



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

Física del Fondo Cósmico de Microondas

Autor: Héctor Acebes Santos

Tutor: Diego Sáez Gómez

Año 2022

Índice

1. Introducción	1
1.1. Modelo cosmológico estándar	2
2. Inflación	6
2.1. Deficiencias Modelo Cosmológico Estándar	6
2.1.1. Problema de la planitud	6
2.1.2. Problema del horizonte	7
2.2. Recalentamiento	8
3. Perturbaciones cosmológicas	9
3.1. Perturbaciones en la métrica	9
3.2. Elección del gauge	10
3.2.1. Perturbaciones de materia	10
3.2.2. Ecuaciones del movimiento	11
3.2.3. Perturbación curvatura comóvil	12
3.2.4. Espectro de potencia de la curvatura comóvil	13
4. Anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas	14
4.1. Ecuación de Boltzmann	17
4.1.1. Ecuación de Boltzmann sin colisiones	18
4.1.2. Dispersión Thomson	19
4.1.3. Ecuación de Boltzmann para fotones	21
4.2. Anisotropías a gran escala	23
4.3. Oscilaciones acústicas	24
4.4. Amortiguamiento	24
4.5. Espectro de potencia	26
4.5.1. Escalas angulares grandes	27
4.5.2. Picos acústicos	27
5. Parámetros cosmológicos	29
5.1. Curvatura y Λ	29
5.2. Amplitud A_s , índice espectral n_s y profundidad óptica τ	30
5.3. Densidades de bariones y de CDM	31
6. Conclusiones	33
Bibliografía	35

1. Introducción

En este trabajo se comentarán las características más importantes del fondo cósmico de microondas, CMB (Cosmic Microwave Background), así como su origen y los principales procesos físicos relacionados con él. A modo de resumen la radiación de fondo de microondas es una radiación que llena todo el universo y tiene espectro de cuerpo negro.

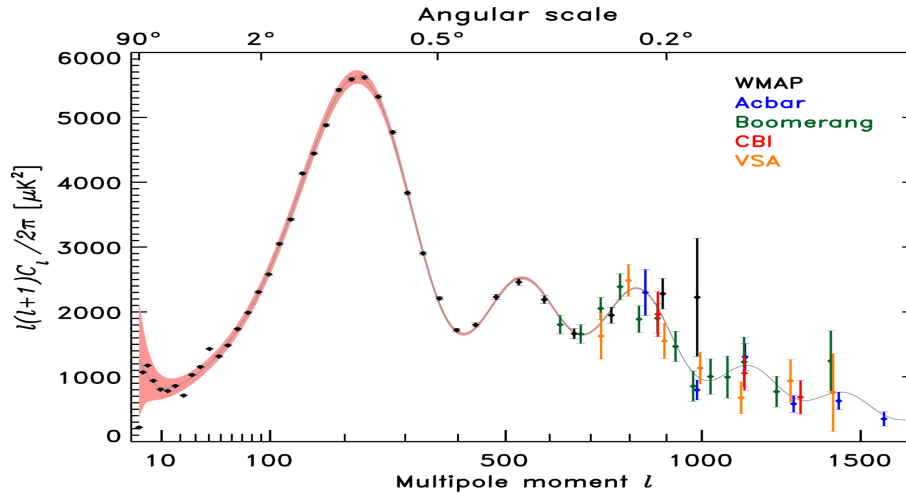


Figura 1: La imagen muestra el espectro de potencia en función de la escala angular. Los datos mostrados son de los experimentos WMAP (2006), Acbar (2004), Boomerang (2005), CBI (2004) y VSA (2004).

La primera observación de la radiación de microondas fue realizada por Wilson y Penzias [1] en el año 1964. Inicialmente no se tomó en serio el descubrimiento pues se pensaba que se trataba de ruido en la detección. No fue hasta años más tarde cuando se relacionó esta señal con los trabajos de Alpher, Gamow y Herman [2], desarrollados durante los años 40, que predecían una radiación de fondo como reliquia procedente del Big Bang. Su descubrimiento decantaría la balanza hacia una de las teorías que competían por ser hegemónicas en cosmología. En aquellos años las dos principales teorías eran la teoría de un universo en expansión, o teoría del Big Bang, y la teoría de un universo estacionario. Esta última no era capaz de explicar la existencia de ninguna radiación de fondo, por lo que la teoría del universo en expansión resultó fuertemente respaldada tras el descubrimiento.

Pero, ¿cuál es el origen de la radiación, la procedencia de los fotones recibidos? Para contestar a esta pregunta vamos a realizar un breve recorrido por las diferentes etapas por las que ha transcurrido el universo a lo largo del tiempo. De acuerdo con la teoría del Big Bang, al comienzo de la vida del universo la mayor parte de la energía del mismo se encontraba en forma de radiación muy intensa, siendo ésta la responsable de la expansión del universo en esta etapa. Esta radiación se distribuye entre las diferentes frecuencias formando un espectro, que depende de la temperatura. Este espectro tiene una forma casi perfecta de cuerpo negro. Aunque durante esta primera etapa del universo la radiación ocupe un papel central, también existían diferentes partículas como los electrones o los bariones. Las altísimas temperaturas hacían imposible la formación de átomos estables, por lo que fotones, electrones y bariones formaban un plasma muy energético. En este plasma sumamente denso y caliente, los fotones no podían viajar libremente, si no que colisionaban de forma constante con el resto de partículas. Con la expansión del universo la temperatura disminuye de forma pro-

gresiva hasta alcanzar unos 3000 K, lo que llevo unos 380.000 años desde el comienzo del Big Bang. A pesar de esta disminución el espectro de cuerpo negro se sigue manteniendo. Esta temperatura equivale a 0,25 eV, muy por debajo de los 13,6 eV necesarios para la ionización del hidrógeno. Es en este momento en el que la energía ha disminuido lo suficiente como para que los electrones y los protones puedan formar los primeros átomos de hidrógeno. Con la formación de estos átomos, los fotones quedan libres de su intensa interacción con los electrones y protones y pueden viajar libremente. Por primera vez el universo se vuelve transparente a la luz. Estos primeros fotones que son emitidos tras el proceso de recombinación, que es el proceso de formación de los primeros elementos químicos, son los que formarán la señal del fondo cósmico de radiación. Aunque en su emisión eran fotones muy energéticos, debido a la continua expansión del universo, su temperatura ha disminuido y han sufrido un corrimiento al rojo en su frecuencia, llegando a la Tierra en el momento actual con una temperatura aproximada de 2,73 K y alcanzando su pico en la frecuencia de las microondas.

La estructura de cuerpo negro, la temperatura y la homogeneidad de la radiación aportan sin duda una gran cantidad de datos e información sobre cómo era el universo primitivo y cómo ha variado hasta la actualidad. Sin embargo, hay otro aspecto que puede proporcionar una visión aún más profunda y útil sobre la historia de nuestro universo. Aunque la radiación recibida es prácticamente homogénea, tiene una serie de anisotropías de 10 partes por millón. Estas anisotropías en la temperatura muestran sutiles variaciones en el plasma primigenio en el momento de la recombinación. En este trabajo se estudiarán estas anisotropías, analizando cómo han surgido, cómo han evolucionado en el plasma en los primeros compases del universo y finalmente cómo se han manifestado en el fondo cósmico de microondas.

Un espectro totalmente homogéneo de la radiación reflejaría un universo primitivo homogéneo, tanto a pequeñas como a grandes escalas. Nuestro universo aunque es homogéneo a grandes escalas no lo es a pequeña escala, pues es posible encontrar planetas, estrellas, galaxias y demás objetos astronómicos. La presencia de estas pequeñas anisotropías puede arrojar luz al proceso de formación de las diferentes estructuras que componen el universo. Diferencias de presión en el plasma provocarían un aumento de la densidad en algunas zonas. En ellas, la gravedad aumentaría atrayendo la materia colindante y vaciando una gran parte del espacio. Este mecanismo puede dar respuesta a la estructura del universo y una de las principales fuentes de información de las que se dispone para confirmarlo o falsarlo es el estudio de las anisotropías del fondo cósmico de microondas.

Para poder estudiar el fondo cósmico de microondas es necesario conocer algunas cuestiones importantes acerca del modelo cosmológico estandar y la teoría de la relatividad general.

1.1. Modelo cosmológico estándar

En esta sección se comentarán de forma breve los principios y principales resultados que posteriormente serán utilizados en el desarrollo del trabajo.

El modelo cosmológico estándar recibe también el nombre de Λ CDM. Este nombre hace referencia a alguna de las diferentes especies que componen el universo. El término Λ proviene de la constante cosmológica, que describe la presencia de energía oscura. El resto del nombre CDM hace referencia a la materia oscura no relativista (Cold Dark Matter). El resto de especies con las que se completa el universo son la materia ordinaria y la radiación. La diferente proporción de estas cuatro componentes es lo que va a determinar la mayoría de las propiedades del universo, así como su evolución.

Los dos principios que rigen esta teoría son el principio cosmológico y la universalidad de las leyes físicas. El primero dicta que a grandes escalas el universo es homogéneo e isótropo. Una de las principales características de este modelo es que el espacio-tiempo varía su tamaño con el tiempo, ya sea expandiéndose o contrayéndose. Por tanto, para poder realizar cualquier medida en un espacio de este tipo es necesario definir una métrica que se adapte a estas características. Ésta se conoce como métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker y toma la siguiente forma:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1)$$

el término $a(t)$ se conoce como factor de escala; K hace referencia a la curvatura del espacio, pudiendo tratarse de un universo abierto, cerrado o plano. Las coordenadas que aparecen están referidas a un observador comóvil, que es aquel que se desplaza junto a la expansión del universo.

Las propiedades de homogeneidad e isotropía pueden ayudar a modelar el contenido del universo como si se tratara de un fluido perfecto. El tensor energía-momento tomará la siguiente forma:

$$T_{\mu\nu} = P(t)g_{\mu\nu} + (\rho(t) + P(t))u_\mu u_\nu \quad (2)$$

La componente 00 del tensor T_ν^μ corresponderá a la densidad, $-\rho(t)$, mientras que el resto de componentes de la diagonal se identifican con la presión $p(t)$. La presión y la densidad están determinadas por la ecuación bariotrópica del fluido:

$$P(t) = \omega\rho \quad (3)$$

Cada especie tendrá un valor diferente para ω siendo esta $\omega = 0$ para la materia no relativista, $\omega = 1/3$ para la radiación y $\omega = -1$ para la constante cosmológica. Estos valores se obtienen de la conservación de la ecuación covariante $\nabla T_{\nu;\mu}^\mu = 0$. Esta igualdad desemboca en la siguiente ecuación, que permite calcular la presión que ejercen las diferentes especies en función de ω y del factor de escala:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \quad (4)$$

La solución para un fluido perfecto con ecuación de estado constante es:

$$\rho(a) \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (5)$$

Sustituyendo la presión para cada especie, $P=0$ para la materia ordinaria, etc; es posible obtener la ecuación de estado correspondiente.

Como se ha comentado al comienzo de la sección, la necesidad de utilizar una métrica distinta provocará un cambio también en la medición de las distancias, velocidades y aceleraciones. La distancia propia entre dos puntos será igual a la distancia comóvil, aquella que no tiene en cuenta la expansión del universo, multiplicada por el factor de escala

$$d(t) = a(t)\chi \quad (6)$$

y la velocidad a la que se alejan dos puntos será por tanto:

$$v(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}d(t) = H(t)d(t) \quad (7)$$

Esta es la conocida como ley de Hubble y el parámetro $H(t)$ se conoce como parámetro de Hubble. La expansión del universo lleva aparejada otras consecuencias a parte de la necesidad de definir distancias y tiempos propios. Las ondas electromagnéticas también se ven afectadas por este crecimiento del espacio, lo que provoca un aumento en su longitud de onda, un corrimiento al rojo, que puede expresarse como:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{a_0}{a_1} - 1 \quad (8)$$

donde el subíndice 1 hace referencia al momento de emisión y el subíndice 0 al momento actual. Es posible relacionar el corrimiento al rojo con el tiempo que la radiación se ha visto sometida a la expansión del universo:

$$dt = \frac{dz}{H(z)(1+z)} \quad (9)$$

de esta forma es relativamente fácil calcular el momento en el que fue emitida una radiación. Si se aplica esto a la radiación del fondo cósmico de microondas, ya que los fotones del mismo también sufren este efecto, podemos situar la emisión del mismo para un tiempo $t \approx 380,000$ años, lo que equivale a un corrimiento al rojo de $z \approx 1100$.

Desde los estudios de Newton es conocido que la materia es responsable de la gravedad. En la teoría de la relatividad general, la gravedad es una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo producida por la presencia de materia y de energía. Esta idea queda plasmada en las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (10)$$

donde $G_{\mu\nu}$ representa el tensor de Einstein que se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (11)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci y R es el escalar de curvatura o escalar de Ricci.

debido a las simetrías del problema, del conjunto de ecuaciones de Einstein hay solo dos ecuaciones no triviales independientes; las restantes se satisfacen idénticamente, la correspondiente a la componente 00 y una de las componentes espaciales ij :

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (12)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (13)$$

Estas son las ecuaciones de Friedmann. En los miembros izquierdos aparece la geometría del problema, dada por la curvatura K y por el factor de escala $a(t)$ y en los derechos aparecen las fuentes, con las funciones de densidad, presión y constante cosmológica. Estas ecuaciones deben verse como relaciones entre dos cantidades geométricas y las cantidades físicas que espacialmente deben ser homogéneas de acuerdo con el principio cosmológico y que pueden depender únicamente del tiempo.

En este trabajo se utilizarán de forma recurrente dos medidas, el horizonte de partículas y el radio de Hubble. El horizonte de partículas es la distancia propia que recorre un fotón desde el origen del universo hasta la actualidad. Otra forma de interpretarlo es que se trata de la distancia máxima a la que se pueden encontrar dos puntos del universo conectados causalmente. Si se encuentran a

una distancia mayor, la luz no ha tenido tiempo de llegar de un punto a otro y por tanto no puede haber ningún intercambio de información.

El radio de Hubble es la distancia a partir de la cual dos puntos del universo se separan a una velocidad mayor que la de la luz debido a la propia expansión del universo.

$$H(t)^{-1} = \frac{1}{H(t)} \quad (14)$$

Esto no implica que objetos más lejanos no sean observables. Si en algún momento del pasado el emisor y el receptor estuvieron dentro del radio aún es posible recibir radiación electromagnética que emitieron en aquel momento.

2. Inflación

En la sección anterior se ha comentado que las anisotropías en la temperatura medidas en el CMB provienen de pequeñas variaciones en la densidad del plasma del universo primigenio. Es posible ahondar aún más en la cuestión y preguntar cómo se producen estas pequeñas fluctuaciones. Para dar una respuesta a esta pregunta y resolver algunas de las deficiencias que sufre el modelo cosmológico estándar, se desarrolla la teoría inflacionaria. No entraremos en detalle en ella, únicamente veremos cómo es posible que esta teoría proporcione las condiciones iniciales para que comiencen las fluctuaciones en el plasma.

La primera vez que aparecieron este tipo de teorías fueron propuestas por Alan Guth [3] y Andréi Linde [4] y desde entonces se han sucedido nuevas versiones conforme los datos recavados se actualizaban. La teoría propone la presencia de un campo escalar llamado inflatón con unas ciertas características. Este campo provocaría una expansión no adiabática y exponencial del espacio-tiempo. Las principales consecuencias de esta rápida expansión es que eliminaría los posibles pliegues que existiesen en el espacio, consiguiendo un espacio-tiempo homogéneo a gran escala, como el observado en el CMB. La otra importante consecuencia surge cuando tenemos en cuenta que este campo tiene una naturaleza cuántica. Los valores iniciales del campo no serán iguales en todo el espacio, si no que sufrirán pequeñas fluctuaciones cuánticas. Una vez que la expansión del universo comience estas fluctuaciones se harán más grandes, cobrando más importancia y adquiriendo un tamaño relevante al final de la inflación. Estas fluctuaciones son el origen de las ligeras variaciones en la densidad del plasma primigenio que posteriormente darán lugar a las anisotropías del CMB.

Anteriormente se ha comentado que una de las características principales del CMB es su homogeneidad. Esto implica que en el momento de emisión de éstas grandes regiones del universo se encontraban en equilibrio térmico, y por tanto debieran estar conectadas causalmente. Esto supone un verdadero desafío para la teoría del Big Bang pues no es capaz de dar una respuesta. Además existen algunas otras deficiencias que pueden ser resueltas combinando ambas teorías.

2.1. Deficiencias Modelo Cosmológico Estándar

2.1.1. Problema de la planitud

Según los datos de los que se dispone actualmente el universo es prácticamente plano. La ecuación de la curvatura puede obtenerse reescribiendo la ec. (12). Si se tienen en cuenta esta ecuación de la curvatura, en el pasado el universo debió ser aún más plano.

$$\Omega - 1 = \frac{K}{H^2 a(t)^2} \propto \frac{1}{a^2} \quad (15)$$

El cálculo detallado no es realmente importante. El resultado principal es que el universo primitivo tendría que ser plano con una precisión altísima. Como en la teoría del Big Bang tanto la curvatura como el factor de escala dependen de la densidad de las diferentes especies, la más mínima variación en las densidades de los distintos tipos de materia y energía en el universo primitivo, del orden de 10^{-64} , provocaría un cambio enorme en la curvatura que se observa hoy en día. Este tipo de problemas se conocen como problemas de ajuste fino, pues aunque los valores necesarios no son imposibles, el ajuste necesario de los mismos parece demasiado preciso como para ser casual.

La solución con la teoría de la inflación es bastante sencilla. Como durante la época inflacionaria el factor de escala $a(t)$ crece de forma exponencial y no depende la densidad, en vez de necesitar un

ajuste fino en la ecuación (15) simplemente hay que dejar evolucionar el factor de escala el tiempo necesario para alcanzar la planitud buscada.

2.1.2. Problema del horizonte

Anteriormente hemos definido el radio de Hubble como la distancia a partir de la cual dos puntos del espacio se separan a una velocidad mayor que la de luz, quedando por tanto desconectados causalmente a partir de ese momento. Para comprobar si todas las regiones del CMB que se encuentran en equilibrio están conectadas causalmente es posible comparar la longitud actual del radio de Hubble en el momento de la última dispersión, momento en el que se forma el CMB, con el radio de Hubble en dicho momento.

No se entrará en los detalles del cálculo que pueden consultarse en [5], pero el resultado indica que:

$$\frac{\lambda_H^3(T_{ls})}{H_{ls}^{-3}} = \left(\frac{T_0}{T_{ls}}\right)^{-3/2} \approx 10^6 \quad (16)$$

El subíndice ls indica que se refiere a la superficie de "last scattering", momento en el que se produce la última dispersión y los fotones finalmente viajan libres. La longitud en el momento de formación del CMB del radio de Hubble actual es millones de veces mayor que el radio de Hubble es ese momento. Este resultado confirmaría que existen millones de regiones del universo visible que no estaban conectadas causalmente en la época de CMB y sin embargo estaban en equilibrio térmico.

La solución también se encuentra en la teoría inflacionaria. Una expansión exponencial del factor de escala mantiene constante el radio de Hubble por lo que si la expansión dura el tiempo suficiente y el radio se mantiene constante el tiempo suficiente, la longitud en el momento de formación del CMB del radio de Hubble actual sería menor que el radio de Hubble en ese momento, quedando resuelto el problema. En la imagen se puede apreciar un sencillo esquema de esta explicación:

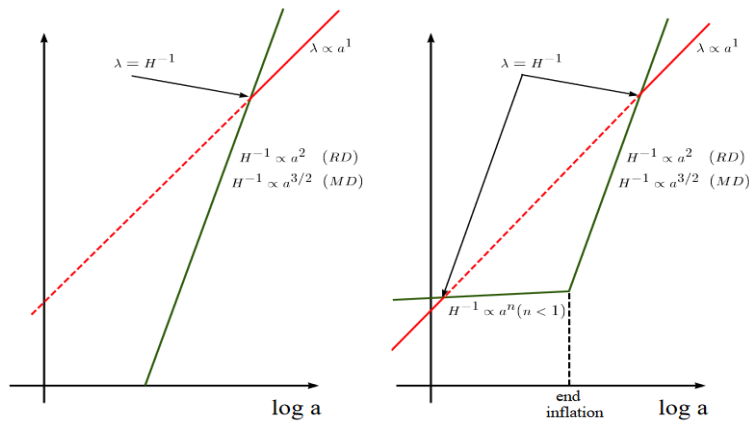


Figura 2: La figura de la izquierda muestra el crecimiento de las diferentes longitudes y del radio de Hubble. Se aprecia que si una longitud comienza siendo mayor que el radio de Hubble ésta solo lo atraviesa una vez. Sin embargo en un escenario inflacionario en el que el radio se mantiene constante es posible que una escala comience siendo menor, se haga mayor que el radio y al finalizar la inflación vuelva a ser menor que él. Créditos: [6].

2.2. Recalentamiento

La teoría de la inflación también dispone de un mecanismo mediante el cual da lugar a las partículas del modelo estándar. Como se ha comentado anteriormente, el periodo inflacionario está determinado por un campo escalar. Este campo tiene asociado un potencial. En el momento final de la inflación se producen oscilaciones entorno al mínimo de potencial durante las cuales se crean partículas muy energéticas. Estas partículas recién creadas interactúan unas con otras, hasta alcanzar el equilibrio térmico, elevando su temperatura y dando nombre a esta etapa: recalentamiento.

De esta manera se crearían las partículas que forman el universo. La mayor parte de la energía del campo se transforma en partículas relativista, es decir radiación. Por tanto, la época que comienza tras el recalentamiento y que termina en la recombinación, con la creación de los primeros átomos y la emisión del CMB, se denomina época de dominación de la radiación.

3. Perturbaciones cosmológicas

En la sección anterior se ha propuesto un mecanismo por el cual es posible explicar el origen de las fluctuaciones en el plasma que posteriormente darían lugar a las anisotropías en la temperatura del CMB. En este apartado se expondrá cómo evolucionan esas fluctuaciones dentro del fluido hasta llegar al momento de la recombinación, la cual se supone inmediata, y cuál es el espectro de potencia de estas fluctuaciones.

En la teoría de Einstein la métrica y el tensor energía-momento aparecen ligados, por tanto, para poder estudiar las perturbaciones que sufre el fluido es necesario trabajar con ambos de forma conjunta. La naturaleza atractiva de la gravedad hará crecer la inhomogeneidades existentes, lo que implica que éstas en un principio son lo suficientemente pequeñas como para poder analizarlas de forma lineal.

$$g_{\mu\nu}(\eta, x) = \bar{g}_{\mu\nu}(\eta) + \delta g_{\mu\nu}(\eta, x) \quad (17)$$

$$T_{\mu\nu}(\eta, x) = \bar{T}_{\mu\nu}(\eta) + \delta T_{\mu\nu}(\eta, x) \quad (18)$$

Las perturbaciones pueden dividirse en tres grupos atendiendo a su naturaleza. Es importante resaltar que al trabajar a orden lineal evolucionan independientemente:

- Las perturbaciones escalares pueden llegar a crear fluctuaciones crecientes que pueden dar lugar a las variaciones en la densidad de energía. Son las únicas que se tratarán de aquí en adelante.
- Las perturbaciones vectoriales decaen en un universo en expansión, por ello pueden ser ignoradas.
- Las perturbaciones tensoriales aunque provocan ondas gravitacionales no producen fluctuaciones en la densidad de energía, por tanto serán también ignoradas.

3.1. Perturbaciones en la métrica

La métrica perturbada toma la siguiente forma:

$$g_{\mu\nu}(\eta, x) = \bar{g}_{\mu\nu}(\eta) + \delta g_{\mu\nu}(\eta, x) \quad (19)$$

siendo $\bar{g}_{\mu\nu}(\eta)$ la métrica del fondo plano y $\delta g_{\mu\nu}(\eta, x)$ la perturbación introducida, cumpliendo en todo momento que $\delta g_{\mu\nu}(\eta, x) \ll \bar{g}_{\mu\nu}(\eta, x)$.

Como se ha comentado anteriormente, únicamente se estudiarán las perturbaciones escalares. La métrica perturbada al primer orden puede ser escrita así:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + 2a(t) B_i dx^i dt + a^2(t) [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \quad (20)$$

donde Φ es un 3-escalar llamado lapso, B_i es un 3-vector de desplazamiento, Ψ es un 3-escalar llamado perturbación de curvatura espacial y E_{ij} es un 3-tensor de cizalladura espacial simétrico y de traza nula.

3.2. Elección del gauge

El estudio de las perturbaciones en cosmología consiste en comparar la perturbación con el espacio-tiempo plano de FRW, visto en la introducción. Al hacer esta comparación pueden surgir formas inhomogéneas producto de la elección de coordenadas y no de una verdadera perturbación física. Para no cometer este error es importante la elección del gauge. Existen dos transformaciones gauge posibles:

$$t \rightarrow t + \alpha \quad (21)$$

$$x^i \rightarrow x^i + \delta^{ij} \beta_{,j} \quad (22)$$

Estas transformaciones provocan los siguientes cambios en los elementos de la métrica:

$$\phi \rightarrow \phi - \dot{\alpha} \quad (23)$$

$$B \rightarrow B + a^{-1} \alpha - a \dot{\beta} \quad (24)$$

$$E \rightarrow E - \beta \quad (25)$$

$$\Psi \rightarrow \Psi + H \alpha \quad (26)$$

La combinación $\dot{E} - B/a$ únicamente depende del gauge temporal. Con ella es posible construir dos cantidades invariantes gauge, conocidas como potenciales de Bardeen, y que resultarán extremadamente útiles:

$$\phi_B \equiv \phi - \frac{d}{dt} \left[a^2 (\dot{E} - B/a) \right] \quad (27)$$

$$\Psi_B \equiv \Psi + a^2 H (\dot{E} - B/a) \quad (28)$$

Los cálculos se completarán en el gauge de Newton o longitudinal, para el cual: $B = E = 0$. El elemento de línea tomará la siguiente fórmula:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ (1 + 2\phi) d\eta^2 - [(1 - 2\Psi) \delta_{ij}] dx^i dx^j \right\} \quad (29)$$

Con la métrica ya definida es posible calcular los símbolos de Christoffel: Γ_{kl}^i , que serán utilizados más adelante.

3.2.1. Perturbaciones de materia

Para obtener las ecuaciones de campo perturbadas relativistas es necesario cuantificar el efecto que tiene la materia sobre éstas.

El tensor energía-momento perturbado es:

$$T_0^0 = \bar{\rho}(\eta) + \delta\rho \quad (30)$$

$$T_0^i = [\bar{\rho}(\eta) + \bar{P}(\eta)] v^i \quad (31)$$

$$T_j^i = -[\bar{P}(\eta) + \delta P] \delta_j^i - \Pi_j^i \quad (32)$$

donde v es la velocidad y Π_j^i es un tensor transversal sin traza que describe la tensión anisotrópica, llamado tensor de tensiones.

Al igual que en el apartado anterior es posible diferenciar una parte escalar, otra vectorial y otra tensorial en las fluctuaciones. Únicamente se tendrán en cuenta la parte escalar. Para fluctuaciones escalares podemos escribir las componentes de la velocidad y de la tensión anisotrópica como:

$$v^i(\eta, k) = i \hat{k}^i v(\eta, k) \quad (33)$$

$$\Pi^{ij}(\eta, k) = -(\bar{\rho} + \bar{P}) \left(\bar{k}^i \bar{k}^j - 1/3 \delta^{ij} \right) \sigma(\eta, k) \quad (34)$$

La conclusión es que las perturbaciones en la materia estarán descritas por la densidad total ($\delta \equiv \delta\rho/\rho$), la variación de la presión (δP), la velocidad v y la anisotropía σ .

3.2.2. Ecuaciones del movimiento

Una vez obtenidos los símbolos de Christoffel a partir de la métrica perturbada y el tensor energía-momento perturbado, las ecuaciones del movimiento pueden ser obtenidas a través de la conservación del tensor energía-momento, $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Las ecuaciones de conservación perturbadas serán por tanto:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T_\nu^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\nu \quad (35)$$

Operando convenientemente se obtienen las ecuaciones de continuidad y de Euler para las diferentes especies (el cálculo detallado puede consultarse en [7]):

$$\dot{\delta}_a = - \left(1 + \frac{\bar{P}_a}{\bar{\rho}_a} \right) \left(\partial_i v_a^i - 3\dot{\phi} \right) - 3H \left(\frac{\delta P_a}{\bar{\rho}_a} - \frac{\bar{P}_a}{\bar{\rho}_a} \delta_a \right) \quad (36)$$

$$\dot{v}_a^i = - \left(H + \frac{\dot{\bar{P}}_a}{\bar{\rho}_a + \bar{P}_a} \right) v_a^i - \frac{1}{\bar{\rho}_a} + \bar{P}_a \left(\partial^i \delta P_a - \partial_j \Pi_a^{ij} \right) - \partial^i \dot{\phi} \quad (37)$$

Donde $\delta_a \equiv \delta\rho_a/\rho_a$. Para la materia y la radiación toman la siguiente forma:

- Materia: Se comporta como un fluido no relativista. Por tanto $P_m = 0$ y $\Pi_m^{ij} = 0$.

$$\dot{\delta}_m = -\nabla v_m + 3\dot{\phi} \quad (38)$$

$$\dot{v}_m = -H v_m - \nabla \Psi \quad (39)$$

- Radiación: Se comporta como un fluido relativista, por tanto $P_r = 1/3$ y $\Pi_r^{ij} = 0$.

$$\dot{\delta}_r = -\frac{4}{3} \nabla v_m + 4\dot{\phi} \quad (40)$$

$$\dot{v}_r = -\frac{1}{4} \nabla \delta_r - \nabla \Psi \quad (41)$$

En la introducción se detalló como las ecuaciones de Einstein ligaban las fuentes de la interacción gravitatoria (materia y radiación) con la forma adoptada por el espacio-tiempo. La materia y la radiación están gravitacionalmente acopladas mediante las fluctuaciones métricas en las ecuaciones de continuidad y de Euler que se acaban de calcular. El siguiente paso es ver bajo estas condiciones que ocurre con la geometría del espacio-tiempo. Las ecuaciones de Einstein adquieren la siguiente forma:

$$G_\nu^\mu = 8\pi G T_\nu^\mu \quad (42)$$

Con el fin de simplificar los cálculos se considera de forma separada la parte temporal, componente 00, y la espacial, el resto de componentes.

- Si se considera únicamente la parte temporal:

$$G_0^0 = a^{-2}(1 - 2\phi)R_{00} - 1/2R \quad (43)$$

Se calcula el primer orden:

$$\delta G_0^0 = 2\nabla^2\phi - 6H(\dot{\phi} + H\Psi) \quad (44)$$

El tensor energía-momento perturbado es:

$$T_0^0 = \bar{\rho} + \delta\rho \quad (45)$$

La componente temporal de la ecuación de Einstein es:

$$G_0^0 + \delta G_0^0 = 8\pi G (T_0^0 + \delta T_0^0) \quad (46)$$

Y tomando el primer orden el resultado es:

$$\nabla^2\phi - 3H(\dot{\phi} + H\Psi) = 4\pi G a^2 \delta\rho \quad (47)$$

Esta ecuación es la generalización relativista de la ecuación de Poisson.

- En cuanto a la parte espacial, es posible obtener que relación existe entre Ψ y ϕ . Para ello la parte relevante del tensor de Einstein es:

$$G_j^i = -a^{-2}(1 + 2\phi) \delta^{ik} R_{kj} - \frac{1}{2}\delta_j^i R \quad (48)$$

Y tras operar de forma similar al apartado temporal, se obtiene:

$$\nabla^2(\phi - \Psi) = -8\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{P})\sigma \quad (49)$$

El término de la derecha está definido por la presión, la densidad y la tensión anisotrópica, pero debido a ciertas simplificaciones esta ecuación se torna más sencilla. La materia oscura y los bariones los podemos describir como fluidos perfectos, por tanto no contribuyen a la tensión anisotrópica σ . Los fotones tan solo comienzan a contribuir en la era de la materia, etapa posterior a nuestro estudio, y la aportación de los neutrinos es despreciable. Ya que ninguna especie es capaz de aportar de forma significativa al término de la derecha, se obtiene el siguiente resultado:

$$\Psi \approx \phi \quad (50)$$

3.2.3. Perturbación curvatura comóvil

En secciones precedentes se ha comentado la importancia del gauge elegido. Dependiendo de cual se utilice ciertos resultados pueden obtenerse de una manera más sencilla e intuitiva. Para evitar confusiones respecto a perturbaciones que pueden ser suplidas con un cambio de coordenadas, y por tanto no son perturbaciones físicas, es útil trabajar con magnitudes invariantes gauge. Estas magnitudes tomarán siempre el mismo valor, independientemente del gauge elegido. En esta sección se definirá la perturbación de curvatura comóvil, \mathcal{R} , un invariante gauge que será de una importancia capital a la hora de obtener el espectro de potencias del fondo cósmico de microondas.

La perturbación de curvatura comóvil se define como:

$$\mathcal{R} = \phi + H \frac{\delta q}{\bar{\rho} + \bar{P}} \quad (51)$$

donde $T_j^0 \equiv -\partial_j \delta q$. Esta variable cumple $\mathcal{R} = \phi|_{\delta\Psi=0}$, puede ser interpretada como el potencial gravitatorio en hipersuperficies comóviles, es decir, en hipersuperficies de tiempo conforme constante.

Esta magnitud es la que va a contener toda la información necesaria acerca de las perturbaciones, permitiendo relacionarla directamente con el espectro medido.

3.2.4. Espectro de potencia de la curvatura comóvil

La linealización de las perturbaciones, debido a su pequeño tamaño, tiene como consecuencia que éstas sean gaussianas, esto implica que con la función de correlación de dos puntos es posible definir todas las funciones de correlaciones de pares de orden superior. Las funciones de correlación impares se suprimen.

La perturbación de la curvatura \mathcal{R} aumenta su tamaño a medida que transcurre el tiempo y es constante una vez atraviesa el horizonte de Hubble, por tanto la información más importante se encuentra en este punto. Es posible definir el espectro de potencia de la perturbación de curvatura como:

$$\langle \mathcal{R}_k \mathcal{R}_{k'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(k + k') P_{\mathcal{R}}(k) \quad (52)$$

Donde $P_{\mathcal{R}}(k)$ es la transformada de Fourier de la función de correlación de dos puntos:

$$\psi_{\mathcal{R}}(r) \equiv \langle \mathcal{R}(x) \mathcal{R}(x+r) \rangle \quad (53)$$

El espectro adimensional escalar será:

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k) = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \quad (54)$$

El índice espectral caracteriza la dependencia en la escala del espectro de potencia:

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \ln k} \quad (55)$$

Según los datos, el espectro es muy cercano a ser independiente de la escala. Un espectro independiente de la escala corresponde a $n_s = 1$. Si n_s depende de la escala k , el running del índice espectral se define como:

$$\alpha_s \equiv \frac{d n_s}{d \ln k} \quad (56)$$

Estos últimos parámetros son importantes debido a que han sido medidos por el experimento WMAP de la NASA.

4. Anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas

A partir de los años noventa el estudio de las anisotropías del CMB ha dado un gran salto debido al aumento tanto en cantidad como en calidad de los datos recogidos. Para ello, han sido fundamentales las diferentes misiones espaciales llevadas a cabo por la NASA y la ESA. La primera de ellas fue el satélite de la NASA COBE (COsmic Background Explorer), lanzado en 1989. Su sucesor fue el WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) también perteneciente a la NASA y lanzado en 2001; y finalmente el satélite más moderno encargado del estudio del CMB es el Planck, diseñado por la ESA (European Space Agency) y lanzado en 2009.

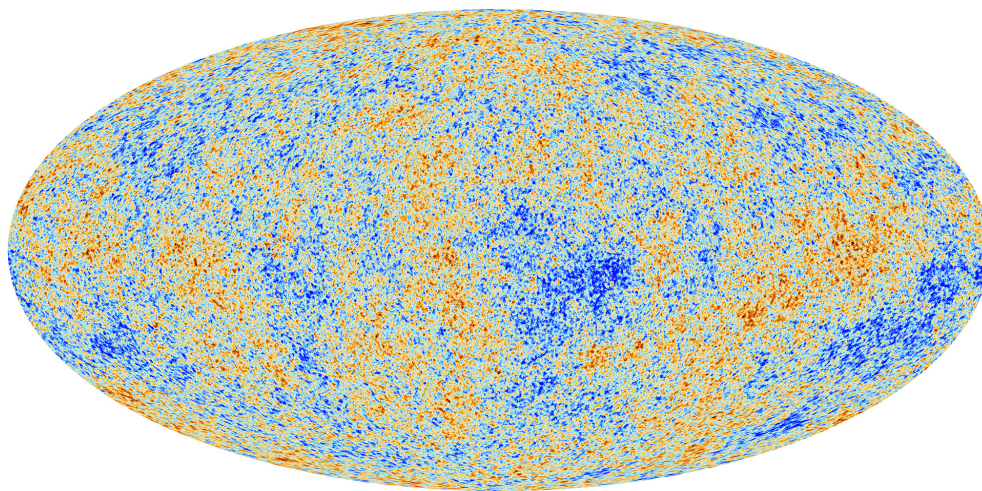


Figura 3: Anisotropías del fondo cósmico de microondas observadas por el satélite Planck. Crédito: ESA

Esta sección estará centrada en el estudio de las anisotropías del fondo cósmico de microondas. Ya a finales de los años sesenta se observa que la radiación no es totalmente homogénea, muestra una dirección privilegiada. Existen fotones ligeramente más energéticos en una dirección que en su opuesta. Esta primera anisotropía descubierta se debe a la velocidad de la Vía Láctea respecto al fondo de microondas. Los fotones que recibimos por delante son ligeramente más energéticos que los que recibimos por detrás. Pero no fue hasta el lanzamiento de COBE que fue posible la medición de las anisotropías provocadas por fluctuaciones en el plasma. En la figura 3 podemos ver el mapa de anisotropías que ha creado el satélite Planck. Es un mapa de temperaturas, pues cada punto indica la temperatura de los fotones recibidos desde ese lugar en el cielo. Los rojos son puntos más calientes que el promedio y los azules más fríos. Es importante no perder de vista que estas temperaturas apenas se alejan diez partes por millón del valor promedio. Debemos pensar que estos fotones fueron emitidos desde la superficie de una esfera, llamada superficie de última dispersión, en la cual nos encontramos en el centro. La imagen por tanto será la representación en dos dimensiones de esa esfera. En la época en la que fue emitido el CMB el universo estaba relleno de un energético plasma, en el que las zonas más calientes también eran las más densas. Por tanto, el mapa de temperatura medido puede interpretarse como un mapa de densidades, donde las zonas más densas corresponden a los puntos rojos y viceversa. Por lo tanto, el mapa de anisotropías del CMB es un mapa de como se distribuía la materia y energía en el universo primitivo.

En los apartados anteriores se ha comentado como se formaban las fluctuaciones en el plasma y

como evolucionaban hasta el momento de la recombinación. El plasma al tratarse de un fluido puede modelizarse con la ecuación de Boltzmann. A lo largo de la sección se desarrollan las diferentes interacciones que sufren los fotones y como afectan éstas a su ecuación de Boltzmann y por tanto al espectro de potencia medido.

Una de las principales características de las perturbaciones que se han mencionado es que durante la inflación, una vez abandonan el horizonte, permanecen congeladas. Con el crecimiento del radio comóvil de Hubble durante la época de la radiación éstas vuelven a entrar en el horizonte actuando como condiciones iniciales para las perturbaciones del fluido fotobariónico característico de esta etapa del universo. Por tanto, cuanto mas pequeña sea la escala de la perturbación, ésta permanecerá más tiempo dentro del horizonte, por lo que tardará más tiempo en congelarse y sufrirá una mayor evolución.

Durante la época de la radiación las perturbaciones en la densidad del fluido evolucionan de una determinada manera. Debido al efecto gravitatorio las zonas con una mayor densidad atraen al resto del fluido. Sin embargo, cuanto mayor sea la densidad también será mayor la presión que ejerce la radiación en un sentido opuesto. Estas dos fuerzas provocarán oscilaciones en el plasma, que al tratarse de un fluido podrán ser tratadas como oscilaciones acústicas. Éstas oscilaciones reciben el nombre de oscilaciones acústicas de bariones, BAO.

Veamos dos formas de clasificar las anisotropías del CMB, una en función de su origen y otra en función del tamaño.

Las anisotropías del CMB pueden clasificarse como primarias, si su origen se encuentra antes de la recombinación o secundarias, si son debidas a procesos posteriores.

- Anisotropías primarias

Están producidas por variaciones en la densidad del plasma, son adiabáticas, por lo que la relación entre las diferentes densidades se mantiene constante:

$$\delta_\gamma = \frac{4}{3}\delta_b = \frac{4}{3}\delta_x \quad (57)$$

Las fluctuaciones en la densidad de los fotones no son la única fuente de anisotropías primarias. También se encuentran en este grupo las fluctuaciones provocadas por las variaciones del potencial gravitatorio, llamado efecto Sachs-Wolfe. El efecto consiste en un corrimiento al rojo por parte de los fotones. Se debe a la pérdida de energía provocada por la salida de un pozo de potencial, como puede ser la superficie de última dispersión. Además también está presente el efecto Doppler debido a la diferencia de velocidades entre el emisor y el receptor de los fotones. La suma de estas contribuciones es:

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) \sim \frac{1}{4}\delta_{\gamma d} + \frac{1}{3}\phi_d - \hat{n}\hat{v}_d \quad (58)$$

El primer término hace referencia a las fluctuaciones de la densidad, el segundo al efecto Sachs-Wolfe y el tercero al efecto Doppler. Las diferentes contribuciones al espectro se detallarán más adelante.

- Anisotropías secundarias

Provocadas por la evolución del universo después de la recombinación. Son provocadas por variaciones gravitacionales. El efecto principal se produce por variaciones en el potencial gravitatorio a lo largo del camino del fotón. Recibe el nombre de efecto Sachs-Wolfe Integrado (ISW). La explicación de este proceso es la misma que el efecto Sachs-Wolfe simple, la diferencia radica en que en este caso es necesario calcularlo a lo largo de todo el camino recorrido por el fotón y las variaciones del potencial se producen después de la recombinación. Se puede cuantificar así:

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) = \int \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \quad (59)$$

El universo actual se encuentra ionizado, pero en el momento de la recombinación no lo estaba, por lo que en algún momento ha debido producirse una reionización. La aparición nuevamente de electrones libres provoca cambios de dirección en los fotones, debido a la dispersión Thomson, provocando un escenario parecido al anterior a la recombinación. Esta nueva dispersión de los fotones homogeneiza de nuevo de espectro de potencia.

Para estudiar de la manera más clara y concisa posible el espectro del CMB resulta más útil centrarse en la escala que en el origen de las contribuciones al espectro. Al comienzo del trabajo, al introducir el espectro de curvatura comóvil, se observó que una de las consecuencias de la linealización de las perturbaciones debido a su pequeño tamaño era que éstas resultaban ser gaussianas. Es decir, con la función de correlación a dos puntos es posible definir todas las funciones de correlación de orden superior. Por tanto, el observable fundamental será la función de correlación a dos puntos en el cielo. Este observable mide la diferencia de intensidad recibida entre dos puntos de la cúpula celeste, o también puede ser entendido como la diferencia de temperatura entre estos dos puntos. Se distribuye sobre la superficie de una esfera por lo que se realiza una expansión en armónicos esféricos:

$$\Theta(\theta, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (60)$$

donde θ y ϕ son el ángulo polar y acimutal. En el sumatorio de la ecuación no se han incluido el $l = 0$ que corresponde a la temperatura promediada en todo el cielo y $l = 1$ ya que esta componente no es posible separarla del movimiento relativo del sistema solar respecto del CMB. Si es posible aplicar la 'aproximación de cielo plano', este análisis es el equivalente a un análisis de Fourier en dos dimensiones, por lo que el multipolo l se transforma en el número de onda. De esta forma la relación entre el multipolo l y la escala angular θ es $\theta = 2\pi/l$, por lo que valores bajos de l corresponden a escalas angulares grandes y viceversa. Es importante no perder de vista que el espectro de potencia que se calculará más adelante no es más que la función de correlación a dos puntos en el espacio de Fourier. Atendiendo a la imagen 4 se dividirá el espectro en tres regiones en función de l para facilitar su estudio.

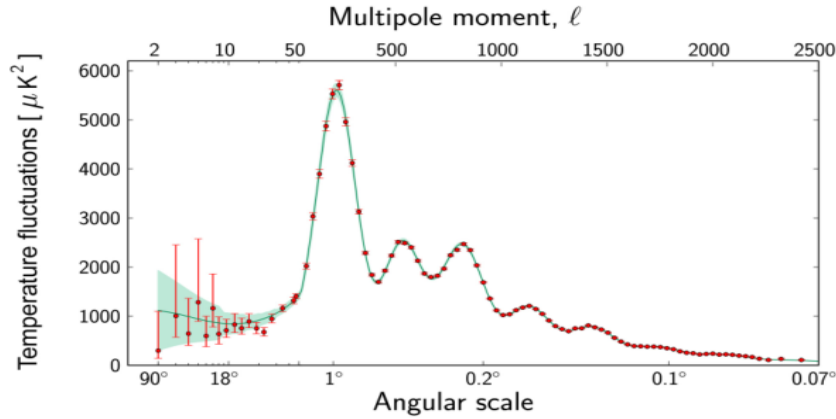


Figura 4: Fluctuaciones de temperatura en función del momento multipolar o de la escala angular obtenido por Planck en 2013. Fuente: ESA and the Planck Collaboration

- Las escalas angulares grandes (l bajo) corresponden a tamaños físicos en la última superficie de dispersión mayores que el horizonte en la época de la recombinación. Dado que ningún proceso físico podría afectar a estas regiones en su conjunto debido a la causalidad, no se espera ninguna estructura particular en esta región del espectro de potencia. Este se refleja en el espectro de potencia angular como una meseta.
- Las regiones intermedias ($20 \leq l \leq 1000$) corresponden a regiones con un tamaño físico inferior al horizonte. La materia y la radiación dentro de estas regiones podrían estar afectadas por procesos causales. Antes de la recombinación, las oscilaciones acústicas en el fluido fotobariónico dan lugar a picos acústicos, debidos al efecto Doppler. La posición de estos picos está determinada principalmente por la geometría del universo, estando el primero entorno a $l = 200$, correspondiente al tamaño del horizonte en la época de desacoplamiento.
- A escalas pequeñas (de un minuto de arco o menos, correspondientes a las l mayores), las fluctuaciones de temperatura se amortiguadas debido a que el desacoplamiento no es instantáneo, es decir, la última superficie de dispersión tiene un espesor finito. Así, las fluctuaciones con escalas menores que el espesor de la última superficie de dispersión se reducirán promediando sobre fotones procedentes de diferentes partes de la superficie. Otro mecanismo responsable de la caída de las fluctuaciones es el llamado *Silk damping* o amortiguación de Silk en la que los fotones se difunden fuera de las regiones sobredensas densas, arrastrando con ellos a los bariones y, en consecuencia, suavizando las fluctuaciones de densidad tanto de los fotones como de los bariones.

4.1. Ecuación de Boltzmann

A partir de aquí se desgranará todo lo comentado en la introducción de la sección. Para ello, se comenzará obteniendo la ecuación que modelizará el viaje de los fotones, incluyendo en ella las distintas interacciones comentadas anteriormente. Cuando se obtenga esta ecuación se aplicará a los diferentes regímenes de escalas angulares para tener un estudio completo del espectro.

Las perturbaciones desarrolladas en el apartado anterior están ligadas gravitacionalmente al plasma primordial. Las diferentes especies están acopladas entre sí mediante diferentes mecanismos. Por

ejemplo, los electrones y los bariones están acoplados por la dispersión de Coulomb mientras que los electrones y los fotones están acoplados por la dispersión Thomson. La variación en las intensidades de estas interacciones va determinar la evolución del plasma como fluido. Tras la recombinación la densidad de electrones cae, haciendo que la dispersión Thomson por si sola sea incapaz de mantener acoplados a los fotones y electrones. Por el contrario la dispersión de Coulomb sigue siendo lo suficientemente fuerte como para poder seguir tratando a los bariones y electrones como un único fluido. Para modelizar el comportamiento de los fotones en el plasma se utilizará la ecuación de Boltzmann.

Los fotones interactúan de forma intensa con los electrones, por tanto la ecuación que describe el camino seguido es posible escribirla de la siguiente forma:

$$\frac{df}{d\eta} = C[\{f, f_e\}] \quad (61)$$

El término de la izquierda da cuenta del desarrollo de la función de distribución en un espacio-tiempo inhomogéneo mientras que el de la derecha lo hace de las diferentes interacciones sufridas por los fotones en ese camino. Para poder plantear la ecuación completa, se comenzará desarrollando el término de la izquierda, el camino libre. Después se hará lo propio con el de la derecha añadiendo las interacciones más relevantes.

4.1.1. Ecuación de Boltzmann sin colisiones

Ahora se desarrollará la función de distribución de los fotones ignorando las posibles colisiones a las que están sometidos. En un espacio-tiempo no homogéneo la función de distribución de los fotones depende del tiempo conformal η , x , la energía E y la dirección de propagación \hat{p} . Desarrollando la ecuación para las distintas dependencias e introduciendo una magnitud que en ausencia de perturbaciones es constante a lo largo del camino del fotón, la energía comóvil $\varepsilon = Ea$, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{d}{d\eta} f(\eta, x, \varepsilon, \hat{p}) = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\eta} + \frac{\partial f}{\partial \ln \varepsilon} \frac{d \ln \varepsilon}{d\eta} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}} \frac{d \hat{p}}{d\eta} = 0 \quad (62)$$

Como al trabajar con perturbaciones lineales, es posible eliminar los términos de orden superior, como el último; obteniendo:

$$\frac{d}{d\eta} f(\eta, x, \varepsilon, \hat{p}) = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \hat{p} \nabla f + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \ln \varepsilon} \frac{d \ln \varepsilon}{d\eta} = 0 \quad (63)$$

Se ha introducido \bar{f} que corresponde al orden cero de la distribución, es decir, a la distribución de Bose-Einstein. Ésta, solo depende de la energía comóvil:

$$\bar{f}(\varepsilon) \propto \left[\exp\left(\frac{E}{\bar{T}(\eta)}\right) - 1 \right]^{-1} = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon}{T_0}\right) - 1 \right]^{-1} \quad (64)$$

donde T_0 es la temperatura actual del CMB. Para el estudio de los efectos de las perturbaciones a primer orden se introduce una perturbación de la temperatura fraccional dependiente de la dirección y la posición $\delta T/T \equiv \Theta(\eta, x, \hat{p})$. Asumiendo que la perturbación es pequeña, como indican los datos del CMB, se obtiene la siguiente función:

$$f(\eta, x, \varepsilon, \hat{p}) = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon}{a\bar{T}(\eta) [1 + \Theta(\eta, x, \hat{p})]}\right) - 1 \right]^{-1} = \bar{f}(\varepsilon) \left[1 - \Theta(\eta, x, \hat{p}) \frac{d \ln \bar{f}}{d \ln \varepsilon} \right]^{-1} \quad (65)$$

Ahora ya se han calculado todos los elementos de la ecuación (63). Se sustituyen en la ecuación de $f(\eta, x, \varepsilon, \hat{p})$ y de $\bar{f}(\varepsilon)$ y tras operar es posible relacionar las perturbaciones en la temperatura únicamente con la evolución de la energía comóvil:

$$\frac{d}{d\eta} f(\eta, x, \varepsilon, \hat{p}) = -\frac{d \ln \bar{f}(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} \left(\frac{d\Theta}{d\eta} - \frac{d \ln \varepsilon}{d\eta} \right) = 0 \quad (66)$$

En la ecuación (61) este valor será el término de la izquierda. Aunque esté igualado a cero no es recomendable simplificar el factor común ya que posteriormente ese lugar lo ocupará el término correspondiente a las colisiones.

Llegado este punto es interesante calcular un último término que se utilizará más adelante. Si se calcula la trayectoria que sigue el fotón, es decir la geodésica en el espacio-tiempo perturbado se obtiene:

$$\frac{d \ln \varepsilon}{d\eta} = -\frac{d\Psi}{d\eta} + (\dot{\Psi} + \dot{\phi}) \quad (67)$$

donde $d\Psi/d\eta = \dot{\Psi} + \hat{p}^i \partial_i \Psi$ y $\dot{\Psi} = \partial\Psi/\partial\eta$. La ecuación muestra cómo evoluciona la energía comóvil ε a lo largo de la trayectoria del fotón en presencia de perturbaciones métricas. Como era de esperar, ε es constante en el fondo homogéneo, pero se modifica por la variación de Ψ a lo largo de la trayectoria, primer término a la derecha, y por la evolución de los potenciales, segundo término a la derecha. Para el estudio del CMB, este último término es importante en épocas tardías, las más cercanas a la actualidad, una vez que la energía oscura empieza a ser relevante y en épocas tempranas, justo después de la recombinación cuando el universo no está totalmente dominado por la materia y la radiación conserva aún cierta importancia.

4.1.2. Dispersión Thomson

Para parametrizar las colisiones que sufren los fotones, y que constituirán el término derecho de la ecuación (61) se utilizará la dispersión Thomson. Describe la dispersión elástica de la radiación electromagnética, los fotones del CMB, debido a una partícula cargada. En ella se conserva la energía cinética de la partícula y el momento del fotón. Es especialmente relevante antes de la recombinación, debido a la cantidad de electrones libres existentes. El siguiente desarrollo teórico también puede ser utilizado si se quiere cuantificar el efecto de la reionización. Para introducir esta dispersión en la ecuación de Boltzmann se desarrollará primero en el marco de referencia en el que el electrón está en reposo para posteriormente obtener el resultado en el marco de referencia del fondo.

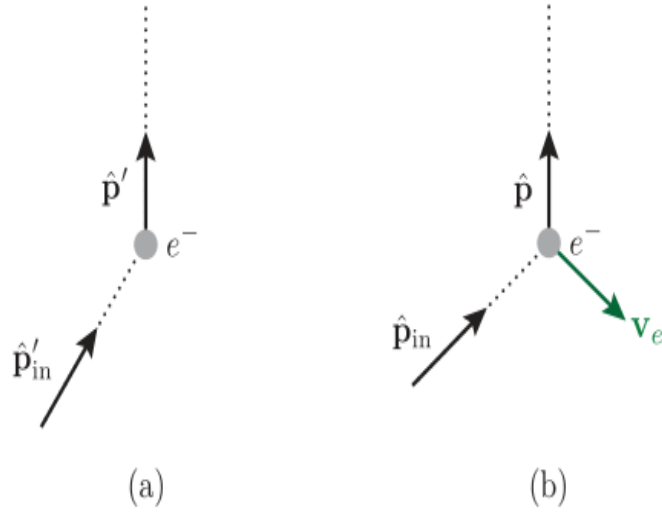


Figura 5: Dispersión Thomson en el marco de referencia del electrón en reposo (a) y en el marco de referencia del fondo (b)

- Marco de referencia del electrón en reposo:

En este marco el fotón incidente tiene una energía ε'_{in} y un 3-momento $\hat{p}'_{in} = \varepsilon'_{in}\hat{p}'_{in}$. El fotón rebotado tiene energía $\varepsilon' = \varepsilon'_{in}$ y un 3-momento $\hat{p}' = \varepsilon'\hat{p}'$. Un hecho fundamental es que la dispersión Thomson no cambia la energía del fotón. El diferencial de la sección eficaz de la dispersión puede ser calculado de la siguiente manera:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_T}{4\pi} \quad (68)$$

Esta fórmula describe el coeficiente de dispersión de fotones por parte del electrón por unidad de ángulo sólido y de flujo incidente. La sección eficaz de Thomson, σ_T , es inversamente proporcional a la masa de la partícula que produce la dispersión, por tanto, para núcleos grandes es posible ignorarla. Esto implica que es posible ignorar las colisiones con partículas como los bariones, ya que sus masas son varios ordenes de magnitud mayores que la del electrón. El coeficiente de dispersión con respecto al tiempo conforme será:

$$C' [f'(\varepsilon', \hat{p}')] \equiv \frac{df'(\varepsilon', \hat{p}')}{d\tau'} \Big|_{scatt} = n_e \int d\hat{p}'_{in} \frac{d\sigma}{d\Omega} \left[f'(\varepsilon', \hat{p}'_{int}) - f'(\varepsilon', \hat{p}') \right] \quad (69)$$

En la integral, el primer término hace referencia a la llegada del fotón y el segundo a la salida. Es posible extraer el término de salida de la integral, obteniendo:

$$C' [f'(\varepsilon', \hat{p}')] = -n_e \sigma_T f'(\varepsilon', \hat{p}') + n_e \sigma_T \int \frac{d\hat{p}'_{in}}{4\pi} f'(\varepsilon', \hat{p}'_{in}) \quad (70)$$

- Marco de referencia del fondo:

El término que se debe introducir en la ecuación de Boltzmann debe estar referido a un marco general. Para obtener el resultado es necesario aplicar una transformación de Lorentz. A orden

cero el tiempo propio en el nuevo marco es el mismo que en el marco en reposo. Únicamente es necesario calcular la aproximación al primer orden en el coeficiente de dispersión.

$$C[f(\varepsilon, \hat{p})] \equiv \left. \frac{df(\varepsilon, \hat{p})}{d\eta} \right|_{scatt} = a \left. \frac{df'(\varepsilon', \hat{p}')}{d\tau} \right|_{scatt} + \mathcal{O}(2) = a C'[f'(\varepsilon', \hat{p}')] + \mathcal{O}(2) \quad (71)$$

Se ha aplicado la invarianza Lorentz de la función de distribución $f'(\varepsilon', \hat{p}') = f(\varepsilon, \hat{p})$. Sustituimos el valor obtenido en el marco en reposo y se obtiene el coeficiente para el marco de referencia del fondo:

$$C[f(\varepsilon, \hat{p})] = -\Gamma f'(\varepsilon', \hat{p}') + \Gamma \int \frac{d\hat{p}_{in}}{4\pi} f'(\varepsilon', \hat{p}'_{in}) \quad (72)$$

siendo $\Gamma \equiv a\bar{n}_e\sigma_T$. Solamente queda calcular el integrando para poder realizar la integral.

Para calcularlo es necesario comenzar por la transformación de Lorentz de la energía comóvil:

$$\varepsilon_{in} = \varepsilon(1 - (\hat{p} - \hat{p}'_{in})v_e) \quad (73)$$

Para calcular la función de distribución en el marco del fondo, se sustituye la energía recién calculada y la ecuación (65):

$$f'(\varepsilon', \hat{p}'_{in}) = f(\varepsilon_{in}, \hat{p}_{in}) = \bar{f}(\varepsilon) - \frac{d\bar{f}}{d\ln\varepsilon}(\hat{p} - \hat{p}'_{in})v_e - \frac{d\bar{f}}{d\ln\varepsilon}\Theta(\hat{p}_{in}) \quad (74)$$

Para obtener el coeficiente simplemente es necesario sustituir esta nueva función de distribución en (72) y realizar la integral. Como se ha comentado anteriormente, es necesario desarrollar las perturbaciones mediante polinomios de Legendre. En esta sección utilizaremos solo el término monopolar, y en la siguiente se dará una definición para el resto de términos. El coeficiente de dispersión con respecto al tiempo conforme en el nuevo marco es:

$$C[f(\varepsilon, \hat{p})] = \frac{d\bar{f}}{d\ln\varepsilon} \times \Gamma [\Theta(\hat{p}) - \Theta_0 - \hat{p}v_e] \quad (75)$$

Donde se ha utilizado el monopolo de la temperatura anisotrópica:

$$\Theta_0 \equiv \int \frac{d\hat{p}_{in}}{4\pi} \Theta(\hat{p}_{in}) \quad (76)$$

4.1.3. Ecuación de Boltzmann para fotones

Una vez que hemos calculado las ambas partes de (61) ya es posible calcular la ecuación que va a determinar el comportamiento de los fotones. Sustituimos en la parte de la izquierda la ecuación (65) y en la de la derecha (75).

$$\frac{d\Theta}{d\eta} = \frac{d\ln\varepsilon}{d\eta} - \Gamma (\Theta - \Theta_0 - \hat{p}v_e) \quad (77)$$

Al igual que en el resto del trabajo, el análisis se restringe a las fluctuaciones escales. Sustituyendo la ecuación (67) en la anterior se obtiene:

$$\dot{\Theta} + \hat{p}^i \partial_i \Theta = \dot{\phi} - \hat{p}^i \partial_i \Psi - \Gamma (\Theta - \Theta_0 - \hat{p}v_e) \quad (78)$$

Como se explicó en la introducción de esta sección es necesario trabajar en el espacio de Fourier, por ello transformamos la ecuación anterior:

$$\dot{\Theta} + ik\mu\Theta = \dot{\phi} - ik\mu\Psi - \Gamma(\Theta - \Theta_0 - i\mu v_e] \quad (79)$$

La ecuación depende de $\mu \equiv \hat{k}\hat{p}$, que expresa el solapamiento entre el vector de onda de la inhomogeneidad y la dirección de propagación del fotón. Se expanden las perturbaciones en términos de los polinomios de Legendre:

$$\Theta(\eta, k, \mu) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l \Theta_l(\eta, k) P_l(\mu) \quad (80)$$

donde Θ_l es el momento multipolar. Es importante reconocer que este desarrollo multipolar es distinto al de la ecuación 60, ya que el primero se utiliza para mapear todo el cielo y el segundo es una descomposición de la variación de la temperatura. Este término es inversamente proporcional a l . En el límite del acoplamiento estrecho, mientras los fotones y electrones sigan íntimamente ligados, todos los momentos $l \geq 2$ son suprimidos, por lo que se tiene la siguiente ecuación:

$$\dot{\Theta}_l + k \left(\frac{l+1}{2l+3} \Theta_{l+1} - \frac{l}{2l-2} \Theta_{l-1} \right) = -\Gamma \Theta_l \quad (81)$$

Veamos de forma breve por qué los multipolos mayores son suprimidos. Imaginemos una perturbación de onda plana y un observador. Éste recibirá fotones procedentes de una distancia aproximada al camino libre medio, la cual será extremadamente pequeña debido a los múltiples rebotes de los fotones en los electrones. Si la longitud de onda recibida es mucho mayor que esta distancia apenas se producirán variaciones en la temperatura, dicho de otra forma, medirá un monopolo y un pequeño dipolo. Para longitudes de onda más pequeñas cabría pensar que si podrá medir numerosos multipolos, pero es importante recordar que estas escalas están fuertemente amortiguadas por la dispersión Thomson, ya que su longitud de onda es mucho más pequeña que la escala de difusión. Por lo que en principio podemos prescindir de los multipolos mayores de $l = 2$ sin perder demasiada precisión. De aquí en adelante se utilizarán de forma indistinta las dos l procedentes de los dos desarrollos multipolares. El primer desarrollo toma valores de l desde 2 hasta 2500 aproximadamente, y el segundo únicamente tomará los valores 0, 1 y 2.

Como los términos $l \geq 2$ se suprimen, estos son los términos que sobreviven:

$$\dot{\Theta}_0 = -k\Theta_1 - \dot{\phi} \quad (82)$$

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{k}{3}(\Psi + \Theta_0) + \Gamma \left[\Theta_1 - \frac{i v_b}{3} \right] \quad (83)$$

Calculando el valor de la velocidad y sustituyendo, la segunda ecuación se transforma en:

$$\dot{\Theta}_1 + \frac{\dot{a}}{a} \frac{R}{1+R} \Theta_1 - \frac{1}{3} \frac{R}{1+R} \Theta_0 = k \frac{\Psi}{3} \quad (84)$$

siendo $R = (3\rho_b)/(4\rho_\gamma)$ la relación de energías entre bariones y fotones. Las dos ecuaciones diferenciales de primer grado (82) y (85) están ligadas, por lo que es posible reescribirlas como una sola ecuación de segundo grado:

$$\ddot{\Theta}_0 + \frac{\dot{a}}{a} \frac{R}{1+R} \dot{\Theta}_0 + k^2 c_s^2 \Theta_0 = -\frac{k^2}{3} \Psi - \frac{\dot{a}}{a} \frac{R}{1+R} \dot{\phi} - \ddot{\phi} \quad (85)$$

donde c_s es la velocidad del sonido en el fluido. Finalmente se ha obtenido la ecuación que va a modelizar el comportamiento de la radiación del espectro. En las siguientes secciones, se analizará esta ecuación en los diferentes rangos de l antes mencionados, extrayendo las conclusiones más importantes.

4.2. Anisotropías a gran escala

En la introducción separamos el espectro en tres escalas principales. Comencemos a resolver la ecuación para las diferentes regiones:

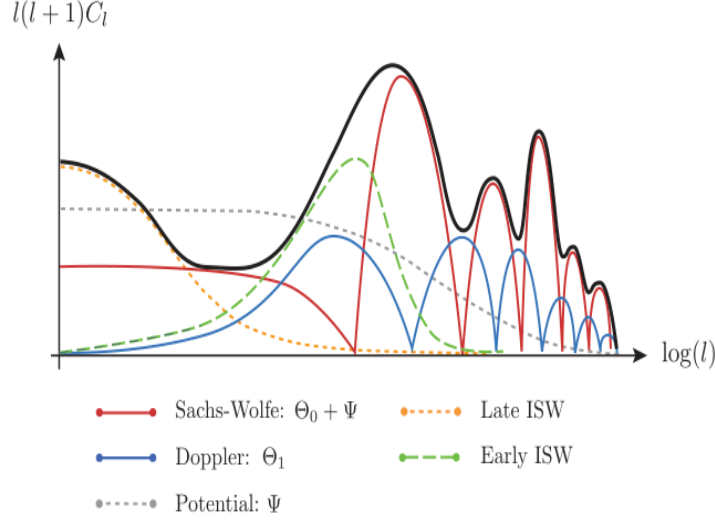


Figura 6: Esquema de las diferentes contribuciones al CMB [8]

Esta sección hace referencia a la parte del espectro con l más bajos. Estas son las perturbaciones de mayor tamaño, eran mayores que el horizonte en la época de formación del CMB, por lo que ningún proceso físico ha podido afectarles en su conjunto. Hablar de escalas mucho mayores que el horizonte implica $k\eta \ll 1$ y por tanto es posible ignorar todos los términos de las ecuaciones que estén multiplicados por k . Recordando la ecuación (82) el término monopolar será:

$$\Theta_0 = -\phi + Cte \quad (86)$$

Aplicando las condiciones iniciales, la constante buscada es \mathcal{R} , la perturbación de curvatura comóvil. Las condiciones iniciales son:

$$\Theta(\eta = 0) = \phi(\eta = 0) \quad (87)$$

En la época de la radiación, que es el momento que se tomará como origen, $\phi = 2/3\mathcal{R}$. En esa época posterior, en la que evolucionan las perturbaciones el potencial tenía el valor $\phi = (3/5)\mathcal{R}$. Por tanto, el término monopolar será:

$$\Theta_0 = \frac{2}{5}\mathcal{R}(k) = \frac{2}{3}\phi(k, \eta_*) \quad (88)$$

Como se señaló anteriormente observar puntos calientes a gran escala en el CMB, corresponden a regiones que eran ligeramente más densas en la recombinación.

La ecuación (88) señala que la variación de temperatura y la variación de la densidad son ambas del mismo orden, por tanto, las variaciones medidas en la temperatura del orden de 10^{-5} K corresponden a una perturbación de la densidad del mismo orden.

El espectro de potencia producido en esta escala sufre pocas variaciones, formando una meseta. En la sección sobre el espectro de potencia se comentarán mas detalles.

4.3. Oscilaciones acústicas

En la parte media del espectro se encuentran las llamadas oscilaciones acústicas. Corresponden a valores de l comprendidos entre 30 y 1000, aproximadamente. Estas escalas se encontraban dentro del horizonte en el momento de la recombinación y por tanto, al contrario que las anteriores han tenido tiempo para evolucionar. Para su estudio es necesario utilizar la ecuación de Boltzmann desarrollada anteriormente y ver con ella cómo evoluciona.

La ecuación obtenida en la sección anterior y que da cuenta de la evolución de los fotones en el fluido es:

$$\ddot{\Theta}_0 + H \frac{R}{1+R} \dot{\Theta}_0 + c_s^2 k^2 \Theta_0 = -\frac{1}{3} k^2 \Psi - H \frac{R}{1+R} \dot{\phi} - \ddot{\phi} \quad (89)$$

La ecuación es un oscilador armónico forzado. La velocidad del sonido juega el papel de la constante elástica, el término proporcional al parámetro de Hubble y relación entre bariones y fotones hace de coeficiente de amortiguamiento y los términos de la derecha, relacionados con los potenciales gravitatorios, son la fuerza externa que recibe el oscilador. Este último término determina la simetría de los picos. Al contraerse el fluido, la autogravedad del mismo actúa en consonancia con los potenciales gravitacionales, aumentando el efecto de la contracción. A la inversa, cuando el término de la presión es dominante y empuja el plasma, el efecto de los potenciales conduce a una menor amplitud.

Como se trata de una ecuación diferencial ordinaria de segundo grado, para resolverla primero se hallará la solución homogénea y luego la particular. La solución homogénea es la solución de un oscilador armónico amortiguado. Como el término de arrastre es mucho menor que el término dependiente de la velocidad del sonido podemos ignorarlo. Las soluciones serán del tipo:

$$S_1(k, \eta) = \sin[k r_s(\eta)] \quad (90)$$

$$S_2(k, \eta) = \cos[k r_s(\eta)] \quad (91)$$

donde r_s es el horizonte sonoro, la distancia comovil recorrida por una onda sonora de velocidad c_s . Las soluciones para los términos monopolar y dipolar serán entonces:

$$\Theta_0(k, \eta) + \phi(k, \eta) = [\Theta_0(k, 0) + \phi(k, 0)] \cos(kr_s) + \frac{k}{\sqrt{3}} \int_0^\eta d\tilde{\eta} [\phi(k, \tilde{\eta}) - \Psi(k, \tilde{\eta})] \sin[k(r_s(\eta) - r_s(\tilde{\eta}))] \quad (92)$$

$$\Theta_1(k, \eta) = \frac{1}{\sqrt{3}} [\Theta_0(k, 0) + \phi(k, 0)] \sin(kr_s) - \frac{k}{3} \int_0^\eta d\tilde{\eta} [\phi(k, \tilde{\eta}) - \Psi(k, \tilde{\eta})] \cos[k(r_s(\eta) - r_s(\tilde{\eta}))] \quad (93)$$

El término monopolar y el término dipolar se encuentran en oposición de fase, mientras que uno depende del seno el otro lo hace del coseno. La parte de las integrales de ambas soluciones añaden un ligero término correctivo, llevando el mayor peso de la solución los términos dependientes de las funciones trigonométricas mencionadas.

4.4. Amortiguamiento

Como se observa en la fig. 4 o en la fig. 6 para los valores más grandes de l , es decir para las escalas más pequeñas, se produce una amortiguación del espectro. Como se comentó en la introducción de esta sección se debe a que la recombinación no fue un proceso inmediato. En el plasma existían región mas densas y calientes que otras y los fotones principalmente viajaban de las zonas más densas a las menos empujando en su trayecto a los electrones, y éstos debido a la fuerza de Coulomb desplazaban también a los protones. El resultado es una homogeneización del plasma, al

desplazar a los electrones y bariones de las zonas más densas a las menos densas. Esto se refleja como una amortiguación en el espectro.

Las ecuaciones necesarias para modelar estas escalas son muy similares a las oscilaciones acústicas, salvo que debido a la amortiguación el término cuadrupolar toma cierta relevancia y no puede ser despreciado. En otras palabras, se debe incluir Θ_2 . En estas escalas tan pequeñas los potenciales gravitacionales ϕ y Ψ son mucho más pequeños que las propias perturbaciones estudiadas, por lo que sus efectos sí pueden despreciarse. Las ecuaciones que regirán el término monopolar, dipolar y cuadrupolar son:

$$\dot{\Theta}_0 = -\frac{1}{3}k\Theta_1 \quad (94)$$

$$\dot{\Theta}_1 = k \left(\Theta_0 - \frac{2}{5}\Theta_2 \right) - \Gamma(\Theta_1 + v_b) \quad (95)$$

$$\dot{\Theta}_2 = 2k\Theta_1 - \Gamma\Theta_2 \quad (96)$$

Para resolverlas será necesaria también la ecuación de la velocidad:

$$\Theta_1 + v_b = -\frac{R}{\Gamma} [\dot{v}_b + H v_b] \quad (97)$$

Para hallar una solución se supone una dependencia del tiempo que satisface:

$$\{\Theta_l, v_b\} \propto e^{i \int \omega d\eta} \quad (98)$$

La amortiguación se produce cuando los fotones y los electrones no se encuentran tan fuertemente ligados. La solución pasa por encontrar la pequeña parte imaginaria de la frecuencia de vibración, ω que la provoca. Como la amortiguación ocurre a pequeñas escalas, es decir a altas frecuencias: $\dot{v}_b = i\omega v_b \gg H v_b$. Por tanto:

$$v_b \approx -\Theta_1 \left[1 + \frac{i\omega R}{\Gamma} \right]^{-1} \approx -\Theta_1 \left[1 - \frac{i\omega R}{\Gamma} - \left(\frac{\omega R}{\Gamma} \right)^2 \right] \quad (99)$$

Es posible seguir un razonamiento similar en la ecuación (96) para hallar $\Theta_2 \approx (2k/\Gamma)\Theta_1$. Sustituyendo en la ecuación (95) es posible calcular la siguiente relación de dispersión:

$$\omega^2(1+R) - \frac{k^2}{3} - \frac{i\omega}{\Gamma} \left[\omega^2 R^2 + \frac{8}{27}k^2 \right] = 0 \quad (100)$$

Los dos primeros términos son los mismos que los que se obtendrían si se hubiese hecho el cálculo en la sección anterior, es decir, cuando se consideran los fotones y electrones estrechamente acoplados. El tercero es la corrección debido a la amortiguación. Se sustituye $\omega = c_s k + \delta\omega$ y se expande en pequeñas $\delta\omega$. Esto lleva a:

$$\delta\omega = \frac{i}{2(1+R)\Gamma} \left[c_s^2 R + \frac{8}{27} \right] k^2 \quad (101)$$

La dependencia temporal de la perturbación es por tanto:

$$\{\Theta_0, \Theta_1\} \propto \exp \left[ik \int d\eta c_s \right] \exp \left[-\frac{k^2}{k_D^2} \right] \quad (102)$$

Donde el número de onda del amortiguamiento es:

$$\frac{1}{k_D^2(\eta)} \equiv \int_0^\eta \frac{d\eta}{6(1+R)\Gamma(\eta)} \left[\frac{R^2}{1+R} + \frac{8}{9} \right] \quad (103)$$

La conclusión que se puede extraer de la ecuación (102) y de esta sección es que el amortiguamiento es posible modelarlo añadiendo un factor $\exp[-k^2/k_D^2]$ a las soluciones del apartado anterior. La solución sigue siendo un espectro oscilatorio con las mismas soluciones antes calculadas, pero multiplicadas por una exponencial decreciente que da cuenta del amortiguamiento.

4.5. Espectro de potencia

Una vez que ya tenemos los momentos multipolares para las diferentes escalas, el último paso es relacionarlos con el mapa de temperatura medido. La temperatura medida es:

$$T(x, \hat{p}, \eta) = T(\eta) [1 + \Theta(x, \hat{p}, \eta)] \quad (104)$$

La expansión en armónicos esféricos de la perturbación de temperatura es:

$$\Theta(x, \hat{p}, \eta) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(x, \eta) Y_{lm}(\hat{p}) \quad (105)$$

Toda la información está contenida en los coeficientes a_{lm} . Para relacionar estos coeficientes con los momentos multipolares se utiliza la ortogonalidad de los armónicos esféricos. Es necesario escribir los momentos utilizando la transformada de Fourier, ya que se han obtenido soluciones en función del número de onda k , no de la posición x :

$$a_{lm}(x, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ikx} \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) \Theta(k, \hat{p}, \eta) \quad (106)$$

Los coeficientes siguen una distribución gaussiana, que tiene un valor medio nulo, pero su varianza si tiene valor:

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C(l) \quad (107)$$

Existe una incertidumbre fundamental en el valor de $C(l)$, debido al número de medidas que se pueden hacer para obtenerlo. Recibe el nombre de varianza cósmica:

$$\left(\frac{\Delta C(l)}{C(l)} \right) = \sqrt{\frac{2}{2l+1}} \quad (108)$$

El objetivo es calcular los coeficientes $C(l)$, que podemos desarrollar en términos de Θ_l . Los coeficientes $C(l)$ son el espectro angular de potencia, que no es más que la función de correlación antes vista en el espacio de Fourier. Es necesario calcular el valor medio de los multipolos y para ello es habrá que separar la expresión de Θ_l en dos, una parte que de cuenta de la amplitud inicial de la perturbación y otra de su evolución, $\mathcal{R} \times \mathcal{T}$, donde \mathcal{R} solo depende de k y:

$$\mathcal{T}(k, \hat{p}) \equiv \frac{\Theta(k, \hat{p}, \eta_0)}{\mathcal{R}(k)} \quad (109)$$

recibe el nombre de función de transferencia. Como esta magnitud no depende de la amplitud inicial de cada modo es posible sacarla del promedio:

$$\langle \Theta(k, \hat{p}) \Theta(k', \hat{p}') \rangle = \langle \mathcal{R}(k) \mathcal{R}^*(k') \rangle \mathcal{T}(k, \hat{p}) \mathcal{T}^*(k', \hat{p}') = (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(k-k') P_{\mathcal{R}}(k) \mathcal{T}(k, \hat{p}) \mathcal{T}^*(k, \hat{p}') \quad (110)$$

La función de transferencia \mathcal{T} solo depende de \hat{p} a través del ángulo formado con \hat{k} : $\mu = \hat{k} \cdot \hat{p}$. Utilizando la ecuación (106) se obtiene:

$$C(l) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_{\mathcal{R}}(k) \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) \mathcal{T}(k, \hat{k} \cdot \hat{p}') \int d\Omega' Y_{lm}(\hat{p}') \mathcal{T}^*(k, \hat{k} \cdot \hat{p}') \quad (111)$$

Expandiendo la función \mathcal{T} con polinomios de Legendre es posible obtener:

$$C(l) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 P_{\mathcal{R}}(k) |\mathcal{T}_l(k)|^2 \quad (112)$$

El resultado obtenido para un l dado, implica que la varianza $C(l)$ es una integral sobre todos los modos de Fourier de $\Theta_l(k)$, que es $|\mathcal{T}_l(k)|^2$ veces la varianza de la perturbación de curvatura.

4.5.1. Escalas angulares grandes

Las anisotropías del CMB de gran escala están determinadas por modos extremadamente grandes que han entrado en nuestro horizonte recientemente. Ofrecen una forma particularmente directa de medir las condiciones iniciales. A estas escalas podemos despreocupar el término dipolar ya que es muy pequeño comparado con el monopolo. El efecto Sachs-Wolfe es el efecto más importante, por lo que el coeficiente será:

$$C(l)^{SW} \simeq \frac{2}{25\pi} \int_0^\infty dk k^2 P_{\mathcal{R}}(k) |j_l[k(\eta_0 - \eta_*)]|^2 \quad (113)$$

donde se ha introducido la función de Bessel j_l . Operando y asumiendo que el espectro es invariante en escala, es decir, ecuación (55) es $n_s = 1$, el coeficiente buscado es:

$$C(l)^{SW} = \frac{8}{25} \frac{k_p^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k_p) \frac{1}{l(l+1)} = \frac{8}{25} \mathcal{A}_s \frac{1}{l(l+1)} \quad (114)$$

siendo $k_p = 0,05 Mpc^{-1}$. La importancia de este resultado es que muestra un espectro plano, constante. Los modos extremadamente grandes provocan una meseta en el espectro.

4.5.2. Picos acústicos

En las escalas más pequeñas, aquellas que están dentro del horizonte en la recombinación, el espectro depende del monopolo y del dipolo, es decir, del efecto Sachs-Wolfe y del efecto Doppler como se ve en la figura 6. Al calcular (92) y (93) se obtuvo una dependencia senoidal y cosenoidal del monopolo y del dipolo respectivamente, por lo que el espectro será la combinación de estas dos funciones.

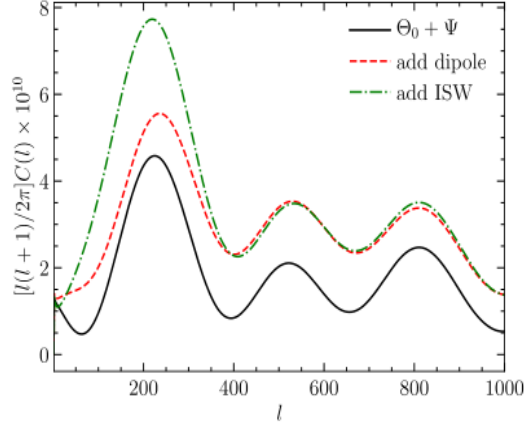


Figura 7: Contribuciones del monopolo, del dipolo y del efecto Sachs-wolfe a los picos sonoros. Créditos [7]

- El monopolo en la recombinación viaja libre hasta hoy, creando anisotropías en escalas angulares $l \sim k\eta_0$. La característica más interesante es que el valor del monopolo a pesar de ser proporcional al coseno no llega a anularse. Esto se debe a que para una determinada escala l en la que existe un mínimo, realmente no contribuye únicamente ella, si no que a $C(l)$ contribuyen más escalas cercanas no nulas. Por tanto aparecen como depresiones en el espectro, en lugar de como ceros.
- El dipolo en la recombinación es más pequeño que el monopolo y está desfasado. Las aportaciones de cada uno se suman de manera incoherente, los máximos del dipolo coinciden con los mínimos del monopolo, ya que están desfasados. Esto provoca que al añadir el término dipolar al espectro aumente en general el valor del mismo, pero que sobre todo aumente el valor en los valles. Al igual que ocurre con el monopolo la contribución de diferentes l a un mismo $C(l)$ hace que aún en el mínimo su valor no sea cero, por lo que aporta una pequeña cantidad a los máximos. El efecto total es la disminución de la diferencia entre máximos y mínimos.
- La tercera contribución es el ISW que proviene de la variación temporal de los potenciales después de la recombinación. Se debe a que la densidad de energía de la radiación no es totalmente despreciable en la recombinación, es decir, que el universo justo después de la recombinación no estaba totalmente dominado por la materia, la radiación aún tenía cierta importancia. Esta primera contribución se conoce como efecto Sachs-Wolfe integrado temprano y es especialmente relevante ya que se suma de forma coherente al momento monopolar. Este efecto vuelve a cobrar relevancia en los tiempos más actuales, debido a la pérdida de importancia de la materia frente a la energía oscura. El efecto Sachs-Wolfe integrado tardío se produce cuando los potenciales caen durante la época de la energía oscura, época en la que nos encontramos, por lo que se restringe a escalas extremadamente grandes que no se aprecian en la imagen.

5. Parámetros cosmológicos

Durante este trabajo se han utilizado numerosos parámetros para los diferentes cálculos realizados. Una de las razones por las que el estudio del CMB ha sido tan relevante en los últimos años es que permite ajustar de forma cada vez más precisa estos parámetros, que posteriormente serán utilizados en otras ramas de la cosmología. En esta sección se desarrollará brevemente lo que ocurre con el espectro al variar alguno de éstos. Debido a la estrecha relación que existe entre ellos el resultado de variar uno puede ser imitado o igualado variando otro conjunto de ellos.

5.1. Curvatura y Λ

El espacio-tiempo no es euclideo, tiene una curvatura como se vio en la ecuación (15), que en mayor o menor medida afecta a las anisotropías. Si en el momento de la recombinación se considera un universo abierto, en lugar de plano como se ha hecho en este trabajo, cualquier escala fija se proyectará en una escala angular menor. Por tanto, los diferentes picos del espectro se desplazan hacia valores de l más altos. Si consideramos un universo cerrado el escenario es el contrario. La magnitud que determina el efecto de esta curvatura es la distancia del diámetro angular a la superficie de última dispersión.

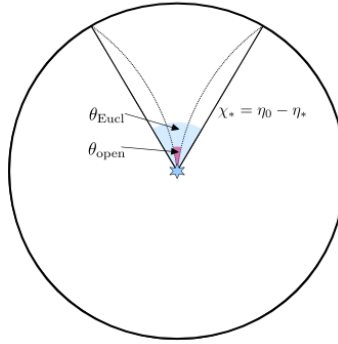


Figura 8: Trayectoria de un fotón en un universo euclideo y en uno abierto. Como se aprecia en la imagen el ángulo es menor en el universo abierto. Créditos: [9]

En un universo plano, como en el que se ha trabajado, la distancia d_A está dada por $\eta_0 - \eta_*$, sin embargo en un universo con curvatura toma la siguiente forma:

$$d_A = \frac{a}{H_0 \sqrt{\Omega_K}} \begin{cases} \sinh(\sqrt{\Omega_K} H_0 \chi) & \text{Abierto, } \Omega_K > 0 \\ \sin(\sqrt{-\Omega_K} H_0 \chi) & \text{Cerrado, } \Omega_K < 0 \end{cases} \quad (115)$$

Donde χ hace referencia a la distancia comóvil y $\Omega_K = 1 - \Omega_0$ a la curvatura del universo. La distancia actual hasta la superficie de última dispersión es muy grande, por lo que una pequeña variación de la curvatura provoca una gran variación de ésta. Como la posición de los picos responde de forma muy sensible a la curvatura, con las medidas actuales existe una restricción bastante grande al valor de esta: $|\Omega_K| < 0,002$.

La variación de la constante cosmológica Λ provoca un cambio parecido, traslada los picos de posición debido a que hace variar la distancia del diámetro angular en la superficie de última dispersión. Esto se debe a que al variar la constante también varía la densidad de energía oscura

Ω_Λ , lo que a su vez provoca un cambio en el parámetro de Hubble, ec. (12). La variación de la energía oscura afectaría también al ISW temprano, sobre todo para los valores de l más bajos. En este caso es difícil conseguir el ajuste del caso anterior, ya que al trabajar con l tan bajos existe una gran incertidumbre debido a la varianza cósmica, como se vio en la ecuación (108).

5.2. Amplitud A_s , índice espectral n_s y profundidad óptica τ

Un cambio en la amplitud A_s implica multiplicar todo $C(l)$ por ese mismo factor. Para $n_s = 1$ el espectro $l(l+1)C(l)$ tiene igual potencia en todas las escalas, mientras que para $n_s > 1$ ($n_s < 1$) tiene más potencia en escalas pequeñas (grandes)

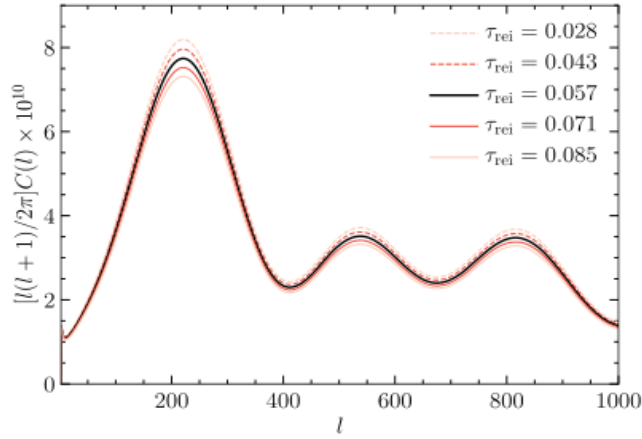


Figura 9: Variaciones del espectro de potencia para diferentes valores de la profundidad óptica en la reionización. Créditos: [9]

Después de la recombinación el gas del universo era neutro, pero las medidas actuales indican que esto ya no es así. Por tanto, en algún momento entre la recombinación y la actualidad éste ha debido reionizarse. Si el gas está ionizado implica que los fotones que fueron liberados en la superficie de última dispersión podrían volver a dispersarse con estos electrones libres. Es dispersión provoca una mayor isotropía en la radiación. Éstas nuevas anisotropías camuflan las anisotropías primordiales. La profundidad óptica se define como:

$$\tau = \int a \sigma_T n_e d\eta \quad (116)$$

Si se imagina a un fotón viajando hacia nuestra dirección con una temperatura $T(1 + \Theta)$, donde T es la temperatura del fondo, al golpear una región con una profundidad óptica τ_{rei} solo una fracción $e^{-\tau_{rei}}$ escapará y continuará. Atendiendo a esta fracción, la temperatura que podremos medir será:

$$T(1 + \Theta)e^{-\tau_{rei}} + T(1 - e^{-\tau_{rei}}) = T(1 + \Theta e^{-\tau_{rei}}) \quad (117)$$

Esta dispersión tan solo afectaría a las perturbaciones dentro del horizonte en el momento de la reionización, es decir $l > \eta_0/\eta_{rei}$.

Se consideran estos tres parámetros dentro de la misma sección porque un cambio en la amplitud A_s combinado con uno en el índice n_s pueden simular el efecto de variar la profundidad óptica τ_{rei} .

Por tanto los valores medidos son $n_s = 0,965 \pm 0,004$, para $A_s = (2,19 \times 0,05) \times 10^{-9}$ y para $\tau = 0,054 \pm 0,007$.

5.3. Densidades de bariones y de CDM

Las variaciones de estos parámetros implican un pequeño desplazamiento relativo en las ubicaciones de los picos y valles del espectro, además de cambiar sus amplitudes. Existe alguna diferencia entre variar uno u otro.

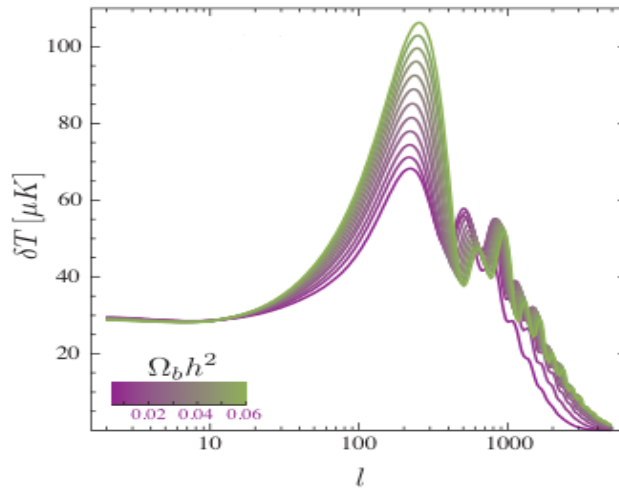


Figura 10: Variación en la temperatura para diferentes valores de la densidad de bariones. Créditos: [7]

Los efectos de cambiar la densidad de bariones son: desplazamiento de los picos, debido a la variación del horizonte sonoro r_s ; así como modificaciones en la altura.

Las inhomogeneidades de una cierta escala k se manifiestan en el espectro en $l = k \eta_0$. Los picos al ser producidos por inhomogeneidades seguirán la misma norma y se manifestarán en:

$$l_{pk} \simeq k_{pk} \eta_0 \simeq n \pi n_0 / r_s(\eta_*) \quad (118)$$

Por lo que modificar el horizonte sonoro r_s implica modificar la posición de los picos. La relación de altura de los picos pares e impares es mayor cuando la densidad de bariones es grande, siguiendo la relación $(1 + 6R)^2$, siendo R la relación entre bariones y fotones .

Una mayor densidad también reduce el número de onda de amortiguamiento (103) lo implica un desplazamiento de la amortiguación a escalas más pequeñas.

Esto permite restricciones muy estrictas sobre $\Omega_b h^2 = 0,0224 \pm 0,0001$.

La siguiente figura muestra el efecto de variar la densidad de materia oscura.

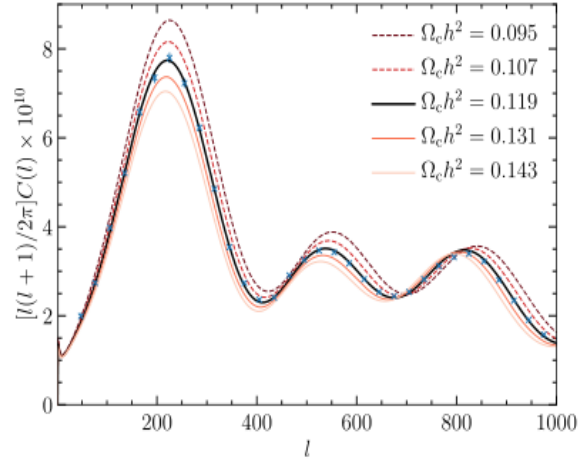


Figura 11: Variaciones del espectro de potencia para diferentes valores de la densidad de materia oscura. Créditos: [9]

Un cambio en la materia oscura provoca un cambio en los potenciales, lo que provoca una variación en el término impulsor de las oscilaciones acústicas (89). El efecto es similar a la variación en la densidad de bariones. Además la presencia de más o menos materia oscura provoca que el cambio de la época de la radiación a la época de la materia se produzca en un momento diferente, afectando tanto a las perturbaciones como al efecto ISW temprano. El valor medido para la densidad de materia oscura es: $\Omega_c h^2 = 0,120 \pm 0,001$

Las mediciones de los parámetros que aparecen en esta última sección han sido recabados por el satélite Planck [10].

6. Conclusiones

En este trabajo se ha comentado qué es y las principales características del fondo cósmico de microondas. Para ello primeramente ha sido necesario comentar los aspectos principales del modelo cosmológico estándar, a fin de tener una idea general de los principales conceptos utilizados más adelante. Con ellos se ha visto cual es la propuesta de la teoría del Big Bang y aunque explica de manera espléndida muchos aspectos de nuestro universo, tiene ciertas deficiencias como se ha comentado. Para, solventar esos problema aparece la teoría inflacionaria, que no solo proporciona una respuesta a las fallas del modelo cosmológico estándar, si no que proporciona un mecanismo para explicar las anisotropías observadas en el fondo cósmico.

Una vez que se dispone de una base sólida sobre los principales acontecimientos del universo temprano; era de la radiación, recombinación, era de la materia, etc; y las principales leyes que los gobiernan, ya es posible comenzar el estudio del CMB. El fondo cósmico de microondas es la radiación residual procedente de la recombinación que recibimos hoy en día. Es prácticamente independiente de la dirección de la medida y además es fundamentalmente homogéneo. Tiene espectro de cuerpo negro, siendo el más perfecto medido hasta la fecha, con una temperatura de 2,73 K. Sin duda el descubrimiento y estudio del CMB es uno de los acontecimiento más importantes del siglo XX en el campo de la cosmología, pues aparte de ser el momento observado más antiguo, aporta una gran cantidad de información acerca del universo primitivo.

Aunque el CMB es uno de los objetos más estudiados en las últimas décadas, los detalles del mismo son aún más interesante. Si bien la radiación recibida en un principio se pensaba que era homogénea, una mayor precisión en los datos recabados muestra que existen variaciones de diez partes por millón. El estudio de las anisotropías tiene una importancia capital ya que la visión del universo primitivo que aportan es mucho más clarificadora que solamente teniendo en cuenta el fondo cósmico. Desde su origen, que puede ser compatible con la teoría inflacionaria, su evolución en el fluido, que aporta una gran cantidad de información sobre éste, hasta las consecuencias que tienen una vez se produce la recombinación, actuando como aglutinadores de materia que posteriormente darán lugar a la estructura del universo.

Se ha explicado como dependiendo de la escala en estudio se deben tener unas consideraciones u otras para obtener el espectro de potencia de la radiación. Como las escalas más grandes aportan información de las condiciones iniciales, ya que se desconectaron causalmente muy pronto y prácticamente no evolucionaron. Las escalas medias aportan información sobre las oscilaciones producidas en el fluido y como las escalas más pequeñas son especialmente útiles para comprender los últimos instantes de la recombinación.

La medición precisa del espectro y un análisis teórico un poco más complejo al expuesto en este trabajo, permiten ajustar de manera extraordinariamente precisa muchos valores cosmológicos que son fundamentales para el resto de estudios en cosmología, por lo que en la mayoría de casos se toman los las medidas del CMB como referencia para el resto.

El fondo cósmico de microondas ha abierto multitud de ramas de estudio y ha supuesto un empujón sin precedentes para el avance de la cosmología. El refinamiento constante de los aparatos de medidas, así como nuevas misiones enfocadas en su estudio aseguran un futuro con nuevos e interesantes descubrimientos.

Bibliografía

- [1] Arno A Penzias y Robert Woodrow Wilson. «A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s.» En: *The Astrophysical Journal* 142 (1965), págs. 419-421.
- [2] Ralph A Alpher, Robert Herman y GA Gamow. «Thermonuclear reactions in the expanding universe». En: *Physical Review* 74.9 (1948), pág. 1198.
- [3] Alan H Guth. «The inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems, 1981». En: *Phys. Rev. D* 23.347 (), pág. 10.
- [4] Andrei D Linde. «A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems». En: *Physics Letters B* 108.6 (1982), págs. 389-393.
- [5] Antonio Riotto. «Inflation and the theory of cosmological perturbations». En: *arXiv preprint hep-ph/0210162* (2002).
- [6] Edward W Kolb. «Dynamics of the inflationary era». En: *arXiv preprint hep-ph/9910311* (1999).
- [7] Daniel Baumann. «Advanced cosmology lecture notes». En: (2021).
- [8] Wayne Hu. «Concepts in CMB anisotropy formation». En: *The Universe at High-z, Large-Scale Structure and the Cosmic Microwave Background*. Springer, 1996, págs. 207-239.
- [9] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. Elsevier, 2003.
- [10] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak et al. «Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters». En: *Astronomy & Astrophysics* 641 (2020), A6.
- [11] Viatcheslav Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press, 2005.
- [12] Daniel Baumann. «TASI lectures on inflation». En: *arXiv preprint arXiv:0907.5424* (2009).
- [13] Martin Bucher. «Physics of the cosmic microwave background anisotropy». En: *International Journal of Modern Physics D* 24.02 (2015), pág. 1530004.
- [14] Daniel Baumann. «TASI lectures on primordial cosmology». En: *arXiv preprint arXiv:1807.03098* (2018).
- [15] George Gamow. «Expanding universe and the origin of elements». En: *Physical review* 70.7-8 (1946), pág. 572.