es un absurdo ya que contradice el lema 1. $\square$

Teorema 3. Sea K un subespacio compacto, convexo y de interior no vacío de $\mathbb{R}^n$. Existe un homeomorfismo $f : \mathbb{E}^n \longrightarrow K$ tal que $f(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathrm{Fr}\ K$.

Demostración: Veamos en primer lugar que podemos suponer que $\mathbb{E}^n \subseteq K$. Sea $x_0 \in \mathrm{Int}\ K$, luego existe una bola cerrada de radio r tal que $\bar{B}(x_0, r) \subseteq K$, por lo que el isomorfismo afín

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \frac{x - x_0}{r} \end{aligned}$$

implica que $\mathbb{E}^n = \phi(\bar{B}(x_0, r)) \subseteq \phi(K)$, siendo este último un conjunto compacto, convexo y de interior no vacío por ser ϕ un isomorfismo.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C(U, x_0)$ al cono abierto sobre U con vértice x_0, es decir:

$$C(U, x_0) := \bigcup_{u \in U} \{x_0 + t \cdot (x_0 - u) : 0 < t < 1\}.$$

Para cada $x \in \text{Int } K$, la semirrecta dada por

$$L_x := \{\lambda x : x \neq 0, \lambda \geq 0\},$$

corta a Fr K en un único punto por la siguiente razón. El conjunto K es acotado mientras que L_x no lo es, luego existe algún punto de L_x que no se encuentra en el conjunto K, mientras que en este hemos supuesto que se encuentra el 0. Es decir, existe algún $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 \cdot x \in \text{Fr } K$. Veamos ahora la unicidad.

Supongamos que existe $0 < \lambda' < \lambda_0$ tal que $\lambda' \cdot x \in \text{Fr } K$. Entonces $\lambda' x = \frac{\lambda'}{\lambda_0} \lambda_0 x$, luego $0 < \frac{\lambda'}{\lambda_0} < 1$. Por esta razón se tiene que $\lambda' x \in C(\lambda_0 x, \text{Int } \mathbb{E}^n)$, ya que $\lambda' x$ está contenido en el segmento abierto que une 0 con $\lambda_0 x$, es decir, pertenece a su interior. Además, el cono abierto está contenido en el cono cerrado, y este a su vez esta contenido en el convexo K. Por lo que $\lambda' x$ pertenece al interior de K, lo cual es un absurdo ya que hemos supuesto que pertenece a la frontera. Como consecuencia, el conjunto L_x interseca a Fr K en un único punto.

Definimos ahora la siguiente aplicación continua:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} : \text{Fr } K &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\longmapsto \frac{x}{||x||} \end{aligned}$$

Veamos que es biyectiva, y como esta definida entre dos espacios compactos y de Hausdorff, será por lo tanto un homeomorfismo.

Para ver que es inyectiva supongamos que existen $x_1 \neq x_2$ que pertenecen a Fr K de tal forma que $\alpha^{-1}(x_1) = \alpha^{-1}(x_2)$. Sea $z := \frac{x_1}{||x_1||} = \frac{x_2}{||x_2||}$. Tenemos entonces que $x_i = ||x_i|| z \in L_z$ para $i = 1, 2$. Pero esto es un absurdo ya que ambos pertenecen a la frontera de K, por lo que $x_1 = x_2$ ya que L_z corta a Fr K en un único punto.

En cuanto a la sobreyectividad, sea $z \in \mathbb{S}^{n-1}$, es decir, $||z|| = 1$. Sea $\{x\} = L_z \cap \text{Fr } K$. Veamos que $\frac{x}{||x||} = z$. Dado que $x \in L_z$, existe cierto $\lambda > 0$ (no puede ser $\lambda = 0$ ya que $x \in \text{Fr } K$, pero $0 \notin \text{Fr } K$) tal que $x = \lambda z$. Además, $||x|| = \lambda ||z|| = \lambda$, luego $\frac{x}{||x||} \frac{\lambda}{\lambda} = z$.

Definimos a continuación la aplicación continua $f : \mathbb{E}^n \longrightarrow K$, dada por

$$f(y) = \begin{cases} ||y|| \cdot \alpha\left(\dfrac{y}{||y||}\right), & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Al igual que con la función α^{-1}, dado que está definida entre dos espacios compactos y de Hausdorff, basta ver que es biyectiva para concluir que es un homeomorfismo.

Probemos la inyectividad. Sean $y_1, y_2 \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ tales que $f(y_1) = f(y_2)$, es decir, $||y_1||\alpha(\frac{y_1}{||y_1||}) = ||y_2||\alpha(\frac{y_2}{||y_2||})$. Si $y \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$, es obvio que $y \in L_y$ y además $\frac{y}{||y||} \in L_y$. También es fácil ver que si $\frac{y}{||y||} \in L_y$, entonces $\alpha(\frac{y}{||y||}) \in L_y$ y $||y||\alpha(\frac{y}{||y||}) \in L_y$. Es decir $y_1 \in L_{y_2}$ y $y_2 \in L_{y_1}$, luego $L_{y_1} = L_{y_2}$.

Si $y \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$, entonces $\left\{\alpha(\frac{y}{||y||})\right\} = L_y \cap \text{Fr } K$. Por lo que

$$\left\{\alpha(\frac{y_1}{||y_1||})\right\} = L_{y_1} \cap \text{Fr } K = L_{y_2} \cap \text{Fr } K = \left\{\alpha(\frac{y_2}{||y_2||})\right\}.$$

Dado que α es inyectiva y su imagen es no nula, tenemos que $||y_1|| = ||y_2||$ a partir de la igualdad $f(y_1) = f(y_2)$. Concluimos entonces que $y_1 = y_2$.

Para probar la sobreyectividad, tomamos $z \in K$ no nulo. Vamos a buscar un $y \in \mathbb{E}^n$ tal que $||y||\alpha(\frac{y}{||y||})$. Sea $L_z \cap \text{Fr } K = \{x\}$. Veamos que si $y \in L_z$ y se cumple que $||y|| = \frac{||z||}{||x||}$, entonces $f(y) = z$. Tenemos que $f(y) = ||y||\alpha(\frac{y}{||y||}) = ||y||x$, ya que $\frac{y}{||y||} \in L_z$. Además $||f(y)|| = ||y|| \cdot ||x|| = \frac{||z||}{||x||} \cdot ||x|| = ||z||$. Como consecuencia, dado que $||f(y)|| = ||z||$ y $f(y) \in L_z$, entonces la única opción es que $f(y) = z$. En el caso en el que $z = 0$ es obvio que $f(0) = 0$.

En cuanto a la continuidad de la función f, al restringir esta aplicación al abierto $\mathbb{E}^n$, obtenemos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow K \\ y &\longmapsto ||y||\alpha\left(\frac{y}{||y||}\right) \end{aligned}$$

que es continua. Luego f es continua en cada uno de los puntos de $\mathbb{E}^n \setminus \{0\}$.

Para probar la continuidad en el punto 0, consideramos una sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ de puntos de $\mathbb{E}^n$ que converge hacia 0. Basta ver que $f(y_n) \longrightarrow 0$. En primer lugar se tiene que $||y_n|| \longrightarrow 0$. Como consecuencia, $f(y_n) = ||y_n||\alpha(\frac{y_n}{||y_n||}) \longrightarrow 0$, ya que, cómo K es compacto, el término $\alpha(\frac{y_n}{||y_n||})$ está acotado.

Concluimos finalmente que el compacto convexo de interior no vacío K, es homeomorfo a la bola $\mathbb{E}^n$. □

1.2 Símplices geométricos y complejos simpliciales

Definición 4. Sean $a_0, \ldots, a_n$ puntos de $\mathbb{R}^n$. Diremos que son *afínmente independientes* si los vectores $a_1 - a_0, \ldots a_n - a_0$ son linealmente independientes.

Definición 5. Dados $n+1$ puntos afínmente independientes $a_0, \ldots, a_n$, llamaremos *n-símplice* al conjunto convexo:

$$\sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) a_k \text{ con } \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) = 1 \text{ y } \lambda_k(x) \geq 0 \text{ para todo } k\}$$

Los puntos $a_0, \ldots, a_n$ serán los *vértices de* σ, que escribiremos como $V(\sigma) := \{a_0, \ldots, a_m\}$. Los símplices engendrados por subconjuntos no vacíos de $\{a_0, \ldots, a_n\}$ diremos que son *caras* de σ. Las caras de σ diferentes del propio σ se denominan *caras propias*. Los escalares $\lambda_k(x)$ están unívocamente determinados por el punto x, y se denominan *coordenadas baricéntricas de* x con respecto a los puntos a_k. En cuanto a la notación, los símplices los denotaremos por $\sigma :=< a_0, \ldots, a_n >$.

Definición 6. Sea σ un símplice. A la unión de las caras propias de σ la denominaremos la *frontera (geométrica)* de σ, que denotaremos por $\mathrm{Fr}^{\mathrm{g}}\, \sigma$. El *interior (geométrico)* de σ es el subconjunto de σ definido por la ecuación $\mathrm{Int}^{\mathrm{g}}\, \sigma := \sigma - \mathrm{Fr}^{\mathrm{g}}\, \sigma$.

Definición 7. Dado un símplice $\sigma :=< a_0, \ldots, a_n >$, llamamos baricentro de σ al punto

$$\hat{\sigma} := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} a_k.$$

Proposición 8. Sea σ un n-símplice con vértices $a_0, \ldots, a_n$. Si $x \in \sigma$ y tiene los escalares $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_n(x)$ como coordenadas baricéntricas, la aplicación

$$\begin{aligned} \lambda_k : \sigma &\longrightarrow [0,1], \\ x &\longmapsto \lambda_k(x) \end{aligned}$$

con $k = 0, \ldots, n$, es continua.

Demostración: Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la traslación $T(x) := x - a_0$ y, para $k = 0, \ldots, n$, sea $\phi_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ el isomorfismo afín tal que $\phi_i(a_k - a_0) = e_k$, con $e_k := (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, donde el 1 está en el k-ésimo lugar. Definimos ahora la aplicación inclusión $i : \sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, donde $i(x) := x$. Sea $\pi_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la k-proyección. Dicho todo esto, para $k = 1, \ldots, n$ definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{tikzcd} \sigma \arrow[r, hook, "i"] \arrow[drrr, dashed, "\lambda_k"] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "T"] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi_k"] \\ & & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Puesto que $\lambda_k = \pi_k \circ \phi \circ \tau \circ i$, concluimos que λ_k es una aplicación continua ya que es composición de aplicaciones continuas. Falta el caso en el que $k = 0$. Para ello, definimos la aplicación

$$\lambda_0 := 1 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k,$$

que también es una aplicación continua por ser combinación lineal de aplicaciones continuas.

$\square$

Definición 9. Un *complejo simplicial* es un conjunto finito, $\mathcal{K}$, de símplices de $\mathbb{R}^n$ que verifican estas dos condiciones:

1. Si $\tau < \sigma$ y $\sigma \in \mathcal{K}$, entonces $\tau \in \mathcal{K}$.

2. La intersección de dos símplices de $\mathcal{K}$, o bien es vacía, o bien es una cara común de estos.

Definición 10. Sea $\mathcal{K}$ un complejo simplicial de $\mathbb{R}^n$. Denominaremos *poliedro de* $\mathcal{K}$ al subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por la unión de los símplices de $\mathcal{K}$, y lo denotaremos por $|\mathcal{K}|$, es decir,

$$|\mathcal{K}| := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Proposición 11. Sea $\mathcal{K}$ un complejo simplicial y sea $x \in |\mathcal{K}|$. Entonces x pertenece al interior de un único símplice de $\mathcal{K}$, al que denominaremos *símplice soporte de* x.

Demostración: Si $x \in |\mathcal{K}|$ entonces $x \in \sigma$ para cierto símplice $\sigma \in \mathcal{K}$. Supongamos que el símplice σ es de la forma $\sigma := < a_0, \ldots, a_n >$, entonces podemos expresar x a partir de las coordenadas baricéntricas respecto de los vértices de σ, es decir,

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) a_i, \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) = 1 \text{ y } \lambda_i(x) \geq 0 \text{ para todo } i.$$

Consideramos ahora el símplice $\tau := < a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} >$, donde $i_0, \ldots, i_k$ son los índices que cumplen la desigualdad $\lambda_{i_j}(x) > 0$, con $0 \leq j \leq k$. Tenemos entonces que $x \in \operatorname{Int}^{\mathrm{g}} \tau$. Además τ pertenece al complejo simplicial $\mathcal{K}$ ya que τ es una cara de σ y $\sigma \in \mathcal{K}$.

Para probar la unicidad, supongamos que para $\tau, \tau' \in \mathcal{K}$, tenemos que x pertenece a $\operatorname{Int}^{\mathrm{g}} \tau \cap \operatorname{Int}^{\mathrm{g}} \tau'$. La intersección de los símplices τ y τ' es no vacía ya que contiene a x, luego debe ser una cara común de estos. Tenemos que $x \in \operatorname{Int}^{\mathrm{g}} \tau$, luego $x \notin \operatorname{Fr}^{\mathrm{g}} \tau$, es decir, la única cara de τ a la que pertenece x es el propio τ. Llegamos a la misma conclusión si razonamos de la misma forma para τ', luego $\tau = \tau'$. $\square$

Definición 12. Sea $\mathcal{K}$ un complejo simplicial y sea $r \geq 0$. El complejo formado por los símplices de $\mathcal{K}$ de dimensión igual o menor que r es el r-*esqueleto* de $\mathcal{K}$. Lo denotaremos por $\mathcal{K}^r$.

Observación 13. Si $\mathcal{K}$ es un complejo simplicial, denotaremos con $V(\mathcal{K})$ al conjunto de los vértices de $\mathcal{K}$ o, lo que es lo mismo, $V(\mathcal{K}) := \mathcal{K}^0$. Obsérvese que si σ es un símplice, entonces $V(K(\sigma))$ es el conjunto de vértices de σ, es decir, $V(K(\sigma)) = V(\sigma)$.

Definición 14. Sea $\mathcal{K}$ un complejo simplicial y sea $v \in V(\mathcal{K})$. La *estrella de* v *con respecto a* $\mathcal{K}$, $\mathrm{St}(v, \mathcal{K})$, es la unión de interiores geométricos de aquellos símplices de $\mathcal{K}$ de los que v es vértice, es decir,

$$\mathrm{St}(v, \mathcal{K}) := \bigcup \{\mathrm{Int}^{\mathrm{g}}\, \sigma : \sigma \in \mathcal{K}, v \in V(\sigma)\}.$$

Equivalentemente, un punto x de $|\mathcal{K}|$ pertenece a $\mathrm{St}(v, \mathcal{K})$ si, y solo si, v es uno de los vértices del símplice soporte de x.

Proposición 15. Sea $\mathcal{K}$ un complejo simplicial y sea v un vértice de $\mathcal{K}$. Se verifica que $\mathrm{St}(v, \mathcal{K})$ es abierto en $|\mathcal{K}|$.

Demostración: Vamos a probar que $|\mathcal{K}| \setminus \mathrm{St}(v, \mathcal{K})$ es un cerrado de $|\mathcal{K}|$ viendo que

$$|\mathcal{K}| \setminus \mathrm{St}(v, \mathcal{K}) = \cup\{\tau \in \mathcal{K} : v \notin V(\tau)\}.$$

Sabemos que

$$|\mathcal{K}| \setminus \mathrm{St}(v, \mathcal{K}) = \cup\{\mathrm{Int}^{\mathrm{g}}\, \tau \in \mathcal{K} : v \notin V(\tau)\},$$

ya que la intersección de los interiores de dos símplices distintos de un complejo es siempre vacía. Tenemos además que

$$\cup\{\mathrm{Int}^{\mathrm{g}}\, \tau \in \mathcal{K} : v \notin V(\tau)\} \subseteq \cup\{\tau \in \mathcal{K} : v \notin V(\tau)\}.$$

Veamos que si $\tau \in \mathcal{K}$ y v no es vértice de τ, entonces $\tau \subseteq \mathcal{K} \setminus \mathrm{St}(v, \mathcal{K})$. Vamos a razonar por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existe $x \in \tau \cap \mathrm{Int}^{\mathrm{g}}\, \sigma$, siendo σ un símplice de $\mathcal{K}$ tal que $v \in V(\sigma)$. Dado que $x \in \tau$, existe un $\tau' < \tau$ tal que $x \in \mathrm{Int}^{\mathrm{g}}\, \tau'$. Como $\mathcal{K}$ es un complejo simplicial y σ es el símplice soporte de x, se tiene que $\tau' = \sigma$, pero entonces v es un vértice de τ' y, como consecuencia, de τ, lo cual es un absurdo.

Tenemos por lo tanto que el conjunto $\mathrm{St}(v, \mathcal{K})$ es un abierto de $|\mathcal{K}|$. □

Definición 16. Sean los conjuntos $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ complejos simpliciales. Diremos que una aplicación $\varphi : V(\mathcal{K}) \longrightarrow V(\mathcal{L})$ es una *aplicación simplicial* si satisface la siguiente propiedad:

Si $\sigma :=< a_0, \ldots, a_n >$ es un símplice de $\mathcal{K}$, entonces $\{\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_n)\}$ es el conjunto de vértices de un símplice de $\mathcal{L}$.

La aplicación φ también induce una aplicación continua $|\mathcal{K}| \longrightarrow |\mathcal{L}|$, que seguiremos denotando con φ, de la siguiente forma: Si $x \in < a_0, \ldots, a_n > \in \mathcal{K}$ y $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_n(x)$ son las coordenadas baricéntricas de x con respecto a los puntos $a_0, \ldots, a_n$, entonces

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) \cdot a_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) \cdot \varphi(a_i).$$

Podemos interpretar también la aplicación φ como una aplicación entre los complejos simpliciales $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$, es decir, $\varphi(< a_0, \ldots, a_n >)$ es el símplice de $\mathcal{L}$ cuyos vértices son $\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_n)$ (obsérvese que algunos de los puntos $\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_n)$ pueden estar repetidos).

Definición 17. Sea $\mathcal{K}$ un complejo símplicial. Llamaremos *medida de* $\mathcal{K}$, y la denotaremos por $m(\mathcal{K})$, al máximo de los diámetros de los símplices de $\mathcal{K}$.

Proposición 18. Sean $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ símplices tales que $\sigma_0 < \cdots < \sigma_n$. Entonces los baricentros $\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_n$ son puntos afinmente independientes.

Demostración: Vamos a probar que $\hat{\sigma}_n$ no está contenido en el subespacio afín Q generado por los puntos $\hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1}$. Observemos que si $0 \leq i \leq n-1$, entonces $\hat{\sigma}_i \in \sigma_i \leq \sigma_{n-1}$, luego, $\hat{\sigma}_i \in \sigma_{n-1}$. Así pues, el subespacio afín Q estará contenido en el subespacio afín P generado por $V(\sigma_{n-1})$, mientras que $\hat{\sigma}_n \notin P$ y, en consecuencia, $\hat{\sigma}_n \notin Q$. $\square$

Definición 19. Sean $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ dos complejos simpliciales. Diremos que $\mathcal{L}$ es una *subdivisión de* $\mathcal{K}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $|\mathcal{K}| = |\mathcal{L}|$.

2. Si $\tau \in \mathcal{L}$, entonces existe un $\sigma \in \mathcal{K}$ tal que $\tau \subseteq \sigma$.

Definición 20. Sea $\mathcal{K}$ un complejo simplicial. La *subdivisión baricéntrica de* $\mathcal{K}$, a la que denotaremos $\mathcal{K}'$, es el complejo simplicial formado por los símplices de la forma

$$< \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_n >,$$

donde $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ son símplices de $\mathcal{K}$ verificando que $\sigma_0 < \cdots < \sigma_n$.

Definimos las subdivisiones baricéntricas reiteradas mediante:

$$\mathcal{K}^{(l)} := (\mathcal{K}^{(l-1)})', \text{ con } l \geq 1.$$

Teorema 21. Sea $\mathcal{K}$ un complejo simplicial. Se verifica que la medida de la l-ésima subdivisión baricéntrica de $\mathcal{K}$ tiende hacia 0 cuando l tiende hacia infinito, es decir,

$$\lim_{l \longrightarrow \infty} m(\mathcal{K}^{(l)}) = 0.$$

Demostración: Denotemos por $\delta(A)$ el diámetro de un subconjunto acotado A de $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$\delta(A) := \max_{x,y \in A} ||x - y||.$$

Sea λ el máximo de las longitudes de las aristas de $\mathcal{K}$, por lo que $\delta(\mathrm{St}(v, \mathcal{K})) \leq 2\lambda$ para todo v de $V(\mathcal{K})$. Definimos de la misma forma λ', pero para la primera subdivisión baricéntrica $\mathcal{K}'$. Sea $\sigma :=< a_0, \dots, a_p >$ un p-símplice de $\mathcal{K}$, de tal forma que $\lambda' = ||\hat{\tau} - \hat{\sigma}||$ para cierta cara $\tau < \sigma$ de $\mathcal{K}$. Si expresamos $\hat{\tau}$ en coordenadas baricéntricas con respecto de los a_i, tenemos que

$$||\hat{\sigma} - \hat{\tau}|| \leq \max_{0 \leq i \leq p} ||\hat{\sigma} - a_i||.$$

En coordenadas baricéntricas, tenemos

$$||\hat{\sigma} - a_i|| = ||\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{p+1} a_j - a_i|| \leq \frac{1}{p+1} \max_{0 \leq j \leq p} ||\sum_{j=0}^{p} a_j - a_i||.$$

Dado que uno de los sumandos del último sumatorio es nulo, concluimos que $||\hat{\sigma} - a_i|| \leq \frac{p}{p+1}\lambda$. Luego $\lambda' \leq \frac{n}{n+1}\lambda$, siendo n la dimensión de $\mathcal{K}$, es decir, que el máximo de las longitudes de las aristas de la l-ésima subdivisión baricéntrica de $\mathcal{K}$ sera menor o igual que $(\frac{n}{n+1})^l \lambda$. Como $\frac{n}{n+1} < 1$, concluimos que

$$m(\mathcal{K}^{(l)}) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^l \lambda \longrightarrow 0.$$

$\square$

Definición 22. Sean $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ dos complejos simpliciales y sea $f : |\mathcal{K}| \longrightarrow |\mathcal{L}|$ una aplicación continua. Una *aproximación simplicial de* f es una aplicación simplicial $g : V(\mathcal{K}) \longrightarrow V(\mathcal{L})$ tal que

$$f(\mathrm{St}(v, \mathcal{K})) \subseteq \mathrm{St}(g(v), \mathcal{L})$$

para cada $v \in V(\mathcal{K})$.

Teorema 23. Sean $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ dos complejos simpliciales y sea $f : |\mathcal{K}| \longrightarrow |\mathcal{L}|$ una aplicación continua. Si para cada $a \in V(\mathcal{K})$, existe un $b \in V(\mathcal{L})$ tal que $f(\mathrm{St}(a, \mathcal{K})) \subseteq \mathrm{St}(b, \mathcal{L})$, entonces f admite una aproximación simplicial g tal que $g(a) = b$ para cada vértice $a \in V(\mathcal{K})$.

Demostración: Definamos la aplicación $g : V(\mathcal{K}) \longrightarrow V(\mathcal{L})$, donde $g(a) = b$ para cada $a \in V(\mathcal{K})$. Para ver que es una aplicación simplicial, veamos que si $\sigma :=< a_0, \ldots, a_n >$ es un símplice de $\mathcal{K}$, entonces el conjunto de vértices $g(a_0), \ldots, g(a_n)$ forman un vértice en $\mathcal{L}$. Sea $x \in \operatorname{Int}^{\mathrm{g}} \sigma$, entonces

$$x \in \mathrm{St}(a_0, \mathcal{K}) \cap \cdots \cap \mathrm{St}(a_n, \mathcal{K}),$$

luego

$$f(x) \in \mathrm{St}(g(a_0), \mathcal{L}) \cap \cdots \cap \mathrm{St}(g(a_n), \mathcal{L}).$$

Por lo tanto, los puntos $g(a_0), \ldots, g(a_n)$ son vértices del símplice soporte de $f(x)$, lo que implica que forman un símplice en $\mathcal{L}$. $\square$

Teorema 24 (Teorema de Aproximación Simplicial)**.** Sean $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ complejos simpliciales. Si $f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ es una aplicación continua, entonces existe un l tal que $f : \mathcal{K}^{(l)} \longrightarrow \mathcal{L}$ admite una aproximación simplicial.

Demostración: Dado que f es continua, tomamos el recubrimiento dado por los abiertos $f^{-1}(\mathrm{St}(v, \mathcal{L}))$ donde $v \in V(\mathcal{L})$. Por 1 y 21, podemos tomar un número de Lebesgue δ para este recubrimiento, luego existirá cierto $l \geq 0$ tal que $m(\mathcal{K}^{(l)}) < \delta$. Dicho esto, para cada vértice $w \in V(\mathcal{K}^{(l)})$, existe un vértice $v \in V(\mathcal{L})$ tal que $\mathrm{St}(w, \mathcal{K}^{(l)}) \subseteq f^{-1}(\mathrm{St}(v, \mathcal{L}))$. En virtud del teorema 23, definimos la aplicación simplicial $\varphi : V(\mathcal{K}^{(l)}) \longrightarrow V(\mathcal{L})$ dada por $\varphi(w) = v$, luego

$$f(\mathrm{St}(w, \mathcal{K}^{(l)})) \subseteq f(f^{-1}(\mathrm{St}(v, \mathcal{L}))) = \mathrm{St}(\varphi(w), \mathcal{L}),$$

es decir, la aplición φ definida es una aproximación simplicial de f. $\square$

Capítulo 2

Lema de Sperner y Teorema del punto fijo de Brouwer

Este segundo capítulo es más extenso que el anterior y consta de varias secciones. En la primera sección, ponemos especial énfasis en las subdivisiones baricéntricas, enunciando y probando algún resultado que nos sirve para las secciones posteriores. En la segunda sección, estudiamos el Lema de Sperner a partir, principalmente, de la referencia [Eng1]. A continuación seguimos el esquema clásico de demostrar el Lema KKM y, como consecuencia, el Teorema de Brouwer. En la tercera sección hemos enunciado el Lema de Sperner de una forma equivalente, en la cual hacemos uso de las aplicaciones simpliciales. Seguimos un esquema distinto al anterior ya que en primer lugar demostramos la no retracción de la bola $\mathbb{E}^n$ sobre $\mathbb{S}^{n-1}$, para demostrar posteriormente el Teorema de Brouwer de nuevo. Para esta parte hemos hecho uso de la referencia [ES] para el Lema de Sperner, y de [Wil] para la no retracción y el teorema del punto fijo. En la cuarta sección hemos tratado de demostrar nuevamente el Teorema de Brouwer con la variante del lema de Sperner de [May], la cual pensábamos que era equivalente a las anteriores. Más adelante nos percatamos de que esta versión es una más débil que las anteriores y, como ya hemos mencionado, no permite demostrar el Teorema de Brouwer. Algunos argumentos usados en [May] no son correctos. En la quinta sección vemos que el Lema de Sperner, el Lema KKM y el Teorema de Brouwer son equivalentes. Para ello, solamente hemos necesitado probar que el Teorema de Brouwer implica el Lema de Sperner usando como referencia [PJ], ya que las demás implicaciones han sido demostradas en secciones anteriores. En la sexta sección demostramos la equivalencia entre que la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ no es contráctil, que $\mathbb{E}^n$ tiene la propiedad del punto fijo y que $\mathbb{S}^{n-1}$ no es un retracto de $\mathbb{E}^n$. En la última sección hacemos una introducción al concepto de dimensión de recubrimiento de Lebesgue. Seguimos el esquema de demostración propuesto en [May], pero algunas de sus demostraciones son incorrectas y otras son muy poco explícitas. Subsanamos estas deficiencias acudiendo al texto [Eng2]. Nuestro objetivo es probar que si $m \neq n$, los espacios topológicos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos. Para demostrar este resultado hacemos uso del Lema KKM probado en secciones anteriores.

2.1 Propiedades de las subdivisiones baricéntricas

Teorema 25. Sea $\Delta := < a_0, \ldots, a_n >$ un símplice y sea $K'(\Delta)$ el complejo derivado de $K(\Delta)$. Se cumple que todo $(n-1)$-símplice $\sigma \in K'(\Delta)$ es una cara de un único n-símplice de $K'(\Delta)$ si σ está contenido en la frontera geométrica de Δ, y σ es cara de exactamente dos n-símplices de $K'(\Delta)$ en caso contrario.

Demostración: Sea σ un $(n-1)$-símplice de $K'(\Delta)$. En primer lugar supongamos que $\sigma \subseteq \mathrm{Fr^g}\, \Delta$, por lo que tendrá la forma $\sigma = < \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1} >$, con $\sigma_0 < \cdots < \sigma_{n-1}$, siendo $\Delta \neq \sigma_{n-1}$, dado que σ está contenido en la frontera de Δ. En este caso tenemos que $< \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1}, \hat{\Delta} >$ es el único n-símplice de $K'(\Delta)$ del que σ es cara. La unicidad se debe a que, para cada j, al pasar de σ_j a σ_{j+1} la dimensión solo aumenta en una unidad y por lo tanto el vértice que se añade debe ser el baricentro de un símplice de dimensión n, pero el único que cumple está condición en $K(\Delta)$ es Δ.

Supongamos ahora que $\sigma \nsubseteq \mathrm{Fr^g}\, \Delta$, entonces tendrá la forma $\sigma = < \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1} >$, con $\sigma_0 < \cdots < \sigma_{n-1}$, siendo $\Delta = \sigma_{n-1}$. Esta situación da lugar a dos casos:

1. El primer caso es cuando existe un j, con $0 \leq j < n-1$, de tal forma que σ_{j+1} tiene dos vértices más que σ_j. Supongamos que $\sigma_j = < b_0, \ldots, b_j >$ y que $\sigma_{j+1} = < b_0, \ldots, b_j, b', b'' >$. Ahora definimos el símplice $\sigma'_j := < b_0, \ldots, b_j, b' >$, por lo que $\sigma_0 < \cdots < \sigma_j < \sigma'_j < \sigma_{j+1} < \cdots < \sigma_{n-1}$. Definimos ahora el símplice de dimensión n dado por $\sigma' := < \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}'_j, \hat{\sigma}_{j+1}, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1} >$, el cual cumple que $\sigma < \sigma'$. Se prueba de forma parecida para $\sigma_{j''} := < b_0, \ldots, b_j, b'' >$, obteniendo el símplice $\sigma'' := < \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}''_j, \hat{\sigma}_{j+1}, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1} >$ con $\sigma < \sigma''$, pero $\sigma' \neq \sigma''$. Entonces σ es cara de dos símplices. La unicidad se debe a lo siguiente. Definamos otro símplice $\tilde{\sigma_j} := < b_0, \ldots, b_j, \tilde{b} >$, con $\tilde{b}$ distinto de b' y b''. Por lo que no se daría la desigualdad $\sigma_0 < \cdots < \sigma_j < \tilde{\sigma_j} < \sigma_{j+1} < \cdots < \sigma_{n-1}$, es decir, si existe el símplice $< \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_j, \hat{\tilde{\sigma}}_j, \hat{\sigma}_{j+1}, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1} >$ no pertenecería al complejo $K'(\Delta)$.

2. Supongamos ahora que σ_0 tenga la forma $\sigma_0 := < b', b'' >$. Definimos los símplices $\sigma'_0 = < b' >$ y $\sigma''_0 = < b'' >$. Razonando de forma parecida al primer caso, obtenemos

que σ es cara de dos símplices: $\sigma' :=< \hat{\sigma}_0', \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1} >$ y $\sigma'' :=< \hat{\sigma}_0'', \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1} >$. La unicidad se debe a que no existe ningún otro vértice $\tilde{b}$ que sea cara propia de σ_0, a parte de b' y b''.

□

Corolario 26. Sea $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$ un símplice. Se cumple que todo $(n-1)$-símplice $\sigma \in K^{(l)}(\Delta)$ es una cara de un único n-símplice de $K^{(l)}(\Delta)$ si σ está contenido en la frontera geométrica de Δ. Por otro lado, σ será cara de exactamente dos n-símplices de $K^{(l)}(\Delta)$ si no está contenido en la frontera de Δ.

Demostración: Vamos a probarlo por inducción sobre l.

Para $l = 1$ es el anterior teorema 25.

Supongamos que se satisface para $l-1$ y probemos que también es cierto para l. Tomemos un $(n-1)$-símplice $\sigma \in K^{(l)}(\Delta)$, luego tendrá la forma

$$\sigma =< \hat{\rho}_0, \ldots, \hat{\rho}_{j-1}, \hat{\rho}_{j+1}, \ldots, \hat{\rho}_m >,$$

con $\rho_i \in K^{(l-1)}(\Delta)$ de dimensión i, para $i \in \{0, \ldots, m\} \setminus \{j\}$. Dicho esto, podemos distinguir dos casos:

1. Si $j = m$, entonces tenemos que $\sigma \subseteq \rho_{n-1}$, es decir, está en un $(n-1)$-símplice de $\mathcal{K}^{(l-1)}$. Por hipótesis sabemos que ρ_{n-1} es cara de exactamente uno o dos símplices de $\mathcal{K}^{(l-1)}$.

   (a) Si es cara de un solo n-símplice $\rho \in \mathcal{K}^{(l-1)}$, entonces ρ_{n-1} está contenido en la frontera de σ, por lo que, al hacer la subdivisión baricéntrica de $K(\rho)$, σ estará contenido en la frontera geométrica de $K(\rho)'$ y, como consecuencia del teorema 25, es fácil ver que es cara de un único n-símplice, y está contenido en la frontera de σ.

   (b) Si es cara de exactamente dos n-símplices $\rho', \rho'' \in \mathcal{K}^{(l-1)}$, entonces $\rho_{n-1} \nsubseteq \mathrm{Fr}^{\mathrm{g}}\, \sigma$. Al razonar como en el punto anterior, se puede ver que σ es cara de un único símplice de dimensión n de la subdivisión baricéntrica de $K(\rho')$ y de otro único de la subdivisión de $K(\rho'')$, ya que está contenido tanto en la frontera de ρ' como en la de ρ'', luego σ es cara de exactamente dos símplices n-dimensionales de $K^{(l)}(\Delta)$, y además σ no está contenido en la frontera de Δ.

2. Si $j \neq m$, basta tomar el símplice $\rho_m \in \mathcal{K}^{(l-1)}$ que es el único del complejo simplicial en el que está contenido σ, por lo que aplicamos el anterior teorema 25 a la

subdivisión baricéntrica de ρ_m y concluimos que σ es cara de dos únicos símplices n-dimensionales de $K^{(l)}(\Delta)$, y no está contenido en la frontera de Δ.

$\square$

2.2 Lema de Sperner y Teorema de Brouwer versión 1, según [Eng1]

La demostración tradicional del teorema de Brouwer a partir del lema de Sperner es la expuesta en [Eng1], y sigue el siguiente esquema: se prueba en primer lugar el lema de Sperner y, a partir de este, se obtiene el lema de Knaster, Kuratowski y Mazurkiewicz (lema KKM). Después, a partir del lema KKM se prueba el teorema de Brouwer.

Veremos posteriormente que el lema de Sperner, el lema KKM y el teorema de Brouwer son en realidad resultados equivalentes.

Definición 27. Sea $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$ un n-símplice y sea $\mathcal{K}$ una subdivisión del complejo $K(\Delta)$. Si una aplicación $s : V(\mathcal{K}) \longrightarrow \{0, \ldots, n\}$ satisface que

$$s(v) \in \{i_0, \ldots, i_k\} \text{ cuando } v \in < a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} >,$$

diremos que es un *etiquetado de Sperner*.

Si $\sigma \in \mathcal{K}$ es de dimensión n y se tiene que $|s(V(\sigma))| = n + 1$, diremos que σ tiene un *etiquetado pleno para s*.

Utilizaremos exclusivamente subdivisiones baricéntricas de $K(\Delta)$ por el motivo expuesto en el comentario que precede a la proposición 35.

Teorema 28 (Lema de Sperner, versión 1 (véase [Eng1]))**.** Sea $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$ un símplice n-dimensional, y sea $s : V(K^{(l)}(\Delta)) \longrightarrow \{0, \ldots, n\}$ un etiquetado de Sperner. Entonces existe un n-símplice de $K^{(l)}(\Delta)$ que tienen un etiquetado pleno para s.

Demostración: De hecho vamos a probar un resultado más fuerte, veremos que el número de n-símplices de $K^{(l)}(\Delta)$ con etiquetado pleno es impar. Lo vamos a demostrar por inducción sobre n.

Si $n = 0$, es trivial ya que $\Delta =< a_0 >$, $K^{(l)}(\Delta) = \{< a_0 >\}$ y $|s(\{< a_0 >\})| = 1$.

Supongamos que se satisface para $n - 1$. Al conjunto de $(n - 1)$-símplices que tienen un etiquetado pleno para s lo denotemos por L. Dicho esto, tenemos que la única cara

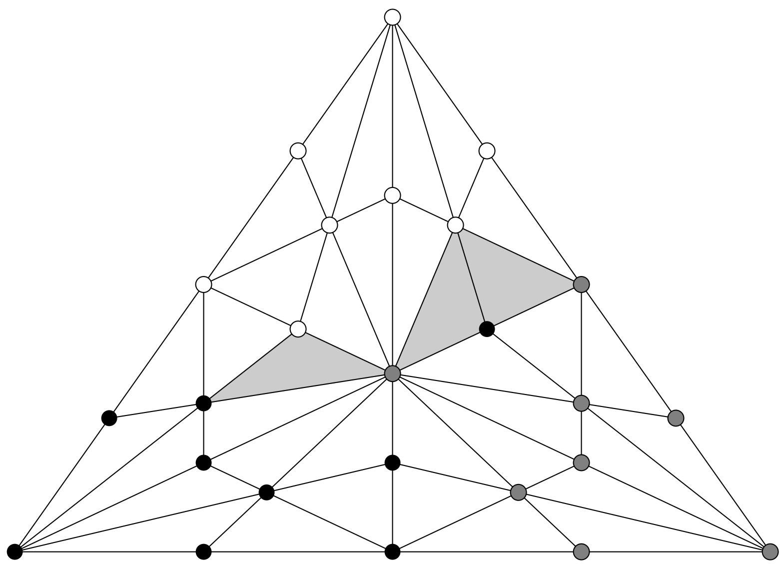

Figura 2.1: Ejemplo gráfico de que se satisface el lema para cierto etiquetado de Sperner sobre la segunda subdivisión baricéntrica de un 2-símplice. Cada elemento de la imagen de la aplicación está representado por un color distinto, es decir, hemos sustituido los números 0, 1 y 2 por los colores blanco, gris y negro.

$(n-1)$-dimensional de Δ que contiene elementos de L es $\Delta_n :=< a_0, \ldots, a_{n-1} >$. Por inducción hemos asumido que el número de símplices de L que están contenidos en Δ_n es un número impar. Llamemos a esta cifra a.

Sea ahora $P := \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ el conjunto de los n-símplices de $K^{(l)}(\Delta)$. Para cada $j \leq m$, denotamos por b_j al número de caras de σ_j que pertenecen a L, y sea $N_j := s(V(\sigma_j))$. A partir de estas definiciones tenemos lo siguiente:

1. Si $N_j = \{0, 1, \ldots, n\}$, entonces $b_j = 1$, siendo su suma c.
2. Si $N_j = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, entonces $b_j = 2$, siendo su suma un número par, es decir, se podrá expresar como $2 \cdot d$, con $d \in \mathbb{Z}$.
3. Si $\{0, 1, \ldots, n-1\} \not\subseteq N_j$, entonces $b_j = 0$.

Hemos visto que c es el número de símplices de P que tienen un etiquetado pleno. Por lo tanto, podemos definir la igualdad

$$c + 2d = b_1 + b_2 + \cdots + b_m \tag{2.1}$$

A continuación vamos a calcular el valor de $b_1 + b_2 + \cdots + b_m$. En primer lugar, supongamos que $\sigma \in \mathcal{L}$ está contenido en la frontera geométrica de Δ, luego la única opción es que sea la cara propia $< a_1, \dots, a_{n-1} >$, así que, por el corolario 26, sabemos que σ esta contenido en un único elemento de P.

Supongamos ahora que σ no esta contenido en la frontera de Δ, entonces será cara de dos elementos de P por el mismo resultado. Como consecuencia se da la siguiente igualdad:

$$a + 2e = b_1 + b_2 + \cdots + b_m \quad \text{con } e \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

Dado que a es un número impar por hipótesis, a partir de las ecuaciones (2.1) y (2.2) concluimos que c es impar, ya que $c = 2(d + e) + a$. $\square$

Teorema 29 (Lema KKM)**.** Sea $\Delta :=< a_0, \dots, a_n >$ un n-símplice y sea $\{C_i\}_{i=0}^n$ una familia de subconjuntos cerrados de Δ. Si para cada cara $< a_{j_0} \dots a_{j_k} >$ de Δ tenemos que

$$< a_{j_0} \dots a_{j_k} >\subseteq C_{j_0} \cup \cdots \cup C_{j_k},$$

entonces $C_0 \cap \cdots \cap C_n \neq \emptyset$.

Demostración: Supongamos que la intersección es vacía, es decir, que $C_0 \cap \cdots \cap C_n \neq \emptyset$. Definimos entonces la familia de abiertos $\{A_i\}_{i=0}^n$, donde $A_i = \Delta \backslash C_i$ para todo i, y además forma un recubrimiento del símplice Δ, es decir, $\bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i = \Delta$. Por el lema 1, existe un $\varepsilon > 0$ tal que todo subconjunto de Δ de un diámetro menor que ε, está contenido en algún A_i.

Por el teorema 24, existe un número natural l tal que la medida de la l-ésima subdivisión baricéntrica del complejo $K(\Delta)$, es menor que ε. Si $v \in< a_{j_0} \dots a_{j_k} >$, entonces existe un $0 \leq i \leq k$ tal que $v \in C_{j_i}$. Definimos entonces la aplicación

$$s : V(K^{(l)}(\Delta)) \longrightarrow \{0, \dots, n\},$$

dada por $s(v) = j_i$. Esta aplicación s es un etiquetado de Sperner ya que para todo símplice $< a_{j_0} \dots a_{j_k} >$, si $v \in V(K^{(l)}(\Delta))$ y pertenece a $< a_{j_0} \dots a_{j_k} >$, entonces $s(v) \in \{j_0 \dots j_k\}$. Por el teorema 28, existe un n-símplice $\tau :=< v_1, \dots, v_n >$ del complejo $K^{(l)}(\Delta)$, que tiene un etiquetado pleno para s, es decir, que $s(v_i) = i$ para todo $0 \leq i \leq n$. Además, dado que la medida de τ es menor que ε, estará contenido en un abierto A_j. Llegamos entonces a un absurdo pues $s(v_j) = j$, pero esto es imposible ya que entonces $v_j \in C_j$, pero $v_j \in A_j = \Delta \setminus C_j$. Concluimos que la intersección $C_0 \cap \cdots \cap C_n$, es no vacía. $\square$

Definición 30. Sea $f : A \longrightarrow A$ una aplicación. Diremos que $x \in A$ es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$.

Teorema 31 (Teorema del punto fijo de Brouwer (véase [Eng1]))**.** Sea $\mathbb{E}^n$ la bola cerrada n-dimensional de $\mathbb{R}^n$, es decir, $\mathbb{E}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$. Se satisface que toda aplicación continua $f : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$ tiene al menos un punto fijo.

Demostración: Sea $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$ un n-símplice. Entonces, por el teorema 3, dado que Δ es compacto, convexo y de interior no vacío podemos definir un homeomorfismo

$$\phi : \Delta \longrightarrow \mathbb{E}^n.$$

Tenemos que probar que toda aplicación continua $f : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$ tiene al menos un punto fijo, o lo que es equivalente, que la aplicación continua

$$g := \phi^{-1} \circ f \circ \phi : \Delta \longrightarrow \Delta$$

tiene al menos un punto fijo. Vamos a probar que si g tiene un punto fijo, entonces f también. Sea x un punto fijo de g, es decir, $g(x) = \phi^{-1}(f(\phi(x))) = x$. Tenemos entonces que $f(\phi(x)) = \phi(x)$, por lo que si $y = \phi(x)$, entonces $f(y) = y$.

Para probar que g tiene al menos un punto fijo, tenemos que cada $x \in \Delta$, lo podemos expresar como

$$x = \lambda_0(x)a_0 + \cdots + \lambda_n(x)a_n$$

donde

$$\lambda_0(x) + \cdots + \lambda_n(x) = 1,$$

y $0 \leq \lambda_i(x)$ para todo $0 \leq i \leq n$. Dado que $g(x) \in \Delta$, tenemos también

$$g(x) = \lambda_0(g(x))a_0 + \cdots + \lambda_n(g(x))a_n$$

donde

$$\lambda_0(g(x)) + \cdots + \lambda_n(g(x)) = 1,$$

y $0 \leq \lambda_i(g(x))$ para todo $0 \leq i \leq n$.

Definimos a continuación, para $0 \leq i \leq n$, los siguientes conjuntos:

$$C_i := \{x \in \Delta : \lambda_i(x) \geq \lambda_i(g(x))\}.$$

Los C_i son cerrados dado que λ_i y g son aplicaciones continuas. Sea $\sigma :=< a_{i_0}, \ldots, a_{i_k}>$ una cara de Δ y sea $x \in \sigma$. Tenemos entonces

$$\lambda_{i_0}(x) + \cdots + \lambda_{i_k}(x) = 1$$

y además

$$1 = \lambda_0(g(x)) + \cdots + \lambda_n(g(x)) \geq \lambda_{i_0}(g(x)) + \cdots + \lambda_{i_k}(g(x)),$$

por lo que

$$\lambda_{i_0}(x) + \cdots + \lambda_{i_k}(x) \geq \lambda_{i_0}(g(x)) + \cdots + \lambda_{i_k}(g(x)).$$

Esto implica que existe al menos un $j = 0, \ldots, k$, tal que $\lambda_{i_j}(g(x)) \leq \lambda_{i_j}(x)$, es decir, $x \in C_{i_j}$. Como esto se da para todos los puntos de σ, obtenemos la siguiente contención

$$\sigma =< a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} > \subseteq C_{i_0} \cup \cdots \cup C_{i_k}.$$

Por el lema 29, existe entonces al menos un $x \in C_0 \cap \cdots \cap C_n$, es decir,

$$\lambda_i(g(x)) \leq \lambda_i(x) \text{ para todo } i = 0, \ldots, n.$$

Como $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(g(x)) = 1$, se tiene entonces que

$$\lambda_i(x) = \lambda_i(g(x)) \text{ para todo } i = 0, \ldots, n,$$

es decir, que $x = g(x)$ por la unicidad de las coordenadas baricéntricas.

Concluimos finalmente que la aplicación continua $f : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$, tiene al menos un punto fijo. $\square$

2.3 Lema de Sperner y Teorema de Brouwer versión 2, según [ES]

Veremos a continuación otro enunciado del Lema de Sperner, formulado en términos de aplicaciones simpliciales. Utilizaremos, por comodidad, el lenguaje de las aplicaciones simpliciales, pero queremos hacer notar que toda aplicación

$$V(K^{(l)}(\Delta)) \longrightarrow V(K(\Delta))$$

es simplicial, ya que todo subconjunto de $V(K(\Delta))$ es el conjunto de vértices de un símplice de $K(\Delta)$.

Definición 32. Sea $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$ un n-símplice y sea

$$\varphi : V(K^{(l)}(\Delta)) \longrightarrow V(K(\Delta))$$

una aplicación simplicial. Diremos que φ es una *aplicación de Sperner* si, para cada $v \in V(K^{(l)}(\Delta))$, se tiene que $v \in \mathrm{St}(\varphi(v), K(\Delta))$.

Veremos a continuación que los conceptos de etiquetado de Sperner y aplicación de Sperner son equivalentes.

Proposición 33. 1. Sea $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$ un n-símplice y sea

$$\varphi : V(K^{(l)}(\Delta)) \longrightarrow V(K(\Delta))$$

una aplicación de Sperner. Consideremos la aplicación biyectiva

$$\begin{aligned} f : \{a_0, \ldots, a_n\} &\longrightarrow \{0, \ldots, n\} \\ a_i &\longmapsto i \end{aligned}$$

La aplicación compuesta $s := f \circ \varphi$ es un etiquetado de Sperner.

2. Recíprocamente, sea ahora

$$s : V(K^{(l)}(\Delta)) \longrightarrow V(K(\Delta))$$

un etiquetado de Sperner. Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : V(K^{(l)}(\Delta)) &\longrightarrow V(K(\Delta)) = \{a_0, \ldots, a_n\} \\ v &\longmapsto a_{s(v)} \end{aligned}$$

Entonces φ es una aplicación de Sperner.

Demostración: 1. Sea $v \in V(K^{(l)}(\Delta))$ tal que $v \in< a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} >$. Para demostrar que s es un etiquetado de Sperner, debemos probar que $s(v) \in \{i_0, \ldots, i_k\}$, o equivalentemente, $\varphi(v) \in \{a_{i_0}, \ldots, a_{i_k}\}$. Por hipótesis, $v \in \mathrm{St}(\varphi(v), K(\Delta))$, y por la proposición 11, existe un símplice $\sigma \in K(\Delta)$ tal que es el soporte de v y además $\varphi(v)$ es vértice de σ. Dado que $v \in< a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} >$ y v pertenece al interior de σ, concluimos que σ es una cara de $< a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} >$ y, en consecuencia, $\varphi(v)$ es un vértice de $< a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} >$.

2. Sea $v \in V(K^{(l)}(\Delta))$. Vamos a probar que $v \in \mathrm{St}(\varphi(v), K(\Delta))$, es decir, que $\varphi(v)$ es un vértice del símplice soporte de v en $K(\Delta)$. Sea $\sigma :=< a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} >$ el símplice soporte de v en $K(\Delta)$. Dado que s es un etiquetado de Sperner, se satisface que $v \in \{i_0, \ldots, i_k\}$, por lo que $\varphi(v) = a_{s(v)} \in \{i_0, \ldots, i_k\}$.

□

Teorema 34 (Lema de Sperner, versión 2 (véase [ES]))**.** Sea $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$ un n-símplice y sea

$$\varphi : V(K^{(l)}(\Delta)) \longrightarrow V(K(\Delta)) = \{a_0, \ldots, a_n\}$$

una aplicación de Sperner. Existe entonces un n-símplices $\sigma \in K^{(l)}(\Delta)$ tal que $\varphi(\sigma) = \Delta$.

Vamos a exponer la demostración de [ES], pero obsérvese que, una vez probado el teorema 28, esta demostración es superflua desde el punto de vista lógico, pues acabamos de ver la equivalencia entre los etiquetados de Sperner y las aplicaciones de Sperner.

Demostración: Al igual que en la versión anterior del Lema de Sperner 28, vamos a probar que el número de n-símplices $\sigma \in K^{(l)}(\Delta)$ tales que $\varphi(\sigma) = \Delta$, es impar.

Razonemos por inducción sobre la dimensión n del símplice Δ. Denotaremos por r_n al número de símplices $\sigma \in K^{(l)}(\Delta)$ que satisfacen la ecuación $\varphi(\sigma) = \Delta$. En primer lugar, si $n = 0$, es obvio que $r_0 = 1$. Supongamos que si se satisface para $n-1$, también se satisface para n. Sea Δ_n la cara de Δ opuesta al vértice a_n, es decir, $\Delta_n :=< a_0, \ldots, a_{n-1} >$.

Sea $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ el conjuntos de los n-símplices del complejo $K^{(l)}(\Delta)$. Para $k = 1, \ldots m$, denotemos por s_k al número de caras $(n-1)$-dimensionales σ del símplice σ_k, que satisfacen la ecuación $\varphi(\sigma) = \Delta_n$. Si la dimensión del símplice $\varphi(\sigma_k)$ es igual a n, la única opción es que $\varphi(\sigma_k) = \Delta$, pues es el único n-símplice del complejo $K(\Delta)$, luego $s_k = 1$. Por otro lado, si la dimensión de $\varphi(\sigma_k)$ es igual a $n-1$, se pueden dar dos opciones:

1. Supongamos que $\varphi(\sigma_k) = \Delta_n$. Si σ está generado por los vértices $\{v_{k_0}, \ldots, v_{k_n}\}$, existen $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ distintos, tales que $\varphi(v_{k_i}) = \varphi(v_{k_j}) \neq a_n$. En este caso, las caras
$$\sigma'_k :=< v_{k_0}, \ldots, \hat{v}_{k_i}, \ldots, v_{k_j}, \ldots, v_{k_n} >$$
y
$$\sigma''_k :=< v_{k_0}, \ldots, v_{k_i}, \ldots, \hat{v}_{k_j}, \ldots, v_{k_n} >$$
de σ_k, satisfacen la ecuación
$$\varphi(\sigma'_k) = \varphi(\sigma''_k) = \Delta_n,$$
luego $s_k = 2$.

2. En caso contrario, es decir, si $\varphi(\sigma_k) \neq \Delta_n$, entonces ninguna cara satisface la ecuación, luego $s_k = 0$.

Por último, si la dimensión de $\varphi(\sigma_k)$ es menor que $n-1$, entonces $s_k = 0$. Dicho todo esto, la paridad de $\sum_{k=1}^{m} s_k$ será la misma que la de r_m.

Dado que se verifica la propiedad $a \in \mathrm{St}(\varphi(a), K(\Delta))$ para $a \in V(K^{(l)}(\Delta_m))$, podemos definir la aplicación simplicial $\varphi_n : V(K^{(l)}(\Delta_n)) \longrightarrow V(K(\Delta_m))$. Sea ahora σ un $(n-1)$-símplice de $V(K^{(l)}(\Delta))$, y supongamos que $\varphi_n(\sigma) = \Delta_n$. Por el corolario 26, podemos distinguir estos dos casos:

1. Si $\sigma \subseteq \mathrm{Fr}^{\mathrm{g}}\,\Delta$, entonces será cara propia de un único n-símplice σ_k, con $k \in \{1, \dots, m\}$. Veamos que σ esta contenido en la cara Δ_n. Si para $0 \leq p < m$, $\sigma \subseteq \Delta_p$, dado que $\varphi_n(\sigma) = \Delta_n$ y que σ es de dimensión $(n-1)$, existe un vértice $v_p \in V(\sigma)$ tal que $\varphi(v_p) = a_p$, pero esto es un absurdo pues $v_p \notin \mathrm{St}(a_p, K(\Delta))$, luego $\sigma \subseteq \Delta_n$. Dicho esto, sabemos por hipótesis, que el número de $(n-1)$-símplices $\sigma \subseteq \Delta_n$ que satisfacen la ecuación $\varphi_m(\sigma) = \Delta_n$ es impar. Llamemos a este número r_{n-1}.

2. Por otro lado, si $\sigma \cap \mathrm{Int}^{\mathrm{g}}\,\Delta = \emptyset$, entonces σ será cara exactamente de dos n-símplices del conjunto $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$. Esto implica que en la suma $\sum\limits_{k=1}^{m} s_k$, el valor de los $(n-1)$-símplices que no están contenidos en la frontera geométrica de Δ, tales que $\varphi_m(\sigma) = \Delta_n$, es un número par.

Al combinar estos dos resultados, se puede concluir que tanto la suma $\sum_{k=1}^{n} s_k$ como r_n tienen la misma paridad que r_{n-1}. Por hipótesis hemos supuesto que r_{n-1} es un número impar, luego r_n también lo es. En conclusión, el número de n-símplices $\sigma \in K^{(l)}(\Delta)$ que satisfacen la ecuación $\varphi(\sigma) = \Delta$ es un número impar. $\square$

El Lema de Sperner es válido para cualquier subdivisión, no solo la baricéntrica. Para hacer su demostración, bastaría probar el teorema 25 para cualquier subdivisión, ya que el resto de la demostración es igual a la realizada, pero extender este teorema a cualquier subdivisión es complicado (véase [ES]).

Proposición 35. Sea $\Delta := < a_0, \dots, a_n >$ un n-símplice de $\mathbb{R}^n$. No existe ninguna aplicación continua $r : \Delta \longrightarrow \mathrm{Fr}\ \Delta$ con la propiedad de que $r|_{\mathrm{Fr}\ \Delta} = Id|_{\mathrm{Fr}\ \Delta}$, es decir, $\mathrm{Fr}\ \Delta$ no es un retracto de Δ.

Demsotración: Sean $\mathcal{K} := K(\Delta)$ y $\mathcal{L} := K(\Delta) \setminus \{\Delta\}$. Supongamos que existe una retracción $r : |\mathcal{K}| \longrightarrow |\mathcal{L}|$. Por el teorema 24, para cierto $l \geq 0$, existe una aproximación simplicial $f : \mathcal{K}^{(l)} \longrightarrow \mathcal{L}$ de r.

Vamos a ver que se puede aplicar el teorema 34 a la función f. Sea $v \in V(\mathcal{K}^{(l)})$. Si $v \in V(\Delta)$, entonces $v \in \mathrm{St}(f(v), \mathcal{K}) = \mathrm{St}(v, \mathcal{K})$. Supongamos ahora el caso contrario. Si $v \in V(\mathcal{K}^{(l)}) \setminus V(\mathcal{L})$ entonces para cierto símplice $\sigma := < a_{i_0}, \dots a_{i_k} >$ del complejo $\mathcal{K}$, $v \in \mathrm{Int}^{\mathrm{g}}\,\sigma$, con $n > k \geq 1$. Vamos a probar que $f(v) \in \{a_{i_0}, \dots a_{i_k}\}$ ya que entonces $v \in \mathrm{St}(f(v), \mathcal{K})$. Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que $f(v) = a_t$, con $a_t \notin \{a_{i_0}, \dots a_{i_k}\}$. Dado que f es una aproximación simplicial de r, se tiene que

$$r(\mathrm{St}(v, \mathcal{K})) \subseteq \mathrm{St}(f(v), \mathcal{L}) = \mathrm{St}(a_t, \mathcal{L}).$$

Definimos ahora el subespacio $S := \mathrm{St}(v, \mathcal{K}) \cap \sigma$, el cual satisface que $r(S) = S$ dado que r es una retracción y $S \subseteq |\mathcal{L}|$. Además S es no vacío, ya que $v \in S$. Como a_t no es un vértice de σ, se tiene que $\sigma \cap \mathrm{St}(a_t, \mathcal{L}) = \emptyset$, y como $S \subseteq \sigma$, entonces $S \cap \mathrm{St}(a_t, \mathcal{L}) = \emptyset$. Luego, como $r(S) \nsubseteq \mathrm{St}(a_t, \mathcal{L})$, se tiene también que

$$r(S) \subseteq r(\mathrm{St}(v, \mathcal{K})) \nsubseteq \mathrm{St}(a_t, \mathcal{L})$$

lo cual es una contradicción ya que entonces f no sería una aproximación simplicial de r.

Nos falta el caso en el que $k = n$, pero esto es obvio ya que entonces $\sigma = \Delta$, y por lo tanto, $f(v) \in \{a_0, \ldots, a_n\} = \{a_{i_0}, \ldots a_{i_k}\}$. Concluimos entonces que $v \in \mathrm{St}(f(v), \mathcal{K})$ para todo $v \in V(\mathcal{K}^{(l)})$.

Tras esto, podemos ver que la aplicación simplicial f satisface las condiciones del teorema 34, por lo que al aplicarlo garantizamos la existencia de al menos un símplice σ de $\mathcal{K}^{(l)}$ tal que $f(\tau) = \Delta$, pero esto es un absurdo ya que $\Delta \notin \mathcal{L}$. Concluimos que no existe una retracción $r : |\mathcal{K}| \longrightarrow |\mathcal{L}|$. $\square$

Teorema 36 (Teorema del punto fijo de Brouwer)**.** Sea $\mathbb{E}^n$ la bola cerrada n-dimensional, es decir, $\mathbb{E}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$. Se satisface que toda aplicación continua $f : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$ tiene al menos un punto fijo.

Demostración: Supongamos que existe una aplicación continua $f : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$ que no tiene puntos fijos. Podemos definir la retracción $q : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ dada por la intersección con $\mathbb{S}^{n-1}$ de la semirecta con extremo en $f(x)$ y que pasa por x. Es una aplicación continua (se prueba al final de la demostración) y además $q(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Por otro lado, definimos el n-símplice de $\mathbb{R}^n$, $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$. El subespacio Δ de $\mathbb{R}^n$ es compacto, conexo y de interior no vacío, luego por el teorema 3, existe un homeomorfismo $h^{-1} : \mathbb{E}^n \longrightarrow \Delta$ tal que $h^{-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathrm{Fr}\ \Delta$. Entonces la aplicación $r : \Delta \longrightarrow \mathrm{Fr}\ \Delta$ dada por:

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & \mathbb{E}^n \arrow[d, "q"] \\
\mathrm{Fr}\ \Delta & \mathbb{S}^{n-1} \arrow[l, "h^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

es una retracción de Δ en $\mathrm{Fr}\ \Delta$, ya que es continua al ser composición de funciones continuas y los puntos de $\mathbb{S}^{n-1}$ son puntos fijos. Llegamos a una contradicción, ya que por la proposición 35 no puede existir esta aplicación r, luego la función f debe tener al menos un punto fijo.

Para probar la continuidad de la función $q : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, para cada $x \in \mathbb{E}^n$ definimos el conjunto

$L_x := \{f(x)+t\cdot(x-f(x)) : t > 0\}$, donde el punto $(\cdot)$, representa el producto escalar usual.

Este conjunto es la semirrecta con origen en $f(x)$ y que pasa por x.

Veamos en primer lugar que la intersección $L_x \cap \mathbb{S}^{n-1}$ se reduce a un único punto, es decir, que q está bien definida, y a continuación vamos a probar su continuidad. Tenemos que tomar los valores de t para los que $f(x) + t \cdot (x - f(x)) \in \mathbb{S}^{n-1}$, es decir, cuando $|f(x) + t \cdot (x - f(x))| = 1$ y $t > 0$. Para facilitar la notación, definimos los valores $a := x - f(x)$ y $b := f(x)$, con lo que la ecuación anterior es $|b + t \cdot a| = 1$. Esto es equivalente a la ecuación de segundo grado $a^2t^2 + 2abt + b^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son

$$t = \frac{-2ab \pm \sqrt{4a^2b^2 + 4a^2(1-b^2)}}{2a^2}.$$

Es fácil ver que la solución $t = \frac{1}{2a^2}(-2ab - \sqrt{4a^2b^2 + 4a^2(1-b^2)}) \leq 0$ ya que

$$\sqrt{4a^2b^2 + 4a^2(1-b^2)} \geq 2|ab| \geq 2ab.$$

Veamos ahora que $t = \frac{1}{2a^2}(-2ab + \sqrt{4a^2b^2 + 4a^2(1-b^2)}) > 0$.

Supongamos primero que $1 > b^2$, entonces $1 - b^2 > 0$. Luego tenemos que

$$4a^2b^2 + 4a^2(1-b^2) = 4a^2b^2 + 4a^2 - 4a^2b^2 = 4a^2.$$

Si lo sustituimos en la ecuación anterior obtenemos:

$$t = \frac{1}{2a^2}(-2ab + \sqrt{4a^2}) \geq \frac{1}{2a^2}(-2||ab|| + 2||a||) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2a^2}(-2||a|| \cdot ||b|| + 2||a||) = \frac{1}{2a^2}(2||a||(1-b)) > 0,$$

ya que, como $b^2 < 1$, entonces $b < 1$, luego $1 - b > 0$. También se tiene que $a \neq 0$ ya que $f(x) \neq x$.

Supongamos ahora que $b^2 = 1$. Como $x - b = a$, entonces $ab = xb - b^2 = xb - 1$. Además, $xb \leq |xb| \leq ||x||||b|| \leq 1 \cdot 1 = 1$, por lo que $xb - 1 = ab \leq 0$.

Si $ab < 0$, entonces $-ab > 0$ y, como consecuencia,

$$t = \frac{1}{2a^2}\left(-2ab + \sqrt{4a^2b^2 + 4a^2(1-b^2)}\right) > 0.$$

Por otra parte, si $ab = 0$, entonces $xb = 1$. Luego $1 = xb \leq ||x||||b|| \leq 1$ y, en consecuencia, $||x||||b|| = 1$. De donde, $1 = ||x||^2||b||^2 = x^2b^2 = x^2$. Así que

$$(x - b)^2 = x^2 - 2xb + b^2 = 1 - 2 + 1 = 0,$$

es decir, $x = b = f(x)$, lo cual es un absurdo.

Hemos visto que la intersección de L_x con $\mathbb{S}^{n-1}$ se reduce a un único punto dado por $q(x) := f(x) + t(x - f(x))$, donde $t = \frac{1}{2a^2}(-2ab + \sqrt{4a^2b^2 + 4a^2(1 - b^2)})$. A partir de esta formulación vemos que t es función continua de a y b, que son funciones continuas, a su vez, de x. Concluimos que la aplicación $q(x)$ es una retracción □

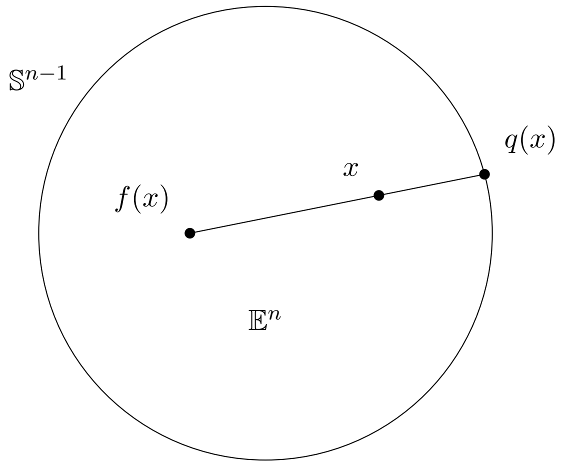

Figura 2.2: Representación gráfica de la aplicación q de la demostración con $n = 2$.

2.4 Lema de Sperner y Teorema de Brouwer versión 3, según [May]

Debemos dejar claro desde un principio que la demostración del teorema de Brouwer expuesta en [May] no es válida (luego explicaremos por qué), pero esto no lo sabíamos inicialmente. La demostración sigue el esquema tradicional

$$\text{Sperner} \Rightarrow \text{KKM} \Rightarrow \text{Brouwer},$$

y nos pareció interesante porque presentaba una versión diferente del lema de Sperner que, aun siendo más débil que la tradicional, aportaba información más específica sobre el número de símplices con etiquetado pleno. Mayer utiliza aplicaciones“estándares” en vez de aplicaciones de Sperner, y prueba que, para toda aplicación estándar

$$\omega : V(K^{(l)}(\Delta)) \longrightarrow V(K(\Delta)),$$

existe un único símplice σ en $K^{(l)}(\Delta)$ tal que $\omega(\sigma) = \Delta$. Fue esta unicidad lo que nos resultó más atractivo. Puesto que existen aplicaciones de Sperner que no son aplicaciones estándares, la versión del lema de Sperner expuesta en [May] es más débil que la tradicional (la expuesta en [Eng1] o [ES]), pero parecía bastar para los objetivos propuestos. El problema surgió cuando vimos que con las aplicaciones estándares no lográbamos probar el lema KKM, pues había una afirmación en [May] que no lográbamos verificar. Tras consultar MathSciNet, hemos visto que este“gap” ya había sido señalado en la crítica realizada por Bredon (veasé [Bre]).

Por otra parte, G.L. Naber utiliza en [Nab] la misma técnica de Mayer, es decir, las aplicaciones estándares, en su intento por probaar el teorema de Brouwer, y en este caso la crítica de Vrabec en MathSciNet (véase [Vra]) es más explícita, afirmando que se invita al lector a probar una afirmación falsa.

Vamos a exponer la parte válida en la argumentación de Mayer y mostraremos con detalle la parte deficiente.

Proposición 37. Sea $\mathcal{K}$ un complejo simplicial y sea $\mathcal{K}'$ su complejo derivado. Una aplicación

$$\omega : V(\mathcal{K}') \longrightarrow V(\mathcal{K}),$$

que satisface que para todo $\sigma \in \mathcal{K}$,

$$\omega(\hat{\sigma}) \in V(\sigma),$$

es una aplicación simplicial. Diremos que es una *aplicación elemental (de Sperner).*

Demostración: Sea $\sigma \in \mathcal{K}'$, luego tendrá la forma $\sigma :=< \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_n >$, con $\sigma_0 < \cdots < \sigma_n$, siendo estos símplices de $\mathcal{K}$. Por la definición de ω, tenemos que

$$\{\omega(\hat{\sigma}_0), \ldots, \omega(\hat{\sigma}_n)\} \subseteq V(\sigma_n).$$

Dado que $\sigma_n \in \mathcal{K}$, $\{\omega(\hat{\sigma}_0), \ldots, \omega(\hat{\sigma}_n)\}$ es el conjunto de vértices de un símplice del complejo simplicial $\mathcal{K}$. □

Teorema 38. Sea $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$ un n-símplice, y sea $\omega : K'(\Delta) \longrightarrow K(\Delta)$ una aplicación elemental. Existe un único n-símplice $\sigma \in K'(\Delta)$ tal que $\omega(\sigma) = \Delta$.

Demostración: Razonemos por inducción sobre la dimensión n de Δ. Si $n = 0$ es obvio que $< a_0 >$ es el único símplice de $K'(\Delta)$ y que $\omega(a_0) = a_0$. Veamos que si es verdad para $n-1$ también lo es para n. En primer lugar, para probar la existencia, podemos asumir que $\omega(\hat{\Delta}) = a_n$. Sea $\Delta_n :=< a_0, \ldots, a_{n-1} >$, por hipótesis sabemos que existe un único $(n-1)$-símplice $\tau \in K'(\Delta_n)$ dado por $\tau :=< \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1} >$ con $\sigma_0 < \cdots < \sigma_{n-1}$, tal que $\omega(\tau) = \Delta_n$. Dicho esto, podemos definir el símplice $\sigma :=< \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1}, \hat{\Delta} >$ de $K(\Delta)$ que satisface la ecuación $\omega(\sigma) = \Delta$.

Para probar la unicidad, sean $\sigma, \sigma' \in K'(\Delta)$ dos n-símplices tales que $\omega(\sigma) = \omega(\sigma') = \Delta$. Veamos, por lo tanto, que $\sigma = \sigma'$. Estos símplices tendrán la forma $\sigma =< \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1}, \hat{\Delta} >$ y $\sigma' =< \hat{\sigma}'_0, \ldots, \hat{\sigma}'_{n-1}, \hat{\Delta} >$, con $\sigma_0 < \cdots < \sigma_{n-1}$ y $\sigma'_0 < \cdots < \sigma'_{n-1}$, donde $\sigma_i, \sigma'_i \in K(\Delta)$ para $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. A partir de la construcción de la subdivisión baricéntrica, $\hat{\Delta}$ es un vértice de ambos símplices ya que Δ es el único n-símplice del complejo $K(\Delta)$. Tomemos ahora las caras $\tau =< \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1} >$ y $\tau' =< \hat{\sigma}'_0, \ldots, \hat{\sigma}'_{n-1} >$ de σ y σ', respectivamente, que satisfacen la igualdad $\omega(\tau) = \omega(\tau') = \Delta_n$.

Veremos a continuación que $a_n \notin V(\sigma)$. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que a_n es un vértice de σ. Tenemos entonces que $a_n = \omega(a_n) = \omega(\hat{\Delta})$, por lo que la dimensión de $\omega(\sigma)$ será como mucho $n-1$, lo cual es imposible. Razonamos de forma parecida con σ', obtenemos que $a_n \notin V(\sigma)$ y $a_n \notin V(\sigma')$ luego los símplices τ y τ' estarán contenidos en la cara Δ_n. Esto se debe a que si están contenidos en el $(n-1)$-símplice Δ_i (esta dado por $\Delta_i :=< a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n >$), con $0 \leq i \leq n-1$, entonces $\omega(\sigma)$ y $\omega(\sigma')$ serán distintos de Δ, ya que no contendrán al vértice a_i. Por hipótesis sabemos que en Δ_n hay un único $(n-1)$-símplice de $K'(\Delta)$ cuya imagen por ω es el propio Δ_n. Esto implica que $\tau = \tau'$, y por lo tanto, $\sigma = \sigma'$. Es decir, el número de n-símplices $\sigma \in K(\Delta)$ que satisfacen la ecuación $\varphi(\sigma) = \Delta$, es único. $\square$

Definición 39. Sea $\mathcal{K}$ un complejo simplicial y sea $\mathcal{K}^{(l)}$ su l-ésima subdivisión baricéntrica, con $l \geq 1$. Para todo $i = 1, \ldots, l$, sea $\omega_i : V(\mathcal{K}^{(i)}) \longrightarrow V(\mathcal{K}^{(i-1)})$ una aplicación elemental. Diremos que la aplicación

$$\omega := \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_l : V(\mathcal{K}^{(l)}) \longrightarrow V(\mathcal{K})$$

es una *aplicación estándar (de Sperner).*

Teorema 40. Sea $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$ un n-símplice. Para $l \geq 1$, consideramos las aplicaciones elementales $\omega_i : K^{(i)}(\Delta) \longrightarrow K^{(i-1)}(\Delta)$, donde $i = 1, \ldots, l$. Definimos entonces la aplicación estándar

$$\omega := \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_l : K^{(l)}(\Delta) \longrightarrow K(\Delta).$$

Existe entonces un único n-símplice $\sigma \in K^{(l)}(\Delta)$ tal que $\omega(\sigma) = \Delta$.

Demostración: En primer lugar, hay que tener en cuenta que si $\sigma \in K^{(i)}(\Delta)$ es un p-símplice, entonces la dimensión de $\omega_i(\sigma)$ será menor o igual que p para todo $i = 1, \ldots, l$. Por lo tanto, la única opción de que $\omega(\sigma) = \Delta$, es que $(\omega_i \circ \cdots \circ \omega_l)(\sigma)$ sea de dimensión n para todo i.

Vamos a probarlo por inducción sobre l.

Para $l = 1$ es el teorema 38.

Supongamos que se satisface para $l-1$ y probemos que también es cierto para l. Sea σ un n-símplice de $K^{(l-1)}(\Delta)$. Podemos distinguir dos situaciones.

1. Si $(\omega_1 \circ \cdots \circ \omega_{l-1})(\sigma) = \Delta$, por el teorema 38 podemos afirmar que para la aplicación

$$\omega_l : K^{(l)}(\Delta) \longrightarrow K^{(l-1)}(\Delta),$$

existe un único $\tau \in K(\sigma) \subseteq K^{(l)}(\Delta)$ tal que $\omega_l(\tau) = \sigma$. Luego tenemos que $\omega(\tau) = \Delta$. Al tomar otro n-símplice $\tau' \in K(\sigma) \subseteq K^{(l)}(\Delta)$ distinto de τ, tenemos que $\omega(\tau')$ será de dimensión estrictamente menor que n, luego $\omega(\tau') \neq \Delta$ por lo visto al principio de la demostración.

2. Por otro lado, si $(\omega_1 \circ \cdots \circ \omega_{l-1})(\sigma) = \rho \neq \Delta$, se tiene que $\rho < \Delta$. Supongamos que existe un n-símplice $\tau \in K(\sigma) \subseteq K^{(l)}(\Delta)$, tal que $\omega(\tau) = \Delta$. Tenemos entonces que $\omega_l(\tau) \in K(\sigma)$, es decir, $\omega_l(\tau) \leq \sigma$. Por esta misma razón tenemos que

$$\Delta = \omega(\tau) \leq (\omega_1 \circ \cdots \circ \omega_{l-1})(\sigma) = \rho < \Delta,$$

lo cual es un absurdo. Luego no existe un n-símplice τ tal que $\omega(\tau) = \Delta$ es este caso.

Concluimos entonces que existe un único n-símplice $\tau \in K^{(l)}(\Delta)$ tal que $\omega(\tau) = \Delta$. $\square$

Proposición 41. Sea $\mathcal{K}$ un complejo simplicial, y $\omega : V(\mathcal{K}') \longrightarrow V(\mathcal{K})$ una aplicación simplicial. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) Para todo vértice v de $\mathcal{K}$ se verifica $v \in \mathrm{St}(\omega(v), \mathcal{K})$.

b) La aplicación ω es una aplicación elemental.

c) La aplicación $\omega : |\mathcal{K}'| \longrightarrow |\mathcal{K}|$ es una aproximación simplicial de la identidad.

Demostración: *a)* $\Rightarrow$ *b)*: Sea $\sigma \in \mathcal{K}$. Por hipótesis, $\hat{\sigma} \in \mathrm{St}(\omega(\hat{\sigma}), \mathcal{K})$. Luego $\omega(\hat{\sigma})$ es un vértice del símplice soporte de $\hat{\sigma}$ en $\mathcal{K}$, es decir, $\hat{\sigma}$ pertenece al interior de un símplice del cual $\omega(\hat{\sigma})$ es vértice. Dado que σ es el símplice soporte de $\hat{\sigma}$ en $\mathcal{K}$, concluimos que $\omega(\hat{\sigma})$ es un vértice de σ.

b) $\Rightarrow$ *c)*: Sea σ un símplice de $\mathcal{K}'$. Tenemos que probar que $\mathrm{St}(\hat{\sigma}, \mathcal{K}') \subseteq \mathrm{St}(\omega(\hat{\sigma}), \mathcal{K})$. Sea $x \in \mathrm{St}(\hat{\sigma}, \mathcal{K}')$. Luego $\hat{\sigma}$ es vértice del símplice soporte de x, es decir, existe un conjunto de símplices $\tau_0, \ldots, \tau_p$ de $\mathcal{K}$, tales que $\tau_0 < \cdots < \tau_p$, con $x \in \mathrm{Int}^{\mathrm{g}} < \hat{\tau}_0, \ldots, \hat{\tau}_p >$. Se tiene además que $\sigma = \tau_i$ para cierto $0 \leq i \leq p$. Por hipótesis $\omega(\hat{\sigma})$ es vértice de $\sigma = \tau_i$ y, por lo tanto, es un vértice de τ_p ya que $\tau_i \leq \tau_p$. Tenemos entonces que

$$x \in \mathrm{Int}^{\mathrm{g}} < \hat{\tau}_0, \ldots, \hat{\tau}_p > \subseteq \mathrm{Int}^{\mathrm{g}} \tau_p \subseteq \mathrm{St}(\omega(\hat{\sigma}), \mathcal{K}),$$

luego $\mathrm{St}(\hat{\sigma}, \mathcal{K}') \subseteq \mathrm{St}(\omega(\hat{\sigma}), \mathcal{K})$.

c) $\Rightarrow$ *a)*: Dado que ω es una aproximación simplicial de la identidad, tenemos que $\hat{\sigma} \in \mathrm{St}(\hat{\sigma}, \mathcal{K}') \subseteq \mathrm{St}(\omega(\hat{\sigma}), \mathcal{K})$ para todo $\sigma \in \mathcal{K}$. Luego $\hat{\sigma} \in \mathrm{St}(\omega(\hat{\sigma}), \mathcal{K})$. □

Obsérvese que una aplicación de elemental $\omega : \mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$ no tiene porque ser una aplicación de Sperner, ya que en estas últimas exigimos que $\mathcal{K} = K(\Delta)$ para cierto símplice Δ.

Proposición 42. Sea $\Delta := < a_0, \ldots, a_n >$ un símplice y sea $\omega : V(K^{(l)}(\Delta)) \longrightarrow V(K(\Delta))$ una aplicación estándar. Entonces ω es una aplicación de Sperner.

Demostración: En primer lugar, vamos a recordar que todos los vértices de $K^{(l)}(\Delta)$ son de la forma $\hat{\sigma}$, donde σ es un símplice de $K^{(l-1)}(\Delta)$. Además ω se puede expresar, para $i = 0, \ldots, l$, como $\omega = \omega_1 \circ \cdots \circ \omega_l$, donde las aplicaciones ω_i son aplicaciones elementales.

Sea $\sigma \in K^{(l-1)}(\Delta)$. Vamos a probar que $\hat{\sigma} \in \mathrm{St}(\omega(\hat{\sigma}), K(\Delta))$, es decir, que $\omega(\hat{\sigma})$ es un vértice del símplice soporte de $\hat{\sigma}$ en $K(\Delta)$. En la proposición 41 hemos probado que si $\tau \in K^{(i-1)}$, entonces $\mathrm{St}(\hat{\tau}, K^{(i)}(\Delta)) \subseteq \mathrm{St}(\omega_i(\hat{\tau}), K^{(i-1)}(\Delta))$ para todo $i = 1, \ldots, l$. Al aplicar esta propiedad de forma iterada sobre la composición de las aplicaciones elementales, esto es

$$\mathrm{St}(\hat{\sigma}, K^{(l)}(\Delta)) \subseteq \mathrm{St}(\omega_l(\hat{\sigma}), K^{(l-1)}(\Delta)) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{St}((\omega_1 \circ \cdots \circ \omega_l)(\hat{\sigma}), K(\Delta)),$$

obtenemos que $\mathrm{St}(\hat{\sigma}, K^{(l)}(\Delta)) \subseteq \mathrm{St}(\omega(\hat{\sigma}), K(\Delta))$. Es obvio que $\hat{\sigma} \in \mathrm{St}(\hat{\sigma}, K^{(l)}(\Delta))$, luego $\hat{\sigma} \in \mathrm{St}(\omega(\hat{\sigma}), K(\Delta))$.

Por lo tanto, la aplicación estándar ω es una aplicación de Sperner. □

Observación 43. Sin embargo, la otra implicación no siempre es verdad, es decir, una aplicación de Sperner no tiene porqué ser una aplicación estándar. Esto se puede ver en el ejemplo de la figura 2.2, donde hay tres símplices de dimensión 3 con un etiquetado pleno, cuando hemos demostrado en 40 la unicidad en las aplicaciones estándares.

Veamos ahora por qué no hemos podido demostrar el lema KKM a partir de esta versión de Sperner.

Sea $\Delta :=< a_0, \dots, a_n >$ y sean $B_0, \dots, B_n$ cerrados tales que

$$< a_{i_0}, \dots, a_{i_k} > \subseteq B_{i_0} \cup \cdots \cup B_{i_k}$$

para cada cara $< a_{i_0}, \dots, a_{i_k} >$ de Δ.

Dado $v \in V(K^{(l)}(\Delta))$, sea $\tau :=< a_{i_0}, \dots, a_{i_k} >$ el símplice soporte de v en $K(\Delta)$. Puesto que $v \in < a_{i_0}, \dots, a_{i_k} > \subseteq B_{i_0} \cup \cdots \cup B_{i_k}$, existe entonces $j \leq k$ tal que $v \in B_{j_k}$.

Mayer y Naber dan a entender (véase [May] y [Nab]) que es posible definir una aplicación estándar

$$\varphi : V(K^{(l)}(\Delta)) \longrightarrow V(K(\Delta)) =< a_0, \dots, a_n >$$

tal que $v \in B_i$ si $\varphi(v) = a_i$, para todo $v \in V(K^{(l)}(\Delta))$. Vimos en la demostración del teorema 29 (lema KKM) que sí es posible definir una aplicación de Sperner φ cumpliendo esa condición (basta definir $\varphi(v) := a_{i_j}$ si $v \in B_{i_j}$), sin embargo, veremos mediante un ejemplo que no siempre es posible definir una aplicación estándar φ satisfaciendo dicha condición.

Sea $a_0 = 0$ y sea $a_1 = 8$. Definimos el 1-símplice $\sigma :=< a_0, a_1 >$. Tras hacer dos subdivisiones baricéntricas sucesivas de σ, obtenemos el conjunto $V(K^{(2)}(\sigma)) = \{a_0, a_1, v_0, v_1, v_2\}$, donde $v_0 = 2$, $v_1 = 4$ y $v_2 = 6$. Dicho esto, definimos los cerrados $B_0 := [0, 1] \cup [3, 5]$ y $B_1 := [1, 3] \cup [5, 8]$, que satisfacen las condiciones del Lema KKM. Vamos a intentar definir una aplicación estándar

$$\omega : V(K^{(2)}(\sigma)) \longrightarrow V(K(\sigma)) =< a_0, a_1 >,$$

tal que $v \in B_i$, si $\omega(v) = a_i$, para todo $v \in V(K^(2)(\sigma))$, con $i = 0, 1$. La aplicación ω, dado que es una aplicación estándar, tendrá la forma $\omega = \omega_1 \circ \omega_2$, donde ω_1 y ω_2 son aplicaciones elementales. Así pues, la aplicación ω tendrá la siguiente forma

$$\omega(v) = \begin{cases} a_0 & \text{si } v \in \{a_0, v_1\} \\ a_1 & \text{si } v \in \{a_1, v_0, v_2\}. \end{cases}$$

Sin embargo, esto no es posible ya que $\omega_2(v_0) \in \{a_0, v_1\}$ por definición de aplicación elemental. El problema es que $\omega_1(a_0) = \omega_1(v_1) = a_0$, por lo que $\omega(v_0) = a_1 \neq a_0 = \omega_1 \circ \omega_2(v_0)$, lo cual es un absurdo.

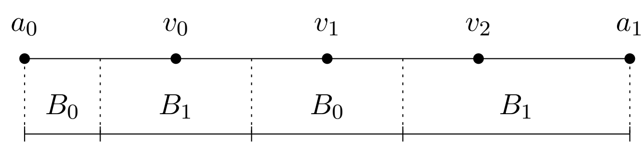

Figura 2.3: Ejemplo de un 1-símplice al que no se le puede aplicar el Lema KKM a partir de una aplicación estándar.

2.5 Equivalencia entre Sperner, KKM y Brouwer

Ya hemos probado que el lema de Sperner implica el lema de KKM, y este implica el teorema del punto fijo de Brouwer según vimos en la sección 2.2. Falta probar que el teorema del punto fijo de Brouwer implica el lema de Sperner.

Teorema 44. Sea $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$ un n-símplice y supongamos que, para toda aplicación continua $f : \Delta \longrightarrow \Delta$, existe un $x \in \Delta$ tal que $f(x) = x$. Entonces, para todo etiquetado de Sperner $s : V(K^{(l)}(\Delta)) \longrightarrow \{0, \ldots, n\}$, existe un n-símplice de $K^{(l)}(\Delta)$ que tiene un etiquetado pleno para s.

Demostración: Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un etiquetado de Sperner s tal que, para todo n-símplice de $K^{(l)}(\Delta)$, se tiene que $|s(V(\sigma))| < n+1$. Definimos a continuación la siguiente aplicación simplicial:

$$\varphi : V(K^{(l)}(\Delta)) \longrightarrow V(\Delta),$$
$$v \longmapsto a_{s(v)+1}$$

conviniendo de que $a_{n+1} := a_0$.

Ya vimos anteriormente que esta aplicación induce una aplicación continua $\varphi : \Delta \longrightarrow \Delta$. Veamos que φ no tiene ningún punto fijo, llegando así a una contradicción.

Sea $x \in \operatorname{Int}^{\mathrm{g}} \Delta$. Por lo que debe existir cierto n-símplice de $K^{(l)}(\Delta)$ de la forma $\sigma :=< v_0, \ldots, v_n >$, tal que $x \in \sigma$. Si x tiene las coordenadas baricéntricas $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_i$ respecto del símplice σ, obtenemos lo siguiente

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) v_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) \varphi(v_i) \in \operatorname{Fr}^{\mathrm{g}} \Delta.$$

Esto se debe a la condición $|s(V(\sigma))| < n+1$, ya que entonces φ estará contenido en un $(n-1)$-símplice de $K(\Delta)$, es decir, estará contenido en la frontera y no en el interior, por lo tanto no puede ser un punto fijo.

Supongamos ahora que $x \in \operatorname{Fr^g} \Delta$. En primer lugar, es fácil ver que si $x \in V(\Delta)$, es decir, que $x = a_j$ para cierto $j \in \{0, \dots, n-1\}$, entonces

$$\varphi(x) = \varphi(a_j) = a_{s(a_j)+1} = a_{j+1} \neq a_j.$$

Si $j = n$, entonces $\varphi(a_n) = a_0 \neq a_n$. Por otro lado, si x no es un vértice, entonces $x \in \operatorname{Int^g} \tau$, siendo τ un símplice de $K^{(l)}(\Delta)$ contenido en la frontera de Δ y, de dimensión estrictamente menor que n. Tenemos también que $x \in \operatorname{Int^g} \rho$, con $\rho < \Delta$, luego tendrá la forma $\rho :=< a_{i_0}, \dots, a_{i_k}$, siendo $k < n$. Podemos ver también que $\tau \subseteq \rho$, por lo que vamos a distinguir dos casos:

1. Supongamos que $|s(V(\tau)) < k+1$. Tenemos entonces que x estará contenido en el interior de un símplice de $K(\Delta)$ de dimensión menor que ρ por lo que no puede pertenecer a su interior, es decir, x no puede ser un punto fijo en este caso.

2. Por otro lado, si $|s(V(\tau)) = k+1$ obtenemos que $\varphi(x)$ estará contenido en el interior de un símplice $K(\Delta)$ de la forma $< a_{i(i_0)}, \dots, a_{i(i_k)} >$, que es distinto del símplice ρ. Por lo tanto x tampoco puede ser un punto fijo.

Llegamos entonces a un absurdo ya que la aplicación φ no tiene un punto fijo, por lo que debe existir al menos un n-símplice de $K^{(l)}(\Delta)$ con un etiquetado pleno para todo etiquetado de Sperner. □

2.6 Consecuencias del teorema del punto fijo de Brouwer

A continuación vamos a demostrar algunos resultados importantes a partir del teorema del punto fijo.

Teorema 45. La esfera $\mathbb{S}^n$, para $n \geq 2$, no es un espacio contráctil.

Demostración. En primer lugar, definamos las aplicaciones continuas $A, N : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ dadas por $A(x) = -x$ y $N(x) = (0, \dots, 0, 1)$ para todo x.

Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que es contráctil. Esto quiere decir que todas las aplicaciones continuas $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ son homótopas. En particular, las aplicaciones A y N también lo son, por hipótesis y porque $\mathbb{S}^n$ es conexo por caminos.

Podemos definir entonces una aplicación continua $F : \mathbb{S} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n$, de tal forma que $F(x,0) = N(x)$ y $F(x,1) = A(x)$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$.

Sea $q : \mathbb{S}^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ la aplicación cociente definida por $q(x,t) := t \cdot x$, para todo $(x,t) \in \mathbb{S}^n \times [0,1]$. Podemos ver que la aplicación F es constante en las fibras de q, esto es, que si $(x,t),(x',t') \in q^{-1}(y)$ con $y \in \mathbb{E}^{n+1}$, entonces $F(x,t) = F(x',t')$. Por esta razón, es posible definir la aplicación continua $\bar{F} : \mathbb{E}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ tal que $\bar{F} \circ q = F$.

Definimos el siguiente diagrama de funciones continuas donde $i : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ es la inclusión.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^n \times [0,1] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{S}^n \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{E}^{n+1} \\
\mathbb{E}^{n+1} \arrow[ur, dashed, "\bar{F}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por esta razón, la aplicación $i \circ \bar{F} : \mathbb{E}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ debe de tener al menos un punto fijo por el teorema del punto fijo de Brouwer 36. Es decir, dado que q es sobreyectiva, existe $(x,t) \in \mathbb{S}^n \times [0,1]$ tal que $\bar{F}(xt) = xt$. De donde

$$xt = \bar{F}(xt) = \bar{F}(q(x,t)) = F(x,t) \in \mathbb{S}^n$$

Como $||x|| = 1$ ya que $x \in \mathbb{S}^n$, entonces

$$1 = ||F(x,t)|| = t \cdot ||x|| = t.$$

Por lo tanto

$$x = tx = F(x,t) = F(x,1) = A(x) = -x,$$

lo cual es un absurdo.

Por esta razón, la esfera $\mathbb{S}^n$ para $n \geq 2$ no es contráctil. $\square$

Definición 46. Diremos que un espacio topológico X tiene la *propiedad del punto fijo*, si toda aplicación continua $f : X \longrightarrow X$ tiene al menos un punto fijo.

Con este lenguaje, el teorema de Brouwer afirma que la bola $\mathbb{E}^n$ tiene la propiedad del punto fijo.

Teorema 47. Sea $n \geq 1$. Las propiedades siguientes son equivalentes:

a) $\mathbb{S}^{n-1}$ no es un retracto de $\mathbb{E}^n$.

b) $\mathbb{E}^n$ tiene la propiedad del punto fijo.

c) $\mathbb{S}^{n-1}$ no es contráctil.

Demostración: En el teorema 36 ya hemos demostrado que a) implica b), y en 45 hemos visto que b) implica c). Falta probar que si $\mathbb{S}^{n-1}$ no es contráctil, entonces $\mathbb{S}^{n-1}$ no es un retracto de $\mathbb{E}^n$.

Supongamos que $\mathbb{S}^{n-1}$ no es contráctil. Razonemos por reducción al absurdo, esto es, supongamos que $\mathbb{S}^{n-1}$ es un retracto de $\mathbb{E}^n$. Esto implica que existe una aplicación continua $t : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $t(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

En primer lugar, dado que $\mathbb{E}^n$ es un conjunto convexo, a partir del lema fundamental de construcción de homotopías podemos ver que $\mathbb{E}^n \simeq \{x\}$, con $x \in \mathbb{E}^n$, es decir, que la n-bola $\mathbb{E}^n$ es homotópicamente equivalente a un punto suyo.

Por otro lado, si $i : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{E}^n$ es la aplicación inclusión, tenemos que $i \circ t : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$ es homótopa a la aplicación identidad en $\mathbb{E}^n$ por el lema fundamental de construcción de homotopías. Por otro lado, la aplicación $t \circ i : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ es la aplicación identidad en $\mathbb{S}^{n-1}$.

Tenemos por lo tanto que $i \circ t \simeq Id_{\mathbb{E}^n}$ y $t \circ i \simeq Id_{\mathbb{S}^{n-1}}$, luego $\mathbb{E}^n \simeq \mathbb{S}^{n-1}$. Además tenemos que $\mathbb{E}^n \simeq \{x\}$, por lo que $\mathbb{S}^{n-1} \simeq \{x\}$ lo cual es un absurdo ya que hemos supuesto que $\mathbb{S}^{n-1}$ no es contráctil. $\square$

2.7 Dimensión de recubrimiento de Lebesgue

En esta sección vamos a introducir el concepto de dimensión topológica, con el objetivo de llegar a probar que si $m < n$, entonces $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no pueden ser homeomorfos.

Definición 48. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que la familia $\mathcal{A}$ es de *orden n* si existe al menos un $x \in X$ que pertenece a la intersección de $n+1$ elementos de $\mathcal{A}$ y, además, si la intersección de $n+2$ subconjuntos de la familia $\mathcal{A}$ sea siempre vacía. Si el entero n no existe diremos que $\mathcal{A}$ tiene orden ∞. Al orden de la familia $\mathcal{A}$ lo denotaremos como $\operatorname{Ord}\mathcal{A}$.

Definición 49. Sea X un conjunto y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos recubrimientos de X. Diremos que $\mathcal{B}$ es un *refinamiento* de la familia $\mathcal{A}$, si para todo $B \in \mathcal{B}$ existe un $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq A$. Si $\mathcal{B}$ es un refinamiento de $\mathcal{A}$, lo denotaremos como $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

Definición 50. Sea X un espacio topológico. Vamos a asignar a este espacio un número entero, llamado *dimensión de recubrimiento* y que denotaremos como $\operatorname{Dim} X$, que satisface las siguientes condiciones:

1. $\operatorname{Dim} X \leq n$ si para todo recubrimiento finito y abierto $\mathcal{A}$ de X, existe un refinamiento finito y abierto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\operatorname{Ord} \mathcal{B} \leq n$.

2. $\operatorname{Dim} X = n$ si $\operatorname{Dim} X \leq n$ y $\operatorname{Dim} X \nleq n-1$, es decir, n es el menor entero tal que $\operatorname{Dim} X \leq n$.

3. $\operatorname{Dim} X = \infty$ si para ningún $n := -1, 0, 1 \ldots$ se verifica $\operatorname{Dim} X \leq n$.

Definición 51. Sea $\mathcal{A} := \{A\}_{i \in I}$ un recubrimiento de un espacio topológico X. Si $\mathcal{B} := \{B\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de X tal que $B_i \subseteq A_i$ para todo $i \in I$, entonces diremos que $\mathcal{B}$ es una *contracción* de $\mathcal{A}$.

Observación 52. Tenemos entonces que toda contracción $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ es un refinamiento de $\mathcal{A}$, aunque la implicación contraria no es siempre verdad.

Teorema 53. Todo recubrimiento $\mathcal{A}$ finito y abierto de un espacio normal X, tiene una contracción $\mathcal{C}$ finita y cerrada.

Demostración: Vamos a demostrarlo por inducción sobre m, siendo este el número de abiertos que tiene el recubrimiento $\mathcal{A}$.

Para $m = 2$, suponemos que $\mathcal{A} := \{A_1, A_2\}$. Definimos los cerrados $F_1 := X \setminus A_1$ y $F_2 := X \setminus A_2$. Tenemos que

$$F_1 \cap F_2 = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2) = X \setminus (A_1 \cup A_2) = \emptyset,$$

y como X es un espacio normal, existen abiertos disjuntos U_1 y U_2 tales que $F_1 \subseteq U_1$ y $F_2 \subseteq U_2$. Por lo tanto, si $C_1 = X \setminus U_1$ y $C_2 = X \setminus U_2$, entonces $\mathcal{C} := \{C_1, C_2\}$ es la contracción que buscábamos.

Supongamos que se satisface para $m-1$ y probemos que también es cierto para m. Sea $\mathcal{A} := \{A_1, \ldots, A_m\}$ un recubrimiento finito y abierto de X. Definimos los abiertos $A'_i = A_i$, si $i = 1, \ldots, m-2$, y $A'_{m-1} = A_{m-1} \cup A_m$. Tenemos entonces que $\mathcal{A}' := \{A'_1, \ldots, A'_{m-1}\}$ es un recubrimiento finito y abierto de X. Aplicando la hipótesis de inducción, existe una contracción cerrada de $\mathcal{A}'$ dada por $\mathcal{C}' := \{C'_1, \ldots, C'_{m-1}\}$. Tomando ahora el cerrado C'_{m-1} del espacio X, que es normal, podemos aplicar nuevamente la hipótesis de inducción para $m = 2$ tomando como recubrimiento de C'_{m-1} la familia de abiertos $\{C'_{m-1} \cap U_{m-1}, C'_{m-1} \cap U_m\}$. Obtenemos entonces el recubrimiento cerrado $\{C_{m-1}, C_m\}$ de C'_{m-1}, donde $C_{m-1} \subseteq U_{m-1}$ y $C_m \subseteq U_m$. Entonces la familia de cerrados $\mathcal{C} := \{C_1, \ldots, C_m\}$, donde $C_i = C'_i$ para $i = 1, \ldots, m-2$, es una contracción del recubrimiento $\mathcal{A}$ de X. $\square$

Definición 54. Sea $\mathcal{A} := \{A\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de un espacio topológico X. Diremos que la familia $\mathcal{B} := \{B\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X es una *expansión controlada* de $\mathcal{A}$, si $A_i \subseteq B_i$ para todo $i \in I$, y además, para todo subconjunto $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq I$, se satisface que

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \neq \emptyset \text{ si, y solo si, } B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k} \neq \emptyset.$$

Teorema 55. Sea X un espacio topológico normal. Toda familia $\mathcal{C}$ finita de subconjuntos cerrados de X tiene una expansión controlada $\mathcal{A}$ abierta. Más aún, si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe un abierto U tal que $C \subseteq U$, entonces el correspondiente $A \in \mathcal{A}$ puede elegirse de forma que $C \subseteq \bar{A} \subseteq U$.

Demostración: Sea $\mathcal{C} := \{C_1, \ldots, C_m\}$ una familia de cerrados de X. Sea E_1 la unión de las intersecciones $C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_k}$, tales que $C_1 \cap C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_k} = \emptyset$. Como X es normal, y dado que C_1 y E_1 son cerrados disjuntos, existen un abierto A_1 tal que $C_1 \subseteq A_1$, $\bar{A}_1 \cap E_1 = \emptyset$. Tenemos entonces que $\mathcal{C}_1 := \{\bar{A}_1, C_2, \ldots, C_m\}$ es una expansión controlada de $\mathcal{C}$. Sea ahora E_2 la unión de las intersecciones de elementos de $\mathcal{C}_1$ cuya intersección es vacía con C_2. Al igual que con C_1, existe un abierto A_2 tal que $C_2 \subseteq A_2$, $\bar{A}_2 \cap E_2 = \emptyset$, obteniendo la expansión controlada $\mathcal{C}_2 := \{\bar{A}_1, \bar{A}_2, C_3, \ldots, C_m\}$. Repetimos este proceso m veces hasta que obtenemos finalmente la expansión controlada $\mathcal{C}_m := \{\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_m\}$ de $\mathcal{C}$. Como $C_j \subseteq A_j \subseteq \bar{A}_j$ para todo $j = 1, \ldots, m$, la familia $\mathcal{A} := \{A_1, \ldots, A_m\}$ es una expansión controlada abierta de $\mathcal{C}$. □

Definición 56. Sea X un espacio topológico, $\mathcal{A}$ un/a recubrimiento/contracción de X y sea $\varepsilon > 0$. Diremos que $\mathcal{A}$ es un/a *ε-recubrimiento/ε-contracción* de X si para todo $A \in \mathcal{A}$, su diámetro es menor que ε.

Teorema 57. Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, $\operatorname{Dim} X \leq n$ si, y solo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un ε-recubrimiento de X finito y cerrado $\mathcal{A}$ de orden menor o igual que n.

Demostración. Supongamos que $\operatorname{Dim} X \leq n$. Para $\varepsilon > 0$, definimos la familia de abiertos

$$\mathcal{B} := \{B\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right) : x \in X\}.$$

Dado que $\mathcal{B}$ recubre al compacto X, existe un subconjunto finito $\mathcal{B}_0 := \{B(x_0, \frac{\varepsilon}{3}), \ldots, B(x_m, \frac{\varepsilon}{3})\}$ de $\mathcal{B}$ que también recubre X. Dado que $\operatorname{Dim} X \leq n$, existe un refinamiento $\mathcal{A}$ finito y abierto de $\mathcal{B}_0$, con $\operatorname{Ord} \mathcal{A} \leq n$. Dado que para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \subseteq B$ para cierto $B \in \mathcal{B}_0$, la familia $\mathcal{A}$ es un ε-recubrimiento. Al recubrimiento $\mathcal{A}$ le podemos aplicar el teorema 53, el cual nos da lugar a una contracción de $\mathcal{A}$ de cerrados, a la que llamaremos

$\mathcal{C}$. Falta probar que $\mathcal{C}$ es de orden menor o igual que n, para ello, razonemos por reducción al absurdo suponiendo que existe un subconjunto $\{C_{i_1}, \ldots, C_{i_{n+2}}\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que

$$C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_{n+2}} \neq \emptyset.$$

Dado que $\mathcal{C}$ es una contracción de $\mathcal{A}$, existe un subconjunto $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_{n+2}}\}$ de $\mathcal{A}$ tal que $C_{i_j} \subseteq A_{i_j}$ para todo $j = 1, \ldots, n+2$. Por lo tanto tenemos que

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n+2}} \neq \emptyset,$$

lo cual es un absurdo ya que $\operatorname{Ord} \mathcal{A} \leq n$. Como consecuencia, $\mathcal{C}$ es un ε-recubrimiento finito y cerrado del espacio X.

Supongamos ahora que para todo $\varepsilon > 0$ existe un ε-recubrimiento finito y cerrado de X, siendo de orden menor o igual que n. Sea $\mathcal{A} := \{A_1, \ldots, A_m\}$ un recubrimiento finito y abierto de X. Sea ahora $\varepsilon > 0$ un número de Lebesgue de la familia $\mathcal{A}$. Por lo tanto, existe un ε-recubrimiento $\{C_1, \ldots, C_p\}$ finito y cerrado de X, de orden menor o igual que n al que llamaremos $\mathcal{C}$. Tenemos además que $C_j \subseteq A_{i_j}$, con A_{i_j} para todo $j = 1, \ldots, p$. Por el teorema 55, existe una expansión controlada abierta $\mathcal{B}' := \{B'_1, \ldots, B'_p\}$ del recubrimiento $\mathcal{C}$. Vamos a definir la familia $\mathcal{B} := \{B_1, \ldots, B_p\}$, donde $B_j = B'_j \cap A_{i_j}$ para todo $j = 1, \ldots, p$. Probemos que $\mathcal{B}$ es un refinamiento de $\mathcal{A}$ de orden menor o igual que n. Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que es de orden mayor que n, es decir, que existe un subconjunto $\{B_{k_1}, \ldots, B_{k_{n+2}}\}$ tal que

$$B_{k_1} \cap \cdots \cap B_{k_{n+2}} \neq \emptyset.$$

Dado que $B_{k_s} \subseteq B'_{k_s}$ para todo $s = 1, \ldots, n+1$, entonces

$$B'_{k_1} \cap \cdots \cap B'_{k_{n+2}} \neq \emptyset.$$

Como $\mathcal{B}'$ es una expansión controlada de $\mathcal{C}$, se tiene que

$$C_{k_1} \cap \cdots \cap C_{k_{n+2}} \neq \emptyset.$$

Llegamos a un absurdo ya que $\operatorname{Ord} \mathcal{C} \leq n$, por lo que $\operatorname{Ord} \mathcal{B} \leq n$, luego $\operatorname{Dim} X \leq n$. □

Teorema 58. La dimensión de recubrimiento se conserva mediante homeomorfismos, es decir, si X e Y son espacios topológicos homeomorfos, entonces tienen la misma dimensión.

Demostración. Basta tener en cuenta que el concepto de dimensión se expresa en términos de recubrimientos finitos de abiertos, conceptos que son invariantes por homeomorfismos. Vamos de todas formas a exponer una demostración detallada.

Sea $\varphi : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo entre los espacios topológicos X e Y. Supongamos que si X tiene dimensión n, veamos por lo tanto que Y también. Sea $\mathcal{A} := \{A_0, \ldots, A_m\}$ un recubrimiento finito y abierto de Y, por lo tanto, dado que $Y = A_0 \cup \cdots \cup A_m$, entonces $X = \varphi^{-1}(Y) = \varphi^{-1}(A_0) \cup \cdots \cup \varphi^{-1}(A_m)$. Esto implica que $\{\varphi^{-1}(A_0), \ldots, \varphi^{-1}(A_m)\}$ es un recubrimiento finito y abierto de X, que llamaremos $\varphi^{-1}(\mathcal{A})$. Dado que $\operatorname{Dim} X = n$, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ con $\operatorname{Ord} \mathcal{B} \leq n$. Si $\mathcal{B}$ es de la forma $\mathcal{B} := \{B_0, \ldots, B_p\}$, dado que $X = B_0 \cup \cdots \cup B_p$, entonces $\varphi(X) = Y = \varphi(B_0) \cup \cdots \cup \varphi(B_p)$, luego es un recubrimiento de Y al que denotaremos como $\varphi(\mathcal{B})$. Veamos entonces que $\varphi(\mathcal{B}) \leq \mathcal{A}$. Sea $\varphi(B_i) \in \varphi(\mathcal{B})$, dado que $B_i \subseteq \varphi^{-1}(A_j)$ para cierto $\varphi^{-1}(A_j) \in \varphi^{-1}(\mathcal{A})$, entonces $\varphi(B_i) \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(A_j)) = A_j$, con $A_j \in \mathcal{A}$, por lo tanto $\varphi(\mathcal{B})$ es un subrecubrimiento de $\mathcal{A}$.

En cuanto al orden de $\varphi(\mathcal{B})$, como $\operatorname{Ord} \mathcal{B} = n$, entonces la intersección de $n+2$ elementos de $\mathcal{B}$ será vacía, luego la intersección de $n+2$ elementos de $\varphi(\mathcal{B})$ también será vacía dado que φ es biyectiva y, por lo tanto, $\operatorname{Ord} \varphi(\mathcal{B}) \leq n$, luego $\operatorname{Dim} Y \leq n$.

Hemos visto por lo tanto que $\operatorname{Dim} Y \leq \operatorname{Dim} X$. Además, usando el mismo razonamiento, podemos ver que $\operatorname{Dim} X \leq \operatorname{Dim} Y$. Por lo tanto, $\operatorname{Dim} X = \operatorname{Dim} Y$. □

Lema 59. Sean $a_0, \ldots, a_n$ puntos afinmente independientes. Entonces, para el símplice $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$, se tiene que $\operatorname{Dim} \Delta \leq n$.

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento finito por abiertos de Δ. Tomamos un $\delta > 0$ que sea un número de Lebesgue para $\mathcal{A}$, por lo que a partir del teorema 24 y el lema 1, existe un $l \geq 0$ tal que $m(K^l(\Delta)) < \frac{\delta}{2}$. Por lo tanto, para cada $v \in V(K^l(\Delta))$ tenemos que $\operatorname{St}(v, K^l(\Delta)) \subseteq A$ para cierto $A \in \mathcal{A}$. Es decir, la familia finita de abiertos

$$\mathcal{B} := \{\operatorname{St}(v, K^l(\Delta)) : v \in V(K^l(\Delta))\}$$

es un refinamiento de $\mathcal{A}$. Vamos a probar que $\operatorname{Ord} \mathcal{B} \leq n$, para ello, razonemos por reducción al absurdo suponiendo que existe un $x \in \Delta$ tal que

$$x \in x \in \operatorname{St}(v_0, K^l(\Delta)) \cap \cdots \cap \operatorname{St}(v_n + 1, K^l(\Delta)),$$

con $v_i \in V(K^l(\Delta))$, para $i = 1, \ldots, n+1$, siendo todos los v_i distintos. Tenemos entonces que x pertenece al interior de un símplice de $n+2$ vértices, pero esto es un absurdo ya que el complejo simplicial $K^{(l)}(\Delta)$ no hay símplices de dimensión geométrica $n+1$.

Hemos demostrado que $\operatorname{Ord} \mathcal{B} \leq n$, por lo que $\operatorname{Dim} \Delta \leq n$. □

Lema 60. Dado el n-símplice $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$, definimos

$$\Delta_i :=< a_0, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_n >, \text{ con } i = 0, \ldots, n.$$

Si la familia de cerrados $\mathcal{B} := \{B_0, \ldots, B_n\}$ es un recubrimiento de Δ tal que $a_i \in B_i$ y $\Delta_i \cap B_i = \emptyset$ para todo i, entonces $B_0 \cap \cdots \cap B_n \neq \emptyset$.

Demostración: Vamos a ver que se puede aplicar el Lema KKM 29. Sea $< a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} >$ una cara del símplice Δ_i. Como $< a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} > \subseteq \Delta_i$, entonces $< a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} > \cap B_i = \emptyset$. Además $< a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} > \cap B_j = \emptyset$ para todo $j \neq i_0, \ldots, a_k$. Como $\mathcal{B}$ recubre Δ, tenemos entonces que $< a_{i_0}, \ldots, a_{i_k} > \subseteq B_{i_0} \cup \cdots \cup B_{i_k}$, por lo que podemos aplicar el Lema KKM 29 obteniendo

$$B_0 \cap \cdots \cap B_n \neq \emptyset.$$

$\square$

Lema 61. Para todo n-símplice $\Delta :=< a_0, \ldots, a_n >$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que todo ε-recubrimiento cerrado y finito de Δ es de orden mayor o igual que n.

Demostración: Para el conjunto de cerrados $\{\Delta_0, \ldots, \Delta_n\}$, el cual tiene intersección vacía, sea $\varepsilon > 0$ un número de Lebesgue que obtenemos al aplicar el corolario 2.

Sea $\mathcal{B} := \{B_0, \ldots, B_p\}$ un ε-recubrimiento cerrado de Δ. Veamos en primer lugar que si $a_k \in B_i$, entonces $\Delta_k \cap B_i = \emptyset$. Para ellos supongamos que $a_k \in B_i$ para cierto $B_i \in \mathcal{B}$. Puesto que el diámetro de B_i es menor que ε, existe $0 \leq j \leq n$ tal que $\Delta_j \cap B_i = \emptyset$. Dado que $a_k \in B_i$, tenemos que $j = k$ y, por lo tanto, concluimos que $\Delta_k \cap B_i = \emptyset$. Como consecuencia, cada $B \in \mathcal{B}$ puede contener como mucho un vértice de Δ. Dado que $\mathcal{B}$ es un recubrimiento cerrado de Δ, entonces para cada $0 \leq k \leq n$, existe un i_k tal que $a_k \in B_{i_k}$. Reordenando los miembro de $\mathcal{B}$ conseguimos que $a_0 \in B_0, \ldots, a_n \in B_n$. Definimos entonces los siguientes cerrados

$$C_0 := \cup\{B \in \mathcal{B} : \Delta_0 \cap B = \emptyset\}$$

$$C_1 := \cup\{B \in \mathcal{B} : \Delta_1 \cap B = \emptyset, B \nsubseteq C_0\}$$

$$\vdots$$

$$C_n := \cup\{B \in \mathcal{B} : \Delta_n \cap B = \emptyset, B \nsubseteq C_0, \ldots, B \nsubseteq C_{n-1}\}.$$

Sea $a_i \in V(\Delta)$ y sea $B_i \in \mathcal{B}$ tal que $a_i \in B_i$. Tenemos entonces que $B_i \cap \Delta_i = \emptyset$ por lo visto anteriormente. Se tiene además que $B_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$ para todo $j = 0, \ldots, n$ distinto de i, luego $B_i \subseteq C_i$ y, como consecuencia, $a_i \in C_i$. Por otro lado, la familia de cerrados $\mathcal{C} := \{C_0, \ldots, C_n\}$ es un recubrimiento de Δ que cumple las condiciones del lema 60, luego el orden de $\mathcal{C}$ será n. Por lo tanto tenemos que

$$C_0 \cap \cdots \cap C_n \neq \emptyset.$$

Probemos ahora que el orden de $\mathcal{B}$ es mayor o igual que n. Sea $x \in C_0 \cap \cdots \cap C_n$. Para cada $i = 0, \ldots, n$, tenemos que cada C_i esta formado por la unión de elementos de $\mathcal{B}$. Esto implica que para cada C_i existe un $B_{l_i} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_{l_i} \subseteq C_i$ para todo $i = 0, \ldots, n$ (por la construcción de los cerrados C_i, hemos garantizado que los B_{l_i} son distintos entre sí). Tenemos por lo tanto que

$$B_{l_0} \cap \cdots \cap B_{l_n} \neq \emptyset,$$

es decir, el orden de $\mathcal{B}$ es mayor o igual que n.

Hemos demostrado que para todo n-símplice, existe un $\varepsilon > 0$ tal que todo ε-recubrimiento cerrado y finito de dicho símplice es de orden mayor o igual que n. $\square$

Teorema 62. Sea σ un n-símplice. Entonces tenemos que $\operatorname{Dim} \sigma = n$.

Demostración: Es consecuencia directa de los lemas 59 y 61. $\square$

Teorema 63. Todo subespacio compacto de $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión menor o igual que n.

Demostración: Sea $D \subseteq \mathcal{R}^n$ un subespacio compacto. Dado que es acotado, existe un n-símplice Δ tal que $D \subseteq \Delta$. Vamos a demostrar que $\operatorname{Dim} D \leq n$ a partir del teorema 57.

Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $\operatorname{Dim} \Delta \leq n$, existe un ε-recubrimiento $\mathcal{C}' := \{C'_1, \ldots, C'_p\}$ finito y cerrado de orden menor o igual que n que recubre Δ. Definimos entonces los cerrados $C_i := C'_i \cap D$ para todo $i = 1, \ldots, p$. Estos formarán un ε-recubrimiento $\mathcal{C} := \{C_1, \ldots, C_p\}$ finito y cerrado de D. Supongamos ahora que tenemos un subconjunto $\{C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que

$$\{C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}\} \neq \emptyset.$$

Como $C_{i_j} \subseteq C'_{i_j}$ para todo $j = 1, \ldots, k$, tenemos entonces que

$$\{C'_{i_1}, \ldots, C'_{i_k}\} \neq \emptyset,$$

luego la familia $\mathcal{C}$ es de orden menor o igual que $\mathcal{C}'$, por lo que $\operatorname{Ord} \mathcal{C} \leq n$. A partir del teorema 57, concluimos por lo tanto que $\operatorname{Dim} D \leq n$ $\square$

Teorema 64. Sean $1 \leq n < m$. Los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos.

Demostración: Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existe un homeomorfismo

$$\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Sea Δ un m-símplice de $\mathbb{R}^m$. Por el teorema 62, sabemos que Δ tiene dimensión m, y además, a partir del teorema 58, sabemos que $\varphi(\Delta)$ tendrá dimensión m, lo cual es un absurdo ya que $\varphi(\Delta)$ es un compacto en $\mathbb{R}^n$, por lo que $\operatorname{Dim}\varphi(\Delta) \leq n$, pero $\operatorname{Dim}\varphi(\Delta) = m > n$. Concluimos por lo tanto, que no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. $\square$

Bibliografía

[ADQ] R. Ayala, E. Domínguez y A. Quintero, *Elementos de la teoría de homología clásica*, Universidad de Sevilla, 2002.

[AFV] R. Ayala, D. Fernández y J. A. Vilches, *El teorema del punto fijo sin homología: un enfoque combinatorio*, La Gaceta de la RSME, 2007.

[Bre] G. E. Bredon, recensión de *J. Mayer, Algebric Topology*, MathSciNet [MR0295326].

[Eng2] R. Engelking, *Dimension Theory*, North Holland, 1978.

[Eng1] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, 1989.

[ES] R. Engelking and K. Sieklucki, *Topology, A Geometric Approach*, Heldermann, 1992.

[GP] F. García y M.L. Puertas, *El teorema de la curva de Jordan*, Divulgaciones Matemáticas 6, 1998, 43-60.

[Lou] M. de Longueville, *A course in topological combinatorics*, Springer, 2013.

[Mau] C. R. F. Maunder, *Algebric Topology*, Cambridge, 1970.

[May] J. Mayer, *Algebric Topology*, Prentice Hall, 1972.

[Mun1] J. R. Munkres, *Elements of Algebric Topology*, Benjamin, 1984.

[Mun2] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 1975.

[Nab] G. L. Naber, *Topological methods in Euclidean spaces*, Dover, 2000.

[Par] S. Park, *Ninety years of the Brouwer Fixed Point Theorem*, Vietnam journal of mathematics 27, 1999, 187-222.

[PJ] S. Park and K.S. Jeong, *A proof of the Sperner lemma from the Brouwer fixed point theorem*, Nonlinear Analysis Forum 8, 2003, 65-67.

[Vra] J. Vrabec, recensión de *G. L. Naber, Topological methods in Euclidean spaces*, MathSciNet [MR569352].

[Wil] D. R. Wilkins, *Course 421. Part III. Simplicial Homology Theory*, 1999.

`https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/`