



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**EL ALGORITMO PROPHET. ANÁLISIS DE FOURIER EN EL
ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES.**

Autor: Javier Luna Manteca

Tutor: Eusebio Arenal Gutiérrez

Septiembre 2023

Índice

1. Introducción	4
2. El algoritmo Prophet	4
2.1. Análisis de series temporales	4
2.2. El algoritmo	5
2.3. Tendencia	6
2.3.1. Modelo no lineal de crecimiento de saturación	6
2.3.2. Modelo de tendencia lineal a trozos	9
2.3.3. Puntos de cambio	9
2.3.4. Incertidumbre de predicción	10
2.4. Estacionalidad	11
2.5. Festivos y eventos	12
3. Análisis de Fourier y series temporales.	12
3.1. Fundamentos teóricos	12
3.1.1. Transformada de Fourier	14
3.2. Series de Fourier en el estudio de componentes estacionales.	14
3.2.1. Acercamiento de ajuste de curvas.	15
3.2.2. Periodicidades múltiples	19
3.2.3. Ortogonalidad de los sinusoides.	20
3.2.4. Efecto del tiempo discreto: <i>Aliasing</i> o solapamiento	21
3.2.5. Ajustando la frecuencia.	23
3.2.6. Análisis armónico.	24
3.2.7. Series periódicas	27
3.3. Series de Fourier en el estudio de componentes cíclicas no estacionales.	28
3.3.1. Oscilaciones no sinusoidales.	28
3.3.2. Fluctuaciones de amplitud y de fase.	30
3.3.3. Demodulación compleja.	31
3.3.4. Suavizado: Filtrado lineal.	33
4. Ejemplo práctico de aplicación del algoritmo Prophet con R.	36

1. Introducción

Las series temporales están constantemente presentes en nuestra vida cotidiana. En una variedad de campos, incluyendo la predicción meteorológica, el análisis de datos financieros y la monitorización de la salud, las series temporales desempeñan un papel fundamental en la comprensión y anticipación de eventos futuros.

En este trabajo de fin de grado, se presenta el algoritmo Prophet desarrollado por Facebook, una herramienta estadística de predicción de series temporales, haciendo una descripción de todos los modelos estadísticos que este algoritmo utiliza para ajustar los modelos de predicción. Una de las características de este algoritmo es que tiene capacidad para modelar series temporales con múltiples componentes, como tendencias, estacionalidades y efectos de días festivos.

Uno de los aspectos fundamentales del algoritmo Prophet es su capacidad para descomponer una serie temporal en sus componentes subyacentes y modelarlas de manera individual. Esto nos lleva al tema de nuestro estudio: el análisis de Fourier en las series temporales.

Este estudio se divide en dos partes principales. Primero, el uso de las series de Fourier en el estudio de componentes estacionales en las series temporales. Esto incluirá un análisis detallado de cómo los sinusoides pueden utilizarse para capturar patrones estacionales en los datos, así como conceptos importantes como la ortogonalidad de las funciones sinusoidales, el ‘Aliasing’ y el análisis armónico. En la segunda parte, se trata el uso de las series de Fourier en el estudio de componentes cíclicas no estacionales. Aquí, se estudian conceptos como la demodulación compleja y los periodogramas.

Por último, para ilustrar las capacidades del algoritmo Prophet, se realiza un ejemplo de predicción utilizando este algoritmo con el lenguaje de programación R. Para ello se utilizan datos de concentración de núcleos contaminantes de dióxido de nitrógeno NO_2 en la atmósfera en el núcleo urbano de Londres.

Este trabajo tiene como objetivo presentar el algoritmo Prophet como una herramienta estadística de predicción de series temporales y, al mismo tiempo, proporcionar un estudio exhaustivo del análisis de Fourier en el contexto de las series temporales.

2. El algoritmo Prophet

2.1. Análisis de series temporales

Definición 2.1. *Una serie temporal es una colección de observaciones numéricas organizadas en un orden natural. Normalmente cada observación está asociada con un instante particular o intervalo de tiempo, y esto es lo que proporciona el orden de la serie temporal.*

El análisis de series temporales es una técnica utilizada para estudiar y modelar datos secuenciales que se recopilan a intervalos regulares de tiempo. Estos datos pueden representar fenómenos en campos tan diversos como la economía, la meteorología, la física, la medicina y muchas otras disciplinas científicas. El objetivo del análisis de series temporales es descubrir patrones, tendencias y estructuras subyacentes en los datos para comprender mejor el comportamiento de los fenómenos estudiados y realizar predicciones o estimaciones.

Para analizar y comprender estas series, es fundamental comprender las características básicas que pueden presentar, como tendencias, estacionalidad y periodicidad.

Definición 2.2. *La tendencia se refiere a la dirección general y persistente en la que se mueven los datos a largo plazo. Puede ser ascendente (crecimiento), descendente (decrecimiento) o incluso no existir (datos estacionarios). La tendencia puede ser el resultado de múltiples factores, como cambios en la oferta y demanda, condiciones económicas, políticas o sociales.*

Definición 2.3. *La estacionalidad en una serie temporal se refiere a las fluctuaciones regulares y periódicas que ocurren dentro de una serie temporal en un período de tiempo más corto que la tendencia. Estas fluctuaciones se repiten en intervalos regulares y generalmente están asociadas con factores estacionales, como cambios climáticos, festividades, vacaciones o comportamientos humanos que siguen un ciclo temporal de duración conocida de antemano.*

Definición 2.4. *La periodicidad se refiere a la presencia de patrones repetitivos en una serie temporal. Es decir, ciertos eventos o fluctuaciones en los datos ocurren de manera regular a lo largo del tiempo. Estos patrones pueden manifestarse en diferentes escalas y duraciones. En la componente periódica, la duración del ciclo se desconoce y, además, no todos los ciclos tienen por qué tener la misma duración.*

Observación 2.5. - *Identificar la tendencia es esencial para comprender la evolución de los datos y evaluar su comportamiento a lo largo del tiempo.*

- *La estacionalidad puede tener una duración que varía en función del período específico que se esté analizando.*

- *El análisis de la estacionalidad de una serie temporal es relevante para comprender los efectos cíclicos asociados con fenómenos estacionales y es de utilidad en predicciones.*

- *Las series de Fourier nos ayudan a identificar y descomponer estas periodicidades, lo que nos permite comprender mejor los patrones recurrentes y realizar análisis más precisos de las series temporales.*

- *La mayor diferencia entre la estacionalidad y la periodicidad es que en la estacionalidad la duración del ciclo se conoce de antemano, mientras que en la componente periódica no.*

- *En la componente periódica no todos los ciclos tienen por qué tener la misma duración (la duración es habitualmente aleatoria).*

En resumen, la tendencia describe una dirección general y constante de los datos a largo plazo, la periodicidad se refiere a patrones repetitivos en diferentes escalas de tiempo, y la estacionalidad se enfoca en patrones que se repiten dentro de un intervalo específico relacionado con factores estacionales.

2.2. El algoritmo

El algoritmo de predicción 'Prophet' utiliza un modelo estadístico basado en descomponer la serie temporal en tres componentes principales que representan:

- Tendencia
- Estacionalidad
- Festivos y eventos

Para la tendencia utiliza una función no lineal que se ajusta a los cambios no periódicos a largo plazo. Para la estacionalidad utiliza un modelo de Fourier para capturar patrones repetitivos. La estacionalidad puede ser modelada como componente aditivo o como componente multiplicativo. En este último caso, la componente de la estacionalidad se representa como un factor que multiplica $g(t)$.

Estas tres componentes se combinan, junto con el error, de manera aditiva:

$$y(t) = g(t) + s(t) + h(t) + \varepsilon(t) \quad (1)$$

Donde,

- La función de tendencia $g(t)$ modela cambios no periódicos en el valor medio de la serie temporal.
- La componente estacional $s(t)$ representa cambios periódicos de periodo conocido (p.ej., estacionalidad semanal y/o anual).
- La componente $h(t)$ representa el efecto de los días festivos o eventos que ocurren de manera irregular.
- La componente aleatoria o término del error $\varepsilon(t)$ representa cualquier cambio que no haya sido registrado por el resto de componentes.

Esta especificación es similar a la de un modelo aditivo generalizado (GAM). Esta formulación tiene la ventaja de que es fácilmente descomponible y se pueden añadir componentes si es necesario. La diferencia está en que el algoritmo Prophet sólo utiliza un regresor: el tiempo (con varias funciones lineales o no lineales del tiempo como componentes).

El algoritmo establece valores por defecto que son apropiados para la mayoría de los problemas de predicción, pero deja al usuario alterarlos para conseguir un resultado más óptimo.

2.3. Tendencia

En la implementación del algoritmo Prophet se han incluido dos modelos de tendencia comunes que son ampliamente aplicables en diferentes contextos: un modelo de crecimiento de saturación y un modelo de tendencia lineal a trozos.

2.3.1. Modelo no lineal de crecimiento de saturación

Este modelo asume que la tendencia de los datos se acerca a un límite superior a medida que pasa el tiempo. Es útil cuando se espera que los datos alcancen una meseta o un nivel máximo a cierto plazo.

En otras palabras, en ocasiones el crecimiento es no lineal y satura a una capacidad de carga determinada. Por ejemplo, la capacidad de carga para el número de usuarios de Facebook en un área particular podría ser el número de personas con acceso a internet en esa área.

Este tipo de crecimiento normalmente se modela utilizando el modelo de crecimiento logístico. En este modelo los datos siguen una curva sigmoideal, la cual tiene forma de ‘S’, y en él se utiliza la función logística para representar la tendencia de crecimiento de los datos a medida que se acercan a un límite superior. La función logística tiene, en su forma más básica, la siguiente forma:

$$g(t) = \frac{C}{1 + \exp(-k(t - m))}, \quad (2)$$

donde:

- $g(t)$ es el valor esperado de la componente de la tendencia.
- C es la capacidad de carga, capacidad máxima o límite superior que los datos tienden a alcanzar.
- k es el parámetro o tasa de crecimiento de la curva.
- m es un parámetro que indica el valor ‘x’ del punto medio de la función logística. Se ha decidido llamarlo parámetro de compensación.

Esta curva se caracteriza por un crecimiento lento al principio, un crecimiento más rápido en el medio y luego un crecimiento lento nuevamente cerca del límite superior. Esto refleja el proceso de saturación en el que los datos se acercan a su límite máximo.

La función logística estándar, donde $C = 1$, $k = 1$, $m = 0$ es a menudo llamada función ‘*sigmoide*’.

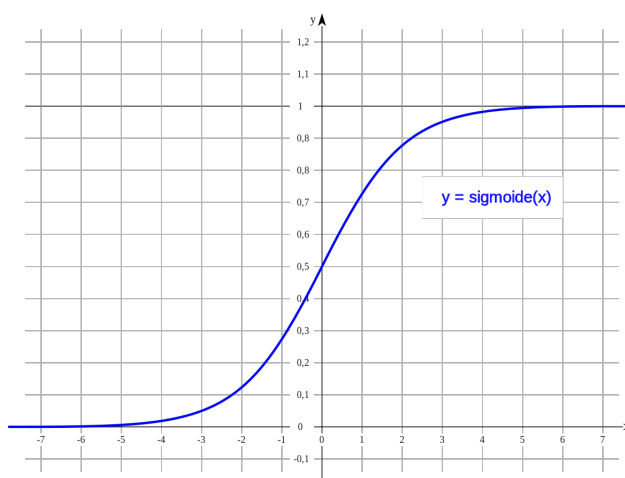


Figura 1: Función sigmoide o sigmoideal. Función logística con $C = 1$, $k = 1$, $m = 0$

Sin embargo, esta forma de modelar la tendencia no refleja aspectos del crecimiento en diversas aplicaciones de Facebook que quieren ser capturados con el modelo. Las constantes C , k y m que se han definido previamente pasan ahora a ser variables con el tiempo y la función deja de ser logística, aunque su estructura parte de esta función. Se acompañan con el adjetivo *constante* los parámetros de la función logística.

- La **capacidad de carga** no es constante. En el ejemplo anterior, donde se analiza el número de usuarios de Facebook en un área particular, se puede observar que el número de personas en el mundo con acceso a internet aumenta, luego también aumentará la capacidad de carga. Por lo tanto la capacidad de carga debe ser dependiente del tiempo, y se cambia C por $C(t)$.

- La **tasa de crecimiento** tampoco es constante, puede verse afectada por diversos factores y el modelo debe ser capaz de incorporar una tasa variable. El algoritmo aborda estos cambios en la tendencia en el modelo de crecimiento definiendo explícitamente puntos de cambio. Estos puntos de cambio son momentos en el tiempo en los que se permite que la tasa de crecimiento cambie, lo que refleja las variaciones en los factores que influyen en el crecimiento de los datos.

Se supone que hay S puntos de cambio en los instantes s_j , $j = 1, \dots, S$. El algoritmo define un vector de ajustes de tasa de crecimiento $\delta \in \mathbb{R}^S$, donde δ_j es el cambio que ocurre en la tasa de crecimiento en el instante s_j . La tasa en cualquier instante t se redefine entonces como la tasa base o inicial $k_0 = k(0)$ más todos los ajustes hasta tal punto: $k(t) = k_0 + \sum_{j:t>s_j} \delta_j$.

Esto se puede representar más fácilmente definiendo un vector $\mathbf{a} \in 0, 1^S$ tal que

$$a_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq s_j \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

La tasa de crecimiento en el instante t es entonces ahora $k(t) = k_0 + \mathbf{a}(t)^\top \delta$.

- Cuando la tasa base constante k es redefinida, también se redefine el **parámetro de compensación** m para que los extremos de los segmentos estén conectados. De la misma manera que antes ahora tenemos un vector de ajustes para el parámetro de compensación:

$$\gamma_j = \left(s_j - m_0 - \sum_{l<j} \gamma_l \right) \left(1 - \frac{k + \sum_{l<j} \delta_l}{k + \sum_{l \leq j} \delta_l} \right),$$

siendo $m_0 = m(0)$ el parámetro de compensación en el instante inicial. El parámetro de compensación en el instante t es entonces ahora $m(t) = m_0 + \mathbf{a}(t)^\top \gamma$.

Entonces el modelo de crecimiento logístico a trozos se redefine de la siguiente manera:

$$g(t) = \frac{C(t)}{1 + \exp(-(k_0 + \mathbf{a}(t)^\top \delta)(t - (m_0 + \mathbf{a}(t)^\top \gamma)))} \quad (3)$$

El modelo de crecimiento de saturación en Prophet es un caso especial de curvas de crecimiento logístico generalizado.

2.3.2. Modelo de tendencia lineal a trozos

Para problemas de predicción en los que no existe una tendencia de saturación, es decir en los que no hay un valor de capacidad de carga máxima ni mínima, es suficiente y útil el modelo de tendencia lineal con puntos de cambio.

El modelo de tendencia lineal con puntos de cambio en Prophet permite capturar cambios en la tasa de crecimiento de los datos a lo largo del tiempo sin asumir una saturación o límites específicos. En lugar de ajustar una curva sigmoïdal o logística, este modelo utiliza segmentos lineales en los que la pendiente y la intersección pueden cambiar en los puntos de cambio definidos.

Este enfoque es especialmente útil cuando los datos muestran cambios abruptos, variaciones o tendencias cambiantes a lo largo del tiempo. El modelo de tendencia es en este caso:

$$g(t) = (k_0 + \mathbf{a}(t)^\top \boldsymbol{\delta})t + (m_0 + \mathbf{a}(t)^\top \boldsymbol{\gamma}), \quad (4)$$

donde como antes k_0 es la tasa de crecimiento base o inicial, $\boldsymbol{\delta}$ es el vector que determina los ajustes o cambios de tasa, m_0 es el parámetro de compensación en el instante inicial y $\boldsymbol{\gamma}_j = -s_j \boldsymbol{\delta}_j$ una función para conseguir que la función tendencia sea continua.

2.3.3. Puntos de cambio

Los puntos de cambio pueden ser especificados por el analista a la hora de construir el modelo utilizando fechas conocidas de eventos relevantes que alteren el crecimiento, pero también pueden ser seleccionados automáticamente por el algoritmo en función de un conjunto de candidatos con las formulaciones (3) y (4) y fijando previamente un vector disperso en $\boldsymbol{\delta}$.

Definición 2.6. *Se llama vector disperso a aquel que es vacío, es decir, que no contiene datos, o tiene valores nulos.*

Observación 2.7. *- Es una posibilidad existente en la estadística informática crear vectores vacíos, sin datos, para representar situaciones en las que no se dispone de información o cuando se necesita inicializar un vector antes de agregarle datos.*

Normalmente se especifica un gran número de puntos de cambio (por ejemplo uno por mes en un conjunto de datos de varios años de duración) y se usa el vector

$$\boldsymbol{\delta}_j \sim \text{Laplace}(0, \tau),$$

donde $\text{Laplace}(0, \tau)$ hace referencia a la distribución de Laplace con parámetro de localización $\mu = 0$ y parámetro de escala $b = \tau$. Se especifica más sobre la distribución de Laplace en el Apéndice A. El parámetro τ controla directamente la flexibilidad del modelo para alterar su tasa de crecimiento. Cuando τ es grande, el modelo tiene mayor flexibilidad para ajustar la tasa de crecimiento en cada punto de cambio, lo que permite cambios más abruptos y rápidos en la tendencia. Por otro lado, cuando τ es pequeño, o cuando se acerca más a cero, el modelo se vuelve menos flexible porque los puntos de cambio están menos dispersos.

Fijar un vector disperso para los ajustes $\boldsymbol{\delta}$ no tiene impacto en la tasa de crecimiento k_0 del modelo, luego cuanto más se acerca τ a 0, más se acerca el modelo a un crecimiento logístico o lineal, con cambios más suaves y graduales en la tasa de crecimiento.

2.3.4. Incertidumbre de predicción

Cuando el modelo se lleva más allá de los datos proporcionados para realizar una predicción, el modelo asume que la tendencia seguirá una tasa constante. Se estima la incertidumbre en la tendencia pronosticada al extender el modelo generativo hacia adelante.

En el modelo generativo para la tendencia se asume la existencia de S puntos de cambio en un historial de T puntos. Cada punto de cambio tiene asociado un cambio de tasa $\delta_j \sim \text{Laplace}(0, \tau)$.

Cuando se simulan futuros cambios de tasa para imitar los del pasado, se reemplaza el parámetro τ con una varianza inferida a partir de los datos. Esto implica que se estima la varianza o dispersión de los cambios de tasa observados en el historial y se utiliza esa información para generar cambios de tasa futuros de manera realista.

Existen dos enfoques para estimar el parámetro de escala de tasa τ en el modelo generativo de Prophet: la inferencia Bayesiana con una prioridad jerárquica en τ y la estimación de máxima verosimilitud.

Nos centramos en el segundo enfoque. La estimación de máxima verosimilitud busca encontrar el valor de τ que maximiza la probabilidad de observar los datos una vez dados los parámetros del modelo. En el contexto de Prophet, se utiliza una estimación de máxima verosimilitud para obtener el parámetro de escala de tasa λ .

La estimación de máxima verosimilitud del parámetro de escala de tasa λ se calcula como la media de los valores absolutos de los cambios de tasa observados en los puntos de cambio. Esto proporciona una estimación puntual de la dispersión o variabilidad de los cambios de tasa en el modelo generativo. De esta forma $\lambda = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S |\delta_j|$

Entonces, los futuros puntos de cambio se distribuyen de manera que la frecuencia media de puntos de cambio sea la misma que la frecuencia media de puntos de cambio de los datos proporcionados:

$$\forall j > T, \begin{cases} \delta_j = 0 & \text{con probabilidad } \frac{T-S}{T}, \\ \delta_j \sim \text{Laplace}(0, \lambda) & \text{con probabilidad } \frac{S}{T}. \end{cases}$$

Medimos la incertidumbre de la predicción de la tendencia asumiendo que en el futuro tendremos la misma frecuencia y magnitud medias de cambios de tasa que tenemos en los datos proporcionados.

Una vez λ es inferido de los datos, se utiliza este modelo generativo para simular posibles futuras tendencias y usar las tendencias simuladas para computar intervalos de incertidumbre.

La incorporación de incertidumbre en la tendencia pronosticada es importante para proporcionar una medida de la confianza o variabilidad asociada a las predicciones realizadas más allá de los datos disponibles. Al simular futuros cambios de tasa y tener en cuenta la incertidumbre en estos cambios, el modelo generativo puede capturar una amplia gama de posibles escenarios y proporcionar intervalos de confianza para las predicciones futuras.

2.4. Estacionalidad

La manera que tiene el algoritmo Prophet de reflejar efectos periódicos de los datos con un modelo flexible se basa en las series de Fourier.

Se utilizan componentes de series de Fourier para modelar y ajustar patrones estacionales y periódicos en los datos. Estos patrones pueden incluir estacionalidad diaria, semanal, mensual o anual, así como otros patrones periódicos que puedan existir en los datos.

El algoritmo busca y ajusta automáticamente el número adecuado de componentes de series de Fourier para capturar los patrones estacionales y periódicos presentes en los datos, sin necesidad de que el analista especifique manualmente ningún argumento a mayores.

Sea P el periodo regular que se desea que la serie tenga, p. ej. $P = 7$ para datos semanales cuando nuestra escala para la variable tiempo es en días. Entonces se pueden aproximar efectos estacionales suaves arbitrarios con una serie de Fourier estándar.

$$s(t) = \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) \right)$$

Aproximar el componente de la tendencia requiere estimar los $2N$ parámetros

$$\beta = [a_1, b_1, \dots, a_N, b_N]^\top.$$

Esto se consigue construyendo una matriz de vectores de estacionalidad para cada valor de t en nuestros datos proporcionados y futuras predicciones. Cada uno de estos vectores de estacionalidad es de la forma:

$$X(t) = \left[\cos\left(\frac{2\pi(1)t}{P}\right), \sin\left(\frac{2\pi(1)t}{P}\right), \dots, \cos\left(\frac{2\pi(N)t}{P}\right), \sin\left(\frac{2\pi(N)t}{P}\right) \right].$$

Y por lo tanto, el componente estacional es

$$s(t) = X(t)\beta$$

En el modelo generativo de Facebook toman $\beta \sim \text{Normal}(0, \sigma^2)$ para imponer un suavizado previo en la estacionalidad. Este parámetro σ permite ajustar la fuerza de la componente de estacionalidad en el modelo, incrementando (valor alto) o reduciendo (valor bajo) la influencia de la estacionalidad en las predicciones.

El algoritmo estima automáticamente el vector β que mejor aproxime los efectos estacionales suaves en los datos observados. Estos coeficientes se ajustan mediante un enfoque de optimización para encontrar la combinación que minimiza la discrepancia entre los datos reales y la aproximación de la serie de Fourier.

En función de la N que se utiliza se filtran o no ciertas periodicidades con baja frecuencia. Aumentar N permite ajustar patrones estacionales que cambian más rápidamente, aunque se corre un mayor riesgo de sobreajuste. La N puede ser especificada por el analista, aunque el algoritmo también funciona sin ser especificada. Para la estacionalidad anual y semanal el algoritmo utiliza por defecto $N = 10$ y $N = 3$, respectivamente. La elección de estos valores funciona bien para la mayoría de los casos según los desarrolladores.

2.5. Festivos y eventos

El algoritmo Prophet permite al usuario proporcionar una lista de pasados y futuros eventos, cada uno de ellos identificado por el nombre único del evento o día festivo. También permite incluir el país al que corresponde el evento para mantener una lista de las festividades nacionales específicas además de las globales.

Para incorporar esta lista de festivos y eventos en el modelo, el algoritmo asume que los efectos de los eventos son independientes. Se considera por tanto que cada evento tiene un impacto único e independiente en la serie temporal, sin interacción o dependencia entre ellos. Esta asunción simplifica el modelo y permite tratar cada evento de manera individual, sin tener en cuenta posibles efectos conjuntos o interacciones entre ellos.

Para cada evento i , se define D_i el conjunto de fechas pasadas y futuras para dicho evento. Añadimos un vector $Z(t)$ de funciones indicatrices denotando si el instante t transcurre durante un evento i . Asignamos a cada festivo o evento un parámetro κ_i , que es el correspondiente cambio en la predicción.

Esto se hace de una manera similar al proceso de ajuste de la estacionalidad generando una matriz de regresores

$$Z(t) = [\mathbf{I}(t \in D_1), \dots, \mathbf{I}(t \in D_L)]$$

y utilizando

$$h(t) = Z(t)\kappa.$$

Como con la estacionalidad se utiliza un vector previo $\kappa \sim \text{Normal}(0, \nabla^2)$.

Se recomienda incluir los efectos de los festivos en un rango de días alrededor de la fecha evento. Para tener en cuenta esto, se incluyen parámetros adicionales para los días alrededor del día festivo considerando estos días como si fueran ellos mismos el día festivo. Esta estrategia permite capturar el impacto prolongado de un festivo en los datos.

3. Análisis de Fourier y series temporales.

3.1. Fundamentos teóricos

En esta sección, se presentarán los fundamentos teóricos necesarios para comprender las series de Fourier y su relación con el análisis de series temporales.

Definición 3.1. *El análisis de Fourier o análisis armónico de una serie temporal consiste en una descomposición de la serie en una suma de componentes sinusoidales. Los coeficientes de las componentes sinusoidales reciben el nombre de Transformada discreta de Fourier.*

Definición 3.2. *El análisis espectral es un método que describe la tendencia que tienen oscilaciones de una frecuencia determinada a aparecer en los datos, sin necesidad de persistir a lo largo de la serie.*

Para comprender las series de Fourier, es necesario familiarizarse con conceptos y técnicas matemáticas fundamentales como funciones periódicas, funciones pares e impares y transformadas integrales.

Definición 3.3. Una función compleja f definida en \mathbb{R} se dice que es periódica si

$$f(x+T) = f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

En ese caso el número T se llama periodo de la función. Particularmente, una función compleja f definida en \mathbb{R} se dice que es periódica de periodo 2π o que es 2π -periódica si

$$f(x+2\pi) = f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Definición 3.4. Un polinomio trigonométrico (de periodo 2π) es una combinación lineal de funciones de la familia

$$\varepsilon = \{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\},$$

es decir, es cualquier función de la forma

$$\sum_{k=m}^n c_k e^{ikx}, \text{ donde } n, m \in \mathbb{Z}, m \leq n, c_k \in \mathbb{C}.$$

Es obvio que los polinomios trigonométricos son ejemplos de funciones 2π -periódicas.

Observación 3.5. - Los datos periódicos más simples son aquellos que consisten en una única onda coseno

$$x_t = R \cos(2\pi(ft + \phi)).$$

- Los datos con más de una componente periódica son más difíciles de analizar.

Los sinusoides tienen un comportamiento muy simple bajo un cambio de escala temporal. Un senoide de frecuencia f (en ciclos por unidad de tiempo) o periodo $\frac{1}{f}$ (en unidades de tiempo) puede escribirse como

$$c(t) = A \cos(2\pi(ft + \phi)), \quad (5)$$

donde A es la amplitud y ϕ es la fase. Si la variable del tiempo se cambia a $u = \frac{t-a}{b}$, lo cual incorpora un cambio tanto de origen como de escala, $c(t)$ se transforma en

$$\begin{aligned} d(u) &= c(a+bu) \\ &= A \cos(2\pi(fbu + \phi + fa)) \\ &= A' \cos(2\pi(f'u + \phi')), \end{aligned} \quad (6)$$

donde $A' = A$, $f' = fb$ y $\phi' = \phi + fa$. Por lo tanto, la amplitud no se modifica, la frecuencia es multiplicada por b (el recíproco del cambio en la escala del tiempo), y la fase se altera en una cantidad que incluye el cambio de origen de tiempo y la frecuencia del senoide.

Observación 3.6. La amplitud del senoide no depende ni del origen ni de la escala de la variable del tiempo, por lo que puede ser observada como una cantidad absoluta sin arbitrariedad en la definición.

Proposición 3.7. *La suma de sinusoides de frecuencia común es otro senoide con la misma frecuencia. En particular, como*

$$A \cos(2\pi(ft + \phi)) = A \cos(2\pi ft) \cos(2\pi\phi) - A \sin(2\pi ft) \sin(2\pi\phi)$$

cualquier senoide con frecuencia f es una combinación lineal de las dos funciones base $\{\cos(2\pi ft), \sin(2\pi ft)\}$ y el recíproco también es cierto.

Observación 3.8. - *Una manera más sencilla de interpretar el significado de los parámetros del senoide representado en la ecuación (5) se consigue reescribiendo dicha ecuación como*

$$c(t) = R \cos(2\pi f(t - t_0)) ,$$

donde $t_0 = \frac{-\phi}{f}$ es un tiempo en el cual la curva alcanza su máximo.

- El efecto del cambio de la escala de tiempo de t a u es entonces ahora cambiar el senoide a

$$d(u) = R' \cos(2\pi f'(u - u_0)) ,$$

donde $R' = R$ y $f' = fb$ como antes, y $u_0 = \frac{t_0 - a}{b}$ es el tiempo del mismo máximo representado en la escala transformada.

Otra característica útil de las sinusoides es su comportamiento bajo el muestreo (es decir, observar una función de la variable continua t en un conjunto de valores equidistantes t_0, t_1, \dots), ya que si el intervalo de muestreo es Δ , las sinusoides

$$R \cos(2\pi(ft + \phi)) \quad \text{y} \quad R \cos(2\pi(f't + \phi))$$

son indistinguibles si $f - f'$ es un múltiplo de $\frac{1}{\Delta}$. Este fenómeno recibe el nombre de *aliasing* o *solapamiento*.

3.1.1. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es un método matemático utilizado en el análisis de series temporales con el objetivo de descomponer una señal en sus componentes frecuenciales fundamentales. Es esencial para entender la estructura de frecuencias subyacentes en una serie temporal y es especialmente útil para identificar patrones repetitivos y oscilatorios en los datos observados.

La transformada de Fourier se basa en dos conceptos clave: el espectro de frecuencia y las funciones sinusoidales, de las que ya se ha hablado.

El *espectro de frecuencia* es una representación que muestra la distribución de las diferentes frecuencias presentes en una señal. Cada frecuencia en el espectro está asociada con una amplitud que indica la contribución de esa frecuencia a la señal total. Esto permite identificar las frecuencias dominantes que caracterizan el comportamiento de la serie temporal.

3.2. Series de Fourier en el estudio de componentes estacionales.

El uso más simple de los sinusoides en el análisis de datos es describir y aislar las partes periódicas de una serie, cuando los periodos son conocidos. Esto incluye estimar sus amplitudes y fases, aunque es más sencillo hacer un acercamiento al problema en términos ligeramente diferentes, como se explicará a continuación.

3.2.1. Acercamiento de ajuste de curvas.

Suponiendo un ciclo en una serie temporal que no tiene una forma simple sinusoidal, la parte dominante de dicho ciclo se puede esperar que sea de la forma

$$s_t = \mu + R \cos(2\pi(ft + \phi)) \quad (7)$$

donde la frecuencia es f ciclos por unidad de tiempo. Los datos $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ serán modelados de la forma

$$x_t = s_t + e_t$$

Definición 3.9. El término e_t recibe el nombre de residuo en el tiempo t . Es la cantidad necesaria para hacer la igualdad exacta.

Observación 3.10. - El término μ es una constante añadida. Este término hace referencia al valor en torno al que oscilan los datos. Si los datos oscilaran en torno a 0, como la función coseno oscila en torno a 0, se tendría $\mu = 0$.

Los parámetros desconocidos son μ , R y ϕ . El tamaño de los residuos se medirá con la suma de sus valores cuadrados. Por lo tanto, el problema consiste en encontrar μ , R y ϕ para minimizar

$$S(\mu, R, \phi) = \sum_{t=0}^n \{x_t - \mu - R \cos(2\pi(ft + \phi))\}^2, \quad (8)$$

donde el término entre llaves es precisamente el t -ésimo residuo para valores dados de μ , R y ϕ .

Observación 3.11. - La ecuación (7) es no lineal en ϕ , pero puede ser reescrita como:

$$s_t = \mu + A \cos(2\pi ft) + B \sin(2\pi ft),$$

donde $A = R \cos(2\pi\phi)$ y $B = -R \sin(2\pi\phi)$

- Se tomarán como parámetros los valores A , B y μ y el modelo será ahora lineal.

- A partir de los valores de A y B es fácil encontrar los valores de R y ϕ .

Consideramos ahora un modelo simple con dos parámetros de un senoide sin constante añadida, es decir, consideramos que los valores oscilan en torno a cero. El modelo es

$$x_t = A \cos(2\pi ft) + B \sin(2\pi ft) + e_t$$

y la ley de los mínimos cuadrados lleva a minimizar

$$S(A, B) = \sum_{t=0}^{n-1} (x_t - A \cos(2\pi ft) - B \sin(2\pi ft))^2,$$

considerando la frecuencia f constante. Ahora, para minimizar debemos hacer que se cumpla

$$\frac{\delta T}{\delta A} = -2 \sum \cos(2\pi ft) (x_t - A \cos(2\pi ft) - B \sin(2\pi ft)) = 0,$$

$$\frac{\delta T}{\delta B} = -2 \sum \sin(2\pi ft) (x_t - A \cos(2\pi ft) - B \sin(2\pi ft)) = 0,$$

lo que resulta en las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} A = \hat{A} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \sum x_t \cos(2\pi ft) \sum (\sin(2\pi ft))^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum x_t \sin(2\pi ft) \sum \cos(2\pi ft) \sin(2\pi ft) \right\}, \\ B = \hat{B} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \sum x_t \sin(2\pi ft) \sum (\cos(2\pi ft))^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum x_t \cos(2\pi ft) \sum \cos(2\pi ft) \sin(2\pi ft) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$\Delta = \sum (\cos(2\pi ft))^2 \sum (\sin(2\pi ft))^2 - \left(\sum \cos(2\pi ft) \sin(2\pi ft) \right)^2$$

Las sumas que solo incluyen funciones trigonométricas pueden ser evaluadas usando los resultados que se proponen en la Proposición 3.12.

Proposición 3.12. *Se cumple que*

1. $\sum_{t=0}^{n-1} e^{2\pi ift} = \frac{e^{2\pi ifn} - 1}{e^{2\pi if} - 1} = e^{\pi if(n-1)} \frac{e^{\pi ifn} - e^{-\pi ifn}}{e^{\pi if} - e^{-\pi if}}$.
2. $\sum_{t=0}^{n-1} \cos(2\pi ft) = \cos\{\pi f(n-1)\} \frac{\sin(\pi fn)}{\sin(\pi f)}$
3. $\sum_{t=0}^{n-1} \sin(2\pi ft) = \sin\{\pi f(n-1)\} \frac{\sin(\pi fn)}{\sin(\pi f)}$

Demostración.

1. Una serie geométrica es la suma de un número infinito de términos que tiene una razón constante entre sus términos sucesivos. Si la razón r es distinta de uno, la suma de los primeros $n + 1$ términos de una serie geométrica es:

$$\sum_{k=0}^n ar^k = a \left(\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right). \quad (10)$$

La suma $\sum_{t=0}^{n-1} e^{2\pi ift}$ es una serie geométrica de razón $r = e^{2\pi if}$, por lo que, teniendo en cuenta la fórmula (10), se tiene que

$$\sum_{t=0}^{n-1} e^{2\pi ift} = \sum_{t=0}^{n-1} \left(e^{2\pi if} \right)^t = \frac{1 - \left(e^{2\pi if} \right)^n}{1 - e^{2\pi if}} = \frac{e^{2\pi ifn} - 1}{e^{2\pi if} - 1} = \frac{e^{\pi ifn}}{e^{\pi if}} \frac{e^{\pi ifn} - e^{-\pi ifn}}{e^{\pi if} - e^{-\pi if}}$$

2. Para esta demostración se van a utilizar las fórmulas de Euler

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{y} \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}),$$

así como el resultado anterior. Ahora, sabiendo esto, primero se descompone el coseno en la suma de exponenciales y posteriormente, tras unas operaciones intermedias, se reagrupan términos.

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{n-1} \cos(2\pi ft) &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} e^{2\pi i f t} + \sum_{t=0}^{n-1} e^{-2\pi i f t} \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{\pi i f n} e^{\pi i f n} - e^{-\pi i f n}}{e^{\pi i f} - e^{-\pi i f}} + \frac{e^{-\pi i f n} e^{-\pi i f n} - e^{\pi i f n}}{e^{-\pi i f} - e^{\pi i f}} \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{\pi i f n} e^{\pi i f n} - e^{-\pi i f n}}{e^{\pi i f} - e^{-\pi i f}} + \frac{e^{-\pi i f n} e^{\pi i f n} - e^{-\pi i f n}}{e^{-\pi i f} - e^{\pi i f}} \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ e^{\pi i f (n-1)} + e^{-\pi i f (n-1)} \right\} \frac{e^{\pi i f n} - e^{-\pi i f n}}{e^{\pi i f} - e^{-\pi i f}} = \\
&= \cos(\pi f (n-1)) \frac{2i \operatorname{sen}(\pi f n)}{2i \operatorname{sen}(\pi f)} = \cos(\pi f (n-1)) \frac{\operatorname{sen}(\pi f n)}{\operatorname{sen}(\pi f)}
\end{aligned}$$

3. Análogamente al anterior.

□

Proposición 3.13. *Se cumple que*

1. $\sum (\cos(2\pi ft))^2 = \frac{n}{2} \{1 + D_n(2f) \cos(2\pi(n-1)f)\}$,
2. $\sum \cos(2\pi ft) \sin(2\pi ft) = \frac{n}{2} D_n(2f) \sin(2\pi(n-1)f)$,
3. $\sum (\sin(2\pi ft))^2 = \frac{n}{2} \{1 - D_n(2f) \cos(2\pi(n-1)f)\}$,

y por lo tanto

$$\Delta = \frac{n^2}{4} \{1 - D_n(2f)^2\},$$

donde

$$D_n(f) = \frac{\sin(\pi f n)}{n \sin(\pi f)} \quad (11)$$

es una versión del núcleo de Dirichlet (Tichmarsh, 1939).

Demostración.

Se va a demostrar únicamente la primera igualdad, ya que las otras dos son de mecánica similar. Para ello se van a utilizar las fórmulas trigonométricas de la adición

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y
\end{aligned}$$

así como sus inversas

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x+y) + \cos(x-y) \},$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} \{ \sin(x+y) + \sin(x-y) \},$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} \{ \cos(x-y) - \cos(x+y) \},$$

1. Para probar esta igualdad se va a calcular $\sum \cos(2\pi ft) \cos(2\pi f't)$ y posteriormente aplicamos el caso particular para $f' = f$. Se utiliza las transformaciones de la Proposición 3.12 para concluir el resultado.

$$\begin{aligned} \sum \cos(2\pi ft) \cos(2\pi f't) &= \frac{1}{2} \sum \{ \cos(2\pi(f+f')t) + \cos(2\pi(f-f')t) \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ \sum \cos(2\pi(f+f')t) + \sum \cos(2\pi(f-f')t) \} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos(\pi(f+f')(n-1)) \frac{\sin(\pi(f+f')n)}{\sin(\pi(f+f'))} + \cos(\pi(f-f')(n-1)) \frac{\sin(\pi(f-f')n)}{\sin(\pi(f-f'))} \right\} \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la igualdad (11), se llega a

$$\begin{aligned} \sum \cos(2\pi ft) \cos(2\pi f't) &= \frac{1}{2} \left\{ \cos(\pi(f+f')(n-1)) \frac{\sin(\pi(f+f')n)}{\sin(\pi(f+f'))} + \cos(\pi(f-f')(n-1)) \frac{\sin(\pi(f-f')n)}{\sin(\pi(f-f'))} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos(\pi(f+f')(n-1)) nD_n(f+f') + \cos(\pi(f-f')(n-1)) nD_n(f-f') \} \end{aligned}$$

Luego, si se aplica el caso particular $f' = f$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum (\cos(2\pi ft))^2 &= \sum \cos(2\pi ft) \cos(2\pi ft) = \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos(\pi(f+f)(n-1)) nD_n(f+f) + \cos(\pi(f-f)(n-1)) nD_n(f-f) \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos(2\pi f(n-1)) nD_n(2f) + \cos(0) nD_n(0) \} = \\ &= \frac{n}{2} \{ 1 + D_n(2f) \cos(2\pi(n-1)f) \}, \end{aligned}$$

sacando n factor común y teniendo en cuenta que

$$D_n(0) = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi fn)}{n \sin(\pi f)} \sim \frac{\pi fn}{n\pi f} = 1$$

□

Una vez visto esto, y volviendo a las ecuaciones (9), para encontrar R y ϕ , la amplitud y la fase, se deben resolver las ecuaciones

$$A = R \cos(2\pi\phi) \quad \text{y} \quad B = -R \sin(2\pi\phi)$$

Como R es no negativo, se sigue que $R = \sqrt{A^2 + B^2}$. La ecuación más básica para ϕ es entonces $\tan 2\pi\phi = -\frac{B}{A}$. Sin embargo, la solución $2\pi\phi = \arctan\left(-\frac{B}{A}\right)$ es incompleta, puesto que devuelve el mismo valor de la fase tanto para $(-A, -B)$ como para (A, B) . Una solución completa que dé una respuesta en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ es

$$2\pi\phi = \begin{cases} \arctan(-B/A), & A > 0, \\ \arctan(-B/A) - \pi, & A < 0, B > 0, \\ \arctan(-B/A) + \pi, & A < 0, B \leq 0, \\ -\pi/2, & A = 0, B > 0, \\ \pi/2, & A = 0, B < 0, \\ \text{arbitrario} & A = 0, B = 0. \end{cases}$$

Si se considerara el mismo modelo pero con tres parámetros, añadiendo a los anteriores una constante entorno a la cual oscilan los valores de la serie temporal, el modelo sería

$$x_t = \mu + A \cos(2\pi ft) + B \sin(2\pi ft) + e_t \quad (12)$$

Las ecuaciones para la ley de los mínimos cuadrados estimando μ , A y B serían en este caso las ecuaciones (13).

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{\delta \mu} &= -2 \sum (x_t - \mu - A \cos(2\pi ft) - B \sin(2\pi ft)) = 0, \\ \frac{\delta T}{\delta A} &= -2 \sum \cos(2\pi ft) (x_t - \mu - A \cos(2\pi ft) - B \sin(2\pi ft)) = 0, \\ \frac{\delta T}{\delta B} &= -2 \sum \sin(2\pi ft) (x_t - \mu - A \cos(2\pi ft) - B \sin(2\pi ft)) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

3.2.2. Periodicidades múltiples

Existe la posibilidad de que una serie temporal tenga dos o más periodicidades, lo que se debe reflejar a la hora de representar la serie por medio de sinusoides. En el caso de una serie temporal con dos periodicidades, el modelo general resultante de cinco parámetros es

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + A_1 \cos(2\pi f_1 t) + B_1 \sin(2\pi f_1 t) \\ &\quad + A_2 \cos(2\pi f_2 t) + B_2 \sin(2\pi f_2 t) + e_t \end{aligned}$$

La función suma de cuadrados que debe ser minimizada es en este caso

$$\begin{aligned} S(\mu, A_1, B_1, A_2, B_2) &= \sum_{t=0}^{n-1} (x_t - \mu - A_1 \cos(2\pi f_1 t) - B_1 \sin(2\pi f_1 t) \\ &\quad - A_2 \cos(2\pi f_2 t) - B_2 \sin(2\pi f_2 t))^2 \end{aligned}$$

Las derivadas que deben ser igualadas a cero son

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \mu} &= -2 \sum_{t=0}^{n-1} (x_t - \mu - A_1 \cos(2\pi f_1 t) - B_1 \sin(2\pi f_1 t) \\ &\quad - A_2 \cos(2\pi f_2 t) - B_2 \sin(2\pi f_2 t)), \\ \frac{\delta S}{\delta A_j} &= -2 \sum_{t=0}^{n-1} \cos(2\pi f_j t) (x_t - \mu - A_1 \cos(2\pi f_1 t) - B_1 \sin(2\pi f_1 t) \\ &\quad - A_2 \cos(2\pi f_2 t) - B_2 \sin(2\pi f_2 t)), \quad j = 1, 2 \\ \frac{\delta S}{\delta B_j} &= -2 \sum_{t=0}^{n-1} \sin(2\pi f_j t) (x_t - \mu - A_1 \cos(2\pi f_1 t) - B_1 \sin(2\pi f_1 t) \\ &\quad - A_2 \cos(2\pi f_2 t) - B_2 \sin(2\pi f_2 t)), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

3.2.3. Ortogonalidad de los sinusoides.

Definición 3.14. *En general, los coeficientes de una ecuación ajustada no cambian sólo cuando las nuevas variables introducidas después de ajustar la ecuación son ortogonales a aquellas ya existentes en la ecuación.*

Las ecuaciones de ajuste solución de los sistemas de ecuaciones planteados en las secciones anteriores pueden ser aproximadas por

$$\begin{aligned} n\hat{\mu} &= \sum x_t \\ \frac{n}{2}\hat{A} &= \sum x_t \cos(2\pi ft), \\ \frac{n}{2}\hat{B} &= \sum x_t \sin(2\pi ft) \end{aligned}$$

para una sola periodicidad en la serie temporal, ecuación (13), y

$$\begin{aligned} n\hat{\mu} &= \sum x_t \\ \frac{n}{2}\hat{A}_j &= \sum x_t \cos(2\pi f_j t), \quad j = 1, 2, \\ \frac{n}{2}\hat{B}_j &= \sum x_t \sin(2\pi f_j t), \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

para el caso general de una serie temporal con dos periodicidades diferentes, ecuación (14).

De las primeras ecuaciones se han omitido términos que incluyen un coeficiente de la forma $nD_n(f_1 - f_2) \cos(2\pi(f_1 - f_2)\hat{t})$, y los otros son similares. Ahora

$$|nD_n(f_1 - f_2) \cos(2\pi(f_1 - f_2)\hat{t})| \leq \frac{1}{|\sin(\pi(f_1 - f_2))|},$$

y por lo tanto estos términos son pequeños comparados con los términos que se conservan, los cuales son todos n o $\frac{n}{2}$, suponiendo que ni f_1 , ni f_2 ni $f_1 - f_2$ son cercanos a cero o a uno.

Los términos omitidos desaparecen exactamente si f_1 y f_2 son de la forma $\frac{j_1}{n}$ y $\frac{j_2}{n}$ para dos números enteros j_1 y j_2 , ya que en este caso

$$nD_n(f_1 - f_2) \cos 2\pi(f_1 - f_2)\hat{t} = \frac{\sin\{\pi(j_1 - j_2)\} \cos\{\frac{2\pi(j_1 - j_2)\hat{t}}{n}\}}{\sin\{\frac{\pi(j_1 - j_2)}{n}\}} = 0,$$

y los otros términos también tienen el seno de un entero múltiplo de π en el numerador. En este caso, todos los términos seno y coseno son ortogonales entre sí y con el término constante cuyo coeficiente es μ . Las soluciones para el modelo de tres parámetros son entonces:

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \hat{x} = \frac{1}{n} \sum x_t, \\ \hat{A} &= \frac{2}{n} \sum x_t \cos(2\pi ft), \\ \hat{B} &= \frac{2}{n} \sum x_t \sin(2\pi ft),\end{aligned}\tag{15}$$

y la suma de cuadrados asociada con f es simplemente

$$\frac{2}{n} (\hat{A}^2 + \hat{B}^2).$$

Definición 3.15. *Las frecuencias de Fourier son múltiplos enteros de $\frac{1}{n}$ y se distinguen por el hecho de que los periodos correspondientes $\frac{n}{j}$ se repiten un número entero de veces en el intervalo de los datos. Se dice que son armónicas con respecto al intervalo de los datos.*

3.2.4. Efecto del tiempo discreto: *Aliasing* o solapamiento

Teniendo en cuenta que las unidades de la frecuencia son ciclos por unidad de tiempo, es natural requerir que la frecuencia sea no negativa. Esto puede ser justificado discutiendo que, como $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\sin(-x) = -\sin(x)$, cualquier ciclo con frecuencia negativa $-f$ puede ser escrito como

$$A \cos(2\pi(-f)t) + B \sin(2\pi(-f)t) = A \cos(2\pi ft) + (-B) \sin(2\pi ft),$$

una onda coseno con frecuencia positiva. Por lo tanto, las frecuencias f y $-f$ son indistinguibles.

Definición 3.16. *En el caso anterior, se dice que las frecuencias f y $-f$ son alias de una de la otra y viceversa.*

El espaciado uniforme en el periodo de tiempo de las observaciones introduce otro efecto de *aliasing*. Se supone que el intervalo de muestreo es Δ , de tal manera que la observación t -ésima se hace en el instante $t\Delta$. Si los datos se pueden representar como una única y pura onda coseno con frecuencia f (por el bien del argumento con amplitud unitaria y fase cero), entonces la observación t -ésima será

$$x_t = \cos(2\pi ft\Delta).$$

Si se incrementa f desde cero, la onda oscila más y más rápidamente hasta que se encuentra a una frecuencia $f = \frac{1}{2\Delta}$, cuando la observación t -ésima es

$$x_t = \cos(\pi t) = (-1)^t,$$

la cual es claramente la oscilación más rápida que puede ser observada. Supóngase que f se incrementa a mayores, dígame, a un valor que satisfaga $\frac{1}{2\Delta} < f < \frac{1}{\Delta}$. Sea $f' = \frac{1}{\Delta} - f$. Entonces

$$\begin{aligned} x_t &= \cos(2\pi f t \Delta) \\ &= \cos\left(2\pi \left(\frac{1}{\Delta} - f'\right) t \Delta\right) \\ &= \cos(2\pi (t - f' t \Delta)) \\ &= \cos(2\pi f' t \Delta) \end{aligned}$$

De la misma manera $\sin(2\pi f t \Delta) = -\sin(2\pi f' t \Delta)$. Por lo tanto las frecuencias f y f' son también indistinguibles y por lo tanto alias de la otra. Este argumento se puede extender a cualquier frecuencia positiva, sin importar lo grande que esta sea.

El resultado es que cada frecuencia que no se encuentra en el intervalo $0 \leq f \leq \frac{1}{2\Delta}$ tiene un alias en ese intervalo.

Definición 3.17. *Se llama alias principal de una frecuencia arbitraria al alias de dicha frecuencia arbitraria situado en el intervalo $0 \leq f \leq \frac{1}{2\Delta}$.*

Para evitar indeterminaciones, las frecuencias se limitarán a este rango.

Observación 3.18. *- La frecuencia $\frac{1}{2\Delta}$ se conoce como la frecuencia de Nyquist.*

- También se conoce como la frecuencia plegable, ya que las frecuencias mayores son efectivamente plegadas hacia el intervalo $[0, \frac{1}{2\Delta}]$.

- Como el intervalo de muestreo es Δ , la frecuencia de muestreo es $\frac{1}{\Delta}$ observaciones por unidad de tiempo.

- De lo anterior es fácil deducir que la frecuencia de Nyquist es la mitad de la frecuencia de muestreo.

- Hay dos muestras por ciclo de la frecuencia de Nyquist, la mayor frecuencia que puede ser observada.

Se supone que se quiere obtener información sobre frecuencias en el intervalo (f_0, f_1) . Entonces la frecuencia de Nyquist se elegirá mayor que f_1 para que todas las frecuencias sean directamente observables. Sin embargo, si la serie temporal contiene frecuencias mayores que f_1 , la frecuencia de muestreo debe ser elegida para que no haya que buscar los alias de dichas frecuencias en el intervalo de interés. De hecho, si es posible, es preferible eliminar dichas frecuencias antes de hacer el muestreo.

En algunas series temporales puede haber oscilaciones claras o fijas pero de frecuencia desconocida. Un acercamiento estadístico al análisis de estas series consiste en ver la frecuencia como un parámetro desconocido adicional y hacer estimaciones junto con los otros parámetros de la oscilación.

3.2.5. Ajustando la frecuencia.

Cuando la frecuencia de las oscilaciones de la serie es desconocida, el método de mínimos cuadrados se extiende para estimar f minimizando

$$S(\mu, A, B, f) = \sum_{t=0}^{n-1} (x_t - \mu - A \cos(2\pi ft) - B \sin(2\pi ft))^2.$$

El mínimo para f constante es

$$T(f) = S(\hat{\mu}(f), \hat{A}(f), \hat{B}(f), f),$$

donde μ , A y B han sido reemplazados por los valores estimados en los apartados anteriores. La frecuencia f es ahora estimada por el valor que minimiza $T(f)$. Otra opción equivalente es maximizar la suma de cuadrados asociada con la frecuencia f .

La localización del máximo de la suma de cuadrados asociada con la frecuencia se halla normalmente con métodos numéricos. La solución analítica suele ser casi imposible ya que la derivada con respecto a f es generalmente no lineal y tiene gran cantidad de ceros.

Si los residuos muestran periodicidades claras significa que la serie temporal contiene al menos dos componentes periódicas. La manera más simple de encontrar otras componentes periódicas consiste en repetir el mismo análisis explicado anteriormente y buscar máximos para otros valores de la frecuencia. Sin embargo, se consiguen mejores resultados si se incluye la segunda componente en el modelo, como ya se ha explicado en otras secciones:

$$x_t = \mu + A_1 \cos(2\pi f_1 t) + B_1 \sin(2\pi f_1 t) \\ + A_2 \cos(2\pi f_2 t) + B_2 \sin(2\pi f_2 t) + e_t$$

Entonces, la suma de cuadrados a ser minimizada es

$$S(\mu, A_1, B_1, A_2, B_2, f_1, f_2) = \\ = \sum_{t=0}^{n-1} (x_t - \mu - A_1 \cos(2\pi f_1 t) - B_1 \sin(2\pi f_1 t) - A_2 \cos(2\pi f_2 t) - B_2 \sin(2\pi f_2 t))^2.$$

Nótese que para f_1 y f_2 constantes el modelo es lineal en el resto de parámetros. Por lo tanto, los mejores valores, dependientes de las frecuencias, del resto de parámetros podrían ser calculados por los métodos convencionales y sustituidos en la función S . Esto lleva a una nueva función

$$T(f_1, f_2) = S(\hat{\mu}, \hat{A}_1, \hat{B}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_2, f_1, f_2),$$

donde $\hat{\mu}$, \hat{A}_1 , \hat{B}_1 , \hat{A}_2 y \hat{B}_2 son todas funciones de f_1 y f_2 . La función $T(f_1, f_2)$ puede ser minimizada numéricamente. Una alternativa equivalente de optimización es maximizar la suma de cuadrados asociada con el par de frecuencias (f_1, f_2) ,

$$U(f_1, f_2) = \sum_{t=0}^{n-1} (x_t - \hat{x})^2 - T(f_1, f_2).$$

3.2.6. Análisis armónico.

Ya se ha estudiado cómo ajustar un senoide de frecuencia conocida y también se ha extendido a ajustar la propia frecuencia cuando esta es desconocida. Ahora se va a estudiar un método para analizar un conjunto de datos arbitrario y descomponerlo en componentes periódicas, tanto si los datos parecen ser periódicos como si no. Algunas series de datos parecen no ser periódicos pero en realidad contienen componentes periódicas interesantes de observar.

El resultado que subyace en el análisis armónico es la propiedad de ortogonalidad de los sinusoides con frecuencias restringidas a las frecuencias de Fourier $f_j = \frac{j}{n}$. A partir de ahora se considera la unidad de tiempo como el intervalo de muestreo, luego se tiene $\Delta = 1$ y la frecuencia de Nyquist es simplemente $\frac{1}{2}$. A causa del *aliasing* las únicas frecuencias que deben ser consideradas son aquellas que satisfagan $0 \leq f_j \leq \frac{1}{2}$. Nótese que si n es par, entonces $\frac{1}{2} = f_{\frac{n}{2}}$ es una frecuencia de Fourier, pero no si n es impar. Las siguientes identidades son una consecuencia directa de los resultados de las proposiciones 3.12 y 3.13:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{n-1} \cos(2\pi f_j t) &= 0, & j \neq 0 \\ \sum_{t=0}^{n-1} \sin(2\pi f_j t) &= 0, \\ \sum_{t=0}^{n-1} \cos(2\pi f_j t) \cos(2\pi f_{j'} t) &= \begin{cases} \frac{n}{2}, & j = j' \neq 0 \text{ o } \frac{n}{2}, \\ n, & j = j' = 0 \text{ o } \frac{n}{2}, \\ 0, & j \neq j', \end{cases} \\ \sum_{t=0}^{n-1} \cos(2\pi f_j t) \sin(2\pi f_{j'} t) &= 0, \\ \sum_{t=0}^{n-1} \sin(2\pi f_j t) \sin(2\pi f_{j'} t) &= \begin{cases} \frac{n}{2}, & j = j' \neq 0 \text{ o } \frac{n}{2}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Observación 3.19. - $f_0 = 0$, $f_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}$.

- $\sin(0) = \sin(k\pi) = 0$, $\cos(0) = \cos(k\pi) = 1$.

- Los resultados especiales para $j = j' = 0$ o $\frac{n}{2}$ se explican porque los términos del seno se anulan a estas frecuencias.

- Las dos primeras relaciones son casos particulares de las dos siguientes con $j = 0$.

- Los resultados establecen que los cosenos y senos de las frecuencias de Fourier son ortogonales con respecto a la suma a lo largo de los enteros $0, 1, \dots, n-1$.

Ahora se supone que x_0, x_1, \dots, x_{n-1} son n números cualquiera, y se definen

$$\begin{aligned} A(f) &= \frac{2}{n} \sum_{t=0}^{n-1} x_t \cos(2\pi f t), \\ B(f) &= \frac{2}{n} \sum_{t=0}^{n-1} x_t \sin(2\pi f t), \end{aligned} \quad (17)$$

Entonces las relaciones de ortogonalidad de (16) llevan a

$$x_t = A(0) + 2 \sum_{0 < j < \frac{n}{2}} \{A(f_j) \cos(2\pi f_j t) + B(f_j) \sin(2\pi f_j t)\} \\ \left[+A\left(f_{\frac{n}{2}}\right) \cos\left(2\pi f_{\frac{n}{2}} t\right) \right], \quad t = 0, 1, \dots, n-1. \quad (18)$$

Observación 3.20. - El término entre corchetes se incluye sólo en el caso de que n sea par.

- Sea n par o impar, hay n coeficientes en la suma.
- Si los n valores se observan como un único punto en el espacio n -dimensional, se puede construir una representación similar con cualquier conjunto de frecuencias cuyos cosenos y senos forman una base en ese espacio. Sin embargo, las frecuencias de Fourier son un conjunto natural y sencillo para utilizar, estando equiespaciadas en el rango de frecuencias que se quiere usar.
- Los coeficientes $\{A(0), A(f_1), B(f_1), \dots\}$ son fáciles de calcular gracias a la ortogonalidad.
- La ecuación (18) se cumple para t en el rango $0, 1, \dots, n-1$. Cualquier otro valor del tiempo puede ser representado como $kn + t'$ para algún entero k y t' en este rango. Si $kn + t'$ es sustituido por t en el lado derecho de la ecuación, las k s desaparecen por la forma de las frecuencias de Fourier. El valor encontrado es por lo tanto simplemente $x_{t'}$.
- Como consecuencia de lo anterior, si t es una variable entera sin restricción, la suma define una secuencia periódica de periodo n , consistente en los valores x_0, x_1, \dots, x_{n-1} repetidos cíclicamente.
- La j -ésima frecuencia de Fourier tiene periodo $\frac{1}{f_j} = \frac{n}{j}$. Cualquier senoide con esta frecuencia ejecuta j ciclos completos en el intervalo de los datos, proporcionando así una interpretación útil del índice j .
- Pocos de los periodos son enteros, aunque todos son, por supuesto, racionales.

Por lo tanto, una secuencia arbitraria de números puede ser representada como una suma de componentes periódicas.

Esta teoría es más simple cuando se escribe en forma compleja. En particular, todas las fórmulas son las mismas sea n par o impar. De hecho, hay ocasiones en las que un par de series temporales de valores reales son observadas y consideradas como la parte real e imaginaria de una serie temporal individual de valores complejos. Por ejemplo, si se tiene una serie temporal con los pares de coordenadas cartesianas de un móvil a lo largo del tiempo, este conjunto de valores se puede tratar teóricamente como números complejos individuales.

En general, los datos observados son estrictamente valores reales. Estos pueden ser observados como números complejos con partes imaginarias nulas.

Gracias a la relación de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

y su inversa

$$\cos x = \frac{1}{2} \{e^{ix} + e^{-ix}\}, \quad \sin x = \frac{1}{2i} \{e^{ix} - e^{-ix}\}$$

podemos ver que la función exponencial compleja e^{ix} está íntimamente relacionada con los cosenos y los senos. Las relaciones de ortogonalidad correspondientes a (16) son

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{n-1} e^{2\pi i f_j t} e^{2\pi i \bar{f}_k t} &= \sum_{t=0}^{n-1} e^{2\pi i f_j t} e^{-2\pi i f_k t} \\ &= \begin{cases} n & \text{si } j \equiv k \pmod{n}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

El resultado para $j \equiv k \pmod{n}$ es inmediato, ya que cada sumando es 1. Los otros valores siguen de las identidades derivadas en las proposiciones 3.12 y 3.13.

Ahora se supone que x_0, x_1, \dots, x_{n-1} son n números complejos cualquiera. Sea

$$d(f) = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} x_t e^{-2\pi i f t} \quad (20)$$

Observación 3.21. - $d(f) = \frac{A(f)}{2} - i \frac{B(f)}{2}$, donde $A(f)$ y $B(f)$ han sido definidos anteriormente.
- Se pueden recuperar los datos a partir de $d(f)$ con la ecuación

$$x_t = \sum_j d(f_j) e^{2\pi i f_j t}, \quad (21)$$

lo que se consigue con la forma inversa de (19).

- La suma puede ser sobre $j = 0, 1, \dots, n-1$ o $-\frac{n}{2} < j \leq \frac{n}{2}$. Ambos rangos son válidos y dan la misma respuesta porque $d(f)$ es periódica con periodo 1. El rango $-\frac{n}{2} < j \leq \frac{n}{2}$ es quizás más natural por los resultados obtenidos en la sección anterior. Es el mismo rango con frecuencias negativas añadidas, porque $e^{2\pi i f t}$ y $e^{2\pi i (-f) t}$ no son idénticos.

- Normalmente se utilizará el rango $j = 0, 1, \dots, n-1$ para enfatizar la similitud entre las ecuaciones (20) y (21).

Definición 3.22. Se llama transformada de Fourier discreta o DFT de $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ a la función $d(f)$ anteriormente definida.

Los términos $A(f)$ y $B(f)$ se llaman transformada del coseno y del seno respectivamente.

La transformada de Fourier discreta, como función compleja, posee dos representaciones naturales. La primera es en términos de sus partes real e imaginaria, las cuales son $\frac{A(f)}{2}$ y $-\frac{B(f)}{2}$, donde $A(f)$ y $B(f)$ han sido definidos anteriormente. La segunda es en términos de su magnitud $R(f)$ y fase $\phi(f)$, definidas por $R(f) = |d(f)|$ y

$$d(f) = R(f) e^{i\phi(f)}.$$

La magnitud $R(f)$ mide cómo de fuerte está representada la oscilación con frecuencia f en los datos. Normalmente se muestra de la siguiente forma

$$I(f) = nR(f)^2 = n|d(f)|^2.$$

Definición 3.23. A la magnitud $I(f)$ se la conoce como periodograma.

Observación 3.24. - Si f está restringida a ser una frecuencia de Fourier, las transformadas del coseno y del seno $A(f_j)$ y $B(f_j)$ son precisamente los coeficientes del coseno y del seno obtenidos ajustando una onda coseno por mínimos cuadrados.

- La transformada de Fourier discreta tiene una interpretación similar en el contexto de ajustar la función exponencial compleja: La suma de cuadrados

$$S(d) = \sum_{t=0}^{n-1} |x_t - de^{2\pi ift}|^2$$

se ve minimizada en $d = d(f)$, sea o no f una frecuencia de Fourier.

Proposición 3.25. La transformada de Fourier discreta de la suma es la suma de las transformadas de Fourier discretas.

3.2.7. Series periódicas

Supóngase que la serie x_0, x_1, \dots, x_{n-1} es periódica con periodo h , un entero, y que n es un entero múltiplo de h , dígase $n = kh$. La transformada de Fourier discreta satisface

$$\begin{aligned} d(f) &= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} x_t e^{-2\pi ift} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{h-1} \sum_{u=0}^{k-1} x_{t+hu} e^{-2\pi if(t+hu)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{h-1} x_t e^{-2\pi ift} \sum_{u=0}^{k-1} e^{-2\pi ifhu} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{h-1} x_t e^{-2\pi ift} e^{-2\pi ifh(k-1)} D_k(fh) \\ &= d_h(f) e^{-2\pi ifh(k-1)} D_k(fh), \end{aligned}$$

donde

$$d_h(f) = \frac{1}{h} \sum_{t=0}^{h-1} x_t e^{-2\pi ift}$$

es la transformada del primer ciclo completo de la serie. Por lo tanto, $d(\frac{j}{h}) = d_h(\frac{j}{h})$ para cualquier entero j , pero $d(f) = 0$ para cualquier otra frecuencia de Fourier. Esto significa que la transformada de Fourier, cuando es evaluada en las frecuencias de Fourier, sólo es no nula en $f = \frac{1}{h}$ y sus múltiplos.

Definición 3.26. Sea x_0, x_1, \dots, x_{n-1} una serie periódica de periodo h . Sea $d(f)$ su transformada de Fourier discreta. Se llama frecuencia fundamental de la onda a $f = \frac{1}{h}$. Sus múltiplos se llaman armónicos.

Observación 3.27. - El argumento muestra que la transformada de una serie periódica debe desaparecer evaluada en ciertas frecuencias de Fourier, y no que es necesariamente no nula en el resto. Por ejemplo, si la serie periódica fuera simplemente $\cos\left(\frac{2\pi t}{h}\right) = \cos 2\pi f_h t$, sólo la frecuencia fundamental tendría un coeficiente no nulo, mientras que el resto de armónicos no serían incluidos en la representación.

3.3. Series de Fourier en el estudio de componentes cíclicas no estacionales.

Hay varios factores en una serie temporal de datos que nos pueden indicar desviaciones del comportamiento puramente sinusoidal. Por ejemplo,

1. La secuencia de picos y valles no es completamente regular.
2. La amplitud de las oscilaciones varía ampliamente.
3. Las oscilaciones individuales no son puramente sinusoidales. Esto se puede ver si se examina la serie en detalle.

3.3.1. Oscilaciones no sinusoidales.

Se supone que se tiene una serie temporal de carácter no sinusoidal cuyos valles tienden a ser más planos que los picos y cuyos crecimientos tienden a tener una pendiente ligeramente mayor que la de las caídas. La Figura 2 muestra dos funciones periódicas, cada una de ellas mostrando uno de estos fenómenos. La curva superior es $\cos 2\pi u + \frac{1}{4} \cos 4\pi u$ y la inferior es $\cos 2\pi u - \frac{1}{8} \sin 4\pi u$. Por lo tanto, cada una de ellas sólo contiene su frecuencia fundamental y segundo armónico.

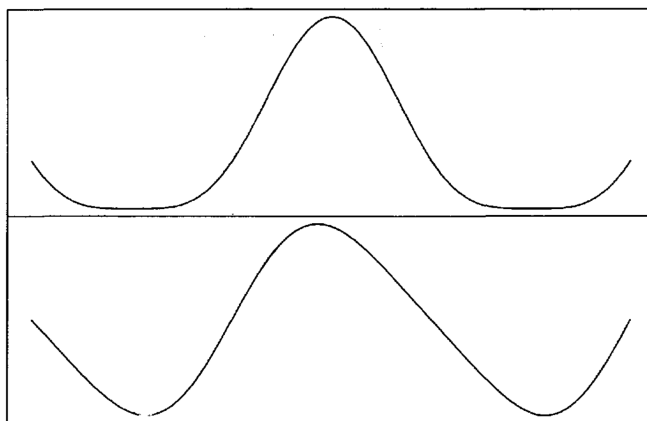


Figura 2: Dos funciones periódicas: $\cos(2\pi u) + \frac{1}{4} \cos(4\pi u)$ (curva superior) y $\cos(2\pi u) - \frac{1}{8} \sin(4\pi u)$ (curva inferior).

El periodograma proporciona información únicamente de la *magnitud* de la transformada de Fourier discreta. En este caso, la *dirección* de la desviación del comportamiento debería ser evidente y observable en la fase de la transformada. Ambas funciones en la Figura 2 pueden ser escritas como $\cos(2\pi u) + R \cos(2\pi(2u + \psi))$, donde la fase ψ tiene los valores 0 y $\frac{1}{4}$ ciclos, respectivamente. Si la escala del eje u es cambiada por un factor f_0 y el origen de u es cambiado de $u = 0$ a $u = u_0$, la forma común $\cos(2\pi u) + R \cos(2\pi(2u + \psi))$ se transforma en

$$\begin{aligned} & \cos(2\pi f_0(u - u_0)) + R \cos(2\pi \{2f_0(u - u_0) + \psi\}) \\ & = \cos(2\pi(f_0u + \phi_1)) + R \cos(2\pi(2f_0u + \phi_2)), \end{aligned}$$

donde $\phi_1 = -f_0u_0$ y $\phi_2 = -2f_0u_0 + \psi$ son las fases de la frecuencia fundamental y el segundo armónico, respectivamente.

Observación 3.28. - La forma intrínseca de la función no se ve afectada por estos cambios.

- La forma intrínseca de la función está caracterizada por ψ , que se puede obtener de ϕ_1 y ϕ_2 como $\psi = \phi_2 - 2\phi_1$.

- A ψ se le llama fase relativa del segundo armónico a la frecuencia fundamental.

Es frecuente que el periodograma muestre un pico ancho y no una única frecuencia, por lo que se suele estudiar esta fase relativa para cada frecuencia en una banda cubriendo el pico. Se eligen las frecuencias de Fourier $f_j = \frac{j}{n}$ que se encuentran en el rango de la anchura del pico. Si la transformada en la frecuencia f_j es $d(f_j) = R(f_j)e^{2\pi i\phi_j}$, entonces la fase relativa es $\psi_j = \phi_{2j} - 2\phi_j$.

Una forma natural de representar estas fases gráficamente es como puntos en un círculo. Esto corresponde a representar, en el plano complejo, los puntos $e^{2\pi i\psi_j}$ para los cuales f_j se encuentra en el rango seleccionado. El interés de esta gráfica está centrado en las frecuencias para las cuales el estado fundamental y el segundo armónico tienen una influencia fuerte, luego se desea que la gráfica contenga alguna información sobre las magnitudes de la transformada en estas frecuencias. Separar cada punto radialmente una distancia adecuada cumple con este objetivo. Una distancia conveniente es $R(f_j)^2 R(f_{2j})$, ya que

$$\begin{aligned} R(f_j)^2 R(f_{2j}) e^{2\pi i\psi_j} &= R(f_j)^2 e^{-4\pi i\phi_j} R(f_{2j}) e^{2\pi i\phi_{2j}} \\ &= \overline{d(f_j)}^2 d(2f_j), \end{aligned} \tag{22}$$

lo cual permite representar un cálculo simple de los valores complejos. La Figura 3 muestra la gráfica resultante. El conjunto de puntos cercanos al origen corresponde a frecuencias en las que o bien el estado fundamental o bien el segundo armónico tienen una influencia débil.

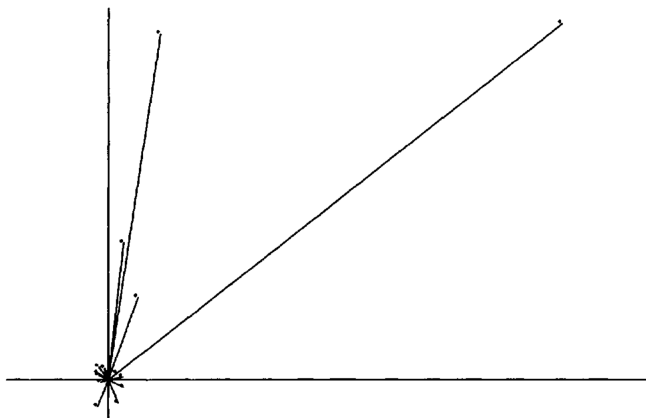


Figura 3: Algunos valores del periodograma de tercer grado, mostrando la fase relativa del segundo armónico.

La función (22) es un caso especial del periodograma de tercer orden $d(f_1, f_2)$, el cual es proporcional a $d(f_1)d(f_2)d(f_1 + f_2)$. Periodogramas de mayor orden son raramente utilizados.

3.3.2. Fluctuaciones de amplitud y de fase.

El ejemplo más simple de una onda coseno con amplitud fluctuante es el fenómeno de los *pulsos*. Si se superponen dos ondas coseno con frecuencias casi iguales $f \pm \delta f$, el resultado es

$$\cos(2\pi(f + \delta f)t) + \cos(2\pi(f - \delta f)t) = 2\cos(2\pi ft)\cos(2\pi\delta ft).$$

Esta nueva onda oscila a una frecuencia media f , pero la amplitud cambia lentamente de acuerdo con la *función moduladora* $\cos(2\pi\delta ft)$. El periodo de la función moduladora es $\frac{1}{\delta f}$, el cual es grande si δf es pequeño. Recíprocamente, si se descompone la onda coseno modulada por análisis de Fourier, la frecuencia aparente f se divide en el par de frecuencias originales $f \pm \delta f$. En el caso particular de los *pulsos* la transformada es cero en la frecuencia aparente f .

Se supone ahora que se tiene una serie de valores en el tiempo cuya amplitud parece variar alrededor de un valor positivo y no alrededor de cero, como en el caso de los *pulsos*. Además, se supone que la frecuencia de las oscilaciones tampoco es constante, sino que cambia lentamente con el tiempo. Por lo tanto, la serie puede ser representada aproximadamente como

$$x_t = R_t \cos(2\pi(f_t t + \phi)), \quad (23)$$

donde R_t y f_t son secuencias que varían lentamente en el tiempo.

Proposición 3.29. Si f_t varía alrededor de un valor típico f_0 , la ecuación (23) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} x_t &= R_t \cos(2\pi\{f_0 t + \phi + (f_t - f_0)t\}) \\ &= R_t \cos(2\pi(f_0 t + \phi_t)), \end{aligned} \quad (24)$$

en la cual la frecuencia es constante y la fase $\phi_t = \phi + (f_t - f_0)t$ varía.

Observación 3.30. No es necesario que la frecuencia f_0 sea un valor típico de f_t para llevar a cabo este arreglo, pero tiene más sentido si este es el caso, ya que de otro modo la fase ϕ_t mostraría un desplazamiento sistemático.

Proposición 3.31. El análogo complejo de (24) es

$$\begin{aligned} x_t &= R_t e^{2\pi i(f t + \phi)} \\ &= z_t e^{2\pi i f t}, \end{aligned} \quad (25)$$

donde $z_t = R_t e^{2\pi i \phi_t}$ es una función moduladora de valores complejos. Su transformada de Fourier es la transformada de Fourier de z_t centrada en la frecuencia f_0 .

Demostración.

$$\begin{aligned}
d_x(f) &= \frac{1}{n} \sum x_t e^{-2\pi i f t} \\
&= \frac{1}{n} \sum z_t e^{-2\pi i (f-f_0)t} \\
&= d_z(f-f_0).
\end{aligned}$$

□

3.3.3. Demodulación compleja.

Se ha visto que no todos los fenómenos ‘periódicos’ tienen representaciones simples en términos de funciones coseno. La demodulación compleja supone un acercamiento más flexible para el análisis de estos fenómenos. El precio de esta flexibilidad es una pérdida de precisión al describir frecuencias puras, para las cuales el análisis armónico es más preciso.

Se supone ahora que un conjunto de datos contiene una componente periódica perturbada de ecuación

$$x_t = R_t \cos(2\pi(f_0 t + \phi_t)), \quad (26)$$

donde $\{R_t\}$ es la amplitud y $\{\phi_t\}$ es la fase, ambas lentamente cambiantes con el tiempo.

El objetivo de la demodulación compleja es extraer aproximaciones de la series $\{R_t\}$ y $\{\phi_t\}$. Puede entenderse como una versión *local* de análisis armónico; es una técnica análoga a la del análisis armónico en el hecho de que busca describir la amplitud y fase de la oscilación, pero es local en el hecho de que se permite que ambas características cambien lentamente a lo largo del tiempo.

Considérese el análogo complejo de (26),

$$x_t = R_t e^{2\pi i (f_0 t + \phi_t)}. \quad (27)$$

La extracción de $\{R_t\}$ y $\{\phi_t\}$ es trivial si se conoce f_0 , lo cual se asume, ya que entonces es posible construir

$$\begin{aligned}
y_t &= x_t e^{-2\pi i f_0 t} \\
&= R_t e^{2\pi i \phi_t}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$R_t = |y_t| \quad \text{y} \quad e^{2\pi i \phi_t} = \frac{y_t}{|y_t|}.$$

Definición 3.32. Se dice que la nueva serie $\{y_t\}$ se obtiene de $\{x_t\}$ por demodulación compleja.

Ahora, la forma real de (26) puede ser escrita como

$$x_t = \frac{1}{2} R_t \left\{ e^{2\pi i (f_0 t + \phi_t)} + e^{-2\pi i (f_0 t + \phi_t)} \right\}$$

y es la suma de dos términos complejos, el primero similar a (27) y el segundo su conjugado complejo. Esta serie real puede ser analizada de dos maneras. La primera es usar demodulación compleja ignorando inicialmente el segundo término y luego eliminarlo utilizando técnicas de filtrado lineal. La segunda forma consiste en separar los dos términos y entonces usar demodulación compleja en cada uno. La separación también se basa en el filtrado, así que las dos maneras sólo son diferentes superficialmente. Sólo se presenta la primera forma.

La demodulación compleja de la serie real (26) es

$$y_t = \frac{1}{2}R_t e^{2\pi i \phi_t} + \frac{1}{2}e^{-2\pi i(2f_0 t + \phi_t)}.$$

El primer término es el interesante ya que, igual que antes, $\{R_t\}$ y $\{\phi_t\}$ se pueden obtener con facilidad. El segundo término, el cual es un senoide complejo perturbado con frecuencia $-2f_0$, debe ser ignorado.

En general, el análisis de la serie no consiste únicamente en el senoide perturbado (26). Algunas serie temporales contienen algunos términos de baja frecuencia, especialmente después de ser modificados para su análisis, y otros términos que pueden identificarse como segundos armónicos. También puede haber componente de *ruido*.

Definición 3.33. *En el contexto de una serie temporal, el ruido se refiere a las fluctuaciones o variaciones aleatorias que están presentes en los datos observados y que no siguen ningún patrón predecible.*

Entonces, en general la serie de datos puede ser representada como

$$x_t = R_t e^{2\pi i(f_0 t + \phi_t)} + z_t,$$

donde z_t contiene los términos adicionales, y por lo tanto

$$\begin{aligned} y_t &= x_t e^{-2\pi i f_0 t} \\ &= \frac{1}{2}R_t e^{2\pi i \phi_t} + \frac{1}{2}e^{-2\pi i(2f_0 t + \phi_t)} + z_t e^{-2\pi i f_0 t}. \end{aligned} \quad (28)$$

El problema básico en la demodulación compleja consiste en separar el primer término en (28) de los demás. La característica que hace esto posible es que, como ambos $\{R_t\}$ y $\{\phi_t\}$ se asumen suaves, el primer término también es probablemente suave.

Definición 3.34. *Decir que un término es suave implica que la función correspondiente varía de manera gradual y continua en lugar de tener cambios bruscos o discontinuidades.*

El segundo término oscila a una frecuencia alrededor de $-2f_0$. Todas las frecuencias en el término final están desplazadas $-f_0$ por la demodulación. Ahora se puede asumir que $\{z_t\}$ no tiene ninguna componente a la frecuencia f_0 , ya que cualquier componente de ese tipo sería indistinguible de $R_t \cos 2\pi(f_0 t + \phi_t)$. Entonces $\{z_t e^{-2\pi i f_0 t}\}$ no contiene ningún componente alrededor de la frecuencia cero, y por lo tanto no es suave. El problema, por lo tanto, consiste en extraer la componente suave de $\{y_t\}$. Esto se consigue normalmente mediante técnicas de filtrado lineal.

3.3.4. Suavizado: Filtrado lineal.

Se supone que la serie $\{y_t\}$ se puede escribir como

$$y_t = a_t + e_t,$$

donde $\{a_t\}$ es suave y $\{e_t\}$ representa errores o perturbaciones. Como $\{a_t\}$ es suave, a_{t-1} y a_{t+1} son aproximadamente las mismas que a_t . Entonces la media aritmética de y_{t-1} , y_t e y_{t+1} es aproximadamente a_t más la media aritmética de e_{t-1} , e_t y e_{t+1} . Sin embargo, estos errores tienden a cancelarse, de tal forma que el error medio suele ser más pequeño que los errores individuales.

Si se lleva a cabo este proceso para cada t se obtiene una nueva serie, dígame $\{z_t\}$, la cual consiste aproximadamente de $\{a_t\}$ más errores que tienden a ser menores que antes.

Definición 3.35. *Este procedimiento se denomina promedio móvil simple.*

La manera más clara de describir el efecto de este procedimiento es mediante un acercamiento a la frecuencia. Supóngase que la serie $\{y_t\}$ es exactamente sinusoidal,

$$y_t = R \cos(2\pi(ft + \phi)).$$

Entonces

$$\begin{aligned} z_t &= \frac{1}{3}(y_{t-1} + y_t + y_{t+1}) \\ &= \frac{1}{3}R \{ \cos(2\pi(ft - f + \phi)) + \cos(2\pi(ft + \phi)) + \cos(2\pi(ft + f + \phi)) \}, \end{aligned}$$

lo cual se evalúa más fácilmente si se observa como la parte real de

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}R \{ e^{2\pi i(ft - f + \phi)} + e^{2\pi i(ft + \phi)} + e^{2\pi i(ft + f + \phi)} \} \\ &= \frac{1}{3}R e^{2\pi i(ft + \phi)} \{ e^{-2\pi if} + 1 + e^{2\pi if} \} \\ &= \frac{1}{3}R e^{2\pi i(ft + \phi)} (1 + 2 \cos 2\pi f). \end{aligned} \tag{29}$$

La parte real es entonces $\frac{R}{3} \cos(2\pi i(ft + \phi)) (1 + 2 \cos(2\pi f))$. Por lo tanto el resultado $\{z_t\}$ de este procedimiento se obtiene del producto de la serie de partida $\{y_t\}$ por $\frac{(1+2\cos(2\pi)f)}{3}$. Se presenta una gráfica de este factor multiplicativo en función de la frecuencia en la Figura 4.

Observación 3.36. - *En este procedimiento de suavizado el resultado es una función lineal del punto de partida, luego es también claro lo que ocurre cuando el punto de partida es la suma de varios términos coseno. El resultado entonces contiene términos coseno con las mismas frecuencias pero cada uno con la amplitud modificada por el factor $\frac{(1+2\cos(2\pi f))}{3}$, siendo f la frecuencia correspondiente.*

- *Por lo tanto, términos cuya frecuencia sea cercana a cero no se ven apenas modificados, mientras que un término con $f = \frac{1}{3}$ es completamente eliminado.*

- *Cualquier serie puede ser representada como una suma de términos coseno y, por tanto, la acción de este filtro en una serie arbitraria puede ser descrita en términos de la frecuencia.*

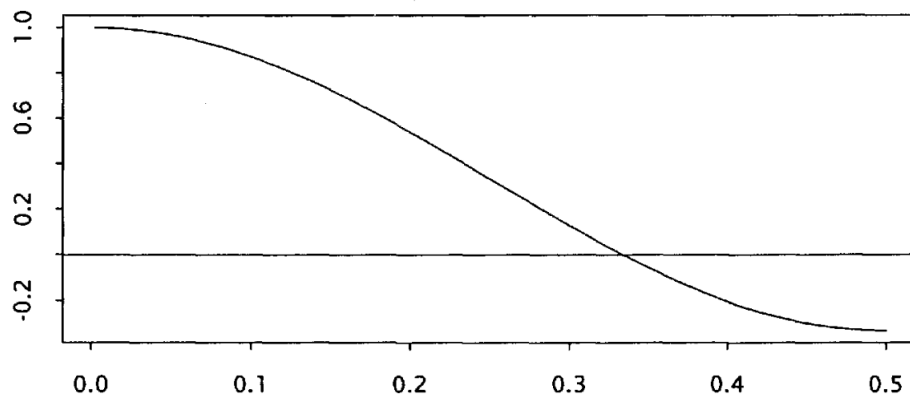


Figura 4: Representación de la función $\frac{(1+2\cos(2\pi f))}{3}$ en función de la frecuencia en ciclos por unidad de tiempo.

Esto proporciona una descripción alternativa del efecto que tiene el promedio móvil simple en el problema original, donde $\{y_t\}$ es una señal suave con error o ruido. Para que una función sea suave debe tener su transformada concentrada en frecuencias bajas, mientras que la magnitud de la transformada del ruido, al menos del ruido blanco, es relativamente constante. Entonces, el procedimiento de promedio que se ha descrito pasa la mayor parte de la señal, pero reduce la influencia del ruido, al menos a ciertas bandas de frecuencia.

Un filtro lineal general consiste en un conjunto de *pesos* $\{g_r, g_{r+1}, \dots, g_s\}$, tales que si la serie a filtrar es $\{y_t\}$ el resultado es

$$z_t = \sum_{u=r}^s g_u y_{t-u}. \quad (30)$$

El promedio móvil simple de tres términos que se ha estudiado tiene $r = -1$, $s = 1$ y $g_u = \frac{1}{3}$, $u = -1, 0, 1$. Nótese que si la serie a filtrar está disponible para $t = 0, 1, \dots, n-1$, el resultado puede ser calculado sólo para $t = s, s+1, \dots, n-1+r$.

Si filtramos el senoide $R \cos 2\pi(ft + \phi)$, el resultado, para t en el rango anterior, es la parte real de

$$\sum_{u=r}^s g_u R e^{2\pi i(ft - fu + \phi)} = R e^{2\pi i((ft + \phi))} \sum_{u=r}^s g_u e^{-2\pi i fu}.$$

Definición 3.37. *El segundo factor,*

$$G(f) = \sum_{u=r}^s g_u e^{-2\pi i fu},$$

se llama función de transferencia del filtro y describe la manera en la cual un senoide con frecuencia f se ve transferido del estado inicial al resultado.

Su magnitud al cuadrado $|G(f)|^2$ se denomina como función de transferencia de potencia.

En el caso de un filtro simétrico, uno para el cual $r = -s$ y $g_{-u} = g_u$, la función de transferencia es real, y el resultado es $RG(f) \cos 2\pi(ft + \phi)$. En este caso

$$\begin{aligned} G(f) &= \sum g_u \cos(2\pi fu) \\ &= g_0 + 2 \sum_{u>0} g_u \cos(2\pi fu). \end{aligned}$$

Más generalmente, $G(f)$ puede ser complejo, dígase $G(f) = \Gamma(f)e^{2\pi i\gamma(f)}$, donde $\Gamma(f)$ es real no negativo y $\gamma(f)$ es real. El resultado es entonces la parte real de

$$Re^{2\pi i(ft+\phi)} \Gamma(f) e^{2\pi i\gamma(f)},$$

la cual es

$$R\Gamma(f) \cos(2\pi\{ft + \phi + \gamma(f)\}).$$

En este caso, la amplitud se modifica por $\Gamma(f)$ como antes, pero a mayores se modifica la fase por $\gamma(f)$. Se debe tener en cuenta que cuando la serie inicial es real, los pesos del filtro también suelen ser de valores reales, y como consecuencia se cumple $G(-f) = \overline{G(f)}$. Entonces $\Gamma(-f) = \Gamma(f)$ y $\gamma(-f) = -\gamma(f)$. Por lo tanto, sólo se necesita estudiar el comportamiento de las funciones de transferencia para frecuencias positivas.

La relación (30), la cual define el resultado de un filtrado en términos de la serie inicial y un conjunto de pesos, es un ejemplo de *convolución*.

Definición 3.38. *La convolución es una operación que combina dos funciones para producir una tercera función que representa cómo una de las funciones influye en la otra a medida que se superponen y desplazan. En términos más simples, la convolución mide cómo se mezclan combinando funciones en función de su superposición y desplazamiento relativo.*

La convolución circular es una variante de la convolución tradicional que se aplica a señales o secuencias periódicas. En lugar de considerar las señales como extendiéndose infinitamente, como en la convolución estándar, la convolución circular toma en cuenta la periodicidad de las señales y considera que se repiten cíclicamente.

Si los valores en los extremos del resultado son calculados como si la serie inicial fuese parte de una serie periódica con periodo n , la operación es una *convolución circular*.

Observación 3.39. - Si f es una frecuencia de Fourier, entonces

$$\begin{aligned} d_z(f) &= nd_y(f)d_g(f) \\ &= G(f)d_y(f), \end{aligned} \tag{31}$$

ya que la transformada de los pesos es simplemente $d_g(f) = n^{-1}G(f)$.

- Dos reglas simples son tratar los valores no disponibles en la serie a filtrar como iguales a los valores extremos correspondientes y tratar la serie a filtrar como si fuera simétrica con respecto a cada valor extremo.

- Como la función de transferencia es proporcional a la transformada de los pesos, puede ser

invertida para obtener los pesos. Entonces se puede definir un filtro general lineal en términos de o bien los pesos $\{g_u\}$ o bien la función de transferencia $G(f)$.

- Los pesos también se conocen como la función de respuesta al impulso, ya que si la serie inicial es un impulso (i.e., consiste en un único valor no nulo y el resto son ceros), el resultado son precisamente los pesos.

- Los filtros que se han descrito anteriormente y los que se utilizarán a continuación se conocen como filtros de respuesta finita al impulso (FIR).

- La otra clase principal de filtros son los llamados filtros recursivos, en los cuales el resultado en un instante determinado depende de un número finito de valores de la serie inicial y también de valores del resultado en un número finito de otros instantes (normalmente en el pasado).

- Los filtros recursivos no tienen respuesta finita al impulso.

- La función de transferencia de un filtro también se conoce como su función de respuesta en frecuencia, ya que, de una manera dual, describe el resultado cuando la serie inicial contiene una única frecuencia.

Los filtros más simples son aquellos que desplazan la serie. Esto significa que, si la serie inicial es $\{y_t\}$, el resultado es $\{z_t\}$, donde $z_t = y_{t+h}$ para algún h . Como $z_0 = y_h$, este filtrado se puede interpretar como un cambio de origen temporal a $t = h$. La función de transferencia es $e^{2\pi i f h}$, mientras que $\Gamma(f) = 1$ y $\gamma(f) = fh$, una función lineal de la frecuencia f . Cuando una función de transferencia tiene una fase lineal, puede ser interpretada como si estuviera desplazada, incluso si $\Gamma(f)$ no es constante.

Una manera conveniente de construir filtros es aplicándolos repetidamente.

Proposición 3.40. Cuando se aplican sucesivamente filtros con funciones de transferencia $G_1(f)$ y $G_2(f)$, el resultado es equivalente a aplicar un filtro compuesto con función de transferencia $G(f) = G_1(f)G_2(f)$

Demostración. Si la serie inicial para el primer filtro es $e^{2\pi i f t}$, entonces el resultado, el cual es la serie inicial para el segundo filtro es $G_1(f)e^{2\pi i f t}$, mientras que el resultado final es $G_1G_2(f)e^{2\pi i f t}$ \square

Observación 3.41. El orden en el cual se aplican los filtros es no influye excepto para posibles efectos en los extremos de la serie. Las funciones de transferencia $G_1(f)G_2(f)$ y $G_2(f)G_1(f)$ son idénticas y determinan el filtro.

4. Ejemplo práctico de aplicación del algoritmo Prophet con R.

Para este ejemplo se ha utilizado un archivo de datos con extensión .DAT que contiene información diaria sobre la concentración del contaminante atmosférico NO_2 en la atmósfera en el núcleo urbano de Londres desde el año 2007 hasta el año 2011 incluido. Este archivo se ha obtenido de (*Statistical Downscaling of Gridded Air Quality Data*, [s.f.]).

Estos datos corresponden a las 7681 parejas de latitudes y longitudes comprendidas entre las coordenadas 51,08 N y 51,83 N y 0,83 W y 0,50 E. Estos puntos se pueden observar en la Figura 5.

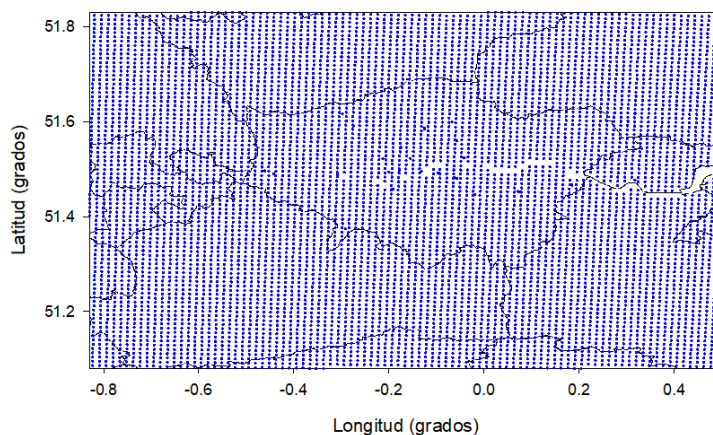


Figura 5: Puntos utilizados para calcular los datos utilizados en el estudio.

Cada archivo de datos está estructurado en cinco columnas, que incluyen el año, el mes, el día, la concentración y la región correspondiente a cada dato. Las regiones de Londres se clasificaron en tres categorías (1, 2 y 3) en función de las concentraciones registradas para cada contaminante. La justificación de la clasificación de las regiones se puede ver en el Apéndice B.

Primero se han importado los datos en formato dataframe y con las adecuadas transformaciones, utilizando los paquetes *lubridate* (Grolemund *et al.*, 2011) y *dplyr* (Hadley Wickham *et al.*, 2023), se ha conseguido un dataframe con dos columnas:

- Una columna de tipo *Date* con nombre **ds** con las fechas desde el 1 de enero de 2007 hasta el 31 de diciembre de 2011 incluido con formato dd/mm/aaaa.
- Una columna de tipo *numeric* con nombre **y** con la media diaria de los valores de las concentraciones en las tres regiones correspondientes a los valores de la columna **ds**.

Para hacer el ajuste estadístico de la manera más simple, con el paquete *prophet* (Taylor *et al.*, 2021), el método **prophet** requiere un dataframe con estas características. En este ejemplo se ha ajustado el modelo con los valores correspondientes a todas las fechas previas al 1 de Julio de 2011.

Para hacer la predicción de la manera más simple, se pasan al método **predict** dos objetos: el modelo ajustado y un dataframe con valores de tipo *Date* indicando las fechas sobre las que se quiere realizar la predicción. En este ejemplo se ha hecho la predicción de todas las fechas en las que se ajusta el modelo incluyendo a mayores las restantes del año 2011. Es decir, todas las fechas abarcando desde el año 2007 hasta el año 2011 incluido.

Para representar los resultados gráficamente se ha empleado el paquete *ggplot2* (Hadley Wickham, 2016).

Entre las componentes del modelo se incluyen la tendencia general de la serie y las periodicidades anual y semanal.

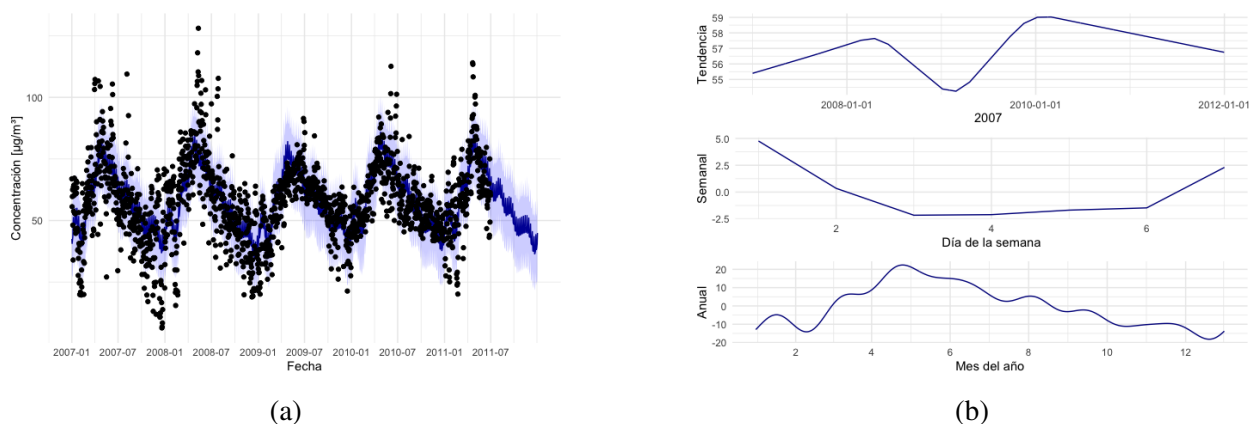


Figura 6: Modelo ajustado con los datos de la concentración media diaria del O_3 desde el 2007-01-01 hasta el 2011-07-01 sin incluir. Predichos los valores de estas mismas fechas incluyendo las fechas hasta el 2011-12-31 incluido. (a) Valores predichos de la serie en azul oscuro, rango de error en azul claro y en forma de puntos negros los valores con los que se ajusta el modelo. (b) Componentes del modelo que se utiliza para la predicción.

Se ha realizado un estudio estadístico, se incluye en el Apéndice C, de los datos de estudio. Se puede observar, comparando la Figura 6 con los gráficos proporcionados en este apéndice, que el ajuste del modelo es visualmente bastante adecuado y las componentes también parecen estar bien aproximadas. En el estudio estadístico también se pueden detectar periodicidades anuales y semanales.

El método Prophet permite añadir más argumentos para mejorar la predicción. En este caso, gracias al análisis estadístico proporcionado en el Apéndice C, se ha incluido que existen periodicidades anual y semanal. Esto se ha hecho especificando los argumentos `yearly.seasonality` y `weekly.seasonality` con el valor `TRUE`.

También permite pasar como argumento un dataframe con los días festivos de importancia para la serie temporal para que el algoritmo lo tenga en cuenta a la hora de hacer las predicciones. Se ha creado un dataframe que incluye los días festivos que se repiten todos los años en Londres, que son 'New year's day', 'Easter' (incluyendo 'Good Friday' y 'Easter Monday'), 'Early May Bank Holidays', 'Spring Bank Holidays', 'Late summer Bank Holidays', 'Christmas Day' y 'Boxing Day'. También se incluye la boda real celebrada el 29 de abril de 2011, que fue fiesta nacional.

Se ha ajustado el modelo con las nuevas modificaciones obteniendo el resultado de una predicción prácticamente idéntica a la anterior, sin mejoras notables. Se muestra la representación gráfica de esta predicción en la Figura 7.

En este caso, en las componentes del modelo, también se incluye el efecto de los días festivos especificados al ajustar el modelo.

Para hacer una pequeña comparación entre ambos ajustes, se ha calculado el error absoluto medio puesto que en este caso es el valor más representativo. El algoritmo suaviza mucho la trayectoria de los datos, es decir, evita los datos atípicos y la diferencia entre dos datos puede ser muy grande de manera que el error cuadrático medio no refleja la realidad del ajuste. El error absoluto medio

del primer ajuste es 8,847789, mientras que el del segundo ajuste es 8,731971, por lo que hay una mínima mejoría en el ajuste por incluir los nuevos argumentos a la hora de hacer el ajuste.

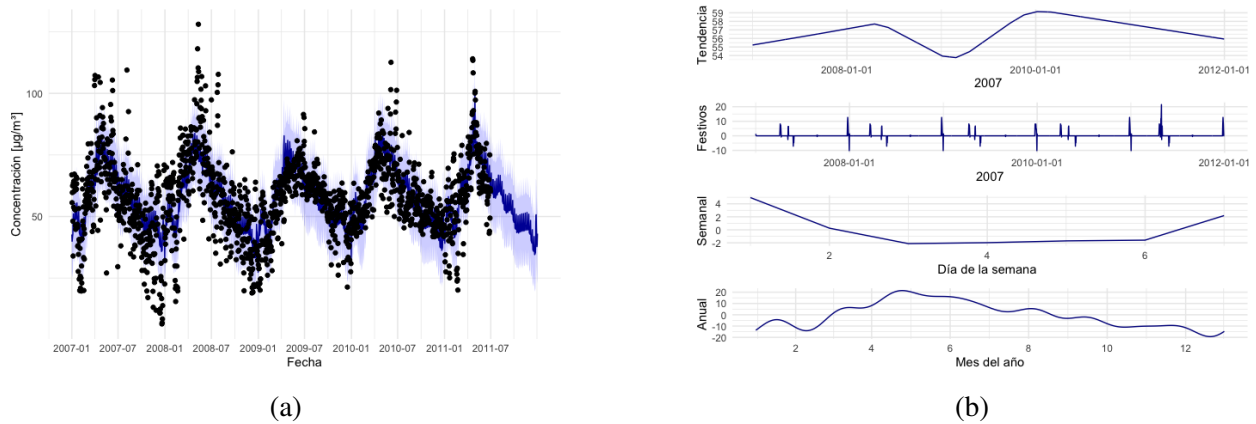


Figura 7: Modelo ajustado con los datos de la concentración media diaria del O_3 desde el 2007-01-01 hasta el 2011-07-01 sin incluir. Predichos los valores de estas mismas fechas incluyendo las fechas hasta el 2011-12-31 incluido. En el ajuste se incluyen argumentos adicionales como periodicidades o días festivos. (a) Valores predichos de la serie en azul oscuro, rango de error en azul claro y en forma de puntos negros los valores con los que se ajusta el modelo. (b) Componentes del modelo que se utiliza para la predicción.

Referencias

- BLOOMFIELD, Peter, 2000. *Fourier analysis of time series an introduction*. Fourier analysis of time series an introduction. 2nd ed. New York: Wiley. Wiley series in probability and statistics. Applied probability and statistics section. ISBN 1-280-54195-4.
- COWPERTWAIT, Paul S.P. y METCALFE, Andrew V., 2009. *Introductory Time Series with R*. Introductory Time Series with R by Paul S.P. Cowpertwait, Andrew V. Metcalfe. 1st ed. 2009. New York, NY: Springer New York. Use R! ISBN 1-282-36456-1.
- DONNELLY, Aoife; MISSTEAR, Bruce y BRODERICK, Brian, 2011. Application of nonparametric regression methods to study the relationship between NO2 concentrations and local wind direction and speed at background sites.
- FERNÁNDEZ-DUQUE, Beatriz; PÉREZ, Isidro A.; GARCÍA, M.Ángeles; PARDO, Nuria y SÁNCHEZ, M.Luisa, 2019. Annual and seasonal cycles of CO2 and CH4 in a Mediterranean Spanish environment using different kernel functions.
- GROLEMUND, Garrett y WICKHAM, Hadley, 2011. Dates and Times Made Easy with lubridate. *Journal of Statistical Software*. Vol. 40, n.º 3, págs. 1-25. Disponible también desde: <https://www.jstatsoft.org/v40/i03/>.
- HASTIE, Trevor; TIBSHIRANI, Robert y FRIEDMAN, Jerome., 2009. *The Elements of Statistical Learning Data Mining, Inference, and Prediction, Second Edition*. The Elements of Statistical Learning Data Mining, Inference, and Prediction, Second Edition. 2nd ed. 2009. New York, NY: Springer New York. Springer Series in Statistics. ISBN 9780387848587.
- HASTIE, Trevor J. y TIBSHIRANI, Robert J., 1990. *Generalized additive models*. Generalized additive models / T.J. Hastie, R.J. Tibshirani. London [etc: Chapman & Hall. Monographs on statistics and applied probability ; 43. ISBN 0412343908.
- JAMES, Gareth; WITTEN, Daniela; HASTIE, Trevor y TIBSHIRANI, Robert., 2013. *An Introduction to Statistical Learning with Applications in R*. An Introduction to Statistical Learning with Applications in R / by Gareth James, Daniela Witten, Trevor Hastie, Robert Tibshirani. 1st ed. 2013. New York, NY: Springer New York. Springer Texts in Statistics, 103. ISBN 1-4614-7138-9.
- R CORE TEAM, 2023. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. Disponible también desde: <https://www.R-project.org/>.
- SIMONOFF, Jeffrey S., 1996. *Smoothing Methods in Statistics*. Smoothing Methods in Statistics by Jeffrey S. Simonoff. 1st ed. 1996. New York, NY: Springer New York. Springer Series in Statistics. ISBN 1-4612-4026-3.
- Statistical Downscaling of Gridded Air Quality Data*, [s.f.]. Disponible también desde: <https://www.data-mashup.org.uk/research-projects/statistical-downscaling-of-gridded-air-quality-data/>.
- TAYLOR, Sean y LETHAM, Ben, 2021. *prophet: Automatic Forecasting Procedure*. Disponible también desde: <https://CRAN.R-project.org/package=prophet>. R package version 1.0.
- TICHHMARSH, E. C., 1939. *Theory of Functions*. Theory of Functions. London: Oxford University Press.

- WICKHAM, Hadley, 2016. *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York. ISBN 978-3-319-24277-4. Disponible también desde: <https://ggplot2.tidyverse.org>.
- WICKHAM, Hadley; FRANÇOIS, Romain; HENRY, Lionel; MÜLLER, Kirill y VAUGHAN, Davis, 2023. *dplyr: A Grammar of Data Manipulation*. Disponible también desde: <https://CRAN.R-project.org/package=dplyr>. R package version 1.1.2.
- WICKHAM, Hadley. y GROLEMUND, Garrett., 2017. *R for data science import, tidy, transform, visualize, and model data*. R for data science import, tidy, transform, visualize, and model data / Hadley Wickham and Garrett Golemund. Beijing: O'Reilly. ISBN 9781491910382.

Apéndice A: Breve introducción a la distribución de Laplace.

En teoría de la probabilidad la distribución de Laplace, también conocida como distribución doble exponencial, es una densidad de probabilidad continua, llamada así en honor a Pierre-Simon Laplace. La distribución de Laplace resulta de la diferencia de dos variables exponenciales aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas.

1. Densidad de probabilidad.

Se dice que una variable aleatoria X de tipo continuo tiene distribución de Laplace(μ, b) si su densidad de probabilidad es:

$$f(x|\mu, b) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} = \frac{1}{2b} \begin{cases} e^{-\frac{\mu-x}{b}} & \text{si } x < \mu \\ e^{-\frac{x-\mu}{b}} & \text{si } x \geq \mu \end{cases} \quad (32)$$

donde:

- x es la variable aleatoria.
- μ es el parámetro de localización, que determina el punto donde se encuentra el pico de la distribución.
- $b > 0$ es el parámetro de escala, que controla la ‘anchura’ de la distribución.

Si $\mu = 0$ y $b = 1$, la distribución de Laplace se dice que es estándar.

La distribución de Laplace se caracteriza por su forma en V invertida, con una concentración de probabilidad alrededor de su parámetro de localización μ . El valor absoluto $|x - \mu|$ en el exponente refleja su simetría en torno a μ .

La función de densidad de probabilidad de la distribución de Laplace es comparable a la de la distribución normal, pero mientras la distribución normal se expresa en términos de la diferencia al cuadrado $(x - \mu)^2$, la distribución de Laplace hace intervenir la diferencia absoluta $|x - \mu|$, lo que hace que la distribución de Laplace tiene una mayor probabilidad de valores extremos.

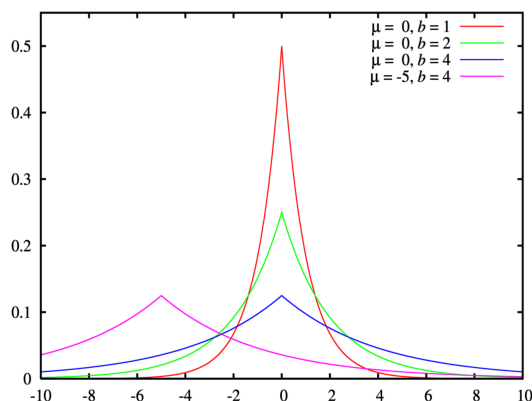


Figura 8: Funciones de densidad de probabilidad pertenecientes a variables con distribución de Laplace.

Apéndice B: Justificación de la clasificación en regiones

Las concentraciones de los datos del archivo se han suavizado mediante la expresión

$$c(x, y, h_1, h_2) = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{x-x_i}{h_1} \right) K_2 \left(\frac{y-y_i}{h_2} \right) c_i}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{x-x_i}{h_1} \right) K_2 \left(\frac{y-y_i}{h_2} \right)}$$

donde c es la concentración en el punto (x, y) , c_i es la concentración conocida en el punto (x_i, y_i) , K_i son los núcleos del suavizado, h_i son las ventanas. Se ha empleado un núcleo gaussiano

$$K(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-0,5t^2) \quad -3 < t < 3$$

donde el intervalo usado para calcularlo se ha limitado para aumentar la velocidad de cálculo (Fernández-Duque *et al.*, 2019). La ventana h se ha calculado siguiendo el método de Silverman (Donnelly *et al.*, 2011).

$$h = 0,9\sigma n^{-\frac{1}{5}}$$

donde σ es la desviación estándar. Se han considerado como concentraciones de fondo los promedios de los extremos NE, SE, SW, NW de la región, y el intervalo de concentración desde el fondo al máximo se ha dividido en tres partes iguales, que son las isolíneas que se representan en la Figura 9.

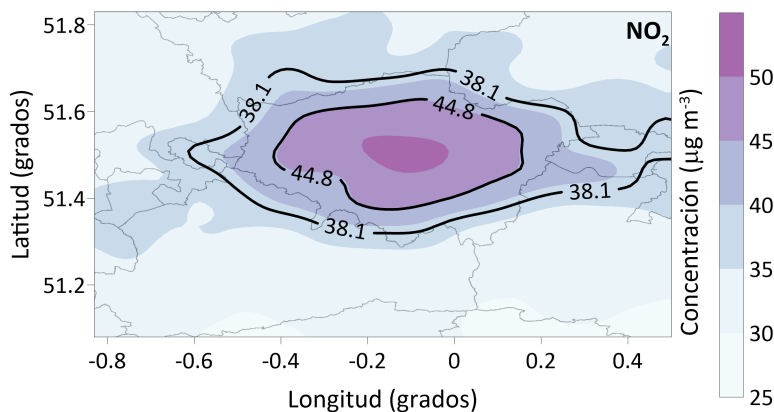


Figura 9: Regiones calculadas para los datos de concentración de núcleos de NO_2 en la atmósfera en el núcleo urbano de Londres.

Apéndice C: Gráficas y tablas utilizadas para el análisis estadístico de los datos estudiados.

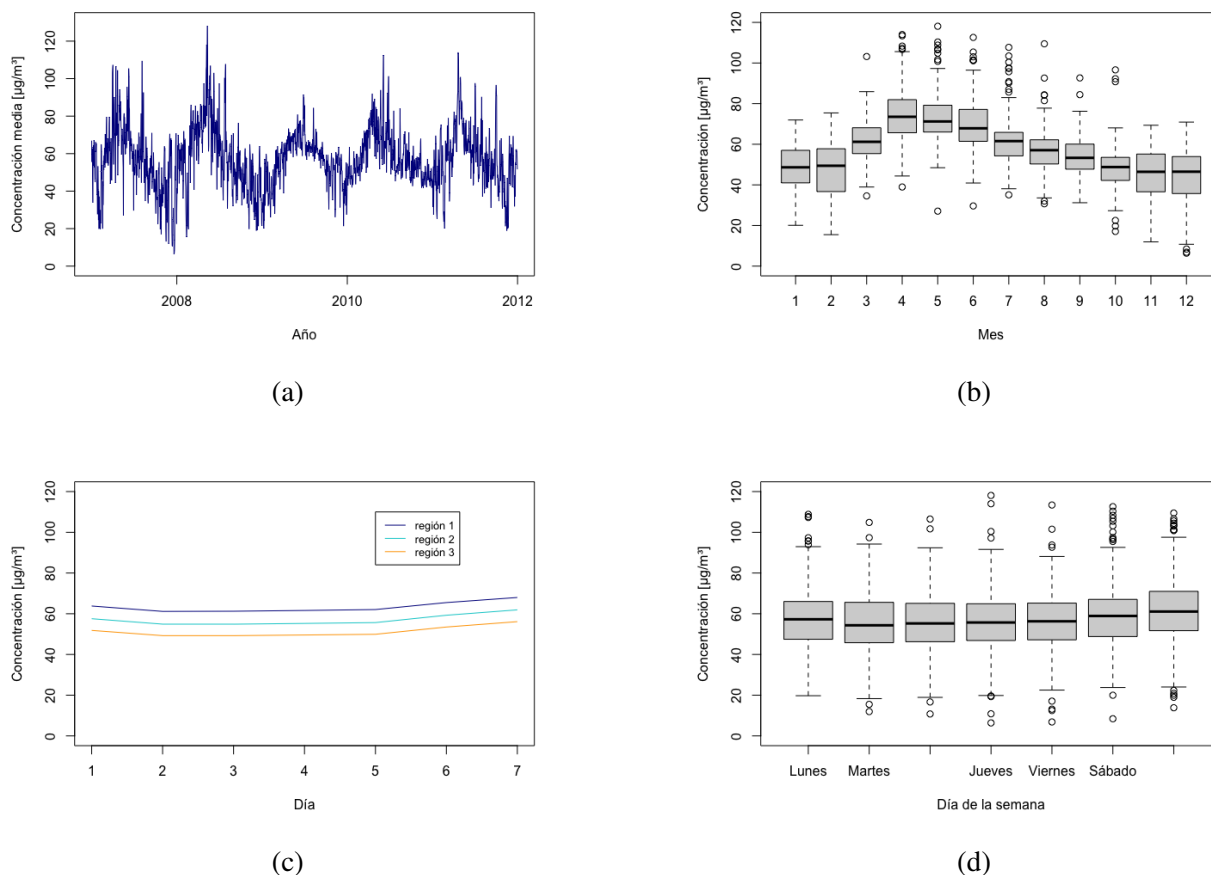


Figura 10: (a) Concentración de O_3 en el periodo de estudio. (b) Diagrama de cajas y bigotes para representar la tendencia de la serie a lo largo de los meses en un año. Se utilizan los valores de los cinco años por cada mes. (c) Valores de la concentración media de O_3 en función del día de la semana a lo largo del periodo de estudio. (d) Diagrama de cajas y bigotes con todos los valores a lo largo del periodo de estudio en función del día de la semana.

Tabla 1: Tabla con estadísticos calculados para analizar la tendencia general de la serie.

año	media	mediana
2007	54.77523	55.23103
2008	58.74018	58.10149
2009	55.8617	57.15768
2010	59.00292	56.86142
2011	57.78157	56.71