



---

**Universidad de Valladolid**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Matemáticas**

**GRAFOS TRAZADOS EN SUPERFICIES**

**Autora: CARMEN MARTÍNEZ ROMÁN**

**Tutor: ANTONIO CAMPILLO LÓPEZ**

**2022-2023**

# Índice

<b>1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS</b>	<b>5</b>
1.1. Grafos de Euler . . . . .	8
1.2. Grafos de Hamilton . . . . .	10
<b>2. CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES COMPACTAS</b>	<b>15</b>
2.1. Variedades topológicas . . . . .	15
2.2. Superficies topológicas . . . . .	15
2.3. Poliedros topológicos bidimensionales y triangulaciones . . . . .	16
2.3.1. Cálculo de la característica de Euler y el carácter de orientabilidad . . . . .	18
2.4. El Teorema de Radó . . . . .	19
2.4.1. Superficies compactas y esquemas binarios puros . . . . .	19
2.5. Cirugía topológica con esquemas binarios puros . . . . .	20
2.5.1. Clasificación de los esquemas binarios puros . . . . .	21
2.6. Clasificación de superficies compactas . . . . .	24
2.6.1. Suma conexa de superficies . . . . .	25
<b>3. INMERSIÓN DE GRAFOS EN SUPERFICIES</b>	<b>27</b>
3.1. Bandas de descomposición . . . . .	27
3.1.1. Descomposición en bandas para superficies . . . . .	27
3.1.2. Orientabilidad de la descomposición en bandas . . . . .	28
3.1.3. Sistemas de rotación . . . . .	29
3.1.4. Algoritmo de trazado de caras . . . . .	30
3.2. Géneros de un grafo inmerso . . . . .	31
<b>4. INMERSIÓN DE GRAFOS EN SUPERFICIES ORIENTABLES</b>	<b>38</b>
4.1. Grafos planos . . . . .	38
4.2. Grafos toroidales . . . . .	41
4.3. Grafos toroidales para $p \geq 2$ . . . . .	43
<b>5. INMERSIÓN DE GRAFOS EN SUPERFICIES NO ORIENTABLES</b>	<b>46</b>
5.1. Grafos proyectivos . . . . .	46
5.2. Teoremas de estructura en grafos . . . . .	48
5.3. Grafos dos-proyectivos . . . . .	50

# INTRODUCCIÓN

Este trabajo está dedicado al trazado de grafos en superficies topológicas compactas, en concreto a las llamadas inmersiones celulares. No se tratarán, aunque también tienen interés, el trazado de grafos en superficies sin exigir que sean celulares, es decir sin pedir que sus caras o componentes conexas del complementario sean homeomorfas a discos abiertos.

Dichas inmersiones disponen de la fórmula de Euler aplicada a cada superficie. Es decir, todo grafo inmerso celularmente en una superficie  $S$  debe cumplir que  $v - a + c = \chi(S)$ .

Como es bien sabido, las superficies topológicas compactas están totalmente clasificadas, este resultado afirma que toda superficie  $S$  es homeomorfa a una y solo una de las siguientes superficies, o bien es un toro con  $p \geq 0$  asas o bien es una suma conexa de  $p \geq 1$  planos proyectivos, según sea orientable o no orientable, respectivamente.

La esfera aparece en esta clasificación como un toro con 0 asas y el plano proyectivo como la superficie no orientable con  $p = 1$ .

Todos los grafos que se puede trazar en la esfera se llaman grafos planos (o esféricos) y sus correspondientes inmersiones son siempre celulares.

Sin embargo, para las otras superficies no todos los grafos que se pueden trazar sobre ellas (es decir, dibujándolos sin intersección de sus aristas en punto que no sean vértices) no son necesariamente inmersiones celulares.

Por ejemplo, el grafo triangular  $K_3$  en un toro  $\mathbb{T}$ . Situando sus vértices en uno de los meridianos, vemos que la única cara corresponde a un cilindro abierto, que no es homeomorfo a un disco abierto.

En este trabajo consideramos algunos de los problemas y resultados de las inmersiones de grafos en superficies orientables y no orientables, distinguiendo un caso del otro.

Este estudio se basa principalmente en la noción de género de un grafo. Existen varios géneros para un grafo  $G$ . En este texto nos hemos centrado en dos de ellos:

Por una parte, el género aritmético  $\beta(G)$  del grafo  $G$ , definido como  $a - v + 1$ . Este concepto no solo se utiliza en Topología Combinatoria sino también en Geometría Combinatoria, en concreto en el Teorema de Riemann-Roch para grafos.

Y por otra parte, el género topológico orientable  $\gamma(G)$  se define en la literatura como el mínimo valor de  $p$  tal que existe una inmersión en un toro con  $p$  asas. Análogamente, el género topológico no orientable  $\bar{\gamma}(G)$  se considera el mínimo entero  $p$  tal que existe una inmersión en la suma conexa de  $p$  planos proyectivos. No obstante en este texto, no solo tendremos en cuenta tal mínimo sino que consideraremos el rango de los valores de  $p$  para los que existe la inmersión (orientable o no orientable) de un grafo  $G$ .

Los teoremas de Duke y de Stahl prueban que dicho rango son los puntos enteros de un intervalo  $[\gamma(G), \gamma_M(G)]$  en el caso orientable y  $[\bar{\gamma}(G), \bar{\gamma}_M(G)]$  en el caso no orientable.

La búsqueda de estos géneros es un problema NP-completo. Las cotas relativas al género topológico máximo,  $\gamma_M(G)$  y  $\bar{\gamma}_M(G)$  vienen de relacionar dichos géneros con el género aritmético  $\beta(G)$ , mientras que el cálculo de las cotas para el género mínimo se complica y es necesario calcularlo para cada grafo en particular.

Como resultados centrales de este trabajo se propone determinar los intervalos para algunos grafos completos y grafos bipartitos completos, expresando visualmente una posible inmersión en las superficies con género perteneciente al rango de género topológico de estos grafos.

Pondremos especial énfasis en los casos de  $K_{3,3}$  y  $K_5$  ya que son los grafos prohibidos en las caracterizaciones de Kuratowski y Wagner de los grafos planos.

En el Capítulo 1 se dan conceptos introductorios a la Teoría de Grafos, su origen histórico y aplicaciones.

En el Capítulo 2 revisamos el Teorema de Clasificación de superficies viendo toda superficie como un polígono, que llamaremos polígono fundamental, y su correspondiente esquema. Probaremos que todo esquema es equivalente o bien a un esquema propio de una superficie orientable o bien a uno de una superficie no orientable.

El Capítulo 3 se dedicará a las inmersiones celulares en una superficie arbitraria poniendo énfasis en la fórmula de Euler. Dotando a cada grafo de una estructura combinatorio podemos obtener topológicamente la superficie, utilizando la teoría de descomposición en bandas.

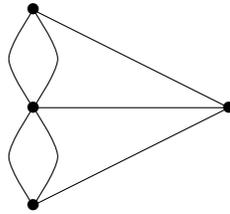
También se define el género aritmético y los géneros topológicos demostrando que los rangos son intervalos de enteros.

Los Capítulos 4 y 5 están dedicados a la descripción explícita de los rangos para los grafos completos y bipartitos completos para superficies de géneros pequeños, 0, 1, 2 y 3, mostrando las inmersiones de numerosos ejemplos significativos.

En el Capítulo 5 incluimos también una sección, que expone la actualidad de la localización de las familias de grafos prohibidos en los sentidos de Kuratowski y Wagner para grafos inmersos en superficies de género positivo.

# 1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

El origen de la Teoría de Grafos se remonta al siglo XVIII, a Leonhard Euler y a la ciudad de Königsberg, Prusia. Por el centro de esta ciudad pasaba un río que dividía el centro en 4 zonas, para pasar de una a otra había en total siete puentes que conectaban la ciudad. Surgió la pregunta de si sería posible recorrer las cuatro zonas pasando una única vez por cada puente y regresar a la zona de partida. El matemático Leonhard Euler que por ese entonces trabajaba en la Academia Prusiana de las Ciencias, representó cada una de las cuatro zonas por un punto y los puentes como segmentos que unen estos puntos al igual que los puentes conectaban las zonas, obteniendo el siguiente grafo:



En este primer capítulo haremos una breve introducción a esta teoría con los conceptos más importantes y una recopilación de resultados relevantes.

**Definición 1.0.1.** Definimos un grafo  $G$  como un par  $(V, A)$  donde  $V$  es un conjunto finito cuyos elementos se denominan vértices, y  $A$  es un conjunto finito cuyos elementos se denominan aristas.

Cada  $a \in A$  se define como un par  $(v_i, v_j)$  de elementos de  $V$ . Se dice que la arista  $a$  incide en los vértices  $v_i$  y  $v_j$  y que estos dos vértices son adyacentes.

Si  $a = (v_i, v_i)$  diremos que  $a$  es un bucle.

Supondremos, a lo largo de la memoria, que  $G$  no tiene aristas múltiples entre dos vértices.

**Definición 1.0.2.** Si un grafo  $G$  no tiene bucles diremos que es un grafo simple.

**Definición 1.0.3.** Un subgrafo  $G'$  de un grafo  $G = (V, A)$  es cualquier grafo que tenga como conjunto de vértices  $V'$  a un subconjunto de  $V$  y como conjunto de aristas  $A'$  a un subconjunto de  $A$ .

**Definición 1.0.4.** Al número de aristas que inciden en un vértice  $v$  se denominan grado del vértice  $v$  y lo denotaremos como  $gr(v)$ . Denotaremos por  $V_i$  al número de vértices de un grafo  $G$  con grado  $i$ .

El mínimo grado de todos los vértices de  $G$  se representa por  $\delta(G)$  y el máximo grado por  $\Delta(G)$ .

Dado un grafo  $G = (V, A)$  cualquiera denotaremos por  $v$  al número de vértices de dicho grafo y por  $a$  al número de aristas de dicho grafo. Como los conjuntos  $V$  y  $A$  son finitos entonces  $v$  y  $a$  también lo son. Además el valor de los posibles grados de los vértices de  $G$  está acotado por el número de aristas  $a$ , ya que como máximo podrán incidir todas las aristas en un mismo vértice.

**Teorema 1.0.5** (Teorema del apretón de manos). Sea  $G$  un grafo cualquiera se cumple que

$$\sum_{i=1}^a iV_i = 2a.$$

*Demostración.* Para demostrar el teorema basta con darnos cuenta de que  $iV_i$  es el número de aristas que incide en los vértices que pertenecen a  $V_i$  por lo que  $\sum_{i=1}^a iV_i$  es el número de aristas que inciden en todos los vértices del grafo.

Notese que estamos contando dos veces cada arista, pues cada arista incide en dos vértices.

Por lo que  $\sum_{i=1}^a iV_i = 2a$  como se quería demostrar.  $\square$

**Definición 1.0.6.** Sea  $G$  un grafo. Un camino de longitud  $n$  es una sucesión de vértices tal que entre dos vértices seguidos existe una arista que los une. Llamaremos extremos de un camino al primer y último elemento que aparece en la sucesión.

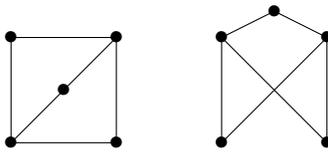
Un camino sin aristas repetidas lo denominaremos recorrido y a un camino donde coincidan los extremos lo llamaremos un camino cerrado.

Un circuito es un recorrido y un camino cerrado.

**Definición 1.0.7.** Un grafo  $G$  es conexo si para dos vértices cualesquiera existe un camino que los une. Denotaremos por  $\omega(G)$  al número de componentes conexas.

**Definición 1.0.8.** Un isomorfismo entre dos grafos es una biyección entre sus respectivos conjuntos de vértices y otra biyección entre sus respectivos conjuntos de aristas, de tal forma que los extremos de la imagen de cada arista sean las imágenes de los extremos de dicha arista.

**Ejemplo 1.0.9.** Las dos representaciones siguientes son isomorfas:

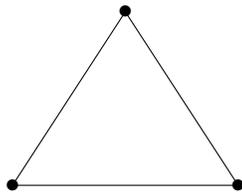


## Tipos de grafos

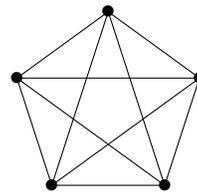
Un grafo puede tener el número de vértices o de aristas que se quiera. Es por eso que los grafos no están clasificados. Pero existen algunos tipos de grafos que se ha agrupado y resulta más sencillo su estudio.

**Definición 1.0.10.** Un grafo regular de grado  $p$  es un grafo tal que todos sus vértices tienen grado  $p$ .

**Definición 1.0.11.** Un grafo completo de  $n$  vértices es un grafo tal que dados dos vértices distintos existe una arista que los une. Lo denotaremos como  $K_n$ .



$K_3$



$K_5$

**Proposición 1.0.12.** Dado un grafo completo  $K_n$ , el número de aristas  $a$  es exactamente  $\binom{n}{2}$ .

*Demostración.* Un grafo completo  $K_n$  puede ser visto como un grafo regular de grado  $n - 1$ . Entonces  $V_{n-1} = n$  y para el resto de valores de  $i$   $V_i = 0$  y por el teorema 1.0.5 se tiene que

$$n \cdot (n - 1) = 2a, \text{ es decir, } a = \frac{n \cdot (n - 1)}{2} = \binom{n}{2}$$

□

**Definición 1.0.13.** Sea  $G = (V, A)$  un grafo. Se dice que  $G$  es bipartito si podemos descomponer  $V$  en dos conjuntos disjuntos  $V_1$  y  $V_2$  de forma que toda arista pasa por un elemento de  $V_1$  y por un elemento de  $V_2$ .

Un grafo se dice bipartito completo si para cada  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2$  existe una única arista que los une. Sea  $n = |V_1|$  y  $m = |V_2|$  entonces denotaremos al grafo bipartito completo por  $K_{n,m}$ .

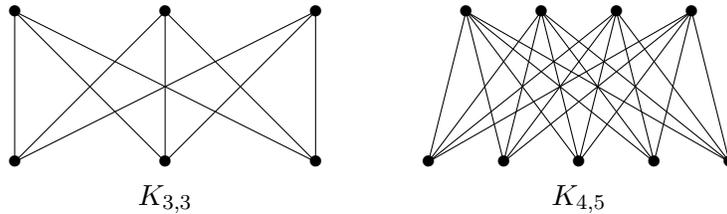
**Proposición 1.0.14.** Dado un grafo bipartito completo  $K_{n,m}$ , el número de aristas  $a$  es exactamente  $nm$ .

*Demostración.* En un grafo bipartito con dos conjuntos disjuntos de  $n$  y  $m$  de vértices, hay  $n$  vértices de grado  $m$  y  $m$  vértices de grado  $n$ . Por el Teorema del apretón de manos tenemos que

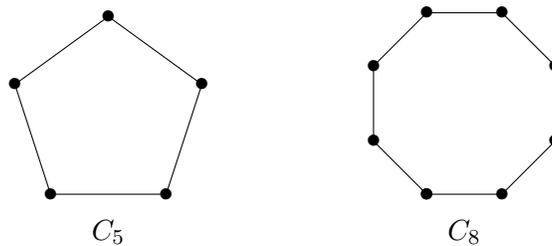
$$nm + mn = 2a.$$

$$nm = a.$$

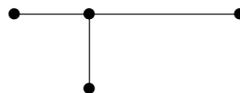
□



**Definición 1.0.15.** Un grafo cíclico  $C_n$  consiste en un solo circuito de vértices y aristas.



**Definición 1.0.16.** Un árbol es un grafo conexo que no contiene circuitos.



**Definición 1.0.17.** Un árbol generador de un grafo es un subgrafo árbol del mismo que contiene a todos los vértices.

**Teorema 1.0.18.** Sea  $G$  un grafo conexo y simple con  $v$  vértices. Entonces  $G$  es un árbol si y solo si tiene  $v - 1$  aristas.

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Supongamos  $G$  un grafo árbol, veamos que  $a = v - 1$ .

Razonemos por inducción sobre  $v$ .

Si  $v = 1$  entonces  $a = 0$ .

Si  $v = 2$  entonces  $a = 1$  pues  $G$  es simple.

Supongamos que para cualquier árbol con  $v \leq k$  vértices,  $a = v - 1$  y tomemos un árbol con  $v = k + 1$  vértices.

Podemos eliminar una arista que separa al grafo  $G$  en dos componentes conexas,  $G_1$  y  $G_2$  con  $v_1$  y  $v_2$  vértices respectivamente. Además cumplen que  $v_1, v_2 \leq k$  y  $v_1 + v_2 = k + 1$ .

Por hipótesis de inducción  $a_1 = v_1 - 1$  y  $a_2 = v_2 - 1$ .

Entonces

$$a = a_1 + a_2 + 1 = v_1 - 1 + v_2 - 1 + 1 = k = v - 1$$

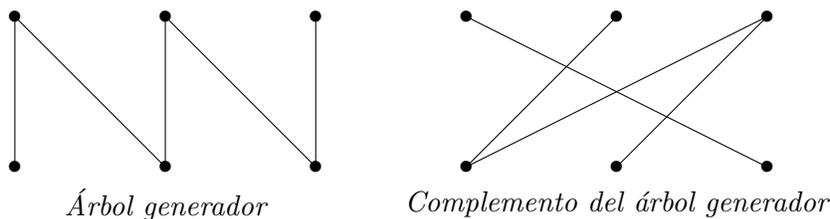
⇐ Supongamos que tenemos un grafo conexo  $G$  con  $v$  vértices y  $v - 1$  aristas. Si  $G$  no fuese un árbol, podríamos obtener un árbol generador quitando lados, lo que nos daría un árbol con  $v$  vértices y menos de  $v - 1$  lados, lo cual es imposible.

□

**Definición 1.0.19.** Una cuerda o un pétalo de un árbol generador es una arista del grafo que no está en el árbol. El conjunto de cuerdas de un árbol se conoce como el complemento del árbol.

**Nota 1.0.20.** Para un grafo conexo con  $a$  aristas y  $v$  vértices existen  $v - 1$  aristas en cualquier árbol generador. Entonces, para cualquier árbol generador, existen  $a - v + 1$  cuerdas.

**Ejemplo 1.0.21.** Estos son un árbol generador de  $K_{3,3}$  y su complemento.  $K_{3,3}$  tiene 9 aristas y 6 vértices, por lo que tiene 4 pétalos.



## 1.1. Grafos de Euler

**Definición 1.1.1.** Sea  $G$  un grafo conexo. Llamaremos recorrido de Euler a un recorrido del grafo  $G$  que pasa por todas sus aristas.

Si  $G$  tiene un recorrido de Euler abierto, es decir, los extremos del recorrido no son el mismo vértice, diremos que  $G$  es un grafo semi-euleriano.

Si  $G$  tiene un recorrido de Euler cerrado, es decir, coinciden los extremos del recorrido, diremos que  $G$  es un grafo de Euler.

Este es precisamente el problema de los puentes de Königsberg, pasar por todos los puentes solo una vez es precisamente un recorrido de Euler y empezar y acabar en la misma orilla del río es encontrar el recorrido de Euler cerrado.

Los siguientes resultados nos permiten caracterizar un grafo  $G$  dado para saber si existe dicho recorrido sin necesidad de construirlo.

**Teorema 1.1.2.** Un grafo  $G$  es un grafo de Euler si, y solo si, todos los vértices tienen grado par.

*Demostración.* ⇒ Si  $G$  es euleriano, es decir, existe un camino cerrado que recorre todas las aristas de  $G$ . Este camino llega a cada vértice tantas veces como sale de él y lo hace cada vez utilizando una arista diferentes de las que inciden en él. Por lo que el vértice tiene que ser de grado par.

⇐ Si todos los vértices tienen grado par entonces podemos encontrar el camino de Euler siguiendo el siguiente algoritmo.

Comenzando en cualquier vértice y con cualquier arista que incida en él vamos recorriendo el grafo utilizando siempre una arista no utilizada. Entonces, antes de pasar por un vértice distinto del primero el circuito habrá pasado un número par de veces por dicho vértice. Por lo que si llegamos allí por una arista no utilizada debe existir otra para salir ya que todos los vértices tienen grado par.

Si se llegase al vértice inicial sin haber utilizado todas las aristas, se podrá continuar comenzando en cualquier otro vértice del circuito ya construido que tenga aristas sin utilizar, hasta agotarlas todas.

□

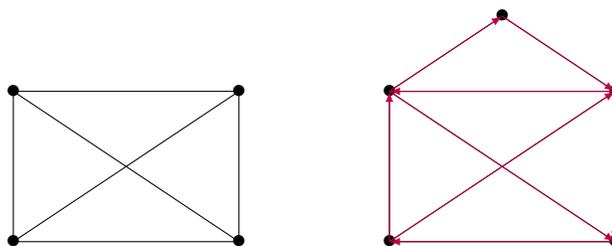
**Teorema 1.1.3.** *Un grafo  $G$  es un grafo semi-euleriano si, y solo si,  $G$  tiene exactamente dos vértices de grado impar.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Sea  $G$  un grafo semi-euleriano, es decir  $G$  contiene un recorrido euleriano con vértices  $u, v$  diferentes como extremos. Si añadimos al grafo  $G$  la arista  $e = (u, v)$  el grafo resultante  $G'$  será euleriano. Por el Teorema 1.1.2 todas los vértices de  $G'$  tienen grado par. Si eliminamos la arista  $e$  del grafo  $G'$  solo se modifican el  $gr(u)$  y el  $gr(v)$  que se reduce en uno. Por ello todos los vértices de  $G$  tienen grado par excepto dos que son los extremos que su grado es impar.

$\Leftarrow$  Si un grafo  $G$  tiene exactamente dos vértices de grado impar,  $u$  y  $v$ , y añadimos una arista  $e = (u, v)$  obtenemos un grafo  $G'$  con todos sus vértices de grado par y por el Teorema 1.1.2  $G'$  es euleriano con un recorrido de Euler. Eliminando la arista  $e$  nos queda un recorrido de Euler abierto contenido en  $G$  por lo que  $G$  es semi-euleriano. □

**Ejemplo 1.1.4.** *En los siguientes ejemplos se muestra la aplicación de los dos teoremas demostrados arriba:*

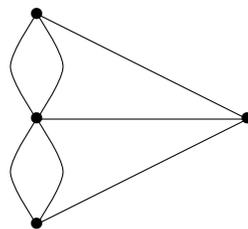
(1) *Consideremos los siguientes grafos:*



*Al que hemos llamado sobre cerrado es también conocido como  $K_4$ , y vemos que todos sus vértices tienen grado 3, impar, por tanto no es un grafo de Euler.*

*Mientras que si nos fijamos en el grado de los vértices del sobre abierto vemos que solo dos tienen grado impar y por el teorema 1.1.3 es un grafo semi-euleriano.*

(2) *Hemos empezado este capítulo hablando del origen de la teoría de grafos y ahora responderemos a la pregunta que se hacían los habitantes de Königsberg.*



*Como hemos dicho este es el grafo que corresponde al problema. Analizando el grado de los vértices vemos que tiene tres vértices con grado 3 y un vértice de grado 5. Por los teoremas enunciados vemos que no es posible pasear por los siete puentes sin repetirlos y llegar al mismo sitio. Es más ni siquiera es posible recorrer todos los puentes sin repetirlos aunque no acabemos en la misma zona.*

(3) **Grafos completos.** Como hemos dicho antes los grafos completos de  $n$  vértices son grafos regulares de grado  $n - 1$ .

Entonces por el teorema 1.1.2 todos los grafos  $K_n$  con  $n$  impar son grafos de Euler cerrados y por el teorema 1.1.3 el único grafo completo semi-euleriano es  $K_2$ .

Una vez que sabemos si dicho grafo es de Euler o no, nos encontramos con el problema de encontrar el recorrido. En algunos casos es fácil y basta con inspeccionar el grafo como en el ejemplo (1), en otros casos esta tarea se vuelve más complicada y debemos acudir a algoritmos como el de Fleury.

Este algoritmo nos permite encontrar el camino de Euler de los grafos que gracias a los teoremas sabemos que o bien son eulerianos o bien son semi-eulerianos.

Los pasos que sigue el algoritmo son los siguientes:

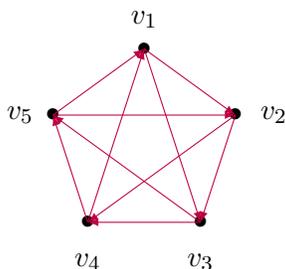
- (1) Elegimos un vértice cualquiera  $v$  en el caso de que nuestro grafo  $G$  sea euleriano y uno de los vértices de grado impar en el caso de que sea semi-euleriano.
- (2) Elegiremos una arista que cumpla:
  - $a_{i+1}$  incide con  $v_i$ .
  - A menos que no haya alternativa,  $a_{i+1}$  no será un puente de  $G \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ , es decir,  $a_{i+1}$  no será una arista tal que si se suprime se desconecta el grafo.
- (3) Repetiremos el paso dos hasta completar el recorrido.

**Ejemplo 1.1.5.** Tomemos  $K_5$ , que como hemos visto en el ejemplo 1.1.4 (3) como  $n = 5$ ,  $K_5$  es un grafo euleriano.

Vamos a encontrar un recorrido de Euler utilizando el algoritmo de Fleury descrito arriba. Nótese que dicho camino no es único.

Como todos los vértices tienen grado par podemos elegir para implementar el algoritmo cualquiera de ellos, por ejemplo,  $v_1$ . Siguiendo el algoritmo de Fleury obtenemos la siguiente secuencia de vértices que determina uno de los posibles caminos.

$$v_1 - v_3 - v_5 - v_2 - v_4 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5$$



## 1.2. Grafos de Hamilton

Determinar si un grafo es hamiltoniano o no es uno de los problemas más antiguos de la teoría de grafos. El origen de este problema se le atribuye al matemático William Hamilton (1805), quién diseñó un juego llamado "The Icosian Game". El objetivo del juego consistía en realizar una ruta siguiendo las aristas del dodecaedro, de forma que pasase solo una vez por cada ciudad (vértice) atravesando alguna de las aristas para volver a la ciudad inicial. Y aunque el juego en sí no triunfó, la idea se convirtió en una importante rama de investigación dentro de la teoría de grafos.

**Definición 1.2.1.** Sea  $G$  un grafo conexo.

Diremos que un grafo  $G$  es hamiltoniano si contiene un recorrido cerrado que pasa por todos los vértices de  $G$ .

Diremos que un grafo  $G$  es semi-hamiltoniano si contiene un recorrido abierto que pasa por todos los vértices de  $G$ .

A diferencia de los grafos eulerianos, no existen condiciones necesarias y suficientes para determinar si un grafo es hamiltoniano.

Los siguientes teoremas no permiten clasificar algunos grafos de acuerdo a alguna de sus características, pero en su mayoría para afirmar que es de Hamilton tendremos que encontrar su recorrido.

**Teorema 1.2.2.** Si un grafo  $G$  es hamiltoniano se tiene que, para todo subconjunto  $S$  de  $V$  no vacío,

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

Equivalentemente si podemos encontrar un subconjunto  $S$  de  $V$  tal que  $\omega(G - S) > |S|$  entonces  $G$  no es hamiltoniano.

Aquí  $G - S$  es el subgrafo de  $G$  obtenido al suprimir los vértices de  $S$  y las aristas que inciden con cada uno de dichos vértices.

*Demostración.* Nótese que si un grafo  $G$  con  $n$  vértices es hamiltoniano entonces implica que  $G$  contiene a un grafo cíclico  $C_n$ .

Para dividir  $C_n$  en  $k$  componentes distintas necesitaremos eliminar al menos  $k$  vértices.

Es decir,

$$\omega(C_n - S) \leq |S|$$

y como  $\omega(C_n - S) \geq \omega(G - S)$  tenemos que  $\omega(G - S) \leq |S|$ . □

**Teorema 1.2.3** (Teorema de Dirac). Si  $G$  es un grafo simple con  $v \geq 3$  y  $\delta(G) \geq \frac{v}{2}$ , entonces  $G$  es hamiltoniano.

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo que satisface las condiciones del teorema, y supongamos que  $G$  no es hamiltoniano. Sea  $P = v_1v_2, \dots, v_p$  un camino de  $G$  de longitud máxima, es decir  $p = v$  y  $(v_1, v_p)$  no es una arista o  $p < n$ . Debido a la maximalidad de  $P$ , sabemos que todos los vecinos de  $v_1$  y  $v_p$  están en  $P$ , ya que si no fuera así, podríamos aumentar la longitud de  $P$  añadiendo algún vértice adyacente a  $v_1$  o a  $v_p$  y entonces  $P$  no sería maximal.

Y como  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ , tanto  $v_1$  como  $v_p$  tiene al menos  $\frac{n}{2}$  vecinos en  $P$ .

Definiendo  $N(u) = \{x_k : ux_k \in G\}$  debe existir algún  $j$  ( $1 \leq j \leq p-1$ ) tal que  $v_j \in N(v_p)$  y  $v_{j+1} \in N(v_1)$ . Supongamos por el momento que esto no ocurre, luego para todo  $v_i$  de  $v_p$  en  $P$ ,  $v_{i+1}$  no es un vecino de  $v_1$ . Esto significa que

$$gr(v_1) \leq p - 1 - \frac{n}{2} < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

contradiendo el hecho de que  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ . Por lo tanto, existe dicho  $j$ .

Sea  $C$  el ciclo  $v_1, v_2, \dots, v_j, v_p, v_{p-1}, \dots, v_{j+1}, v_1$ . Habíamos supuesto que  $G$  no era hamiltoniano, luego, debe haber al menos un vértice de  $G$  que no esté en  $P$ .

Veamos que como  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ , entonces  $G$  es conexo. Sean  $x, y \in G$ , si fueran adyacentes, están unidos por un camino; si no lo son  $gr(x) + gr(y) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$  y por lo tanto, hay al menos  $n$  aristas de los vértices  $x, y$  a los otros  $n - 2$  vértices del ejemplo (no hay arista  $(x, y)$ ) entonces existe otro vértice  $z$  adyacente a ambos, y se tiene  $xyz$  y ambos vértices están unidos por un camino. Luego  $G$  es conexo.

Por lo tanto, debe haber un vértice  $u$  que no está en  $P$  que sea adyacente a un vértice,  $v_i$ , en  $P$ , pues la longitud del camino  $P$  es al menos  $\frac{n}{2}$  y  $u$  tiene grado mayor o igual a  $\frac{n}{2}$ . Pero entonces el camino que empieza en  $u$ , después va a  $v_i$ , y luego va alrededor del ciclo  $C$ , es un camino más largo que nuestro camino maximal  $P$ . Luego, llegamos a una contradicción y nuestra suposición inicial es incorrecto. Por lo tanto,  $G$  es hamiltoniano. □

Nótese que el teorema de Dirac no es una condición necesaria, ya que existen grafos hamiltonianos con  $\delta(G) < \frac{v}{2}$ . Como es el caso de  $C_n$  con  $n \geq 4$ .

**Teorema 1.2.4** (Teorema de Ore). *Si  $G$  es un grafo simple con  $v \geq 3$  y para cada par de vértices no adyacentes  $u$  y  $w$  se tiene que*

$$gr(u) + gr(w) \geq v$$

*entonces  $G$  es hamiltoniano.*

*Demostración.* Supongamos por reducción al absurdo que existe un grafo  $G$  no hamiltoniano tal que para cualquier par de vértices  $u, v$  no adyacentes del grafo,  $gr(u) + gr(w) \geq v$ . Añadimos aristas a  $G$  hasta obtener un subgrafo  $H$  de  $K_n$ , tal que  $H$  no contenga un ciclo hamiltoniano pero que, para cualquier arista  $a$ , del grafo completo  $K_n$ , que no esté en  $H$ ,  $H + a$  tiene un ciclo hamiltoniano.

Tomamos  $G$  no hamiltoniano y todas las aristas de  $K_n$ , si existe alguna arista  $a$  tal que  $G + a$  no es hamiltoniano, entonces nuestro subgrafo  $H$  es  $G + a$ . Ahora tomamos todas las aristas de  $K_n$  que no estén en  $G + a$ , si hay alguna arista  $b$  tal que  $H + b$  no es hamiltoniano, entonces construimos  $H + b$  y así sucesivamente, pero desde  $G$  hasta  $K_n$  hay un número finito de aristas, entonces en algún momento este proceso se pasará de un grafo no hamiltoniano a uno hamiltoniano.

Como  $H \neq K_n$ , existen vértices  $x, y \in V$ , donde  $V$  es el conjunto de vértices, tales que las aristas  $(x, y)$  no pertenece a  $H$ , pero  $H + (x, y)$  tiene un ciclo hamiltoniano  $C$ . El grafo  $H$  no tiene dicho ciclo, por lo que la arista  $(x, y)$  forma parte del ciclo  $C$ .

Enumeraremos los vértices de  $H$  sobre el ciclo  $C$  del siguiente modo:

$$x = v_1, y = v_2, v_3, v_4, \dots, v_{n-1}, v_n, x$$

Para cualquier  $i$ ,  $3 \leq i \leq n$ , si la arista  $(y, v_i)$  está en el grafo  $H$ , entonces tendremos que la arista  $xv_{i-1}$  no puede ser una arista de  $H$  puesto que si ambas están en el grafo, obtendremos el ciclo hamiltoniano

$$y, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v_n, x, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_4, v_3, y$$

en el grafo  $H$  que no tenía ciclos hamiltonianos como habíamos dicho antes.

Por tanto, para cada  $3 \leq i \leq n$ , como máximo una de las aristas  $yv_i, xv_{i-1}$  está en  $H$ . En consecuencia,  $gr_H(x) + gr_H(y) < v$ . Para cualquier  $v \in V(G)$ ,  $gr_H(v) \geq gr_G(v)$ , por lo que tenemos los vértices  $x$  e  $y$  no adyacentes en  $G$  que cumplen

$$gr(x) + gr(y) < v.$$

Esto contradice la hipótesis de que  $gr(u) + gr(w) \geq v$  para cualquier par de vértices no adyacentes, por lo que rechazamos nuestra suposición y vemos que  $G$  contiene un ciclo hamiltoniano.  $\square$

**Teorema 1.2.5.** *Sea  $G$  un grafo simple con  $v \geq 3$  y sean  $u$  y  $w$  dos vértices no adyacentes con*

$$gr(u) + gr(w) \geq v$$

*Entonces  $G$  es hamiltoniano si y solo si  $G + (u, w)$  es hamiltoniano, donde  $G + (u, w)$  es el grafo obtenido a partir de  $G$  añadiendo la arista  $(u, w)$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Si  $G$  es un grafo hamiltoniano, entonces  $G + (u, v)$  es hamiltoniano para dos vértices adyacentes  $u$  y  $v$  de  $G$ , pues el mismo ciclo de  $G$  recorre todos los vértices de  $G + (u, v)$ .

$\Leftarrow$  Sea  $G + (u, v)$  un grafo hamiltoniano para dos vértices no adyacentes  $u$  y  $v$  de un grafo  $G$ , y supongamos, por el contrario, que  $G$  no es hamiltoniano. Esto implica que todo ciclo hamiltoniano  $G + (u, v)$  debe contener a la arista  $(u, v)$ , por lo que  $G$  contiene un camino hamiltoniano de  $u$  a  $v$ ,  $u = v_1, v_2, v_3, \dots, v_n = v$ . Entonces existe un  $i$  con  $u$  adyacente a  $x_{i+1}$  y  $v$  adyacente a  $x_i$ . Si no fuera así,  $N(u) = \{x_k : ux_k \in G\}$  con  $|N(u)| = gr(u)$ ,  $|N(v)| = gr(v)$ ,  $\{x_k \in N(v)\} \cap \{x_{k-1} : x_{k-1} \in N(u)\}$  y  $gr(u) + gr(v) < n$  pues  $x_n \notin N(u) \cup N(v)$ . Con lo que llegamos a una contradicción y por tanto  $G$  es hamiltoniano.  $\square$

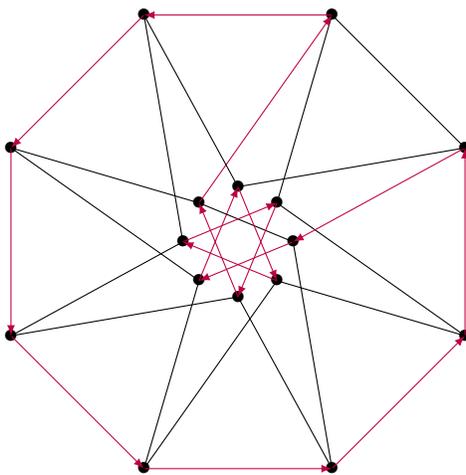
**Ejemplo 1.2.6.** (1) El sobre abierto y el sobre cerrado de la sección anterior son ambos hamiltonianos. Por su parte, en el sobre cerrado, todos los vértices tienen grado 3 que es mayor que la mitad del número de vértices, y por el Teorema de Dirac, el grafo es hamiltoniano.

Por otro lado, los únicos vértices no adyacentes del sobre abierto son el pico de arriba con los dos vértices de abajo. El pico tiene grado dos y los de la base tienen grado 3, y por el teorema de Ore, el grafo es hamiltoniano.

(2) El grado mínimo del grafo de Königsberg es 3 que es mayor que la mitad del número de vértices, así, por el Teorema de Dirac, el grafo de Euler es hamiltoniano.

(3) **Grafos completos.** Por la proposición 1.0.12 sabemos que  $K_n$  tiene exactamente  $\binom{n}{2}$  aristas y cada vértice tiene grado  $n - 1$ . Entonces por el Teorema de Dirac un grafo completo es siempre hamiltoniano.

Como se ha visto con los ejemplos anteriores, los teoremas dados pueden ser de utilidad. En otros casos, como el siguiente ejemplo, se necesita encontrar el camino. Es el caso de, por ejemplo, el grafo de Clebsch:



El circuito de Hamilton es el pintado en rojo sobre el grafo, pero no cumple ninguna condición de los teoremas.

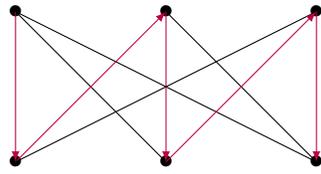
Como vemos, hemos encontrado el circuito hamiltoniano por inspección y por eso aseguramos que es un grafo de Hamilton, pero en la actualidad no existen más criterios que nos permitan clasificar los grafos en hamiltonianos o no hamiltonianos.

**Proposición 1.2.7.** Si  $K_{n,m}$  es un grafo de Hamilton entonces  $n = m$

*Demostración.* Sea  $X$  un conjunto de tamaño  $n$  y sea  $Y$  un conjunto de tamaño  $m$  y sean  $x_i$  e  $y_i$  los elementos de cada uno de ellos respectivamente.

Vamos a razonar por reducción al absurdo, suponiendo que  $m < n$  y que  $C$  es el ciclo hamiltoniano  $x_1y_1x_2y_2\dots x_my_mx_1$ . Pero entonces  $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$  no están en el ciclo, luego  $m \geq n$ . De forma análoga tenemos que  $n \geq m$  y por tanto,  $m = n$ . Como cada vez vamos de un vértice de  $X$  a uno de  $Y$ , sin repetir ninguno y volviendo al punto inicial, tendremos el mismo número de vértices en  $X$  y en  $Y$ .  $\square$

**Ejemplo 1.2.8.**  $K_{3,3}$  tiene el siguiente camino de Hamilton.



$K_{3,3}$

## 2. CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES COMPACTAS

En este capítulo vamos a estudiar las superficies topológicas. Nuestro objetivo principal será presentar el Teorema de clasificación para superficies topológicas compactas.

### 2.1. Variedades topológicas

**Definición 2.1.1.** *Una variedad topológica es un espacio topológico Hausdorff, segundo axioma de numerabilidad y localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , para algún  $n \geq 0$ , es decir todo punto tiene un entorno abierto (y por tanto un sistema fundamental de entornos abiertos) homeomorfo a un disco abierto de  $\mathbb{R}^n$*

Como son localmente homeomorfas a  $\mathbb{R}^n$ ,  $X$  hereda las propiedades locales de este, luego las variedades son localmente compactas, primer axioma, localmente conexas por caminos y localmente conexas. Gracias al Teorema de invarianza del dominio, cogiendo un punto  $x \in X$  existe un único  $n \geq 0$  tal que un entorno de  $x$  en  $X$  es homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . En todo el entorno de  $x$  seguiremos teniendo el mismo  $n$ , luego cada componente conexa  $X_i$  de una variedad  $X = \sqcup_{i \in I} X_i$  es una variedad con dimensión  $n$ . Si todas las  $X_i$  tienen la misma dimensión  $n$  diremos que  $X$  es una  $n$ -variedad de dimensión  $n = \dim X$

Existen dos resultados de Topología Algebraica que nos ayudan a entender mejor las implicaciones topológicas de la Definición 2.1.1. Están enunciados a continuación, aunque su prueba se aleja del contenido de este trabajo.

**Teorema 2.1.2** (Invarianza de la dimensión). *Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  y  $V \subset \mathbb{R}^m$  dos abiertos euclidianos no vacíos. Si  $U$  es homeomorfo a  $V$  entonces  $n = m$ .*

**Teorema 2.1.3** (Invarianza del dominio). *Sean  $X$  una variedad topológica  $n$ -dimensional y  $U \subset X$  un subespacio topológico de  $X$ . Si  $U$  es homeomorfo a un abierto euclidiano  $O \subset \mathbb{R}^n$  entonces  $U$  es un abierto de  $X$ .*

**Ejemplo 2.1.4.** *Los siguientes espacios son variedades topológicas:*

- *Un abierto de una variedad topológica  $n$ -dimensional es una variedad topológica  $n$ -dimensional.*
- $\mathbb{R}^n$  y  $S^n$ .
- *El producto  $X \times Y$  de variedades topológicas  $X$  e  $Y$  de dimensiones  $n$  y  $m$  es una variedad topológica de dimensión  $n + m$*

### 2.2. Superficies topológicas

**Definición 2.2.1.** *Una superficie topológica es una variedad topológica conexa de dimensión 2.*

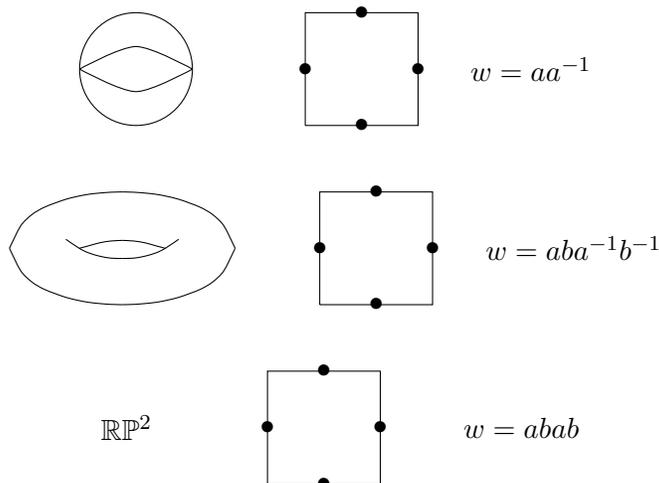
**Definición 2.2.2.** *El polígono fundamental de una superficie es la representación de dicha superficie como un cociente de un subconjunto de plano real con los lados identificados a pares.*

Como veremos a lo largo de este capítulo cada superficie compacta admite un polígono fundamental y cada polígono fundamental da lugar a una superficie compacta.

**Definición 2.2.3.** *Una esquema binario puro es la codificación del polígono fundamental. Un esquema binario puro  $w$ , se identificará con la expresión  $b_1^{\epsilon(1)}, \dots, b_k^{\epsilon(k)}$*

**Definición 2.2.4.** *Dado el esquema binario puro  $w$  denotaremos por  $S_w$  a la superficie de realización que forma. El subespacio  $\Gamma_w$  será el grafo conexo borde de  $S_w$ .*

Entonces, tenemos tres formas de referirnos a una superficie, representación tridimensional, representación planar o polígono fundamental y representación mediante un esquema binario puro.



### 2.3. Poliedros topológicos bidimensionales y triangulaciones

En esta sección vamos a presentar los poliedros topológicos bidimensionales, unos espacios topológicos de naturaleza combinatoria más generales que las superficies y que serán claves en el contexto del Teorema de Radó.

**Definición 2.3.1.** *Un triángulo topológico es un par formado por un disco topológico compacto  $T$  y tres puntos distintos  $\{v_1, v_2, v_3\}$  destacados del borde del triángulo,  $Bd(T)$ .*

Si  $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$  es un triángulo topológico entonces:

- Los puntos  $v_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  se llamarán vértices de  $T$ .
- Si  $\{i, j, h\} = \{1, 2, 3\}$  y  $h \in \{1, 2, 3\}$ , el arco de Jordan  $l_h$  en  $Bd(T)$  uniendo los vértices  $v_i, v_j$  y no incidente con  $v_h$  será referido como el lado de  $T$  determinado por  $v_i$  y  $v_j$ . Obviamente  $T$  tiene tres lados  $\{l_1, l_2, l_3\}$ .

Si  $T$  es un triángulo y  $l \subset T$  o  $v \in T$ , entonces la expresión  $l \leq T$  o  $v \leq T$  indicará que  $l$  es un lado de  $T$  o que  $v$  es un vértice de  $T$ . Además si  $v$  es uno de los vértices que determina a  $l$ , entonces lo denotaremos como  $v \leq l$ .

Denotamos por

- $C(T) := T$  al conjunto formado por la única cara de  $T$ ,
- $L(T) := l_1, l_2, l_3$  al conjunto formado por los lados de  $T$ , y
- $V(T) := v_1, v_2, v_3$  al conjunto formado por los vértices de  $T$ .

**Definición 2.3.2** (Orientación en un triángulo topológico). *Dado un triángulo topológico  $(T, v_1, v_2, v_3)$ , una orientación de  $T$  es una ordenación cíclica de sus vértices.*

*Existen dos orientaciones posibles:*

- *En el sentido de las agujas del reloj.  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1$  que se representará como  $(v_1, v_2, v_3) \equiv (v_2, v_3, v_1) \equiv (v_3, v_1, v_2)$ .*

- En el sentido contrario de las agujas del reloj.  $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$  que se representará como  $(v_1, v_3, v_2) \equiv (v_3, v_2, v_1) \equiv (v_2, v_1, v_3)$ .

Un triángulo orientado es el par formado por un triángulo  $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$  junto con una orientación  $(v_i, v_j, v_h)$  del mismo, y se denotará por  $(T, (v_i, v_j, v_h))$ .

La orientación  $(v_i, v_j, v_h)$  de  $T$  induce de forma natural orientaciones en los lados de  $T$  de acuerdo con el siguiente criterio:

$$(v_j, v_h) \text{ en } l_i \quad (v_h, v_i) \text{ en } l_j \quad (v_i, v_j) \text{ en } l_h.$$

Dos triángulos orientados intersecándose en un lado común  $l$  son orientablemente compatibles si inducen orientaciones opuestas sobre  $l$ .

**Definición 2.3.3** (Triángulo euclídeo). *Un triángulo euclídeo en  $\mathbb{R}^2$  es la envolvente conexa de tres puntos afínmente independientes. Si  $v_1, v_2, v_3$  son los vértices de un triángulo euclídeo  $T$  en  $\mathbb{R}^2$ , la orientación se dirá positiva o en el sentido contrario a las agujas del reloj si*

$$\det(v_2 - v_1, v_3 - v_1) > 0.$$

En caso contrario, se dirá negativa o en el sentido de las agujas del reloj.

Si  $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^2$  son dos triángulos euclídeos orientados positivamente y con un lado común, el Álgebra Lineal nos dice que  $T_1$  y  $T_2$  inducen orientaciones opuestas en  $l$ , y por tanto, que  $T_1$  y  $T_2$  son orientablemente compatibles.

**Definición 2.3.4** (Poliedro topológico bidimensional). *Un espacio topológico compacto  $X$  es un poliedro topológico bidimensional si existe una familia finita  $\mathcal{T}$  de triángulos topológicos satisfaciendo:*

- (i)  $T$  es un subespacio topológico de  $X$  para todo  $T \in \mathcal{T}$ .
- (ii) Si  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  son triángulos distintos, entonces  $T_1 \cap T_2$  es el vacío, un vértice común o un lado común.
- (iii)  $\cup_{T \in \mathcal{T}} T = X$ .

La familia  $\mathcal{T}$  diremos que es una triangulación de  $X$ . El par  $(X, \mathcal{T})$  se refiere a un poliedro triangulado.

El poliedro  $X$  puede ser en particular una superficie, por lo que la familia  $\mathcal{T}$  será una triangulación de la superficie  $X$  y el par  $(X, \mathcal{T})$  es una superficie topológica compacta triangulada.

Las triangulaciones se comportan bien respecto a los homeomorfismos, tal que si  $H : X_1 \rightarrow X_2$  es un homeomorfismo entre poliedros y  $\mathcal{T}$  es una triangulación de  $X_1$ , entonces

$$H(\mathcal{T}) := \{H(T) : T \in \mathcal{T}\}$$

es una triangulación de  $X_2$ .

Dado  $(X, \mathcal{T})$ , llamaremos

- $C(\mathcal{T}) := \cup_{T \in \mathcal{T}} C(T)$  al conjunto de todas las caras de  $\mathcal{T}$ ,
- $L(\mathcal{T}) := \cup_{T \in \mathcal{T}} L(T)$  al conjunto de todos los lados de  $\mathcal{T}$ , y
- $V(\mathcal{T}) := \cup_{T \in \mathcal{T}} V(T)$  al conjunto de todos los vértices de  $\mathcal{T}$ .

**Definición 2.3.5** (Característica de Euler de un grafo conexo). *Dado el grafo conexo  $\Gamma$  al número entero*

$$\chi_\Gamma := |V(\Gamma)| - |L(\Gamma)|$$

se le conoce como característica de Euler de  $\Gamma$ .

**Definición 2.3.6** (Característica de Euler de una triangulación). Sea  $\mathcal{T}$  una triangulación de un poliedro  $X$ . Al número entero

$$\chi_{\mathcal{T}}(X) := |V(\mathcal{T})| - |L(\mathcal{T})| + |C(\mathcal{T})|$$

se le llamará la característica de Euler de la triangulación  $\mathcal{T}$  de  $X$ .

**Definición 2.3.7** (Orientabilidad de una triangulación). Una triangulación  $\mathcal{T}$  de un poliedro  $X$  se dice orientable si es posible elegir una orientación en cada uno de sus triángulos de forma que si dos de ellos comparten una arista estos son orientablemente compatibles.

Si  $\mathcal{T}$  es orientable, una orientación global de  $\mathcal{T}$  será una elección de orientaciones en todos y cada uno de los triángulos de  $\mathcal{T}$  de forma que cada dos contiguos, satisfagan la condición anterior de compatibilidad. En el caso en el que no sea posible elegir una orientación global compatible de los triángulos de  $\mathcal{T}$  se dirá que  $\mathcal{T}$  no es orientable.

### 2.3.1. Cálculo de la característica de Euler y el carácter de orientabilidad

**Teorema 2.3.8** (Teorema de Euler). Sea  $X$  un poliedro. Si  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  son dos triangulaciones de  $X$  entonces

- $\chi_{\mathcal{T}_1}(X) = \chi_{\mathcal{T}_2}(X)$ .
- $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  tienen el mismo carácter de orientabilidad.

Gracias a este resultado podemos ver como la característica de Euler de un poliedro no depende de la triangulación elegida.

**Definición 2.3.9.** Sea  $X$  un poliedro.

- Se define la característica de Euler de  $X$  como  $\chi(X) := \chi_{\mathcal{T}}(X)$  para cualquier triangulación  $\mathcal{T}$  de  $X$ .
- Se dice que  $X$  es orientable (no orientable) si y sólo si cualquier triangulación  $\mathcal{T}$  es orientable (no orientable).

**Corolario 2.3.10.** La característica de Euler y el carácter de orientabilidad son invariantes topológicos, esto es, dos poliedros homeomorfos tienen la misma característica de Euler y el mismo carácter de orientabilidad.

*Demostración.* Si  $X, X'$  son poliedros,  $h : X \rightarrow X'$  un homeomorfismo,  $\mathcal{T}$  una triangulación de  $X$  y  $\mathcal{T}' = h(\mathcal{T})$  la triangulación inducida por  $h$  en  $X'$ , entonces la característica de Euler y el carácter de orientabilidad de  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}'$  son trivialmente iguales. Del Teorema de Euler (2.3.8) se sigue el resultado.  $\square$

**Nota 2.3.11.** Todo disco topológico compacto  $X$  es un poliedro orientable con  $\chi(X) = 1$ .

**Corolario 2.3.12** (Característica de Euler del disco abierto). Sea  $X$  un disco topológico compacto y  $\mathcal{T}$  una triangulación suya. Denotemos por

$$L_0(\mathcal{T}) := \{l \in L(\mathcal{T}) : l \not\subseteq \text{Bd}(X)\} \text{ y } V_0(\mathcal{T}) := \{v \in V(\mathcal{T}) : v \notin \text{Bd}(X)\}.$$

Entonces  $\chi_{\mathcal{T}}(\text{Int}(X)) := |C(\mathcal{T})| - |L_0(\mathcal{T})| + |V_0(\mathcal{T})| = \chi_{\mathcal{T}}(X) = 1$

*Demostración.* Como  $\text{Bd}(X)$  es un ciclo, contiene la misma cantidad de lados que de vértices de  $\mathcal{T}$ . Este corolario se demuestra teniendo en cuenta el Teorema de Euler (2.3.8) y que  $\chi(X) = \chi_{\mathcal{T}}(X) = 1$ .  $\square$

**Proposición 2.3.13.** La realización  $S_w$  de un esquema  $w$  es un poliedro.

*Demostración.* Basta con representar el esquema  $w$  en una región poligonal convexa regular con tantos vértices como longitud tenga el esquema, y subdividir la región convexa en triángulos geométricos suficientemente pequeños para que sus proyecciones a  $S_w$  generen una triangulación de  $S_w$ .  $\square$

**Proposición 2.3.14.** *Si  $w$  es un esquema entonces:*

i.  $\chi(S_w) = 1 + \chi(\Gamma_w)$ , donde  $\Gamma_w$  es el grafo conexo borde de  $w$ .

ii.  $S_w$  es orientable si y solo si el esquema  $w$  es binario y orientable.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{T}$  una triangulación adaptada a  $w$ . Por el Teorema de Euler (2.3.8) la característica de Euler de  $S_w$  y su carácter de orientabilidad se pueden calcular utilizando la triangulación  $\mathcal{T}$ .

Para probar i, observemos que la Definición 2.3.9, el Corolario 2.3.12 y de la definición de grafo conexo dan sentido al siguiente cálculo:

$$\chi_{\mathcal{T}}(S_w) = \chi_{\mathcal{T}}(\text{Int}(S_w)) + \chi(\Gamma_w) = 1 + \chi(\Gamma_w)$$

□

## 2.4. El Teorema de Radó

Enunciemos ahora el teorema fundamental para la clasificación de superficies topológicas compactas.

**Teorema 2.4.1** (Teorema de Radó). *Toda superficie topológica compacta es un poliedro, esto es, admite una triangulación.*

Como consecuencia del Teorema de Euler (2.3.8) y el Teorema de Radó (2.4.1), toda superficie compacta tiene bien definidas su característica de Euler y carácter de orientabilidad, que pueden ser calculados usando cualquiera de sus triangulaciones.

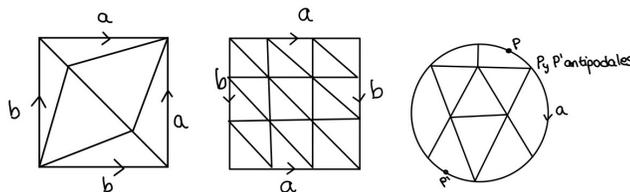


Figura 1: Una posible triangulación de la esfera, del toro y del plano proyectivo respectivamente

Analizándolo,

- vemos que en la primera imagen, una triangulación de la esfera, tenemos 3 vértices, 9 lados y 6 caras, por lo que la característica de Euler de esta triangulación es  $\chi(\mathbb{S}) = \chi_{\mathcal{T}}(\mathbb{S}) = 2$ .
- vemos que en la segunda imagen, una triangulación del toro, tenemos 9 vértices, 27 lados y 18 caras, por lo que la característica de Euler de esta triangulación es  $\chi(\mathbb{T}) = \chi_{\mathcal{T}}(\mathbb{T}) = 0$ .
- vemos que en la tercera imagen, una triangulación del plano proyectivo, tenemos 6 vértices, 15 lados y 10 caras, por lo que la característica de Euler de esta triangulación es  $\chi(\mathbb{P}) = \chi_{\mathcal{T}}(\mathbb{P}) = 1$ .

### 2.4.1. Superficies compactas y esquemas binarios puros

La consecuencia más relevante del Teorema de Radó (2.4.1) es que toda superficie compacta es el espacio de realización de un esquema binario puro. El siguiente teorema implica que es posible representar toda superficie sobre el plano a modo de puzzle de triángulos euclidianos.

**Teorema 2.4.2** (Representación poligonal de superficies). *Toda superficie topológica compacta  $S$  es homeomorfa al espacio de realización de un esquema binario puro.*

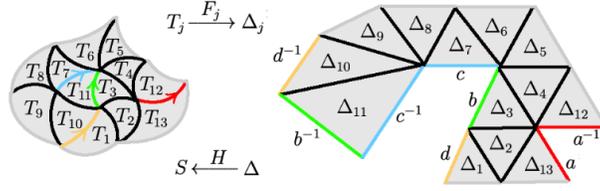


Figura 2: Representación poligonal de una superficie S

## 2.5. Cirugía topológica con esquemas binarios puros

En este apartado vamos a clasificar salvo equivalencias los esquemas binarios puros y, por tanto, como consecuencia del Teorema de Radó (2.4.1) y el Teorema 2.4.2, las superficies topológicas compactas.

**Definición 2.5.1.** Diremos que dos esquemas binarios puros  $w_1, w_2$  son equivalentes si existe un homeomorfismo  $F : S_{w_1} \rightarrow S_{w_2}$  y lo denotaremos por  $w_1 \sim w_2$ .

**Definición 2.5.2.** Sea  $w = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$  un esquema. Dados  $b_i^{\epsilon(i)}$  y  $b_j^{\epsilon(j)}$  de  $w$  con  $i \neq j$  y  $b_i = b_j$ , se dirá que el par  $(b_i^{\epsilon(i)}, b_j^{\epsilon(j)})$  se dirá de primera especie si  $\epsilon(i)\epsilon(j) = -1$  y de segunda especie si  $\epsilon(i)\epsilon(j) = 1$ .

Como consecuencia, un esquema binario es orientable si y solo si todos sus pares son de primera especie, y no orientable si tiene al menos un par de segunda especie.

El siguiente lema nos presenta reglas de transformación por equivalencias para esquemas binarios puros.

**Lema 2.5.3** (Reglas de transformación). Consideremos esquemas  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  y dos símbolos  $a$  y  $b$ . Suponiendo  $w_1$  y  $w_2$  esquemas binarios puros, en todos los casos siguientes,  $w_1 \sim w_2$ :

- i.  $w_1 = v_1 v_2$  y  $w_2 = v_2 v_1$ ,
- ii.  $w_1 = v_1$  y  $w_2 = v_1^{-1}$ ,
- iii.  $w_1 = v_1 v_2 a v_3 v_4 a^{-1}$  y  $w_2 = v_2 v_1 b v_4 v_3 b^{-1}$ ,
- iv.  $w_1 = v_1 v_2 a v_3 v_4 a$  y  $w_2 = v_3^{-1} v_1 b v_4 v_2^{-1} b$ , y
- v.  $w_1 = a a^{-1} v_1$  y  $w_2 = v_1 \neq 1$ .

Además en todos los casos  $w_1$  y  $w_2$  tienen el mismo carácter de orientabilidad y solo en el último caso el homeomorfismo  $F$  altera el número de vértices del grafo borde del esquema, reduciéndolo en una unidad.

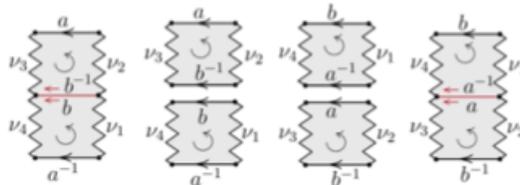


Figura 3: Descripción de la regla iii.

**Corolario 2.5.4.** Sean  $v_0$  y  $v_1$  dos esquemas binarios puros tal que  $|V_{v_0}| = |V_{v_1}| = 1$ , llamemos  $w = v_0 v_1$ . Sea  $v'_1$  un esquema obtenido de  $v_1$  aplicando las reglas descritas arriba de la (i) a la (iv). Entonces existe  $w' \in \{v_0 v'_1, v_0^{-1} v'_1\}$  tal que  $w \sim w'$ .

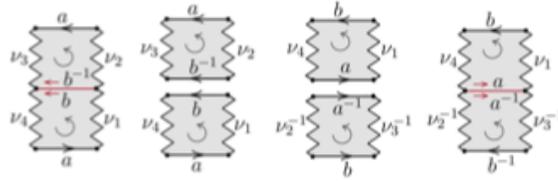


Figura 4: Descripción de la regla iv.

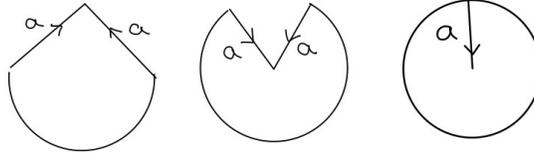


Figura 5: Descripción de la regla v.

### 2.5.1. Clasificación de los esquemas binarios puros

Sabemos por el Teorema 2.4.2 que toda superficie compacta es el espacio de realización de un esquema binario. La idea de este apartado será probar que todo esquema binario puro es equivalente a un esquema puro normal y por tanto, que toda superficie topológica compacta es homeomorfa al espacio de realización de un esquema binario puro normal.

Comencemos definiendo esquema puro normal y enunciando otro de los resultados fundamentales por el Teorema de Clasificación de superficies.

**Definición 2.5.5** (Esquemas binarios puros normales). *presentamos una lista básica de esquemas binarios puros, que llamaremos normales, y sus correspondientes realizaciones:*

- El espacio  $S_0$  asociado al esquema binario puro  $\mathbf{m}_0 = aa^{-1}$ .
- El espacio  $S_n$  asociado al esquema binario puro  $\mathbf{m}_n = \prod_{j=1}^n a_j c_j a_j^{-1} c_j^{-1}$ .
- El espacio  $S_n^*$  asociado al esquema binario puro  $\mathbf{m}_n^* = \prod_{j=1}^n a_j a_j$ .

**Corolario 2.5.6** (Realizaciones de esquemas binarios puros normales). *La familia de realizaciones de los esquemas binarios puros normales,*

$$\{S_n : n \in \mathbb{N} \cup 0\} \cup \{S_n^* : n \in \mathbb{N}\}$$

*no contiene dos espacios homeomorfos entre sí.*

**Lema 2.5.7.** *Para todo  $w$  binario puro existe  $w_0$  binario puro tal que:*

- $w \sim w_0$ .
- $|V_{w_0}| = 1$  ó  $w_0 = \mathbf{m}_0$ .

En lo que sigue trataremos con esquemas binarios puros  $w$  con  $|V_w| = 1$  pues sino, por el Lema 2.5.7 ya sabemos que  $w \sim \mathbf{m}_0$ . Vamos a probar que estos esquemas son equivalentes a esquemas binarios puros

normales de la forma  $\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_k^*, k \geq 1$ .

Un par de la segunda especie en un esquema binario  $w$  se dice adyacente si, escrito con la sílaba  $a$ , se dispone de la forma  $w = v_1 a a v_2$ .

**Lema 2.5.8.** *Si  $w$  es un esquema binario puro con  $|V_w| = 1$ , entonces existe  $w_1$  tal que:*

- $|V_{w_1}| = 1$ , la longitud de  $w$  es la misma que la de  $w_1$ , y,  $w \sim w_1$ .
- Todos los pares de segunda especie en  $w_1$  son adyacentes.

*Demostración.* Si  $w$  es orientable basta con tomar  $w_1 = w$ .

Supongamos que  $w$  es no orientable, es decir, tiene al menos un par de segunda especie y existe un par de segunda especie no adyacente en  $w$ , que escribiremos con la sílaba  $a_1$ . Entonces  $w$  tendrá la siguiente forma  $w = w_1 w_2 a_1 w_3 w_4 a_1$  donde  $w_1, w_3 \neq 1$  y  $w_2 = w_4 = 1$ . Aplicando la regla iv del Lema 2.5.3 obtenemos  $w \sim w' = w_3^{-1} w_1 b_1 b_1$ , donde ambos esquemas tienen un sólo vértice. De esta manera cambiamos el par de segunda especie asociado a  $a_1$  en  $w$  por un par de segunda especie adyacente con símbolo  $b_1$  en el nuevo esquema  $w'$ , con la misma longitud y con único vértice. Si existiese un par de segunda especie adyacente en  $w$  estaría contenido o en  $w_1$  o en  $w_3$  y este procedimiento lo traslada a otro par adyacente de igual naturaleza en  $w'$ . El proceso descrito es, por tanto, acumulativo y no deshace el trabajo previo.

Si  $w'$  presentase pares no adyacentes de segunda especie, se reiteraría el procedimiento anterior hasta llegar a un esquema binario puro  $w_1$  sin ningún par de segunda especie no adyacente, con la misma longitud de  $w'$ , es decir, la misma longitud de  $w$  y con  $|V_{w_1}| = 1$ .  $\square$

**Definición 2.5.9.** *Una pareja de pares de primera especie, que representaremos con los símbolos  $a$  y  $b$ , en un esquema binario puro  $w$  se dirá en posición enlazada si su disposición en la secuencia que define  $w$  es de la forma  $w = v_1 a v_2 b v_3 a^{-1} v_4 b^{-1} v_5$ .*

*Si además,  $v_2 = v_3 = v_4 = 1$ , es decir,  $w = v_1 a a^{-1} b^{-1} v_5$  entonces diremos que la pareja de pares enlazados de primera especie representada por  $a$  y  $b$  es adyacente.*

**Lema 2.5.10.** *Si  $w$  es un esquema binario puro y  $|V_w| = 1$  entonces todo par de primera especie en  $w$  está en posición enlazada con algún otro par de primera especie en  $w$ .*

*Demostración.* En otro caso existiría un par de primera especie en  $w$ , que representaremos por la letra  $a$ , que no está enlazado con ningún otro par de primera especie en  $w$ . Tengamos presente que las parejas de primera especie adyacentes  $cc^{-1}$  no ocurren en  $w$  ya que  $|V_w| = 1$ , y por lo tanto  $w = a v_1 a^{-1} v'_1$ , donde  $v_1, v'_1 \neq 1$ .

Por nuestras hipótesis, si  $b$  es una sílaba de  $v_1$  que forma parte de un par de primera especie, entonces  $b^{-1}$  también pertenece a  $v_1$ , ya que si no,  $b$  estaría enlazado con  $a$ . Análogamente si  $b$  es una sílaba de  $v'_1$ . Por lo tanto, el conjunto de vértices de  $V_w$  que están en  $v_1$  tiene que ser disjunto a los que están en  $v'_1$ . Por lo que necesariamente  $V_w > 1$  lo cual contradice el hecho de que  $w$  tiene un único vértice  $\square$

Vamos a explicar un procedimiento que generará en  $w$  una pareja adyacente de pares de primera especie enlazados a partir de una pareja no adyacente de pares de primera especie enlazados. Este método será acumulativo y no romperá el trabajo previo.

**Lema 2.5.11.** *Sea  $w$  un esquema binario puro con  $|V_w| = 1$  y todos sus pares de segunda especie adyacentes. Entonces existe un esquema binario puro  $w_1$  tal que:*

- $|V_{w_1}| = 1$ , tienen la misma longitud y  $w \sim w_1$ .
- $w_1$  tiene todos los pares de segunda especie adyacentes.
- Todas las parejas de pares de primera especie enlazados en  $w_1$  son adyacentes.

*Demostración.* Supongamos que  $w$  contiene  $k \geq 0$  parejas adyacentes de pares de primera especie enlazados, y que  $w$  contiene una pareja no adyacente de pares de primera especie enlazados. Veamos que existe un esquema binario  $\nu_1$  tal que:

- $|V_{\nu_1}| = 1$ ,  $Long(\nu_1) = Long(w)$  y  $\nu_1 \sim w$ .
- Todos los pares de segunda especie en  $\nu_1$  son adyacentes.
- $\nu_1$  tiene  $k + 1$  parejas adyacentes de pares de primera especie enlazados.

En efecto, como  $w$  tiene una pareja no adyacente de pares de primera especie enlazados, podemos escribir

$$w = v_1 a_1 v_2 a_2 v_3 a_1^{-1} v_4 a_2^{-1}$$

Por la regla iii. del Lema 2.5.3 aplicada a  $v_1 \rightarrow v_1 a_1$ ,  $v_2 \rightarrow v_2$ ,  $a \rightarrow a_2$ ,  $v_3 \rightarrow v_3$  y  $v_4 \rightarrow a_1^{-1}$ , obtenemos

$$w' = v_2 v_1 a_1 b_1 a_1^{-1} v_4 v_3 b_1^{-1} \equiv v_4 v_3 b_1^{-1} v_2 v_1 a_1 b_1 a_1^{-1}$$

con  $w' \sim w$  y  $|V_{w'}| = 1$ . Aplicando de nuevo la regla iii. para  $v_1 \rightarrow v_4 v_3 b_1^{-1}$ ,  $v_2 \rightarrow v_2 v_1$ ,  $a \rightarrow a_1$ ,  $v_3 \rightarrow v_3$  y  $v_4 \rightarrow 1$ , obtenemos que  $w' \sim w''$  con

$$w'' = v_2 v_1 v_4 v_3 b_1^{-1} d_1 b_1 d_1^{-1} \equiv b_1^{-1} d_1 b_1 d_1^{-1} v_2 v_1 v_4 v_3$$

con  $|V_{w''}| = 1$ .

Por la naturaleza de la regla iii. no se ha destruido ningún par de segunda especie adyacente que pudiese existir y no se han generado nuevos pares no existentes. Tampoco se han modificado pares de primer orden adyacentes enlazados.

Renombramos y obtenemos

$$\nu_1 := c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} w_1,$$

que es equivalente a  $w$ . □

Como consecuencia de los Lemas 2.5.7, 2.5.8 y 2.5.11 tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.5.12.** *Si  $w$  es un esquema binario puro entonces es cierto uno de los siguientes enunciados:*

- i  $w \sim \mathbf{m}_0$
- ii  $w \sim w_1$ , donde  $w_1$  es un esquema binario puro que cumple que:
  - $|V_{w_1}| = 1$  y  $Long(w_1) \leq Long(w)$ .
  - $w_1$  tiene todos los pares de segunda especie adyacentes.
  - Todas las parejas en  $w_1$  de pares de primera especie enlazados son adyacentes.

**Lema 2.5.13.** *Los siguientes enunciados son ciertos:*

(1)  $aba^{-1}b \sim \mathbf{m}_2^*$ .

(2)  $\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1^* \sim \mathbf{m}_3^*$

*Demostración.* Para probar (1) tenemos que aplicar la regla iv del Lema 2.5.3 a la siguiente elección  $v_1 \rightarrow 1$ ,  $v_2 \rightarrow a$ ,  $v_3 \rightarrow 1$  y  $v_4 \rightarrow a^{-1}$ . Obtenemos el siguiente esquema  $b'a^{-1}a^{-1}b'$ , que por la regla i es equivalente a  $\mathbf{m}_2^*$ .

Para probar (2), sabemos que podemos escribir  $\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1^* = aba^{-1}b^{-1}cc$ . Aplicando la regla iii. para  $v_1 \rightarrow aba^{-1}$ ,  $v_2 \rightarrow b^{-1}$ ,  $v_3 \rightarrow 1$  y  $v_4 \rightarrow 1$  se obtiene el esquema  $aba^{-1}c'bc' \equiv c'bc'aba^{-1}$ , esta equivalencia viene dada por la regla i. Aplicando a este último esquema la regla iii. para  $v_1 \rightarrow c'b$ ,  $v_2 \rightarrow c'$ ,  $v_3 \rightarrow b$  y  $v_4 \rightarrow 1$  llegamos a  $c'c'ba'b(a')^{-1}$ . Usando el apartado (1) y el Corolario 2.5.4 para  $v_0 \rightarrow c'c'$  y  $v_1 \rightarrow ba'b(a')^{-1}$  se obtiene lo que queremos demostrar. □

**Teorema 2.5.14** (Representaciones binarias puras). *Sea  $w$  un esquema binario puro ocurre:*

- *$w$  es orientable entonces existe  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que  $w \sim \mathbf{m}_n$ .*
- *$w$  es no orientable entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $w \sim \mathbf{m}_n^*$ .*

*Demostración.* El teorema es consecuencia inmediata del Teorema 2.5.12 y de un argumento combinatorio utilizando el Lema 2.5.13 y el Corolario 2.5.4. □

## 2.6. Clasificación de superficies compactas

Ahora tenemos las nociones suficientes para poder demostrar el Teorema de Clasificación de superficies y concluir con éste el capítulo.

**Teorema 2.6.1** (Teorema de Clasificación de superficies compactas). *Sea  $S$  una superficie topológica compacta.*

(i) *Si  $S$  es orientable entonces es homeomorfa a una y solo una de las superficies en la familia*

$$\{S_{\mathbf{m}_n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

(ii) *Si  $S$  es no orientable entonces es homeomorfa a una y solo una de las superficies en la familia*

$$\{S_{\mathbf{m}_n^*} : n \in \mathbb{N}\}$$

*Al número  $n$  en ambos casos se le llama género de  $S$  y se denota por  $p(S)$  o simplemente  $p$ .*

*Demostración.* Por el Teorema de Radó  $S$  admite una triangulación  $\mathcal{T}$ . El Teorema de Representación poligonal de superficies (2.4.2) garantiza que existe un esquema binario puro y un homeomorfismo  $F : S \rightarrow S_w$ . La proposición 2.3.14 nos dice que el esquema  $w$  y su superficie de realización  $S_w \cong S$  tienen el mismo carácter de orientabilidad. El Teorema 2.5.14 nos dice que  $w \sim \mathbf{m}$  para un único esquema  $\mathbf{m} \in \{S_{\mathbf{m}_n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{S_{\mathbf{m}_n^*} : n \in \mathbb{N}\}$  con el mismo carácter de orientabilidad que  $w$ . En conclusión,  $S \cong S_{\mathbf{m}}$  para un esquema binario puro normal  $\mathbf{m}$  con el mismo carácter de orientabilidad que  $S$ . Por último, el Corolario 2.5.6 garantiza que en la familia

$$\mathcal{F} = \{S_{\mathbf{m}_n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{S_{\mathbf{m}_n^*} : n \in \mathbb{N}\}$$

no hay dos espacios homeomorfos. □

**Corolario 2.6.2.** *Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies topológicas compactas.*

- i.  $S_1 \cong S_2 \iff \chi(S_1) = \chi(S_2)$  y tienen ambas el mismo carácter de orientabilidad.*
- ii.  $S_1 \cong S_2 \iff p(S_1) = p(S_2)$  y tienen ambas el mismo carácter de orientabilidad.*

Es necesario remarcar las siguientes afirmaciones, pues nos será de utilidad en lo que resta del trabajo:

- Si  $S$  es una superficie compacta orientable entonces  $\chi(S) = 2 - 2p$ .
- Si  $S$  es una superficie compacta no orientable entonces  $\chi(S) = 2 - p$

### 2.6.1. Suma conexa de superficies

**Definición 2.6.3.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies conexas,  $p_i \in S_i$ ,  $U_i^{p_i} \subset S_i$ , entorno de  $p_i$ , y  $\varphi_i : U_i^{p_i} \rightarrow \mathbb{R}^2$  homeomorfismo tales que  $\varphi_i(p_i) = 0$ , con  $i = 1, 2$ . Tomemos  $B_i = \varphi_i^{-1}(B(0,1)) \subset S_i$ , y consideramos  $S_i^o = S_i - B_i$ ,  $i = 1, 2$ , y el espacio  $S_1^o \sqcup S_2^o$  con la topología unión disjunta. Definimos la relación de equivalencia  $\sim$  dado por  $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2)$ , con  $x_i \in S_i := \varphi_i^{-1}(\partial B(0,1))$ ,  $i = 1, 2$ . Definimos la suma conexa de  $S_1$  y  $S_2$  como el cociente

$$X = \frac{S_1^o \sqcup S_2^o}{\sim}$$

Se denotará  $X = S_1 \# S_2$ .

La suma conexa no depende de los puntos ni del homeomorfismo elegido y se tiene que es conmutativa, asociativa y tiene como elemento neutro  $\mathbb{S}$ . Además, la suma conexa de, por ejemplo, dos toros da lugar a la siguiente superficie que denotaremos por  $\mathbb{T}_2$ :

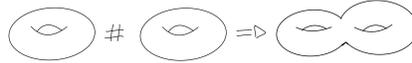


Figura 6: Dibujo de un toro doble

Se observa que se cumple que:

- $S_1 \# S_2$  es una superficie topológica.
- $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$ .
- $S_1 \# S_2$  es orientable  $\iff s_j$  es orientable para  $j = 1, 2$ .

**Corolario 2.6.4.** *Los siguientes enunciados son ciertos:*

- i. *Toda superficie topológica compacta y orientable no homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$  es suma conexa de una cantidad finita de toros, donde esa cantidad coincide con su género.*
- ii. *Toda superficie topológica compacta y no orientable no homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$  es suma conexa de una cantidad finita de planos proyectivos, donde esa cantidad coincide con su género.*

*Demostración.* Probemos i. El Teorema de Clasificación de Superficies (2.6.1) garantiza que una superficie topológica compacta orientable y no homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$  es necesariamente homeomorfa a  $S_{m_n}$  para algún  $n$ . Por lo que bastará probar que  $S_{m_n}$  es suma conexa de  $n$  toros. Si denotamos por  $\mathbb{T} = S_{m_n}$  al toro, cuya característica de Euler, que como ya hemos visto, es 0, por la fórmula enunciada arriba de que  $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$  tenemos que:

$$\chi(\mathbb{T} \# \mathbb{T}) = \chi(\mathbb{T}) + \chi(\mathbb{T}) - 2 = -2 = \chi(S_{w_2})$$

y tras un proceso inductivo, podemos concluir que

$$\chi(\mathbb{T} \# \dots \# \mathbb{T}) = 2 - 2n = \chi(S_{w_n})$$

Como  $\mathbb{T} \# \dots \# \mathbb{T}$  y  $S_{w_n}$  son ambas orientables, por el Corolario 2.6.2 podemos concluir que son homeomorfos. Probar ii. es análogo, recordando que  $\chi(\mathbb{P}) = 1$ .  $\square$

**Ejemplo 2.6.5.** Dado el esquema  $w = abacb^{-1}c^{-1}$  veamos a que tipo de superficie es homeomorfa. Observamos que el esquema tiene un par de segunda especie, por lo que ya sabemos que dicha superficie es no orientable. Siguiendo el recorrido del polígono que representa el esquema nos fijamos en que el grafo borde  $\Gamma_w$  tiene solo un vértice y tres aristas que serán bucles. Por la Proposición 2.3.14  $\chi(S_w) = 1 + \chi(\Gamma_w) = 1 + (1 - 3) = -1$ . La única superficie no orientable con  $\chi(S) = -1$  es la suma conexa de tres planos proyectivos. Por lo que

$$S_w = \mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}$$

### 3. INMERSIÓN DE GRAFOS EN SUPERFICIES

El Teorema de Clasificación de superficies, probado en el capítulo anterior, es de gran importancia para los grafos inmersos en superficies ya que, dicho teorema nos permite englobar a todas las superficies en dos únicas familias, o son orientables y por tanto son una suma conexa de toros o son no orientables y son, entonces, una suma conexa de planos proyectivos. Y por lo tanto, los grafos embebidos en superficies también se pueden estudiar como grafos embebidos en superficies orientables o grafos embebidos en superficies no orientables.

En este capítulo daremos nociones generales que son aplicables a los dos casos. En general, y salvo que se indique lo contrario, en este capítulo  $S$  denotará una superficie arbitraria.

**Definición 3.0.1.** Diremos que un grafo  $G$  está trazado sobre una superficie  $S$  si todos los vértices de  $G$  corresponden con puntos de  $S$  y todas las aristas, que son la imagen de una aplicación continua e inyectiva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  donde las imágenes de 0 y 1 son respectivamente los puntos de  $S$  que corresponden con vértices, solo se cortan en los vértices comunes.

Las caras o componentes conexas del complementario del grafo trazado pueden ser o no células. Entendiendo células como espacios topológicos homeomorfos a un disco abierto.

**Definición 3.0.2.** Diremos que existe una inmersión celular de un grafo  $G$  en una superficie  $S$  si se puede trazar en esa superficie dicho grafo y sus caras son células. En ocasiones lo denotaremos como  $G \hookrightarrow S$ .

**Teorema 3.0.3** (Teorema de Euler). Sea  $G$  un grafo conexo inmerso en una superficie  $S$  entonces se cumple que

$$v - a + c = \chi(S).$$

donde  $v, a$  y  $c$  son respectivamente los vértices, las aristas y las caras del grafo  $G$ .

#### 3.1. Bandas de descomposición

Como hemos visto en el capítulo 2 todas las superficies se pueden construir pegando polígonos entre sí, los vértices y las aristas de estos polígonos pueden ser vistos como un grafo embebido en la superficie. Alternativamente, dado un grafo podemos agregarle alguna estructura combinatoria que implícitamente describa los polígonos, la superficie que pretendemos obtener y el embebimiento.

##### 3.1.1. Descomposición en bandas para superficies

Sea  $G \hookrightarrow S$  un embebimiento celular. Se puede rodear cada vértice del grafo por un disco en la superficie  $S$  y cada borde de  $G$  por una banda de modo que la unión de todos los discos y bandas preserve la forma del grafo  $G$ .

El complementario de esta representación en  $S$  consiste en una familia de discos, cada uno de ellos dentro de una de las caras del embebimiento.

Esta descomposición de la superficie  $S$  en bandas y en (dos tipos de) discos se describe a continuación:

**Definición 3.1.1.** Definimos una 1-banda como un espacio topológico  $b$  junto con un homeomorfismo  $h : I \times I \rightarrow b$  donde  $I$  es el intervalo unidad  $[0, 1]$ .

A los arcos  $h(I \times \{j\})$  para  $j = 0, 1$  los llamaremos extremos de la banda  $b$ , y a los arcos  $h(\{j\} \times I)$  para  $j = 0, 1$  los llamaremos lados de  $b$ .

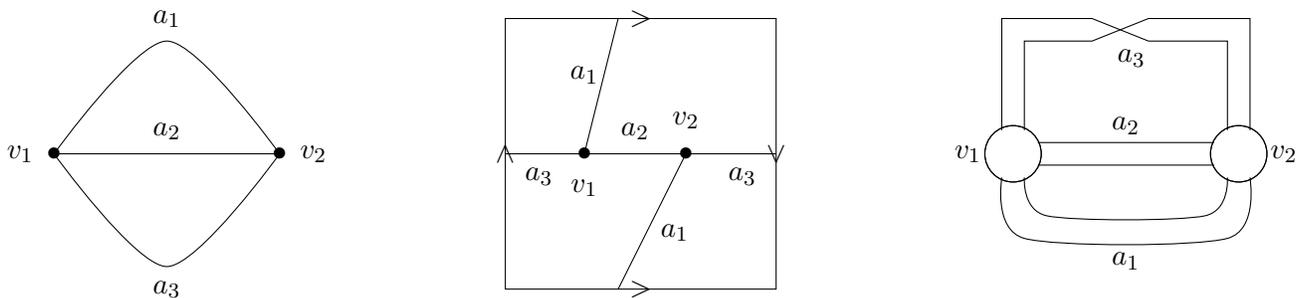
**Definición 3.1.2.** Una 0-banda es un espacio topológico homeomorfo al disco unidad al igual que una 2-banda.

**Definición 3.1.3.** Una descomposición en bandas de una superficie es una colección de 0-bandas, 1-bandas y 2-bandas tal que satisface:

- Dadas dos bandas, estas intersecan solo en sus extremos.
- La unión de todas las bandas es la superficie  $S$ .
- Cada extremo de una 1-banda está contenido en una 0-banda.
- Cada lado de una 1-banda está contenido en una 2-banda.
- Las 0-bandas y las 2-bandas son discontinuas dos a dos.

**Definición 3.1.4.** Una descomposición en bandas reducida es una descomposición en bandas  $B$  donde no se tienen en cuenta las 2-bandas.

**Ejemplo 3.1.5.** Sea  $G$  el grafo dado por dos vértices y tres aristas que los unen. La siguiente representación es este grafo embebido en la botella de Klein, más adelante hablaremos más sobre sus características, y su correspondiente descomposición en bandas reducida.



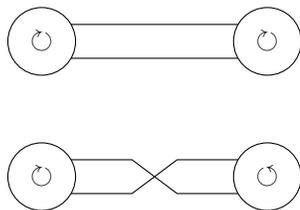
Una descomposición en bandas de una superficie es una versión 2-dimensional de la construcción topológica conocida como descomposición en asas de una  $n$ -variedad.

### 3.1.2. Orientabilidad de la descomposición en bandas

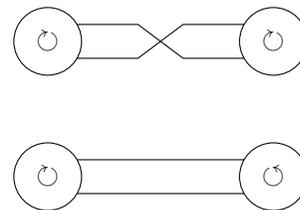
**Definición 3.1.6.** Diremos que una descomposición en bandas está localmente orientada si cada una de sus 0-bandas tiene asignada una orientación.

**Definición 3.1.7.** Una 1-banda preserva su orientación si las direcciones inducidas en sus extremos por las 0-bandas son las mismas que las inducidas por una de las dos posibles orientaciones de una 1-banda. Si esto no ocurre, entonces la 1-banda revierte la orientación.

Estas dos posibles orientaciones se ilustran en la siguiente figura.



Dos bandas que preservan la orientación



Dos bandas que revierten la orientación

**Definición 3.1.8.** Se dice que una arista  $e$  de un grafo  $G$  embebido en una superficie con una descomposición en bandas localmente orientada es de tipo 0 si preserva la orientación y es de tipo 1 si no.

**Ejemplo 3.1.9.** En el ejemplo 3.1.5 las 1-bandas  $a_1$  y  $a_2$  preservan la orientación y por tanto son bandas localmente orientadas de tipo 0 mientras que la 1-banda  $a_3$  revierte la orientación y es una banda localmente orientable de tipo 1.

### 3.1.3. Sistemas de rotación

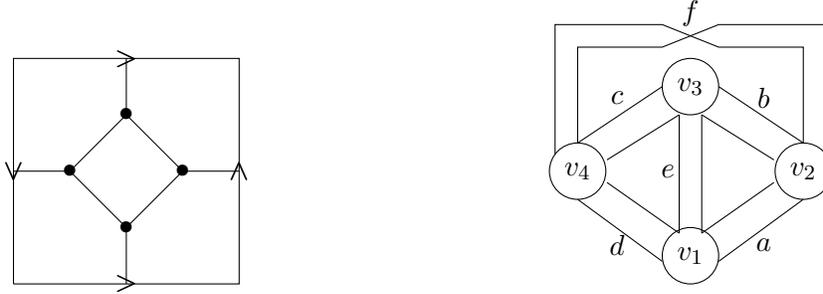
En esta subsección vamos a desarrollar un método para describir una descomposición en bandas, o equivalentemente, un grafo embebido  $G \hookrightarrow S$ . Para describir un grafo embebido  $G \hookrightarrow S$  o su banda de descomposición vamos a especificar como se unen los extremos de la 1-banda a las 0-bandas. Daremos una lista, para cada uno de los vértices, única salvo permutaciones, de las aristas que inciden en cada vértice, denotando con un  $a^1$  si la arista es de tipo 1 y  $a^0$  o simplemente  $a$  si es de tipo 0.

**Ejemplo 3.1.10.** *Vamos a orientar por ejemplo las 0-bandas del ejemplo 3.1.5 en el sentido de las agujas del reloj, el sistema de rotación asociado, sería:*

$$v_1 : a_1 a_2 a_3^1$$

$$v_2 : a_3^1 a_1 a_2$$

**Ejemplo 3.1.11.** *Dado el grafo completo  $K_4$ , en este ejemplo vamos a ver como es su inmersión celular en una botella de Klein y su descomposición en bandas. En el capítulo 5 veremos con más detalle la inmersión de grafos en superficies no orientables.*



Vemos que cinco de las seis aristas son de tipo 0. El sistema de rotación de  $K_4$  será:

$$v_1 : ade$$

$$v_2 : f^1 ab$$

$$v_3 : bec$$

$$v_4 : cd f^1$$

**Teorema 3.1.12.** *Cada sistema de rotación de un grafo  $G$  define un único embebimiento  $G \hookrightarrow S$  localmente orientado. Recíprocamente, cada embebimiento localmente orientado define un sistema de rotación para  $G$ .*

**Definición 3.1.13.** *Sea  $G \hookrightarrow S$  un embebimiento celular del grafo en la superficie y sea  $e$  una de las aristas de  $G$ . Para realizar una cirugía de eliminación de aristas con  $e$ , primero debemos eliminar de la descomposición en bandas de  $G \hookrightarrow S$  la 2-bandas que contienen a la 1-banda que corresponde con  $e$ , eliminar dicha 1-banda y por último cerrar los agujeros formados con una o dos nuevas 2-bandas si es necesario.*

**Nota 3.1.14.** *Supongamos que el embebimiento  $G \hookrightarrow S$  induce un sistema de rotación  $R$  y que el embebimiento  $G' \hookrightarrow S'$  resulta de la cirugía de eliminación de la arista  $e$ . Entonces el sistema de rotación  $R'$  inducido por  $G' \hookrightarrow S'$  se puede obtener eliminando todas las apariciones de la arista  $e$  de  $R$ . Para una descomposición en bandas, esto significa eliminar la 1-banda asociada a  $e$ .*

Cuando eliminamos la arista  $e$  puede ocurrir uno de estos tres casos:

- i. Los dos lados de la arista  $e$  se encuentran en diferentes caras,  $c_1$  y  $c_2$ . Entonces eliminando las 2-bandas que corresponden dichas caras y la 1-banda que corresponde a  $e$  obtenemos un agujero que puede ser cerrado con una nueva 2-banda.
- ii. La cara  $c$  se pega sobre sí misma a lo largo de la arista  $e$  sin torsión. Por lo que al eliminar la 2-banda asociada a  $c$  y la 1-banda asociada a  $e$  obtenemos dos agujeros (y posiblemente desconectemos la superficie). Esos agujeros pueden cerrarse con dos nuevas 2-bandas.
- iii. La cara  $c$  se pega sobre sí misma a lo largo de  $e$  con torsión, por lo que la unión de la 2-banda asociada a  $c$  y la 1-banda asociada a  $e$  forman una banda de Möbius. Al eliminar dichas bandas obtenemos un único agujero que puede cerrarse con una nueva 2-banda.

El siguiente teorema se sigue directamente de los tres casos explicados arriba

**Teorema 3.1.15.** *Sea  $G \hookrightarrow S$  un embebimiento celular, y sea  $e$  una de sus aristas. Llamaremos  $C$  al conjunto de las caras del embebimiento y  $C'$  al conjunto de caras del nuevo embebimiento después de una cirugía de eliminación de la arista  $e$ . Entonces*

*En el caso i.  $|C'| = |C| - 1$  y la superficie resultante es homeomorfa a  $S$ .*

*En el caso ii.  $|C'| = |C| + 1$*

*Y en el caso iii.  $|C'| = |C|$*

### 3.1.4. Algoritmo de trazado de caras

Dado un sistema de rotación de un grafo  $G$  es natural preguntarse si podríamos obtener las caras de dicha inmersión. Además, si obtenemos las caras de dicho embebimiento obtenemos la superficie en la que está inmersa.

**Algoritmo 3.1.16** (Algoritmo de trazado de caras [?]). *En primer lugar, asumimos que  $G$  no tiene vértices de grado 2. Elegimos un vértice  $v_0$  de  $G$  y una de las aristas  $a_1$  que inciden en  $v_0$ . Sea  $v_1$  el otro vértice en el que incide la arista  $a_1$ . La segunda arista  $a_2$  del borde de la cara que estamos formando será la arista siguiente en el sistema de rotación a  $a_1$  en  $v_1$  si la arista es de tipo 0 y  $a_2$  será la arista anterior en el sistema de rotación si  $a_1$  es de tipo 1.*

*Si la arista  $a_1$  es un bucle, entonces  $a_2$  es la arista siguiente a la otra aparición de  $a_1$  en  $v_1$  en el sistema de rotación.*

*En general, si el camino trazado hasta ahora termina con la arista  $a_i$  del vértice  $v_i$ , entonces la próxima arista  $a_{i+1}$  es la siguiente a  $a_i$  en  $v_i$ . El camino termina en la arista  $a_n$  cuando las siguientes dos aristas vuelven a ser  $a_1$  y  $a_2$ .*

*Para empezar otra cara diferente, empezamos por la segunda arista de alguna esquina que no aparece previamente en las caras trazadas. Si no hay esquinas sin usar, entonces todas las caras han sido trazadas.*

Veamos con el siguiente ejemplo la implementación de este algoritmo.

**Ejemplo 3.1.17.** *Consideramos el sistema de rotación*

$$\begin{aligned}
 U.a^1 f b d^1 a^1 e^1 b c \\
 V.c f g \\
 W.e^1 d^1 g
 \end{aligned}$$

*Para la primera cara elegimos el vértice  $u$  y la arista  $a$  con la esquina  $(a,c)$ . La siguiente arista del borde de la cara es  $d$  ya que es la arista que va antes que  $a^1$  en su segunda aparición ya que la arista  $a$  es un bucle de tipo 1. La siguiente arista es  $g$  ya que el camino  $ad$  es de tipo 0. El camino  $dg$  es de tipo 0 así que la siguiente arista es  $c$ . Los dos vértices siguientes son  $a$  y  $d$ . Por lo que ya tenemos una*

cara trazada. Para la segunda cara elegimos la esquina  $(a,f)$  que aun no ha aparecido, como  $f$  es de tipo 0 elegimos la arista  $g$  en el vértice  $v$ . Como  $g$  es de tipo 0 elegimos la arista siguiente en el sistema de rotación del vértice  $w$  que es  $e$ . Al ser  $e$  de tipo 1 en el sistema de rotación de  $u$  elegimos la arista  $a$  que como es un bucle y además de tipo 1 elegimos la arista anterior a la otra aparición de  $a$  en  $u$ , es decir,  $f$ . Con esto completamos la segunda cara del grafo. Las dos caras que faltan por obtener se obtienen de forma similar utilizando las esquinas  $(f,b)$  y  $(b,d)$ . Recapitulando tenemos 4 caras

$$adgc, fgea, bcfa, deb.$$

La arista  $a$  es un bucle de  $U$ , y la arista  $d=(U,W)$ , y por como hemos trazado el camino vemos que el sentido de  $d$  es de  $U$  a  $W$ . La arista  $g=(W,V)$  y como el trazado ya esa en  $W$ , la arista  $g$  va de  $W$  a  $V$ . Con esta dinámica obtenemos las siguientes caras.

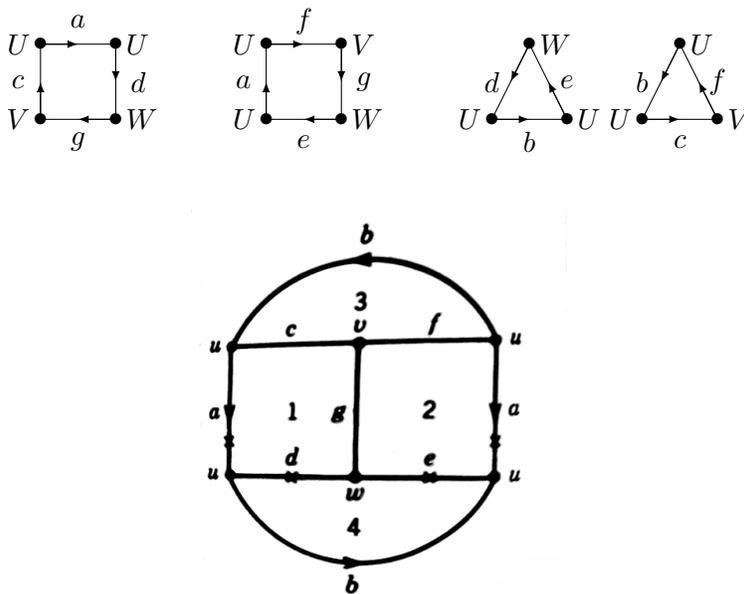


Figura 7: Polígono fundamental de la botella de Klein obtenida de las caras de un grafo inmerso en ella

### 3.2. Géneros de un grafo inmerso

El concepto que se presenta en este apartado es probablemente uno de los más importantes para el estudio de los grafos embebidos celularmente en una superficie topológica, el género de un grafo. Existen dos tipos de géneros, aritméticos y topológicos, además dentro de los topológicos distinguimos uno para embebimientos en superficies orientables y otro para las no orientables. En este apartado vamos a definirlos y trabajar la relación que existe entre ellos para finalmente determinar de la mejor manera posible como se comporta el rango de género topológico en algunos tipos de grafos concretos.

**Definición 3.2.1.** El género aritmético  $\beta(G)$  de un grafo  $G$  es el número de pétalos obtenidos tras la contracción de un árbol generador del grafo.

Nota: El género aritmético se calcula como  $\beta(G) = a - v + 1$  y es conocido con el número de Betti.

**Definición 3.2.2.** El rango de género topológico orientable de un grafo  $G$ ,  $GTo(G)$ , es el conjunto de todos los enteros  $p$  tal que existe una inmersión celular de grafo  $G$  en la superficie  $T_p$ .

Denotaremos por  $\gamma(G)$  al mínimo  $p$  tal que  $G \hookrightarrow T_p$  y  $\gamma_M(G)$  al máximo.

**Teorema 3.2.3** (Teorema de interpolación para superficies orientables (Duke, 1966)). Sea  $G$  un grafo conexo. Entonces el género topológico  $GTo(G)$  es un intervalo de enteros.

*Demostración.* Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos sistemas de rotaciones del grafo  $G$  en dos superficies distintas. Podemos obtener  $L_2$  a partir de  $L_1$  permutando las entradas de cada una de las filas. Cada permutación de este tipo puede lograrse mediante una secuencia de pasos que mueva una arista a la vez. La lista consecutiva en dicha secuencia representa embebimientos adyacentes, por la nota 3.1.14. Por lo tanto, existe una secuencia de embebimientos celulares adyacentes de un grafo  $G$  empezando por uno en la superficie con género  $\gamma(G)$  y terminando en uno en la superficie de género  $\gamma_M(G)$ . Como las superficies embebidas adyacentes difieren como mucho en uno su género, concluimos la demostración.  $\square$

De acuerdo con este teorema vemos que el rango de género topológico orientable  $GT_o(G)$  es el intervalo  $[\gamma(G), \gamma_M(G)]$ .

Podemos determinar la relación que existe entre el género topológico orientable máximo  $\gamma_M(G)$  y el género aritmético  $\beta(G)$ .

Si el grafo  $G$  se puede embeber en una superficie orientable  $T$  de género  $\gamma_M(G)$  entonces, como hemos visto en ??,  $\chi(T) = 2 - 2\gamma_M(G)$ . Entonces,

$$a - v + 1 = \beta(G)$$

multiplicando por  $-1$  y sumando  $c$  a ambos lados, nos queda que

$$v - a + c - 1 = -\beta(G) + c.$$

Por el teorema 3.0.3 tenemos que  $2 - 2\gamma_M(G) - 1 = -\beta(G) + c$  y operando y despejando  $\beta(G)$ , nos queda

$$\beta(G) = 2\gamma_M(G) + (c - 1).$$

Como  $c \geq 1$  ya que como mínimo siempre tiene que haber una cara, la cara exterior, obtenemos que

$$\beta(G) \geq 2\gamma_M(G). \quad (1)$$

Si suponemos que  $S$  es una superficie orientable, gracias a la relación que acabamos de obtener, podemos concluir:

- Si  $\beta(G) = 0$  entonces  $2\gamma_M(G) \leq 0$  es decir  $\gamma_M(G) = 0$  pues  $\gamma_M(G)$  indica el número de asas de la superficie.  
Que  $\beta(G) = 0$  quiere decir que  $a - v + 1 = 0$  por lo que  $a = v - 1$  es decir un árbol.  
Entonces todos los grafos que sean árboles se pueden embeber solo en una esfera.
  - Si  $\beta(G) = 1$  entonces  $\gamma_M(G) = 0$  pues  $\gamma_M(G)$  es un número entero.  
Que  $\beta(G) = 1$  quiere decir que  $a = v$ . Entonces todos los grafos que tengan el mismo número de aristas que de vértices, como es el caso de los grafos cíclicos  $C_n$ , se pueden embeber en una esfera.
  - Cuando  $\beta(G)$  es mayor que 2 entonces el valor de  $\gamma_M(G)$  puede variar entre 0 y  $g/2$ , es decir puede que se pueda representar en una esfera, en un toro, en un 2-toro,...
- Para determinar el género topológico vamos a tener que atender a otras características que se comentarán en capítulos posteriores.

**Definición 3.2.4.** *El rango de género topológico no orientable de un grafo  $G$ ,  $GT_{no}(G)$ , es el conjunto de todos los enteros  $k$  tal que existe una inmersión celular de grafo  $G$  en la superficie  $U_k$ .*

*Denotaremos por  $\bar{\gamma}(G)$  al mínimo  $k$  tal que  $G \hookrightarrow U_k$  y  $\bar{\gamma}_M(G)$  al máximo.*

Existe un teorema análogo al 3.2.3 para superficies no orientables. Para demostrarlo vamos a introducir primero algunas nociones.

**Definición 3.2.5.** Sea  $G \hookrightarrow S$  un embebimiento celular del grafo en la superficie. Para realizar una cirugía torcida a una arista  $e$ , primero eliminamos de la descomposición en bandas de  $G \hookrightarrow S$  las 2-bandas que contienen a la 1-banda que corresponde a  $e$  y le damos un giro extra a la mencionada 1-banda. Para cerrar la superficie resultante necesitaremos una o dos 2-bandas.

**Nota 3.2.6.** Supongamos que la cirugía de torsión de la arista  $e$  del embebimiento  $G \hookrightarrow S$  produce el embebimiento  $G \hookrightarrow S'$  con los correspondientes sistemas de rotación  $R$  y  $R'$ . Entonces el sistema de rotación  $R'$  se obtiene cambiando la orientación de la arista  $e$  en el sistema de rotación  $R$ . Si es de tipo 0 se transforma en tipo 1 y viceversa.

La cirugía de torsión de una arista  $e$  presenta únicamente los dos siguientes casos:

- i. Los dos lados de  $e$  se encuentran en diferentes caras,  $c_1$  y  $c_2$ . Entonces eliminando las 2-bandas que corresponden a dichas caras obtenemos dos agujeros, que se fusionan en un único agujero al girar la 1-banda correspondiente a  $e$ . Ya que la unión de la 1-banda y la nueva 2-banda que necesitamos para cerrar el agujero forman una banda de Möbius, la superficie resultante es no orientable, independientemente de la orientación inicial de la superficie.
- ii. Ambos lados de la arista  $e$  están en la misma cara  $c$ . Entonces al eliminar la 2-banda asociada a  $c$  obtenemos un agujero, que se transforma en dos al girar la 1-banda asociada a  $e$ .

**Teorema 3.2.7.** Sea  $G \hookrightarrow S$  un embebimiento celular y sea  $e$  una arista de ese grafo. Sea  $C$  el conjunto de las caras de  $G \hookrightarrow S$  y sea  $C'$  el conjunto de las caras de  $G \hookrightarrow S'$  que se obtiene de una cirugía de torsión de la arista  $e$ .

En el caso i.)  $|C'| = |C| - 1$  y  $\chi(S') = \chi(S) - 1$

En el caso ii.)  $|C'| = |C| + 1$  y  $\chi(S') = \chi(S) + 1$

**Teorema 3.2.8** (Teorema de interpolación para superficies no orientables (Stahl, 1978)). Sea  $G$  un grafo conexo. Entonces el género topológico no orientable  $GTno(G)$  es un intervalo de enteros.

*Demostración.* Si  $G$  es un árbol entonces el rango de género topológico no orientable,  $GTno(G)$  es el intervalo  $[0, 0]$ . Si  $G$  no es un árbol, suponiendo que el grafo  $G$  puede embeberse en la superficie no orientable  $U_k$ , se realizan una sucesión de cirugías de torsión. En cada etapa, seleccionaremos una arista que forme parte de dos caras. Así, en  $\gamma_{\bar{M}}(G) - \bar{\gamma}(G)$  pasos, obtendremos un embebimiento celular en  $U_r$  para cada  $r$  contenida en el intervalo  $[\bar{\gamma}(G), \gamma_{\bar{M}}(G)]$ .  $\square$

Al igual que con las superficies orientables, por el Teorema de interpolación de superficies no orientables o Teorema de Stahl,  $GTno(G)$  es el intervalo  $[\bar{\gamma}(G), \gamma_{\bar{M}}(G)]$ .

Con lo expuesto arriba vamos a determinar la relación que existe entre el género topológico no orientable máximo  $\gamma_{\bar{M}}(G)$  con el género aritmético  $\beta(G)$ . Si  $G$  puede ser embebido en una superficie no orientable de género  $\gamma_{\bar{M}}(G)$  entonces por ??,  $\chi(U_{\gamma_{\bar{M}}(G)}) = 2 - \gamma_{\bar{M}}(G)$ .

Repetiendo todas las cuentas del caso orientable, obtenemos

$$2 - \gamma_{\bar{M}}(G) - 1 = -\beta(G) + c$$

y operando y despejando  $\beta(G)$ ,

$$\beta(G) = \gamma_{\bar{M}}(G) + (c - 1) \geq \gamma_{\bar{M}}(G).$$

Por lo que

$$\beta(G) \geq \gamma_{\bar{M}}(G). \quad (2)$$

**Teorema 3.2.9** (Edmonds, 1965). Sea  $G$  un grafo conexo, entonces  $\gamma_{\bar{M}}(G) = \beta(G)$ .

*Demostración.* Si  $G$  es un árbol, entonces  $\bar{\gamma}_M(G) = 0$ . El género aritmético de un árbol es 0 por el teorema 1.0.12 que nos dice que un árbol tiene  $v - 1$  aristas.

Si  $G$  no es un árbol, entonces la inmersión celular  $G \hookrightarrow S$  tiene dos o más caras. Este embebimiento se podría construir, por ejemplo, ajustando el borde de un polígono y luego extendiendo el sistema de rotación parcial inducido de manera arbitraria a un sistema de rotación completo. Para tal embebimiento, uno puede elegir una arista  $a$  que pertenezca a dos caras diferentes y realizar una cirugía de torsión, tal que el resultado es una variedad no orientable y el número de caras disminuye en 1. La cirugía de torsión de manera iterativa produce un embebimiento celular de una única cara en una superficie no orientable, de modo que  $\chi(U) = |V| - |A| + 1$ . Como consecuencia se tiene,

$$\bar{\gamma}(U) = 2 - \chi(U) = 1 - |V| + |A| = \beta(G).$$

□

Una vez relacionado cada uno de los dos géneros topológicos con el género aritmético nos falta comprobar si existe alguna relación entre los géneros topológicos.

**Teorema 3.2.10.** *Sea  $G$  un grafo conexo. Entonces  $\bar{\gamma}(G) \leq 2\gamma(G) + 1$ .*

*Demostración.* Si  $G$  es un árbol  $\gamma(G) = \bar{\gamma}(G) = 0$ . De lo contrario, dada una arista  $e$  del grafo  $G$  que forma parte de dos caras diferentes del embebimiento  $G \hookrightarrow S$  donde  $S$  es una superficie orientable de género  $\gamma(G)$ . Como  $S$  es orientable  $\chi(S) = 2 - 2\gamma(G)$ .

Si realizamos una cirugía de torsión sobre la arista  $e$  obtenemos la superficie  $S'$  no orientable. Por el teorema 3.2.7  $\chi(S') = \chi(S) - 1 = 2 - 2\gamma(G) - 1$ .

y por ser  $S'$  no orientable, su característica de Euler es  $\chi(S') = 2 - \bar{\gamma}(G)$  por lo que concluimos que  $\bar{\gamma}(G) \leq 2\gamma(G) + 1$ . □

Para finalizar esta sección acerca del género de los grafos inmersos en superficies vamos a centrarnos en dos tipos de grafos, descritos en el capítulo 1.

### Los grafos completos $K_n$ .

Por la proposición 1.0.12, vemos que el género aritmético

$$\beta(K_n) = \binom{n}{2} - n + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Veamos si podemos concluir algo sobre el rango de género topológico orientable:

Por la ecuación obtenida 1 podemos concluir que

$$\gamma_M(K_n) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{4}.$$

Por otro lado, para encontrar una cota para el género topológico orientable mínimo  $\gamma(K_n)$  vamos a tener en cuenta el siguiente resultado:

**Teorema 3.2.11.** *Si  $G$  es un grafo conexo, simple y de género topológico orientable mínimo  $\gamma(G)$  se tiene que*

$$a \leq 3(v - 2 + 2\gamma(G)).$$

*Demostración.* Sabemos que cada cara de un embebimiento está formada por al menos 3 aristas. Denotamos  $a_i$  al número de aristas que tiene una cara  $c_i$  tal que  $a_i \geq 3$  y que una arista forma parte únicamente dos caras. Si sumamos todas las  $a_i$  estaríamos contando todas las aristas dos veces.

$$\sum_{i=1}^c a_i = 2a.$$

Además, como cada  $a_i \geq 3$ , se tiene que

$$2a = \sum_{i=1}^c a_i \geq \sum_{i=1}^c 3 = 3c.$$

Esto es  $2a \geq 3c$  o lo que es lo mismo

$$c \leq \frac{2}{3}a.$$

Y al tratarse de una superficie orientable por el Teorema de Euler (3.0.3)  $v - a + c = 2 - 2\gamma(G)$ .

$$2 - 2\gamma(G) = v - a + c \leq v - a + \frac{2a}{3} = v - \frac{a}{3}.$$

Esto es,

$$2 - 2\gamma(G) \leq v - \frac{a}{3}.$$

y despejando el número de aristas  $a$

$$a \leq 3(v - 2 + 2\gamma(G)).$$

□

Por tanto en el caso particular de los grafos completos  $K_n$

$$\binom{n}{2} \leq 3(n - 2 + 2\gamma(K_n)).$$

Y despejando  $\gamma(K_n)$  nos queda

$$\gamma(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

**Teorema 3.2.12** (Ringel and Youngs). *Si  $n \geq 3$  entonces*

$$\gamma(K_n) = \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil$$

Por lo que para los grafos completos conocemos el género topológico orientable mínimo y tenemos una cota superior para el género máximo por lo que para este tipo de grafos es relativamente fácil encontrar el  $GTo(K_n)$ .

Veamos ahora si podemos concluir algo sobre el rango de género topológico no orientable: Como los grafos completos son conexos, por el teorema 3.2.9

$$\gamma_{\bar{M}}(K_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Para el género topológico no orientable mínimo veamos el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.13.** *Si  $G$  es un grafo conexo, simple y de género topológico no orientable mínimo  $\bar{\gamma}(G)$  se tiene que*

$$a \leq 3(v - 2 + \bar{\gamma}(G)).$$

*Demostración.* La prueba es análoga a la del Teorema 3.2.11, pero tenemos que tener en cuenta que al tratarse de una superficie no orientable, el Teorema de Euler, 3.0.3,  $v - a + c = 2 - \bar{\gamma}(G)$ . Por lo que

$$2 - \bar{\gamma}(G) \leq v - \frac{a}{3}$$

es decir,

$$a \leq 3(v - 2 + \bar{\gamma}(G))$$

□

En el caso particular de los grafos completos  $K_n$  se tiene que

$$\binom{n}{2} = 3(n - 2 + \bar{\gamma}(G))$$

y despejando  $\bar{\gamma}(G)$  nos queda que

$$\bar{\gamma}(G) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{6}.$$

**Teorema 3.2.14** (Ringel and Youngs). *Si  $n \geq 3$  y  $n \neq 7$  entonces*

$$\bar{\gamma}(K_n) = \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \rceil.$$

Entonces el rango de género topológico no orientable  $GTno(K_n)$  queda perfectamente determinado por el intervalo

$$\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \rceil, \frac{(n-1)(n-2)}{2} \rceil \quad (3)$$

**Los grafos bipartitos completos  $K_{n,m}$ .**

Por la proposición 1.0.14 el género aritmético de un grafo bipartito completo  $K_{n,m}$  es

$$\beta(K_{n,m}) = nm - n - m + 1.$$

Veamos que podemos concluir del rango de género topológico orientable:

Por la relación obtenida 1 se tiene

$$\gamma_M(K_{n,m}) \leq \frac{nm - n - m + 1}{2}$$

Por otro lado, para acotar el mínimo vamos a utilizar el Teorema 3.2.11 aunque afinando un poco más, pues en el caso particular de los grafos bipartitos completos todas las caras están formadas por al menos 4 aristas para  $n, m \geq 2$ . Entonces se tiene que

$$c \leq \frac{2}{4}a.$$

Y teniendo en cuenta que la superficie en la que estamos estudiándolo ahora es orientable con género  $\gamma(K_{n,m})$  tenemos que

$$nm \leq 2(n + m - 2 + 2\gamma(K_{n,m})) \quad (4)$$

despejando  $\gamma(K_{n,m})$  tenemos

$$\gamma(K_{n,m}) \geq \frac{(n-2)(m-2)}{4}$$

**Teorema 3.2.15** (Ringel). *Si  $m \geq 2$  y  $n \geq 2$  entonces*

$$\gamma(K_{n,m}) = \lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \rceil.$$

Al igual que en el caso orientable de los grafos completos  $K_n$ , del rango de género topológico orientable se conoce el mínimo y el máximo está acotado superiormente.

Veamos ahora que podemos concluir del rango de género topológico no orientable:

Por un lado, como los grafos  $K_{n,m}$  son conexos por el teorema 3.2.9

$$\gamma_{\bar{M}}(K_{n,m}) = nm - n - m + 1$$

y por otro lado, para acotar el género topológico no orientable mínimo, utilizando lo comentado en el caso orientable de que todas las caras están formadas por al menos 4 aristas y teniendo en cuenta que la característica de Euler de una superficie no orientable es  $2 - \bar{\gamma}(K_{n,m})$ , el número de aristas queda acotado por

$$nm \leq 2(n + m - 2 + \bar{\gamma}(K_{n,m})). \quad (5)$$

Y despejando  $\bar{\gamma}(K_{n,m})$  nos queda

$$\bar{\gamma}(K_{n,m}) \geq \frac{(n-2)(m-2)}{2}$$

**Teorema 3.2.16.** *Si  $m \geq 3$  y  $n \geq 3$  entonces*

$$\bar{\gamma}(K_{n,m}) = \lceil \frac{(m-2)(n-2)}{2} \rceil.$$

Por lo tanto, al igual que para los grafos completos  $K_n$ , el rango de género topológico no orientable de los grafos bipartitos  $K_{n,m}$  queda perfectamente determinado por el intervalo

$$\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{2} \rceil, nm - n - m + 1$$

## 4. INMERSIÓN DE GRAFOS EN SUPERFICIES ORIENTABLES

En este capítulo vamos a estudiar las características principales de los grafos inmersos celularmente en superficies orientables. En primer lugar, estudiamos los grafos inmersos en la esfera, que es la superficie orientable más básica. En segundo lugar estudiaremos los grafos inmersos celularmente en un toro y apoyándonos en los resultados del capítulo anterior determinaremos hasta que número de vértices es posible embeberlo en cada una de las dos superficies indicadas. Y por último se indicará, de forma breve, como se podría representar un grafo en una superficie orientable de género mayor.

### 4.1. Grafos planos

**Definición 4.1.1** (Grafo plano). *Consideramos que un grafo  $G$  simple sin vértices de grado 1 y 2 es plano si puede ser inmerso en una esfera.*

No es complicado de ver, que la definición que hemos proporcionado de grafo inmerso celularmente en una esfera es equivalente a la inmersión de dicho grafo en el plano  $\mathbb{R}^2$ . Esta equivalencia viene dada por la proyección estereográfica que permite trasladar cualquier grafo del plano a la esfera:

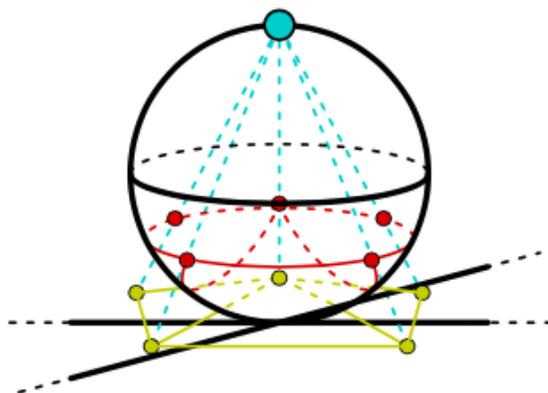
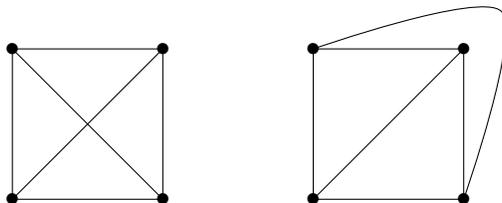


Figura 8: Proyección estereográfica

Dibujando líneas desde el "polo norte"  $(0,0,1)$  a través de puntos que pueden ser tanto del plano  $xy$  como de la superficie de la esfera, podemos trasladar grafos pintados en la esfera (representado en rojo) en grafos en el plano (en amarillo) y viceversa.

**Ejemplo 4.1.2.** *El grafo completo  $K_4$  es plano, aunque en la representación de él que hemos usado en este trabajo dos de sus arista se cortan sin que su intersección sea un vértice. En el siguiente grafo, que es isomorfo al primero, ninguna arista se corta en un punto que no sea un vértice y por tanto  $K_4$  es plano.*



Con este ejemplo también concluimos que un grafo puede ser plano aunque tenga representaciones no planas, basta con que una única de sus representaciones sea plana.

**Definición 4.1.3.** *Dado un grafo plano  $G$ , definimos un cara de  $G$  como un espacio topológico homeomorfo a un disco abierto*

Atendiendo al Teorema de Euler enunciado en el capítulo anterior, siendo  $p(\mathbb{S}^2) = 0$ , se tiene

**Teorema 4.1.4** (Teorema de Euler para la esfera). *Si  $G$  es un grafo conexo y plano se tiene que*

$$v - a + c = 2.$$

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo conexo y plano con  $n$  vértices. Demostraremos este teorema por inducción sobre el número de vértices  $n$ .

Si  $n = 1$  entonces todas las aristas que hubiese serían bucles. Si hay  $m$  aristas entonces hay  $m + 1$  caras y se tiene

$$v - a + c = 1 - m + m + 1 = 2.$$

Supongamos que la fórmula se cumple para todo grafo conexo y plano con  $n \leq k$  vértices.

Sea  $G$  un grafo conexo y plano de  $k + 1$  vértices. Sea  $v$  uno de sus vértices tal que en el grafo  $G - v$  pertenece a la cara  $c_1$ . Sea  $gr(v) = i$ . Al añadir  $v$  al grafo  $G - v$  la cara  $c_1$  se divide en  $i$  subcaras.

Si  $G - v$  tiene  $a$  aristas y  $c$  caras,  $G$  tiene  $a + i$  aristas y  $c + i - 1$  caras y se tiene

$$(k + 1) - (a + i) + (c + i - 1) = k - a + c \stackrel{H.I.}{=} 2$$

□

**Corolario 4.1.5.** *Sea  $G$  un grafo plano con  $v$  vértices,  $a$  aristas y  $k$  componentes, entonces*

$$v - a + c = k + 1$$

*Demostración.* Dado un grafo  $G$  con  $v$  vértices y  $a$  aristas con  $k$  componentes, entonces cada componente tiene  $v_i$  vértices,  $a_i$  aristas y  $c_i$  caras tal que

$$v = \sum_{i=1}^k v_i, a = \sum_{i=1}^k a_i \text{ y } c = \sum_{i=1}^k c_i - (k - 1).$$

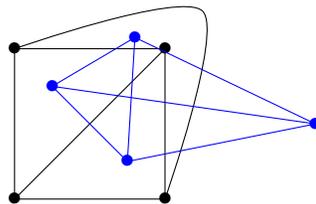
Cada componente es plana por lo que satisface el teorema 4.1.4. Se tiene entonces

$$v - a + c = \sum_{i=1}^k v_i - \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=1}^k c_i - (k - 1) = \sum_{i=1}^k (v_i - a_i + c_i) - (k - 1) = \sum_{i=1}^k 2 - (k - 1) = 2k - (k - 1) = (k + 1).$$

□

**Definición 4.1.6** (Grafo dual). *Dado un grafo  $G$  conexo y plano podemos construir su grafo dual  $G'$  eligiendo de cada cara del grafo un punto que será un vértice del grafo dual y para cada arista que separa dos caras del grafo  $G$  existe una arista que incide en los dos puntos determinados en cada una de las dos caras.*

**Ejemplo 4.1.7.** *Dado el grafo completo  $K_4$  el grafo en azul es su grafo dual.*



**Teorema 4.1.8.** *El grafo dual de un grafo plano también es plano y no tiene vértices de grado 1 y 2.*

**Definición 4.1.9.** Al número de aristas que forman una cara  $c$  lo denominaremos grado de la cara  $c$  y lo denotaremos por  $gr(c)$ . Denotaremos por  $C_i$  al número de caras de un grafo  $G$  con grado  $i$ .

**Teorema 4.1.10.** Sea  $G$  un grafo plano conexo se cumple que

$$\sum iC_i = 2a$$

*Demostración.* El número de vértices de un grafo  $G$  es el número de caras de su dual  $G'$  y el número de aristas es el mismo en ambos grafos.

Sea  $g$  el grado de una cara  $c$  de  $G$ , es decir, la cara  $c$  está formada por  $g$  aristas. Por tanto el grado del vértice del grafo de dual que está en esa cara es también  $g$ . Y por el Teorema del Apretón de manos, queda probado este teorema.  $\square$

**Teorema 4.1.11.** Sea  $G$  un grafo plano conexo, se tiene que

$$3C_3 + 2C_4 + C_5 \geq 12$$

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo plano conexo con  $v$  vértices,  $a$  aristas y  $c$  caras. Por el Teorema 4.1.10 se tiene que

$$2a = \sum iC_i \tag{6}$$

Por otro lado, una cara tiene como mínimo grado 3 pues las caras están formadas por al menos 3 aristas. Por lo que el número de caras de un grafo será la suma de todas las caras de grados de 3 hasta como máximo el número de aristas  $a$ . Es decir

$$c = \sum_{i=3}^a C_i \tag{7}$$

$6 \cdot (6) - (7)$  se obtiene

$$6c - 2a = 3C_3 + 2C_4 + C_5 - C_7 - 2C_8 - \dots$$

Como  $C_i \geq 0$  para todo  $i$  se tiene que

$$6c - 2a \leq 3C_3 + 2C_4 + C_5.$$

Como  $G$  es plano entonces cumple el Teorema de Euler para la esfera, 4.1.4.

$$6v - 6a + 6c = 12$$

$$6c - 2a = 12 + (4a - 6v)$$

q

$\square$

**Teorema 4.1.12.** Si  $G$  es un grafo conexo y plano con  $v \geq 3$  entonces

$$a \leq 3v - 6$$

*Demostración.* Este es un caso particular del Teorema 3.2.11 para  $\gamma(G) = 0$   $\square$

Con este teorema podemos determinar, por ejemplo, el máximo  $n$  tal que  $K_n$  puede ser plano. Por el Teorema 1.0.12 sabemos que tiene  $\binom{n}{2}$  aristas. Entonces

$$\binom{n}{2} \leq 3n - 6$$

esto es,

$$n^2 - 7n + 12 \leq 0$$

que se satisface para  $3 \leq n \leq 4$ . Por lo que para  $n \geq 5$   $K_n$  no es plano. Como hemos visto al principio del capítulo,  $K_4$  es plano y evidentemente  $K_3$  también lo es.

También podemos determinar la relación que exististe entre  $n$  y  $m$  para que un grafo bipartito pueda ser plano o no. Utilizamos la cota de aristas obtenida en el capítulo anterior, la ecuación (4),

$$nm \leq 2(n + m - 2)$$

con  $\gamma(K_{n,m}) = 0$ , que se cumple si  $n$  o  $m$  son 1 o 2. Por lo que todo  $K_{n,m}$  con  $n$  y  $m \geq 3$  no son planos. Como podemos ver el primer grafo completo no plano que hay es  $K_5$  y el primer grafo bipartito no plano es  $K_{3,3}$ .

Kazimierz Kuratowski demostró en 1931 que los grafos  $K_5$  y  $K_{3,3}$  son los básicos en donde no se cumple la planaridad, indicando las condiciones necesarias y suficientes para determinar si un grafo es plano o no.

**Teorema 4.1.13** (Teorema de Kuratowski). *Un grafo  $G$  es plano si y solo si no contiene como subgrafos ni a  $K_{3,3}$  ni a  $K_5$ .*

## 4.2. Grafos toroidales

**Definición 4.2.1.** *Diremos que un grafo  $G$  es toroidal si existe una inmersión celular  $G \hookrightarrow T$ .*

**Ejemplo 4.2.2.** *Como hemos visto en el apartado anterior ni  $K_5$  ni  $K_{3,3}$  son grafos planos. En cambio, si son toroidales y está sería una de sus posibles representaciones:*



Al igual que para los grafos planos el teorema de Euler se particulariza para los grafos toroidales.

**Teorema 4.2.3** (Teorema de Euler para el toro). *Si  $G$  es un grafo toroidal conexo se tiene que*

$$v - a + c = 0$$

**Ejemplo 4.2.4.** *Vamos a analizar los dos grafos representados en el Ejemplo 4.2.2:*

*En primer lugar,  $K_5$ . Como sabemos el número de vértices y de aristas permanece invariables, por lo que  $v = 5$  y  $a = 10$ . Si observamos el dibujo vemos que tiene 4 caras alrededor del vértice del centro perfectamente determinadas por tres aristas. También tiene otra cara más, que en la representación viene dada por los cuatro cuadriláteros de las esquinas. Cabe destacar que, debido a la identificación de los bordes del polígono fundamental, la cara exterior queda determinada por 6 aristas. Como  $K_5$  es toroidal cumple el Teorema de Euler para el toro, 4.2.3, ya que  $5 - 10 + 5$  es efectivamente 0.*

*En segundo lugar,  $K_{3,3}$ . De nuevo ya son conocidos el número de vértices,  $v = 6$  y el número de aristas,  $a = 9$ . Veamos cuántas caras tiene esta representación. Observando el dibujo del ejemplo anterior vemos dos caras claramente determinadas por cuatro aristas y una cara exterior determinada por 6 aristas. De nuevo, como  $K_{3,3}$  es toroidal cumple el Teorema de Euler para el toro, 4.2.3, con  $c = 3$ .*

**Teorema 4.2.5.** Si  $G$  es conexo, simple y toroidal con  $v \geq 3$ , entonces

$$a \leq 3v$$

*Demostración.* Este es un caso particular del Teorema 3.2.11 para  $\gamma(G) = 1$ . □

Por ejemplo, gracias a este teorema podemos determinar cual es el máximo  $n$  tal que  $K_n$  se podría embeber en un toro. Sabemos, por el teorema 1.0.12, que un grafo completo  $K_n$  tiene  $\binom{n}{2}$  aristas y por el teorema anterior:

$$\binom{n}{2} \leq 3n$$

obteniendo la desigualdad

$$n^2 - 7n \leq 0$$

que se satisface para  $0 \leq n \leq 7$ . Por lo que el mayor  $K_n$  tal que  $K_n \hookrightarrow T$  es  $K_7$ .

Esto evidentemente no implica que  $K_n$  con  $n = 1, \dots, 7$  pueda embeberse en un toro. Pero sabemos que de  $n = 8$  en adelante no va a ser posible.

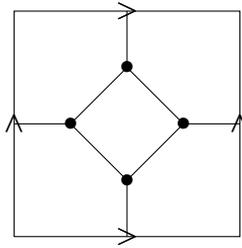
Para saber si  $K_n$  es toroidal debemos obtener alguna representación. Ya hemos visto que, por ejemplo,  $K_5$  es toroidal. Veamos que ocurre con el resto de grafos completos hasta  $n = 7$ .

· $K_3$ . Sabemos que el rango de género topológico orientable de  $K_3$ ,  $GT_o(K_3)$ , tiene como mínimo 0 y el máximo está acotado por 1. Veamos entonces si  $K_3$  es o no toroidal.

Supongamos que sí, entonces cumple el Teorema de Euler para el toro,  $v - a + c = 0$ . Sabemos que tiene 3 vértices y 3 aristas, por lo que,  $K_3 \hookrightarrow T$  tendría 0 caras. Absurdo.

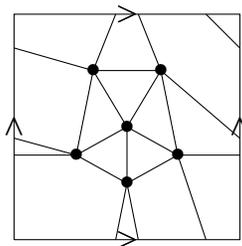
Por lo tanto,  $GT_o(K_3) = [0, 0]$ , es decir solo se puede embeber en la esfera.

· $K_4$ . De nuevo, sabemos que el género mínimo es 0 y el género máximo está acotado por 1. La siguiente representación demuestra que  $K_4$  se puede embeber en un toro.



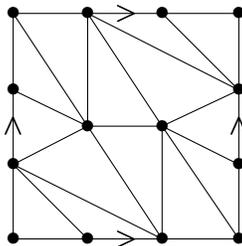
Como sabemos tiene 4 vértices y 6 aristas. Además vemos que su inmersión celular en un toro da como resultado dos únicas caras, la central, formada por cuatro aristas y la exterior, formada por seis aristas.

· $K_6$ . El género mínimo de  $K_6$  como hemos dicho en el apartado anterior no es 0 pues  $K_6$  no es plano. Por el Teorema 3.2.12 sabemos que  $\gamma(K_6) = 1$ . Este dibujo es la representación de  $K_6$  en un toro.



La inmersión celular de  $K_6$  en un toro tiene, como se observa en el dibujo, 5 caras fácilmente detectables en el centro de la representación y 4 caras que se forman gracias a la identificación del polígono fundamental.

· $K_7$ . El género mínimo de  $K_7$ , por el Teorema 3.2.12 es 1. Esta es una manera de construir  $K_7 \hookrightarrow T$ .



Para esta representación hemos utilizado la identificación de los bordes del polígono para situar ahí los vértices, de manera que podamos visualizarlo de una manera más sencilla. Además podemos contar perfectamente las 14 caras que tiene y si nos fijamos todas sus caras son triángulos, por lo que  $K_7 \hookrightarrow T$  es una posible triangulación del toro.

A continuación haremos lo mismo con los grafos bipartitos. Veamos cual es la relación que necesariamente tienen que cumplir  $n$  y  $m$  de  $K_{n,m}$  para poder ser representada en un toro.

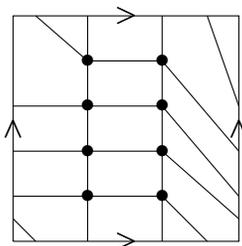
Tomando la inecuación (4)  $nm \leq 2(n + m)$  con  $\gamma(K_{n,m}) = 1$  obtenemos que

$$m \leq \frac{2n}{n-2}.$$

(Nótese que, en esencia, es el mismo grafo  $K_{n,m}$  que  $K_{m,n}$ ).

Esto nos indica que por ejemplo si  $n = 3$  entonces  $m \leq 6$  por lo que podemos asegurar que, por ejemplo,  $K_{3,7}$  no es toroidal ni ninguno de la forma  $K_{3,m}$  para  $m \geq 7$ . O si  $n = 4$  entonces  $m \leq 4$  por lo que los grafos de la forma  $K_{4,m}$  con  $m \geq 5$  tampoco son toroidales.

A parte de  $K_{3,3}$  representado y comentado arriba, veamos el grafo bipartito  $K_{4,4}$  y su inmersión en un toro. El grafo  $K_{4,4}$  es no plano y toroidal, pues por el Teorema 3.2.15,  $\gamma(K_{4,4}) = 1$ . Esta es una posible representación de dicho grafo.



### 4.3. Grafos toroidales para $p \geq 2$ .

Al igual que podemos embeber algunos grafos en toros, también vamos a poder embeber grafos en superficies orientables de género mayor. Para ello nos apoyaremos en el Corolario 2.6.4 que define cualquier superficie orientable de género  $p$  como la suma conexa de  $p$  toros.

Como se ha visto a lo largo de todo el trabajo, la mejor manera de embeber un grafo en una superficie es representar dicho grafo en el polígono fundamental de esa superficie. De manera visual, la siguiente figura muestra como se forma dicho polígono fundamental de la suma conexas de dos toros.

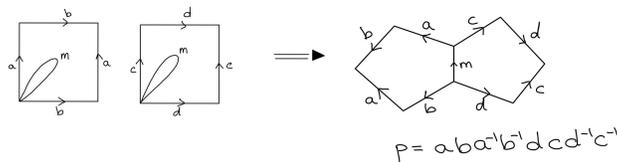
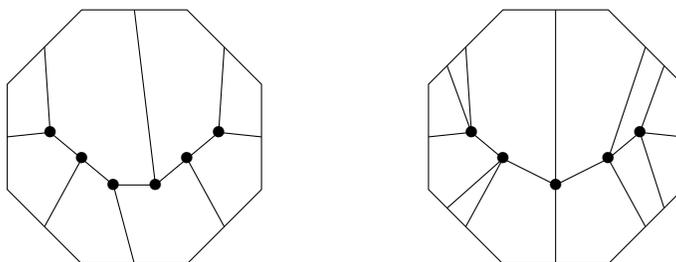


Figura 9: Polígono fundamental de un 2-toro

Del Teorema de clasificación de superficies concluimos que toda superficie orientable es homeomorfa a una superficie  $S_{m,n}$  y del Corolario 2.6.4 que toda superficie topológica orientable es la suma conexas de una cantidad finita de toros, por lo que toda superficie  $S_{m,n}$  es homeomorfa a la suma conexas de toros. Por lo tanto el esquema binario puro de una suma conexas de  $p$  toros es  $w = (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) \dots (a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1})$  por la Definición 2.5.5.

Así es como podemos obtener el polígono fundamental de una suma conexas de  $p$  toros para  $p$  natural arbitrario. Como se puede observar cuanto mayor sea  $p$  mayor será el número de lados del polígono, de hecho el número de lados de un polígono de una superficie orientable de género  $p$  es  $4p$ .

A continuación se presenta la inmersión celular en la suma conexas de 2 toros de dos de los grafos más destacados de la Teoría de Grafos,  $K_{3,3}$  y  $K_5$ :



No es tan sencillo como en las representaciones en el toro, pero siguiendo las identificaciones de los lados del polígono podemos ver como:

- La inmersión celular de  $K_{3,3}$  en el dos toro tiene una única cara homeomorfa a un disco abierto. Esto hace que el Teorema de Euler, particularizándolo a un toro doble ( $\chi(\mathbb{T}\#\mathbb{T}) = -2$ ), se cumpla.
- La inmersión celular de  $K_5$  en el dos toro tiene 3 caras. De nuevo, el Teorema de Euler se cumple.

Como se ha demostrado el género topológico orientable máximo de un grafo solo está acotado superiormente y esto nos da una idea de cual podría ser el género de una superficie en la que se puede embeber como máximo. Pero la única forma de demostrar que esa inmersión celular existe es dando una representación como las dadas hasta ahora. Es por esto que se complicada de manera notable el embebimiento en superficies con géneros altos.

Para terminar, vamos a dar el rango de género topológico orientable de  $K_{3,3}$  y  $K_5$ .

- El rango de género topológico orientable de  $K_{3,3}$  es  $GTo(K_{3,3}) = [1, 2]$ . Supongamos que  $K_{3,3}$  se puede embeber en un tres toro. Entonces por el Teorema de Euler se cumple que  $v - a + c = -4$ , como  $K_{3,3}$  tiene 6 vértices y 9 aristas da como resultado que el embebimiento celular tendría  $c = -1$  caras. Lo cual es absurdo.
- El género topológico máximo de  $K_5$  está acotado por 3 y se cumple que es exactamente 3. Por lo que  $GTo(K_5) = [1, 3]$ . La siguiente figura proporciona la inmersión en un tres toro, con una única cara. Esta representación se ha obtenido del paper "Embedding  $K_{3,3}$  and  $K_5$  on the Double Torus", mencionado en la bibliografía.

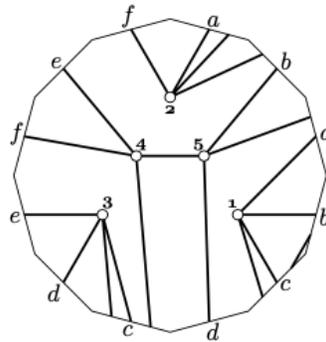


Figura 10: Inmersión celular de  $K_5$  en un tres toro

## 5. INMERSIÓN DE GRAFOS EN SUPERFICIES NO ORIENTABLES

En este último capítulo trabajaremos la inmersión celular de grafos en superficies no orientables, empezando por el plano proyectivo, la superficie no orientable más básica. Después estudiaremos los grafos inmersos celularmente en la botella de Klein que como hemos visto en el capítulo dos, es la suma conexa de dos planos proyectivos. Por último daremos, al igual que en el caso orientable, unas nociones para ver como se pueden embeber grafos en superficies no orientables resultantes de la suma conexa de más de dos planos proyectivos.. Estudiaremos los grafos completos y los grafos bipartitos en este tipo de superficies.

### 5.1. Grafos proyectivos

**Definición 5.1.1.** Diremos que un grafo  $G$  es proyectivo si existe una inmersión celular de dicho grafo en el plano proyectivo  $\mathbb{P}$ ,  $G \hookrightarrow \mathbb{P}$ .

Particularizando el Teorema de Euler 3.0.3 se tiene

**Teorema 5.1.2** (Teorema de Euler para el plano proyectivo). Si  $G$  es un grafo conexo y proyectivo, entonces cumple que

$$v - a + c = 1$$

Además, del teorema 1.0.14 se sigue el siguiente teorema:

**Teorema 5.1.3.** Si  $G$  es un grafo proyectivo, entonces el número de aristas se puede acotar superiormente tal que

$$a \leq 3(v - 1)$$

Como en el caso orientable, para demostrar que un grafo está embebido en un plano proyectivo, en general, es necesario dar una representación válida. No es el caso de por ejemplo los grafos completos  $K_n$  y los grafos bipartitos completos  $K_{n,m}$  que gracias al estudio realizado en el capítulo 3 el rango de género topológico no orientable de estos dos tipos de grafos esta perfectamente determinado.

Veamos, en primer lugar, hasta que  $n$  es, quizás, posible embeber un grafo completo  $K_n$ . Como sabemos un grafo completo tiene  $\binom{n}{2}$  aristas. Por lo tanto

$$\binom{n}{2} \leq 3n - 3$$

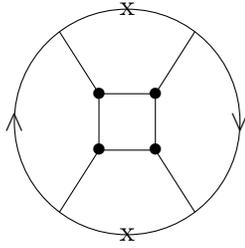
$$n^2 - n \leq 6n - 6$$

$$n^2 - 7n + 6 \leq 0$$

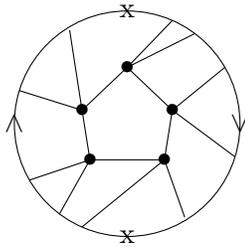
si  $1 \leq n \leq 6$ . Por lo tanto, de  $n = 7$  en adelante no es posible la inmersión celular de  $K_n$  en un plano proyectivo.

A continuación se indicará el rango de género topológico no orientable,  $GTno$ , de los primeros 6 grafos completos gracias a la conclusión 3 y si son proyectivos se dará su representación.

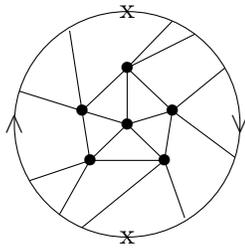
- Evidentemente  $K_1$  y  $K_2$  no se pueden representar en el plano proyectivo, pues su única cara, que es el propio plano proyectivo, no es una célula.
- $GTno(K_4) = [0, 3]$ . Entonces en particular existe  $K_4 \hookrightarrow \mathbb{RP}$  que puede ser, el siguiente:



- $GTno(K_5) = [1, 6]$ . Como sabemos por el capítulo anterior  $K_5$  no es plano además el teorema de Ringel y Youngs 3.2.15 nos asegura el género topológico no orientable mínimo es 1. Y a continuación damos la inmersión celular de  $K_5$  en el plano proyectivo.



- El grafo completo con  $n$  mayor del que existe su inmersión celular en el plano proyectivo, como hemos visto, es  $K_6$ . Esta sería una posible representación:



Para que un grafo bipartito sea proyectivo, del Teorema ?? concluimos que necesariamente

$$a \leq 2v - 2$$

es decir,

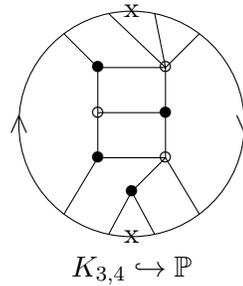
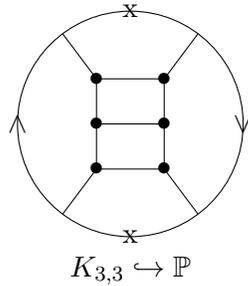
$$nm \leq 2n + 2m - 2$$

Si despejamos, dejando  $n$  en función de  $m$  nos queda que, para  $m > 2$

$$n \leq \frac{2m - 2}{m - 2}$$

Entonces si  $m = 3$  entonces  $n \leq 4$ , por lo que los grafos bipartitos  $K_{3,n}$  para  $n \geq 5$  no tienen una inmersión celular en el plano proyectivo. Al igual que los grafos  $K_{4,n}$  para  $n \geq 4$ .

La figura de la izquierda es una posible inmersión celular de  $K_{3,3}$  y la de la derecha es una de  $K_{3,4}$ .



Por la conclusión 4.2.2 se tiene que  $GTno(K_{3,3}) = [1, 4]$  y que  $GTno(K_{3,4}) = [1, 6]$ .

## 5.2. Teoremas de estructura en grafos

La Teoría de la inmersión celular en superficies es un tema actual con grandes avances y aportaciones en las últimas décadas. A continuación se hará mención de algunas ellas, concluyendo con lo que se considera el análogo de Kuratowski para el plano proyectivo.

**Conjetura 5.2.1** (Erdős, König). *Para cualquier superficie  $S$ , el conjunto  $T(S)$  de subgrafos topológicos minimales prohibidos para la clase de grafos que tienen una inmersión celular en la superficie  $S$  es finito.*

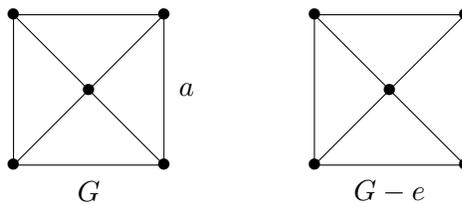
Por ejemplo, un grafo plano es un grafo que no tiene como subgrafo ni a  $K_5$  ni a  $K_{3,3}$  (Teorema de Kuratowski). Entonces  $T(\mathbb{S}) = \{K_{3,3}, K_5\}$ .

Glover, Huneke y Wang (1979) encontraron 103 subgrafos prohibidos para el plano proyectivo y en 1980 Archdeacon demostró que la lista estaba completa.

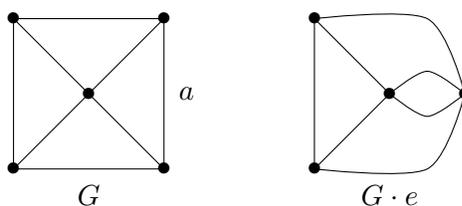
**Teorema 5.2.2** (Archdeacon y Huneke (1989)). *El conjunto  $T(S)$  es finito para toda superficie no orientable.*

Para un grafo conexo  $G$  vamos a definir dos operaciones:

- **Eliminación.** Dada una arista  $a$  del grafo  $G$ , la eliminación de aristas consiste en trazar el grafo sin esa arista. Si uno de los vértices en los que incide  $a$  es de grado 1, también se elimina dicho vértice, para que el resultado sea otro grafo conexo.



- **Contracción.** Dada una arista  $a$ , suponemos que no es un bucle, de un grafo  $G$ , su contracción da como resultado un grafo donde los dos vértices incidentes en  $a$  se identifican como el mismo.



**Definición 5.2.3.** Un grafo  $H$  es un menor del grafo  $G$  si puede obtenerse desde  $G$  eliminando aristas y contrayendo aristas.

**Definición 5.2.4.** Dado un grafo  $H$  diremos que es un menor prohibido si por ser un subgrafo de un grafo  $G$  entonces este grafo  $G$  no pertenece a alguna familia de grafos.

**Conjetura 5.2.5** (Wagner). Para cualquier superficie  $S$ , el conjunto  $M(S)$  de menores prohibidos para la clase de grafos que admiten una inmersión celular en  $S$  son finitos.

La conjetura de Wagner, 5.2.5 fue demostrada por Robertson y Seymour en 1990. Y aunque en la esfera o el plano proyectivo haya un número "pequeño" de subgrafos y menores prohibidos, en el caso del toro, los últimos datos (2018) estiman que tiene más de 250815 subgrafos topológicos prohibidos y más de 17523 menores prohibidos.

En la siguiente figura se presentan los 35 menores prohibidos dados por Archdeacon.

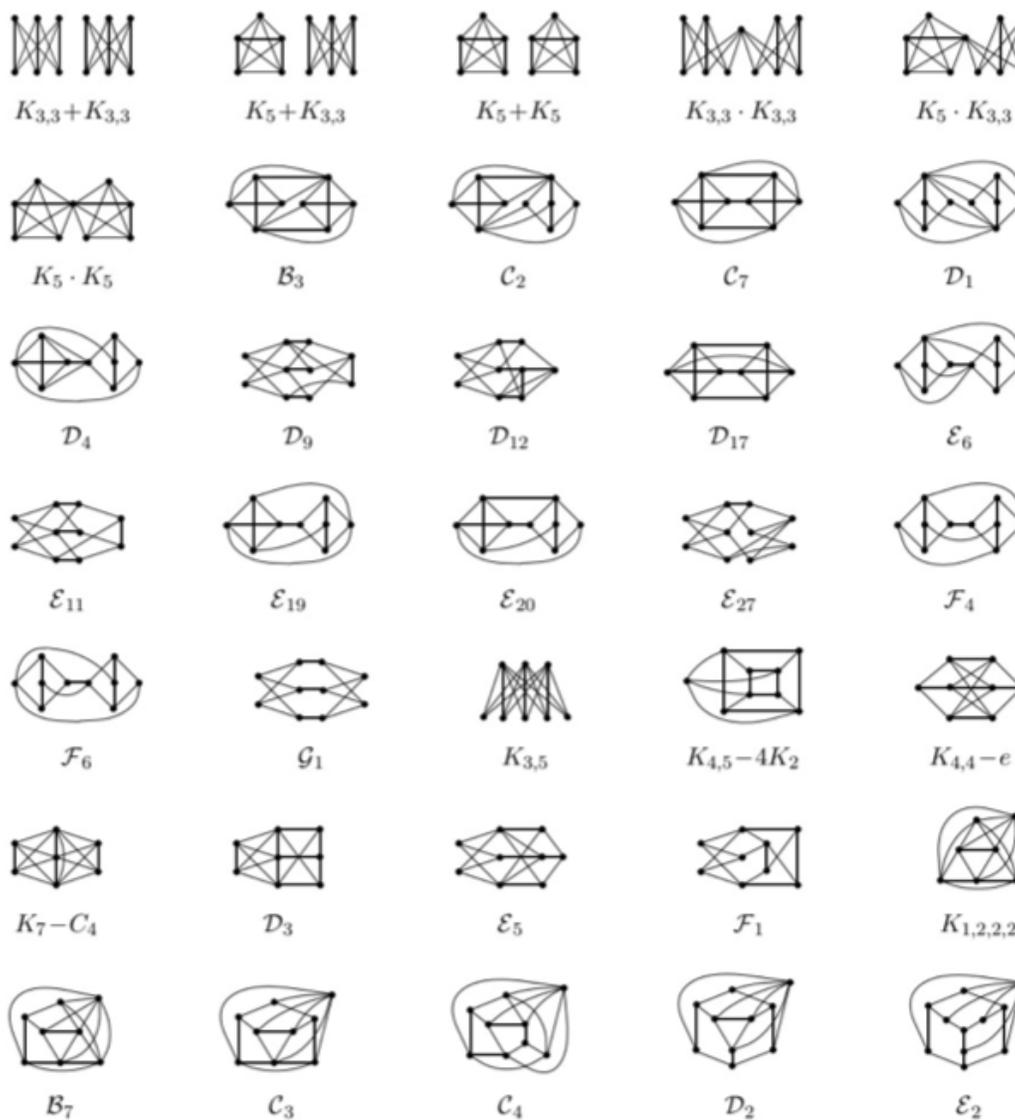


Figura 11: Menores prohibidos del plano proyectivo

### 5.3. Grafos dos-proyectivos

**Definición 5.3.1.** Diremos que un grafo  $G$  es dos-proyectivo si existe una inmersión celular en la suma conexa de dos planos proyectivos, es decir, si existe una inmersión celular en una botella de Klein.

La obtención del polígono fundamental de la botella de Klein queda representada en la siguiente figura:

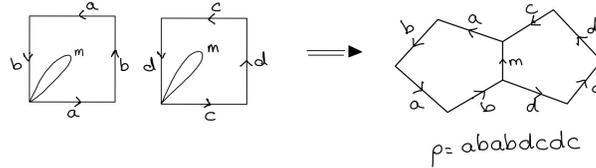


Figura 12: Suma conexa de dos planos proyectivos y su polígono fundamental

Siguiendo la misma dinámica que en el capítulo 4 y en la sección anterior sobre grafos proyectivos, vamos a particularizar los Teoremas del Capítulo 3 a esta superficie de género 2 con  $\chi(\mathbb{K}) = 0$ .

**Teorema 5.3.2** (Teorema de Euler para la botella de Klein). *Sea  $G$  un grafo conexo dos-proyectivo entonces se tiene que*

$$v - a + c = 0$$

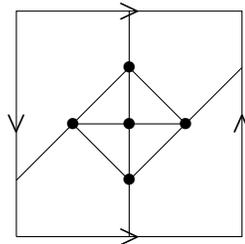
**Teorema 5.3.3.** *Si  $G$  es un grafo dos-proyectivo, entonces el número de aristas se puede acotar tal que*

$$a \leq 3v$$

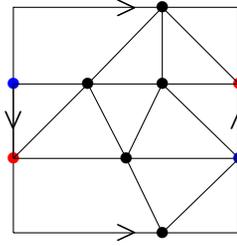
Se obtiene que para que esto sea cierto el número de vértices no puede ser mayor que 7. Como de costumbre se intentará dar una representación de estos grafos.

Debemos recordar que los bordes del polígono con sentido contrario se identifica cada punto  $P$  con su antipodal.

- $K_4$  esta representado en el Capítulo 3 Ejemplo 3.1.11.
- $K_5$  es 2-proyectivo, pues como hemos visto  $GTno(K_5) = [1, 6]$  y esta es una posible representación:



- $K_6$ . Como se ha visto,  $K_6$  también es 2-proyectivo y esta es una de las posibles inmersiones celulares en una botella de Klein:



Vemos que en esta inmersión celular  $K_6$  tiene 9 caras.

Existe una diferencia entre el caso del toro y el caso de la botella de Klein. El grafo  $K_7$  si admite inmersión celular en el toro, mientras que no en la botella de Klein. Existe el siguiente teorema, de cuya demostración únicamente se dará una idea pues requiere conceptos y herramientas que se alejan de la intención de este trabajo.

**Teorema 5.3.4.** *El  $GTno(K_7) = [3, 15]$ .*

*Demostración.* Que el género topológico no orientable máximo sea 15 es consecuencia del Teorema de Edmonds (3.2.9).

Veamos que su género topológico no orientable mínimo es 3. Utilizando la relación entre el género topológico mínimo orientable y el no orientable, 3.2.10, se tiene que

$$\bar{\gamma}(K_7) \leq 2\gamma(K_7) + 1$$

y como hemos visto en el capítulo 4,  $\gamma(K_7) = 1$  por lo que

$$\bar{\gamma}(K_7) \leq 3$$

Entonces para demostrar que  $\bar{\gamma}(K_7) = 3$  se demuestra que  $\bar{\gamma}(K_7) \neq 2$ . Para ello se supone que si es posible, y por el Teorema de Euler para la botella de Klein, dicha inmersión debe de tener 14 caras. A continuación se hace uso del Algoritmo de trazado de caras, explicado en el Capítulo 3 y se demuestra que no es posible que existan 14 caras todas ellas células y sin cortes.  $\square$

En la apreciación (5), si lo particularizamos a  $\mathbb{K}$ , tenemos que un grafo bipartito completo tiene

$$a \leq 2v$$

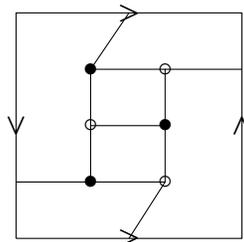
Así pues, podemos asegurar que los grafos bipartitos que no cumplan que para  $m \geq 2$

$$n \leq \frac{2m}{m-2}$$

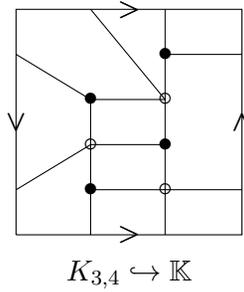
no tienen inmersión celular en la botella de Klein.

Por ejemplo, para los grafos de la familia  $K_{3,n}$  no se tienen inmersión si  $n \geq 7$  o para la familia  $K_{4,n}$  no se tiene si  $n \geq 5$ .

Además, con lo que hemos concluido arriba, acerca del rango de género topológico no orientable de  $K_{3,3}$  y  $K_{3,4}$  el género de la botella de Klein, 2, pertenece a ambos intervalos y por tanto podemos embeberlos en ella.



$$K_{3,3} \hookrightarrow \mathbb{K}$$



Al igual que en el caso orientable, del Capítulo 2 podemos concluir que, el Teorema de clasificación de superficies dicta que toda superficie no orientable es homeomorfa a una superficie  $S_{m_n^*}$  y del Corolario 2.6.4 que toda superficie topológica no orientable es la suma conexa de una cantidad finita de planos proyectivos, por lo que toda superficie  $S_{m_n^*}$  es homeomorfa a la suma conexa de planos proyectivos. Por lo tanto el esquema binario puro de una suma conexa de  $p$  planos proyectivos es  $w = a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_p a_p$  por la Definición 2.5.5.

Así es como podemos obtener el polígono fundamental de una suma conexa de  $p$  planos proyectivos para  $p$  natural arbitrario. Como se puede observar cuanto mayor sea  $p$  mayor será el número de lados del polígono, de hecho el número de lados de un polígono de una superficie orientable de género  $p$  es  $4p$ .

## Referencias

- [1] MOHAR, B. y THOMASSEN, C., *Graphs on Surfaces*. The Johns Hopkins University. 2001.
- [2] GROSS, JONATHAN L. y TUCKER, THOMAS W. *Topological Graph Theory*. Wilsen-Interscience series. 1987.
- [3] DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, ANÁLISIS Y TOPOLOGÍA. *Lecture notes, Graph Theory*. University of Dundee.
- [4] DE ALARCÓN VALVERDE, LUCÍA. *Clasificación de superficie* Universidad Complutense de Madrid. 2022.
- [5] LÓPEZ, FRANCISCO J. *Topología II* Universidad de Granada.
- [6] KOÇAY WILLIAM L. y GAGARIN ANDREI *Embedding  $K_{3,3}$  and  $K_5$  on the Double Torus* University of Manitoba, Canadá. 2022.
- [7] M.BAJER, S.NORINE *Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph*. Advances in Mathematics 215 (2007) 766-788
- [8] J.MATOUSEK, J.NESETRIL *Invitación a la Matemática Discreta* Edición Reverté (2008). Barcelona
- [9] D. ARCHDEACON, P. HUNEKE *A Kuratowski theorem for Nonorientable Surfaces* Journal of Combinatorial Theory Series b 46, 1732-231 (1989)