



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Estadística**

**TÍTULO: OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS DE  
PRODUCTOS AGRARIOS**

**Autora: Irene Arroyo Hernantes**

**Tutor: Ricardo Josa Fombellida**



*A mi abuelo, agricultor, que no me ha podido ver terminar el grado.*



## **Agradecimientos**

Me gustaría agradecer a mi tutor Ricardo que siempre ha estado disponible a ayudarme y apoyarme en todo momento. A todos los profesores por todos los conocimientos que me han enseñado en estos años. A mis compañeros por haberme hecho mucho más amena la Universidad. Y, sobre todo, a mis padres.



## Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado se estudia el modelo de optimización de carteras de Markowitz para obtener carteras eficientes de cultivos agrarios mediante los rendimientos mensuales. Después de un análisis descriptivo de los datos se han obtenido y analizado las fronteras eficientes y las carteras notables correspondientes. Se ha realizado un análisis de sensibilidad para los pesos y la cardinalidad. Además, se han añadido otras restricciones lógicas con variables binarias y semicontinuas para acercarnos lo máximo posible a la realidad. Para su implementación se ha usado el software R y AMPL.

**Palabras clave:** Modelo de Markowitz, Frontera eficiente, Cultivos agrarios, Carteras notables, Análisis de sensibilidad, R, AMPL

# Abstract

This paper studies the Markowitz portfolio optimization model to obtain efficient portfolios with agricultural crops through monthly returns. After a descriptive analysis of the data, we have obtained and analysed the efficient frontiers and the notable portfolios, likewise, a sensitivity analysis has been carried out for the weights and cardinality. In addition, other logical restrictions have been added with binary and semicontinuous variables to get as close as possible to reality. For its implementation, R and AMPL software have been used.

**Keywords:** Markowitz model, Efficient frontier, Agricultural crops, Notable portfolios, Sensitivity analysis, R, AMPL

# Índice

<b>Capítulo 1: Introducción.....</b>	<b>5</b>
1.1. Motivación .....	6
1.2. Objetivos .....	6
1.3. Estructura .....	6
<b>Capítulo 2: Herramientas utilizadas.....</b>	<b>8</b>
2.1. R.....	8
2.2. R Studio .....	9
2.3. Librerías de R.....	10
2.3.1. Tidyverse.....	10
2.3.2. Plotly .....	10
2.4. AMPL .....	10
<b>Capítulo 3: Marco teórico.....</b>	<b>11</b>
3.1. Introducción a la agricultura .....	11
3.2. Carteras de productos agrícolas .....	13
3.3. Problema de selección de carteras .....	15
3.4. El modelo de Markowitz y la frontera eficiente .....	16
3.5. Otros modelos de Markowitz.....	18
3.5.1. Modelo de Markowitz con corrección de estimadores.....	19
3.5.2. Modelo de Markowitz con restricciones de cardinalidad.....	19
3.5.3. Modelo de Markowitz con restricciones lógicas.....	20
Restricciones lógicas de variables semicontinuas.....	21
<b>Capítulo 4: Origen de los datos .....</b>	<b>22</b>
4.1. Precios al productor .....	22
4.2. Rendimiento.....	25
<b>Capítulo 5: Descripción de los datos .....</b>	<b>27</b>
5.1. Tratamiento de los datos .....	27
5.2. Análisis descriptivo.....	27
<b>Capítulo 6: Optimización de carteras.....</b>	<b>34</b>
6.1. Modelo básico.....	34
6.1.1. Frontera eficiente.....	34
6.1.2. Carteras notables .....	36
6.2. Modelo con pesos .....	39
6.2.1. Frontera eficiente.....	39
6.2.2. Carteras notables .....	40

6.3. Modelo con restricción de cardinalidad.....	43
6.4. Modelo con restricciones lógicas.....	45
6.4.1. Frontera eficiente.....	46
6.4.2. Carteras notables .....	49
6.4.3. Restricciones lógicas con variables semicontinuas .....	51
<b>Capítulo 7: Conclusiones .....</b>	<b>53</b>
<b>Capítulo 8: Futuro trabajo .....</b>	<b>54</b>
<b>Anexo .....</b>	<b>54</b>
<b>Anexo 1: Tablas de los datos .....</b>	<b>55</b>
1.1. Rendimiento (hg/ha).....	55
1.2. Productividad (€/ton).....	56
1.3. Valor en €/ha .....	57
1.4. Retornos .....	58
<b>Anexo 2: Gráficos evolutivos .....</b>	<b>59</b>
2.1. Productividad en €/ton .....	59
2.2. Valor en €/ha .....	63
2.3. Retornos .....	67
<b>Anexo 3: Tablas resumen de los €/ton.....</b>	<b>71</b>
<b>Anexo 4: Fronteras eficientes.....</b>	<b>72</b>
<b>Índice figuras .....</b>	<b>76</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>78</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La economía es fundamental en todos los ámbitos de la vida. Los precios de los productos cotidianos han sufrido una gran variación durante los últimos años. Esto es debido a que los productos básicos, como son los cereales de grano, hortalizas, legumbres, frutas... han aumentado su precio debido a la crisis del COVID-19, al bloqueo del canal de Suez y a la guerra entre Ucrania y Rusia.

Actualmente la estadística está teniendo gran importancia en todos los campos, como puede ser el de la agricultura, ya que permite mejorar los resultados.

“De buena semilla, buena cosecha”, dice un refrán popular. Y, aunque razón tiene, no solo la materia prima es importante. La tecnología está cada vez más presente en la agricultura y puede ayudar a mejorar el rendimiento de los cultivos. <sup>1</sup>

En este trabajo, se va a realizar una optimización de carteras de cultivos con el fin de estudiar que va a dar mayor o menor rentabilidad y que tiene mayor o menor riesgo para que así los agricultores puedan decidir la distribución de los cultivos. Gracias a los datos que hay acerca de las producciones y rendimientos, podemos estimar que opción será la óptima. Sin embargo, hay que tener en cuenta que influyen otros factores ajenos a las decisiones de la plantación de cultivos como el clima, el suelo, las plagas, las enfermedades, las guerras, la pandemia, los problemas políticos... De ellos se desconoce cuál va a ser el efecto generado en la agricultura, por lo que esto nos permite solo tener una orientación acerca de cómo puede ser el resultado.

Harry Markowitz <sup>2</sup> marcó un antes y un después en la historia de la inversión. Antes de 1952, la única cuestión planteada era que inversión generaba mayor rentabilidad, pero gracias a él, se debía tener también en cuenta el riesgo que tenía cada inversión. Fue quien desarrolló la teoría de selección de carteras, la teoría moderna de carteras, recogida en un artículo titulado “*Portfolio Selection*” en *Journal of Finance*<sup>3</sup>. Posteriormente, el artículo fue mejorado por los trabajos de Sharpe<sup>4</sup> (1964) y Lintner<sup>5</sup> (1965), construyendo entre los tres el “*Portfolio Theory*”<sup>6</sup>. Hoy en día sigue siendo utilizado este modelo, con algunas modificaciones que han ido mejorándolo. Ha sido galardonado con numerosos premios, entre ellos el Premio Nobel de Economía en 1990<sup>7</sup>.

La Programación No Lineal y la Programación Lineal son herramientas de la Investigación operativa para la toma de decisiones, en las cuales se optimiza, ya sea maximizando o minimizando, una función objetivo, teniendo en cuenta distintas restricciones dadas. Para el caso de la Programación No Lineal la función objetivo o las restricciones pueden ser no lineales<sup>8</sup>. Pretende modelizar problemas de la vida real aplicados a los negocios, empresas, economía, ingeniería, industria... En el ámbito económico, para las decisiones financieras, se maximiza una función objetivo, que hace referencia a la rentabilidad o ganancia, mientras que se minimiza la referida al riesgo. Esto lo hace un problema de decisiones multiobjetivo. El problema básico de selección óptima de carteras es un ejemplo de programación cuadrática puesto que la función objetivo es cuadrática y las restricciones son lineales.

## 1.1. Motivación

Personalmente este trabajo tiene la finalidad de aumentar mis conocimientos relativos al mundo de la inversión. No es un tema muy tratado en el grado de Estadística, pero si está muy relacionado con el análisis de datos. Además, también está relacionado con el análisis de series temporales y la Investigación Operativa, dos asignaturas que me han llamado mucho la atención durante el grado.

El enfoque principal de este trabajo se centra en los aspectos económicos, centrándonos en la optimización de carteras, pero aplicado a un ámbito no tan popular como la Bolsa, pero si fundamental para el consumo diario de alimentos, es decir, los cultivos.

Existen un amplio rango de páginas web o aplicaciones que permiten optimizar las inversiones económicas, pero no es tan amplio en otros campos, como puede ser la agricultura. De ahí la idea de centrarnos en este campo, para poder aplicar la economía y la estadística a un campo distinto.

Durante el desarrollo de este trabajo pretendo aprender conceptos financieros y profundizar en problemas de programación lineal y no lineal.

## 1.2. Objetivos

Este TFG está basado en la optimización de carteras, por lo que sigue la línea de algunos ya presentados por otros alumnos, como puede ser el de Isabel Martín: “*Optimización de carteras de inversión*”<sup>9</sup> o el de Paula López “*Estrategias eficientes de inversión y gestión del riesgo en mercados bursátiles*”<sup>10</sup>. En mi caso, en vez de ser aplicado al mercado bursátil, está aplicado a los productos agrícolas.

El objetivo de este trabajo es utilizar el modelo de Markowitz, para repartir los cultivos de forma que se maximicen los beneficios que se pueden obtener y se minimice el riesgo, probando con distintas restricciones para acercarlo lo máximo posible a la realidad.

Otra novedad que se ha implementado en este trabajo es la necesidad de realizar una transformación de los datos ya que no se pueden obtener los datos necesarios directamente.

Se adaptarán los conceptos financieros como rentabilidad y riesgo de una cartera a un ámbito que no es la Bolsa de Valores.

## 1.3. Estructura

La memoria de este trabajo se estructura en los siguientes capítulos:

- **Capítulo 1. Introducción:** Planteamiento del trabajo, motivación, objetivos y estructura.
- **Capítulo 2. Herramientas utilizadas:** Se presenta el software utilizado, paquetes y librerías necesarias para llevar a cabo este trabajo.

- **Capítulo 3. Marco teórico:** Introducción acerca de la agricultura, explicación de conceptos necesarios para la realización de este trabajo, presentación del modelo de Markowitz y explicación del problema de selección de carteras.
- **Capítulo 4. Origen de datos:** Origen de los datos y descripción de los datos a usar en el desarrollo del trabajo
- **Capítulo 5. Descripción de los datos:** Se comenta la depuración y transformación de datos necesaria para la ejecución de este trabajo, se muestra su evolución en el tiempo, y se realiza un análisis descriptivo de las series.
- **Capítulo 6. Optimización de carteras:** Se presentan las soluciones obtenidas para cada uno de los modelos Markowitz planteados, y se explican las distintas restricciones que se han impuesto. Se efectúa un análisis de sensibilidad para distintos parámetros y una comparación de las carteras notables.
- **Capítulo 7. Conclusiones:** Se comentan las conclusiones obtenidas del estudio realizado.
- **Capítulo 8. Futuro trabajo:** Nuevas líneas de trabajo que surgen para ampliar este TFG.

## Capítulo 2

### Herramientas utilizadas

En este capítulo se van a describir las herramientas empleadas para el desarrollo del trabajo. Los gráficos, tanto previos a la optimización (análisis descriptivo), como para mostrar los resultados y la depuración de los datos, se han realizado con R, mientras que la aplicación de modelos de Markowitz se ha implementado con AMPL.

#### 2.1. R

R es un entorno de software libre y lenguaje de programación interpretado, es decir, ejecuta las instrucciones directamente, sin una previa compilación del programa a instrucciones en lenguaje máquina<sup>11</sup>. Surgió como la reinterpretación del lenguaje S.

R puede ejecutar directamente las instrucciones que se le solicitan, y por ello es mejor que otros programas ya que gana eficacia y tiempo. Se utiliza para realizar gráficos (incluidos gráficos en 3D); para la depuración de datos; análisis de datos, entre ellos manejar los de Big Data; modelado estadístico, por ejemplo, ajustar modelos, estudiar correlaciones, análisis de datos multivariantes, regresiones; machine learning para el aprendizaje automático, minería de datos... En general, podemos considerar que es una herramienta de gran utilidad para la ciencia de datos, siendo así el lenguaje básico en este campo. Es utilizado por investigadores científicos, analistas financieros, actuarios y economistas.

Entre las características de R cabe destacar:

- Extensible: Permite que los usuarios puedan definir sus propias funciones, además de emplear las bibliotecas que vienen implementadas.
- Funcional: Se pueden manipular las funciones en R.
- Orientado a objetos: Para poder modelar conceptos del mundo real y representarles como clases y objetos que interactúen entre ellos.
- Permite hacer gráficos avanzados.
- Incluye diferentes interfaces gráficos: Entre los que cabe destacar R Studio y RCommander.
- Interpretado y no compilado: El intérprete de R ejecuta el código directamente.
- Basado en memoria: R mantiene todos los objetos que definimos en nuestro programa en la memoria de la máquina.

R se integra bien con otros lenguajes de programación para tareas de datos computacionalmente intensivas, y además hay bibliotecas que facilitan la utilización desde lenguajes de programación interpretados, como Python<sup>12</sup>.

## 2.2. R Studio

R Studio es un entorno de desarrollo integrado (IDE) para el lenguaje de programación R, dedicado a la computación estadística y gráficos. Esto quiere decir que es un programa para manejar R y poder utilizarlo de manera más cómoda en algunos aspectos.

Permite ejecutar directamente desde el editor, salto rápido a funciones ya definidas, resaltado de sintaxis, auto completado de código, soporte integrado, visor de datos, depurado interactivo para diagnosticar y corregir los errores rápidamente, R Markdown...<sup>13</sup>

Estructura de R Studio:

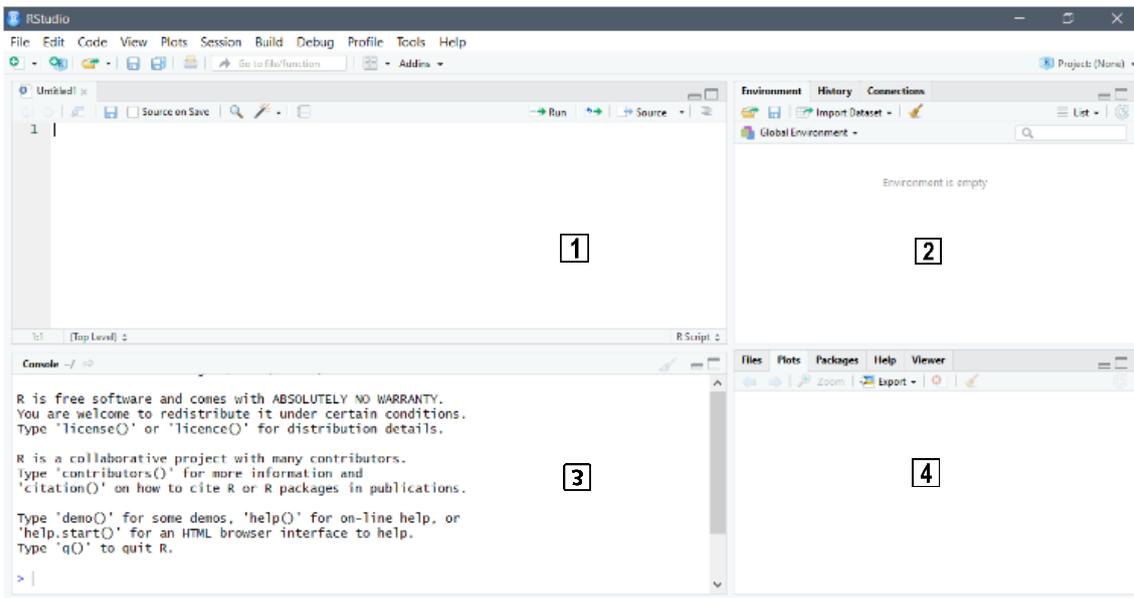


Figura 2.1: RStudio

Está formado por cuatro paneles:

1. Es el editor, en el que se va escribiendo el código y donde aparecen los scripts que se abren.
2. Se almacenan las variables.
3. Consola de R en la que aparecen las órdenes ejecutadas, en la que se puede escribir y la que muestra los resultados del código que se va ejecutando.
4. Aparecen varias pestañas:
  - a. Files: Muestra los ficheros.
  - b. Plots: Aparecen los gráficos que se ejecutan.
  - c. Package: Instalar y cargar paquetes y librerías.
  - d. Help: Ventana de ayuda que explica el funcionamiento de las funciones y las opciones de ellas.
  - e. Viewer: Aparecen las representaciones interactivas que se realizan.

## 2.3. Librerías de R

A continuación, se explican las librerías y paquetes que se han utilizado en el desarrollo de este trabajo.

### 2.3.1. Tidyverse

Para la depuración de datos y el estudio de ellos, tanto para los respectivos análisis previos como para mostrar los resultados obtenidos de forma visual, se ha utilizado el paquete ‘tidyverse’.

El paquete ‘tidyverse’ es un paquete de R que está formado por un conjunto de paquetes diseñados para el *Data Science*, ya que trabajan para proporcionar una estructura eficiente para el análisis y depuración de datos. Fue desarrollado por Hadley Wickham.

De este conjunto de paquetes he hecho uso de la librería ‘**ggplot2**’ que permite visualizar datos mediante una gran variedad de gráficos y empleando *The Grammar of Graphic*. Además, he usado también la librería ‘**dplyr**’ que se conoce como una gramática de depuración de datos, que nos proporcionan un conjunto de funciones que nos permiten resolver los desafíos más comunes a los que nos enfrentamos en la depuración de los datos, como pueden ser entre muchas otras *mutate()* que nos permite añadir nuevas variables creadas a partir de otras ya existentes, *filter()*, que nos permite elegir casos según sus valores, o *with()* que nos permite evaluar expresiones, entre muchas otras.

### 2.3.2. Plotly

La representación de gráficos interactivos se ejecuta mediante el paquete ‘**plotly**’ que es una librería de visualización interactiva que permite crear gráficos interactivos, animaciones y visualizaciones de datos dinámicas. Se integra fácilmente con ggplot2, por lo que puede convertir gráficos ya existentes en gráficos interactivos con la función *ggplotly()*. Por lo que ambas juntas crean visualizaciones muy poderosas

## 2.4. AMPL

AMPL (A Mathematical Programming Language) es un lenguaje de programación algebraica para describir y solucionar problemas muy complejos de programación matemática de gran escala. Fue desarrollado por Robert Fourer, David Gay y Brian Kernighan en los Laboratorios Bell. Soporta *solvers* tanto de código abierto como software comercial. Es software propietario mantenido por AMPL Optimization LLC, pero existen servicios en línea que proporcionan modelación y resolución gratis utilizando el lenguaje AMPL.

Su sintaxis es similar a la notación de problemas de optimización por lo que permite una definición muy concisa y legible de problemas de optimización y además soporta una amplia gama de este tipo de problemas, entre los que podemos destacar programación lineal, programación no lineal, programación cuadrática...<sup>14</sup>

Permite que los modelos que construye se integren posteriormente a otros lenguajes como pueden ser R, Python o Matlab.

# Capítulo 3

## Marco teórico

En este capítulo se van a introducir los conceptos teóricos y conceptuales tanto agrarios como necesarios para el modelo de Markowitz, para comprender el desarrollo de este trabajo.

### 3.1. Introducción a la agricultura

La agricultura ha sido el principal soporte de la economía española hasta el 1960, aunque actualmente, según los datos del Banco Mundial del 2020, solo alrededor del 3.5% de la población activa en España se dedica a la agricultura. Este porcentaje ha disminuido significativamente debido a que ha aumentado la importancia la industria y el sector servicios.

Los principales cultivos son el trigo, cebada, centeno, avena, remolacha, maíz, olivo, patatas, arroz, tomates, cebollas y además viñedos y cítricos.

Las condiciones climatológicas y topográficas de España hacen que la mayor parte de la agricultura sea de secano y que hubiera muchas zonas áridas, pero gracias a los sistemas de regadío que se han implantado han convertido esas zonas en áreas de gran productividad, en las que son frecuentes los cultivos en invernaderos. Los dos grandes tipos de agricultura son:

- **Agricultura de secano:** También es conocida como agricultura de temporal. Es aquella en la que el ser humano no contribuye al riego de los campos, sino que se utiliza únicamente el agua que proviene de las lluvias. Es propia del clima tropical y se emplea abono animal. Se aplica la rotación trienal teniendo una hoja de barbecho, es decir, la tierra de cultivo se deja sin sembrar durante uno o más ciclos vegetativos para recuperar y almacenar materia orgánica y humedad y para evitar patógenos. El sistema de cultivo es el monocultivo. Algunos cultivos típicos de secano son: los cereales como la cebada, trigo, avena, centeno y mijo; legumbres: garbanzos, guisantes, habas y cacahuetes; árboles frutales, por ejemplo, almendro, olivo y albaricoquero; hortalizas: cebollas y tomates; melones; vid...<sup>15</sup>
- **Agricultura de regadío:** Es aquella en la que se aplican suministros de agua por distintos sistemas de riego para los cultivos que no pueden depender de la estación del año o de que llueva para su riego. Es adecuado para grandes extensiones de tierra por lo que lleva un gran coste para el agricultor, pues se necesitan instalaciones y maquinaria especiales. El agua se toma de lagos, pozos, ríos o estaciones naturales como las depuradoras. Entre los métodos de cultivo de regadío podemos destacar drenaje, aspersión, filtración, riego localizado o infiltración. Algunos cultivos típicos de regadío son frutas, arroz o flores.

Al ser tan distintos estos tipos, cada uno tiene sus ventajas y desventajas. Respecto a las ventajas, los cultivos de secano tienen menor coste pues se necesita poca maquinaria, menor impacto ambiental ya que se utilizan solo los recursos accesibles, conservan el

agua y contribuyen al cuidado del suelo gracias a la utilización de abonos orgánicos. Por su parte, los cultivos de regadío tienen una mayor productividad (por hectárea, aproximadamente 6 veces más que las de secano), flexibilidad y mayor seguridad de la producción de una buena cosecha ya que no dependen de condiciones ambientales. Si se observan ahora las desventajas, los cultivos de secano tienen una menor productividad y están sujetos a las condiciones ambientales, por lo que los eventos inesperados como sequías o inundaciones pueden ocasionar gran daño a las cosechas. Por otro lado, los de regadío tienen un mayor coste de producción debido a la maquinaria necesaria, un mayor impacto ambiental por el consumo energético que ocasionan y un mayor consumo hídrico. Por tanto, si nos fijamos bien, las ventajas de uno son similares a los inconvenientes del otro y viceversa<sup>16</sup>.

En España, según el Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación el 54.9% de la superficie cultivable es de secano, mientras que el 45.1% es de regadío, por lo que es una proporción muy similar.

Además, cabe destacar la agricultura ecológica, que comenzó en España en la década de los 80, pero que cada vez tiene más importancia. Según el Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación, en 2020 estaba destinado un 10.1% de la superficie agrícola para la agricultura ecológica, aumentando en algo más del doble de la que estaba dedicada en 2010 (4.5%). España es uno de los países líderes en la producción de alimentos ecológicos en Europa.

La **agricultura ecológica** está basada en la utilización óptima de los recursos naturales, sin emplear químicos sintéticos u organismos genéticamente modificados ni para el abono ni para la erradicación de plagas. Este tipo de agricultura pretende conservar la fertilidad de la tierra, respetar el medio ambiente y obtener alimentos orgánicos siendo así su principal objetivo la obtención de alimentos saludables. Se pueden tomar en cuenta los policultivos que a diferencia de los monocultivos aprovechan mejor todos los recursos del suelo. Además, en la medida de lo posible se debe de mantener diversidad biológica, que se consigue alternando las distintas variedades de cultivos, lo conocido por rotación de cultivos. Uno de los cultivos más utilizados es el bancal. El bancal es la superficie horizontal en terrenos con declives, producto de la obra humana que se sostiene por una pared o talud y que se utiliza para labores agrícolas<sup>17</sup>.

Este concepto podemos considerar que va ligado a la **agricultura sostenible**, ya que esta además de abarcar aspectos ambientales como la ecológica, también engloba aspectos económicos y sociales. La apuesta por la agricultura sostenible se debe a que en algunos países la agricultura tradicional supone hasta un 40% de la riqueza, pero es responsable de más del 20% de los gases de efecto invernadero y del consumo del 70% de agua a nivel mundial. Por tanto, la agricultura sostenible se ha convertido en una prioridad pues es aquella respetuosa con el medioambiente, rentable y social que genera externalidades sociales en el territorio a la vez de buenas condiciones laborales<sup>18</sup>.

El clima en España es muy diferente en cada región, por lo que la agricultura también tendrá mucha variación. Por ejemplo, según el Instituto Nacional de Estadística (INE) de 2020, en Castilla y León, aproximadamente el 5.5% de la población activa trabaja en la agricultura. Respecto al tipo de superficie, según el INE, el 81.6% de la superficie cultivable es de secano, mientras que el 18.4% es de regadío. Esto se debe a que la mayor

parte de las tierras se dedican a la producción de cereales y leguminosas, que son cultivos que no requieren de un riego continuo y que se adaptan bien a esas condiciones climáticas. La superficie de regadío ha incrementado en las últimas décadas ya que se utiliza para la producción de hortalizas y frutas.

### 3.2. Carteras de productos agrícolas

Resulta importante el estudio del problema de selección de carteras ya que permite repartir y diversificar la plantación de varios cultivos en diferente proporción para reducir el riesgo.

Se van a definir los conceptos necesarios para entender la adaptación de las carteras de optimización del mercado financiero, que es el ámbito habitual en el cual se optimizan las inversiones, al campo de los productos agrarios.

**Cartera de productos agrícolas:** Es un conjunto de productos agrícolas en el que se indica una política de cultivo, es decir, cuántas hectáreas del terreno disponible se dedican a cada cultivo o qué porcentaje se dedica a cada uno de ellos. La cartera de productos se define matemáticamente como  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  tal que  $\sum_{j=1}^n x_j = 1$  y  $x_j \geq 0$  para todo  $j$ .

**Rendimiento o rentabilidad del cultivo de un producto:** Es la ganancia obtenida al cultivar una superficie con ese cultivo durante un periodo de tiempo. Por ejemplo, si en un mes su valor es 10500 €/ha y en el mes anterior ha sido 10000€/ha, la ganancia bruta que ha alcanzado en ese mes es de  $10500/10000=1.05$ , y la neta de 0.05, produciéndose un incremento del 5%. Se van a considerar rendimientos mensuales ya que los datos más frecuentes en este ámbito son los precios mensuales. Los precios de los productos varían cada mes según diferentes factores y por tanto estos son variables aleatorias, de las que nos interesará conocer su media, varianza y covarianza para el desarrollo del modelo de Markowitz.

**Rendimiento o rentabilidad esperada de un cultivo de un producto en un periodo de tiempo determinado:** Es la ganancia media del cultivo de dicho producto en todos los periodos de tiempo disponibles.  $R_j(t)$  hace referencia al rendimiento mensual del cultivo del producto agrícola  $j$  en el mes  $t$ ,  $t = 1, \dots, T$ ;  $j = 1, \dots, n$ . Se obtiene dividiendo el precio en euros por hectárea en un mes por los del mes anterior. Los  $R_j$  son variables aleatorias cuyos momentos (media, varianza y covarianza) se desconocen, pero se pueden estimar a partir de los datos históricos disponibles. El rendimiento esperado del cultivo  $j$  se define como:

$$r_j = ER_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_j(t)$$

**Rendimiento o rentabilidad de una cartera de productos agrícolas:** Es la ganancia obtenida por esa cartera. Es decir, si la cartera es  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  siendo  $x_j$  la proporción o cantidad dedicada al cultivo  $j$  y siendo  $R_1, R_2, \dots, R_n$  los rendimientos

individuales de cada cultivo, entonces el rendimiento de la cartera  $x$  será  $R = x_1R_1 + x_2R_2 + \dots + x_nR_n$ . Es decir:

$$R(x) = \sum_{j=1}^n x_j R_j$$

**Rendimiento o rentabilidad esperada de una cartera de productos agrícolas:** Es la esperanza del rendimiento de la cartera, es decir, la ganancia media ponderada. Si la cartera es  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  siendo  $x_j$  la proporción o cantidad dedicada al cultivo  $j$  desde  $j = 1, \dots, n$  y siendo  $r_1 = ER_1, r_2 = ER_2, \dots, r_n = ER_n$  los rendimientos individuales esperados, entonces el rendimiento medio de la cartera  $x$  es  $r = ER = x_1r_1 + x_2r_2 + \dots + x_nr_n$ . Es decir:

$$r(x) = E(R(x)) = \sum_{j=1}^n x_j r_j$$

**Riesgo del cultivo de un producto:** Es la varianza del rendimiento del cultivo de ese producto  $j$ , es decir, la media de las desviaciones cuadráticas respecto de su rendimiento medio. Siendo  $T$  el número de meses, el riesgo del cultivo  $j$  es:

$$\sigma_j^2 = VarR_j = E(R_j - r_j)^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_j(t) - r_j)^2$$

**Riesgo de una cartera de productos agrícolas:** Es la varianza del rendimiento de la cartera. El riesgo se puede reducir diversificando la inversión, es decir, sembrando la superficie disponible con más de un producto agrícola, mediante una cartera de productos. Es decir, si la cartera es  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , recoge las proporciones dedicadas a cada cultivo  $j = 1, \dots, n$ . Entonces,  $\sigma^2(x) = Var(R(x)) = Var(x_1R_1 + x_2R_2 + \dots + x_nR_n)$  es el riesgo de la cartera  $x$ . Mediante las operaciones correspondientes el riesgo queda:

$$\sigma^2(x) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 x_j^2 + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n \sigma_{ik} x_i x_k$$

donde  $\sigma_{ik}$  es la covarianza entre  $R_i$  y  $R_k$ .

**Ratio de Sharpe de una cartera  $x$ :** Es una unidad de medida del exceso de rendimiento por unidad de riesgo de una inversión. Se utiliza fundamentalmente para hallar la mejor cartera de la denominada Frontera Eficiente. Es decir, el ratio de Sharpe de una cartera es el encargado de medir el rendimiento ajustado por el riesgo:

$$SR(x) = \frac{r(x) - \bar{r}}{\sigma(x)}$$

que se explica más abajo. Es un concepto fundamental, desarrollado por el premio Nobel de Economía (1990) por William Forsyth Sharpe.

Para interpretar el ratio de Sharpe se tendrá que tener en cuenta que, un ratio de Sharpe alto significa que el rendimiento es mejor, mientras que, un ratio de Sharpe bajo quiere decir que un activo con menos riesgo valdrá más. Permite comparar inversiones que están

dentro del nivel de riesgo que consideramos aceptable. Mide el exceso de rentabilidad por unidad de riesgo, medido como la desviación típica y por ello puede tomar valores negativos.

Entendiéndolo como  $r(x)$  la rentabilidad de la cartera  $x$  menos la rentabilidad media ( $\bar{r}$ ) en el periodo considerado de un producto agrícola libre de riesgo (se puede tomar como estimador la variación del IPC de alimentos en la cesta de la compra del periodo de los datos históricos utilizados), dividido entre el riesgo en la cartera  $x$ . Cuando se comparan dos carteras, la cartera con mayor Ratio de Sharpe proporciona un mayor rendimiento para un mismo nivel de riesgo<sup>19</sup>.

### 3.3. Problema de selección de carteras

El problema de selección de carteras consiste en encontrar diversos cultivos para sembrarlos en el porcentaje que corresponda de la superficie disponible. Se tienen en cuenta dos criterios: el rendimiento esperado obtenido con el cultivo de los productos y el riesgo que se quiere tener. Como se ha dicho, para cada producto  $j$ , los valores  $100x_j\% \geq 0$  indican el porcentaje de terreno que se debe dedicar al cultivo del producto  $j$ . Habitualmente se dedica todo el terreno al cultivo, por lo que  $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ .

Se basa en los datos obtenidos de precios en euros por hectárea en un mercado alimenticio de  $n$  productos agrícolas en  $T$  meses. Estos datos se obtienen a partir de los precios en euros por cada tonelada y de los rendimientos en hg por hectárea.

Existen dos modelos básicos de optimización de carteras:

- **Modelo de minimización del riesgo:** Este modelo básico de optimización de carteras consiste en encontrar la cartera que minimiza el riesgo entre todas las que obtienen una rentabilidad mayor o igual que una cantidad fijada  $k > 0$  sin tener en cuenta otras características.

Se formula de la siguiente manera:

$$\min f(x) = \sigma^2(x) = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1,$$

$$\sum_{j=1}^n x_j r_j \geq k,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

- **Modelo de maximización de la rentabilidad:** Este modelo básico de optimización de carteras consiste en encontrar la cartera que maximiza la

rentabilidad entre aquellas a las que se las ha fijado un riesgo máximo  $k$ , sin tener en cuenta otras características.

Se formula de la siguiente manera:

$$\max f(x) = r(x) = \sum_{i,j=1}^n x_j r_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1,$$

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \leq k,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

### 3.4. El modelo de Markowitz y la frontera eficiente

El modelo de Markowitz supuso un antes y un después en la historia de inversión. Antes de 1952, los inversores basaban sus cálculos únicamente en la idea de maximizar la rentabilidad de sus inversiones, es decir, a la hora de realizar una inversión, la atención se centraba en encontrar la inversión que generaba mayor rentabilidad.

H. Markowitz decidió aplicar las matemáticas al análisis del mercado bursátil, y mientras investigaba la comprensión actual de las acciones, se dio cuenta de que la teoría carecía de un análisis del impacto del riesgo. No tiene ningún sentido que invirtamos todo nuestro dinero en un producto si al hacer esto hay una gran probabilidad de perder todo el dinero o gran parte de él.

Esta idea le llevo a desarrollar su teoría fundamental de la asignación de carteras bajo incertidumbre, que fue publicada en 1952 por el *Journal of Finance* en el artículo llamado “*Portfolio Selection*”<sup>3</sup>. En este artículo se expone su teoría sobre como hallar la composición óptima de una cartera, maximizando la rentabilidad para un determinado nivel máximo de riesgo aceptable o alternativamente, minimizando el riesgo para una rentabilidad mínima esperada. Al elegir valores que no se “mueven” exactamente juntos, el modelo muestra a los inversores como reducir el riesgo, y es también denominado modelo de media-varianza, debido a que se basa en los rendimientos esperados (media) y la desviación estándar (varianzas) de las diferentes carteras.

Este problema tiene doble objetivo, minimizar el riesgo y maximizar la rentabilidad, por lo que no tiene solución óptima ya que es imposible alcanzar los dos simultáneamente, y es por ello, que se habla en términos de eficiencia.

Según Markowitz, el proceso de selección de una cartera de inversión consta de dos etapas. La primera está relacionada con la observación, experiencia y expectativas del comportamiento futuro de los valores, mientras que la segunda se ocupa de la selección

de la cartera, siendo esta segunda etapa la cual se encarga de estudiar el artículo de Markowitz.

De esta teoría se deriva la Frontera de eficiencia de Markowitz, que es el conjunto de carteras que obtienen el rendimiento esperado más alto para un determinado nivel de riesgo asumido. Ambos conceptos fueron fundamentales para el desarrollo del Modelo de fijación de precios de activos de Capital, conocido como CAMP, pero que no se desarrollará en este trabajo.

H. Markowitz desarrolló dos hipótesis: Hipótesis sobre el inversor e hipótesis sobre los mercados.

- La hipótesis sobre el inversor recoge que los individuos se comportan racionalmente, buscando maximizar la función y al ser aversos al riesgo, a igual rendimiento, se busca la cartera con menor riesgo. Además, el análisis se basa en un modelo de inversión de un único periodo siendo la función de utilidad convexa y creciente.
- Respecto la hipótesis sobre los mercados financieros, estos están formados por activos financieros arriesgados, es decir, no existe ningún activo libre de riesgo y todos disponen de liquidez inmediata al final del periodo. A mayores, se considera que los mercados financieros son perfectos, esto quiere decir que no existen costes de transacción de compraventa y los títulos son infinitamente indivisibles<sup>20</sup>.

Para elegir la mejor cartera entre una cantidad de carteras posibles con diferente rentabilidad y riesgo, se deben tomar dos decisiones por separado:

1. Determinación de un conjunto de carteras eficientes.
2. Selección de la mejor cartera del conjunto eficiente.

En el desarrollo de este trabajo se utiliza el ratio de Sharpe como criterio de selección de la mejor cartera eficiente. Como se ha dicho en el Apartado 3.2. el ratio de Sharpe es una medida de rentabilidad-riesgo siendo una variable empleada para valorar la calidad de una inversión, comparándola con las inversiones de un mismo tipo.

La formulación del modelo de Markowitz con el método de las ponderaciones en programación multiobjetivo es la siguiente:

$$\min f(x) = \mu\sigma^2(x) - r(x) = \mu \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij}x_i x_j - \sum_{j=1}^n r_j x_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$0 \leq \mu \leq \infty$$

Siendo  $\mu$  un parámetro que regula el cumplimiento de cada uno de los dos objetivos. Un valor grande de  $\mu$  provoca una minimización del riesgo, mientras que un valor pequeño

del  $\mu$  se centra en maximizar la rentabilidad, ya que, en la formulación del modelo, el primer término hace referencia al riesgo y el segundo al rendimiento.

Una solución o cartera eficiente para este problema es una cartera  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  tal que no existe otra cartera  $x'$  con una rentabilidad mayor  $r(x') \geq r(x^*)$  y a su vez un riesgo menor  $\sigma^2(x') \leq \sigma^2(x^*)$ , con al menos una desigualdad estricta. Es decir, no hay otra cartera  $x$  mejor tanto en rentabilidad como en riesgo. Todas las carteras eficientes son válidas e interesantes para el inversor.

Las carteras eficientes se obtienen dando distintos valores al parámetro  $\mu$ . Al conjunto de todas esas carteras, como ya hemos mencionado anteriormente, se denomina frontera eficiente, que esta representada mediante los puntos  $(r(x^*), \sigma^2(x^*))$ , siendo  $x^*$  cartera eficiente, como una curva riesgo-rendimiento.

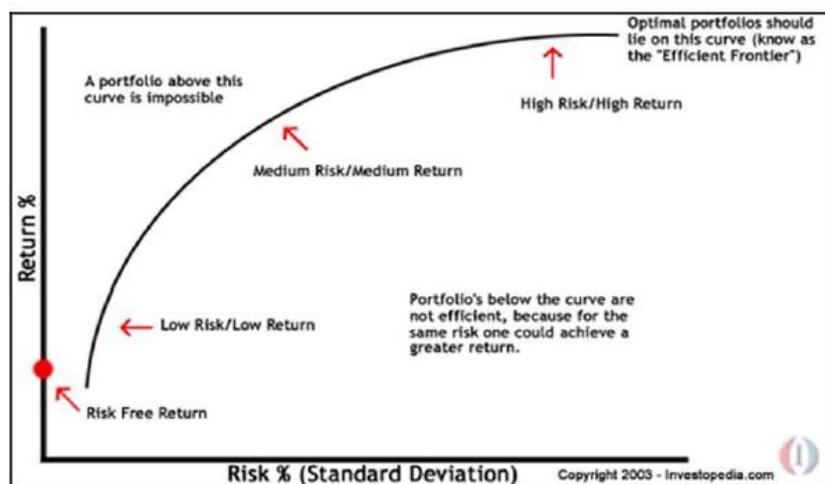


Figura 3.1: Frontera eficiente

Como recoge la Figura 3.1 las soluciones razonables son solamente aquellas que pertenecen a la frontera eficiente, y las que quedan fuera de ella, no son soluciones óptimas.

Según la Teoría de carteras, existe interés por tres carteras diferentes, a las que denominamos carteras notables.

- **Cartera de máxima rentabilidad:**  $\mu = 0$  (No tiene en cuenta el riesgo)
- **Cartera de mínimo riesgo:**  $\mu = \infty$  (No tiene en cuenta el rendimiento)
- **Cartera de máximo ratio de Sharpe**

Además del estudio de estas tres en el desarrollo del trabajo, también se va a tener en cuenta la **cartera equiponderada**, en la que todos los cultivos se les asigna en la misma proporción, es decir, se reparte el terreno de forma equitativa entre todos los componentes. Esta última cartera no forma parte de las carteras eficientes, pero tiene interés en ser estudiada pues si no se tiene ningún conocimiento sobre este tema es la opción que la mayoría de las personas llevarían a cabo y es la que se daría al azar.

### 3.5. Otros modelos de Markowitz

En este apartado se van a considerar a partir del modelo de Markowitz algunas modificaciones.

### 3.5.1. Modelo de Markowitz con corrección de estimadores

En este modelo se pretende corregir los estimadores. En lugar de utilizar la media para el cálculo de los rendimientos, parece tener más sentido ponderar los rendimientos, es decir, asignar pesos para dar más importancia a los valores obtenidos en los meses más recientes, ya que es lógico pensar que los valores más lejanos en el tiempo están menos relacionados con la actualidad que los más cercanos. Redefinimos el rendimiento del cultivo  $j$ , según se recoge en<sup>21</sup>, como:

$$r_j = ER_j = \frac{\sum_{t=1}^T p^{T-t} R_j(t)}{\sum_{k=1}^T p^{T-k}}$$

$$p \in (0,1)$$

Con  $p = 1$  todos los valores tienen la misma importancia (es equivalente al modelo básico). Según se cambia el valor de  $p$  tendrán más peso las observaciones de los periodos más recientes.

Pero este ajuste no llega a ser el adecuado pues se produce alguna imprecisión, por lo que para corregirlo se incluyen logaritmos en el modelo, como propuso Vanderbei<sup>21</sup>, y por lo tanto el rendimiento del cultivo  $j$  será:

$$r_j = ER_j = \frac{\sum_{t=1}^T p^{T-t} \log(R_j(t))}{\sum_{k=1}^T p^{T-k}}$$

La formulación del modelo es la misma que la del modelo de Markowitz.

### 3.5.2. Modelo de Markowitz con restricciones de cardinalidad

Otro problema habitual al que se puede enfrentar el agricultor es elegir el número de cultivos que se deben sembrar en las hectáreas disponibles. Un agricultor puede decidir que solo quiere invertir en un número máximo de cultivos, ya sean 2,3,4... Para ello, se añade una restricción de cardinalidad, especificando cuantos productos se quiere que formen como máximo la cartera eficiente. A mayores, se añaden cotas inferiores y superiores de la inversión en cada cultivo.

La formulación del modelo es la siguiente:

$$\min f(x) = \mu \sigma^2(x) - r(x) = \mu \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j - \sum_{j=1}^n r_j x_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \leq N$$

$$x_k \leq y_k S_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$L_k y_k \leq x_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$0 \leq \mu \leq \infty$$

Donde  $L_k$  y  $S_k$  son las cotas inferiores y superiores respectivamente. Para este modelo tomamos  $L_k = 0.001$  y  $S_k = 1$ .

### 3.5.3. Modelo de Markowitz con restricciones lógicas

Otro problema habitual puede ser el tener alguna restricción que indique la obligatoriedad o prohibición de siembra de algún cultivo. En este caso se han añadido 3 restricciones, que son: Obligatoriedad de que el trigo este presente en la cartera, incompatibilidad de que, si está la cebada no pueda estar el centeno, e implicación, de que si está el maíz tenga que estar obligatoriamente la avena.

La formulación del modelo es la siguiente:

$$\min f(x) = \mu \sigma^2(x) - r(x) = \mu \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j - \sum_{j=1}^n r_j x_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \leq N$$

$$x_k \leq y_k S_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$L_k y_k \leq x_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$y[\text{trigo}] = 1$$

$$y[\text{cebada}] + y[\text{centeno}] \leq 1$$

$$y[\text{maiz}] \leq y[\text{avena}]$$

$$0 \leq \mu \leq \infty$$

**Restricciones lógicas de variables semicontinuas.**

Las variables semicontinuas son aquellas que pueden tomar el valor 0 o cualquier valor que se encuentre entre su límite inferior semicontinuo y su límite superior<sup>22</sup>. Es decir, en este caso, tiene que tomar el valor 0 o si no estar entre el valor  $x$ , y el 1 (100%). En este caso, se plantea que en el caso de que se siembren zanahorias, se tenga que cultivar al menos el 20% de la parcela de dicho producto.

La formulación del modelo es la misma que el modelo de Markowitz sin ninguna restricción, pero añadiendo la siguiente que hace referencia a la restricción de las variables semicontinuas mencionada anteriormente:

$$x[\text{zanahoria}] \geq 0.2 * y[\text{zanahoria}]$$

# Capítulo 4

## Origen de los datos

En este capítulo se van a describir con detalle los datos que se utilizarán en el desarrollo del trabajo. También se comentará la fuente de los datos y la estructura de la página, además de comentarse los productos que se han tomado y las variables que tienen los conjuntos de datos.

En este trabajo se ha decidido trabajar con datos agrarios de España que han sido obtenidos de la FAO, siendo necesarios los datos de rendimientos y los de precios.

La Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación, FAO, se constituyó en 1945 y cuenta actualmente con casi 200 miembros. Su función principal es poner fin al hambre. Su objetivo es lograr la seguridad alimentaria para todos, y al mismo tiempo garantizar el acceso regular a alimentos suficientes y de buena calidad para llevar una vida activa y sana. Las tres metas principales de la FAO son: erradicar el hambre, la inseguridad alimentaria y la malnutrición; eliminar la pobreza y promover el progreso económico y social universal; y fomentar la gestión y la utilización sostenible de los recursos naturales, incluyendo la tierra, el agua, el aire, el clima y los recursos genéticos, en beneficio de las generaciones actuales y futuras. La FAO recibe el 100% de su financiación de sus Estados miembros<sup>23</sup>.

### 4.1. Precios al productor

Primero se va a hablar de los datos de los precios, que han sido obtenidos de la siguiente página: <https://www.fao.org/faostat/es/#data/PP>. En la Figura 4.1 aparece su estructura. La selección que se ha hecho en la ventana de países es España, ya que lo que interesa estudiar es como varían los precios en a nuestro país.

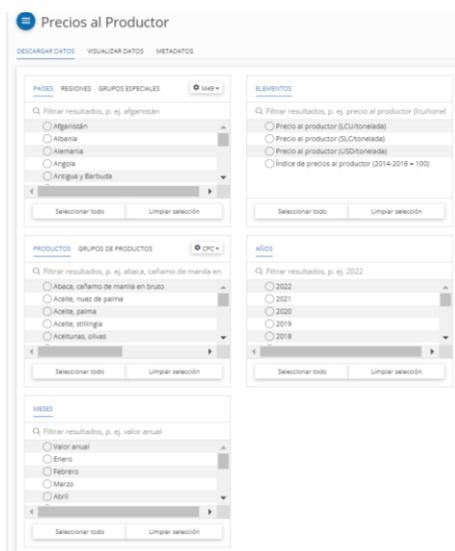


Figura 4.1: Página web de los precios de la FAO

En la ventana de elementos se ha seleccionado Precio al productor (LCU/tonelada), LCU es Local Current Unit, que en el caso de España es el euro, por lo que los precios de los cultivos van a ser en €/tonelada. En la de años se selecciona del 2017 al 2021, pues para 2022 no están todavía disponibles los datos, ya que, al tratarse de una página a nivel mundial, la recogida de los datos y su unificación es una tarea que conlleva un elevado trabajo y tiempo. Para los meses se han marcado todos, ya que nos interesa la evolución mensual, aunque hay algún mes que no tenía datos y ha sido necesario hacer algún tipo de ajuste que se explicará en el Capítulo 5. Por tanto, el número total de datos será  $5 \text{ años} \times 12 \text{ meses}$ , es decir, 60 datos para cada uno de los productos seleccionados. Respecto a la selección en la ventana de los productos se ha intentado seleccionar productos propios de distintas regiones de España y de distintos tipos:

- **Arroz:** Es un cereal de grano perteneciente a la familia de las Gramíneas considerado como el segundo cereal más producido a nivel mundial. El método tradicional de cultivo de arroz es la inundación de los campos, durante o después de la plantación de la implantación de las plántulas. En España el arroz se cultiva en la Delta del Ebro, en Extremadura, en las marismas del Guadalquivir, y, sobre todo, en la Comunidad Valenciana, que es sin duda la cuna del cultivo de arroz en España.
- **Avena:** Es un cereal perteneciente a la familia de las Poáceas, está entre los diez cereales más cosechados, tanto a nivel nacional como mundial. En España se cultiva sobre todo en Castilla la Mancha, Castilla y León, Andalucía y Extremadura.
- **Cebada:** Es un cereal de grano perteneciente a la familia de las Poáceas y es de gran importancia tanto para animales como para humanos, y, además, es el quinto cereal más cultivado a nivel mundial. Hay dos tipos de cebada, la cebada trefesina y la castellana. España es uno de los países que producen mayor cantidad de cebada y está cultivada principalmente en Castilla y León, seguida de Castilla la Mancha.
- **Centeno:** Es un cereal de la familia de las Gramíneas cultivado por su grano o como planta forrajera. Es un miembro de la familia del trigo y se relaciona estrechamente con la cebada. Es una planta monocotiledónea<sup>24</sup> anual. Se emplea en la fabricación de harina y bebidas. En España es cultivado en áreas de montaña y zonas de suelo pobre como Castilla y León (principalmente en León, Palencia, Zamora y Burgos), Galicia (principalmente Ourense) y Asturias.
- **Lechuga:** Es una hortaliza de la familia Asteraceae. Soporta mejor las temperaturas bajas que las elevadas y exige que haya diferencia de temperaturas entre el día y la noche. En España, se siembra en Murcia, Andalucía (Almería) o en la Comunidad Valenciana debido a sus zonas templadas y clima mediterráneo.
- **Maíz:** Es un cereal de la familia de las Gramíneas con un crecimiento muy rápido, pero necesita abundante sol. Actualmente es el cereal con mayor volumen de producción a nivel mundial y a nivel nacional también es uno de los cultivos principales de nuestro país siendo exclusivamente cultivado en regadío. Es cultivado principalmente en Castilla y León y Aragón.
- **Manzanas (Manzano):** Es un cultivo leñoso frutal de la familia de Rosaceae y debido a la gran variedad de manzanos que hay hace que esté sembrado en distintas zonas de España, entre las que cabe destacar Cataluña y Aragón, o la

Cornisa Cantábrica (Asturias, Galicia, País Vasco y Navarra) para los manzanos de sidra.

- **Naranjas (Naranja):** Es un cultivo leñoso cítrico de la familia de las Rutáceas, que forma una parte importante de la economía de muchos países. Se cultiva en las regiones de clima templado y húmedo, por lo que es típica de la zona mediterránea, y en España se cultiva en Andalucía, Murcia, Gran Canaria, Extremadura, Cataluña y la Comunidad Valenciana
- **Remolacha (Azúcar):** Pertenece a la familia de las Amarantáceas, que es una familia de plantas. En España se cultiva en la zona del Norte, siendo las comunidades autónomas en las que se siembra Castilla y León, País Vasco, La Rioja y Navarra, llevándose prácticamente todo el cultivo en zona de regadío.
- **Semilla (Girasol):** Es un tipo de semilla oleaginosa mayoritariamente de secano con gran variedad de zonas de cultivo, entre las que podemos destacar, Andalucía, Castilla y León, Castilla la Mancha, Extremadura y Aragón.
- **Trigo:** Designa al conjunto de los cereales y pertenece a la familia de las gramíneas. Es uno de los tres granos más ampliamente producidos a nivel mundial. Hay dos tipos de trigo, blando y duro, por lo que está más extendido por España. Se cultiva en Castilla y León, Castilla la Mancha y Andalucía.
- **Zanahoria:** Es una hortaliza de la familia de las umbelíferas. En España se cultiva principalmente en Andalucía (Cádiz) y Castilla y León (Valladolid y Segovia) y en menor proporción en la Comunidad Valenciana y Castilla la Mancha.

Por tanto, se han escogido 12 cultivos diferentes entre ellos, ya que incluye tanto cereales como frutas y hortalizas. En total tendremos 5 años × 12 meses × 12 cultivos = 720 datos.

La forma de salida de los datos la podemos elegir según nos interese a nosotros, como se observa en la Figura 4.2, pero en este caso nos interesa un CSV.

Figura 4.2: Salida de los datos

La cabecera de los datos que se obtienen se recoge en la Figura 4.3

```
> head(datosFAO)
Código.Ambito  Ambito Código.área..M49.  Area  Código.Elemento  Elemento  Código.Producto..CPC.  Producto  Código.año  Año  Código.Meses
1  PP Precios al Productor  724 España  5530 Precio al productor (LCU/tonelada)  113  Arroz  2017 2017 7001
2  PP Precios al Productor  724 España  5530 Precio al productor (LCU/tonelada)  113  Arroz  2017 2017 7002
3  PP Precios al Productor  724 España  5530 Precio al productor (LCU/tonelada)  113  Arroz  2017 2017 7003
4  PP Precios al Productor  724 España  5530 Precio al productor (LCU/tonelada)  113  Arroz  2017 2017 7004
5  PP Precios al Productor  724 España  5530 Precio al productor (LCU/tonelada)  113  Arroz  2017 2017 7005
6  PP Precios al Productor  724 España  5530 Precio al productor (LCU/tonelada)  113  Arroz  2017 2017 7010
Meses Unidad Valor Símbolo Descripción.del.Símbolo
1 Enero LCU 307 A Cifra oficial
2 Febrero LCU 313 A Cifra oficial
3 Marzo LCU 286 A Cifra oficial
4 Abril LCU 290 A Cifra oficial
5 Mayo LCU 323 A Cifra oficial
6 Octubre LCU 286 A Cifra oficial
```

Figura 4.3: Cabecera datos precios

No todas las variables de la tabla son de nuestro interés por lo que se va a mencionar aquellas útiles para el desarrollo del trabajo:

- Producto: Nombre del cultivo
- Año
- Mes
- Valor: Precio del producto en € por tonelada (€/ton)

## 4.2. Rendimiento

Para el trabajo se necesitan obtener los datos en €/ha. Para ello será necesario obtener los datos de producción en cada hectárea, es decir, los datos de rendimiento. También se han obtenido de la FAO, en el siguiente enlace <https://www.fao.org/faostat/es/#data/QCL> cuya estructura es muy similar a la de la página desde la que se obtienen los datos de Precios al Productor, como se observa en la Figura 4.4.

Figura 4.4: Página web de los rendimientos de la FAO

La selección de los datos es la misma que en la de los Precios al Productor, teniendo en cuenta que los productos en los que estamos interesados aparecen en la categoría “Cultivos, primarios”. En la ventana elementos se seleccionará rendimiento que proporciona los valores en hg/ha.

La salida de datos se puede descargar igual que en la Figura 4.2.

La cabecera de los datos obtenidos se recoge en la Figura 4.5.

```
> head(datosFAOR)
  Código.Ambito      Ambito Código.área..M49.  Área Código.Elemento  Elemento Código.Producto..CPC.  Producto Código.año  Año Unidad Valor Símbolo
1      QCL Cultivos y productos de ganadería      724 España      5419 Rendimiento      113 Arroz      2017 2017 hg/ha 77616 A
2      QCL Cultivos y productos de ganadería      724 España      5419 Rendimiento      113 Arroz      2018 2018 hg/ha 76077 A
3      QCL Cultivos y productos de ganadería      724 España      5419 Rendimiento      113 Arroz      2019 2019 hg/ha 75339 A
4      QCL Cultivos y productos de ganadería      724 España      5419 Rendimiento      113 Arroz      2020 2020 hg/ha 72431 A
5      QCL Cultivos y productos de ganadería      724 España      5419 Rendimiento      113 Arroz      2021 2021 hg/ha 72884 A
6      QCL Cultivos y productos de ganadería      724 España      5419 Rendimiento      117 Avena      2017 2017 hg/ha 15091 A
Descripción.del.Símbolo
1      Cifra oficial
2      Cifra oficial
3      Cifra oficial
4      Cifra oficial
5      Cifra oficial
6      Cifra oficial
```

Figura 4.5: Cabecera datos rendimientos

Al igual que en el apartado anterior, la mayoría de esas variables no son de nuestro interés, por lo que nos quedamos con:

- Producto
- Año
- Valor: Producción en hectogramos que se obtiene de cada hectárea (hg/ha)

En este caso contamos con un menor número de datos, ya que el rendimiento se mantiene constante todo el año, así que este conjunto de datos estará formado por  $5 \text{ años} \times 12 \text{ productos} = 60 \text{ datos}$ .

A partir de estas variables obtendremos otras necesarias, como son la fecha, o más importante aún, el valor en €/ha.

## Capítulo 5

### Descripción de los datos

En este capítulo se va a realizar un análisis descriptivo de los datos que se van a manejar para así entender los resultados que se obtendrán en forma de carteras eficientes.

#### 5.1. Tratamiento de los datos

El principal problema con los datos agrarios es carecer de parte de los datos, pues muchas veces no se proporcionan. En estos casos se mantienen los del mes anterior y se dan por supuestos.

Para solventar dicho problema lo primero que ha sido necesario es añadir todos los meses que no aparecían y asociarles al valor 0 inicialmente, además de relacionarlos con el año y cultivo al que corresponde cada uno. Después, se ordenan por producto, año y mes para facilitar la captura del dato del valor obtenido en el mes anterior.

Adicionalmente, se debe obtener el valor de €/ha, y para ello pasamos el rendimiento de hectogramos a kilogramos, y el precio de toneladas a kilogramos, es decir, aplicamos la siguiente ecuación a todos los datos.

$$\frac{\text{€}}{\text{tonelada}} * \frac{1 \text{ tonelada}}{1000 \text{ kg}} * \frac{1 \text{ kg}}{10 \text{ hectogramos}} * \frac{\text{hectogramo}}{\text{ha}} = \frac{\text{€}}{\text{ha}}$$

Lo que realmente interesa son los retornos, para poder apreciar de forma más clara las pérdidas o ganancias de cultivar un producto. Existen varias formas de calcularlos, y en este caso se calculan dividiendo el valor actual entre el del mes anterior, siendo el inicial el valor 1. El rendimiento de cada producto es la media de los rendimientos mensuales, y el riesgo es la varianza.

#### 5.2. Análisis descriptivo

En este apartado se realizará un análisis descriptivo de los datos como paso previo a los problemas de optimización. Como hemos indicado anteriormente se dispone de 720 datos de 12 cultivos entre enero de 2017 a enero de 2021, es decir, un periodo de 5 años.

En primer lugar, se realizan gráficas evolutivas que permiten tener una primera idea acerca de los datos que van a ser empleados en este trabajo. Inicialmente, para los datos de precio al productor (€/ton), que son obtenidos directamente de la FAO, les representamos conjuntamente en la Figura 5.1. Los resúmenes estadísticos de estos datos se recogen en el Anexo 3 en la Figura 42. Se va a estudiar con más detalle la evolución de algún cultivo significativo, de forma individual, eligiéndose el trigo, Figura 5.2. El resto de las representaciones individuales se han recogido en el Anexo 2.1.

Se puede apreciar como los valores de los cereales se mantienen prácticamente constantes durante los 5 años, experimentando un leve aumento durante el año 2021 que coincidió,

con las consecuencias económicas causadas por el COVID-19, pues comenzó la escasez de algún producto por la parada productiva que hubo en el año 2020 durante los meses de confinamiento. También coincidió con el bloqueo del canal de Suez. Se observa cómo las frutas y hortalizas presentan una mayor variación, presentando incrementos en los meses de verano debido a que, al haber una mayor demanda, también aumentan los precios, es decir, la típica relación oferta-demanda. En los meses de invierno bajan los precios, al igual que se reduce su producción.

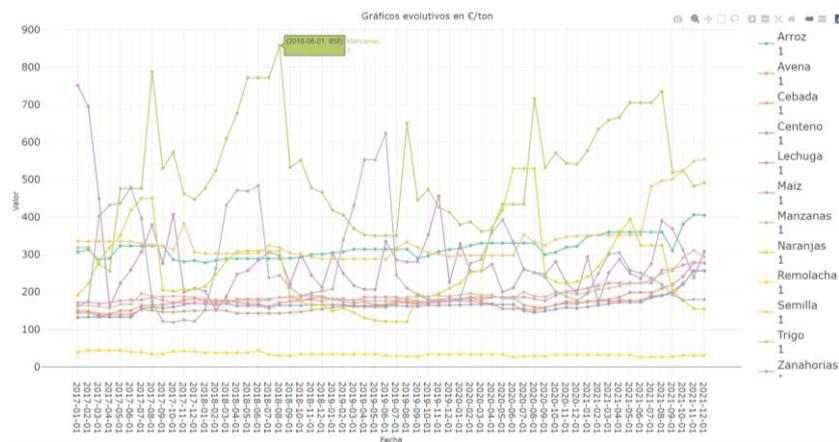


Figura 5.1: Gráfica evolutiva (€/ton)

Para realizar un análisis descriptivo, como ejemplo se ha seleccionado como cultivo el trigo. Su variación es muy similar al del resto de cereales (se pueden comparar yendo al Anexo 2.1). Se observa cómo entre 2017 y 2020 sus valores se mantenían prácticamente iguales, produciéndose bajadas en los meses previos a la cosecha y aumentos justo después. A partir del 2021 sus valores han incrementado de forma significativa y muy rápidamente. Como se había mencionado anteriormente esto principalmente se debe a los efectos de la crisis del COVID-19, que se vio reflejado en el IPC sufriendo así incrementos desde principios de año. El 23 de marzo de 2021 se produjo el bloqueo del canal de Suez, lo que ocasionó escasez de productos y cultivos que provocó que se revalorizaran los cultivos a los que afectó, entre los que se incluyen los cereales.

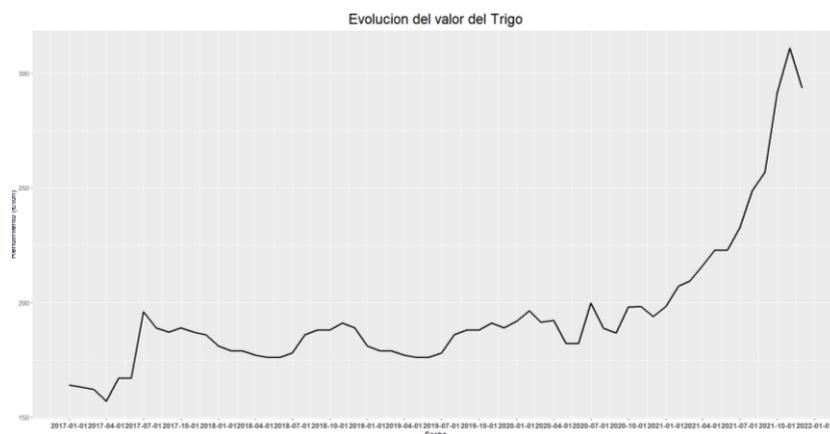


Figura 5.2: Evolución del trigo en (€/ton)

Para otros cultivos, como la zanahoria, lechuga o remolacha se ha dado la situación contraria, pues se ha producido un descenso.

Además, se han realizado gráficas evolutivas para estudiar la evolución en el tiempo de los valores en €/ha, que será lo que realmente nos interesa. La evolución se recoge en la Figura 5.3, y en el Anexo 2.2 se han añadido los gráficos individuales, donde se puede ver con más detalle la evolución de cada uno de los cultivos por separado. Adicionalmente, se ha añadido también un breve resumen estadístico, para ver cuál es el valor máximo, mínimo y valor medio en cada uno de los cultivos, como se recoge en la Figura 5.4.

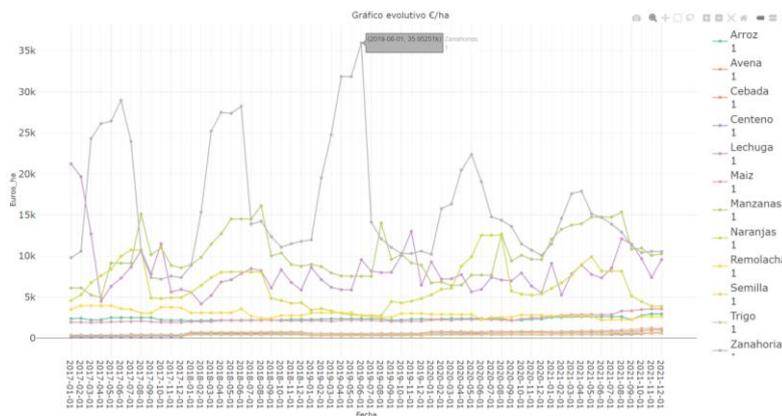


Figura 5.3: Gráfica evolutiva (€/ha)

En el gráfico se observa cómo el valor obtenido para las zanahorias es muy superior al resto, seguido de las manzanas, naranjas y lechuga. Además, se aprecia que los cereales tienen un valor prácticamente constante, y que estos se pueden dividir en dos grupos que están relacionados con sus características. Por un lado, la avena, cebada, centeno, semilla y trigo, con los valores más bajos, y, por otro lado, el maíz, la remolacha y el arroz, cuyo valor incrementa ligeramente.

	Arroz	Avena	Remolacha	Cebada	Centeno	Lechuga	Maiz	Manzanas	Naranjas	Semilla	Trigo	Zanahoria
Min	2114.9406	205.2376	2208.934	314.0775	169.9764	4184.180	1912.556	4919.168	2782.770	321.0336	365.2291	7199.167
Media	2377.0978	375.8448	2950.033	593.9017	395.3476	8152.797	2319.852	10135.073	6348.389	422.0166	702.0603	16044.717
Max	2962.0058	608.6160	3950.835	1029.9409	685.4556	21243.161	3567.546	16138.294	12543.709	675.0483	1250.9994	35952.509
Dif	847.0652	403.3784	1741.901	715.8634	515.4792	17058.982	1654.990	11219.126	9760.939	354.0147	885.7703	28753.342

Figura 5.4: Resúmenes estadísticos (€/ha)

Se observa cómo la diferencia entre un cultivo y otro es muy grande, ya que, por ejemplo, el beneficio obtenido en una hectárea de zanahoria es 10 veces más que el de una hectárea de remolacha, y ésta a su vez obtiene un beneficio 5 veces más que la avena. Si solo nos interesara el beneficio final sin tener en cuenta ningún otro valor, siempre sembraríamos hortalizas (la lechuga también tiene un beneficio muy alto) o frutas, que en comparación con los máximos de los “cereales” también son bastante superiores. Si ahora nos fijamos en las diferencias entre el máximo y el mínimo, podemos observar como para la zanahoria, que era la que tenía un mayor beneficio, este valor es muy elevado, lo que nos indica que tendrá una gran variabilidad y por tanto no será un cultivo seguro. Esto pasa también para las manzanas, naranjas y lechuga, mientras que, por otro lado, los “cereales” presentan una menor variabilidad lo que les hará cultivos más estables y que aparentemente nos darán menores pérdidas. Por ello, todavía no somos capaces de crear la mejor división del terreno, pues nos interesa estudiar este equilibrio más detalladamente.

En este trabajo nos interesa el rendimiento que se obtiene, por lo que se ha considerado interesante representar la gráfica evolutiva de los retornos, y en este caso se va a hacer un breve análisis de la representación conjunta, Figura 5.5. Las representaciones individuales se han recogido en el Anexo 2.3.

Primero cabe mencionar que se toma el valor 1 como valor de referencia. Es decir, si los valores son superiores a 1 indica que el precio del cultivo ha subido respecto del mes anterior, mientras que, si es inferior a 1, significa que el precio ha descendido y si se da el caso del valor 1, denota que no ha habido variación entre un mes y el anterior.

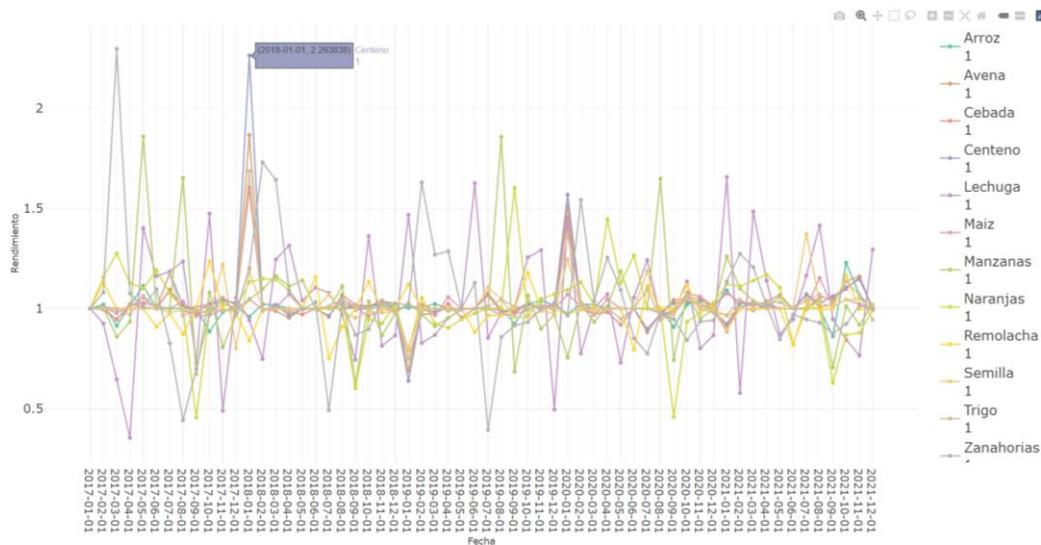


Figura 5.5: Gráfica de evolución de los retornos

Para todos los cultivos se observan grandes variaciones entre unos meses y otros. Puede ser porque tanto la demanda como la producción de los distintos cultivos que se estudian en este trabajo varían notablemente según la época del año, al igual que la oferta, que aumenta en las temporadas propias de dichos cultivos y disminuyen durante el resto del año.

Conjuntamente se puede ver cómo por lo general el rendimiento en €/ha ha disminuido con el paso del tiempo. Esto puede ser debido en gran parte a las condiciones climatológicas, influenciadas en gran medida por el cambio climático que conlleva una disminución de las precipitaciones atmosféricas y un aumento de las temperaturas. Además, cabe destacar la sequía que en muchas provincias ha ocasionado que se tengan que evitar los sistemas artificiales de regadío dando lugar a una agricultura en su mayor parte de secano que depende principalmente de las condiciones climatológicas.

En el breve resumen estadístico que se recoge en la Figura 5.6, se observa como, por ejemplo, la zanahoria presenta una gran diferencia entre los rendimientos, lo que indica que va a depender de la temporada, según sea el equilibrio correspondiente de oferta-demanda. También se recogen otros cultivos más estables, como el arroz o el maíz. En todos los productos en algún momento se producen pérdidas, ya que el rendimiento es negativo para algún mes, lo único que en algunos productos es más bajo que en otros.

	Arroz	Avena	Remolacha	Cebada	Centeno	Lechuga	Maiz	Manzanas	Naranjas	Semilla	Trigo	Zanahoria
Min	0.8613504	0.6888315	0.7500000	0.7482667	0.6383459	0.3541203	0.9621622	0.6212121	0.4555556	0.8010471	0.7471542	0.3926282
Media	1.0047322	1.0247128	0.9988366	1.0237416	1.0349626	1.0278658	1.0106624	1.0303331	1.0167075	1.0126021	1.0239478	1.0384259
Max	1.2287097	1.8671897	1.2352941	1.6051109	2.2638377	1.6563869	1.1522321	1.8593750	1.6033058	1.3730791	1.6869670	2.2971429
Dif	0.3673593	1.1783582	0.4852941	0.8568443	1.6254918	1.3022666	0.1900700	1.2381629	1.1477502	0.5720320	0.9398129	1.9045147

Figura 5.6: Resumen estadístico de los rendimientos

A continuación, se van a estudiar los rendimientos y riesgos para cada uno de los cultivos. Primero se estudian por separado el rendimiento y riesgo, que están representados en los gráficos de barras de las Figuras 5.7 y 5.8 respectivamente. Posteriormente, de forma conjunta en la nube de puntos de la Figura 5.9.



Figura 5.7: Gráfico de barras de los rendimientos

Respecto a los rendimientos, son bastante similares, pero cabe destacar, que la remolacha tiene un rendimiento inferior al valor 1, por lo que aparentemente no va a ser adecuado sembrarla, mientras que, las zanahorias tienen el rendimiento más alto, seguidas por el centeno con casi el mismo valor, por lo que a primera vista serán los más sembrados.



Figura 5.8: Gráfico de barras de los riesgos

Si nos fijamos ahora en los riesgos sin tener en cuenta lo dicho acerca de los rendimientos, se observa como hay una gran variabilidad entre el riesgo de un producto y el de otro. Los cultivos con más riesgos son las hortalizas (lechuga y zanahoria) por lo que si no queremos tener pérdidas en nuestra cosecha no deberán formar parte de nuestras carteras eficientes. Los cereales presentan los riesgos más bajos, por lo que, si tenemos únicamente en cuenta los riesgos, serán los cultivos que debemos de sembrar, aunque debemos de excluir el centeno, la cebada y la avena, ya que sus riesgos aumentan levemente, sin llegar a los de las hortalizas ni a los de las frutas.

Ahora se van a analizar conjuntamente los riesgos y rendimientos para cada uno de los cultivos con la nube de puntos y recordando lo que se ha dicho de cada uno de ellos por separado anteriormente.

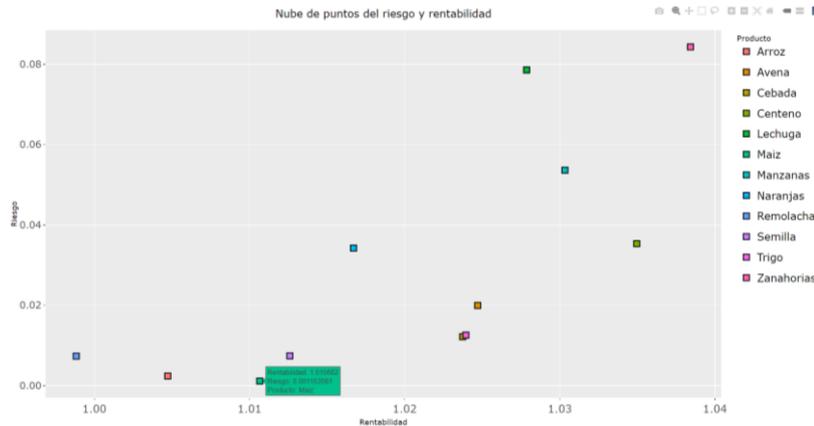


Figura 5.9: Nube de puntos de riesgos y rendimientos

El cultivo con mayor rentabilidad y mayor riesgo es la zanahoria, por lo que, a pesar de obtener un mayor beneficio, también hay un riesgo bastante elevado, así que no parece adecuado, al igual que pasa con la lechuga. Por el contrario, nos encontramos con riesgos muy bajos para el maíz, la semilla y el arroz, pero sus rendimientos también son muy bajos, lo que indica que apenas habrá beneficios, pero esto se contrarresta con el riesgo prácticamente nulo que presentan, pero tampoco parece adecuado.

La remolacha tiene un riesgo muy bajo, pero su rendimiento es inferior al valor 1, lo que indica que va a haber pérdidas. Podríamos considerar que los cultivos que están en el centro tienen un mayor equilibrio entre el riesgo y el rendimiento, y serán los más adecuados para nuestras carteras.

A continuación, se ha representado un diagrama de cajas conjunto para los rendimientos, Figura 5.10, que permite comparar el comportamiento de las distribuciones de los rendimientos y nos permite observar la presencia de valores atípicos o outliers.

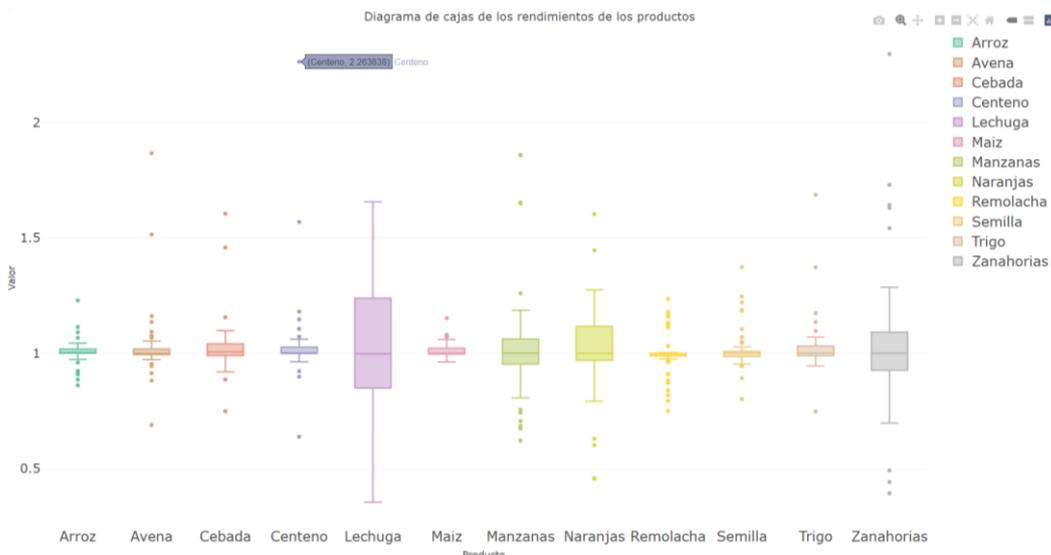


Figura 5.10: Diagrama de cajas de los rendimientos

Los rendimientos se encuentran en torno al valor uno, pero hay diferencias significativas entre el rango de cada uno de los cultivos, como se venía describiendo anteriormente. La lechuga presenta un rango muy amplio de rendimientos, y la remolacha o el arroz un rango mucho más reducido. Además, presentan variabilidades muy diferentes, destacando la zanahoria o el centeno por presentar más variabilidad, frente al maíz o arroz que no presentan apenas variabilidad.

Finalmente, se ha presentado un mapa de correlaciones, Figura 5.11, en el que se pretende observar la relación que tiene los distintos cultivos. Cuanto menor sea dicha correlación más nos favorece.

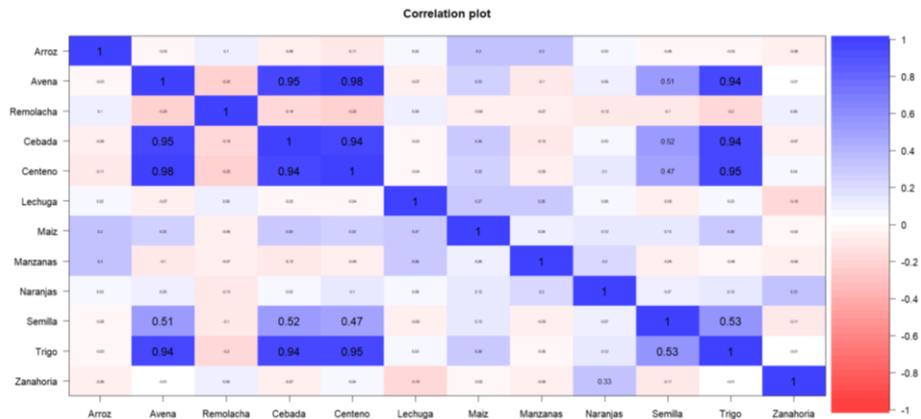


Figura 5.11: Matriz de correlaciones

Se presentan correlaciones tanto positivas como negativas, lo que indica que no todos los cultivos se mueven en la misma dirección. La correlación más baja se encuentra entre trigo y zanahoria, mientras que, la más alta se encuentra entre avena y centeno. Hay una asociación mayor entre los cereales.

Desde el punto de vista de modelos estadísticos de regresión hay valores muy altos, pero en el modelo de Markowitz no supone ningún problema.

A pesar de todo este análisis descriptivo previo no estamos capacitados para diseñar las carteras de inversión que más nos favorezcan, por lo que tendremos que recurrir a los problemas de optimización que se han descrito en el Capítulo 3 para aplicar esta teoría a nuestro problema.

# Capítulo 6

## Optimización de carteras

En este capítulo se presentan y se interpretan los resultados del análisis mediante el modelo de Markowitz. Se van a obtener resultados para distintos modelos, es decir, se van a imponer restricciones para que se acerque lo máximo posible a la realidad. Para cada uno de los modelos se va a obtener la frontera eficiente gráficamente y, además, se van a presentar las carteras notables: la equiponderada, la de máxima rentabilidad, la de mínimo riesgo y la de máximo ratio de Sharpe.

En los casos en los que sea necesario, se va a efectuar el correspondiente análisis de sensibilidad para un parámetro determinado cuando sea oportuno.

Los datos con los que se han realizado estos modelos se recogen en el Anexo 1.

### 6.1. Modelo básico

Se ha efectuado el desarrollo del modelo básico, descrito en el Apartado 3.4.

#### 6.1.1. Frontera eficiente

Inicialmente se va a estudiar la frontera eficiente del modelo Markowitz. En la Figura 6.1 está representada junto con las carteras notables que se van a estudiar en el siguiente apartado. En el eje OX se representa el riesgo, y en el eje OY el rendimiento.

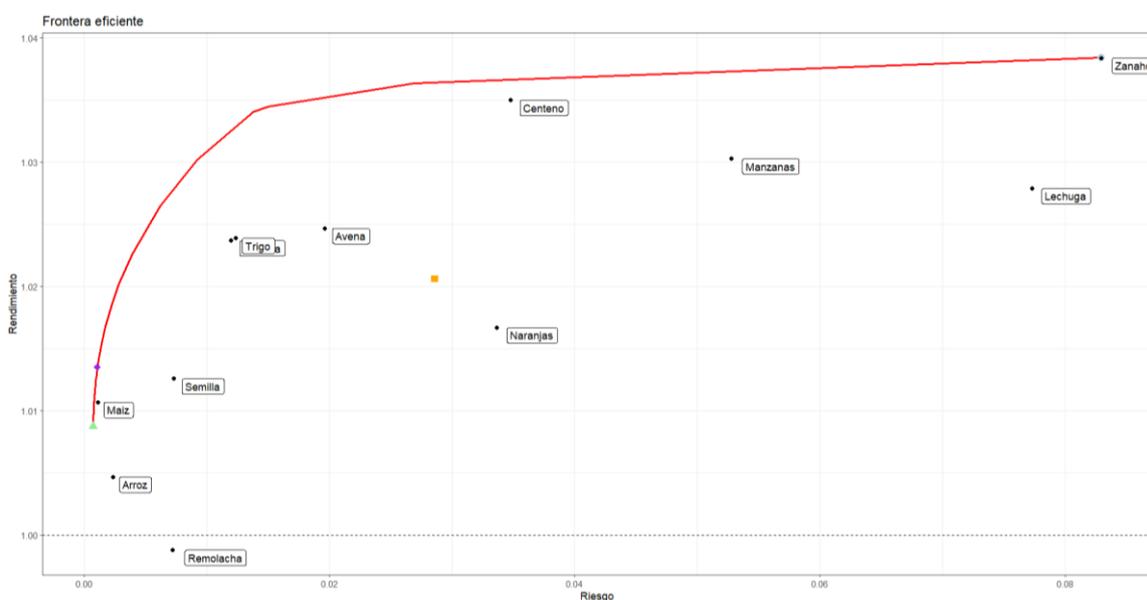


Figura 6.1: Gráfico de la frontera eficiente

La frontera eficiente está formada por las carteras que proporcionan los mejores resultados, es decir, todas las carteras en dicha frontera son carteras eficientes, por lo que la elección de una u otra dependerá de la importancia que el agricultor le da al riesgo frente al rendimiento. Cuánto más se acerque un cultivo a la frontera, más próximo estará de ser

un cultivo eficiente, y esto indicará que tendrá una mayor presencia porcentual en la composición de carteras. Se aprecia como la rentabilidad disminuye a medida que aumenta la ponderación del riesgo, las últimas carteras tienen rentabilidad mucho menor, pero también son las más seguras. Nuestra frontera eficiente se aplanan rápidamente. En este caso podemos observar cómo zanahoria es el único cultivo que se encuentra en la frontera eficiente. Nos indica que, cultivando zanahorias, sin necesidad de plantar ningún otro producto, se obtiene una cartera eficiente, que será en este caso, la de máxima rentabilidad. Maíz tendrá una elevada presencia en la composición de carteras, pues se encuentra prácticamente pegado a la frontera eficiente. Centeno también se encuentra próximo, pero no tanto, lo que nos indica que estará presente en un alto porcentaje, pero inferior que el del maíz.

Los puntos negros del gráfico (etiquetados con el cultivo que representan cada uno) indican dónde se situarían las carteras si se siembra el 100% de la superficie disponible de un único cultivo, son las carteras monocultivo. Invertir todo en un único cultivo es menos eficiente que las carteras localizadas en la frontera eficiente. Se observa como por sí solo ninguno será eficiente, salvo la zanahoria, que forma la cartera de máxima rentabilidad, o incluso podríamos considerar al maíz, estos dos son cultivos con una rentabilidad más alta para un riesgo más bajo. Se aprecia como la remolacha se encuentra por debajo del valor uno, lo que nos indica que, si se siembra el 100% con remolacha, nos llevaría a una pérdida del 0.1% (0.0012). Tampoco sería conveniente invertir todo en un cultivo como las naranjas o lechuga, ya que se encuentran alejados de la frontera eficiente.

Se han marcado cuatro puntos que cada uno de ellos representa a una cartera notable. El punto azul, a la de máxima rentabilidad; el triángulo verde, a la del mínimo riesgo; el rombo morado a la del máximo ratio de Sharpe; y la del cuadrado naranja a la cartera equiponderada, que por lo general no suele ser una cartera eficiente. Como se ve en este caso, se encuentra muy alejada de la frontera, por lo que no es recomendable plantar todos los cultivos con la misma proporción.

La composición de las carteras que constituyen la frontera eficiente se muestra en la Figura 6.2.

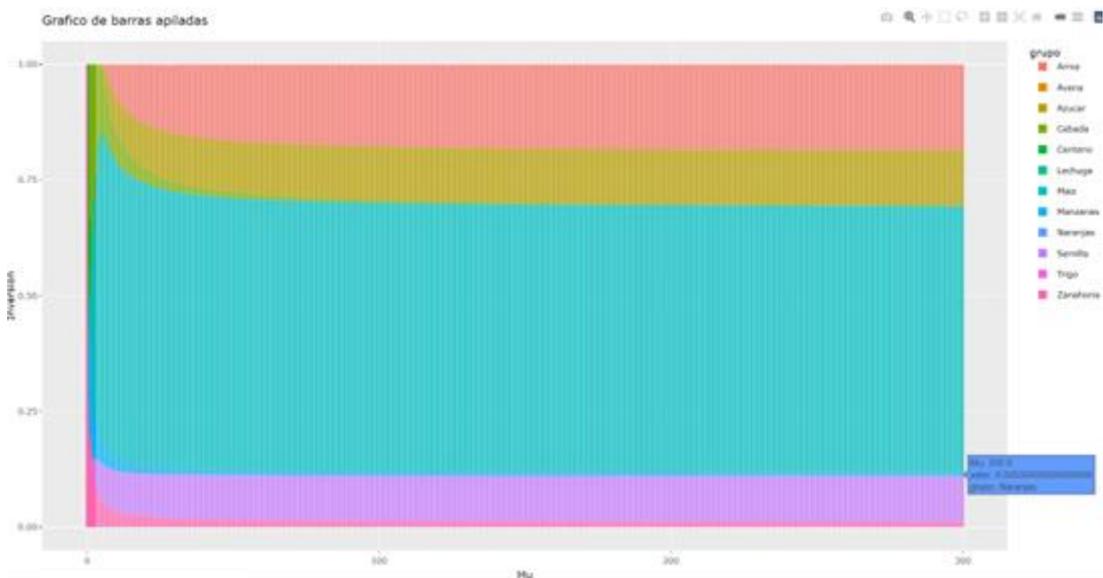


Figura 6.2: Gráfico de la composición de las carteras eficientes

En el gráfico se puede ver como desde las primeras carteras se recomienda sembrar una gran parte de maíz, verificando lo que se suponía anteriormente ya que está muy cerca de la frontera eficiente. Exceptuando en las primeras carteras, en el resto, la división de la superficie en cultivos es bastante homogénea, ya que se recomienda sembrar maíz, arroz, remolacha y semilla, y en menor medida, zanahoria. Según aumenta la cartera, podemos ver como aparece la necesidad de plantar naranjas, ya que tiene un riesgo bajo de ocasionar pérdidas. En las primeras carteras se aprecia que también están compuestas por centeno, lechuga y manzanas, ya que estos productos tienen un alto rendimiento que va relacionado con alto riesgo, y la cartera correspondiente a  $\mu=0$  es la de máxima rentabilidad. Además, se puede ver que hay dos cultivos que no intervienen en ninguna de las carteras. Dichos cultivos son la avena y el trigo. Si nos fijamos en el gráfico de la frontera eficiente se observa cómo estos dos cultivos se encuentran cercanos, por lo que quiere decir que dichos riesgos y rendimientos no ayudan ni a tener el menor riesgo posible, ni el mayor rendimiento.

La Figura 6.3 muestra la tabla de la frontera eficiente que se obtiene para los valores de  $\mu$  más significativos con el correspondiente riesgo, rendimiento y ratio de Sharpe. En el Anexo 4 se recoge la tabla de la frontera eficiente completa.

	Arroz	Avena	Remolacha	Cebada	Centeno	Lechuga	Maíz	Manzanas	Naranjas	Semilla	Trigo	Zanahoria	Rendimiento	Riesgo	Sharpe	Mu
1	0.0000	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	1.0000	1.038426	0.0829216	0.139	0.0
2	0.0000	0	0.0000	0.0000	0.5454	0.0000	0.0000	0.0197	0.0000	0.0000	0	0.4349	1.036378	0.0269126	0.231	0.1
3	0.0000	0	0.0000	0.0000	0.4618	0.0753	0.0000	0.1894	0.0000	0.0000	0	0.2735	1.034499	0.0150212	0.294	0.3
4	0.0000	0	0.0000	0.0000	0.4371	0.1109	0.0000	0.2110	0.0000	0.0000	0	0.2410	1.034033	0.0137790	0.303	0.5
5	0.0000	0	0.0000	0.3349	0.1649	0.1094	0.0000	0.1934	0.0000	0.0000	0	0.1974	1.030217	0.0092507	0.330	1.0
6	0.0000	0	0.0000	0.5110	0.0000	0.0863	0.0810	0.1599	0.0000	0.0000	0	0.1618	1.026467	0.0061663	0.356	1.5
7	0.0000	0	0.0000	0.3766	0.0000	0.0610	0.2898	0.1241	0.0000	0.0233	0	0.1252	1.022600	0.0039118	0.385	2.0
8	0.0000	0	0.0000	0.2936	0.0000	0.0461	0.4112	0.1025	0.0000	0.0432	0	0.1034	1.020267	0.0028616	0.407	2.5
9	0.0000	0	0.0000	0.2382	0.0000	0.0361	0.4921	0.0882	0.0000	0.0565	0	0.0889	1.018711	0.0022912	0.422	3.0
10	0.0000	0	0.0000	0.1690	0.0000	0.0237	0.5933	0.0702	0.0000	0.0730	0	0.0707	1.016766	0.0017240	0.440	4.0
11	0.0000	0	0.0170	0.1308	0.0000	0.0157	0.6376	0.0598	0.0000	0.0801	0	0.0589	1.015412	0.0014217	0.449	5.0
12	0.0042	0	0.0385	0.1076	0.0000	0.0103	0.6529	0.0528	0.0000	0.0829	0	0.0506	1.014373	0.0012313	0.452	6.0
13	0.0287	0	0.0507	0.0920	0.0000	0.0073	0.6458	0.0462	0.0000	0.0844	0	0.0449	1.013543	0.0011029	0.453	7.0
14	0.0470	0	0.0598	0.0803	0.0000	0.0051	0.6404	0.0413	0.0000	0.0856	0	0.0407	1.012921	0.0010196	0.452	8.0
15	0.1097	0	0.0887	0.0422	0.0000	0.0000	0.6178	0.0243	0.0000	0.0902	0	0.0271	1.010922	0.0008273	0.432	15.0
16	0.1294	0	0.0963	0.0315	0.0000	0.0000	0.6081	0.0190	0.0000	0.0921	0	0.0235	1.010373	0.0007953	0.421	20.0
17	0.1493	0	0.1043	0.0208	0.0000	0.0000	0.5976	0.0135	0.0010	0.0938	0	0.0197	1.009817	0.0007722	0.407	30.0
18	0.1592	0	0.1084	0.0155	0.0000	0.0000	0.5919	0.0106	0.0022	0.0944	0	0.0176	1.009533	0.0007639	0.399	40.0
19	0.1732	0	0.1142	0.0081	0.0000	0.0000	0.5840	0.0066	0.0039	0.0953	0	0.0147	1.009137	0.0007563	0.387	75.0
20	0.1772	0	0.1159	0.0060	0.0000	0.0000	0.5817	0.0055	0.0044	0.0956	0	0.0139	1.009023	0.0007550	0.383	100.0
21	0.1812	0	0.1175	0.0038	0.0000	0.0000	0.5795	0.0043	0.0048	0.0958	0	0.0130	1.008910	0.0007540	0.379	150.0
22	0.1832	0	0.1183	0.0028	0.0000	0.0000	0.5783	0.0037	0.0051	0.0960	0	0.0126	1.008853	0.0007537	0.377	200.0
23	0.1868	0	0.1198	0.0000	0.0000	0.0000	0.5763	0.0027	0.0055	0.0962	0	0.0119	1.008751	0.0007533	0.373	500.0
24	0.1870	0	0.1199	0.0000	0.0000	0.0000	0.5762	0.0026	0.0055	0.0962	0	0.0118	1.008745	0.0007533	0.373	550.0

Figura 6.3: Tabla frontera eficiente modelo básico

De la tabla se pueden obtener otras conclusiones como que no es eficiente invertir más del 65.29% de maíz, ni más del 51.1% de cebada.

### 6.1.2. Carteras notables

En este apartado se van a analizar las 4 carteras notables y estudiar su composición, rendimiento y riesgo.

#### Cartera de máxima rentabilidad

La cartera de máxima rentabilidad es aquella en la que el riesgo no juega ningún papel, y únicamente nos interesa el rendimiento, por lo que queremos obtener qué cultivos debemos de sembrar para maximizar el rendimiento. En la Figura 6.4 se puede ver cómo en este caso la cartera está formada únicamente por un cultivo, la zanahoria. Como se ha visto en la frontera eficiente, pertenece a la frontera eficiente, y, además, se ve claramente

cómo es el cultivo con mayor riesgo y rendimiento. El riesgo de esta cartera sí que aumenta considerablemente, mientras que el rendimiento no aumenta tanto.



Figura 6.4: Composición cartera de máxima rentabilidad

### Cartera de mínimo riesgo

La cartera del mínimo riesgo es la más segura, ya que no nos interesa la opción que nos de mayor rendimiento, simplemente nos interesa el riesgo, y este tiene que ser el menor posible. Esta cartera corresponde con  $\mu=\infty$ . En la Figura 6.5 podemos ver que hay que cultivar el 57.7% con maíz, el 18.7% de arroz, el 12% de remolacha, el 9.63% de semilla, el 1.18% de zanahoria, el 0.55% de naranjas y el 0.26% de manzanas. El riesgo de esta cartera es aproximadamente 0 (0.00075), pero el rendimiento es aproximadamente 1 (1.0087), lo que nos indica que apenas aumentamos nuestras ganancias.

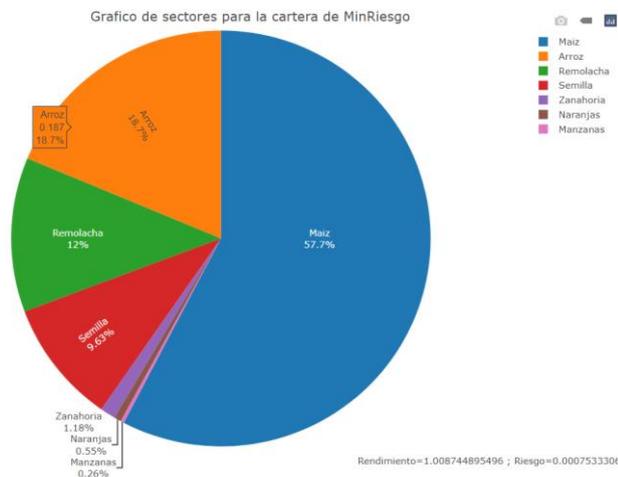


Figura 6.5: Composición cartera de mínimo riesgo

### Cartera de máximo ratio de Sharpe

Según Markowitz, la cartera eficiente con mayor ratio de Sharpe es la mejor posible decisión. En la Figura 6.6, el terreno está bastante repartido en los diferentes cultivos, ya que se forma con 8 de los 12 que hay.

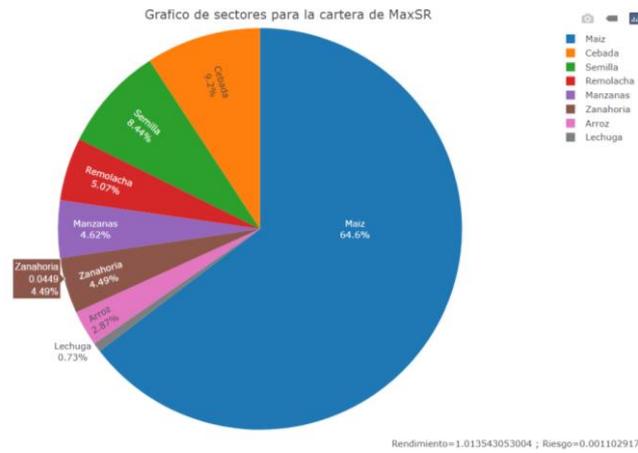


Figura 6.6: Composición cartera de máximo ratio de Sharpe

La mayor parte del terreno se dedica al maíz (64.6%), seguido de la cebada (9.2%) y la semilla (8.44%). En menor proporción se encuentra la remolacha (5.07%), las manzanas (4.62%), las zanahorias (4.49%), el arroz (2.87%) y la lechuga (0.73%). Presenta un rendimiento muy próximo a la de máxima rentabilidad, reduciendo considerablemente el riesgo. Se han cultivado productos con gran rentabilidad y poco riesgo y viceversa, para así poder compensar y obtener una cartera equilibrada, al no asumir todo el riesgo a un único cultivo y compensar el menor riesgo y rendimiento.

### Cartera equiponderada

En la cartera equiponderada, como observamos en la Figura 6.7, todos los cultivos presentan el mismo porcentaje, sin tener en cuenta ni el rendimiento ni el riesgo de cada cultivo. Esta cartera asegura que no se produzca pérdida de dinero, ya que se reparte entre todos los cultivos, pero no suele ser una cartera eficiente pues no se encuentra en la frontera.

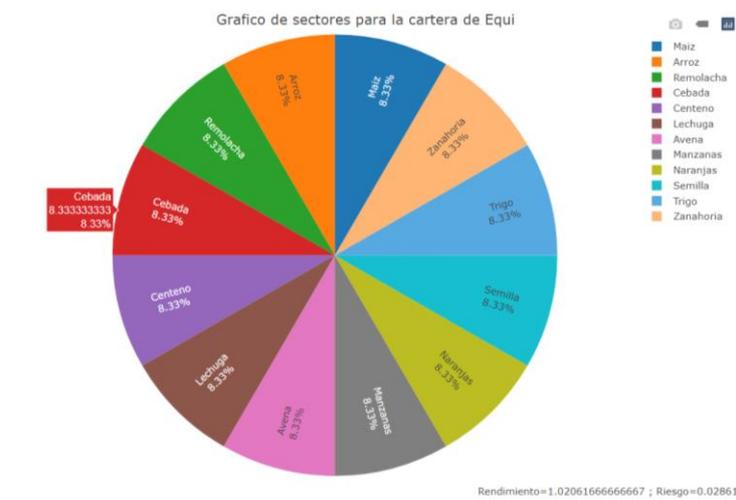


Figura 6.7: Composición cartera equiponderada

A continuación, se realiza una comparación de las carteras notables. En la Figura 6.8 se representan cada una de las carteras notables para poder compararlas.

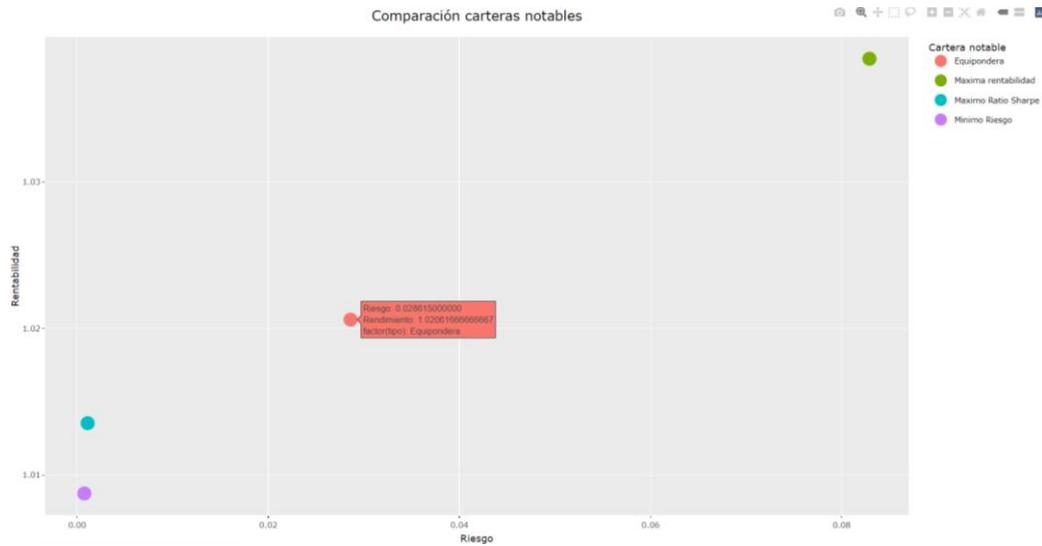


Figura 6.8: Comparación de carteras

En el gráfico se observa como los rendimientos y riesgos pueden llegar a ser muy distintos. Primero cabe destacar que ninguna de las carteras es mejor o peor que otra, ya que será el agricultor quien tenga que considerar que le conviene más, si un menor riesgo o un mayor rendimiento. Respecto a la cartera equiponderada, ya se había visto que no pertenecía a la frontera eficiente, y no va ni a minimizar el riesgo ni a maximizar el rendimiento. En este caso, se puede ver cómo queda localizada en medio del gráfico. La cartera de máximo ratio de Sharpe pretende compensar la relación riesgo-rendimiento y se observa que para este caso el riesgo es prácticamente el mismo que para la cartera de mínimo riesgo, pero con un rendimiento algo mayor que esta, pero muy inferior al rendimiento de la cartera de máxima rentabilidad.

## 6.2. Modelo con pesos

Los precios varían con el tiempo, y por tanto podemos añadir pesos a los meses más recientes para darles más valor. Los hechos pasados están menos relacionados con el futuro que los hechos presentes y es por ello, que interesan más los valores actuales. Se ha aplicado el modelo de Markowitz con corrección de estimadores, del cual se ha hablado en el Apartado 6.3.1.

### 6.2.1. Frontera eficiente

Se va a realizar un análisis de sensibilidad para  $p$ , que hace referencia al peso que se da a los meses, ya que a medida que se aleja el valor de  $p$  de 1, aumenta más la importancia que se da a los datos de los meses más recientes. En este caso se ha probado con valores de  $p=0.8$ ,  $p=0.5$  y  $p=0.3$ , que se van a comparar entre ellos y además se van a comparar con  $p=1$ , que es el que corresponde al modelo básico, en el que todos los meses tienen la misma importancia.

La Figura 6.9 se recoge una representación de las cuatro fronteras eficientes, para tener una idea inicial de cómo evoluciona su riesgo y rendimiento según los pesos que se den.

No recogemos las carteras de los productos individuales, simplemente recogemos las eficientes.

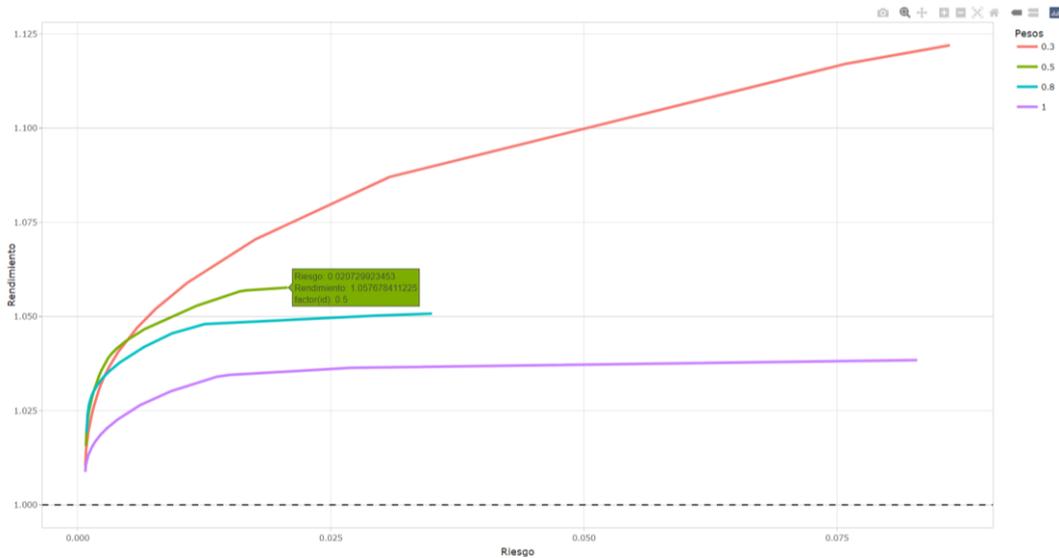


Figura 6.9: Gráfico de fronteras eficientes dados distintos  $p$

En la gráfica se puede observar como para los valores pequeños de  $p$ , es decir, para  $p=0.3$ , el rendimiento aumenta significativamente, y de forma exponencial, en vez de aplanarse como ocurre cuando todos los meses tienen la misma importancia. Para  $p=0.5$  y  $p=0.8$ , muy similares entre ellas dos, el rendimiento no aumenta tanto como para  $p=0.3$ , y las curvas son más similares a la de  $p=1$ , lo único que desplazada con un mayor rendimiento. El rendimiento máximo, de  $p=0.8$  es 1.05, y el de  $p=0.5$ , 1.057, muy similares al 1.038 que se obtenía cuando todos los meses tenían el mismo peso, mientras que, para  $p=0.3$ , el rendimiento máximo aumenta a 1.12, que ya es un incremento significativo. Respecto al riesgo, para  $p=0.3$  es muy similar al de  $p=1$ , en ambos casos en torno a 0.083, mientras que, para  $p=0.5$  y  $p=0.8$ , el riesgo se ve muy reducido, pues para  $p=0.8$  es 0.035, y para  $p=0.5$  es 0.02, muy inferior al que obtenemos en los otros casos. Por ello, podemos concluir que el peso a los meses proporciona una gran diferencia, y si realmente nos fijamos en el menor  $p$ , que será el más cercano a la actualidad, el rendimiento es mayor, aunque el riesgo también lo es.

### 6.2.2. Carteras notables

A continuación, se van a comparar las carteras notables que se obtienen para los distintos  $p$ , para observar cuál es el cambio que se produce. La cartera equiponderada no se va a estudiar, ya que simplemente depende del número de productos que hay, por lo que la composición va a ser la misma para cualquier  $p$ .

#### Cartera de máxima rentabilidad

Recordamos que la cartera de máxima rentabilidad para el modelo básico ( $p=1$ ), Figura 6.4, nos indicaba que teníamos que cultivar únicamente zanahoria. Para realizar el análisis de sensibilidad en esta cartera se ha decidido presentar un gráfico de barras múltiples que nos permite observar que cultivos hay que sembrar. Dicho gráfico corresponde a la Figura 6.10, en la que se representa en el eje OX los distintos valores del parámetro  $p$ , y en el eje OY los porcentajes que se debe cultivar de cada cultivo en la superficie disponible.

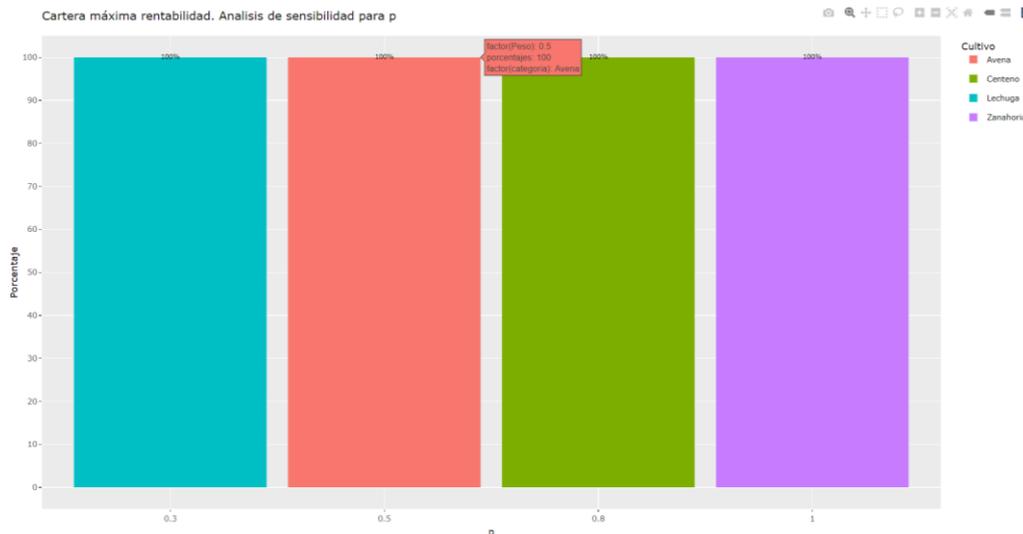


Figura 6.10: Composición carteras de máxima rentabilidad

Se observa que indistintamente cual sea el peso que se dé a los meses más recientes, la cartera de máxima rentabilidad estará formada por un único cultivo. Para la cartera de  $p=0.8$ , se recomienda sembrar únicamente centeno para obtener el mayor rendimiento. Por otro lado, para  $p=0.5$ , podemos ver que lo que hay que sembrar en este caso es avena, y para  $p=0.3$ , lechuga. De esta forma podemos ver cómo dependiendo el peso que se dé, la cartera cambia en su totalidad, sin coincidir ninguna con la del modelo básico.

### Cartera de mínimo riesgo

Se va a ver cómo cambia la composición de dicha cartera, sin dejar en el olvido la del modelo básico (Figura 6.5), que también se recoge en estos gráficos para facilitar su comparación. La representación de la composición de las carteras se ha realizado mediante un gráfico de barras múltiples, Figura 6.11, como el de cartera de máxima rentabilidad. También interesa conocer el riesgo y rendimiento de la cartera para cada uno de los valores de los parámetros de  $p$ , Figura 6.12.

A primera vista se puede ver como el maíz es el cultivo más representativo en todas las carteras, seguido del arroz. En concreto se puede ver como para  $p=0.8$  y  $p=0.5$ , la cartera está formada por los mismos 8 cultivos, pero con una pequeña variación en los porcentajes de cada uno de ellos. El maíz en  $p=0.8$  forma un 56.9%, y en  $p=0.5$ , 61.5%. El arroz en  $p=0.8$  representa el 15.1% del terreno, mientras que en  $p=0.5$ , el 12.7%. Para la remolacha, sus representaciones son 13.5% y 12.5% respectivamente, y para la semilla 7.86% y 8.6%. La naranja, zanahoria, manzana y trigo también están presentes en la composición de estas carteras, pero en menor proporción, 3.27%, 1.45%, 1.34% y 0.55% respectivamente para  $p=0.8$  y 2%, 1.27%, 1.08% y 0.41% para  $p=0.5$ . Por tanto, esto nos confirma su similitud, pues la composición varía en poco, y en la frontera eficiente (Figura 6.9) se veía como estas dos fronteras eran muy similares. Respecto al riesgo y rendimiento, para  $p=0.5$  los valores son 0.00081 y 1.016 respectivamente, y para  $p=0.3$  0.00089 y 1.019.

En el caso de  $p=0.3$  la composición cambia, pues ya no se deben sembrar 8 cultivos, si no que ahora son 7, como en el caso del modelo básico, que en la gráfica de la frontera eficiente ya se apreciaba como su riesgo era bastante próximo. En el caso de  $p=0.3$ , la

cartera de mínimo riesgo estará formada por el 58.2% de maíz, 14.1% de arroz, 12% de remolacha, 9.57% de semilla, y zanahoria, naranja y manzanas en menor proporción, en concreto 1.19%, 0.66% y 0.33% respectivamente. Como se puede observar, sus porcentajes son prácticamente los mismos que en el modelo básico, y esto se debe a que su riesgo, es casi el mismo, 0.00075, como se veía en la Figura 6.5. El rendimiento es un poco superior en este caso 1.01, mientras que el otro es 1.008.

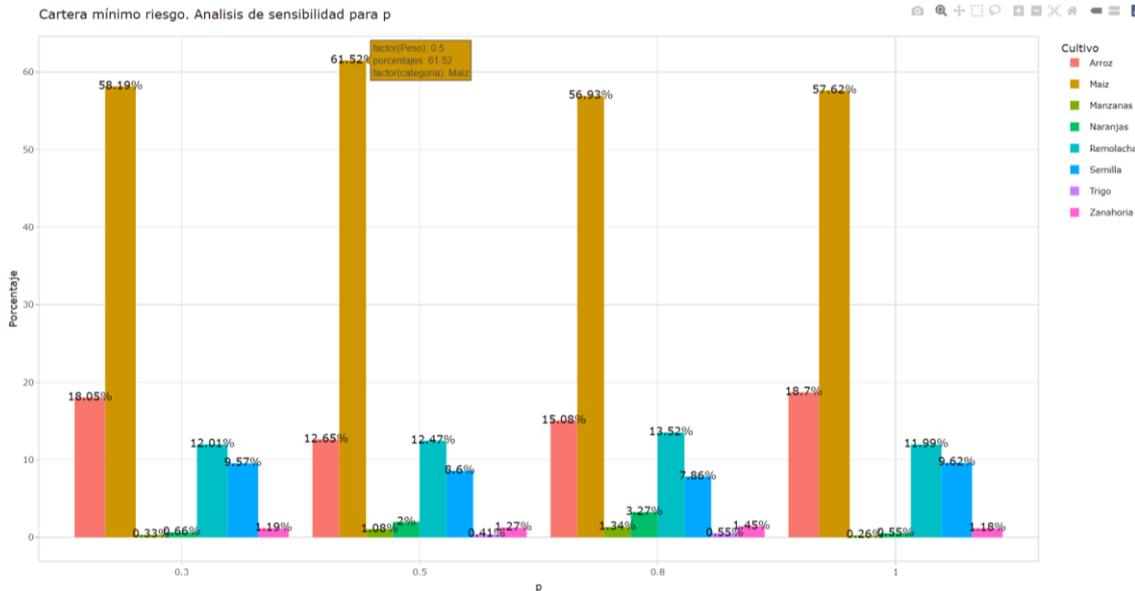


Figura 6.11: Composición carteras mínimo riesgo para los valores de p

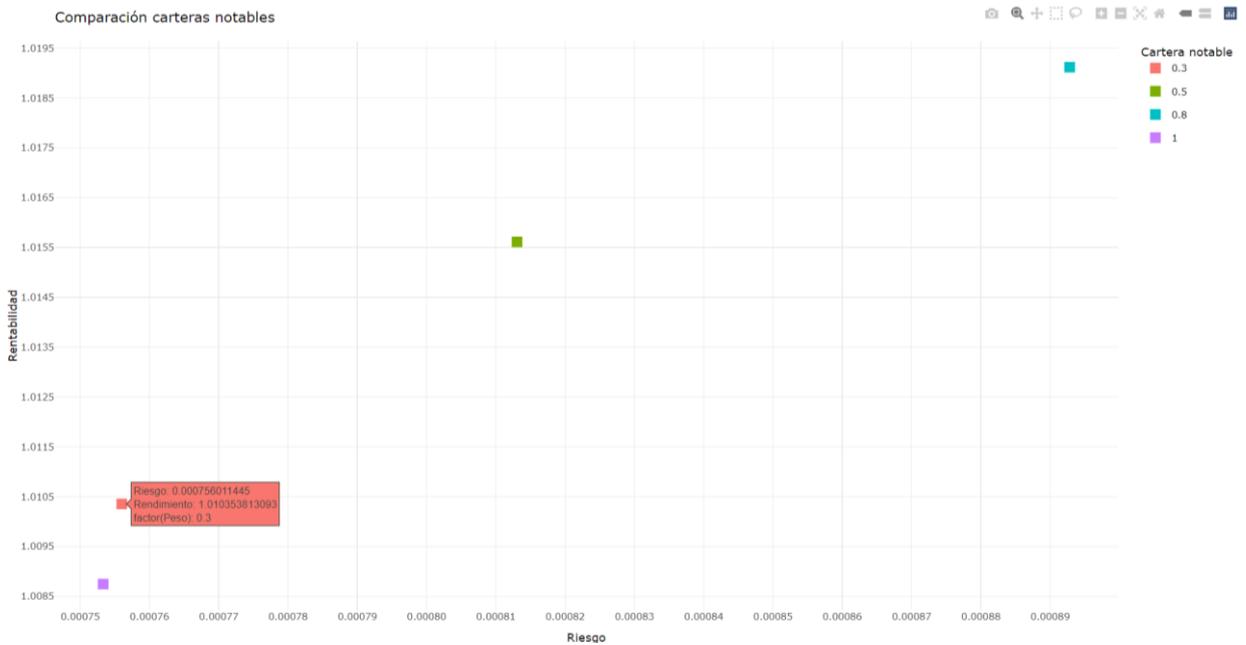


Figura 6.12: Riesgo y rendimiento de las carteras de mínimo riesgo

### Cartera de máximo ratio de Sharpe

Se va a ver cómo cambia la composición de dicha cartera, sin dejar en el olvido la del modelo básico (Figura 6.5). En este caso la cartera de máximo ratio de Sharpe presenta gran variedad según cual sea el peso que demos. Para  $p=0.8$  (Figura 6.13) la mayor parte de la superficie debe de ser de un 58.9% de maíz y un 17.5% de arroz, para  $p=0.5$  (Figura 6.14), debe ser del 42.5% de arroz y un 22.6% de maíz, para  $p=0.3$  (Figura 6.15) el arroz representa un 54.1% y un 16.2% de cebada y para  $p=1$  era 64.6% de maíz y 9.2% de cebada. Como vemos cada una de las carteras tiene una composición diferente, por lo que el peso de los meses es muy relevante. Para las dos primeras el rendimiento y riesgo es muy similar, y mientras que la de  $p=0.3$  es la que más se diferencia, dando algo más de rendimiento y de riesgo. Detalladamente podemos ver que la cartera de  $p=0.8$  se compone del 58.9% de maíz, del 17.5% de arroz, del 11.5% de semilla, del 6.23% de remolacha, del 5.22% de cebada y del 0.54% de zanahoria. Para  $p=0.5$ , 42.5% de arroz, 22.6% de maíz, 14.5% de cebada, 8.4% de semilla, 8.18% de remolacha, 2.36% de lechuga y 1.48% de zanahoria. Para  $p=0.3$  debe de ser 54.1% de arroz, 16.2% de cebada, 13.4% de semilla, 9.84% de lechuga, 3.56% de zanahoria y 2.88% de remolacha.

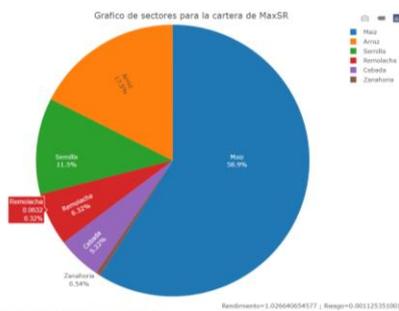


Figura 6.13: Cartera de ratio de Sharpe  $p=0.8$

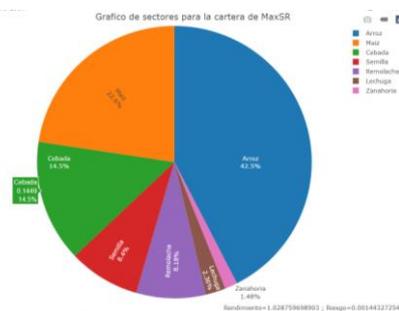


Figura 6.14: Cartera de ratio de Sharpe  $p=0.5$

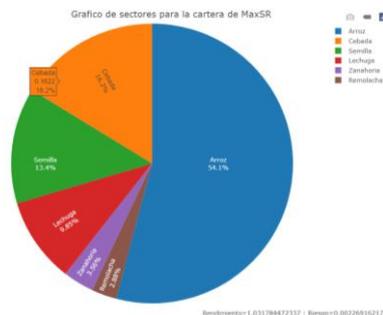


Figura 6.15: Cartera de ratio de Sharpe  $p=0.3$

### 6.3. Modelo con restricción de cardinalidad

Un problema habitual es el número de cultivos en el que es adecuado invertir en cada una de las carteras, por tanto, para ello se ha añadido una restricción de cardinalidad que nos permite especificar el número máximo de productos que forman parte de nuestras carteras eficientes. El modelo ha sido explicado en el Apartado 3.5.3.

Se va a proceder al análisis de sensibilidad del parámetro  $N$  mediante la comparación de la representación de la frontera eficiente para distintos valores de  $N$ , entre el 2 y 7,

teniendo en cuenta que tenemos 12 cultivos, y en el modelo básico, la cartera con más productos tenía 8 cultivos.

En la Figura 6.16 se han representado las fronteras eficientes para los distintos valores del parámetro N.

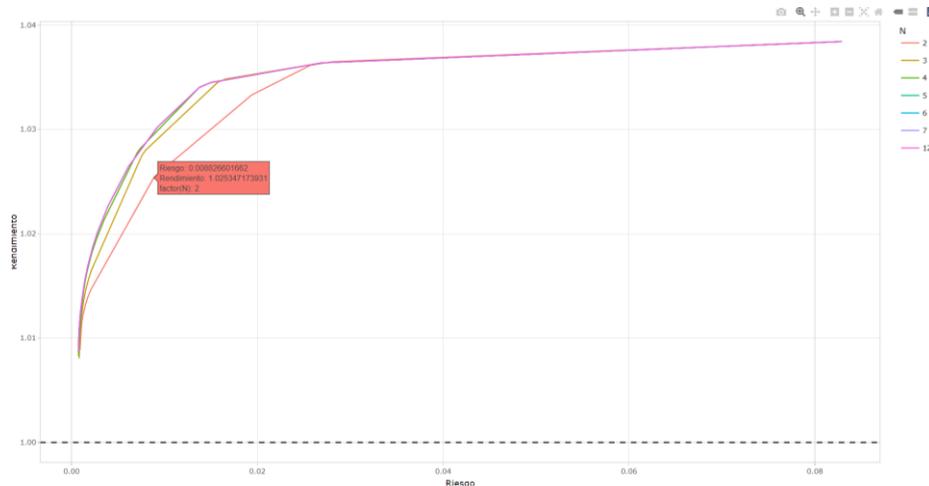


Figura 6.16: Gráfico de fronteras eficientes para distintos N

Se observa como no hay una diferencia significativa, sobre todo a partir de  $N=5$ , que es cuando la frontera se solapa con la del modelo básico que hace referencia a la restricción de  $N=12$ . Para  $N=4$ , es prácticamente igual a estas fronteras, exceptuando que el rendimiento mínimo es algo menor, pues la curva empieza algo más abajo que en los otros casos, y en algún otro punto se observa como hay alguna diferencia. El caso de  $N=2$  es el que más difiere, sobre todo para las carteras de menor riesgo, pues estas proporcionan un rendimiento inferior al del modelo básico. Cuando la restricción es de que solo se pueda invertir en 3 cultivos como máximo, la frontera eficiente se encuentra entre las de  $N=2$  y  $N=12$ . Por ello, lo menos recomendable es fijar que la restricción de cardinalidad sea invertir en 2 o 3 productos, ya que para el resto no hay apenas diferencia.

Para estudiar más detalladamente esto, nos vamos a fijar únicamente en las carteras de máximo ratio de Sharpe, pues de las carteras notables, es la más adecuada. Las representamos en un diagrama de barras múltiples como los anteriores. Ver Figura 6.17.

Se puede ver cómo en todos los casos el producto que más repercusión tiene es el maíz, entorno a un 70% cuando se permite mayor variedad de productos, y alrededor del 90% cuando hay menos variedad, que es por ello por lo que el rendimiento es inferior en estos casos, pues el maíz no tiene un rendimiento muy alto. El segundo cultivo con más representación es la cebada, aproximadamente con un 11% y para el porcentaje restante se asignan otros cultivos para tratar de equilibrar el riesgo-rendimiento de las carteras. Se puede observar como al aumentar el número de cultivos permitidos, los que había previamente se mantienen, y lo único que ocurre es que disminuye mínimamente su porcentaje en la composición de la cartera para permitir que entre otro cultivo nuevo. Es lo mismo que ocurre en el modelo básico, en el que a pesar de tener 12 cultivos disponibles, la cartera de máximo ratio de Sharpe se forma solo con 8 de ellos, y son los mismos cultivos que los de la restricción de  $N=7$  además de que en este caso, se añade la lechuga como octavo cultivo.

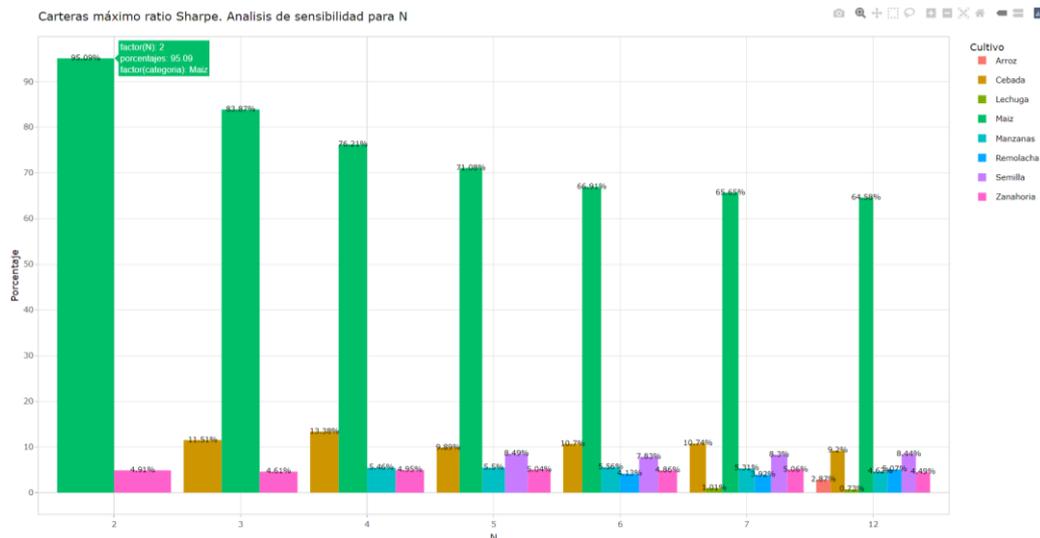


Figura 6.17: Composición carteras máximo ratio de Sharpe según parámetro N

Además de los cultivos que constituyen la cartera, es fundamental fijarse en el riesgo y rendimiento, como se recoge en la Figura 6.18

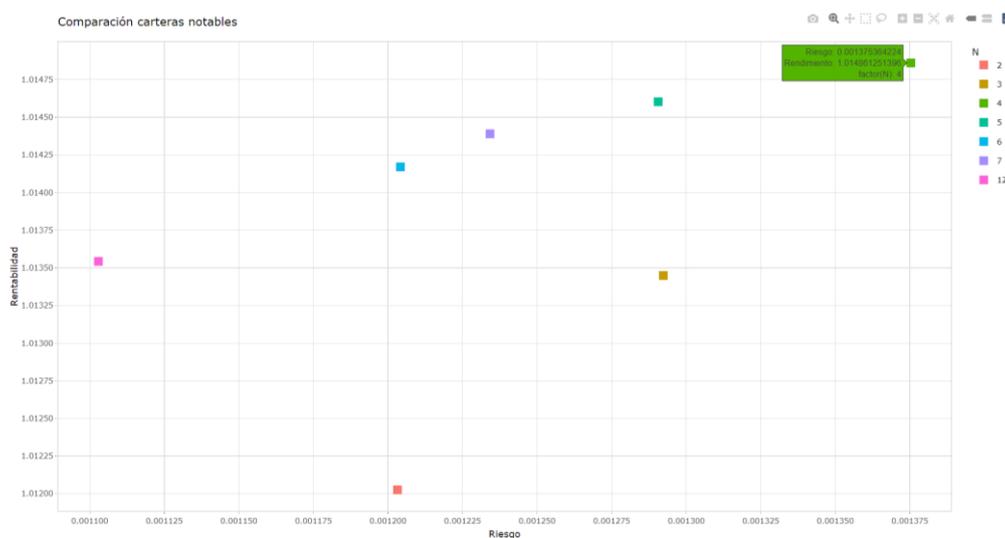


Figura 6.18: Riesgos y rendimientos

Respecto al rendimiento, se observa que el peor de los casos es cuando solo se pueden sembrar dos cultivos, y el mejor para 4 cultivos, quedando con un valor medio el caso de que no haya restricción en el número de cultivos. En relación con el riesgo, el modelo básico, es decir, sin restricción es el que presenta un valor inferior al resto, siendo el de 4 cultivos la opción que proporciona un mayor riesgo. El modelo con 2 cultivos, que proporcionaba una rentabilidad muy baja, también proporciona un riesgo bajo, pero no tan bajo como el modelo básico.

#### 6.4. Modelo con restricciones lógicas

Se han añadido otras restricciones para que el modelo sea lo más similar a la realidad, y por tanto el agricultor pueda sacar el máximo partido a este estudio con el fin de que se

ajuste a las necesidades reales a las que se enfrentan los agricultores. Se han añadido diferentes restricciones mediante el uso de variables binarias. Entre ellas están:

- **Restricción de incompatibilidad:** Si se invierte en un cultivo que no se invierta en otro. En este caso se ha impuesto que si se invierte en cebada no se invierta en centeno.
- **Restricción de obligación:** Tiene que invertirse en todas las carteras dicho cultivo obligatoriamente. En este caso el cultivo va a ser el trigo.
- **Restricción de “implicación”:** Indica que si se invierte en un cultivo es obligatorio que también se invierta en otro. Para este problema se va a considerar que si se invierte en maíz también se invierta en avena.

Adicionalmente, se ha añadido una restricción de cota, que indica el porcentaje máximo y mínimo que tiene que aparecer de cada uno de los cultivos.

Se va a estudiar el resultado del modelo que se obtendría al aplicar todas estas restricciones anteriores juntas, además de tener en cuenta la restricción de cardinalidad que habíamos impuesto anteriormente, en el Apartado 6.5.3.

Se va a plantear un problema concreto. Al agricultor se le exige que como máximo cultive el 90% de la superficie de un producto en concreto y que como mínimo un producto aparezca con un 3%, ya que si no apenas se obtiene cantidad suficiente para su distribución. Además, se le exige que invierta, aunque sea lo mínimo, en trigo, y que siempre que invierta en maíz se invierta en avena. Otro requisito en su hectárea es que no puede plantar a la vez centeno y cebada, pues sus socios le han aconsejado que simplemente elija entre uno de los dos. Para que no haya una excesiva variedad de cultivos se fija el número máximo de cultivos que puede sembrar en 7 cultivos diferentes.

### 6.4.1. Frontera eficiente

La Figura 6.19 representa la frontera eficiente junto con las carteras notables a estudiar.

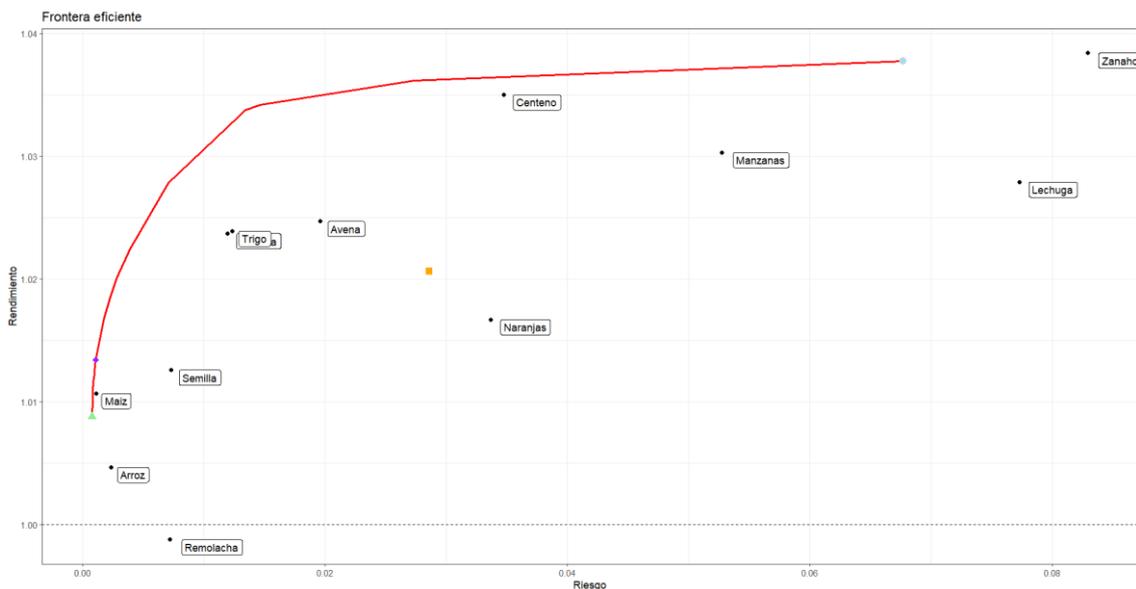


Figura 6.19: Gráfico frontera eficiente

La frontera eficiente, como hemos dicho anteriormente representa las carteras que proporcionan mejores resultados, y será el agricultor quien decida una u otra según la importancia que dé al riesgo y rendimiento, siendo cualquiera de ellas eficientes.

En este caso podemos comprobar cómo no hay ninguna cartera eficiente formada por un único cultivo. Podemos observar cómo maíz y centeno se encuentran muy próximos a la frontera, lo que nos indica que estos dos cultivos tendrán un peso importante en las diferentes carteras. El maíz tendrá gran importancia cuando lo que realmente nos interesa es minimizar el riesgo sin tener en cuenta el rendimiento. El rendimiento es muy bajo, pero el riesgo también lo es, mientras que, para obtener carteras con un mayor rendimiento. Se tendrá en cuenta en mayor proporción el centeno, pero no para el máximo, que en ese caso probablemente sea la zanahoria.

Se puede destacar como la remolacha obtiene un rendimiento negativo, es decir, inferior a 1, y también se observa la lejanía de la lechuga y las naranjas respecto a la frontera eficiente, lo que lleva a considerar que no estarán muy presentes o directamente no estarán en la composición de las carteras eficientes.

Los puntos siguen indicando las carteras notables, aunque en este caso no nos interesa la equiponderada pues no cumple las restricciones impuestas.

En el gráfico 6.20 se observa la composición de las diferentes carteras y esto permitirá comprobar si se han cumplido las restricciones pedidas al agricultor.

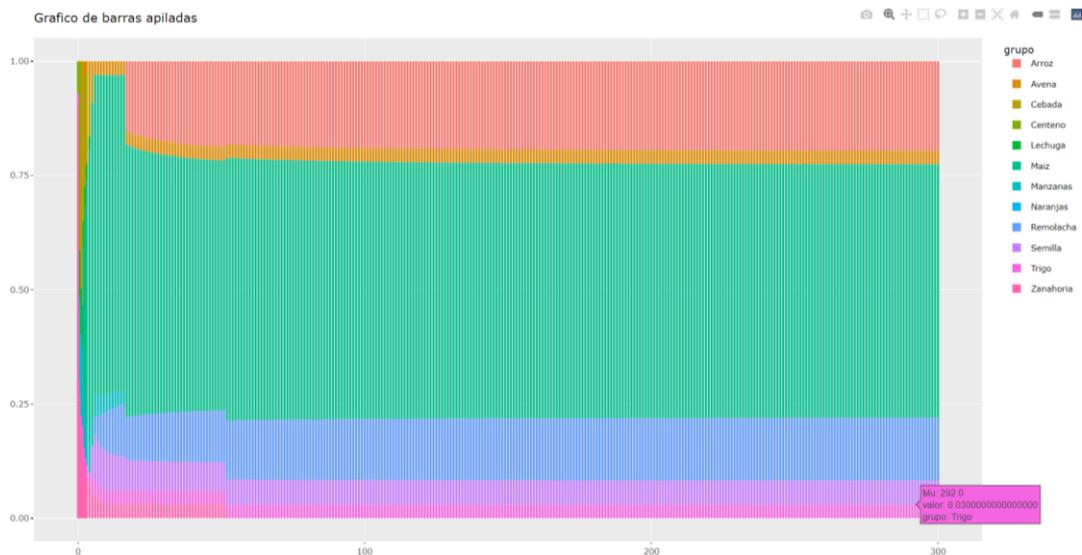


Figura 6.20: Gráfico de la composición de las carteras eficientes

En primer lugar se observa la composición general de las carteras. Se puede ver que el cultivo más representativo en todas las carteras es el maíz, como se había supuesto inicialmente al estar tan próximo a la frontera eficiente. Aproximadamente a partir de  $\mu=55$  la composición de la cartera se queda estable en 6 cultivos (arroz, avena, maíz, remolacha, semilla y trigo) manteniendo además sus porcentajes de composición. Para los primeros valores de  $\mu$  se observa una mayor variedad en los productos, ya que entran a formar parte el centeno, cebada, manzanas, lechuga y zanahoria con porcentajes que

van variando según aumenta  $\mu$ . Cabe destacar que las naranjas no forman parte de ninguna cartera eficiente, como también se había supuesto anteriormente.

Respecto a las restricciones, si se observa detalladamente la Figura 6.20, se ve como en ninguno de los casos, la cartera eficiente está formada por más de 7 productos. Otra restricción es la obligatoriedad de la presencia del trigo en todas las carteras, y dicha restricción también se verifica, como se observa en la Figura 6.21, en la que para todos los valores de  $\mu$  aparece el trigo, con una representación del 3%, que ha sido el valor de la cota inferior que se ha dado a los productos.

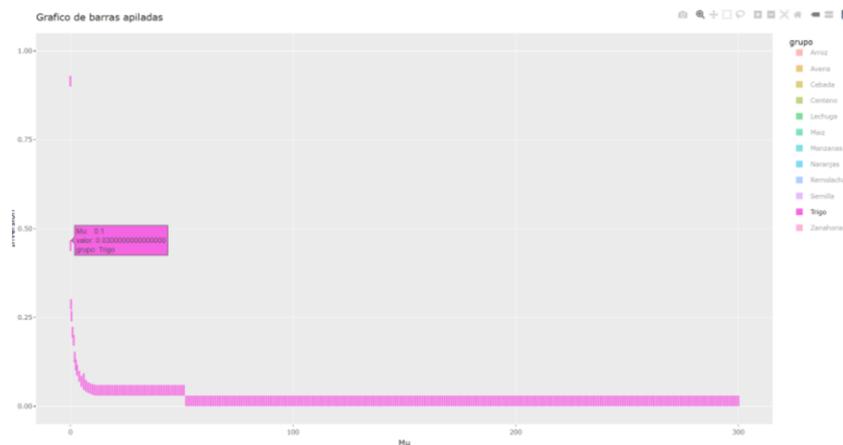


Figura 6.21: Trigo en las carteras de la frontera eficiente

Otro requisito era que siempre que hubiera maíz implicara que hubiera avena, y esta restricción también ha quedado correcta como se observa en la Figura 6.22, en la que se recogen esos dos productos para los valores de  $\mu$ .



Figura 6.22: Maíz y avena en las carteras de la frontera eficiente

La última restricción impuesta era la incompatibilidad de cebada y centeno. Comprobamos gráficamente como esto se ha conseguido, pues en ninguno de los casos ambos están presentes en la misma cartera eficiente, quedando esto representado en la Figura 6.23.

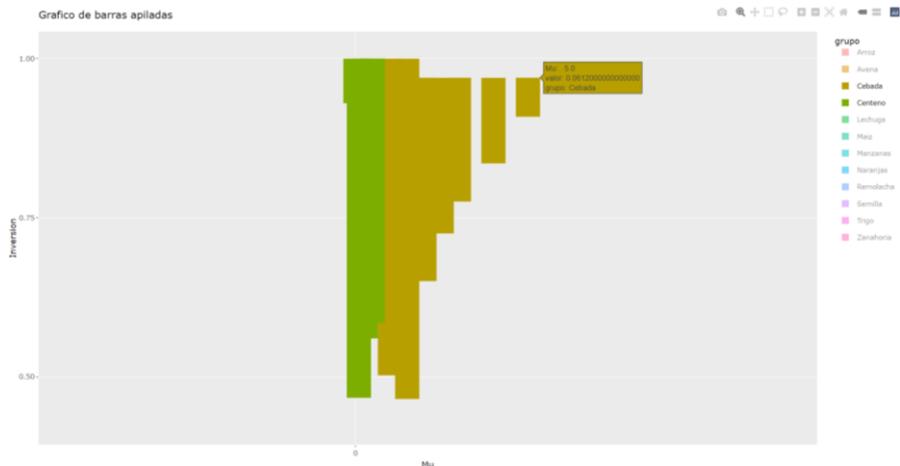


Figura 6.23: Centeno y cebada en las carteras de la frontera eficiente

### 6.4.2. Carteras notables

En este apartado se van a exponer las carteras notables, aunque en este caso no estudiaremos la equiponderada, ya que nos interesan las que cumplan las restricciones impuestas al agricultor de este problema.

#### Cartera de máxima rentabilidad

En este caso la cartera de máxima rentabilidad ya no va a poder estar representada únicamente por el producto con mayor rendimiento, ya que se ha impuesto una restricción de cota superior, que impide que un cultivo represente más del 90% de la composición porcentual de la cartera y, además, se ha obligado a que aparezca el trigo. La cartera que se obtiene está representada en la Figura 6.24.

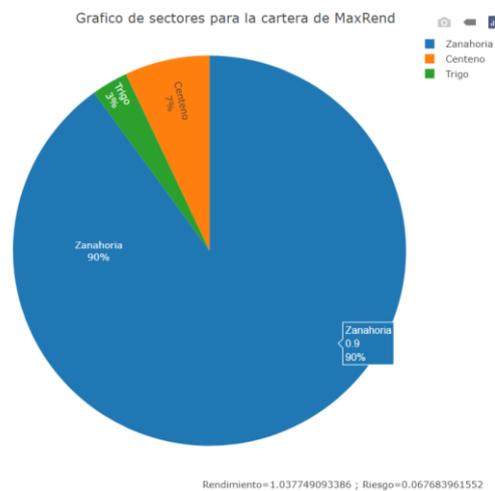


Figura 6.24: Cartera de máxima rentabilidad

Su composición es el 90% de zanahoria, es decir, el producto con mayor rendimiento forma la mayor parte de la cartera, el 3% de trigo, ya que es el cultivo que se obliga a sembrar, pero no presenta un alto rendimiento, y por tanto, se presenta en la menor proporción posible, y el 7% restante es de centeno, que como se ve en la Figura 6.23, está entre los productos con mayor rendimiento, pero a diferencia de los otros, el centeno es el que está muy próximo a la frontera eficiente. Su rendimiento es de 1.03, menor que el

de la zanahoria por sí sola, pero las restricciones nos obligan a hacer esta combinación. El riesgo que proporciona es bastante alto, 0.067, ya que no nos hemos centrado en minimizarle.

### Cartera de mínimo riesgo

La cartera de mínimo riesgo queda representada en la figura 6.25

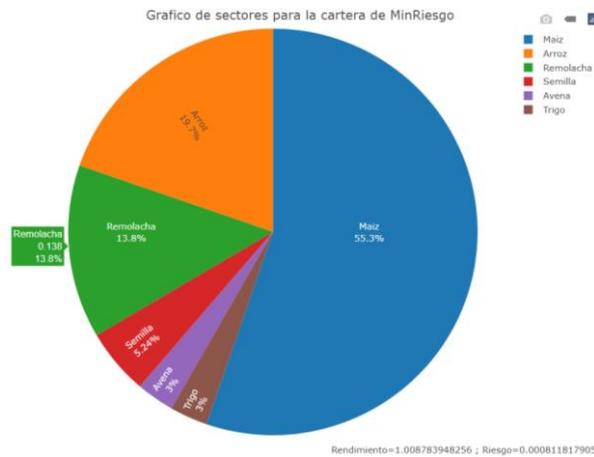


Figura 6.25: Cartera de mínimo riesgo

Está formada por 6 cultivos (cumpliendo la restricción de cardinalidad). Esta cartera eficiente indica que debemos de sembrar el 55.3% de nuestra superficie de maíz, y al estar presente el maíz implica que tiene que estar presente la avena en al menos un 3%, como es el caso, al igual que ocurre con el trigo, que es un cultivo obligatorio, y a pesar de no presentar un riesgo bajo tiene que estar presente en al menos un 3% ya que es la cota inferior impuesta. A mayores, se debe de sembrar un 19.7% de arroz, un 13.8% de remolacha y un 5.24% de semilla. El riesgo de esta cartera es el mínimo de la frontera eficiente y nos referimos a un riesgo de 0.00081, un valor muy bajo que convierta esta cartera en la más segura, pero cabe destacar que el rendimiento no es significativo ya que es 1.0087. Esta cartera evita las pérdidas, pero no provoca muchas ganancias.

### Cartera de máximo ratio de Sharpe

La cartera de máximo ratio de Sharpe para este problema se recoge en la Figura 6.26.

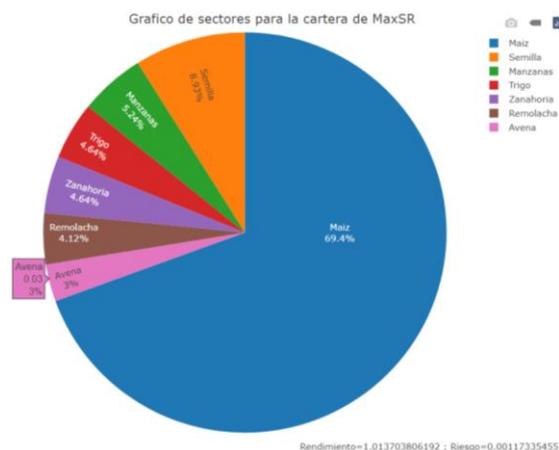


Figura 6.26: Cartera de máximo ratio de Sharpe

En esta cartera se aprecia la alta representación del maíz, de casi el 70%. Los otros seis cultivos se encuentran distribuidos con una proporción muy similar. Se considera necesario sembrar un 8.93% de semilla, un 5.24% de manzanas, un 4.64% de trigo y lo mismo de zanahoria, un 4.12% de remolacha, y un 3% de avena. El trigo en este caso está representado con un porcentaje mínimamente superior al límite inferior, lo que indica que es adecuado su inclusión, al contrario de lo que ocurre con la avena, que está representada con el mínimo porcentaje posible, lo que indica que simplemente compone la cartera debido a que está el maíz. Esta cartera pretende maximizar el ratio de Sharpe, que es una medida de la relación entre el rendimiento de una cartera y su riesgo, por lo que el rendimiento es 1.013, y el riesgo 0.0012, que si se les compara con los de las otras dos carteras notables, se puede ver cómo está en el medio.

### 6.4.3. Restricciones lógicas con variables semicontinuas

Otra restricción lógica que se puede añadir es de variables semicontinuas, como se ha explicado en el Apartado 3.5.4.

En este caso se basa en que el supuesto agricultor, quiere que, en el caso de que se cultive zanahoria, se cultive en al menos el 20% del terreno, ya que se ha visto que es el producto que proporciona un mayor riesgo. En este caso solo se va a presentar esa restricción.

La figura 6.27 representa la frontera eficiente.

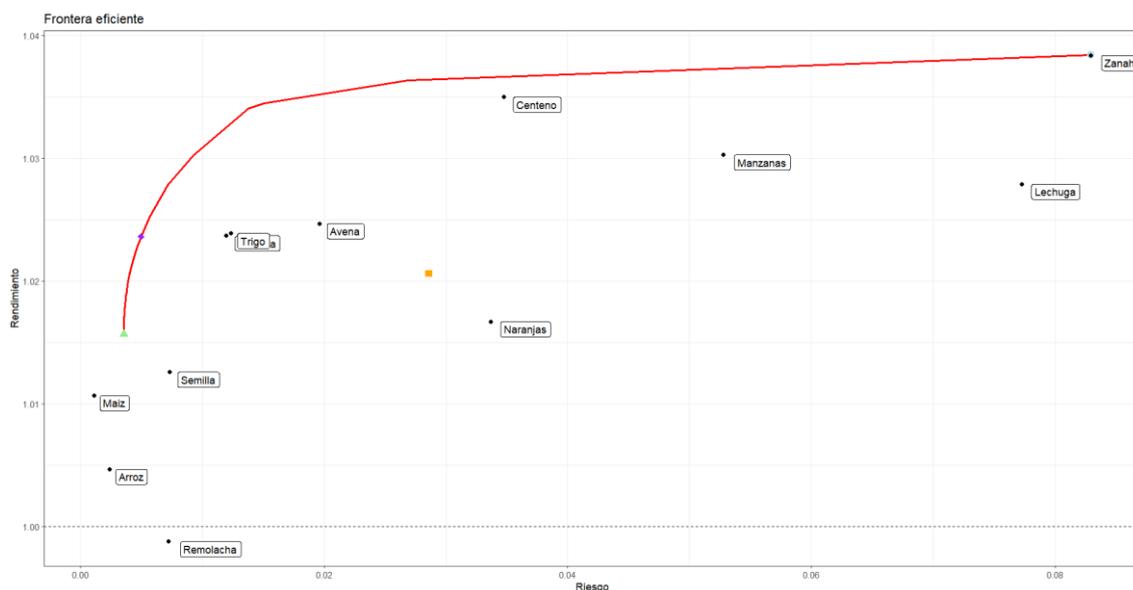


Figura 6.27: Gráfico de la frontera eficiente

En este gráfico, lo más llamativo que se puede observar respecto a los que hemos visto anteriormente es que la curva de la frontera eficiente abarca menos, tanto en el eje OX como en el eje OY, es decir, el mínimo rendimiento que se puede obtener en este conjunto de carteras es menor que en otros casos, y el mínimo riesgo es mayor. El maíz se aleja considerablemente de la frontera, ya que antes estaba muy próximo a ella, lo que nos indica que la representación de este producto en las carteras va a disminuir significativamente respecto a los modelos estudiados anteriormente, en los que el maíz era uno de los cultivos que más intervenía en la mayoría de las carteras eficientes. Al igual que con el maíz esto también ocurre con la semilla, pero este cultivo no era tan representativo.

En este caso se va a describir únicamente la composición de la cartera de máximo ratio de Sharpe ya que suele ser la más representativa de la frontera eficiente. Se recoge en la Figura 6.28.

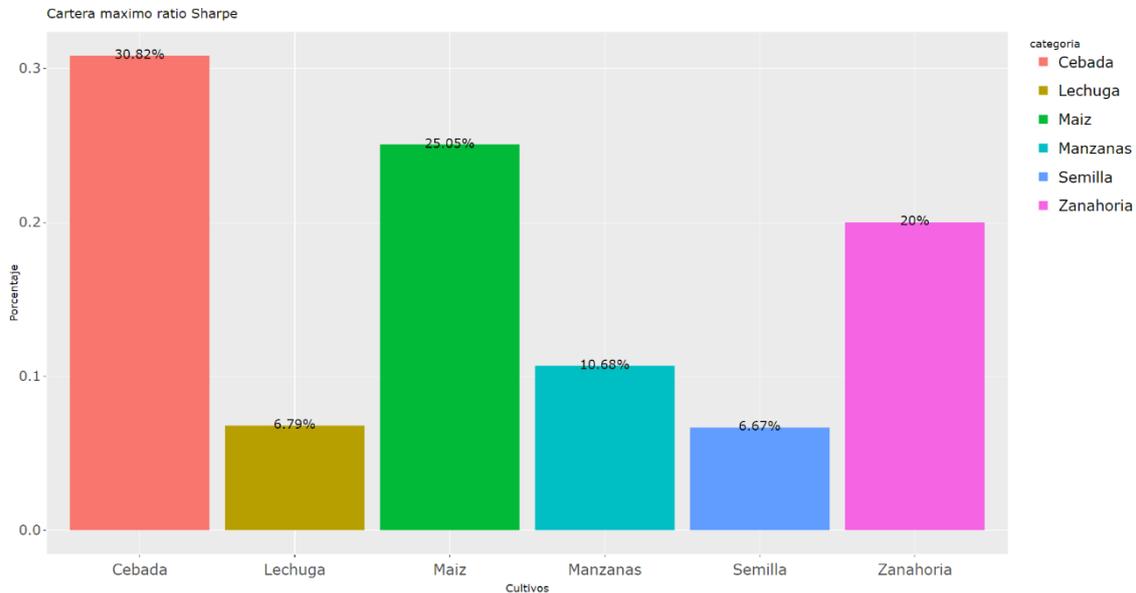


Figura 6.28: Cartera de máximo ratio de Sharpe

En este caso, la cartera está formada por 6 cultivos, e inicialmente se puede comprobar como las zanahorias deben de ser sembradas en un 20% como se ha impuesto. Son el tercer cultivo con más representación en dicha superficie, siendo el primero la cebada con un 30.82% y después el maíz con un 25.05%. Se deben de sembrar también otros cultivos, aunque en menor proporción, como son, las manzanas en un 10.68% del terreno, la lechuga en un 6.79%, y finalmente la semilla en un 6.67%. Respecto al rendimiento y riesgo de esta cartera, recogidos en la Figura 6.29, se observa un rendimiento de 1.023 y un riesgo de 0.004. No presenta un alto riesgo, pero tampoco presenta un elevado rendimiento.

$$\text{Rendimiento}=1.023642848759 ; \text{Riesgo}=0.00495951018$$

Figura 6.29: Rendimiento y riesgo de la cartera de máximo ratio de Sharpe

Si recordamos la cartera de máximo ratio de Sharpe del modelo básico, Figura 6.6, tanto el rendimiento y el riesgo son algo inferiores, ya que eran 1.013 y 0.01 respectivamente. Esto se debe al mayor porcentaje de zanahoria presente en esta cartera (antes era solo un 4.49%), que como se ha visto anteriormente es el cultivo que presenta un mayor riesgo y rendimiento.

# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado el problema de selección de carteras a través del modelo de Markowitz al cuál se le han añadido restricciones lógicas y de cardinalidad para que se asemeje lo máximo posible a la realidad. Además se ha realizado un análisis de sensibilidad para los pesos y para el número máximo de cultivos que se pueden incluir en las carteras eficientes. De esta forma se ha podido realizar un estudio de cómo evolucionan las carteras según dichos parámetros. Se han obtenido las fronteras eficientes rentabilidad-riesgo y las carteras notables.

Se han utilizado datos agrarios de doce cultivos diferentes, que podrían ser divididos en tres grupos (cereales, frutas y hortalizas), proporcionados por la FAO entre el 01/2017 y el 12/2021. Este intervalo de tiempo está claramente afectado por las consecuencias del COVID-19 y del bloqueo del canal de Suez, pues hasta esas fechas los valores se mantenían prácticamente constantes, y es a partir de estos periodos cuando los valores han incrementado drásticamente ya que se ha producido cierta escasez de varios de los cultivos que se han usado para este trabajo. Este crecimiento ha sido más significativo que el que se lleva viendo desde hace muchos años. Por tanto, con esta variabilidad de datos parece fundamental dar un mayor peso a los meses más recientes usando logaritmos mediante el método de Vanderbei para que nuestra cartera sea lo más realista posible.

Elegir un modelo y otro dependerá de los intereses del agricultor, es decir si prefiere que tenga un mayor rendimiento o riesgo, o al contrario. La cartera notable que tiene mejores valores respecto a riesgo y rendimiento es la cartera de máximo ratio de Sharpe.

Todos los cultivos presentan rendimientos positivos a excepción de la remolacha, y también cabe destacar que en la mayoría de carteras el maíz es el cultivo que tiene una mayor presencia, a excepción de la de máxima rentabilidad que es la zanahoria. Cabe destacar que las frutas tienen representaciones muy bajas.

En cuanto a las herramientas empleadas para el desarrollo de este trabajo, se ha usado AMPL para la programación y ejecución de los modelos de optimización. Pero tanto para la preparación previa de los datos, como para el análisis descriptivo y la representación de soluciones finales se ha utilizado R. Con la solución obtenida en AMPL, que no proporciona directamente la tabla de la frontera eficiente que es lo que realmente se necesita, se han programado varias funciones en R que permiten que, a través del resultado del AMPL copiado en un bloc de notas se cree la tabla de la frontera eficiente y se obtengan el resto de datos necesarios, para que así se evite tener que ir copiándolas a mano y se puedan obtener de forma casi directa. Cabe mencionar el aprendizaje más en profundidad de AMPL como *solver*, de R para leer blocs de notas y depurar datos y mis conocimientos tanto agrarios como económicos.

# Capítulo 8

## Futuro trabajo

En este último capítulo del trabajo se proponen distintas líneas para continuar el trabajo.

Dentro del campo de productos agrícolas, se pueden añadir restricciones agrarias, como puede ser una restricción para la rotación, es decir, que en cada año se establezca el cultivo que se debe sembrar en cada una de las hectáreas. Para esta restricción se debe de precisar que ha sido sembrado en los años anteriores, y para qué año queremos obtener la cartera de optimización. Otra restricción agraria que se podría incluir relacionada con la mencionada anteriormente es la restricción de la frecuencia cuya fórmula sería  $X_i \leq \frac{m}{m+h} * S$ , siendo  $m$  el número de años que permanece el cultivo en la misma parcela,  $h$  el número de años que debemos dejar descansar la tierra,  $X_i$  la superficie dedicada a cada cultivo y  $S$  la superficie total cultivada.

Otra área en el que se puede aplicar la optimización es en el ámbito forestal, para poder estimar qué especies de árboles se deben plantar en cada parcela para así obtener la máxima producción de  $CO_2$ , siendo esto nuestro rendimiento. En este caso se deberían de tomar datos con mayor distribución en el tiempo, tal vez cada 5 o 10 años, y no mensuales o diarios como estamos acostumbrados en el ámbito de la optimización.

Además, se puede optar por aplicar otro modelo de optimización que no sea el de Markowitz, o aplicar ambos a la vez para así contrastar resultados. Un modelo que se puede aplicar es el CAPM. Es un modelo utilizado para calcular la rentabilidad que un inversor debe exigir al realizar una inversión en un activo financiero, en función del riesgo que está asumiendo. El modelo utiliza el coeficiente beta para medir el riesgo sistemático de un activo en relación con el mercado. La idea central es que los activos con una mayor beta tienen una mayor recompensa esperada, ya que están más expuestos al riesgo sistemático del mercado. Se recoge algo más acerca de este modelo en<sup>25</sup> y en<sup>26</sup>.

Adicionalmente, se puede pasar del problema cuadrático del modelo de Markowitz a un problema lineal, como es el modelo MAD. A pesar de que lo competitivos que son los problemas cuadráticos frente a los lineales, la adición de variables binarias y enteras incrementa la complejidad del problema, por lo que al final si puede ser buena idea la conversión a problema lineal. Se sigue incluyendo el parámetro  $\mu$ . Las características de este modelo son recogidas en el trabajo<sup>20</sup>.

Se propone explorar la creación de una aplicación web o RShiny para que los usuarios pueden utilizar estos modelos sin necesidad de tener dichos conocimientos. También, se propone que se extraigan directamente desde la web oficial para así tener los datos actualizados.

Adicionalmente, se puede explorar más en profundidad la relación que hay entre el AMPL u otros programas de investigación operativa con lenguajes más utilizados con son R o Python. Esto es útil ya que R todavía no tiene implementado estos avances de optimización, y resulta más cómodo depender de un único programa.

# Anexo

## Anexo 1: Tablas de los datos

### 1.1 Rendimiento (hg/ha)

▲	Producto	↕	Año	↕	Unidad	↕	Valor	↕
1	Arroz		2017		hg/ha		77616	
2	Arroz		2018		hg/ha		76077	
3	Arroz		2019		hg/ha		75339	
4	Arroz		2020		hg/ha		72431	
5	Arroz		2021		hg/ha		72884	
6	Avena		2017		hg/ha		15091	
7	Avena		2018		hg/ha		27807	
8	Avena		2019		hg/ha		18552	
9	Avena		2020		hg/ha		27218	
10	Avena		2021		hg/ha		23700	
11	Azucar, remolacha		2017		hg/ha		897917	
12	Azucar, remolacha		2018		hg/ha		813289	
13	Azucar, remolacha		2019		hg/ha		912097	
14	Azucar, remolacha		2020		hg/ha		880825	
15	Azucar, remolacha		2021		hg/ha		849590	
16	Cebada		2017		hg/ha		22275	
17	Cebada		2018		hg/ha		37184	
18	Cebada		2019		hg/ha		28751	
19	Cebada		2020		hg/ha		41707	
20	Cebada		2021		hg/ha		36889	
21	Centeno		2017		hg/ha		12877	
22	Centeno		2018		hg/ha		29672	
23	Centeno		2019		hg/ha		18941	
24	Centeno		2020		hg/ha		29626	
25	Centeno		2021		hg/ha		26713	
26	Guisantes, verdes		2017		hg/ha		73247	
27	Guisantes, verdes		2018		hg/ha		79009	
28	Guisantes, verdes		2019		hg/ha		76081	
29	Guisantes, verdes		2020		hg/ha		75112	
30	Guisantes, verdes		2021		hg/ha		72637	
31	Lechuga y achicoria		2017		hg/ha		282865	
32	Lechuga y achicoria		2018		hg/ha		277098	
33	Lechuga y achicoria		2019		hg/ha		285580	
34	Lechuga y achicoria		2020		hg/ha		282525	
35	Lechuga y achicoria		2021		hg/ha		310971	
36	Maíz		2017		hg/ha		113169	

Figura A1.1: Tabla rendimientos

▲	Producto	↕	Año	↕	Unidad	↕	Valor	↕
37	Maíz		2018		hg/ha		119196	
38	Maíz		2019		hg/ha		117268	
39	Maíz		2020		hg/ha		122581	
40	Maíz		2021		hg/ha		128329	
41	Manzanas		2017		hg/ha		192155	
42	Manzanas		2018		hg/ha		188092	
43	Manzanas		2019		hg/ha		215533	
44	Manzanas		2020		hg/ha		177043	
45	Manzanas		2021		hg/ha		209110	
46	Naranjas		2017		hg/ha		238935	
47	Naranjas		2018		hg/ha		260678	
48	Naranjas		2019		hg/ha		229981	
49	Naranjas		2020		hg/ha		236942	
50	Naranjas		2021		hg/ha		251785	
51	Papas, patatas		2017		hg/ha		315961	
52	Papas, patatas		2018		hg/ha		297960	
53	Papas, patatas		2019		hg/ha		338983	
54	Papas, patatas		2020		hg/ha		313735	
55	Papas, patatas		2021		hg/ha		328873	
56	Semilla de girasol		2017		hg/ha		11616	
57	Semilla de girasol		2018		hg/ha		13899	
58	Semilla de girasol		2019		hg/ha		11147	
59	Semilla de girasol		2020		hg/ha		13734	
60	Semilla de girasol		2021		hg/ha		12174	
61	Tomates, frescos		2017		hg/ha		848529	
62	Tomates, frescos		2018		hg/ha		849564	
63	Tomates, frescos		2019		hg/ha		878216	
64	Tomates, frescos		2020		hg/ha		777519	
65	Tomates, frescos		2021		hg/ha		847332	
66	Trigo		2017		hg/ha		23263	
67	Trigo		2018		hg/ha		40328	
68	Trigo		2019		hg/ha		31463	
69	Trigo		2020		hg/ha		42532	
70	Trigo		2021		hg/ha		40238	
71	Zanahorias y nabos		2017		hg/ha		604972	
72	Zanahorias y nabos		2018		hg/ha		583863	
73	Zanahorias y nabos		2019		hg/ha		576162	
74	Zanahorias y nabos		2020		hg/ha		570058	
75	Zanahorias y nabos		2021		hg/ha		586498	

Figura A1.2: Tabla rendimientos continuación

## 1.2. Productividad (€/ton)

	Arroz	Avena	Remolacha	Cebada	Centeno	Lechuga	Maiz	Manzanas	Naranjas	Semilla	Trigo	Zanahorias
2017-01-01	307.0	144.0	39.0	150.0	132.0	751.0	172.0	318.0	192.0	335.0	164.0	162.0
2017-02-01	313.0	144.0	44.0	149.0	133.0	695.0	173.0	319.0	222.0	335.0	163.0	175.0
2017-03-01	286.0	136.0	44.0	141.0	133.0	449.0	169.0	274.0	283.0	335.0	162.0	402.0
2017-04-01	290.0	139.0	44.0	142.0	133.0	159.0	172.0	256.0	319.0	335.0	157.0	432.0
2017-05-01	323.0	140.0	44.0	150.0	133.0	223.0	177.0	476.0	351.0	335.0	167.0	437.0
2017-06-01	323.0	140.0	40.0	150.0	133.0	259.0	179.0	476.0	418.0	335.0	167.0	479.0
2017-07-01	323.0	153.0	39.0	164.0	157.0	307.0	179.0	476.0	450.0	329.0	196.0	396.0
2017-08-01	323.0	151.0	34.0	165.0	159.0	379.0	185.0	787.0	450.0	326.0	189.0	175.0
2017-09-01	323.0	147.0	34.0	166.0	157.0	276.0	178.0	530.0	205.0	323.0	187.0	122.0
2017-10-01	286.0	146.0	42.0	170.0	160.0	407.0	172.0	573.0	202.0	313.0	189.0	119.0
2017-11-01	281.0	149.0	42.0	179.0	166.0	199.0	171.0	462.0	207.0	382.0	187.0	125.0
2017-12-01	284.0	150.0	41.0	182.0	171.0	210.0	170.0	447.0	207.0	306.0	186.0	122.0
2018-01-01	278.0	152.0	38.0	175.0	168.0	202.0	169.0	477.0	215.0	303.0	181.0	152.0
2018-02-01	284.0	152.0	38.0	175.0	166.0	151.0	168.0	524.0	247.0	303.0	179.0	263.0
2018-03-01	289.0	150.0	38.0	176.0	169.0	188.0	169.0	609.0	283.0	303.0	179.0	432.0
2018-04-01	289.0	143.0	38.0	173.0	163.0	247.0	181.0	677.0	308.0	303.0	177.0	471.0
2018-05-01	289.0	143.0	38.0	168.0	163.0	257.0	181.0	772.0	310.0	303.0	176.0	469.0
2018-06-01	289.0	143.0	44.0	168.0	163.0	284.0	181.0	772.0	309.0	303.0	176.0	484.0
2018-07-01	289.0	143.0	33.0	161.0	157.0	306.0	181.0	772.0	309.0	324.0	178.0	238.0
2018-08-01	289.0	143.0	30.0	172.0	165.0	297.0	185.0	858.0	309.0	319.0	186.0	244.0
2018-09-01	290.0	145.0	30.0	175.0	164.0	221.0	186.0	533.0	186.0	304.0	188.0	212.0
2018-10-01	293.0	147.0	34.0	177.0	164.0	301.0	179.0	552.0	176.0	299.0	188.0	190.0
2018-11-01	300.0	152.0	34.0	184.0	166.0	245.0	179.0	478.0	163.0	293.0	191.0	197.0
2018-12-01	301.0	154.0	34.0	186.0	166.0	212.0	176.0	466.0	166.0	288.0	189.0	202.0
2019-01-01	305.0	159.0	34.0	180.0	166.0	302.0	182.0	418.0	149.0	288.0	181.0	208.0
2019-02-01	307.0	162.0	34.0	175.0	166.0	250.0	182.0	405.0	157.0	288.0	179.0	339.0
2019-03-01	314.0	161.0	34.0	170.0	163.0	217.0	176.0	369.0	145.0	288.0	179.0	430.0
2019-04-01	314.0	160.0	34.0	174.0	163.0	207.0	186.0	352.0	131.0	288.0	177.0	553.0
2019-05-01	314.0	160.0	34.0	166.0	163.0	206.0	186.0	350.0	124.0	288.0	176.0	553.0
2019-06-01	314.0	160.0	30.0	166.0	163.0	335.0	186.0	350.0	121.0	288.0	176.0	624.0
2019-07-01	314.0	172.0	29.0	177.0	164.0	286.0	186.0	350.0	121.0	318.0	178.0	245.0
2019-08-01	314.0	171.0	28.0	174.0	162.0	280.0	180.0	650.0	121.0	333.0	186.0	210.0
2019-09-01	290.0	167.0	28.0	172.0	161.0	281.0	175.0	445.0	194.0	319.0	188.0	192.0
2019-10-01	296.0	171.0	33.0	175.0	165.0	353.0	174.0	474.0	187.0	305.0	188.0	179.0
2019-11-01	308.0	172.0	33.0	177.0	164.0	456.0	177.0	426.0	196.0	301.0	191.0	179.0
2019-12-01	313.0	175.0	33.0	176.0	165.0	226.0	177.0	413.0	210.0	294.0	189.0	184.0
2020-01-01	316.9	180.7	33.1	176.9	165.5	328.8	181.3	379.6	222.8	297.3	191.8	179.5
2020-02-01	324.2	186.1	33.1	176.5	166.7	254.7	183.6	387.4	252.0	297.3	196.4	276.8
2020-03-01	330.4	185.6	32.9	171.5	166.9	255.7	177.8	361.6	256.6	297.3	191.4	286.6
2020-04-01	330.4	186.4	32.9	168.5	166.5	274.1	186.0	365.9	371.1	297.3	192.1	359.3
2020-05-01	330.4	186.4	32.9	154.9	166.5	199.9	186.0	434.2	418.5	297.3	182.1	392.6
2020-06-01	330.4	186.4	26.1	154.9	166.5	210.9	186.0	434.2	529.4	297.3	182.1	334.4
2020-07-01	330.4	164.4	29.0	154.9	149.5	262.0	186.0	434.2	529.4	353.1	199.7	259.2
2020-08-01	330.4	159.9	29.0	151.4	145.2	251.0	181.6	716.0	529.4	333.1	188.8	252.1
2020-09-01	300.0	157.9	29.0	157.8	149.1	247.6	176.5	532.0	243.0	324.3	186.6	238.9
2020-10-01	305.9	166.2	32.4	165.3	154.2	281.0	190.6	570.9	226.7	340.3	198.1	201.3
2020-11-01	319.3	169.0	31.9	174.0	158.5	225.2	201.9	543.3	222.0	347.2	198.3	188.1
2020-12-01	321.9	167.5	31.9	172.5	156.5	195.1	204.7	541.1	228.1	349.3	193.9	177.0
2021-01-01	348.9	175.7	31.8	172.8	160.1	293.6	210.2	577.2	240.8	351.4	198.3	195.4
2021-02-01	351.8	176.4	31.9	178.1	164.7	169.5	217.1	634.3	267.6	351.4	207.1	248.9
2021-03-01	359.9	174.8	31.8	179.8	168.2	251.6	223.1	658.6	305.0	351.4	209.3	300.2
2021-04-01	359.9	177.6	31.8	186.4	172.6	286.7	224.0	666.7	356.7	351.4	216.0	305.1
2021-05-01	359.9	177.6	31.8	198.9	172.6	249.7	224.0	705.3	394.0	351.4	222.8	258.2
2021-06-01	359.9	177.6	26.0	198.9	172.6	236.3	224.0	705.3	324.4	351.4	222.8	250.6
2021-07-01	359.9	189.5	26.8	198.1	185.0	275.2	224.0	705.3	324.4	482.5	232.4	237.0
2021-08-01	359.9	190.9	26.6	209.8	189.9	389.4	258.1	734.7	324.4	495.8	248.7	220.2
2021-09-01	310.0	194.6	26.6	220.0	201.5	368.6	260.3	518.8	204.0	501.3	256.8	192.5
2021-10-01	380.9	221.0	31.0	241.5	222.8	311.2	272.0	524.8	177.0	523.5	291.5	177.7
2021-11-01	406.4	256.6	30.9	279.2	255.5	238.0	278.0	482.5	155.5	549.1	310.9	180.3
2021-12-01	405.0	256.8	30.8	277.2	256.6	308.2	277.5	491.4	154.2	554.5	293.6	179.9

Figura A1.3: Tabla productividad





## Anexo 2: Gráficos evolutivos

### 2.1. Productividad en €/ton

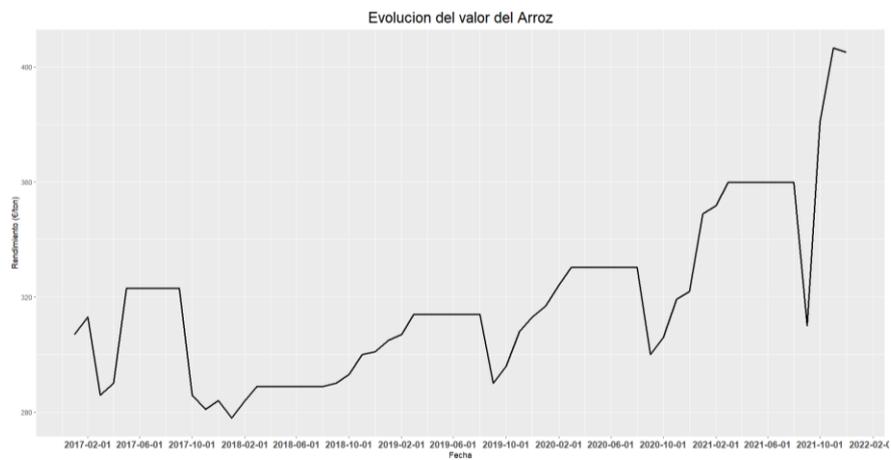


Figura A2.6: Gráfico evolutivo productividad arroz

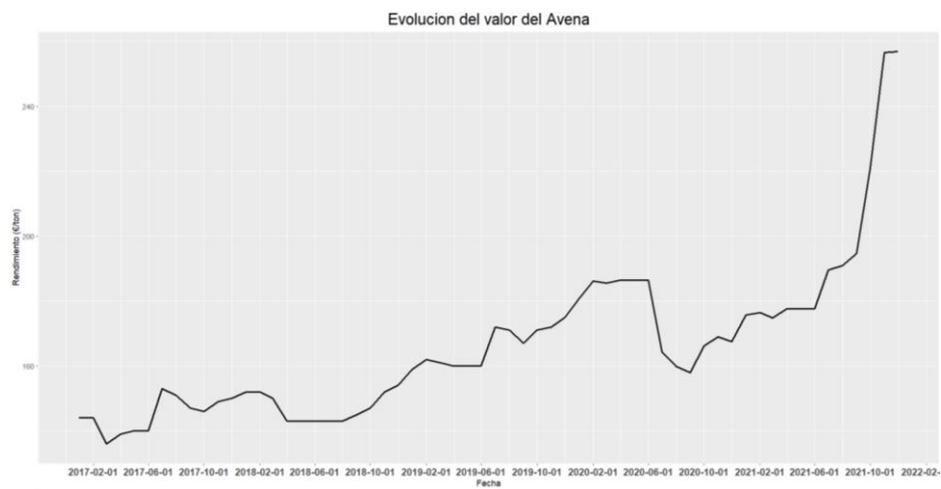


Figura A2.7: Gráfico evolutivo productividad avena

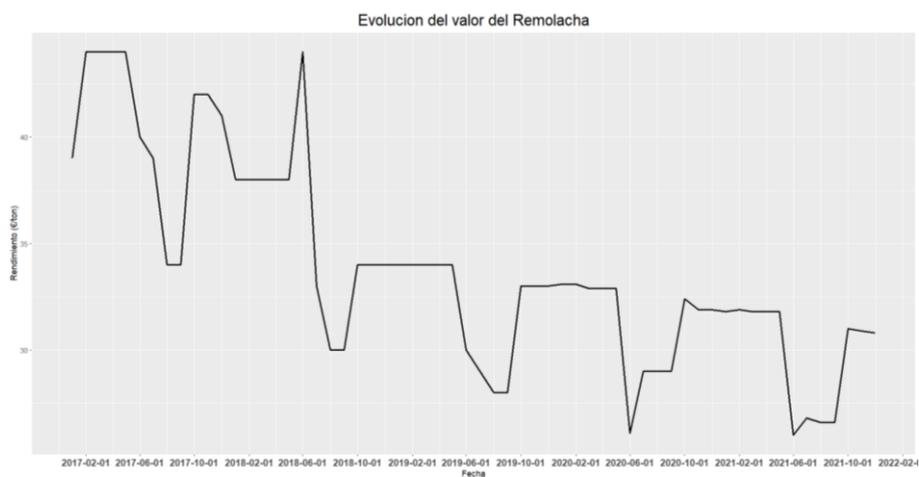


Figura A2.8: Gráfico evolutivo productividad remolacha

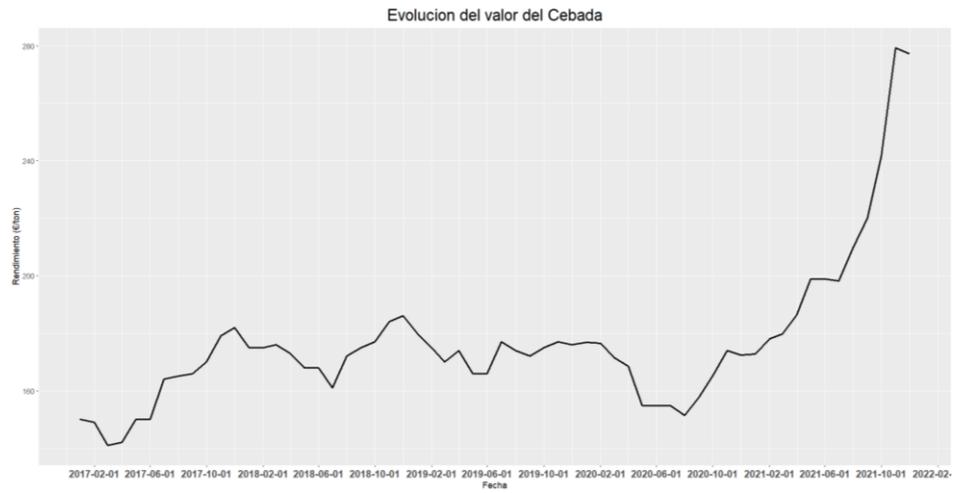


Figura A2.9: Gráfico evolutivo productividad cebada

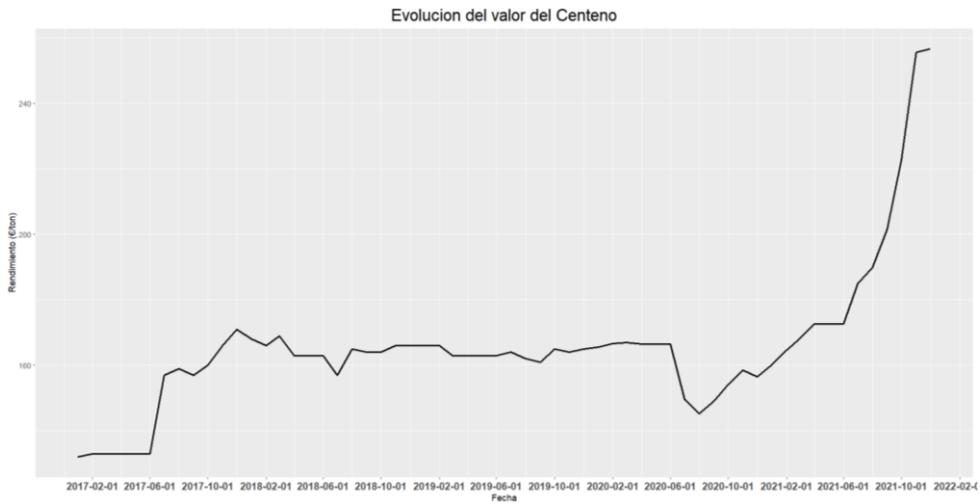


Figura A2.10: Gráfico evolutivo productividad centeno

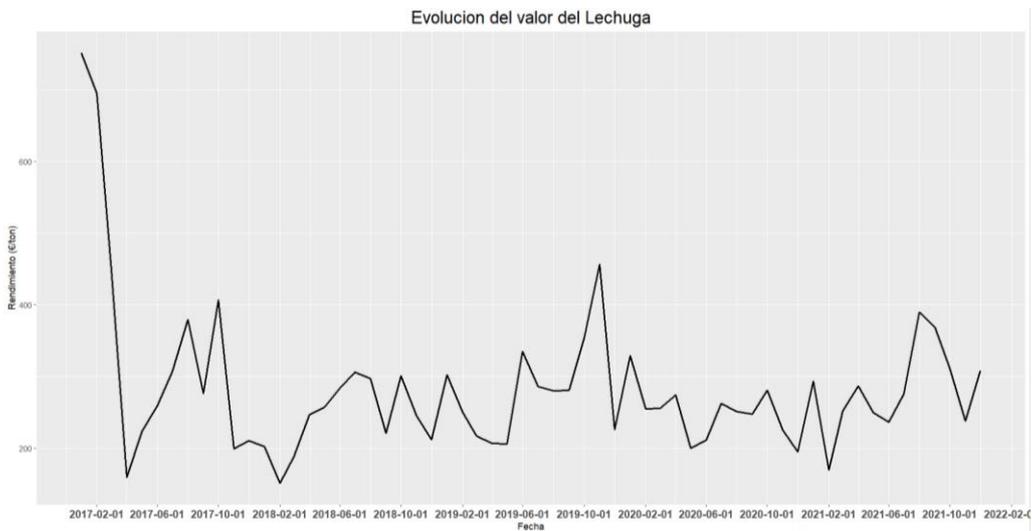


Figura A2.11: Gráfico evolutivo productividad lechuga

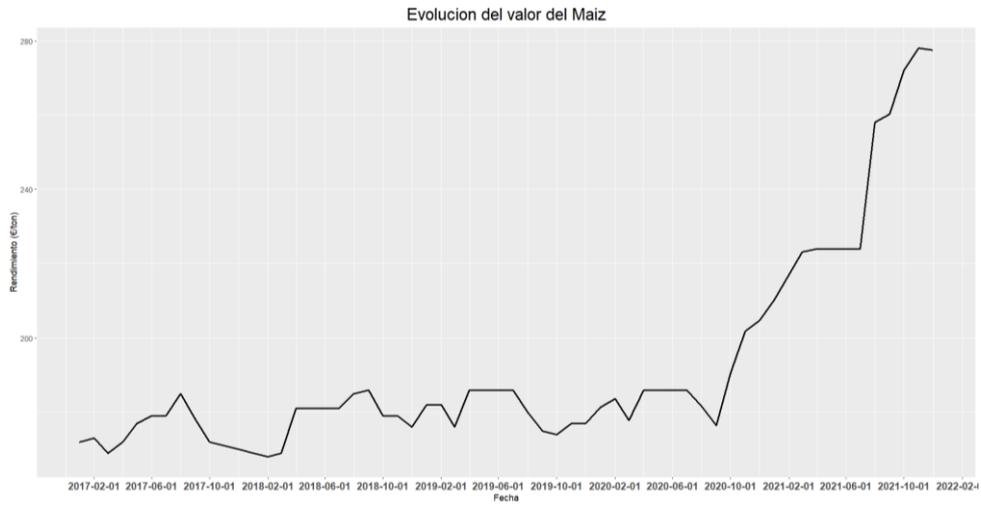


Figura A2.12: Gráfico evolutivo productividad maíz

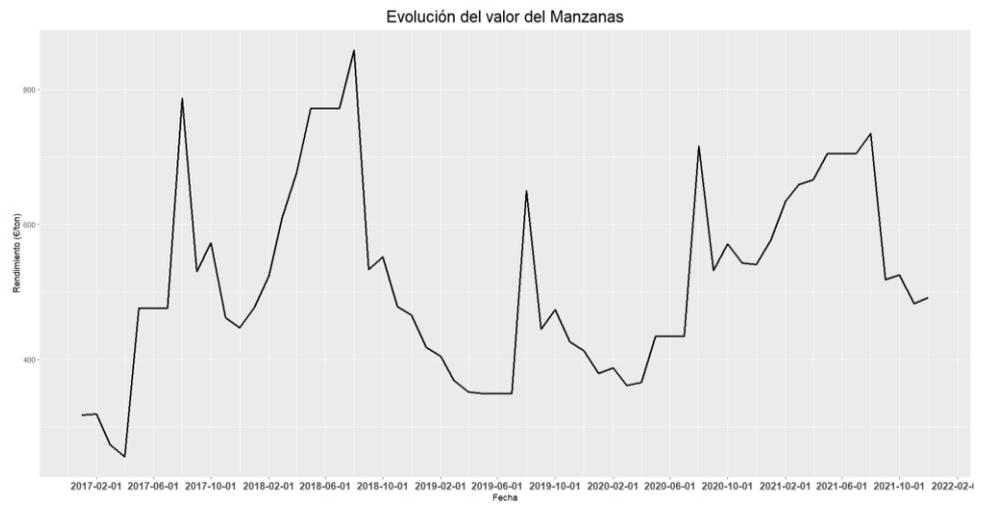


Figura A2.13: Gráfico evolutivo productividad manzanas

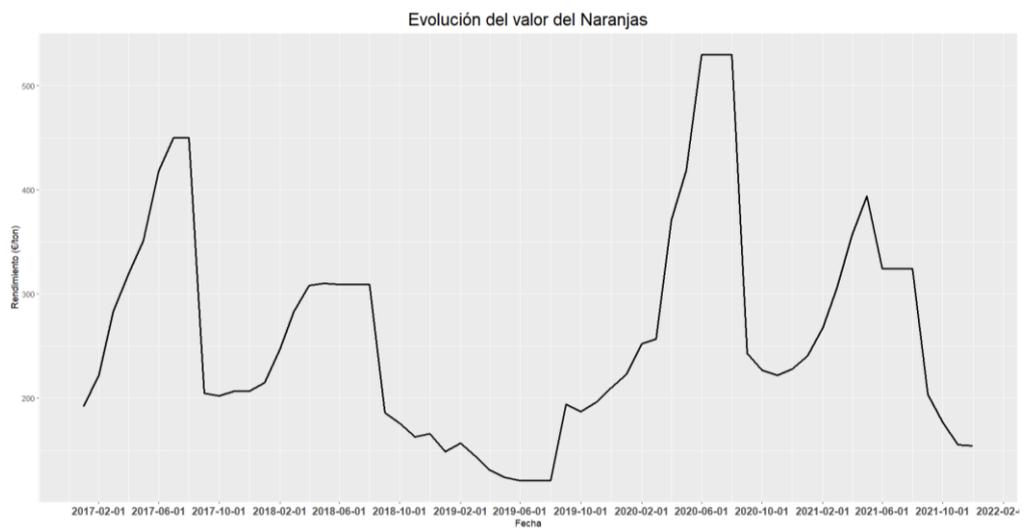


Figura A2.14: Gráfico evolutivo productividad naranjas

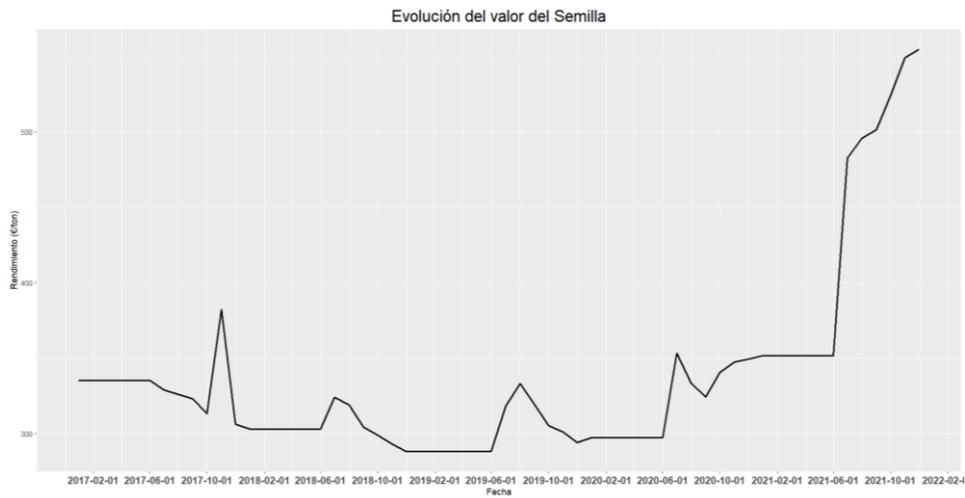


Figura A2.15: Gráfico evolutivo productividad semilla

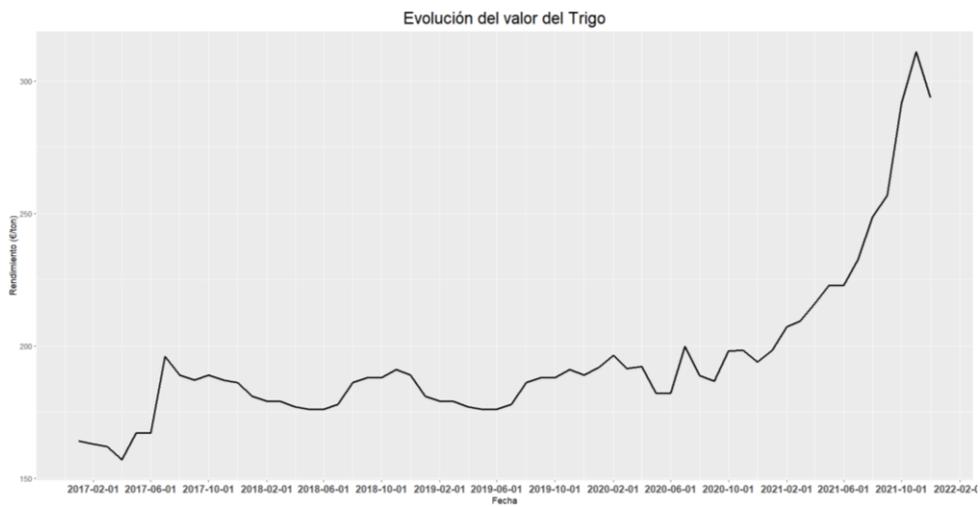


Figura A2.16: Gráfico evolutivo productividad trigo

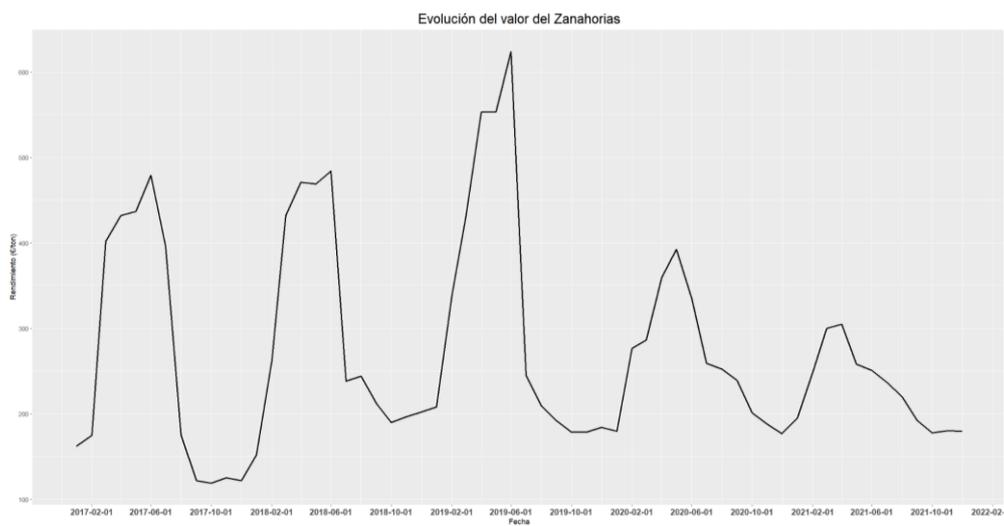


Figura A2.17: Gráfico evolutivo productividad zanahorias

## 2.2. Valor en €/ha

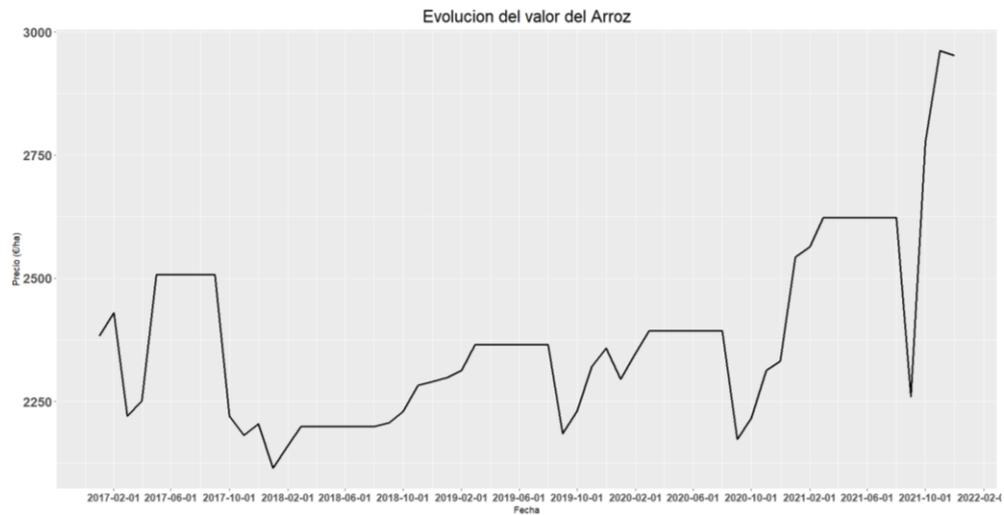


Figura A2.18: Gráfico evolución €/ha arroz

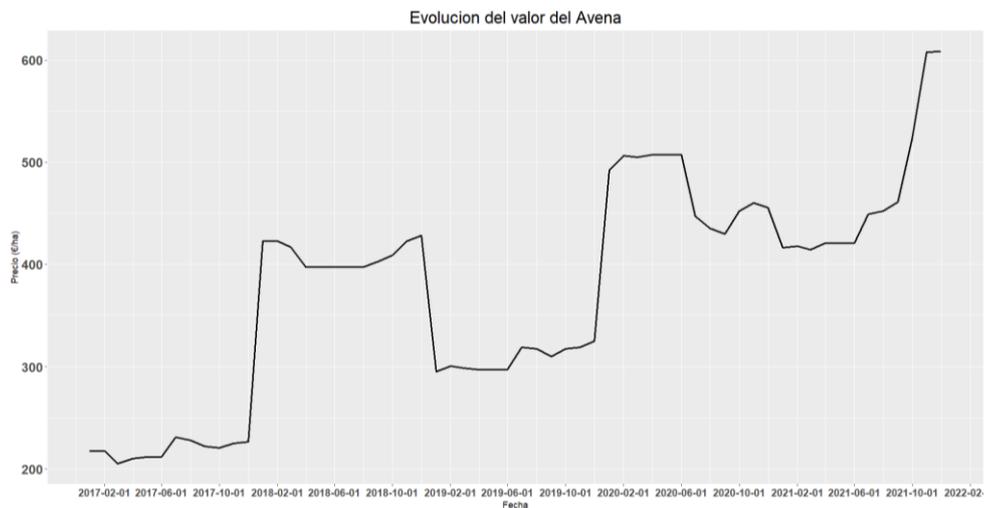


Figura A2.19: Gráfico evolución €/ha avena

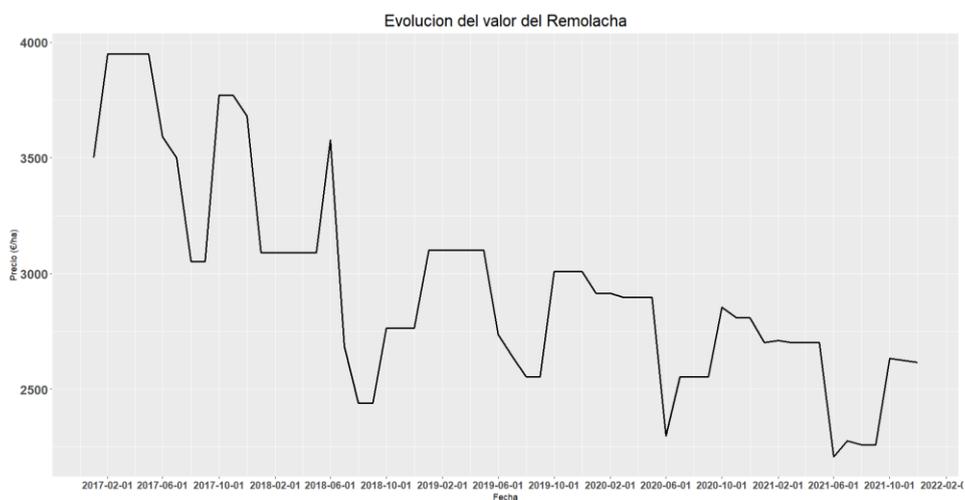


Figura A2.20: Gráfico evolución €/ha remolacha

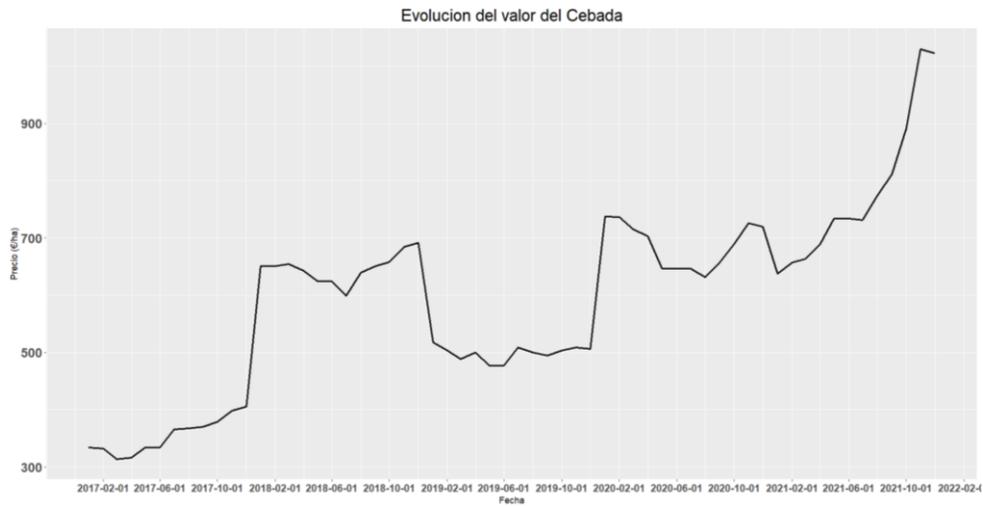


Figura A2.21: Gráfico evolución €/ha cebada

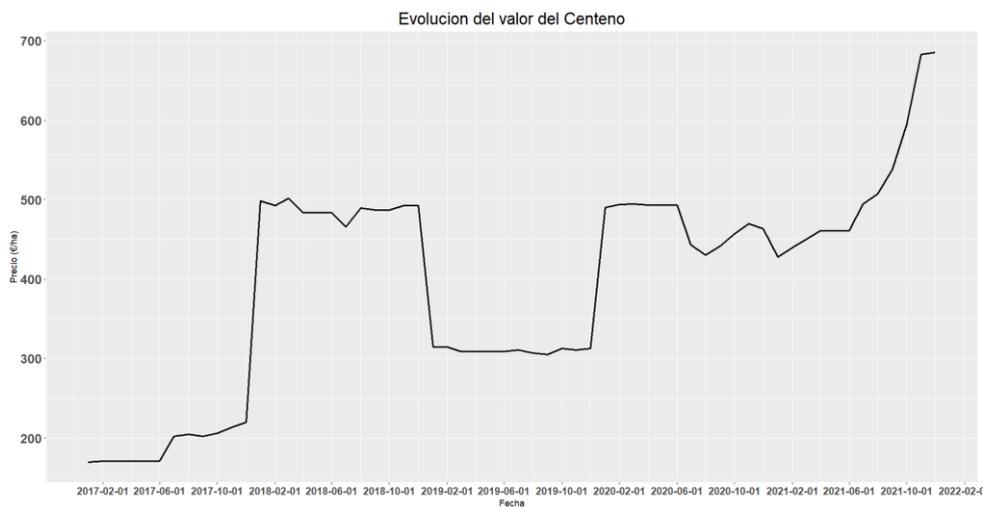


Figura A2.22: Gráfico evolución €/ha centeno

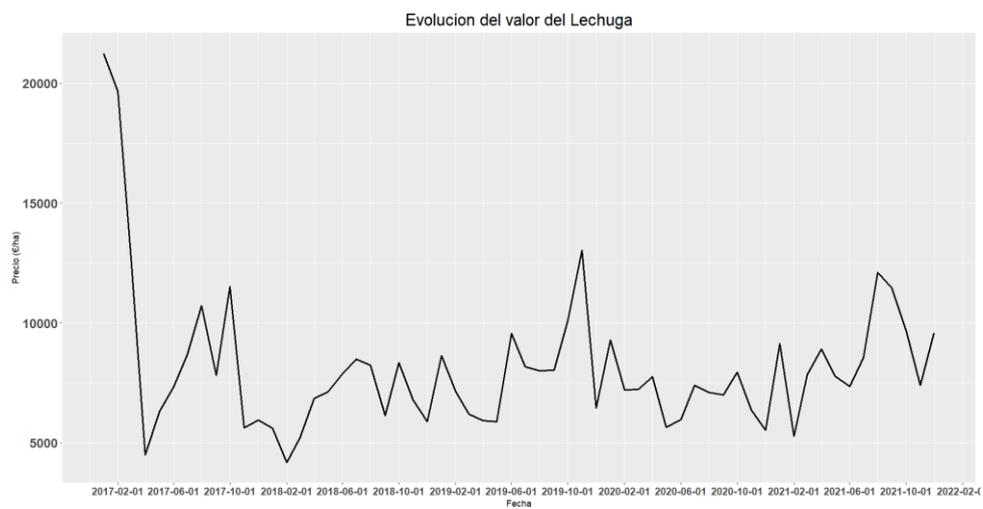


Figura A2.23: Gráfico evolución €/ha lechuga

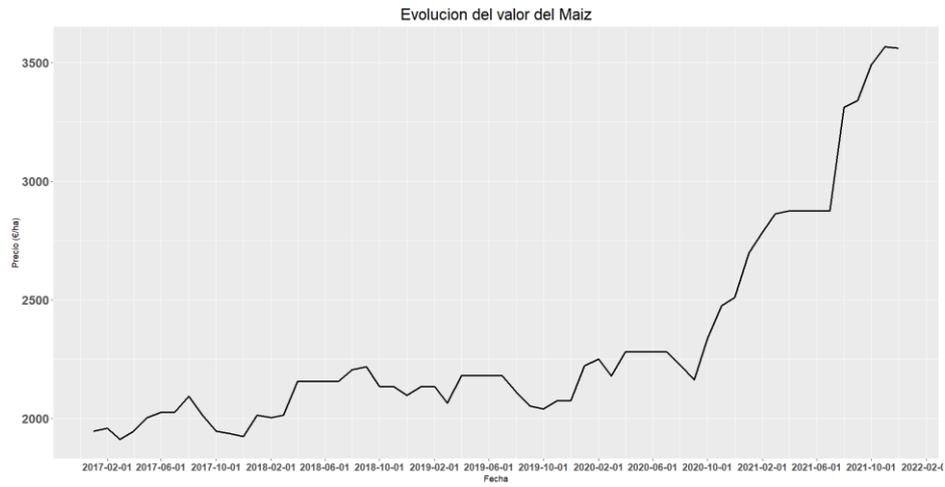


Figura A2.24: Gráfico evolución €/ha maíz

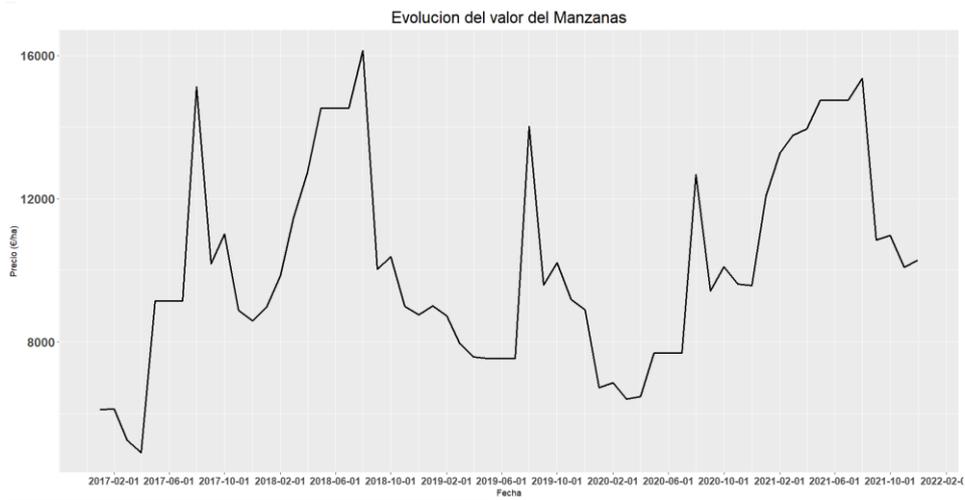


Figura A2.25: Gráfico evolución €/ha manzanas

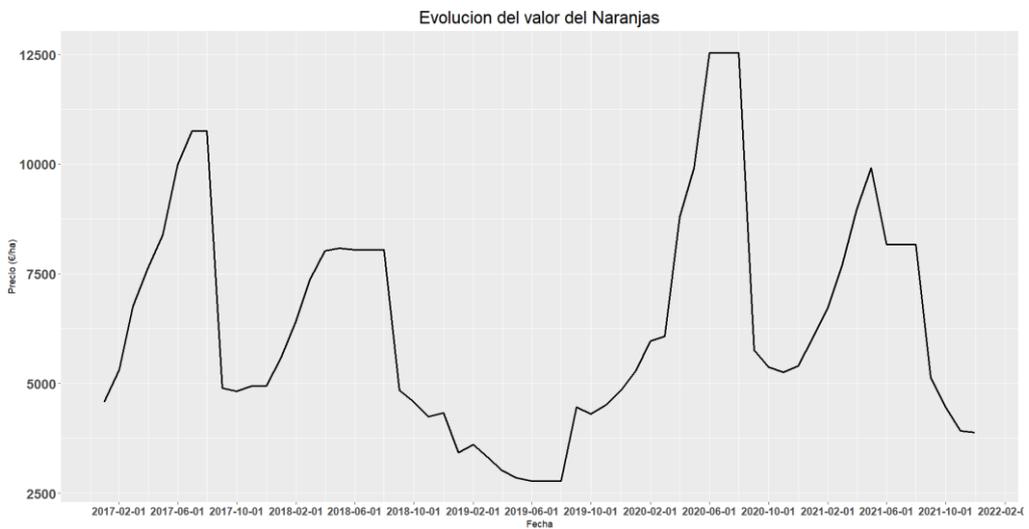


Figura A2.26: Gráfico evolución €/ha naranjas

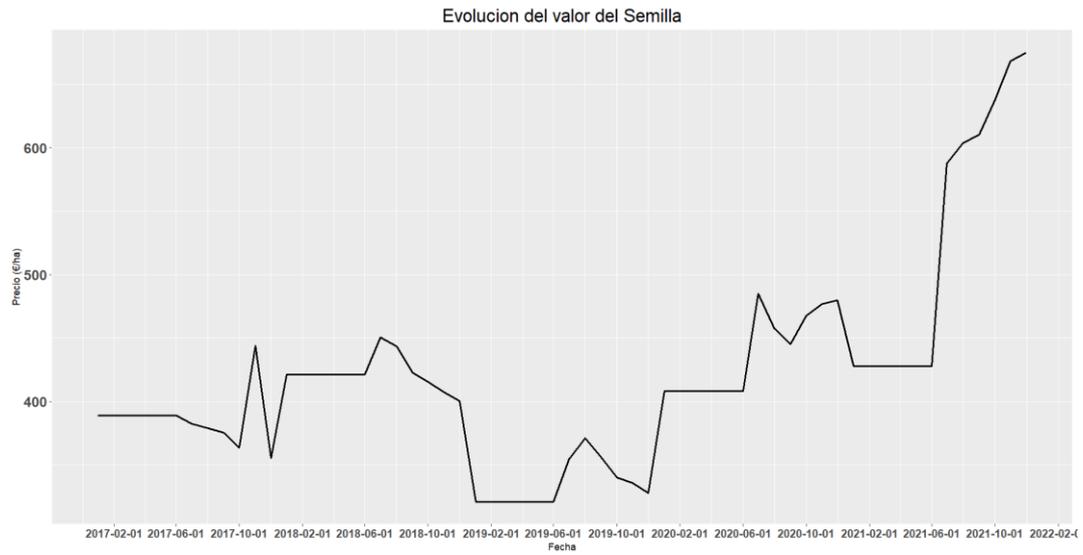


Figura A2.27: Gráfico evolución €/ha semilla

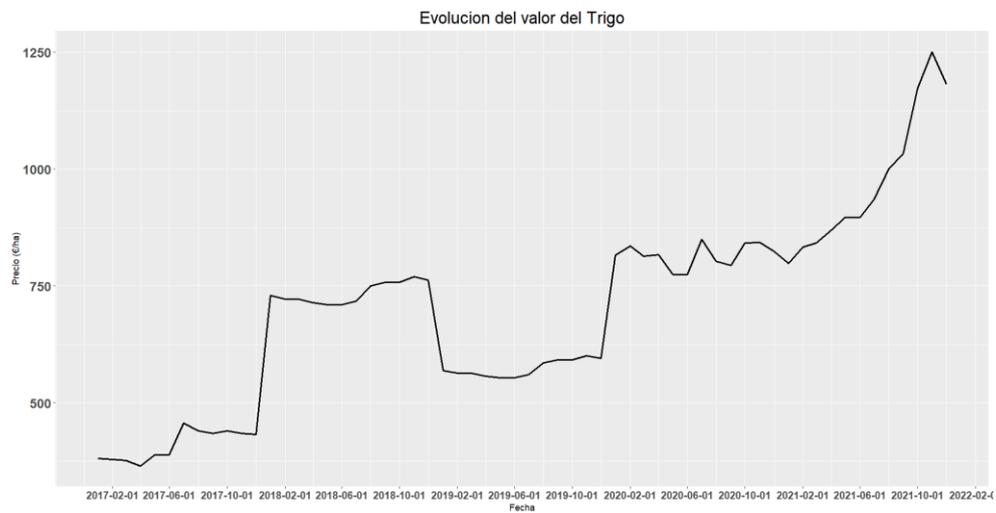


Figura A2.28: Gráfico evolución €/ha trigo

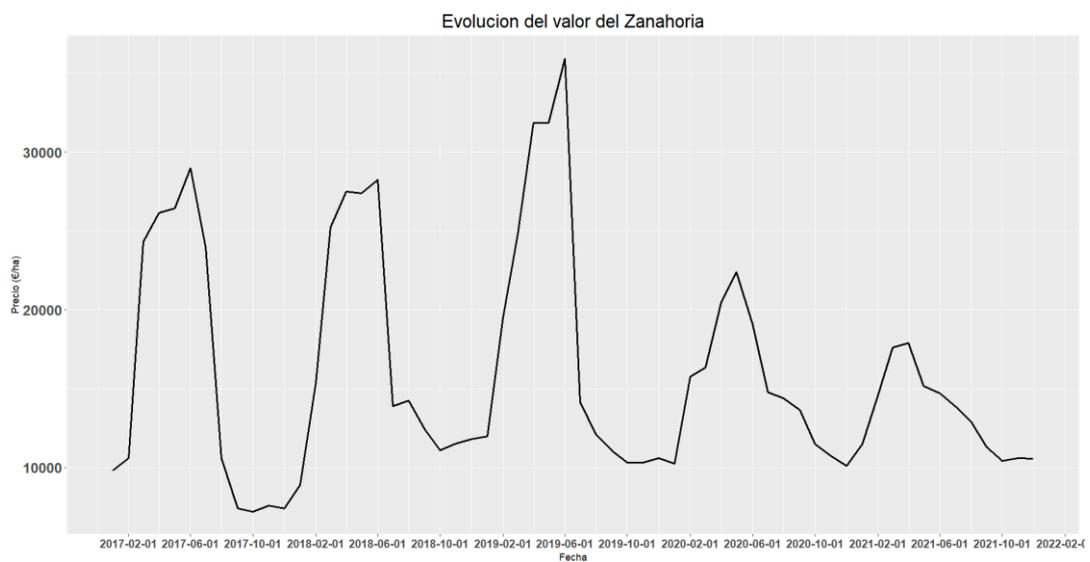


Figura A2.29: Gráfico evolución €/ha zanahoria

## 2.3. Retornos



Figura A2.30: Gráfico evolución rendimientos arroz

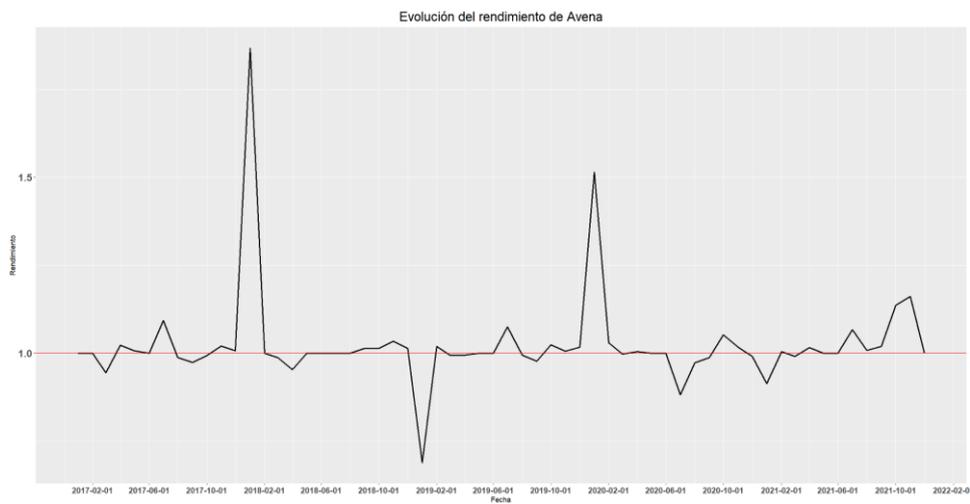


Figura A2.31: Gráfico evolución rendimientos avena

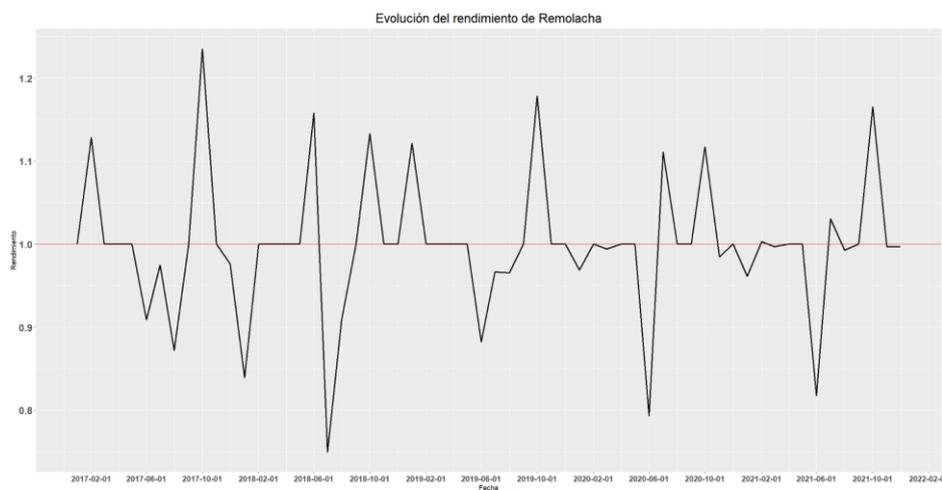


Figura A2.32: Gráfico evolución rendimientos remolacha

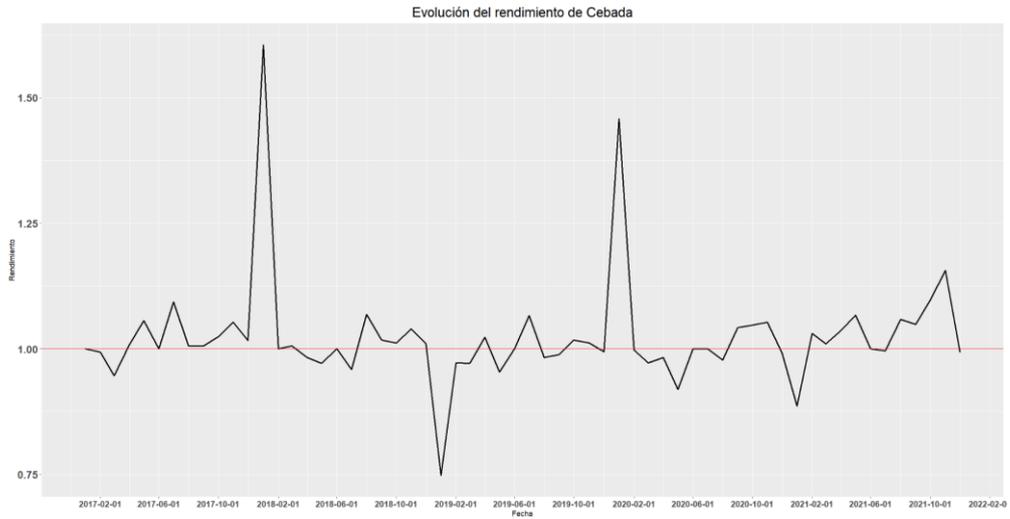


Figura A2.33: Gráfico evolución rendimientos cebada

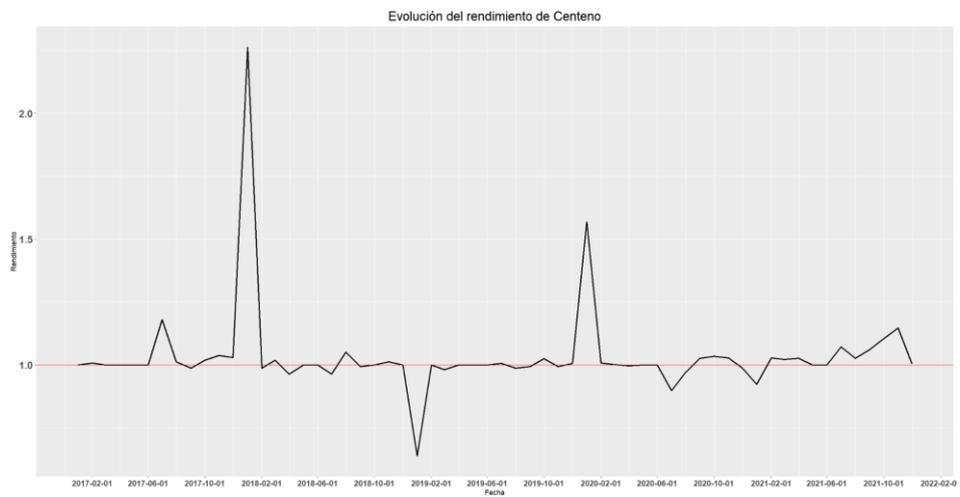


Figura A2.34: Gráfico evolución rendimientos centeno

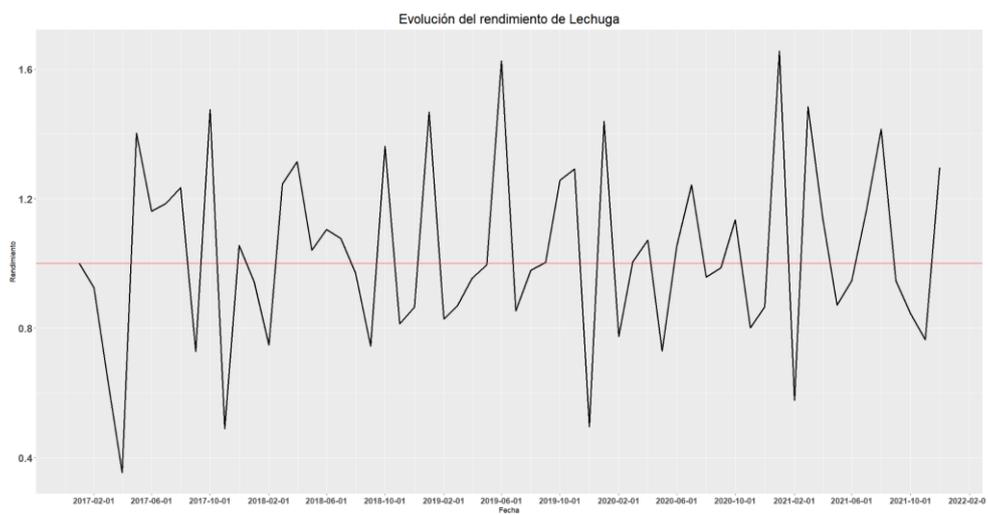


Figura A2.35: Gráfico evolución rendimientos lechuga

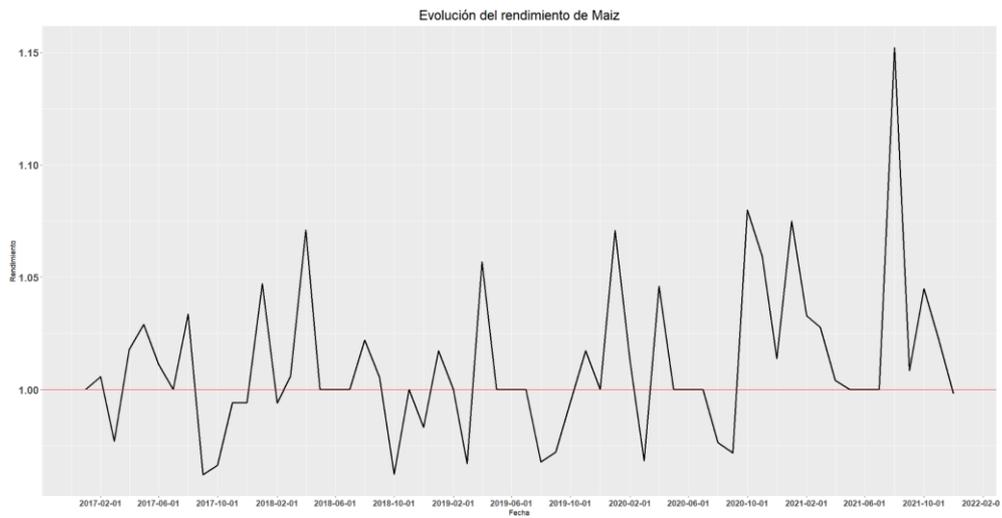


Figura A2.36: Gráfico evolución rendimientos maíz

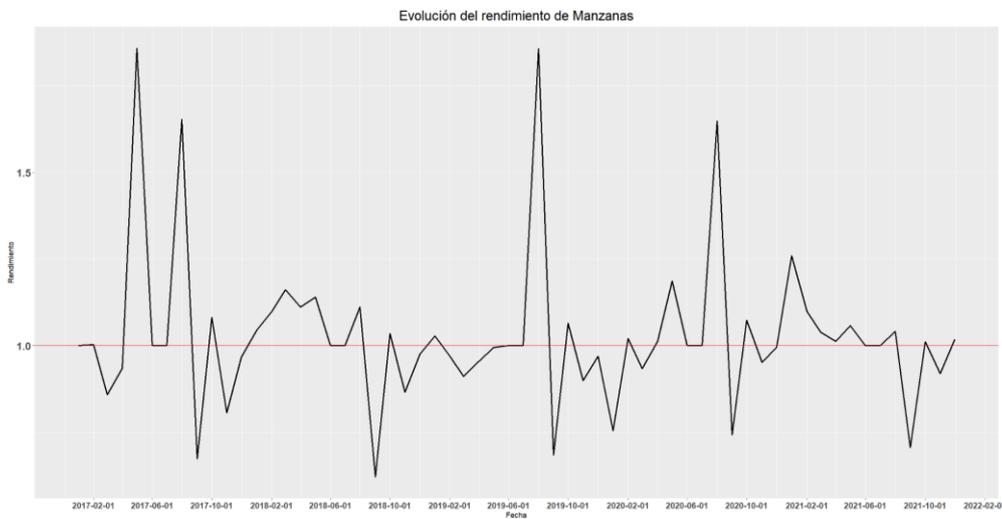


Figura A2.37: Gráfico evolución rendimientos manzanas

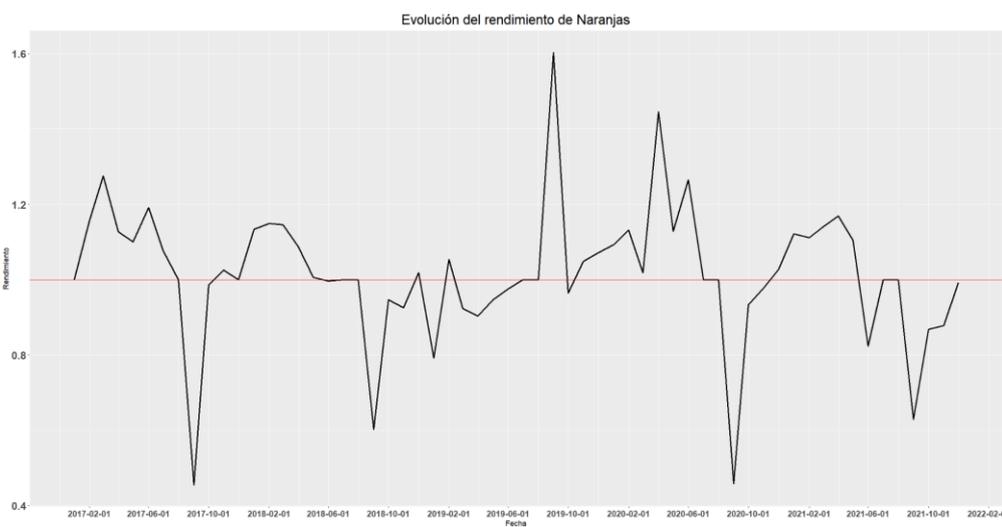


Figura A2.38: Gráfico evolución rendimientos naranjas

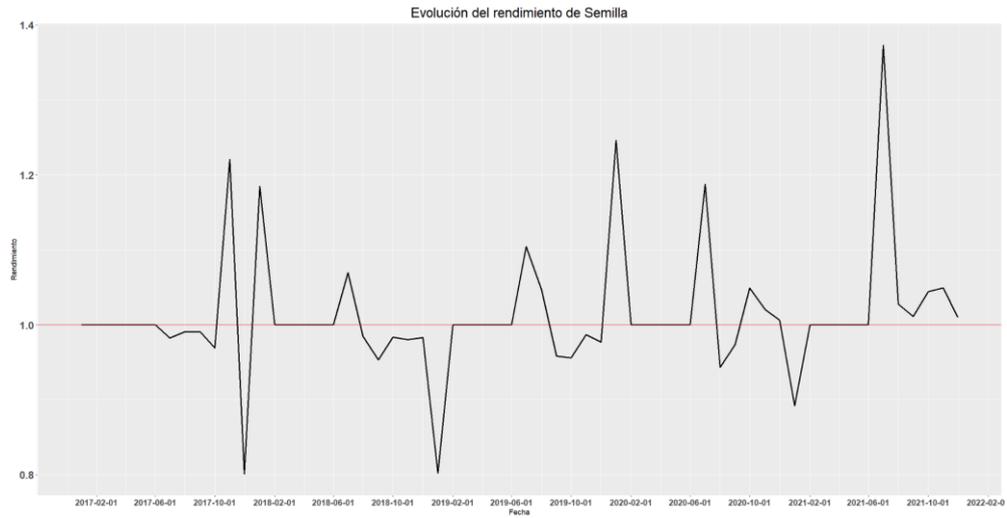


Figura A2.39: Gráfico evolución rendimientos semilla

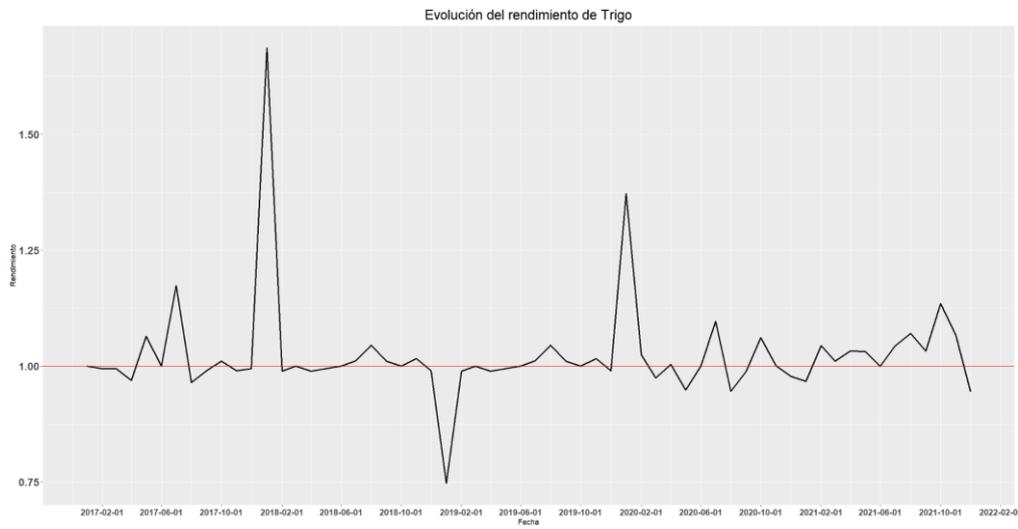


Figura A2.40: Gráfico evolución rendimientos trigo

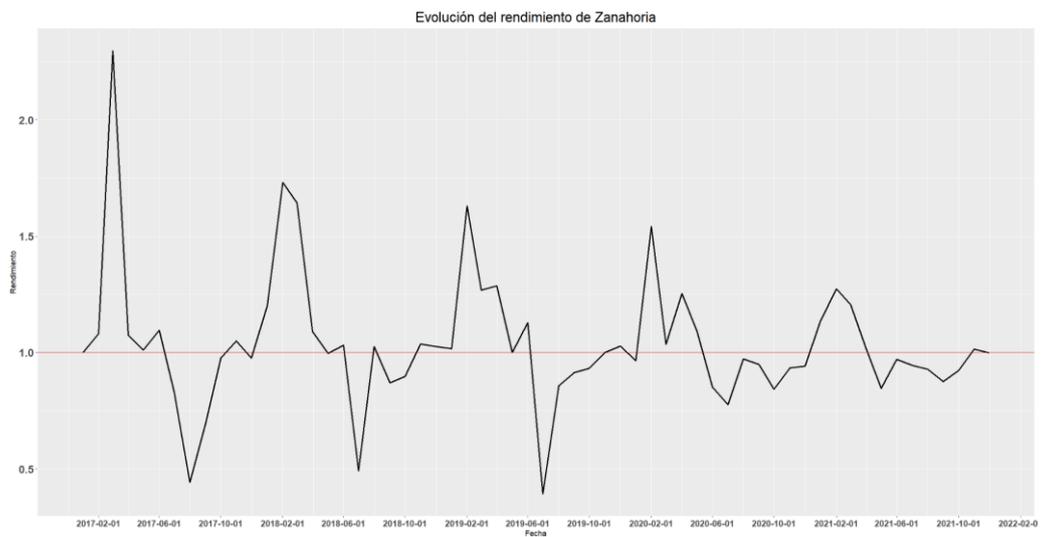


Figura A2.41: Gráfico evolución rendimientos zanahorias

### Anexo 3: Tablas resumen de los €/ton

	Min.	Mediana	Media	Max.
Arroz	278	314.00	317.97	406.4
Avena	136	160.50	166.03	256.8
Cebada	141	174.00	176.66	279.2
Centeno	132	164.00	165.66	256.6
Lechuga	151	258.00	283.13	751.0
Maiz	168	181.45	192.22	278.0
Manzanas	256	480.25	516.52	858.0
Naranjas	121	227.40	260.00	529.4
Remolacha	26	33.00	33.87	44.0
Semilla	288	321.00	337.97	554.5
Trigo	157	188.00	195.02	310.9
Zanahorias	119	238.45	274.80	624.0

Figura A3.42: Resumen €/ton







256	0.1844	0	0.1188	0.0021	0.0000	0.0000	0.5776	0.0034	0.0052	0.0960	0	0.0124	1.008819100283	0.0007535466519	0.376	250.0
257	0.1844	0	0.1189	0.0021	0.0000	0.0000	0.5776	0.0034	0.0052	0.0960	0	0.0124	1.008818558260	0.0007535443556	0.376	251.0
258	0.1844	0	0.1189	0.0021	0.0000	0.0000	0.5776	0.0034	0.0052	0.0960	0	0.0124	1.008818020540	0.000753542218	0.376	252.0
259	0.1844	0	0.1189	0.0021	0.0000	0.0000	0.5776	0.0034	0.0052	0.0960	0	0.0123	1.008817487070	0.000753540105	0.376	253.0
260	0.1844	0	0.1189	0.0021	0.0000	0.0000	0.5776	0.0034	0.0052	0.0960	0	0.0123	1.008816957801	0.000753538017	0.376	254.0
261	0.1845	0	0.1189	0.0021	0.0000	0.0000	0.5776	0.0033	0.0052	0.0960	0	0.0123	1.008816452883	0.000753535954	0.376	255.0
262	0.1845	0	0.1189	0.0021	0.0000	0.0000	0.5776	0.0033	0.0052	0.0960	0	0.0123	1.008815911668	0.0007535338915	0.376	256.0
263	0.1845	0	0.1189	0.0021	0.0000	0.0000	0.5776	0.0033	0.0052	0.0960	0	0.0123	1.008815394708	0.000753531829	0.376	257.0
264	0.1845	0	0.1189	0.0021	0.0000	0.0000	0.5776	0.0033	0.0052	0.0960	0	0.0123	1.008814881755	0.000753529907	0.376	258.0
265	0.1845	0	0.1189	0.0020	0.0000	0.0000	0.5776	0.0033	0.0052	0.0960	0	0.0123	1.008814372764	0.000753527938	0.376	259.0
266	0.1845	0	0.1189	0.0020	0.0000	0.0000	0.5775	0.0033	0.0052	0.0961	0	0.0123	1.008813867688	0.000753525992	0.376	260.0
267	0.1846	0	0.1189	0.0020	0.0000	0.0000	0.5775	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008813366482	0.000753524068	0.376	261.0
268	0.1846	0	0.1189	0.0020	0.0000	0.0000	0.5775	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008812869103	0.000753522166	0.376	262.0
269	0.1846	0	0.1189	0.0020	0.0000	0.0000	0.5775	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008812375506	0.000753520285	0.376	263.0
270	0.1846	0	0.1190	0.0020	0.0000	0.0000	0.5775	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008811885649	0.000753518426	0.376	264.0
271	0.1846	0	0.1190	0.0020	0.0000	0.0000	0.5775	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008811399489	0.000753516588	0.376	265.0
272	0.1847	0	0.1190	0.0020	0.0000	0.0000	0.5775	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008810916985	0.000753514771	0.376	266.0
273	0.1847	0	0.1190	0.0020	0.0000	0.0000	0.5775	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008810438095	0.000753512974	0.376	267.0
274	0.1847	0	0.1190	0.0020	0.0000	0.0000	0.5775	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008809962779	0.000753511197	0.376	268.0
275	0.1847	0	0.1190	0.0020	0.0000	0.0000	0.5775	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008809490997	0.000753509440	0.376	269.0
276	0.1847	0	0.1190	0.0019	0.0000	0.0000	0.5774	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008809022710	0.000753507702	0.376	270.0
277	0.1847	0	0.1190	0.0019	0.0000	0.0000	0.5774	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008808557880	0.000753505984	0.376	271.0
278	0.1848	0	0.1190	0.0019	0.0000	0.0000	0.5774	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008808096467	0.000753504284	0.376	272.0
279	0.1848	0	0.1190	0.0019	0.0000	0.0000	0.5774	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008807638435	0.000753502604	0.376	273.0
280	0.1848	0	0.1190	0.0019	0.0000	0.0000	0.5774	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008807183747	0.000753500941	0.375	274.0
281	0.1848	0	0.1190	0.0019	0.0000	0.0000	0.5774	0.0033	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008806732365	0.000753499297	0.375	275.0
282	0.1848	0	0.1190	0.0019	0.0000	0.0000	0.5774	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008806284827	0.000753497672	0.375	276.0
283	0.1848	0	0.1190	0.0019	0.0000	0.0000	0.5774	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008805839964	0.000753496063	0.375	277.0
284	0.1848	0	0.1190	0.0019	0.0000	0.0000	0.5774	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008805398302	0.000753494472	0.375	278.0
285	0.1849	0	0.1191	0.0019	0.0000	0.0000	0.5774	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008804959806	0.000753492897	0.375	279.0
286	0.1849	0	0.1191	0.0019	0.0000	0.0000	0.5774	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008804524443	0.000753491340	0.375	280.0
287	0.1849	0	0.1191	0.0019	0.0000	0.0000	0.5773	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0123	1.008804092177	0.000753489798	0.375	281.0
288	0.1849	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5773	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008803662978	0.000753488274	0.375	282.0
289	0.1849	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5773	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008803236812	0.000753486765	0.375	283.0
290	0.1849	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5773	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008802813647	0.000753485273	0.375	284.0
291	0.1850	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5773	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008802393451	0.000753483796	0.375	285.0
292	0.1850	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5773	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008801976194	0.000753482334	0.375	286.0
293	0.1850	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5773	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008801561845	0.000753480888	0.375	287.0
294	0.1850	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5773	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008801150373	0.000753479457	0.375	288.0
295	0.1850	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5773	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008800741749	0.000753478040	0.375	289.0
296	0.1850	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5773	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008800335943	0.000753476639	0.375	290.0
297	0.1850	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5773	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008799932925	0.000753475251	0.375	291.0
298	0.1851	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5773	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008799532669	0.000753473878	0.375	292.0
299	0.1851	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5772	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008799135144	0.000753472519	0.375	293.0
300	0.1851	0	0.1191	0.0018	0.0000	0.0000	0.5772	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008798740324	0.000753471174	0.375	294.0
301	0.1851	0	0.1191	0.0017	0.0000	0.0000	0.5772	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008798348180	0.000753469842	0.375	295.0
302	0.1851	0	0.1192	0.0017	0.0000	0.0000	0.5772	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008797958686	0.000753468524	0.375	296.0
303	0.1851	0	0.1192	0.0017	0.0000	0.0000	0.5772	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008797571815	0.000753467219	0.375	297.0
304	0.1851	0	0.1192	0.0017	0.0000	0.0000	0.5772	0.0032	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008797187540	0.000753465928	0.375	298.0
305	0.1851	0	0.1192	0.0017	0.0000	0.0000	0.5772	0.0031	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008796805836	0.000753464649	0.375	299.0
306	0.1852	0	0.1192	0.0017	0.0000	0.0000	0.5772	0.0031	0.0053	0.0961	0	0.0122	1.008796426676	0.000753463383	0.375	300.0
307	0.1868	0	0.1198	0.0000	0.0000	0.0000	0.5763	0.0027	0.0055	0.0962	0	0.0119	1.008751079442	0.000753342457	0.373	500.0
308	0.1870	0	0.1199	0.0000	0.0000	0.0000	0.5762	0.0026	0.0055	0.0962	0	0.0118	1.008744895496	0.000753330651	0.373	550.0

Figura A4.43: Tabla frontera eficiente modelo básico

# Índice figuras

Figura 2.1: RStudio .....	9
Figura 3.1: Frontera eficiente .....	18
Figura 4.1: Página web de los precios de la FAO .....	22
Figura 4.2: Salida de los datos.....	24
Figura 4.3: Cabecera datos precios.....	24
Figura 4.4: Página web de los rendimientos de la FAO .....	25
Figura 4.5: Cabecera datos rendimientos .....	25
Figura 5.1: Gráfica evolutiva (€/ton).....	28
Figura 5.2: Evolución del trigo en (€/ton) .....	28
Figura 5.3: Gráfica evolutiva (€/ha) .....	29
Figura 5.4: Resúmenes estadísticos (€/ha) .....	29
Figura 5.5: Gráfica de evolución de los retornos.....	30
Figura 5.6: Resumen estadístico de los rendimientos .....	31
Figura 5.7: Gráfico de barras de los rendimientos.....	31
Figura 5.8: Gráfico de barras de los riesgos .....	31
Figura 5.9: Nube de puntos de riesgos y rendimientos .....	32
Figura 5.10: Diagrama de cajas de los rendimientos.....	32
Figura 5.11: Matriz de correlaciones .....	33
Figura 6.1: Gráfico de la frontera eficiente .....	34
Figura 6.2: Gráfico de la composición de las carteras eficientes .....	35
Figura 6.3: Tabla frontera eficiente modelo básico.....	36
Figura 6.4: Composición cartera de máxima rentabilidad.....	37
Figura 6.5: Composición cartera de mínimo riesgo .....	37
Figura 6.6: Composición cartera de máximo ratio de Sharpe .....	38
Figura 6.7: Composición cartera equiponderada.....	38
Figura 6.8: Comparación de carteras .....	39
Figura 6.9: Gráfico de fronteras eficientes dados distintos p .....	40
Figura 6.10: Composición carteras de máxima rentabilidad .....	41
Figura 6.11: Composición carteras mínimo riesgo para los valores de p.....	42
Figura 6.12: Riesgo y rendimiento de las carteras de mínimo riesgo.....	42
Figura 6.13: Cartera de ratio de Sharpe $p=0.8$ .....	43
Figura 6.14: Cartera de ratio de Sharpe $p=0.5$ .....	43
Figura 6.15: Cartera de ratio de Sharpe $p=0.3$ .....	43
Figura 6.16: Gráfico de fronteras eficientes para distintos N.....	44
Figura 6.17: Composición carteras máximo ratio de Sharpe según parámetro N.....	45
Figura 6.18: Riesgos y rendimientos .....	45
Figura 6.19: Gráfico frontera eficiente .....	46
Figura 6.20: Gráfico de la composición de las carteras eficientes .....	47
Figura 6.21: Trigo en las carteras de la frontera eficiente .....	48
Figura 6.22: Maíz y avena en las carteras de la frontera eficiente .....	48
Figura 6.23: Centeno y cebada en las carteras de la frontera eficiente .....	49
Figura 6.24: Cartera de máxima rentabilidad .....	49
Figura 6.25: Cartera de mínimo riesgo.....	50
Figura 6.26: Cartera de máximo ratio de Sharpe.....	50
Figura 6.27: Gráfico de la frontera eficiente.....	51

Figura 6.28: Cartera de máximo ratio de Sharpe.....	52
Figura 6.29: Rendimiento y riesgo de la cartera de máximo ratio de Sharpe.....	52
Figura A1.1: Tabla rendimientos.....	55
Figura A1.2: Tabla rendimientos continuación.....	55
Figura A1.3: Tabla productividad.....	56
Figura A1.4: Tabla valor en €/ha.....	57
Figura A1.5: Tabla retornos.....	58
Figura A2.6: Gráfico evolutivo productividad arroz.....	59
Figura A2.7: Gráfico evolutivo productividad avena.....	59
Figura A2.8: Gráfico evolutivo productividad remolacha.....	59
Figura A2.9: Gráfico evolutivo productividad cebada.....	60
Figura A2.10: Gráfico evolutivo productividad centeno.....	60
Figura A2.11: Gráfico evolutivo productividad lechuga.....	60
Figura A2.12: Gráfico evolutivo productividad maíz.....	61
Figura A2.13: Gráfico evolutivo productividad manzanas.....	61
Figura A2.14: Gráfico evolutivo productividad naranjas.....	61
Figura A2.15: Gráfico evolutivo productividad semilla.....	62
Figura A2.16: Gráfico evolutivo productividad trigo.....	62
Figura A2.17: Gráfico evolutivo productividad zanahorias.....	62
Figura A2.18: Gráfico evolución €/ha arroz.....	63
Figura A2.19: Gráfico evolución €/ha avena.....	63
Figura A2.20: Gráfico evolución €/ha remolacha.....	63
Figura A2.21: Gráfico evolución €/ha cebada.....	64
Figura A2.22: Gráfico evolución €/ha centeno.....	64
Figura A2.23: Gráfico evolución €/ha lechuga.....	64
Figura A2.24: Gráfico evolución €/ha maiz.....	65
Figura A2.25: Gráfico evolución €/ha manzanas.....	65
Figura A2.26: Gráfico evolución €/ha naranjas.....	65
Figura A2.27: Gráfico evolución €/ha semilla.....	66
Figura A2.28: Gráfico evolución €/ha trigo.....	66
Figura A2.29: Gráfico evolución €/ha zanahoria.....	66
Figura A2.30: Gráfico evolución rendimientos arroz.....	67
Figura A2.31: Gráfico evolución rendimientos avena.....	67
Figura A2.32: Gráfico evolución rendimientos remolacha.....	67
Figura A2.33: Gráfico evolución rendimientos cebada.....	68
Figura A2.34: Gráfico evolución rendimientos centeno.....	68
Figura A2.35: Gráfico evolución rendimientos lechuga.....	68
Figura A2.36: Gráfico evolución rendimientos maíz.....	69
Figura A2.37: Gráfico evolución rendimientos manzanas.....	69
Figura A2.38: Gráfico evolución rendimientos naranjas.....	69
Figura A2.39: Gráfico evolución rendimientos semilla.....	70
Figura A2.40: Gráfico evolución rendimientos trigo.....	70
Figura A2.41: Gráfico evolución rendimientos zanahorias.....	70
Figura A3.42: Resumen €/ton.....	71
Figura A4.43: Tabla frontera eficiente modelo básico.....	75

# Bibliografía

- <sup>1</sup> Calavia Rogel, Miriam (2022). “Una aplicación con tecnología ‘blockchain’ para optimizar cultivos”.  
[https://cincodias.elpais.com/cincodias/2022/05/13/companias/1652440777\\_793106.html](https://cincodias.elpais.com/cincodias/2022/05/13/companias/1652440777_793106.html)  
El País.
- <sup>2</sup> “Harry Markowitz”. [https://es.wikipedia.org/wiki/Harry\\_Markowitz](https://es.wikipedia.org/wiki/Harry_Markowitz). Wikipedia.
- <sup>3</sup> Markowitz, Harry (1952). “Portfolio Selection”.  
<https://www.jstor.org/stable/2975974>. JSTOR.
- <sup>4</sup> “William F. Sharpe”. [https://en.wikipedia.org/wiki/William\\_F.\\_Sharpe](https://en.wikipedia.org/wiki/William_F._Sharpe). Wikipedia.
- <sup>5</sup> “John Lintner”. [https://en.wikipedia.org/wiki/John\\_Lintner](https://en.wikipedia.org/wiki/John_Lintner). Wikipedia.
- <sup>6</sup> Markowitz, Harry (1999). “The Early History of Portfolio Theory:1600-1960”.  
[https://www.jstor.org/stable/4480178?searchText=portfolio%20theory%20markowitz&searchUri=%2Faction%2FdoBasicSearch%3FQuery%3Dportfolio%2Btheory%2Bmarkowitz&ab\\_segments=0%2Fbasic\\_search\\_gsv2%2Fcontrol&refreqid=fastly-default%3A37fa1f6bf31b94b3b2e7c69136ca9f82](https://www.jstor.org/stable/4480178?searchText=portfolio%20theory%20markowitz&searchUri=%2Faction%2FdoBasicSearch%3FQuery%3Dportfolio%2Btheory%2Bmarkowitz&ab_segments=0%2Fbasic_search_gsv2%2Fcontrol&refreqid=fastly-default%3A37fa1f6bf31b94b3b2e7c69136ca9f82). JSTOR.
- <sup>7</sup> Moreno, Ricardo (1990). “Tres estadounidenses reciben el Premio Nobel de Economía por sus trabajos sobre teoría financiera”.  
[https://elpais.com/diario/1990/10/17/economia/656118012\\_850215.html](https://elpais.com/diario/1990/10/17/economia/656118012_850215.html). El País.
- <sup>8</sup> Westreicher, Guillermo (2021). “Programación no lineal”.  
<https://economipedia.com/definiciones/programacion-no-lineal.html#:~:text=La%20programaci%C3%B3n%20no%20lineal%20es,restricciones%2C%20pueden%20ser%20no%20lineales>. Economipedia.
- <sup>9</sup> Martín, Isabel (2013). “Optimización de carteras de inversión”.  
<https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/3509/TFG-G262.pdf?sequence=6&isAllowed=y>. UVaDOC.
- <sup>10</sup> López, Paula (2015). “Estrategias eficientes de inversión y gestión del riesgo en mercados bursátiles”. <https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/13515/TFG-G1162.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. UVaDOC.
- <sup>11</sup> (2019). “Lenguaje R, ¿qué es y por qué es tan usado en Big Data?”.  
<https://www.unir.net/ingenieria/revista/lenguaje-r-big-data/>. La universidad de internet.
- <sup>12</sup> León, Esmeralda (2021). “Te contamos qué es el Lenguaje R”.  
<https://www.baoss.es/te-contamos-que-es-el-lenguaje-r/#:~:text=El%20R%20es%20un%20lenguaje,objetivo%20espec%C3%ADfico%20en%20cada%20caso>. Baos. Analytics Everywhere.
- <sup>13</sup> “RStudio”.  
<https://es.wikipedia.org/wiki/RStudio#:~:text=RStudio%20es%20un%20entorno%20de,gesti%C3%B3n%20del%20espacio%20de%20trabajo>. Wikipedia.

- 
- <sup>14</sup> “AMPL”. <https://es.wikipedia.org/wiki/AMPL>. Wikipedia.
- <sup>15</sup> “Agricultura de secano”. [https://es.wikipedia.org/wiki/Agricultura\\_de\\_secano](https://es.wikipedia.org/wiki/Agricultura_de_secano). Wikipedia.
- <sup>16</sup> (2021). “Agricultura de regadío características y diferencia con la agricultura de secano”. <https://rkd.es/blog/agricultura-de-regadio/#:~:text=Diferencia%20entre%20la%20Agricultura%20de%20Regad%C3%ADo%20y%20de%20Secano,-El%20tipo%20de&text=El%20sistema%20m%C3%A1s%20utilizado%20es,un%20rieg o%20programado%20y%20sistematizado>. RKD PIVOT.
- <sup>17</sup> “Agricultura ecológica”. [https://es.wikipedia.org/wiki/Agricultura\\_ecol%C3%B3gica](https://es.wikipedia.org/wiki/Agricultura_ecol%C3%B3gica). Wikipedia.
- <sup>18</sup> “La agricultura sostenible: herramienta clave contra el hambre y el cambio climático”. <https://www.bbva.com/es/sostenibilidad/la-agricultura-sostenible-herramienta-clave-contr-a-el-hambre-y-el-cambio-climatico/>. BBVA.
- <sup>19</sup> Aparicio Martín, Sara (2019). “Optimización de cultivos hortícolas de invernaderos”. Bachillerato de excelencia.
- <sup>20</sup> González Martínez, Luis (2019). “Optimización del riesgo en carteras de inversión”. Universidad politécnica de Madrid.
- <sup>21</sup> Vanderbei, Robert J. (1997). “Linear Programming Foundations and Extensions”. Second Edition. Kluwer A.P.
- <sup>22</sup> (2021). “¿Qué son las variables semicontinuas?” <https://www.ibm.com/docs/es/icos/12.9.0?topic=example-what-are-semi-continuous-variables>. IBM.
- <sup>23</sup> “Pregúntale a la FAO”. <https://www.fao.org/get-involved/ask-fao/es/>. FAO.
- <sup>24</sup> “Monocotyledoneae”. <https://es.wikipedia.org/wiki/Monocotyledoneae>. Wikipedia.
- <sup>25</sup> (2022). “El modelo CAMP: ¿Cómo calcular la tasa de retorno de un activo financiero?”. <https://www.unir.net/empresa/revista/modelo-capm/>. La Universidad de Internet.
- <sup>26</sup> Almenara Juste, Carlos (2020). “Modelo de valoración de activos financieros” <https://economipedia.com/definiciones/modelo-valoracion-activos-financieros-capm.html>. Economipedia.