



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

SOLUCIONES EN GRAVITACIÓN EN D+1 DIMENSIONES

Autor/a: Jose Antonio Castro Moreno
Tutor/es/as: Diego Sáez-Chillón Gómez
Año: 2022/2023

Abstract

In this project we review the classic and recent literature regarding solutions to the Einstein field equations in $d \geq 3$ spatial dimensions and 1 temporal dimension. We start by solving the weak field limit for a rotating mass in $d + 1$ dimensions in order to use it as a reference for the forthcoming solutions. After that we explain in detail the well known Schwarzschild and Kerr metrics as a model of how are we going to study Black Holes. Then we continue with the generalization of this solutions the Tangherlini and Myers-Perry solutions. We study how the event horizon, singularity and ergosphere change in arbitrary dimensions. Finally we study a very remarkable solution the black ring solution by Emparan and Reall. This solution exhibit a lot of unseen features in general relativity as a non spherical event horizon or non uniqueness for a given mass and angular momentum.

Resumen

En este trabajo revisamos la literatura clásica y reciente sobre las soluciones de las ecuaciones de Einstein en $d \geq 3$ dimensiones espaciales y 1 dimensión temporal. Comenzamos resolviendo las ecuaciones en el límite de campo débil para una masa en rotación que usaremos como referencia para las soluciones que vamos a estudiar. Hecho esto explicaremos en detalle las conocidas soluciones de Schwarzschild y Kerr que nos servirán como modelo de cómo vamos a estudiar los agujeros negros. Después continuaremos estudiando las generalizaciones de estas soluciones que son la de Tangherlini y la de Myers-Perry. Estudiaremos cómo cambian la singularidad, el horizonte de eventos y la ergoesfera en dimensión arbitraria. Finalmente estudiaremos una solución sorprendente el anillo negro construido por Emparan y Reall. Esta solución muestra una gran cantidad de características que no se habían visto en Relatividad General como un horizonte de eventos no esférico o la no unicidad de soluciones para una masa y momento angular dados.

Índice

1. Introducción y nociones previas	1
1.1. Notación y convenios	2
1.2. Nociones previas	3
2. Límite de Campo Débil	6
3. 3+1 Dimensiones	9
3.1. Métrica Schwarzschild	9
3.2. Métrica de Kerr	14
3.3. Teoremas	21
4. Dimensión D+1	21
4.1. Swarchild-Tangherlini	22
4.2. Myers-Perry	23
4.2.1. Kerr D+1	24
4.2.2. Myers-Perry general	26
5. 4+1 Dimensiones	30
5.1. Anillos Negros	31
6. Resumen y Conclusiones	39
Bibliografía	41

1. Introducción y nociones previas

La teoría de la Relatividad General, formulada por Einstein en 1915, es la teoría más precisa de la gravitación de la que disponemos hasta la fecha. La avalan una inmensa cantidad de predicciones correctas, el perihelio de mercurio, la deflexión de la luz de las estrellas, la dilatación temporal de los relojes de sistema GPS entre otros y prácticamente ningún fracaso. Esta teoría tiene un gran interés desde el punto de vista de la física fundamental, la astrofísica, la cosmología e incluso desde el punto de vista matemático. Es por ello, que conviene profundizar en el entendimiento de esta teoría pues, en última instancia, repercutirá en un mejor entendimiento de nuestro universo. Al igual que el estudio del cálculo en varias variables o la variable compleja nos permite deducir teoremas de gran interés y aplicabilidad al caso de una variable real, en este trabajo nosotros vamos a estudiar cómo se comporta la teoría de la Relatividad General en $d \geq 3$ dimensiones espaciales y 1 temporal. Por supuesto para $d > 3$ las soluciones de las ecuaciones de Einstein carecen de significado físico, sin embargo el estudio de estas soluciones nos permitirá tener una perspectiva más amplia de la teoría y entender qué características son específicas de $d = 3$ y cuáles de la teoría general. A lo largo del texto veremos varios ejemplos de esto.

Concretamente en el trabajo nos vamos a centrar en las soluciones de vacío, es decir, $T_{\mu\nu} = 0$ y asintóticamente planas, esto es, soluciones en las que si nos alejamos lo suficiente de la fuente del campo gravitatorio $r \rightarrow \infty$ recuperamos el espacio tiempo plano de Minkowski $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$. El considerar soluciones de vacío se debe a que, fuera de la cosmología, todos los ámbitos en los que la teoría de la Relatividad tiene algún tipo de aplicabilidad corresponden al vacío. Además del interés práctico de las soluciones de vacío estas también son más sencillas que las soluciones con $T_{\mu\nu} \neq 0$. Los mismos dos motivos se aplican a la condición de ser asintóticamente plano. Una solución realista del campo producido por un único objeto debe comportarse en el límite $r \rightarrow \infty$ como el campo gravitatorio Newtoniano y por tanto ser asintóticamente plana. El hecho de que las soluciones que vamos a estudiar sean asintóticamente planas nos va a permitir también tener una buena interpretación de nuestras coordenadas en términos de los observadores asintóticos, cosa que no siempre es posible en Relatividad General. Parece lógico por tanto que, aunque nuestro objetivo no es estudiar soluciones con aplicabilidad directa sino entender mejor la teoría en sí misma, tratemos de entender mejor qué sucede en la generalización de los casos de mayor utilidad.

Las soluciones de vacío y asintóticamente planas, cuando son consideradas como soluciones para cualquier valor de la coordenada r , describen agujeros negros. El análisis de estas soluciones como agujeros negros engloba el análisis de las soluciones para cuerpos “ordinarios”, que se correspondería a considerar solo $r > R$ donde R es el radio del objeto. Además, una gran cantidad de los fenómenos más interesantes suceden al considerar las soluciones para cualquier valor de r . Es por esto que nosotros hablaremos en todo momento de agujeros negros entendiendo que todos los fenómenos que suceden para $r > r_s$ son también válidos para cualquier tipo de objeto astronómico.

Tal y como quedará patente a lo largo del trabajo, estudiar las soluciones en dimensión superior a 3 nos va a proporcionar un entendimiento más profundo de las soluciones en dimensión 3, mostrándonos en qué difieren y en qué coinciden con sus análogos en dimensión superior. Además, veremos cómo algunos de los teoremas que existen en dimensión 3 se conservan en dimensiones superiores, mientras que otros están muy lejos de ser ciertos cuando $d > 3$. Basta con aumentar la dimensión a $4 + 1$ para encontrar una gran cantidad de sorpresas que nos harán ver la teoría de la Relatividad con otros ojos. Como veremos, en dimensiones superiores existe un panorama mucho más variado de soluciones para las ecuaciones de Einstein. Sin embargo esta variedad tiene un precio y es que para el estudio de estas soluciones no podemos utilizar nuestra intuición geométrica. Por tanto obtener un buen entendimiento de la geometría de las soluciones que vamos a considerar va a requerir un análisis matemático cuidadoso de las coordenadas y de la métrica, para el que son necesarios un buen entendimiento de la Relatividad General y de la Geometría Diferencial.

El texto consta de 5 capítulos. En el capítulo 1 haremos un breve recordatorio de las nociones básicas tanto físicas como matemáticas de un primer curso de Relatividad General así como de los convenios que se van a utilizar a lo largo del texto. Antes de comenzar con las soluciones exactas conviene estudiar en primer lugar el límite campo débil, que tiene una interpretación física clara y nos servirá como referencia para el análisis de las soluciones exactas. En este capítulo explicamos cómo se obtienen las ecuaciones para el límite de campo débil y cuáles son sus soluciones en dimensión arbitraria $d + 1$. Una vez hecho esto estamos en condiciones de, en el capítulo 3, estudiar las dos soluciones más clásicas y relevantes en dimensión $3 + 1$ la de Schwarzschild y la de Kerr que describen respectivamente un agujero negro estático y un agujero negro en rotación. El análisis que vamos a hacer de estas dos soluciones va a ser detallado debido a que nos van a servir de ejemplo para los casos de dimensiones superiores, explicaremos qué es y cómo calcular, la singularidad, horizonte de eventos y ergoesfera. Tras estudiar las soluciones de Kerr y Schwarzschild pasaremos a estudiar sus análogos en dimensión $d + 1$. El análisis de estos agujeros negros es relativamente sencillo una vez se conocen los de $3 + 1$ pues, aunque presentan características nuevas, estas se pueden estudiar dentro del marco ya establecido. Finalmente volveremos de la generalidad de $d + 1$ dimensiones a $4 + 1$ para estudiar una solución muy particular los anillos negros, sin análogo en dimensión $3 + 1$ y que presenta una gran cantidad de características nuevas, como por ejemplo, un horizonte de eventos no esférico. A partir de esta solución de anillo negro surgen otra gran cantidad de soluciones sin análogo clásico que nos gustaría estudiar en detalle, pero que por limitación de espacio nos limitaremos a mencionar y dar referencias de dónde se pueden encontrar.

1.1. Notación y convenios

En Relatividad General hay una gran cantidad de elecciones arbitrarias que no afectan a la teoría pero que si no se conocen de antemano pueden conducir a errores. Por ello es oportuno dejar claro desde un principio cuál es nuestra notación y convenios.

- Durante este trabajo fijaremos $c = 1$ y $G = 1$. Personalmente, soy partidario de mantener c en las ecuaciones pues eliminarla nos hace perder intuición sobre el tamaño de las magnitudes. Por ejemplo, si para nosotros el radio de Schwarzschild es $\frac{2GM}{c^2}$ podemos ver en un golpe de vista que es una distancia realmente pequeña. No sucede lo mismo si hacemos $c = 1$ $G = 1$. A pesar de esto, como ya hemos comentado, este trabajo es más un estudio de la teoría de Einstein que del universo que esta teoría describe. En situaciones que no se corresponden con ninguna realidad, como un espacio en $4 + 1$ dimensiones carece de sentido la noción de que una magnitud sea grande o pequeña, no hay tamaños típicos con los que comparar.
- La métrica del espacio de Minkowski es $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Consecuentemente, la signatura del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es $(-, +, +, +)$.
- El tensor energía momento tiene el signo que corresponde a la elección $T_{tt} = \rho$, donde ρ es la densidad de masa-energía.
- En consecuencia a nuestras elecciones anteriores, la ecuación de Einstein toma la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

.

- Por supuesto vamos a adoptar el convenio de sumación de Einstein. Siempre que aparezcan un índice repetido arriba y abajo se sobreentenderá que hay una suma que recorre los posibles valores de ese índice.
- Como es habitual representaremos las magnitudes tensoriales simplemente mediante los coeficientes de su expansión en la base de vectores y covectores asociada a las coordenadas con

las que estamos trabajando. Así, v^ν representa el vector $\sum v^\nu \mathbf{e}_\nu$.

- También como es habitual, cuando usemos como índices letras griegas $\mu, \nu, \alpha, \beta \dots$ nos estaremos refiriendo a todas las coordenadas tanto espaciales como temporales y cuando usemos letras latinas $a, b, i, j, k \dots$ nos estaremos refiriendo solo a las coordenadas espaciales.
- Siempre que tengamos un tensor con dos índices $h_{\mu\nu}$ denotaremos con la misma letra que el tensor pero sin índices a su traza, es decir, $h = h^\mu_\mu = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$.
- Denotaremos por Ω_d el área de la esfera unidad de dimensión d , es decir, $\Omega_1 = 2\pi$, $\Omega_2 = 4\pi$ y en general

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}$$

donde Γ es la función gamma de Euler.

1.2. Nociones previas

Aunque suponemos que el lector está familiarizado con las nociones básicas de la teoría de la Relatividad General, con el objeto de que el texto sea accesible al mayor número de personas posibles vamos a hacer una breve presentación de los conceptos más básicos de la teoría.

La teoría de la Relatividad General se construye siguiendo la guía del principio fuerte de equivalencia, que nos dice que las leyes físicas deben ser las mismas independientemente del sistema de referencia. Es por esto que todas las ecuaciones de la Relatividad General deben escribirse como igualdades entre magnitudes tensoriales, que serán por tanto ciertas independientemente de qué sistema de referencia elijamos. La formulación de la teoría en estos términos acarrea inevitablemente un incremento de la dificultad técnica pues, el entorno natural en el que plantear estas ecuaciones es una variedad pseudo-riemanniana. Sucede entonces que tanto los conceptos físicos como los aparatos matemáticos no son los usuales de la física. Es por esto que antes de comenzar con el trabajo haremos una breve introducción o repaso de los conceptos básicos.

- Al igual que en Relatividad Especial, en Relatividad General, espacio y tiempo se tratan de forma idéntica a nivel matemático. Sin embargo, necesitamos poder distinguir de alguna manera estas dos entidades que sabemos que físicamente son muy diferentes. Esto se hace mediante el módulo al cuadrado de los vectores, el producto escalar o métrica nos permite distinguir de la siguiente manera.

Un vector que cumpla $g_{\mu\nu} v^\nu v^\mu < 0$ se corresponde con un vector de tipo de tiempo, por ejemplo, los vectores velocidad de cualquier objeto con masa son de este tipo, esto no es de extrañar, por ejemplo, un observador en reposo solo se está moviendo en la coordenada temporal que se corresponde con el signo $-$ de la signatura de la métrica.

Un vector que cumpla $g_{\mu\nu} v^\nu v^\mu > 0$ se dice que es de tipo espacio, estos vectores se utilizan para medir distancias y no pueden ser el vector velocidad de ningún observador pues, lógicamente, no podemos desplazarnos solo en las coordenadas espaciales sin avanzar en el tiempo.

Finalmente un vector que cumple $g_{\mu\nu} v^\nu v^\mu = 0$ se dice que es de tipo luz o nulo, estos vectores se corresponden con la velocidad de los objetos sin masa como la luz y suponen el límite entre los vectores de tipo tiempo y espacio.

- La medida de distancias y tiempos no se puede realizar en términos de las coordenadas, necesitamos la métrica $g_{\mu\nu}$ del espacio tiempo que guarda la información física. Para medir la distancia entre dos eventos tomamos una curva $\gamma(\lambda)$ cuyo vector tangente sea siempre de

tipo espacio y calculamos

$$l = \int \left(\sqrt{\frac{d\gamma_\mu}{d\lambda} \frac{d\gamma_\nu}{d\lambda} g_{\mu\nu}} \right).$$

Por otro lado, para calcular el tiempo que transcurre para un observador entre dos eventos tomamos como curva la línea de vida de ese observador, que por definición tendrá su vector tangente siempre de tipo tiempo y calculamos

$$\tau = \int \left(\sqrt{-\frac{d\gamma_\mu}{d\lambda} \frac{d\gamma_\nu}{d\lambda} g_{\mu\nu}} \right)$$

- La derivada usual de una magnitud X con respecto a una coordenada $\partial_\mu X$ ya no representa el cambio de una magnitud con respecto a esa coordenada. Esto es debido a que la derivada usual solo tiene en cuenta cómo varían los coeficientes de la magnitud sin tener en cuenta que los tensores que conforman esa magnitud pueden haberse visto modificados de un punto a otro. Esto es completamente análogo a lo que sucede al trabajar en coordenadas polares, donde $\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\mathbf{u}_r)$ no es $f'(\theta)\mathbf{u}_r$ sino que es $f'(\theta)\mathbf{u}_r + f(\theta)\mathbf{u}_\theta$ pues al cambiar θ el vector \mathbf{u}_r cambia. El operador que representa de forma correcta la tasa de cambio de una magnitud en una dirección es la conexión de Levi-Civita o derivada covariante, representada por $\nabla_\mu X$.
- La derivada covariante de un vector $\nabla_\mu v^\nu$ viene dada por la expresión

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu v^\rho.$$

Los coeficientes $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$ reciben el nombre de símbolos de Christoffel o coeficientes de la conexión y tienen en cuenta justamente la variación de los campos vectoriales de la base de un punto a otro. Los símbolos de Christoffel **no** son tensores y son simétricos en los dos índices inferiores $\Gamma_{\mu\rho}^\nu = \Gamma_{\rho\mu}^\nu$.

- Los símbolos de Christoffel dependen de la métrica del espacio-tiempo y de las coordenadas elegidas, la ecuación para calcularlos es

$$\Gamma_{\mu\rho}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (\partial_\mu g_{\alpha\rho} + \partial_\alpha g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\alpha}).$$

- Aunque nosotros no lo vamos a utilizar, el objeto que describe la curvatura del espacio tiempo con más precisión en el tensor de Riemann R_{bcd}^a , que se calcula como

$$R_{\mu\rho\sigma}^\nu = \partial_\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \partial_\sigma \Gamma_{\rho\mu}^\nu + \Gamma_{\alpha\rho}^\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\alpha\sigma}^\nu \Gamma_{\rho\mu}^\alpha.$$

Este tensor de Riemann con índices abajo tiene las siguientes simetrías

$$R_{abcd} = -R_{bacd} \quad R_{abcd} = -R_{abdc} \quad R_{abcd} = R_{cdab}$$

$$R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} = 0.$$

Por tanto, aunque en un espacio de dimensión d tiene d^4 componentes solo $\frac{1}{12}d^2(d^2 - 1)$ de ellas son algebraicamente independientes por lo que este es el número de “grados de libertad”.

- Nos va a resultar mucho más interesante el tensor de Ricci, que no es otra cosa que la traza del tensor de Riemann con respecto al índice central. Este tensor, entre otros, aparece al lado izquierdo de la ecuación de Einstein. Se puede calcular en términos del tensor de Riemann como

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho.$$

- Si repetimos esta operación con el tensor de Ricci y calculamos su traza obtenemos el escalar de curvatura R , que es la última de las piezas que aparece en el lado izquierdo de la ecuación de Einstein. Este último se calcula como

$$R = R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

- Vistas ya todas las componentes del lado izquierdo de la ecuación de Einstein, que nos hablan de cómo se curva el espacio tiempo, vamos a presentar el objeto que aparece en el lado derecho. El tensor energía momento, $T_{\mu\nu}$, que contiene la información de todas las fuentes de energía que hay en el espacio, juega un papel análogo a la densidad de carga-corriente (ρ, J_x, J_y, J_z) en el electromagnetismo. Cada una de sus 16 entradas tiene un significado físico definido, sin embargo, dado que nosotros solo vamos a estudiar soluciones de vacío, es decir, sin ningún tipo de densidad de energía o momento, no vamos a entrar en detalles, nos basta con saber que en todas las soluciones que vamos a estudiar cumplen que $T_{\mu\nu} = 0$.
- Las ecuaciones de Einstein que nos dan la forma de la métrica en función del tensor energía momento son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

El tensor de Ricci y por tanto el escalar de curvatura, se obtienen en términos de el tensor de Riemann, $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$, que se obtiene en términos de los símbolos de Christoffel, $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, y sus derivadas. Estos últimos dependen de $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas. Resulta entonces que la ecuación de Einstein es una ecuación diferencial no lineal de orden 2. No hay una teoría general para estas ecuaciones de las cuales se sabe bastante poco. Esto se debe en parte a que, al ser no lineales, no se verifica el principio de superposición y la mayoría de técnicas habituales, como los desarrollos en series o las funciones de Green no son válidas.

- Una característica común a todas las soluciones de vacío es que el tensor de Ricci es nulo, esto se debe a que si $T_{\mu\nu} = 0$ entonces, contrayendo la ecuación de Einstein con $g^{\mu\nu}$, obtenemos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R &= 8\pi g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \\ -R &= 8\pi T \implies R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} - 4\pi g_{\mu\nu}T = 0. \end{aligned}$$

- Otra de las características comunes a todas nuestras soluciones es el hecho de que son asintóticamente planas. Esto quiere decir que cuando nos alejamos suficientemente del objeto que crea el campo gravitatorio, el espacio tiempo se vuelve plano, es decir se vuelve el espacio tiempo de Minkowski cuya métrica en coordenadas cartesianas es

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

- En mecánica clásica, el momento angular de una partícula con respecto al origen de coordenadas es un tensor antisimétrico que viene dado por la ecuación

$$L^{ij} = x^i p^j - x^j p^i.$$

Habitualmente se le trata como un vector, ya que debido a su asimetría solo tiene 3 componentes linealmente independientes. En Relatividad Especial este concepto se generaliza sin problema pues todavía tiene sentido hablar de vectores de posición. Sin embargo, en Relatividad General la definición anterior carece de sentido pues ya no existe un vector de posición

al no ser el espacio plano. La definición que más sentido tiene adoptar entonces es que el momento angular de un observador en la dirección x, y o z es la magnitud conservada asociada al vector de Killing de una rotación en torno al eje x, y o z . ¿Qué sucede entonces en los espacios que no tengan un vector de Killing asociado a una rotación? Simplemente no tiene sentido hablar en ellos de momento angular al igual que si ∂_t no es un vector de Killing la energía no está bien definida.

- A pesar de que en un espacio tiempo curvo no podemos usar la definición usual, sí lo haremos cuando estemos considerando el límite de campo débil pues el espacio es aproximadamente plano. En estas condiciones, dado que la componente T^{ti} del tensor energía momento es la densidad de p^i , podemos definir la densidad de momento angular como

$$\mathcal{L}^{ij} = x^i T^{tj} - x^j T^{ti}.$$

Consecuentemente el momento angular total en una región del espacio Ω viene dado por

$$L^{ij} = \int_{\Omega} \mathcal{L}^{ij} = \int_{\Omega} x^i T^{tj} - x^j T^{ti}.$$

2. Límite de Campo Débil

La Relatividad General, como todas las teorías físicas, debe estar en acuerdo con las teorías y experimentos previos. En el caso de la Relatividad General esto supone que, de alguna manera, debemos recuperar la mas que comprobada teoría de la gravedad de Newton. La gravedad de Newton se obtiene a partir de la Relatividad General en lo que se conoce como el límite de campo débil. Esto se corresponde a situaciones donde el espacio tiempo tiene muy poca curvatura, en el sistema solar por ejemplo sabemos que la teoría de Newton funciona perfectamente salvo por pequeños errores como el perihelio de mercurio. Esto es debido a que mercurio está tan cerca del sol que con el límite de campo débil se comete un error apreciable, que usando la métrica de Schwarzschild desaparece. A pesar de que el límite de campo débil no es una solución exacta, para distancias suficientemente lejanas al objeto es muy precisa. Como nuestras soluciones son todas asintóticamente planas y de vacío, si nos alejamos lo suficiente del objeto masivo el límite de campo débil debería describir a la perfección nuestro espacio tiempo. Gracias a esto podemos comparar nuestras soluciones exactas a distancias grandes con la métrica calculada para el límite de campo débil y, comparándolas, obtener el significado físico de las constantes de nuestras soluciones.

En vistas de lo comentado en el párrafo anterior, conviene, antes de entrar con las soluciones exactas, hacer primero un estudio de las ecuaciones en el límite de campo débil en dimensión d . En estas condiciones las ecuaciones de Einstein se transforman en ecuaciones diferenciales ordinarias para el tensor $h_{\mu\nu}$ que nos indica como se desvía la métrica de ser plana, plantearemos estas ecuaciones para una masa M que rota con momento angular L^{ij} .

Tal y como hemos dicho vamos a suponer que nuestra métrica es una ligera deformación de la métrica de Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (1)$$

A partir de aquí vamos a quedarnos con una aproximación a orden 1 en $h_{\mu\nu}$. Aunque nosotros no estamos haciendo esta aproximación con la intención de realizar ningún cálculo, conviene remarcar que en la mayoría de casos prácticos esta aproximación es muy buena. De hecho, para cualquier objeto del sistema solar los errores que cometeríamos con esta aproximación son del orden de 10^{-6} . Tendríamos que considerar objetos astrofísicos extremos como agujeros negros o estrellas de neutrones para que esta aproximación dejase de ser aplicable.

Se tiene entonces que la inversa de la métrica es $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, donde definimos $h^{\mu\nu} := h_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu}$. Efectivamente a orden 1 se tiene

$$\begin{aligned} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\rho} - h^{\nu\rho}) &= \delta_{\mu}^{\rho} - \eta_{\mu\nu}h^{\nu\rho} + \eta^{\nu\rho}h_{\mu\nu} + O(h_{\mu\nu}^2) = \delta_{\mu}^{\rho} - h_{\beta\alpha}\eta_{\mu\nu}\eta^{\beta\nu}\eta^{\alpha\rho} + \eta^{\nu\rho}h_{\mu\nu} + O(h_{\mu\nu}^2) = \\ &= \delta_{\mu}^{\rho} - \eta^{\nu\rho}h_{\mu\nu} + \eta^{\nu\rho}h_{\mu\nu} + O(h_{\mu\nu}^2) = \delta_{\mu}^{\rho} + O(h_{\mu\nu}^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Esto es importante pues para subir y bajar índices de magnitudes de orden $O(h_{\mu\nu})$ podemos usar simplemente $\eta^{\mu\nu}$, pues los términos correspondientes a $h^{\mu\nu}$ son de orden 2 y podemos despreciarlos. Otra observación relevante es que $\partial_{\rho}g_{\mu\nu} = \partial_{\rho}h_{\mu\nu}$, pues la parte de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ es constante. Con el objetivo de aligerar la notación se entiende que, salvo que se diga lo contrario, todas las ecuaciones del capítulo 2 son a orden 1 y por tanto omitiremos la escritura de $O(h_{\mu\nu}^2)$.

De nuevo a orden 1 los símbolos de christoffel se pueden calcular como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}h_{\rho\nu} + \partial_{\nu}h_{\rho\mu} - \partial_{\rho}h_{\mu\nu}) \quad (3)$$

y por tanto la expresión del tensor de Ricci resulta

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2}(\partial_{\nu}\partial_{\alpha}h_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\mu}\partial_{\alpha}h_{\nu}^{\alpha} - \partial_{\alpha}\partial^{\alpha}h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h_{\alpha}^{\alpha}). \quad (4)$$

Una vez calculado el tensor de Ricci podemos escribir la ecuación de Einstein para el límite de campo débil

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= \frac{1}{2}(\partial_{\nu}\partial_{\alpha}h_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\mu}\partial_{\alpha}h_{\nu}^{\alpha} - \partial_{\alpha}\partial^{\alpha}h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h_{\alpha}^{\alpha}) + \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu})(\eta^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}) = 8\pi T_{\mu\nu} \\ \partial_{\nu}\partial^{\alpha}h_{\mu\alpha} + \partial_{\mu}\partial^{\alpha}h_{\nu\alpha} - \partial_{\alpha}\partial^{\alpha}h_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu}h_{\alpha}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}(\partial^{\beta}\partial^{\alpha}h_{\alpha\beta} - \partial_{\beta}\partial^{\beta}h_{\alpha}^{\alpha}) &= 16\pi T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5)$$

Esta ecuación parece completamente abrumadora y podríamos pensar que no hemos ganado nada con el límite de campo débil. Sin embargo, si introducimos el, para nada obvio, cambio de variable

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (6)$$

que tiene la ventaja de que es fácil de deshacer pues, si contraemos (6) con $\eta^{\mu\nu}$ obtenemos

$$H = h - \frac{d+1}{2}h = \frac{1-d}{2}h \implies H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{1-d}\eta_{\mu\nu}H \implies h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \frac{1}{d-1}\eta_{\mu\nu}H. \quad (7)$$

Tras las correspondientes manipulaciones algebraicas la ecuación (5) en términos de $H_{\mu\nu}$ resulta

$$-\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}H_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}H_{\alpha\beta} + \partial^{\alpha}\partial_{\nu}H_{\mu\alpha} + \partial^{\alpha}\partial_{\mu}H_{\nu\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (8)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación es el operador D'Álambertiano $\square = g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}$. Para eliminar el resto de términos se puede realizar un cambio de coordenadas de manera que $\partial_{\alpha}H_{\alpha\nu} = 0$ por lo que la ecuación que resulta finalmente para H es

$$-\square H_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (9)$$

Hemos llegado entonces a unas ecuaciones diferenciales lineales desacopladas para las cuales existe una amplia gama de técnicas y resultados. La libertad que tenemos de realizar el cambio de

coordenadas para que $\partial_\alpha H_{\alpha\nu} = 0$, proviene del hecho de que hay muchas formas de elegir nuestras coordenadas de manera que se cumpla $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Al igual que en el caso del potencial electromagnético hay una cierta libertad de elección, a esta libertad de elección de coordenadas también se le llama “gauge”. Todas las coordenadas que cumplen $\partial_\alpha H_{\alpha\nu} = 0$ se dice que están en el “gauge” de Lorentz.

Estamos interesado en resolver las ecuaciones para el límite de campo débil en el siguiente caso.

Consideramos nuestro espacio de $d + 1$ dimensiones. En él agrupamos las coordenadas espaciales por pares $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots$ etc. Queremos entonces resolver las ecuaciones para una masa puntual M cuyo momento angular es, para $i \leq j$

$$L^{ij} := L^i \text{ Si } i \text{ es impar y } j = i + 1 \quad L^{ij} := 0 \text{ En cualquier otro caso.} \quad (10)$$

Como L^{ij} es antisimétrico los valores con $j < i$ están determinados por los que acabamos de dar.

Este momento angular lo que nos dice es que la rotación de nuestro cuerpo en d dimensiones se puede descomponer de $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ rotaciones en los planos (x_i, y_i) . Es conveniente numerar los planos, esto lo haremos con el índice i de manera que el momento angular correspondiente a la rotación en el plano (x_i, y_i) lo denotaremos por L^i . En el caso de que nuestras coordenadas sean impares no sucede nada raro, de hecho, es el caso al que estamos acostumbrados en dimensión 3, simplemente ese eje no está involucrado en las rotaciones. El tensor energía momento que describe esta situación es

$$T_{tt} = M\delta(x) \quad T^{ti} = -\frac{1}{2}L^{ij}\partial_j\delta(x) \quad T_{ij} = 0 \quad (11)$$

donde las deltas de Dirac que aparecen corresponden, como es lógico, solo a las d dimensiones espaciales y deben ser entendidas como distribuciones. Nótese que al estar trabajando en el límite de campo débil subimos y bajamos índices con $\eta_{\nu\mu}$ por lo que $T^{ti} = -T_{ti}$.

Vamos a comprobar que este tensor energía momento se corresponde efectivamente con una distribución de masa puntual M con momento angular L^{ij} . El objeto es puntual por la definición de $T^{\mu\nu}$, falta comprobar que su masa es M y su momento angular L^{ij} .

La masa viene dada por

$$\int_{\Omega} T_{tt} = \int_{\Omega} M\delta(x) = M. \quad (12)$$

El momento angular viene dado por

$$L^{ij} = \int_{\Omega} \mathfrak{L}^{ij} = \int_{\Omega} x^i T^{tj} - x^j T^{ti} = \int_{\Omega} -\frac{1}{2}x^i L^{jk} \partial_k \delta(x) + \int_{\Omega} \frac{1}{2}x^j L^{ik} \partial_k \delta(x). \quad (13)$$

Las dos integrales que aparecen se calculan de la misma forma por lo que solo vamos a calcular la primera de ellas

$$\int_{\Omega} -\frac{1}{2}x^i L^{jk} \partial_k \delta(x) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_k (x^i L^{jk} \delta(x)) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_k (x^i L^{kj}) \delta(x) = \frac{1}{2} L^{ij}. \quad (14)$$

La otra integral vale lo mismo por que lo que efectivamente el momento angular correspondiente a este $T_{\mu\nu}$ es L^{ij} .

Las soluciones que nosotros vamos a estudiar más adelante se corresponden a situaciones estacionarias por lo que a nuestra solución le vamos a imponer que $\partial_t H_{\mu\nu} = 0$, en cuyo caso el Dálambertiano se transforma simplemente en el Laplaciano. Al hacer esto hemos eliminado las soluciones que se corresponden a ondas gravitacionales, en las cuales no estamos interesados. Las soluciones de la

ecuación de Poisson son bien conocidas en cualquier dimensión pues se conocen las funciones de Green del Laplaciano, de hecho, en nuestro problema la solución de H_{00} es la función de Green del Laplaciano al ser el término fuente δ . Usando esta función de Green se puede calcular sin problema H_{0i} . Las soluciones son

$$H_{tt} = \frac{16\pi M}{(d-2)\Omega_{d-1}r^{d-2}} \quad H_{ti} = -\frac{8\pi x^k J_{ki}}{\Omega_{d-1}r^d}. \quad (15)$$

Aunque hemos usado r para abreviar la escritura de la solución, conviene recordar que seguimos trabajando en coordenadas cartesianas. Deshaciendo el cambio de variable se obtienen los $h_{\mu\nu}$ y por tanto los $g_{\mu\nu}$

$$h_{tt} = \frac{16\pi M}{(d-1)\Omega_{d-1}r^{d-2}} \quad h_{ij} = \frac{16\pi M}{(d-1)(d-2)\Omega_{d-1}r^{d-2}}\delta_{ij} \quad h_{ti} = -\frac{8\pi x^k J_{ki}}{\Omega_{d-1}r^d}. \quad (16)$$

Una vez tenemos la métrica en coordenadas cartesianas necesitamos hacer un cambio de coordenadas espaciales que nos permita comparar con las soluciones que vamos a obtener. Estas coordenadas consisten en hacer en cada plano de rotación i un cambio a coordenadas polares, es decir, $(x_i, y_i) = (r_i \cos \phi_i, r_i \sin \phi_i)$. Se tiene entonces que r_i es la proyección de r en el plano de rotación i . Definimos los parámetros

$$\beta_i = \frac{r_i}{r}. \quad (17)$$

Realizar el cambio a estas coordenadas, a pesar de haber un número arbitrario d de ellas no es difícil, pues al no mezclarse las variables de distintos planos, es equivalente a hacer un único cambio a polares. Bajo este cambio los h_{tt} no cambian y los $h_{t\phi_i}$ valen

$$h_{t\phi_i} = -\frac{8\pi L_i r_i^2}{\Omega_{d-1}r^d} = -\frac{8\pi L_i \beta_i^2}{\Omega_{d-1}r^{d-2}}. \quad (18)$$

Los coeficientes $h_{t\phi_i}$ y h_{tt} son los que nos van servir para comparar con nuestras soluciones en el límite de campo débil y obtener el significado de nuestras constantes.

3. 3+1 Dimensiones

En esta sección vamos a estudiar los dos espacio tiempos más relevantes en 3+1 dimensiones. El de Schwarzschild, que fue el primero en ser descubierto y es el más sencillo, describe el espacio tiempo alrededor de un objeto esférico de masa M y el de Kerr, que describe el espacio tiempo en el exterior de un objeto con simetría axial de masa M que rota en torno a su eje con un momento angular L . De las soluciones más clásicas dejamos de lado la métrica de Reissner-Nordström y la de Kerr-Newman, que se corresponden con las soluciones de Schwarzschild y Kerr pero con carga. No son por tanto soluciones de vacío sino de electrovacío. Estas soluciones son también de gran interés y tienen características únicas, sin embargo las soluciones que vamos a estudiar en dimensión $d+1$ son generalizaciones de las métricas de Schwarzschild y Kerr.

3.1. Métrica Schwarzschild

A pesar de que esta métrica es de sobra conocida y se estudia en cualquier curso de gravitación vamos a hacer un repaso de sus principales características que nos servirá de base para el estudio de las métricas posteriores. Esta métrica fue obtenida por Schwarzschild poco después de que Einstein diese a conocer su teoría. En esos momentos Schwarzschild se encontraba ingresado en el hospital debido a una infección derivada de una herida que había sufrido en el frente de batalla, sin embargo,

no permitió que esto le impidiese leer el trabajo de Einstein y encontrar la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein, concretamente una que describía el espacio tiempo en el exterior de un cuerpo esférico. La existencia de esta solución asombró a Einstein, que esperaba que las soluciones a las ecuaciones que había propuesto fuesen mucho menos elegantes, si es que alguna vez se encontraba alguna. La existencia de una solución tan simple y de innegable interés físico permitió a la Relatividad extenderse entre la comunidad científica a una velocidad muy superior de la que lo hubiera hecho. Lamentablemente Schwarzschild murió al poco tiempo de escribir a Einstein y no pudo ver cómo su solución se convertía en una de las más famosas y relevantes de la teoría de la Relatividad General.

Tanto en la métrica de Schwarzschild como en todas las posteriores no vamos a hacer una exposición detallada de cómo se obtiene esta métrica pues no es nuestro objetivo, lo que nos interesa es el análisis de las características del espacio tiempo que las métricas describen. Actualmente la manera habitual de deducir la métrica de Schwarzschild es, en primer lugar, suponer que la métrica es estática y con simetría esférica. Eso nos limita a métricas de la forma

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (19)$$

Trabajando con la métrica en esta forma general pero compacta se calcula el tensor de Ricci. Se imponen entonces las condiciones

I) $R_{\mu\nu} = 0$.

II) En el límite $r \rightarrow \infty$ la métrica tiene que ser la de Minkowski.

III) En el límite de campo débil $h_{00} = 2\Phi$, donde Φ es el potencial Newtoniano.

Con estas condiciones se obtienen los valores de ϕ y Λ que dan lugar a la conocida métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (20)$$

Vamos a comenzar a analizar cómo es el espacio tiempo descrito por esta métrica. La primera observación es que haciendo $r \rightarrow \infty$ la métrica toma la forma de la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas, por tanto efectivamente nuestra métrica es asintóticamente plana. Además este espacio tiempo tiene como simetrías las rotaciones espaciales $SO(3)$ y las traslaciones y reflexiones temporales. Otro hecho remarcable es que cuando $r \rightarrow 0$ el coeficiente $g_{tt} \rightarrow \infty$ y que cuando $r \rightarrow 2M$ el coeficiente $g_{rr} \rightarrow \infty$. Vamos a ver qué implicaciones tienen estas observaciones.

El hecho de que el espacio tiempo sea asintóticamente plano nos permite dar por ejemplo una interpretación a la coordenada temporal t como el tiempo propio de los observadores que se encuentran en la zona asintótica $r \rightarrow \infty$. Sin embargo este tiempo no es el que va a medir un observador genérico. Vamos a calcular, por ejemplo, cuál es el tiempo que mide un observador que se encuentra en el punto de coordenadas espaciales $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ con $r_1 > 2M$ entre dos coordenadas temporales t_i y t_f . Como sus coordenadas espaciales no cambian, la línea de universo de este observador será $\gamma(\lambda) = (t(\lambda), r_1, \theta_1, \varphi_1)$. Como podemos elegir cualquier parámetro para parametrizar la línea de universo del observador podemos tomar $\lambda = t$. El tiempo propio transcurrido para el observador, será por tanto

$$\tau = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{-\frac{d\gamma_\mu}{dt} \frac{d\gamma_\nu}{dt} g_{\mu\nu}} dt = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dt = (t_f - t_i) \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_1}\right)}. \quad (21)$$

Es decir, en lo que para un observador suficientemente alejado ha transcurrido un tiempo Δt para un observador cuya coordenada radial es r_1 ha transcurrido un tiempo $\Delta t\sqrt{-g_{tt}}$. Como estamos suponiendo $r_1 > 2M$, el tiempo para el observador que está más cerca de la masa transcurre más despacio. Un efecto inmediato de esto es el corrimiento al rojo o Redshift gravitatorio. Si un observador en la posición r_1 envía señales con un periodo T un observador suficientemente alejado recibe esas señales con un periodo $T(-g_{tt})^{-1/2} > T$. Por tanto, la relación entre frecuencias es $f_{recibida} = f_{emitida}\sqrt{-g_{tt}} < f_{recibida}$. Si aplicamos esto a la luz, la conclusión es que el observador asintótico recibe las señales del observador en r_1 con una frecuencia menor, es decir, ve su luz más roja de ahí el nombre Redshift. Es inmediato ver que el observador en r_1 recibirá las señales del observador asintótico con frecuencia mayor y por tanto verá su luz más azul. No hay ninguna dificultad en hacer este mismo cálculo pero para dos observadores cuyas coordenadas radiales son r_1 y r_2 . Lo que se obtiene en general es la relación

$$\frac{\tau_1}{\sqrt{-g_{tt}(r_1)}} = \frac{\tau_2}{\sqrt{-g_{tt}(r_2)}} \quad f_1\sqrt{-g_{tt}(r_1)} = f_2\sqrt{-g_{tt}(r_2)}. \quad (22)$$

En la discusión anterior siempre hemos hablado en términos del observador cuya coordenada radial es r_1 y nunca hemos dicho un observador a distancia r_1 del origen, esto es sencillamente porque lo segundo es erróneo. Tenemos que mantener siempre en mente que las coordenadas carecen por completo de significado físico y son exclusivamente una forma de etiquetar los sucesos del espacio-tiempo. Es la métrica la que carga con la información física. Vamos a ver cómo efectivamente dos observadores cuyas coordenadas radiales son r_1 y r_2 no están a una distancia $|r_1 - r_2|$. Para calcular la distancia tomamos la trayectoria radial que, al igual que para el tiempo, podemos suponer parametrizada por el propio r . Supongamos que nuestra curva es $\gamma(r) = (t_0, r, \theta_0, \varphi_0)$, la distancia vendrá dada por

$$d = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{d\gamma_\mu}{dr} \frac{d\gamma_\nu}{dr} g_{\mu\nu}} dr = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left(\frac{r}{r-r_s}\right)} dr = \sqrt{r}\sqrt{r-r_s} + r_s \ln(\sqrt{r} + \sqrt{r-r_s}) \Big|_{r_1}^{r_2} \quad (23)$$

donde $r_s = 2M$ es el radio de Schwarzschild, cuya importancia vamos a ver en un momento.

Como vemos la distancia entre r_1 y r_2 dista mucho de ser $|r_1 - r_2|$, sin embargo, cuando $r \gg r_s$ se tiene que $r - r_s \simeq r$ de manera que $\sqrt{r}\sqrt{r-r_s} \simeq r$ y también $r + r_s \ln(r) \simeq r$, por lo que para distancias grandes como era de esperar, la coordenada radial recupera su significado físico usual.

Si observamos el efecto que tiene la curvatura producida por la masa en el tiempo propio de los observadores parece que en $r = r_s$ sucede algo raro. El tiempo para un observador en r_s se congela con respecto al tiempo coordenado t , en un periodo arbitrario de tiempo coordenado Δt el tiempo propio en r_s es 0. De hecho, si observamos la métrica $g_{tt}(r_s) = 0$ y $g_{rr}(r_s) = \infty$ claramente la hipersuperficie $r = r_s$ es especial. Podríamos pensar que si el tiempo propio al acercarnos a r_s se ralentiza respecto al tiempo coordenado, quizás el problema es que nunca podemos llegar a r_s . Sin embargo, a pesar de que $g_{rr} \rightarrow \infty$ lo hace de manera controlada, pues la ecuación para la distancia entre r_1 y r_2 nos dice que la distancia de r_1 a r_s viene dada por

$$d(r_1, r_s) = \sqrt{r_1}\sqrt{r_1 - r_s} + r_s \ln(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_1 - r_s}) - r_s \ln(\sqrt{r_s}) = \quad (24)$$

$$= \sqrt{r_1}\sqrt{r_1 - r_s} + r_s \ln\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_s}} + \sqrt{\frac{r_1 - r_s}{r_s}}\right). \quad (25)$$

Vamos a tratar de arrojar más luz sobre qué sucede intentando hacer que el observador asintótico se comunique con el observador en r_s y viceversa. Para ello vamos a calcular las geodésicas radiales

de tipo luz. Las geodésicas de luz deben cumplir entre otras la ecuación

$$-\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} = 0. \quad (26)$$

Esta ecuación basta para determinar cómo son las geodésicas radiales. Si multiplicamos por $\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$ tomamos como parámetro $\lambda = t$ y despejamos se obtiene

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{r_s}{r} \iff \frac{dt}{dr} = \frac{r}{r - r_s}. \quad (27)$$

Esta ecuación no tiene una solución sencilla para $r(t)$ pero afortunadamente la ecuación para $t(r)$ sí la tiene y es

$$t(r) = \pm \left[r + r_s \ln \left(\left| \frac{r - r_s}{r_s} \right| \right) \right] + k. \quad (28)$$

Al tener solo r y t nos ha bastado con la ecuación que define el módulo del vector tangente de la geodésica para calcularla. Sin embargo, esto no nos asegura que esta curva sea una geodésica, solo nos dice que de existir una geodésica radial nula debe ser esta. Para que sea una geodésica hay que comprobar que el vector tangente a la curva se transporta paralelamente a lo largo de ella, es decir, habría que comprobar que se cumple la ecuación

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \Gamma_{\nu\rho}^\mu = 0. \quad (29)$$

Comprobar esto no tiene ninguna dificultad más allá de lo tedioso que es, pues requiere en primer lugar hallar los símbolos de Christoffel. Aunque no expondremos aquí los cálculos, se comprueba que efectivamente la curva que acabamos de calcular es una geodésica. El signo de la solución dependerá de si queremos una geodésica radial que se acerca a $r = 0$ (signo $-$, cuando r disminuye t aumenta) o que se aleja de $r = 0$ (signo $+$, cuando r aumenta t aumenta).

Una vez que hemos calculado las geodésicas de la luz podemos entender mejor qué sucede. Supongamos un observador que está cayendo hacia r_s . Ahora mismo, desconocemos si será capaz o no de cruzar r_s . A pesar de esto supongamos que, efectivamente, un observador puede, en un tiempo finito, llegar a cruzar r_s y analicemos con las geodésicas tipo luz que acabamos de calcular qué es lo que ve un observador asintótico.

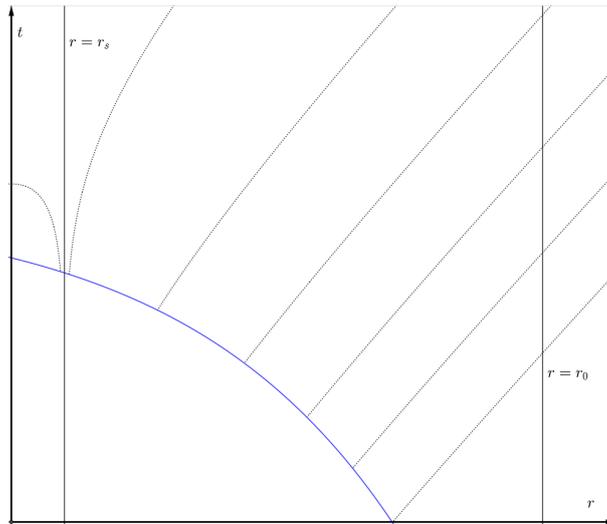


Figura 1: En azul una trayectoria ficticia de un observador cayendo a un agujero negro. En gris punteado las geodésicas de la luz emitida a intervalos regulares.

Observamos en la figura 1 cómo aún en el supuesto de que el observador en caída consiguiese cruzar r_s , el observador asintótico no le vería llegar nunca a r_s pues los rayos de luz que salen del observador en caída llegan cada vez más y más tarde. Entre r_s y un observador asintótico hay una dilatación temporal infinita, por lo que si tratamos de usar su tiempo t es normal que parezca que un observador no puede cruzar r_s . De igual modo que si usásemos en un espacio plano como coordenada $\tilde{r} = \frac{1}{1-r}$, podemos describir a la perfección los puntos con $r > 1$ y con $r < 1$, pero pensaríamos que sucede algo raro en $r = 1$ cuando la realidad es que el espacio en $r = 1$ es exactamente idéntico a cualquier otro punto.

Por tanto, para analizar r_s necesitamos unas coordenadas mejores. Estas son las de Eddington-Finkelstein, que consisten en cambiar la variable t por ν y dejar el resto de coordenadas inalteradas. El cambio de t a ν es el siguiente

$$\nu = t + r_s \ln \left(\left| \frac{r - r_s}{r_s} \right| \right) + r \iff t = \nu - r_s \ln \left(\left| \frac{r - r_s}{r_s} \right| \right) - r. \quad (30)$$

En estas nuevas coordenadas la métrica toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) d\nu^2 + 2d\nu dr + r^2 d\Omega^2. \quad (31)$$

Como se puede observar en la expresión de la métrica, con esta nueva coordenada temporal eliminamos la singularidad en r_s . Con estas nuevas coordenadas, las geodésicas para la luz que entra en el agujero negro se convierte en

$$\nu - r_s \ln \left(\left| \frac{r - r_s}{r_s} \right| \right) - r = -r - r_s \ln \left(\left| \frac{r - r_s}{r_s} \right| \right) + k \implies \nu = +k. \quad (32)$$

El cambio de coordenadas cancela el término divergente en las coordenadas de Schwarzschild y nos permite ver que la luz que se dirige hacia la masa central efectivamente atraviesa r_s sin problema. Sin embargo, para la luz que trata de salir de la zona $r < r_s$ tenemos que tomar la solución con signo $+$ y resulta que en estas nuevas coordenadas la parte singular no solo no se cancela sino que aumenta

$$\nu = +2 \left[r + r_s \ln \left(\left| \frac{r - r_s}{r_s} \right| \right) \right] + k. \quad (33)$$

Vemos entonces que la luz no puede salir de la zona $r < r_s$. Como cualquier observador tiene su línea de tiempo contenida en un cono de luz centrado en él, si la luz no puede escapar de $r < r_s$ los observadores tampoco.

Estos efectos que acabamos de analizar se deben al hecho de que la hipersuperficie $r = r_s$ es una hipersuperficie nula. Esto significa que el vector normal a la hipersuperficie, en este caso ∂_r , es nulo. Un ejemplo de hipersuperficie nula en un espacio plano son los conos de luz. Con ellos sucede lo mismo que con la hipersuperficie $r = r_s$, un observador puede entrar en un cono de luz pero, una vez esté dentro, no puede salir de él pues necesitaría superar la velocidad de la luz.

La diferencia sustancial entre el caso de la hipersuperficie $r = r_s$ y los conos de luz, es que los conos de luz contienen a cualquier punto del espacio para un t suficientemente grande mientras que $r = r_s$ contiene los mismos puntos de coordenadas espaciales para cualquier instante de tiempo. Es por esto que se le llama horizonte de eventos. Una vez un observador lo ha cruzado nunca podrá acceder a ningún evento con coordenada espacial $r > r_s$.

Este análisis detallado que hemos hecho para la solución de Schwarzschild nos sirve de modelo para el resto de soluciones que vamos a estudiar, donde calcularemos los horizontes de los agujeros

negros como hipersuperficies nulas acotadas espacialmente. En todos los casos que vamos a tratar la condición de que la hipersuperficie sea nula se puede enunciar de dos maneras equivalentes, una es que $g_{rr} = \infty$ y la otra es que $g^{rr} = 0$. Normalmente trabajaremos con la condición $g^{rr} = 0$ porque es una ecuación en el sentido usual mientras que la condición $g_{rr} = \infty$ debe entenderse como un límite y es más delicada de manejar. Pudiera parecer que calcular g^{rr} es problemático pues requiere invertir la métrica, sin embargo, en las métricas con las que vamos a trabajar vamos a poder obtener g^{rr} con facilidad. El caso del agujero negro de Schwarzschild es particular porque la hipersuperficie $g^{rr} = \infty$ coincide con $g_{tt} = 0$. Veremos que en otros agujeros negros estas condiciones están separadas y las implicaciones que esto tiene.

Si somos matemáticamente rigurosos, lo que se comenta en los párrafos anteriores no es una definición correcta. La definición de horizonte de eventos requiere un tratamiento matemático más sofisticado. Primero hay que definir una serie de regiones del espacio, infinito espacial, temporal y nulo, en términos de los cuales se da la definición de lo que es un horizonte de eventos. A pesar de que la justificación no sea la más rigurosa, siempre que aseguremos que algo es el horizonte de eventos de un agujero negro realmente lo será y en la bibliografía se pueden encontrar los artículos que prueban esto con todo el rigor.

Aunque no vamos a estudiarlas en profundidad, conviene mencionar que el estudio de la extensión analítica maximal del espacio tiempo de Schwarzschild, así como la de las demás soluciones que vamos a considerar es un tema fascinante que da lugar a unas estructuras espacio temporales que parecen sacadas de una novela de ciencia ficción. Resulta increíble cómo de la ecuación de Einstein pueden emanar conceptos tan bellos y tan alejados de la idea original de la teoría. Por supuesto todo lo que sucede mas allá de r_s es matemáticamente correcto pero físicamente carecemos de evidencias que lo respalden, de hecho ni siquiera sabemos si las ecuaciones de Einstein son válidas a partir de r_s .

En el caso de Schwarzschild, la extensión maximal consiste en dos regiones asintóticamente planas, donde la métrica es la de Schwarzschild con $r > r_s$, conectadas por la región interior un agujero negro y un agujero blanco cuya métrica es la de Schwarzschild con $r < r_s$. El agujero negro atrae toda la materia que a él llega mientras que el agujero blanco la expulsa.

No disponemos en esta trabajo de espacio para estudiar con el detalle que merece la dinámica de las soluciones, nos limitaremos por tanto a un breve comentario. Se puede hacer un análisis bastante detallado de la dinámica tanto de partículas como de luz en la métrica de Schwarzschild. Esto se debe a que debido a sus simetrías él posee 4 magnitudes conservadas. Correspondientes a la simetría de rotación espacial y traslación temporal. Estas 4 cantidades conservadas que hacen que las ecuaciones para las geodésicas en este espacio sean integrables, es decir se pueden escribir en términos de cuadraturas, lo que aparte de ser relevante a nivel teórico, hace que sean susceptibles de ser calculadas numéricamente con facilidad.

3.2. Métrica de Kerr

La métrica de Schwarzschild estudiada en el capítulo anterior, aunque proporciona una excelente primera aproximación al espacio tiempo producido por un objeto astrofísico esférico, falla en un punto clave, el objeto no está rotando. Todos los objetos que conocemos en el universo tienen, en mayor o menor medida, algún tipo de rotación. Es por esto que la métrica que más se adecúa a la realidad de estos objetos es la métrica de Kerr, que describe el espacio tiempo generado por un objeto con simetría axial que gira en torno a su eje de simetría. Esta métrica exhibe con claridad una de las características más fundamentales de la Relatividad General, “ todo gravita”. Si nos fijamos en la gravitación Newtoniana, un cuerpo en rotación produce exactamente el mismo campo gravitatorio que uno estático, la gravedad de Newton solo entiende de masa. En la Relatividad Especial,

por otro lado, cualquier forma de energía que nos podamos imaginar, energía electromagnética, momento lineal, momento angular, masa,... todo tiene asociado un tensor energía momento y por tanto contribuye a la curvatura del espacio tiempo.

La métrica de Kerr fue descubierta por Roy Kerr en 1963. Kerr fue capaz de llegar a esta solución debido a que pertenece a un tipo particular de soluciones llamadas soluciones algebraicamente especiales. En [9] el propio Kerr explica cómo había desistido en la búsqueda de una solución para un agujero negro con momento angular debido la existencia de un teorema que afirmaba que, dentro del tipo de soluciones que Kerr estaba considerando, la única con momento angular era el espacio Taub-NUT. Este resultado le chirrió mucho a Kerr, que llevaba tiempo trabajando con este tipo de espacios. Finalmente, cuando se pudo hacer con una copia del artículo comprobó que efectivamente la demostración contenía algunas erratas que invalidaban la prueba. Tras esto retomó su búsqueda y finalmente dio con la solución que describe un agujero negro en rotación.

Las coordenadas en las que la métrica de Kerr adopta un aspecto más similar a la métrica de Schwarzschild son las de Boyer-Lindquist [2], en las que toma la forma

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) dt^2 - \left(\frac{4Mar \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) dt d\varphi + \left(\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2M + a^2}\right) dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (34)$$

donde tanto a como M son constantes. Esta es la forma de la métrica sin simplificar y rara vez se suele escribir de este manera, lo más habitual es introducir las magnitudes

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (35)$$

Con estas magnitudes la métrica toma la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \left(\frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (36)$$

En primer lugar, debemos identificar qué papel juegan las constantes a y M . Es aquí donde entra la solución que calculamos en el límite de campo débil. El límite de campo débil de la métrica de Kerr se obtiene haciendo $r \gg a$ y $r \gg M$ bajo estas hipótesis se tiene

$$\Sigma \simeq r^2 \quad \Delta \simeq r^2. \quad (37)$$

Por tanto la métrica toma la forma

$$ds^2 \simeq -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(\frac{4Ma \sin^2 \theta}{r}\right) dt d\varphi + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (38)$$

Vamos a ver cuál es el significado de las constantes a y M que aparecen en la métrica. Para ello, comparamos con los coeficientes h_{tt} y $h_{t\varphi_a}$ que calculamos en el capítulo 2. El coeficiente h_{tt} para dimensión $d = 3$ es

$$h_{tt} = h_{00} = \frac{16\pi M}{(d-1)\Omega_{d-1} r^{d-2}} = \frac{16\pi M}{2(4\pi)r} = \frac{2M}{r} \quad (39)$$

que es exactamente lo que se desvía nuestra métrica de la de Minkowski por lo que, como era de esperar, la M que aparece en nuestra métrica es la masa del agujero negro.

Para hallar a vamos a comparar con el coeficiente $h_{t\varphi_i}$ del capítulo 2. En este caso, como estamos en dimensión 3 solo hay un plano de rotación con momento angular $L_1 = L$, por lo que el coeficiente del límite de campo débil es

$$h_{t\varphi_1} = -\frac{8\pi L_1 \beta_1}{\Omega_{d-1} r^{d-2}} = -\frac{2L \text{sen}^2 \theta}{r}. \quad (40)$$

En nuestra métrica el coeficiente que acompaña a $dt d\varphi$ es $2g_{t\varphi}$. Además, la métrica de Minkowski no tiene término no diagonal, por lo que el término $g_{t\varphi}$ se corresponde íntegramente a la perturbación $h_{t\varphi}$ nuestra ecuación es entonces

$$-\frac{4L \text{sen}^2 \theta}{r} = \frac{4Ma \text{sen}^2 \theta}{r} \quad (41)$$

$$a = \frac{L}{M}. \quad (42)$$

Por tanto, el parámetro a nos da el momento angular por unidad de masa. Si la métrica de Kerr se corresponde con un agujero negro en rotación esperaríamos recuperar la métrica de Schwarzschild en el límite $a = 0$. Efectivamente esto sucede. Si hacemos $a = 0$ el término no diagonal de la métrica se anula, la parte angular se vuelve $d\Omega^2$ y como $\Sigma = r^2$ y $\Delta = r(r - 2M)$, tanto la parte temporal como la radial coinciden con la de Schwarzschild.

Para intentar entender mejor las coordenadas de la métrica de Kerr, vamos a estudiar el límite en el que $M \rightarrow 0$ y $L \rightarrow 0$ pero manteniendo a constante. En ese límite la métrica debería corresponderse con la de Minkowski en algunas coordenadas, lo que se obtiene es

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{\Sigma}{r^2 + a^2} \right) dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \text{sen}^2 \theta d\varphi^2. \quad (43)$$

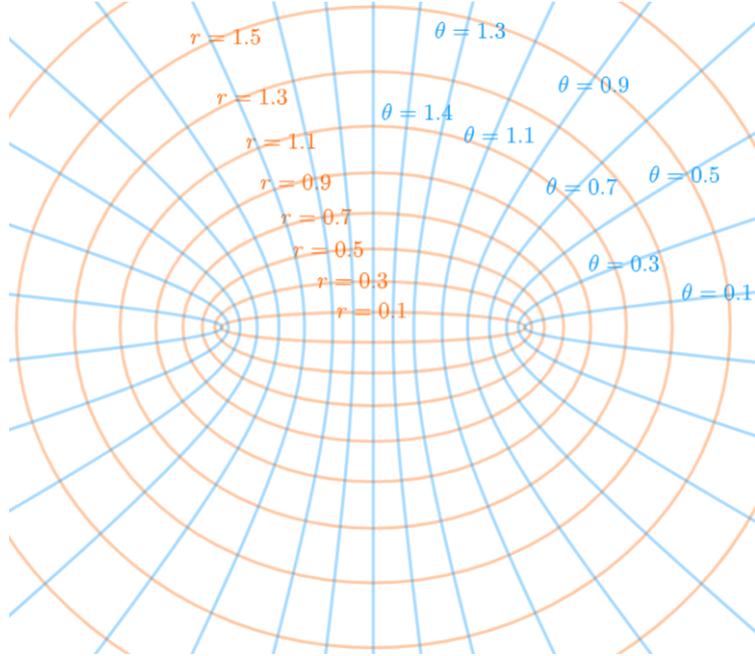


Figura 2: Superficies de r constante (naranja) y θ constante (azul) de las coordenadas para $a = 5$

Aunque no es un sistema de coordenadas habitual, esta métrica se corresponde a las coordenadas esferoidales oblatas. Para entender bien la solución de Kerr conviene entender bien el sistema de coordenadas en el que vamos a trabajar. Estas coordenadas se corresponden al cambio de variable

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta. \quad (44)$$

Por tanto, r no se corresponde con la distancia al origen de coordenadas. Esta distancia es en realidad $\sqrt{r^2 + a^2}$. Los puntos con $r = 0$ se corresponden de hecho a un disco de radio a situado en el plano $z = 0$. Como se puede ver en la figura 2, los esferoides oblatos que se usan como hipersuperficies coordenadas se obtienen rotando en torno al eje z elipses en el plano $z = 0$. Estas elipses tienen sus focos situados en $\pm a$. Por último es interesante remarcar el hecho de que cuando $r \gg a$ se recuperan las coordenadas esféricas habituales, pues $\sqrt{r^2 + a^2} \simeq r$.

Una vez entendidas las coordenadas, continuamos con el análisis de la métrica de Kerr. Si nos fijamos en la expresión de la métrica, tenemos por una lado que si $R^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$ entonces g_{tt} , $g_{t\varphi}$ y $g_{\varphi\varphi}$ divergen y por otro lado que g_{rr} diverge cuando $r^2 - 2M + a^2 = 0$. Si calculamos el invariante de Kretschmann

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6} [(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta] \quad (45)$$

este diverge en $(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) = 0$. Por tanto esa singularidad es una singularidad real del espacio tiempo de Kerr y no es fruto de nuestras coordenadas. Como ya sabemos, la divergencia de g_{rr} cuando $r^2 - 2M + a^2 = 0$ no es debido a que el espacio tiempo sea singular sino a que la hipersuperficie que esa ecuación define es un horizonte de eventos. Vamos por tanto a estudiar a singularidad en $(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)$. En estas coordenadas la única manera de que este término se anule es que $r = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ya vimos que $r = 0$ se corresponde con un disco de radio a en el plano $z = 0$. De hecho, si miramos a los valores de x, y, z para $r = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$x = a \cos \varphi \quad y = a \sin \varphi \quad z = 0. \quad (46)$$

Es inmediato ver que se corresponde con un anillo en el plano $z = 0$ de radio a centrado en el origen. Esto supone una primera gran diferencia con el agujero negro de Schwarzschild, donde la singularidad estaba localizada en un único punto del espacio. El hecho de que la singularidad sea un anillo tiene importantes implicaciones para la extensión analítica maximal de la solución de Kerr. Siguiendo una trayectoria que entre otras cosas implica cruzar el anillo de la singularidad, en la extensión maximal de Kerr, se puede acceder a infinitas regiones asintóticamente planas.

El hecho de que el agujero negro de Kerr esté en rotación, hace que la métrica de Kerr también lo esté, el espacio tiempo alrededor del agujero negro está girando. Si nos acercamos lo suficiente llegará un punto donde, por mucho que lo intentemos, no vamos a ser capaces de contrarrestar el giro del espacio tiempo y, ni moviéndonos a la velocidad de la luz, podríamos mantenernos sin rotación. A este efecto se le conoce como “frame dragging” o arrastre de los sistemas de referencia.

Para cuantificar este efecto, como casi siempre que se trata la dinámica en física, conviene acudir a las constantes del movimiento. En nuestro caso la métrica de Kerr dispone de dos vectores de Killing que se pueden encontrar por inspección directa. Como la métrica no depende de t , el agujero negro es estacionario y ∂_t es un vector de Killing y como no depende de φ es axialmente simétrico y ∂_φ es un vector de Killing.

Estos vectores de Killing nos van a dar dos magnitudes conservadas a lo largo de las trayectorias. Si llamamos \mathbf{u} a la velocidad de la partícula las cantidades conservadas son

$$u^t g_{tt} + u^\varphi g_{t\varphi} = E \quad u^\varphi g_{\varphi\varphi} + u^t g_{t\varphi} = L_z. \quad (47)$$

Como es costumbre, a la cantidad conservada asociada a la simetría bajo desplazamiento temporal la hemos llamado energía y a la cantidad conservada bajo la rotación del eje φ componente z del momento angular.

Vamos a estudiar en primer lugar cómo es el momento angular de una partícula que se encuentra estática, es decir, sus coordenadas (r, θ, φ) son constantes. La velocidad de esta partícula solo tiene por tanto componente u_t , que debe cumplir para ser la velocidad de una partícula que

$$g_{tt} u^t u^t = -1 \implies u^t = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}}. \quad (48)$$

Por tanto, el momento angular de un observador que está estático es

$$L_z = u^\varphi g_{\varphi\varphi} + u^t g_{t\varphi} = \frac{g_{t\varphi}}{\sqrt{-g_{tt}}} \quad (49)$$

que es no nulo. Un observador que está completamente estático tiene un momento angular distinto de 0. Esto es debido al “frame dragging”, el propio espacio tiempo en el que el observador se mueve está rotando, de manera que un observador cuyas coordenadas están fijas no tiene momento angular 0 sino que es arrastrado por la geometría del espacio tiempo. De igual manera, un observador para tener $L_z = 0$ debe cumplir

$$u^\varphi g_{\varphi\varphi} = -u^t g_{t\varphi} \quad (50)$$

lo que da una velocidad angular con respecto a un observador asintótico de

$$\omega = \frac{u^\varphi}{u^t} = \frac{-g_{t\varphi}}{g_{tt}}. \quad (51)$$

Es decir tiene que girar en dirección contraria al arrastre para tener un momento angular nulo.

Vamos a estudiar este efecto en profundidad. Para ello, vamos a calcular qué velocidades angulares son posibles. Supongamos una partícula que mantiene sus coordenadas (r, θ) constantes. Desde su punto de vista, el espacio tiempo a su alrededor no cambia pues la métrica no depende de t ni de φ , las únicas coordenadas respecto a las cuales se desplaza. En ese sentido podríamos decir que realiza un movimiento estacionario. Llamemos \mathbf{u} a la velocidad de esta partícula y supongamos que gira en torno al agujero negro con un velocidad angular ω con respecto a un observador en el infinito. Es decir, que $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \omega$ entonces la velocidad de la partícula cumple que

$$\omega = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{u^\varphi}{u^t}. \quad (52)$$

Por tanto, la velocidad de este observador será

$$(u^t, 0, 0, \omega u^t) \quad (53)$$

Para que esta velocidad pueda ser una velocidad real de una partícula o rayo de luz, debe ser un vector de tipo tiempo o nulo, es decir,

$$u^\mu g_{\mu\nu} u^\nu \leq 0 \quad (54)$$

$$(u^t)^2 g_{tt} + 2u^t u^\varphi g_{t\varphi} + (u^\varphi)^2 g_{\varphi\varphi} \leq 0 \quad (55)$$

$$(u^t)^2(g_{tt} + 2\omega g_{t\varphi} + \omega^2 g_{\varphi\varphi}) \leq 0. \quad (56)$$

Resolviendo esa desigualdad se obtienen los posibles valores de la velocidad angular de un observador estacionario

$$-\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} - \sqrt{\left(\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}} = \Omega_- < \omega < \Omega_+ < -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} + \sqrt{\left(\frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}}. \quad (57)$$

Se deduce de aquí que mientras $\Omega_- < 0 < \Omega_+$ un observador puede mantenerse estático pues $\omega = 0$ es uno de los valores permitidos de su velocidad angular. Sin embargo, si se da el caso de que $0 < \Omega_-$ un observador ya no se podrá mantener estático pues todas las posibles velocidades angulares son positivas. En este caso el agujero negro arrastra el espacio tiempo tan fuertemente a su alrededor que, por muy rápido que nos movamos en dirección contraria no seremos capaces de sobreponernos a él. Para que Ω_- sea positivo la condición que se debe cumplir es

$$g_{tt} > 0. \quad (58)$$

A esta región del espacio donde no existen observadores estáticos se la conoce como ergoregion y a su límite como ergosefera, aunque como veremos no tiene forma esférica. El razonamiento que acabamos de hacer no depende para nada de que la métrica sea la de Kerr, sino que es válido para cualquier métrica con simetría axial y estacionaria, es decir, cualquier métrica que tenga ∂_t y ∂_φ como vectores de Killing. Usaremos este hecho para el resto de métricas axiales que analizaremos sin más explicaciones.

Con toda lo aprendido del análisis del horizonte de eventos en la métrica de Schwarzschild y de la ergosfera, estamos en condiciones de analizar la estructura de la métrica de Kerr.

Para hallar el horizonte de eventos tenemos que encontrar la hipersuperficie $g^{rr} = 0$. En contra de lo que pudiera parecer no hace falta invertir la métrica entera. Las métricas axialmente simétricas tienen dos bloques, el correspondiente a (t, φ) y el correspondiente a (r, θ) . Este último es diagonal por lo que para invertirlo basta con invertir cada uno de los elementos. De esta manera, el horizonte de eventos de la métrica de Kerr es la hipersuperficie

$$g^{rr} = \frac{r^2 - 2M + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} = 0 \quad (59)$$

$$R_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (60)$$

Observamos que, a diferencia del caso de Schwarzschild, esta ecuación tiene dos soluciones, la externa R_+ y la interna R_- . Esto significa que la coordenada r pasa de ser espacial a temporal al cruzar R_+ , lo que obliga a las partículas a continuar avanzando hasta cruzar R_- , donde la coordenada r vuelve a ser espacial y las partículas se pueden volver a mover libremente. Al poder moverse libremente, las partículas podrían volver a cruzar R_- , sin embargo, en lugar de regresar a la región del espacio tiempo de la que provenían llegarían a otra zona asintóticamente plana diferente donde el agujero negro actuaría de agujero blanco. La explicación detalla de esto requeriría del uso de la extensión maximal por lo que lo comentamos a título de curiosidad.

La ergosfera por su parte se corresponde con la hipersuperficie de ecuación

$$g_{tt} = -\left(\frac{r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) = 0 \quad (61)$$

$$S_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (62)$$

También tenemos dos ergosferas, una interior y una exterior. Como se puede ver en esa ecuación, la ergoesfera no es una esfera debido al factor $a^2 \cos^2(\theta)$. El efecto de este factor hace que, para $a \ll M$ la hipersuperficie tiene forma de esferoide oblató achatado por los polos del agujero y, para $a \sim M$, tiene la forma de un glóbulo rojo. Observando las expresiones vemos que R_{\pm} toca a S_{\pm} en los polos pero que, para cualquier otro valor de θ , se tiene

$$S_- \leq R_- \leq R_+ \leq S_+. \quad (63)$$

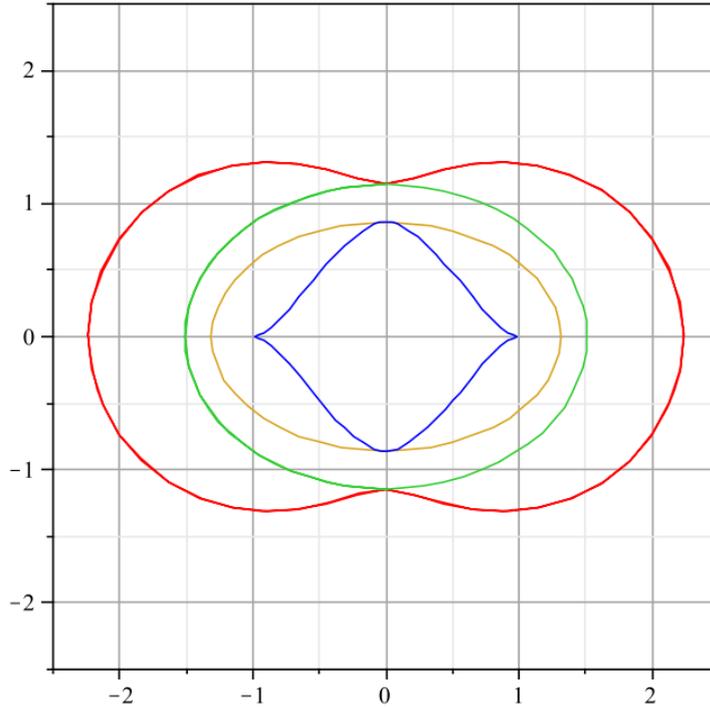


Figura 3: Sección transversal de las hipersuperficies del agujero negro de Kerr [13]

Cuando $M < a$, la ecuación que define el horizonte de eventos no tiene solución y estaríamos ante una singularidad desnuda. Sin embargo, el hecho de que la materia no se pueda mover más rápido que la luz impide que $M < a$, por lo que en principio no tenemos que preocuparnos.

Como ya comentamos la dinámica de las partículas en la métrica de Schwarzschild era integrable debido a la alta simetría de la solución. Claramente este no es el caso para la métrica de Kerr que solo posee como vectores de Killing ∂_t , ∂_φ que nos proporciona dos cantidades conservadas. El módulo de la velocidad nos proporciona una tercera magnitud conservada, pero sin una cuarta las geodésicas no son integrables. Afortunadamente en [3] el físico Carter Brandon prueba que la ecuación de Hamilton-Jacobi para las geodésicas de la métrica de Kerr es separable encontrando así una cuarta constante del movimiento que permite que la dinámica de las partículas en la métrica de Kerr también sea integrable. Esta constante recibe el nombre de constante de Carter, más adelante se descubrió que el motivo de la existencia de esta constante es que la métrica de Kerr posee un tensor de Killing que es una generalización de los vectores de Killing y que también implica la existencia de una cantidad conservada.

3.3. Teoremas

Con el objetivo de ver cómo se comportan en dimensiones superiores, nos disponemos ahora a presentar sin demostración los principales teoremas y conjeturas que hay con respecto a las soluciones de las ecuaciones de Einstein en dimensión $3 + 1$. Cabe destacar que los teoremas, tal y como los vamos a enunciar aquí, no son teoremas matemáticos rigurosos pues vamos a obviar todas las hipótesis técnicas y nos vamos a quedar exclusivamente con las nociones que tengan interés físico. Como veremos, algunos de estos teoremas siguen siendo ciertos en dimensión $d + 1$ mientras que otros fallan catastróficamente.

Teorema de Birkhoff: Si una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío tiene simetría esférica entonces es estática y asintóticamente plana, y por tanto es la de Schwarzschild.

Teorema de Israel: Si una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío es estática y asintóticamente plana entonces tiene simetría esférica, y por tanto es la de Schwarzschild.

Estos dos teoremas juntos nos dicen que la única solución con simetría esférica que existe es la de Schwarzschild. Una de las implicaciones físicas de este teorema es que si, debido a cualquier proceso, una estrella aumenta o disminuye su radio de una forma completamente arbitraria, siempre que no se rompa la simetría esférica, el campo que produce no varía, en particular, no puede emitir ondas gravitacionales.

Unicidad de la solución de Kerr: El único agujero negro con simetría axial, estacionario y con topología esférica es el de Kerr.

Este teorema nos dice que, bajo unas condiciones bastante razonables, el único agujero negro con rotación es el de Kerr.

Conjetura de los agujeros negros sin pelo: La métrica de un agujero negro estacionario está determinada exclusivamente por su masa M , momento angular J y carga eléctrica Q .

Este teorema no está probado aunque se cree que es cierto. La idea detrás de este teorema es la de agrupar todos los teoremas de unicidad de las soluciones en uno solo. Si este teorema fuese cierto, los únicos agujeros negros estacionarios posibles serían los de Schwarzschild y Kerr y sus versiones con carga. Una de las hipótesis más difíciles de eliminar para este teorema es la de que la topología del horizonte es \mathbb{S}^2 . Esto es debido a que todos los teoremas de unicidad de soluciones probados hasta la fecha la requieren. A pesar de la dificultad de eliminar esta hipótesis, el hecho de que hasta la fecha no se haya encontrado ninguna solución en dimensión $3 + 1$ cuyo horizonte no tenga topología esférica hace indicar que este es único tipo de horizonte posible.

4. Dimensión $D+1$

Estudiadas en detalle las soluciones más relevantes en $3 + 1$ dimensiones, estamos en condiciones de analizar algunas soluciones en dimensión $d + 1$.

La primera solución que podemos obtener en dimensión $d + 1$ basándonos en las soluciones en $3 + 1$ consiste en añadir a esta solución una dimensión sin ningún tipo de curvatura. Aunque no podemos visualizar este espacio, una buena manera de pensar en él es como una “black string” o cuerda negra. Esto es debido a que el horizonte de eventos de esta solución es exactamente el horizonte de eventos de la solución en $3 + 1$ pero extendido a lo largo de la dimensión que hemos añadido. Al igual que hemos hecho esto con una dimensión, podemos añadir tantas dimensiones planas como queramos. Una solución de un agujero negro a la que se le han añadido p dimensiones planas se llama p -brana. Aunque son muy importantes en algunas teorías, nosotros solo las usaremos como

un primer acercamiento a las soluciones en dimensiones superiores y porque nos va a ser de utilidad como límite asintótico de algunas soluciones.

La métrica de una cuerda negra a la que le hemos añadido una dimensión extra z plana es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 + dz^2. \quad (64)$$

Podemos ahora considerar la métrica vista para un observador que se desplaza con una cierta velocidad en la coordenada z . Nótese que el principio de equivalencia nos dice que no podemos distinguir si es el observador o la cuerda la que se mueve. Para obtener la métrica vista por el observador que se mueve hay que realizar el cambio de coordenadas dado por un “boost” Lorentz es decir

$$\tilde{t} = \cosh \sigma t - \sinh \sigma z \quad \tilde{z} = -\sinh \sigma t + \cosh \sigma z \quad (65)$$

con cambio inverso

$$t = \cosh \sigma \tilde{t} + \sinh \sigma \tilde{z} \quad z = -\sinh \sigma \tilde{t} + \cosh \sigma \tilde{z}. \quad (66)$$

Al ser este cambio lineal la misma relación que existe entre las variables existirá entre los diferenciales de estas, además como afortunadamente ni z ni t aparecen en los coeficiente de la métrica para escribir la métrica vista por el observador basta con sustituir

$$dt = \cosh \sigma d\tilde{t} + \sinh \sigma d\tilde{z} \quad dz = -\sinh \sigma d\tilde{t} + \cosh \sigma d\tilde{z}. \quad (67)$$

Si definimos las magnitudes

$$f = 1 - \frac{r_0}{r} \quad \hat{f} = 1 - \frac{r_0 \cosh^2 \sigma}{r}. \quad (68)$$

La métrica de la cuerda negra que se desplaza con respecto al observador se puede escribir como

$$ds^2 = -\hat{f} \left(dt + \frac{r_0}{r\hat{f}} \sinh \sigma \cosh \sigma dz \right)^2 + \frac{f}{\hat{f}} dz^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 (d\theta + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (69)$$

Esta métrica, aunque describe exactamente el mismo espacio que la cuerda negra solo que visto por otro observador nos va a servir para interpretar otra de las soluciones que vamos a estudiar más tarde.

4.1. Swarchild-Tangherlini

La primera solución no trivial que existe en $d + 1$ dimensiones es la solución de Tangherlini. Esta solución es lo que podríamos llamar solución de Schwarzschild en dimensión $d + 1$, pues la métrica describe un agujero negro estático y con simetría esférica. Esta solución fue obtenida por Tangherlini en [12] donde estudia cómo se comportan distintos sistemas físicos al aumentar sus dimensiones y qué se puede aprender de ellos. En ese artículo Tangherlini, aparte de generalizar la solución de Swarchild, también resuelve el átomo de hidrógeno en n dimensiones.

El método usado por Tangherlini en su artículo es el mismo que se usa para obtener la solución de Schwarzschild. Se supone una métrica de la forma

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} (dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2) \quad (70)$$

a partir de ahí imponiendo las condiciones de que $R_{\mu\nu} = 0$, que la solución sea asintóticamente plana y que coincida con la solución para el límite de campo débil se obtiene la métrica.

La métrica de Tangherlini en coordenadas esféricas en d dimensiones es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\mu}{r^{d-2}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\mu}{r^{d-2}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2. \quad (71)$$

Para obtener qué relación guarda μ con los parámetros físicos acudimos de nuevo al límite de campo débil. Comparando g_{tt} con $-1 + h_{tt}$ se obtiene la ecuación

$$\frac{\mu}{r^{d-2}} = \frac{16\pi M}{(d-1)\Omega_{d-1}r^{d-2}} \implies \mu = \frac{16\pi M}{(d-1)\Omega_{d-1}} \quad (72)$$

es decir, μ da cuenta de la masa del agujero negro escalada por un factor que depende de la dimensión. Además, haciendo $r \rightarrow \infty$ se ve claramente que la métrica es plana pues esta se reduce a la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas en dimensión $d + 1$.

Para hallar el horizonte de eventos resolvemos $g^{rr} = 0$. Se obtiene así que el horizonte de eventos se encuentra a

$$r_H = \mu^{(2-d)}. \quad (73)$$

A nivel geométrico este agujero negro no esconde ninguna característica que no hayamos estudiado en el de Schwarzschild, sin embargo, sí que lo hace a nivel dinámico. Como cabría esperar debido a la alta simetría de la solución, la dinámica de las partículas es integrable. Lo curioso es que para la métrica de Tangherlini solo existen orbitas acotadas estables si $d = 3$, es decir, para la de Schwarzschild. Para $d > 3$ todas las orbitas son inestables, esto es análogo a lo que sucede con el problema de Kepler en gravedad newtoniana que solo tiene orbitas estables en dimensión 3 o equivalentemente para potenciales de la forma $\frac{1}{r}$.

4.2. Myers-Perry

La cuerda negra y la solución de Tangherlini nos han introducido a las soluciones en dimensión $d + 1$, a pesar de esto, no presentan muchas diferencias con las soluciones en dimensión $3 + 1$. La primera que tiene grandes diferencias con las soluciones en dimensión $3 + 1$ es la solución de Myers-Perry.

Esta solución fue hallada durante su tesis por Robert C. Myers y su supervisor Malcom Perry [10]. Esta solución es el equivalente a la solución de Kerr en dimensión $d + 1$. Al igual que la solución de Kerr, la solución de Myers-Perry pudo ser encontrada gracias a que pertenece a un tipo especial de soluciones en las que la métrica tiene una forma muy particular, estas soluciones se llaman métricas de Kerr-Schild.

La métrica de Myers-Perry describe un agujero negro con rotación, pero aquí es donde empiezan las diferencias con el caso $3 + 1$. Como vimos cuando estudiamos el límite de campo débil, en dimensión arbitraria no hay una única componente momento angular relevante sino que hay $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ momentos angulares que nos interesan para describir la rotación de nuestra solución, uno por cada plano ortogonal del espacio. La solución de Myers-Perry describe por tanto, un agujero negro en rotación con un momento angular arbitrario L_i donde i , al igual que en el capítulo 2, es la etiqueta que numera los planos ortogonales de rotación.

4.2.1. Kerr D+1

Vamos a comenzar por estudiar la solución de Myers-Perry, que se correspondería más estrictamente al caso de Kerr en $d + 1$, es decir, vamos a estudiar el caso en el que $L_1 = L$ y $L_i = 0$ para todo $i \neq 1$. Aquí comenzamos a ver cómo trabajar en dimensiones superiores nos permite diferenciar conceptos que estaban solapados en dimensión 3. Estudiando la solución de Myers-Perry general y la solución de Myers-Perry con simetría axial vamos a poder distinguir qué cualidades de la solución de Kerr se deben a que tiene simetría axial y cuáles a que describe un agujero negro con la rotación más general posible.

La métrica de la solución de Myers-Perry con simetría axial es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\mu}{r^{d-4}\Sigma}\right)dt^2 - \left(\frac{2\mu a \sin^2 \theta}{r^{d-4}\Sigma}\right)dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(\frac{\mu a^2 \sin^4 \theta}{r^{d-4}} + r^2 \sin^2 \theta\right) + a^2 \sin^2 \theta d\varphi + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_{(d-3)}^2 \quad (74)$$

donde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ y $\Delta = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^{d-4}}$ y las coordenadas son las esferoidales oblatas a las que se les ha añadido el número necesario de ángulos de rotación, es decir, es un esferoide que solo está deformado en uno de sus ejes. De este modo, la interpretación de las coordenadas t, r, θ, φ no se ve alterada respecto a las que conocíamos, solo que ahora estos puntos pueden girar libremente en el resto de ángulos.

Al igual que siempre, para hallar el significado de las constantes a y μ tenemos que estudiar el límite de campo débil. Es decir $r \gg a$ y $r \gg \mu$. En este límite se tiene

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{\mu}{r^{d-2}}\right) \quad g_{t\varphi} = -\frac{\mu a \sin^2 \theta}{r^{d-2}}. \quad (75)$$

Comparando con g_{tt} y $g_{t\varphi}$, del límite de campo débil se obtiene, al igual que para la solución de Tangherlini que

$$\mu = \frac{16\pi M}{(d-1)\Omega_{d-1}}. \quad (76)$$

Una vez sabemos eso la ecuación para $g_{t\varphi}$ nos dice

$$-\frac{\mu a \sin^2 \theta}{r^{d-2}} = -\frac{16\pi M a \sin^2 \theta}{(d-1)\Omega_{d-1} r^{d-2}} = -\frac{8\pi L_1 \beta_1^2}{\Omega_{d-1} r^{d-2}}. \quad (77)$$

En nuestro caso β_1 , que es la proyección de r en el plano (x_1, x_2) , no es otra cosa que $\sin \theta$ por lo que

$$a = \frac{(d-1)L_1}{2M}. \quad (78)$$

Teniendo la métrica y el significado de las constantes podemos observar cómo, si hacemos $d = 3$, recuperamos la métrica de Kerr, lo cual es de esperar si la solución de Myers Perry es una generalización de la de Kerr. Podemos lanzarnos ahora a hallar el horizonte de eventos y la ergoesfera de esta solución.

El horizonte de eventos es la hipersuperficie $g^{rr} = 0$. Al igual que sucedía con la métrica de Kerr $g^{rr} = g_{rr}^{-1}$ por tanto, el horizonte es la hipersuperficie

$$\Delta = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^{d-4}} = 0. \quad (79)$$

Vamos a analizar cómo se comporta esta ecuación en función de la dimensión d .

Para $d = 3$ es el caso conocido de Kerr. Si $a \leq M$ existe un horizonte de eventos mientras que si $a > M$ este horizonte de eventos desaparece y estamos ante una singularidad desnuda, aunque como vimos esto no parece ser alcanzable físicamente ni siquiera a nivel teórico.

Para $d = 4$ la ecuación se convierte en $r^2 + a^2 - \mu = 0$ de manera que tiene un comportamiento muy similar al caso $d = 3$. Si $a^2 - \mu < 0$, existe un horizonte, la principal diferencia con $d = 3$ es que el caso límite $a^2 - \mu = 0$ tiene solución pero la solución es $r = 0$ por lo que el horizonte de eventos se encuentra exactamente en la singularidad y estaríamos ante una singularidad desnuda.

Finalmente, para $d > 4$ las singularidades desnudas desaparecen debido al cambio de comportamiento de r^{d-4} . Para r suficientemente pequeño $\frac{\mu}{r^{d-4}} \gg r^2 + a^2$, por lo que la función es negativa, mientras que para r suficientemente grande $r^2 \gg \frac{\mu}{r^{d-4}}$, por lo que la función es positiva. La continuidad de la función nos asegura que va a existir al menos un valor r_0 donde esta se anula. Es decir, siempre va a haber un horizonte, de hecho la derivada de esta función es

$$\frac{d\Delta}{dr} = 2r + \frac{\mu}{r^{d-3}} > 0 \quad (80)$$

por lo que es estrictamente creciente y tiene una única solución. Se deduce de aquí que hay dos hechos de la solución de Kerr que son extremadamente particulares. El primero que existan dos horizontes de eventos, uno externo y otro interno, y el segundo que, al menos matemáticamente, existan soluciones con singularidades desnudas.

Dado que un polinomio arbitrario de grado d no tiene una expresión cerrada para sus raíces, no es posible dar una expresión general para el horizonte de eventos como hicimos para la métrica de Tangherlini, aunque en ciertos casos se puede resolver de forma exacta sin acudir a métodos numéricos como por ejemplo $d = 6$ donde la ecuación que resulta es bicuadrada.

Vamos ahora con el estudio de las ergoesferas de esta solución. Al igual que hemos hecho con la solución de Kerr, las ergoesferas son las hipersuperficies $g_{tt} = 0$ es decir

$$r^{(d-4)}\Sigma - \mu = r^{(d-2)} + r^{(d-4)}a^2 \cos^2 \theta - \mu = 0 \quad (81)$$

que dividiendo por $r^{(d-4)}$ se transforma en

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta - \frac{\mu}{r^{d-4}} = 0. \quad (82)$$

En el caso $d = 3$ recuperamos las ergoesferas de Kerr, $S_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$, que como ya sabíamos tienen dependencia de θ y dejan de ser hipersuperficies cerradas cuando $a > M$, es decir, cuando desaparecen los horizontes de eventos.

Para $d = 4$ la ecuación es especialmente sencilla y hay ergoesferas para $r = \sqrt{\mu - a^2 \cos^2 \theta}$ que en el caso extremal $\mu = a^2$ se vuelven hipersuperficies cuya sección transversal tiene forma de cardioide en la que para $\theta = \pi/2$ está la singularidad.

Para $d > 4$ se aplica el mismo análisis que hemos hecho para los horizontes de eventos dada la similitud de las ecuaciones que los definen. Por tanto, para $d > 4$ siempre existe una única ergoesfera independientemente del valor de a . Además, como $a^2 \geq a^2 \cos^2 \theta$ se tiene que el horizonte de eventos está siempre dentro de la ergoesfera.

4.2.2. Myers-Perry general

Como ya hemos comentado, en general la solución de Myers Perry tiene $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ momentos angulares en planos ortogonales. De ahora en adelante vamos a denotar por n la cantidad de planos ortogonales de rotación. Las coordenadas más adecuadas para expresar esta solución consisten en introducir coordenadas “polares” (β_i, ϕ_i) en cada plano de rotación (x_i, y_i) . Recordamos que cuando trabajamos con el límite de campo débil empleamos estas coordenadas y definimos $\beta_i = \frac{r_i}{r}$. Nótese que $\sum \beta_i^2 = 1$. Conviene en primer lugar estudiar la métrica del espacio plano en estas coordenadas, que depende fuertemente de la paridad de la dimensión. Si la dimensión es par, todos los ejes cartesianos pertenecen a alguno de los planos de rotación. Sin embargo, si la dimensión es impar uno de los ejes cartesianos está desapareado y en ese eje no hay rotación. Cuando d sea impar definiremos $\alpha = \frac{z}{r}$, donde z es la dirección cartesiana desapareada.

Para d par el espacio tiempo de Minkowski en estas coordenadas es

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 \sum_{i=0}^n (d\beta_i^2 + \beta_i^2 d\phi_i^2) \quad (83)$$

mientras que para d impar es

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 \sum_{i=1}^n (d\beta_i^2 + \beta_i^2 d\phi_i^2) + r^2 d\alpha^2. \quad (84)$$

En las expresiones de estas métricas hay un elemento más del que debería pues uno de los $d\beta_i^2$ se puede expresar en términos de los demás debido a la condición

$$\sum \beta_i^2 = 1 \quad \alpha^2 + \sum \beta_i^2 = 1. \quad (85)$$

Sin embargo, por simplicidad y elegancia es mejor dejar todos los $d\beta_i$, entendiendo que uno de ellos en realidad debe expresarse en términos de los demás. Para entender esto bien vamos a analizar el caso $3 + 1$. En él la métrica vendría dada por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\beta^2 + \beta^2 d\phi^2 + r^2 d\alpha^2 \quad (86)$$

donde sabemos que $\beta = \sin \theta$ y $\alpha = \cos \theta$. Utilizando la condición (85) se tiene que

$$d\alpha^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} d\beta^2. \quad (87)$$

Sustituyendo en (86) se obtiene

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) d\beta^2 + \beta^2 d\phi^2 \quad (88)$$

que haciendo uso de $\beta = \sin \theta$ se transforma en la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas usual. Este mismo proceso puede ser llevado a cabo para las expresiones generales (83) y (84).

Una vez visto el espacio de Minkowski en estas coordenadas estamos en condiciones de ver la solución general de Myers-Perry.

Si $d = 2n$ la solución de Myers-Perry con $\frac{d}{2}$ momento angulares ortogonales L_i es

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\mu r^2}{\Pi F} \left(dt + \sum_{i=1}^n a_i \beta_i^2 d\phi_i \right)^2 + \frac{\Pi F}{\Pi - \mu r^2} dr^2 + (r^2 + a_i^2) \sum_{i=0}^n (d\beta_i^2 + \beta_i^2 d\phi_i^2). \quad (89)$$

Para $d = 2n + 1$ la solución, aunque conserva la estructura, es ligeramente diferente

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\mu r}{\Pi F} \left(dt + \sum_{i=1}^n a_i \beta_i^2 d\phi_i \right)^2 + \frac{\Pi F}{\Pi - \mu r} dr^2 + (r^2 + a_i^2) \sum_{i=0}^n (d\beta_i^2 + \beta_i^2 d\phi_i^2) + r^2 d\alpha^2 \quad (90)$$

donde

$$\Pi = \prod_{i=1}^n (r^2 + a_i^2) \quad F = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 \beta_i^2}{r^2 + a_i^2} \quad (91)$$

y las coordenadas ya no son esferoidales oblatas sino que son elipsoideales. Es decir, las hipersuperficies de r constantes ya no son esferas deformadas en uno de sus ejes sino que están deformadas en todos los ejes, por lo que son elipsoides.

Nuestra solución tiene ahora muchos más parámetros, no es de extrañar sabiendo que tiene n momentos angulares. Una vez más, el límite de campo débil nos da la interpretación de estas constantes que resultan ser

$$\mu = \frac{16\pi}{(d-1)\Omega_{d-1}}. \quad (92)$$

$$a_i = \frac{(d-1)L_i}{2M} \quad (93)$$

Esto no debería sorprendernos, pues está en la línea de los resultados que venimos obteniendo durante todo el texto. Procedemos ahora al análisis que venimos haciendo para el resto de métricas

Comenzamos por localizar e interpretar las singularidades. Si observamos la métrica, tanto para d par como impar observamos que g_{rr} diverge para $\Pi - \mu r^\gamma = 0$, donde $\gamma = 1, 2$ dependiendo de si d es par o impar. Ya sabemos que esta aparente divergencia nos está indicando la posición del horizonte de eventos que estudiaremos más adelante. Sin embargo, cuando $\frac{\Pi F}{\mu r^\gamma} = 0$ los términos cruzados $dt d\phi_i$ divergen y esta divergencia sí se trata de una verdadera singularidad de la curvatura del espacio tiempo. Para comprobar esto es necesario cambiar la métrica de coordenadas a las coordenadas en las que la métrica tiene la forma de Kerr-Schild en las que se puede calcular el escalar de curvatura R que efectivamente diverge cuando $\frac{\Pi F}{\mu r^2} = 0$ y no lo hace si $\Pi - \mu r^\gamma = 0$. Las cuentas son bastante largas y no aportan mucho al análisis de la solución por lo que no las mostraremos aquí pero se pueden encontrar en el artículo original [10].

Las singularidades se encuentran por tanto en la hipersuperficie

$$\frac{\Pi F}{\mu r^\gamma} = 0. \quad (94)$$

Si, tal y como estamos suponiendo, todos los a_i son no nulos, Π nunca se anula. Como μ tampoco es nulo esa cantidad solo se hará nula cuando $\frac{F}{r^\gamma} = 0$.

Si $d = 2n$, utilizando que $\sum \beta_i^2 = 1$ se obtiene que

$$F = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2 a_i^2}{r^2 + a_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2 r^2 + \beta_i^2 a_i^2 - \beta_i^2 a_i^2}{r^2 + a_i^2} = r^2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{r^2 + a_i^2}. \quad (95)$$

Por tanto, la cantidad $\frac{F}{r^2}$ no diverge para ningún valor de las coordenadas y no hay singularidad.

Si $d = 2n + 1$ utilizamos que $\alpha + \sum \beta_i^2 = 1$ y obtenemos

$$F = \alpha^2 + r^2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{r^2 + a_i^2} \quad (96)$$

de manera que

$$\frac{F}{r} = \frac{\alpha^2}{r} + r \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{r^2 + a_i^2} = \frac{z^2}{r^3} + r \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{r^2 + a_i^2} \quad (97)$$

se anula cuando $\alpha = 0$ y $r = 0$. Para entender cómo es la hipersuperficie $r = \alpha = 0$ conviene entender primero cómo son las hipersuperficies $r = cte$. Al ser las coordenadas elipsoidales, las hipersuperficies $r = cte$ no son esferas sino que son elipsoides. La hipersuperficie $r = R_0$ se corresponde con la ecuación

$$\frac{z^2}{R_0^2} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 y_i^2}{R_0^2 + a_i^2} = 1 \quad (98)$$

donde (x_i, y_i) son las coordenadas cartesianas de plano i -ésimo. Aquí vemos, tal y como comentábamos, que los parámetros a_i están relacionados con la deformación de los ejes del elipsoide. Cuando R_0 tiende a 0 los elipsoides que son hipersuperficies de dimensión $(d - 1)$ degeneran, al igual que hacían en el caso de Kerr, a un disco de dimensión $(d - 1)$ en el plano $z = 0$. De igual manera que en la solución de Kerr la variable θ pasaba a ser la variable radial del disco $r = 0$, ahora la coordenada α actúa como la variable radial de este disco $(d - 1)$ dimensional, concretamente $\alpha = 0$ se corresponde con el borde del disco. Por tanto, la singularidad situada en $\alpha = r = 0$ tiene forma de anillo $(d - 2)$ dimensional. Este análisis es completamente análogo al que hicimos para el agujero negro de Kerr donde la singularidad era un anillo de dimensión 1.

Lo que acabamos de obtener es bastante sorprendente, mientras que para d impar la solución se comporta exactamente como la de Kerr con una singularidad en forma de anillo $(d - 2)$ dimensional, para d par la solución se corresponde con un agujero negro que no tiene singularidad. Si se estudia la extensión maximal de la métrica de Myers-Perry para el caso d , par en esta sí que aparece una singularidad que no es visible en las coordenadas elipsoidales con las que estamos trabajando. Esto no hace que este hecho sea menos sorprendente, hemos encontrado una solución donde al menos en la región del espacio “habitual” no hay ninguna singularidad a pesar de existir un agujero negro. Por supuesto no hemos hecho un estudio exhaustivo pues solo hemos considerado el caso en que todos los a_i eran no nulos. Los casos donde algunos o varios de los a_i son nulos son igualmente interesantes y algunos tienen características distintas a las que hemos estudiado aquí. También son de gran interés los casos de cohomogeneidad o de simetría extendida, estos son casos donde varios de los a_i toman el mismo valor haciendo que la métrica espacial en los planos correspondientes a esas simetrías sea idéntica, aumentando así la simetría de la solución.

Continuamos ahora con el estudio de los horizontes de eventos de esta solución. De nuevo hay que estudiar por separado las soluciones con d par e impar. Además, al igual que nos pasaba cuando estudiamos la solución de Kerr en dimensión $d + 1$, no vamos a poder dar una expresión cerrada para las soluciones debido a que no existe una fórmula para las soluciones de polinomios de grado arbitrario.

Para $d = 2n + 1$ el horizonte de eventos es la hipersuperficie dada por la ecuación

$$P(r) = \Pi - \mu r = 0. \quad (99)$$

En primer lugar hay que remarcar que dado que $\Pi > 0$ se tiene que $P(0) > 0$. Además como $\mu > 0$, el polinomio, de tener alguna raíz, debe ser positiva.

Para valores de r grandes Π se comporta como r^{2n} , por lo que existe un r suficientemente grande para el que el polinomio es positivo. Por otro lado la derivada de $P(r)$ es

$$P'(r) = -\mu + \sum_{i=1}^n 2r \prod_{j \neq i} (r^2 + a_j^2). \quad (100)$$

Esta función es negativa en $r = 0$ y estrictamente creciente por lo que tiene un único 0. Que la derivada sea una función estrictamente creciente con un solo 0 nos dice que $P(r)$ tiene un único mínimo. Por tanto, dado que $P(r)$ es positivo para valores grandes de r , hay 3 posibilidades. Si el mínimo de $P(r)$ es un valor positivo entonces $P(r)$ no se anula nunca y no hay horizonte de eventos. Si el mínimo de $P(r)$ vale exactamente 0 hay un único horizonte de eventos. Por último si el mínimo de $P(r)$ es negativo tenemos dos horizontes de eventos.

Durante el análisis general hemos supuesto que todos los a_i son no nulos. El caso en el que alguno de los a_i se anula es bastante sencillo. Si alguno de los a_i es nulo tendríamos que, para r suficientemente pequeño, Π se comporta como r^2 , que tiende a 0 más rápido que r . Por tanto, para valores suficientemente pequeños de r el término μr es más grande que Π y $P(r)$ es negativo. Como para valores grandes de r sabemos que es positivo, en el caso de que algunos de los a_i se anule siempre existe al menos un horizonte.

Si $d = 2n$ el horizonte de eventos es la hipersuperficie

$$Q(r) = \Pi - \mu r^2 = 0. \quad (101)$$

Si introducimos el cambio de variable $\rho = r^2$ el polinomio se convierte en

$$Q(\rho) = \prod (\rho + a_i^2) - \mu \rho. \quad (102)$$

El análisis que hemos hecho para $P(r)$ se puede repetir paso por paso para $Q(\rho)$, por lo que también en el caso de d par hay cero, uno o dos horizontes.

La principal diferencia que encontramos para el caso par es que ahora la condición de que uno de los a_i se anule no es suficiente para que exista un horizonte de eventos pues, aunque de nuevo Π se comportaría como r^2 para valores pequeños de r , el otro término es en este caso μr^2 por lo que no podemos asegurar que el polinomio sea negativo para valores pequeños de r . Para poder asegurar la existencia de un horizonte de eventos en este caso necesitamos que se anulen dos de los parámetros a_i .

Finalmente, para hallar las ergoesferas necesitamos estudiar los ceros de g_{tt} . En primer lugar observamos que, independientemente de d , para valores suficientemente grandes de r se tiene que $r^2 + a_i^2 \simeq r^2$ por lo que

$$F = \alpha^2 + \sum_{i=1}^n \frac{r^2 \beta_i^2}{r^2 + a_i^2} \simeq \alpha^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = 1 \quad (103)$$

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{r^2 \beta_i^2}{r^2 + a_i^2} \simeq \sum_{i=1}^n \beta_i^2 = 1. \quad (104)$$

Por tanto para valores suficientemente grandes de r también ΠF se comporta como r^{2n} y $-g_{tt}$ es positivo. Además tanto para d par como para d impar se tiene que si $r > 0$ entonces $0 < F \leq 1$ lo

que implica que

$$-g_{tt} = \Pi F - \mu r^\gamma \leq \Pi - \mu r^\gamma. \quad (105)$$

Como ambas funciones son positivas para r suficientemente grande y $-g_{tt}$ va siempre por debajo de $\Pi - \mu r^\gamma$, la primera se anula antes por lo que si existe un horizonte de eventos también existe una ergoesfera que lo encierra. Además de existir una segunda ergoesfera, por el mismo motivo esta debe de estar detrás de un segundo horizonte. Observamos que en caso de existir dos horizontes y dos ergoesferas su disposición es idéntica a la de Kerr.

La mayor diferencia entre d par y d impar en cuanto a las ergoesferas es el hecho de que para d par se tiene que, independientemente de los valores de β_i , si todos los a_i son no nulos entonces $(r^2 + a_i^2) > r^2$ lo que implica que

$$F = r^2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{r^2 + a_i^2} < r^2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{r^2} = 1. \quad (106)$$

El hecho de que F sea siempre menor que 1 nos está diciendo que la ergoesfera nunca toca el horizonte de eventos. Al haber momento angular en todas las direcciones cartesianas un observador va a ser arrastrado independientemente del punto en el que esté. Sin embargo, si alguno de los a_i es 0 supongamos por ejemplo $a_1 = 0$, la ergoesfera y el horizonte sí que se tocan pues, si hacemos que $\beta_1 = 1$ se tiene

$$F = r^2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{r^2 + a_i^2} = r^2 \frac{\beta_1}{r^2 + a_1} = 1. \quad (107)$$

Es decir, si nos situamos en el plano que no tiene momento angular no somos arrastrados por el agujero negro hasta que no alcanzamos el horizonte. Esto es de esperar si recordamos que en la solución de Kerr la ergoesfera y el horizonte se tocan en el eje z , es decir, justamente en el eje no involucrado en la rotación. El mismo análisis nos dice que en el caso d impar, aunque ningún a_i sea nulo, la ergoesfera y horizonte se tocan en el eje desapareado z y que si algún a_i es nulo también se tocan en el plano correspondiente a dicho a_i .

Por último, añadir que, al igual que en la solución de Kerr en dimensión $3 + 1$, para las soluciones de Myers-Perry existe una constante de movimiento no obvia debida a la existencia de un tensor de Killing que hace que la dinámica de partículas en este espacio sea integrable.

Con esto concluimos nuestro estudio de la solución de Myers-Perry. Como hemos visto, esta solución, aunque guarda muchas similitudes con la métrica de Kerr, presenta características nuevas que no se habían observado en dimensión 3. Esto nos da una visión más general del porqué de los fenómenos que observamos en la solución de Kerr.

5. 4+1 Dimensiones

Hasta aquí hemos estudiado las soluciones clásicas en dimensión $3 + 1$ y sus generalizaciones a dimensión $d + 1$. Estas últimas, a pesar de tener características completamente nuevas, no dejaban de ser una generalización de las anteriores y en cierto sentido tenían un comportamiento similar. Sin embargo, las dimensiones superiores guardan aún una gran cantidad de sorpresas. Como es lógico, las primeras soluciones sin análogo clásico han surgido en dimensión $4 + 1$, donde añadir solo una dimensión extra nos permite tener más capacidad de maniobra pero manteniendo los cálculos asumibles. Nos vamos a centrar por tanto en el estudio de las soluciones en dimensión $4 + 1$.

Hasta aquí todos los agujeros negros que hemos estudiado tenían un horizonte y ergoesfera con la topología \mathbb{S}^{d-1} . En dimensión $4 + 1$, Roberto Emparan, físico de la Universidad de Barcelona, y Harvey S. Reall, encontraron en 2002 una métrica que describe un agujero negro cuyo horizonte tiene la topología de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ [7]. Aunque no podemos visualizar $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, una manera de entenderlo es como un anillo correspondiente a \mathbb{S}^1 , cuya sección es una esfera \mathbb{S}^2 . Debido a esto, esta métrica ha recibido el nombre de anillo negro. Encontrar un agujero negro no esférico supuso una gran sorpresa. A raíz de este descubrimiento la gravedad en dimensiones superiores dejó de ser algo exclusivo de los físicos que se dedicaban a la teoría de cuerdas y pasó a tener interés para todo aquel que estuviese interesado en la gravedad, pues se vio que estudiar las dimensiones superiores podía proporcionar un mayor entendimiento de la teoría en 3 dimensiones.

Tras el descubrimiento del anillo negro se produjo una explosión de soluciones en dimensión $4 + 1$, todas ellas derivadas de esta y muy interesantes. Entre ellas destacan los saturnos negros, que consisten en un agujero negro esférico colocado en el centro de un anillo negro. Además estos dos objetos pueden rotar en la misma dirección o en direcciones opuestas. Esto también supuso una gran sorpresa pues es la primera solución estacionaria con más de un agujero negro, las cuales se creen que no existen en dimensión 3 aunque nadie lo ha podido probar.

5.1. Anillos Negros

La primera justificación intuitiva de la existencia de anillos negros es la siguiente.

Si tomamos la solución de Schwarzschild y le añadimos una dimensión plana obtenemos lo que llamamos una cuerda negra cuyo horizonte tiene topología $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$. Podemos coger esta cuerda y unir un extremo con el otro obteniendo así un anillo negro con topología $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Si uno piensa en la situación descrita no parece que un anillo de materia pueda ser estacionario, pues la atracción gravitatoria lo haría colapsar. Para contrarrestar esto el anillo negro debe de girar de manera que las fuerzas “centrípetas” compensen a la gravedad y se pueda mantener en equilibrio. Como veremos, fijada la masa y la forma del anillo su velocidad angular queda totalmente determinada.

Antes de presentar la métrica conviene presentar las coordenadas en las que la vamos a escribir. La elección de coordenadas que hicieron Emparan y Reall en su artículo es una técnica bastante interesante y que conviene tener presente. Esta técnica consiste en utilizar como hipersuperficies coordenadas las hipersuperficies equipotenciales de un campo que tenga similitudes con el problema que queremos tratar. En su artículo, Emparan y Reall utilizan las hipersuperficies equipotenciales de los potenciales asociados al campo electromagnético producido por un anillo de radio R en 4 dimensiones.

En nuestro espacio de dimensión $4 + 1$ podemos considerar dos planos ortogonales e introducir coordenadas polares en cada uno de esos dos planos. De esta manera nuestras coordenadas serán $(r_1, \phi_1, r_2, \phi_2)$. Cuando estudiamos la solución de Myers-Perry ya utilizamos estas coordenadas. En estas coordenadas los potenciales del campo electromagnético que produce un anillo de radio R situado en el plano $r_1 = 0$ son de la forma

$$A = 1 + \frac{R^2 - r_1^2 - r_2^2}{\Sigma} \quad B = 1 - \frac{R^2 + r_1^2 + r_2^2}{\Sigma} \quad (108)$$

donde definimos

$$\Sigma = \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + R^2)^2 - 4R^2r_2^2}. \quad (109)$$

A la vista de los potenciales producidos por el anillo, las coordenadas que nos dan las hipersuperficies equipotenciales son

$$x = \frac{R^2 - r_1^2 - r_2^2}{\Sigma} \quad y = -\frac{R^2 + r_1^2 + r_2^2}{\Sigma}. \quad (110)$$

El cambio de coordenadas inverso viene entonces dado por

$$r_1 = R \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-y} \quad r_2 = R \frac{\sqrt{y^2-1}}{x-y}. \quad (111)$$

Por tanto, el rango de valores de nuestras variables es

$$-\infty \leq y \leq -1 \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (112)$$

Las variables ϕ_1 y ϕ_2 permanecen inalteradas pero, en concordancia con la mayoría de artículos y libros, las vamos a renombrar como ϕ y ψ respectivamente. Por motivos obvios estas coordenadas reciben el nombre de coordenadas anillo.

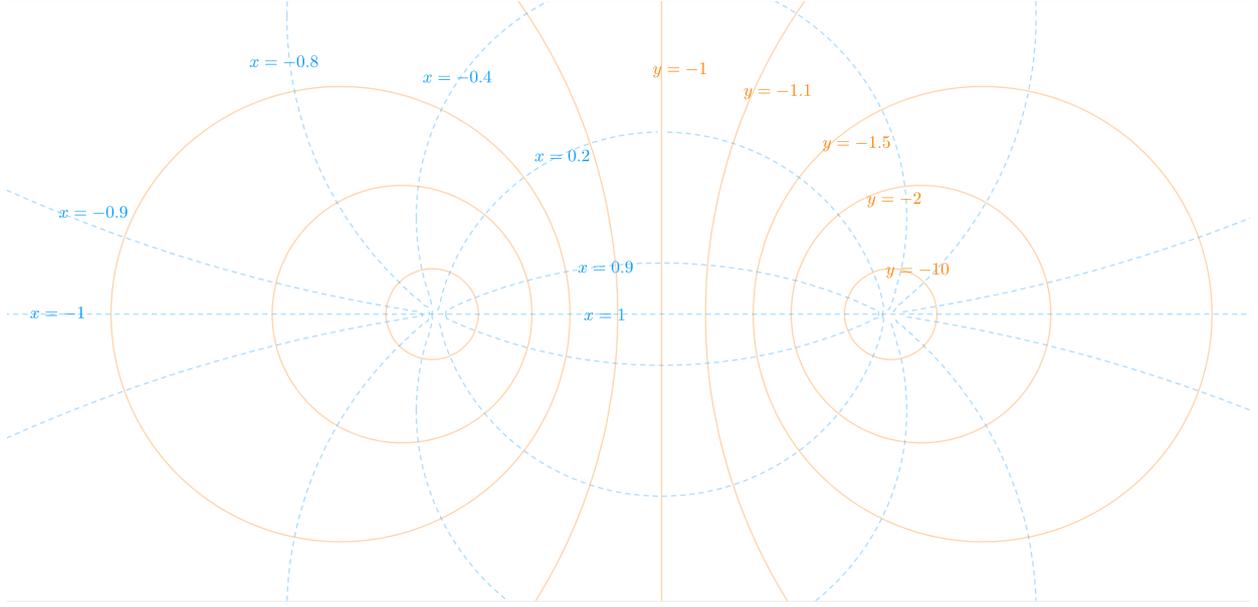


Figura 4: Sección transversal de las hipersuperficies de x e y constante en azul punteado y naranja respectivamente

Vamos a estudiar un poco más estas coordenadas para adquirir algo de familiaridad con ellas.

El anillo que genera el campo se encuentra en $r_1 = 0$ y $r_2 = R$, que en nuestras nuevas coordenadas se corresponde a $y \rightarrow \infty$. Además en este punto la coordenada x degenera de igual manera que lo hacen los ángulos de las coordenadas esféricas en $r = 0$.

El infinito espacial es decir $r_1 \rightarrow \infty$ y $r_2 \rightarrow \infty$ se corresponde con $x \rightarrow -1$ e $y \rightarrow -1$.

Finalmente, el eje de rotación del ángulo ψ se corresponde con $r_2 = 0$, es decir, $y = -1$ y el eje de rotación del ángulo ϕ se corresponde con $r_1 = 0$. Este eje en nuestras coordenadas no tiene una expresión única, pues si $r_1 = 0$ y $r_2 < R$ entonces $x = 1$ mientras que si $r_1 = 0$ pero $r_2 > R$ entonces $x = -1$. En $r_2 = R$ la coordenada x degenera, es por esto que puede saltar abruptamente de $x = -1$ a $x = 1$.

La métrica del espacio-tiempo de Minkowski escrita en estas coordenadas es

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R^2}{(x-y)^2} \left((y^2-1)d\psi^2 + \frac{dy^2}{y^2-1} + \frac{dx^2}{1-x^2} + (1-x^2)d\phi^2 \right). \quad (113)$$

Si observamos la Figura 4 podemos entender un poco mejor estas coordenadas. La coordenada vertical corresponde a r_1 eje en torno al que rota ψ y la horizontal a r_2 eje en torno al que rota ϕ . Si nos fijamos en las hipersuperficies de y constante, al rotar respecto al eje horizontal, es decir, aumentar ϕ , van a dar lugar a esferas. Estas esferas pueden luego rotar en torno al eje vertical, aumentar ψ , dando lugar a una hipersuperficie con topología $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. La parte que no nos podemos imaginar correctamente es la segunda rotación, pues si pensamos está en un espacio tridimensional las esferas producidas por la primera rotación se cortan al realizar la segunda rotación, sin embargo, en \mathbb{R}^4 se pueden producir ambas rotaciones sin necesidad de que las esferas se corten. De lo anterior se deduce que las hipersuperficies $y = cte$ tienen topología $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. El horizonte de eventos del anillo negro va a ser una hipersuperficie de y constante por lo que ya sabemos que su topología va a ser $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.

Antes de comenzar con el estudio de la métrica vamos a necesitar unas últimas coordenadas que nos van servir para interpretar el significado de las constantes que nos van a aparecer. Estas coordenadas se corresponden con el cambio

$$r = -\frac{R}{y} \quad \cos\theta = x \quad (114)$$

con $0 \leq r \leq R$ y $0 \leq \theta \leq \pi$.

En estas coordenadas la métrica es

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 + \frac{r \cos\theta}{R}\right)^{-2} \left[\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) R^2 d\psi^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (115)$$

Estas coordenadas parecen totalmente arbitrarias sin embargo resultan de gran utilidad. Esto es debido a que si nos fijamos en una de las esferas de nuestro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, es decir, si fijamos ψ , la métrica de la parte \mathbb{S}^2 es

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 + \frac{r \cos\theta}{R}\right)^{-2} \left[\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (116)$$

para valores pequeños de r se puede aproximar por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (117)$$

que es la métrica en coordenadas esféricas. Es decir, estas coordenadas que acabamos de definir, para valores pequeños de r se aproximan a ser las coordenadas esféricas de la parte \mathbb{S}^2 de nuestro anillo. Sin embargo, para valores grandes de r carecen de interpretación clara.

Ahora sí podemos lanzarnos de lleno al estudio del anillo negro. La métrica de la solución dada por Emparan y Reall es

$$ds^2 = -\frac{F(y)}{F(x)} \left(dt - CR \frac{1+y}{F(y)} d\psi \right)^2 + \frac{R^2}{(x-y)^2} F(x) \left(-\frac{G(y)}{F(y)} d\psi^2 - \frac{dy^2}{G(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + \frac{G(x)}{F(x)} d\phi^2 \right) \quad (118)$$

donde se definen las funciones

$$F(\xi) = 1 + \lambda\xi \quad G(\xi) = (1 - \xi^2)(1 + \nu\xi) \quad (119)$$

y la constante

$$C = \sqrt{\lambda(\lambda - \nu) \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}}. \quad (120)$$

Aunque la dependencia funcional de los coeficientes sea algo compleja, la estructura general de la métrica es bastante simple pues solo tiene términos cruzados de la forma $dt d\psi$, que se corresponden a la rotación del anillo negro. Aparecen además en la métrica tres constantes R , ν y λ . Como veremos más adelante, R nos da el radio y por tanto el tamaño de la solución, ν nos va a dar las proporciones del anillo y finalmente λ nos va a dar la velocidad angular del mismo. Los valores de estas constantes deben cumplir

$$0 < \nu \leq \lambda < 1. \quad (121)$$

Para entender por qué los parámetros tienen esta interpretación tenemos que recordar que la idea que originalmente nos llevó al anillo negro es la de una cuerda negra que hemos enrollado. Por tanto, si miramos el anillo muy de cerca, tanto como para no apreciar la curvatura del anillo, deberíamos recuperar la métrica de una cuerda negra. La idea intuitiva de mirar muy de cerca se corresponde con el límite $R \rightarrow \infty$.

Para tomar este límite es más conveniente utilizar las coordenadas $(t, \psi, r, \theta, \phi)$ pues como acabamos de ver, cerca del anillo estas se comportan como las coordenadas esféricas de \mathbb{S}^2 . Además cuando tomemos el límite, la coordenada ψ pierde su sentido pues al hacer $R \rightarrow \infty$ dejamos de apreciar la curvatura del anillo. Es por esto que conviene en vez de trabajar con el ángulo ψ , trabajar con el arco $z = \psi R$ que en el límite se comportará como una coordenada cartesiana pues no observamos su curvatura. Si definimos los parámetros r_0 y σ de la siguiente manera

$$r_0 = R\nu \quad r_0 \cosh^2 \sigma = R\lambda \quad (122)$$

utilizando estos parámetros y coordenadas la métrica toma la forma

$$\begin{aligned} & -\frac{\hat{f}}{\hat{g}} \left(dt - r_0 \sinh \sigma \cosh \sigma \sqrt{\frac{R + r_0 \cosh^2 \sigma}{R - r_0 \cosh^2 \sigma}} \frac{\frac{r}{R} - 1}{r\hat{f}} R d\psi \right)^2 + \\ & + \frac{\hat{g}}{\left(1 + \frac{r \cos \theta}{R}\right)^2} \left[\frac{f}{\hat{f}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) R^2 d\psi^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)f} + \frac{r^2}{g} d\theta + \frac{g}{\hat{g}} r^2 \sin^2 \theta d\phi \right] \end{aligned} \quad (123)$$

donde hemos definido

$$f = 1 - \frac{r_0}{r} \quad \hat{f} = 1 - \frac{r_0 \cosh^2 \sigma}{r} \quad g = 1 + \frac{r_0}{R} \cos \theta \quad \hat{g} = 1 + \frac{r_0 \cosh^2 \sigma}{R} \cos \theta. \quad (124)$$

A pesar de que la métrica da bastante miedo así escrita ahora podemos tomar el límite cuando $R \rightarrow \infty$ de manera mucho más sencilla. Ahora sí, tomando el límite cuando $R \rightarrow \infty$ se tiene que

$$g \simeq 1 \quad \hat{g} \simeq 1 \quad \sqrt{\frac{R + r_0 \cosh^2 \sigma}{R - r_0 \cosh^2 \sigma}} \simeq 1 \quad \frac{\frac{r}{R} - 1}{r\hat{f}} \simeq -1 \quad R d\psi = dz \quad (125)$$

de manera que la métrica que obtenemos es

$$ds^2 = -\hat{f} \left(dt + \frac{r_0}{r\hat{f}} \sinh \sigma \cosh \sigma dz \right)^2 + \frac{f}{\hat{f}} dz^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 (d\theta + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (126)$$

Esta métrica se corresponde con (69) que describe una cuerda negra que se mueve con velocidad $v = \tanh \sigma$ y que tiene su horizonte en r_0 . Es decir, que cuando desenrollamos nuestro anillo negro manteniendo finitas las cantidades

$$R\nu = r_0 \quad R\lambda = r_0 \cosh^2 \sigma. \quad (127)$$

Se obtiene una cuerda negra con un horizonte de topología $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, donde el radio de S^2 es $R\nu$. Por tanto, el parámetro ν nos da el cociente entre el radio del anillo \mathbb{S}^1 y de la esfera \mathbb{S}^2 . Además, esta cuerda negra se desplaza a una velocidad

$$v = \tanh \sigma = \frac{\sinh \sigma}{\cosh \sigma} = \frac{\sqrt{1 - \cosh^2 \sigma}}{\cosh^2 \sigma} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\nu}}}{\frac{\lambda}{\nu}}. \quad (128)$$

Por tanto, λ está relacionado con la velocidad de rotación del agujero negro. Que el parámetro λ no tenga una interpretación clara no es un problema pues, como vamos a ver en breves, su valor si queremos que el anillo esté en equilibrio va a quedar fijado en función de ν .

A diferencia de lo que venimos haciendo con el resto de agujeros negros que hemos estudiado, en vez de obtener las expresiones de M y J en función de nuestros parámetros y después analizar singularidades horizontes y ergoesferas, vamos a invertir el orden.

Comenzamos el estudio de las regiones de la geometría de este espacio tiempo. La expresión de la métrica diverge en numerosos puntos que vamos a ir estudiando uno a uno.

En primer lugar, observamos que si $y = -1$ entonces $g_{\psi\psi}$ se anula y g_{yy} diverge. De igual manera para $x = \pm 1$ se tiene que $g_{\phi\phi}$ se anula g_{xx} diverge. El hecho de que el coeficiente de la variable angular se anule nos indica que podríamos estar ante una singularidad cónica, que a grosso modo podríamos decir que consiste en una zona del espacio donde hay un defecto o exceso angular. La definición de singularidad cónica es la siguiente.

Dada una curva cerrada γ cuya distancia geodésica al punto p es constante con valor l , denotamos por $L(\gamma)$ la longitud de dicha curva. Entonces si

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{L(\gamma)}{l} \neq 2\pi \quad (129)$$

el punto p es una singularidad cónica. Además si el límite vale 2π el punto p es regular.

Por tanto, si queremos que nuestro espacio tiempo sea regular en los puntos $y = -1$ y $x = \pm 1$ tenemos que asegurarnos de que dicho cociente valga 2π . Para ello podemos jugar con la periodicidad que tienen nuestras variables angulares. Vamos a calcular a modo de ejemplo el caso $y = -1$. Los otros dos casos son completamente análogos.

Una pequeña circunferencia γ alrededor de $y = -1$ tiene como vector tangente $\frac{d\gamma^\alpha}{d\lambda} = K^\alpha = \partial_\psi$ por lo que su longitud será

$$L(\gamma) = \int_0^{\Delta\psi} \left(\sqrt{\frac{d\gamma^\mu}{d\lambda} \frac{d\gamma^\nu}{d\lambda} g_{\mu\nu}} \right) d\psi = \int_0^{\Delta\psi} \left(\sqrt{K^\mu K^\nu g_{\mu\nu}} \right) d\psi = \int_0^{\Delta\psi} \sqrt{g_{\psi\psi}} d\psi. \quad (130)$$

Como $g_{\psi\psi}$ no depende de ψ esa integral es fácil de calcular y vale

$$L(\gamma) = \sqrt{g_{\psi\psi}} \Delta\psi. \quad (131)$$

Por otro lado, el radio de la circunferencia es la distancia desde el eje, $y = -1$, a un punto de la circunferencia cuya coordenada es $y = -1 + \Delta y$. Para calcular esta longitud de nuevo usamos una curva que va desde $y = -1$ hasta $y = -1 + \Delta y$ cuyo vector tangente será $\frac{d\gamma_\alpha}{d\lambda} = K^\alpha = \partial_y$ y por tanto su longitud es

$$l = \int_{-1}^{-1+\Delta y} \left(\sqrt{\frac{d\gamma_\mu}{d\lambda} \frac{d\gamma_\nu}{d\lambda} g_{\mu\nu}} \right) dy = \int_{-1}^{-1+\Delta y} \left(\sqrt{K^\mu K^\nu g_{\mu\nu}} \right) dy = \int_{-1}^{-1+\Delta y} \sqrt{g_{yy}} dy \sim_0 \sqrt{g_{yy}} \Delta y. \quad (132)$$

Una vez tenemos calculados estos dos valores podemos calcular el límite (129) como

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g_{\psi\psi}} \Delta\psi}{\int_{-1}^{-1+\Delta y} \sqrt{g_{yy}} dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\sqrt{g_{yy}}} \frac{\sqrt{g_{\psi\psi}}}{\Delta y}. \quad (133)$$

Para terminar de calcular este límite tenemos que darnos cuenta de que $\sqrt{g_{\psi\psi}}|_{y=-1} = 0$, por lo que se tiene que

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g_{\psi\psi}}|_{y=-1+\Delta y}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g_{\psi\psi}}|_{y=-1+\Delta y} - \sqrt{g_{\psi\psi}}|_{y=-1}}{\Delta y} = \frac{\partial \sqrt{g_{\psi\psi}}}{\partial y} \Big|_{y=-1} = \frac{1}{2\sqrt{g_{\psi\psi}}} \frac{\partial g_{\psi\psi}}{\partial y} \Big|_{y=-1}. \quad (134)$$

Por tanto nuestro límite vale (recordamos la definición de (119) de F y G)

$$\frac{\Delta\psi}{2\sqrt{g_{\psi\psi}g_{yy}}} \frac{\partial g_{\psi\psi}}{\partial y} \Big|_{y=-1} = \frac{\Delta\psi}{2} \frac{|G'(-1)|}{\sqrt{F(-1)}} = \Delta\psi \frac{1-\nu}{\sqrt{1-\lambda}}. \quad (135)$$

De manera que si queremos evitar singularidades cónicas en los puntos de $y = -1$ necesariamente

$$\Delta\psi = 2\pi \frac{\sqrt{1-\lambda}}{1-\nu}. \quad (136)$$

De igual manera para evitar las singularidades cónicas para los puntos $x = +1$ y $x = -1$ las ecuaciones que debe satisfacer la periodicidad angular son respectivamente

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\sqrt{1-\lambda}}{1-\nu} \quad \Delta\phi = 2\pi \frac{\sqrt{1+\lambda}}{1+\nu}. \quad (137)$$

La única manera de que estas dos ecuaciones se satisfagan a la vez es que

$$\frac{\sqrt{1-\lambda}}{1-\nu} = \frac{\sqrt{1+\lambda}}{1+\nu} \implies \lambda = \frac{2\nu}{1+\nu^2}. \quad (138)$$

Esto, tal y como veníamos anunciando, nos fija la velocidad angular a la que debe rotar el agujero negro, pues tal y como habíamos visto el parámetro λ estaba relacionado con la velocidad angular del anillo. Esto nos deja dos constantes arbitrarias para la solución R y ν que determinan el tamaño y la proporción entre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Elegidas esas dos características la velocidad a la que el anillo gira, tal y como esperaríamos, está fijada.

Estudiados ya los posibles defectos angulares, vamos a buscar singularidad, horizonte de eventos y ergoesfera. La singularidad es el lugar más sencillo de detectar. Si calculamos el invariante de Kretschmann $R_{abcd}R^{abcd}$ este diverge en $y \rightarrow -\infty$, que es por tanto donde se encuentra la singularidad del agujero negro. Esto es lo que esperaríamos pues si recordamos como eran nuestras coordenadas en términos de r_1 y r_2 (111) vemos como $y \rightarrow -\infty$ se corresponde con $r_1 = 0$ y $r_2 = R$ es decir que la singularidad tiene forma anillo de radio R , de hecho se encuentra justamente donde colocamos el anillo cargado con el que calculamos los potenciales (108) que usamos para definir nuestras coordenadas.

Otro posible lugar problemático es la hipersuperficie $y = -\frac{1}{\nu}$, pues en esos puntos $G(y)$ diverge y está en el denominador de g_{yy} . Vamos a ver que esta hipersuperficie no es otra cosa que el horizonte de eventos de la singularidad. En primer lugar tenemos que comprobar que ese punto no es una singularidad del espacio tiempo. Para ello realizamos el cambio de coordenadas dado por

$$dt = dv - CR \frac{1+y}{G(y)} dy \quad d\psi = d\psi' + \frac{\sqrt{-F(y)}}{G(y)} dy. \quad (139)$$

Nótese que estamos dando el cambio de coordenadas en términos de las diferenciales de estas. Para encontrar la expresión de v, ψ' en términos de y, t, ψ deberíamos resolver la ecuación diferencial dada por el cambio. Sin embargo, a nosotros nos basta con saber que la solución a dicha ecuación existe, lo cual se puede asegurar dada la regularidad de las funciones para $y > -\frac{1}{\nu}$ y para $y < -\frac{1}{\nu}$. Para $y = -\frac{1}{\nu}$ el cambio de coordenadas se vuelve singular. Esto, al igual que sucede con las coordenadas de Eddington-Finkelstein, no es un problema debido a que coinciden tanto dentro como fuera. En estas nuevas coordenadas la métrica viene dada por

$$ds^2 = -\frac{F(y)}{F(x)} \left(dv - CR \frac{1+y}{F(y)} d\psi' \right)^2 + \frac{R^2}{(x-y)^2} F(x) \left(-\frac{G(y)}{F(y)} d\psi'^2 + \frac{2d\psi' dy}{\sqrt{-F(y)}} + \frac{dx^2}{G(x)} + \frac{G(x)}{F(x)} d\phi^2 \right) \quad (140)$$

donde se puede observar claramente que la hipersuperficie $y = -\frac{1}{\nu}$, es regular. Una vez sabemos esto, para comprobar que dicha hipersuperficie define el horizonte no hay más que observar lo que le sucede al vector ∂_y al cruzarla. Para $y > -\frac{1}{\nu}$ el vector ∂_y es de tipo espacio, tal y como podríamos esperar, sin embargo, al cruzar la hipersuperficie el signo del denominador de g_{yy} cambia, por lo que el vector ∂_y se vuelve de tipo tiempo. De la regularidad del espacio en ese punto y el cambio de característica del vector ∂_y , se deduce que la hipersuperficie $y = -\frac{1}{\nu}$ es por tanto una hipersuperficie nula pues el vector normal a una hipersuperficie con coordenada y constante es ∂_y que como acabamos de ver es nulo en $y = -\frac{1}{\nu}$. Por tanto esta hipersuperficie es el horizonte de eventos del anillo negro. De hecho, lo que sucede con la coordenada y es completamente análogo a lo que sucede con la coordenada r en el agujero negro de Schwarzschild, incluso podríamos calcular g^{yy} que en este caso es el inverso de g_{yy} y ver cómo la hipersuperficie $g^{yy} = 0$ es justamente $y = -\frac{1}{\nu}$. Como ya vimos, las hipersuperficies de y constante tenían topología $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, por lo que ahora sí podemos asegurar que estamos ante un anillo negro. Además, el hecho de que el horizonte sea la hipersuperficie $y = -\frac{1}{\nu}$ concuerda con la interpretación de ν como el cociente entre los radios de \mathbb{S}^1 y \mathbb{S}^2 de nuestro anillo.

Finalmente calculamos la ergoesfera, que en este caso no revierte ninguna dificultad adicional. Simplemente debemos calcular cuándo se anula g_{tt} , que será por tanto la hipersuperficie

$$F(y) = 0 \implies y = -\frac{1}{\lambda}. \quad (141)$$

Este resultado también concuerda con la interpretación de λ como parámetro que nos da la velocidad de rotación del anillo negro, aunque recordamos que para la regularidad de la métrica necesariamente $\lambda = \frac{2\nu}{1+\nu^2}$.

Finalmente indicar que, a pesar de que en los denominadores de la métrica aparece $(x - y)$, debido al rango en el que se mueven nuestras coordenadas esta cantidad solo se puede anular cuando $x = y = -1$, que corresponde, como ya hemos estudiado, al corte de los ejes de rotación que, como hemos visto, no tienen ningún defecto angular. También aparece en los denominadores $F(x)$. Esta cantidad no puede valer 0 pues para que se anule debería ser $x = -\frac{1}{\lambda}$, pero el hecho de que $\lambda < 1$ y $-1 < x < 1$ hace que esta condición no se de nunca. Por tanto esas aparentes divergencias no se dan, de manera que la métrica, salvo en $y = -\infty$, es regular.

Vamos por último a comprobar que esta métrica es asintóticamente plana, en cuyo caso podremos usar el límite de campo débil para hallar la relación de los parámetros R y ν con la masa M y el momento angular L . Debido a la curvatura del espacio tiempo, las coordenadas x e y no son exactamente las que definimos para el espacio de Minkowski. Sin embargo, con unas ligeras modificaciones se recupera sin problema el espacio tiempo plano. Las coordenadas para las que se recupera de manera clara tanto el espacio tiempo plano como el límite de campo débil son

$$\tilde{r}_1 = \tilde{R} \frac{\sqrt{2(1+x)}}{x-y} \quad \tilde{r}_2 = \tilde{R} \frac{\sqrt{-2(1+y)}}{x-y} \quad (142)$$

$$\tilde{R}^2 = R^2 \frac{1-\lambda}{1-\nu} \quad (\tilde{\psi}, \tilde{\phi}) = \frac{2\pi}{\Delta\psi} (\psi, \phi). \quad (143)$$

Con estas coordenadas podemos realizar el mismo proceso que hemos hecho en ocasiones anteriores calculando el límite de campo débil de la métrica del anillo negro y, comparando con el límite de campo débil que calculamos en el capítulo 2, se obtiene que la relación entre las constantes R, ν y las magnitudes físicas es

$$M = \frac{3\pi R^2 \lambda}{4 \nu} = \frac{3\pi R^2}{2} \frac{\nu}{(1-\nu)(1+\nu^2)} \quad (144)$$

$$L_\psi = \frac{\pi R^3}{2} \frac{\sqrt{\lambda(\lambda-\nu)(1+\lambda)}}{(1-\nu^2)} = \frac{\pi R^3}{\sqrt{2}} \nu \left(\frac{1+\nu}{(1-\nu)(1+\nu^2)} \right)^{3/2}. \quad (145)$$

Una vez tenemos estos parámetros podemos discutir una de las implicaciones más importantes de la existencia de los agujeros negros. Al tener dos parámetros libres R y ν existe un rango de valores de M y L para los que hay dos soluciones de anillos negros distintos y además para esos valores existe también la solución de Myers-Perry. Esto implica que en dimensión $4 + 1$ masa, momentos angulares y carga no son suficientes para caracterizar un agujero negro, a diferencia de lo que pasa en dimensión $3 + 1$. Por tanto, si se quiere tener un teorema similar al de dimensión $3 + 1$ hay que añadir alguna hipótesis adicional.

Para finalizar el análisis al igual que hemos hecho con los otros agujeros negros haremos un breve comentario de la dinámica. El anillo negro aparte de las magnitudes conservadas debidas a los vectores de Killing obvios ∂_ψ , ∂_φ y ∂_t no tiene tensores de Killing por lo que el número de constantes del movimiento 4 es insuficiente para que la dinámica sea integrable en un espacio de dimensión 5, siendo este el primer ejemplo que nos encontramos con esta característica.

Merece la pena comentar que a partir del anillo negro se han construido soluciones de anillos negros que giran también en torno a S^2 , por lo que tienen dos momentos angulares no nulos. Estas soluciones dan un segundo contraejemplo de la caracterización de los agujeros negros en términos

de su masa y momento angular, pues también existe un rango de valores en los que existen tanto la solución de Myers-Perry como un anillo negro con dos momentos angulares.

Por último otra de las soluciones derivadas del anillo negro son los llamados saturnos negros, que consisten en un agujero negro axialmente simétrico colocado en el centro de un anillo negro. Esta solución es la primera solución estacionaria con una cantidad finita de agujeros negros. En dimensión $3 + 1$ existen soluciones con más de un agujero negro pero necesitamos infinito de ellos para construir la solución. Además los saturnos negros tienen un enorme rango de valores posibles de M y L . Esto es debido a que tenemos cuatro parámetros, la masa y momento angular del anillo y del agujero negro. Jugando con estos cuatro parámetros se pueden obtener, dentro de unas restricciones, muchísima variedad de combinaciones de masa y momento angular. Hay ciertos valores de M y L que permiten la existencia simultánea de infinitas soluciones distintas de saturnos negros uno o dos anillos negros y la solución de Myers-Perry. Toda esta variedad de soluciones parecen indicar que los teoremas de unicidad existentes en dimensión $3 + 1$ no van a tener una generalización sencilla a dimensión $4 + 1$, incluso podría hacernos dudar de si la conjetura de los agujeros negros sin pelo es cierta en dimensión $3 + 1$, pues al menos en dimensión $4 + 1$ claramente masa carga y momento angular no bastan para caracterizar un agujero negro.

La degeneración de las soluciones para valores dados de las constantes físicas es un tema realmente interesante donde la teoría difiere enormemente en dimensión $3 + 1$ y en dimensiones superiores. En el artículo [8] hay un análisis detallado de este fenómeno con diagramas de fases especificando si existen o no soluciones y cuáles son en función de M y L .

6. Resumen y Conclusiones

Presentamos aquí un breve resumen de los capítulos del texto y las conclusiones que de él extraemos.

Tras introducir en el capítulo 1 notaciones y convenios, en el capítulo 2 explicamos detalladamente las suposiciones y aproximaciones necesarias para obtener las ecuaciones de Einstein en el límite de campo débil. Este proceso nos permite pasar de unas ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, para las cuales no hay teoría general, a ecuaciones de Poisson que entendemos a la perfección. Tras esto, haciendo uso de la función de Green para el laplaciano, resolvemos estas ecuaciones en dimensión $d + 1$ para una masa en rotación. Obtenemos así la métrica en el límite de campo débil, que nos servirá para dar significado físico a las constantes de las soluciones que vamos a estudiar.

A lo largo de este capítulo estudiamos las soluciones más clásicas de la Relatividad General en detalle, métricas de Schwarzschild y Kerr. El estudio del primero nos ha servido para introducir los fenómenos más clásicos y característicos de la Relatividad General como son el Redshift gravitatorio y la dilatación temporal. A través del estudio de estos dos fenómenos hemos entendido qué es y qué no es el horizonte de eventos de un agujero negro. El estudio del agujero negro de Kerr nos coloca en una situación más común desde el punto de vista físico añadiendo rotación al agujero negro. El hecho de introducir esta rotación nos revela un nuevo abanico de fenómenos físicos interesantes, basados todos ellos en el hecho de que la rotación del agujero negro arrastra el espacio tiempo a su alrededor. Mediante el estudio de los observadores estacionarios y estáticos delimitamos una hipersuperficie a partir de la cual un observador no puede estar en reposo, la ergoesfera. Al igual que el horizonte de eventos, esta hipersuperficie es clave para el estudio del resto de soluciones. Al final de este capítulo planteamos también los teoremas y conjeturas clásicos de la Relatividad General.

Una vez hecho esto pasamos a estudiar las generalizaciones de estas soluciones, las de Tangherlini y la de Myers-Perry. En el caso de Tangherlini, la única novedad con respecto al caso de Schwarzschild es la no existencia de órbitas acotadas estables, lo cual cuadra con el resultado para la gravedad

de Newton. La solución de Myers-Perry es mucho más ilustrativa pues en primer lugar admite dos posibles generalizaciones de la métrica de Kerr. La primera, un agujero negro con simetría axial y la segunda, un agujero negro con momento angular general. Estudiar el comportamiento de estas dos soluciones, nos aporta una visión más general de la métrica de Kerr. Por ejemplo, hemos visto que los agujeros negros con simetría axial en dimensión superior solo poseen un horizonte de eventos y una ergoesfera, mientras que las soluciones con momento angular general pueden poseer varios. Esto nos permite romper la degeneración y entender que el hecho de que la solución de Kerr tenga dos horizontes y ergoesferas no se debe a que sea una solución con simetría axial sino a que es la solución más general posible con momento angular. Ser conscientes de este hecho nos permite poner el énfasis en la propiedad correcta cuando estemos trabajando con la solución de Kerr.

Por último, nos salimos de las soluciones con análogo clásico y presentamos una solución en dimensión $4 + 1$, descubierta por el físico español Roberto Emparan. Esta solución presenta una gran cantidad de fenómenos completamente nuevos, el primero y más relevante es su topología $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, que le da el nombre de anillo negro. Este es el primer agujero negro que no tiene topología esférica. Otro hecho importante es que es la primera familia de soluciones que tiene más de una posible solución para unos valores de M y J fijos, lo que contrasta fuertemente con los teoremas de unicidad en dimensión $3 + 1$.

El estudio de la bibliografía, tanto clásica como reciente, realizado en este trabajo, hace patente varios hechos. En primer lugar que el estudio de las soluciones en dimensiones superiores nos puede permitir obtener un mejor entendimiento de las soluciones clásicas, como sucede con el caso de Kerr. Trabajar en dimensión superior nos permite también construir soluciones más exóticas, que nos sirven de guía para plantear conjeturas e hipótesis nuevas y replantearnos las ya existentes. Por ejemplo, a pesar de que no se ha encontrado ninguna solución a las ecuaciones de Einstein con horizonte de eventos $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, tampoco se ha probado que no pueda existir. La existencia de los anillos negros en dimensión $4 + 1$ nos puede hacer pensar que quizás en dimensión $3 + 1$ también sea posible una solución de este estilo, más aún si pensamos en que el anillo negro tiene además del tamaño un parámetro libre ν que le da forma. También las conjeturas de unicidad como la de los agujeros negros sin pelo quedan en entredicho al observar que en dimensiones superiores las magnitudes M, L, Q no caracterizan un agujero negro. Concluimos que el estudio de las soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein es un campo donde queda trabajo por hacer y que las dimensiones superiores, a pesar de no ser significativas para describir el universo, pueden servir de guía para la intuición.

Bibliografía

- [1] J. M. Bardeen, Kerr Metric Black Holes. *Nature* **226** (1970), no. 5240, 64-65.
- [2] R. H. Boyer, R. W. Lindquist, Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric. *Journal of Mathematical Physics* **8** (1967), no. 2, 265-281.
- [3] B. Carter, Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields. *Physical Review* **174** (1968), no. 5, 1559.
- [4] P. T. Chruściel, J. Cortier. Maximal Analytic Extensions of the Emparan-Reall Black Ring. *Journal of Differential Geometry* **85** (2010), 425-459.
- [5] H. Elvang, P. Figueras, Black Saturn. *Journal of High Energy Physics* **2007** (2007), no. 5, 050.
- [6] R. Emparan, Rotating Circular Strings, and Infinite Non-Uniqueness of Black Rings. *Journal of High Energy Physics* **2004** (2004), no. 3, 064.
- [7] R. Emparan, H. S. Reall, A rotating black ring in five dimensions. *Physical Review Letters* **88** (2002), no. 10, 101101.
- [8] R. Emparan, H. S. Reall, Black Holes in Higher Dimensions. *Living Reviews in Relativity* **11** (2008), no. 1, 1-87.
- [9] R. P. Kerr, On the discovery of the Kerr metric. *The Eleventh Marcel Grossmann Meeting* (2008), 9-38.
- [10] R. C. Myers, M. J. Perry, Black Holes in Higher Dimensional Space-Times. *Annals of Physics* **172** (1968), no. 2, 304-347.
- [11] A. A. Shatskiy, Analysis of the Topology of the Kerr Metric. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **130** (2020), no. 3, 409-417.
- [12] F. R. Tangherlini, Schwarzschild Field in n Dimensions and the Dimensionality of Space Problem. *Il Nuovo Cimento* **27** (1963), no. 3, 636-651.
- [13] M. Visser, The Kerr spacetime: A brief introduction. arXiv preprint arXiv:0706.0622 (2007).