



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

Grupos, QED y Transiciones Radiativas

Autor: Carlos Redondo Herrero
Tutor: Jose María Muñoz Castañeda
Año: 2023

Abstract

In this work, we study the $SU(3)$ symmetry in the flavor of the elementary particles (baryons and mesons) via the eightfoldway, and calculate their state using the quark model, as quarks are a fundamental representation of flavor $SU(3)$. And using this symmetry we calculate different properties, such as their magnetic moment, their mass and the radiative transitions.

Resumen

En este trabajo, estudiamos la simetría de $SU(3)$ en el espacio de sabor de las partículas fundamentales (bariones y mesones) mediante el camino óctuple, y calculamos sus estados utilizando el modelo quark, como los quarks son una representación fundamental de $SU(3)$ de sabor. Y usando la simetría calculamos diferentes propiedades, como sus momentos magnéticos, sus masas y sus transiciones radiativas.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Importancia de la teoría de grupos	1
1.2. Nociones básicas de teoría de grupos	3
2. $SU(2)$	7
2.1. Rotaciones, $SO(3)$, Matrices Unitarias y $SU(2)$	7
2.2. Subálgebra de Cartan, Pesos y Raíces de $SU(2)$	11
3. Pesos y raíces de $SU(3)$	15
4. El Camino Óctuple. Isospín e Hipercarga	21
4.1. Isospín e Hipercarga	21
4.2. Construcción de los estados	23
4.3. Cálculo de los momentos magnéticos	29
4.4. Cálculo de las masas	30
4.5. Transiciones Radiativas	33
5. Conclusiones	39

Capítulo 1

Introducción

1.1. Importancia de la teoría de grupos

En este trabajo, vamos a calcular resultados experimentales [1, 2] de física de partículas utilizando métodos de la teoría de grupos, en especial nos son de interés los momentos magnéticos, masas y decaimientos de las partículas elementales. EL objetivo entender la importancia de la teoría de grupos y representaciones en la física moderna, a través del caso particular de las partículas elementales.

A lo largo del siglo XX la teoría de grupos y representaciones ha dado lugar a grandes avances en la física teórica, y permitido entender en profundidad conceptos físicos de especial relevancia. El concepto más importante en la física para el que la teoría de grupos resulta esencial es el de simetría [3]. Las simetrías de un sistema físico son el conjunto de características observadas o experimentales del mismo que permanecen inalteradas bajo ciertos cambios. A lo largo del Grado en Física aparecen en diferentes ámbitos. Es bien conocido que un sistema termodinámico que se encuentra en un punto de transición de fase presenta invariancia de escala [4]. En la mecánica newtoniana la función energía, donde la evolución temporal puede ser entendida como una transformación del espacio de las fases, sabemos que la función energía permanece constante bajo la evolución temporal para aquellos sistemas que presentan invariancia de inversión temporal, *i.e.* la transformación $t \rightarrow -t$. De igual forma, cuando un sistema es invariante bajo cambios de sistemas de referencia dados por rotaciones, sabemos que también permanece inalterado el momento angular total del mismo bajo dichas transformaciones. La manifestación de todos estos fenómenos y otros muchos resulta de enorme importancia en la mecánica cuántica [5, 6], ya que mediante la existencia de simetrías pueden clasificarse las bases de los estados cuánticos del sistema definiendo los números cuánticos asociados a estas simetrías. En física del estado sólido [7] donde los cristales presentan una simetría al ser estructuras periódicas en el espacio las funciones de onda de las partículas que se propagan a lo largo del cristal deben heredar esas propiedades de simetría que presenta el cristal. En la física atómica [8, 9], donde la gran mayoría de moléculas tienen distintos tipos de simetría, sin ir más lejos la molécula de CO_2 es lineal y por tanto tiene una simetría cilíndrica. En particular, la molécula de CO_2 es invariante bajo la reflexión del plano que pasa por el átomo de carbono perpendicular a la dirección de los átomos de oxígeno. Por tanto tiene una simetría de reflexión respecto a este plano, por lo que si tomamos como origen del sistema de coordenadas el átomo de carbono podemos cambiar $z \rightarrow -z$ y tenemos la misma molécula. O si la rotamos respecto del eje que forman los tres átomos, la molécula se queda igual, por lo que también decimos que tiene simetría cilíndrica. El hecho de conocer el grupo de simetría que tiene la molécula nos permite conocer, cuáles son

sus modos normales y además si estos modos son activos en el espectro infrarrojo o en el espectro Raman.

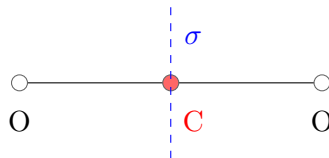


Figura 1.1: Simetrías de una molécula de CO_2

El concepto de simetría en física va mucho más allá de ser algo puramente geométrico¹ como es bien sabido. Sino que es algo asociado a la invariancia de un sistema físico bajo ciertas transformaciones no necesariamente de carácter geométrico. Independiente del carácter geométrico o no, las transformaciones que dejan invariante al sistema muestran ciertas propiedades comunes. Una transformación que siempre va a dejar invariante el sistema es la identidad, es decir que no hacer nada, deja al sistema igual, sea cual sea el sistema; además para cualquier transformación que apliquemos va a existir otra que se opuesta y nos haga volver al sistema original, por ejemplo si tenemos un cuadrado y lo rotamos 90 deg en sentido horario se queda invariante, y para volver a como hemos empezado podemos rotarlo 90 deg en sentido inverso. Estas propiedades de las simetrías permiten entender que las mismas son manifestaciones en la realidad de objetos matemáticos abstractos: los grupos. Así pues el marco matemático natural que permite entender las simetrías en el ámbito de la física, es la teoría de grupos y sus representaciones. La idea seminal de introducir la teoría de grupos para el estudio formal de las simetrías de forma sistemática proviene de Felix Klein y su famoso *Programa de Erlangen* [10]. El desarrollo del programa de Erlangen y las ideas de Sophus Lie para resolver ecuaciones diferenciales usando transformaciones de simetría llevaron al que, quizá es el resultado más importante para la física, desde el punto de vista de la teoría de grupos: El teorema de Nöther [11, 12, 13, 14]. El teorema de Nöether establece una correspondencia rigurosa entre las transformaciones de simetría de un sistema físico y las cantidades conservadas del sistema. Ya lo veremos en más detalle en el siguiente apartado.

Por lo tanto el principal objetivo de este trabajo es, mediante un ejemplo concreto, entender la importancia de la teoría de grupos y sus representaciones en la física moderna. Concretamente el caso elegido para este trabajo es la simetría $SU(3)$ de sabor para estudiar las propiedades físicas de los hadrones². Se verá, cómo en este caso el uso de la teoría de grupos y representaciones permite hacer predicciones teóricas medibles y razonablemente precisas sobre ciertas propiedades de los hadrones. Este trabajo está estructurado de la siguiente manera:

Una ligera introducción a la teoría de grupos [15, 16, 17, 18], enfocada principalmente a con ejemplos a las distintas ramas de la física para ver bien su aplicación en este capítulo de introducción. En el capítulo 2, veremos en detalle el grupo $SU(2)$, cómo se relaciona con el grupo de las rotaciones y cómo generarlo enteramente en base a la teoría de grupos, además de añadir nuevos conceptos de manera general cómo lo son los pesos y las raíces [19, 20, 21].

En el capítulo 3, aplicaremos estos nuevos conceptos al grupo $SU(3)$ ya que es un ejemplo no tan trivial como el de $SU(2)$.

En el capítulo 4, veremos cómo las partículas elementales tienen una simetría aproximadas bajo el grupo de $SU(3)$ de sabor, basándonos en lo que ya hemos visto. Además de ver el camino óctuple [22, 23, 24], y ciertas propiedades de las partículas como lo son el isospin y la hipercarga. Una vez entendida la simetría podremos calcular los momentos magnéticos y masas de los bariones

¹El carácter geométrico al que nos referimos aquí concierne a las transformaciones espaciales.

²Los Hadrones son partículas elementales compuestas por tres quarks (bariones), o por un quark y un anti-quark (mesones)

y mesones usando el modelo quark [25, 19, 26]. Y finalmente calcularemos en detalle la probabilidad de que un barión decaiga en otro, aunque hay que tener en cuenta que para entender bien el proceso y poder obtener ciertos resultados hay que usar la electrodinámica cuántica [27, 28, 29, 30, 31].

De tal manera que nos va a ser muy útil repasar los conceptos básicos de la teoría de grupos [15], además de ver algunos ejemplos muy sencillos de cómo aplicarlo a la física.

1.2. Nociones básicas de teoría de grupos

Para empezar, vamos a definir que es un grupo [15] y que características tiene.

Definición 1.2.1 (Grupo). Un grupo G viene dado por un conjunto G , junto con una aplicación $G \times G \rightarrow G$, que manda (g, h) a $g \cdot h$ con las siguientes propiedades:

1. Ley asociativa: $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$ para cualquier $f, g, h \in G$,
2. Elemento identidad: dentro del grupo existe un elemento e de G tal que $e \cdot g = g \cdot e = g$ para todo g perteneciente a G ,
3. Elemento inverso: para cada elemento g de G existe un elemento g^{-1} tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

Esto puede parecer sencillo, y veremos que en multitud de sistemas físicos los podemos ver como la acción de un grupo sobre otro espacio.

Un ejemplo claro de esto es que cuando simetrizamos las funciones de onda de partículas idénticas en mecánica cuántica [6, 5]. Donde para ver mejor lo que ocurre, vamos a ver que sucede para un sistema de dos partículas $\psi(\xi_1, \xi_2)$, y al cambiar la partícula 1 por la dos el sistema no se ve afectado (excepto por un posible cambio de fase), por ende las propiedades que podemos medir como las probabilidades no son alteradas

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = e^{i\alpha} \psi(\xi_2, \xi_1)$$

Si volvemos a intercambiar las partículas, volvemos a añadir el mismo desfase y volvemos al estado inicial, teniendo así que $e^{2i\alpha} = 1 \rightarrow e^{i\alpha} = \pm 1$. Y por tanto

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \pm \psi(\xi_2, \xi_1)$$

Haciendo que sólo haya dos opciones que las funciones de onda sean simétricas (para bosones) o antisimétricas (para fermiones).

Estamos viendo así la acción del grupo simétrico sobre el espacio de funciones de onda. Ya que los elementos del grupo simétrico S_n son los encargados de permutar los n distintos productos tensoriales que forman el espacio de funciones de onda con n partículas.

Sin embargo lo que más nos va a interesar son las representaciones de los grupos [17], que de manera básica consiste en un morfismo de los elementos del sistema con los elementos del grupo, de manera que el grupo puede actuar en ese espacio. De manera más rigurosa lo podemos definir como:

Definición 1.2.2 (Representación de un grupo). Sea G un grupo y V el espacio en el que se encuentra nuestra representación. Una representación es un homomorfismo ρ del grupo G al grupo $GL(V)$ (Es el grupo de matrices invertibles de dimensión V). Tal que asociamos los elementos del grupo $g \in G$ con los elementos $\rho(g) \in GL(V)$ los elementos $\rho(g)$ y $\rho(h)$ de $GL(V)$ de la siguiente manera

$$\rho(g) \cdot \rho(h) = \rho(g \cdot h) \quad \text{Para } g, h \in G$$

Las representaciones son de gran importancia ya que están ligadas a las simetrías de un sistema. Ya que una simetría no es nada más que el hecho que la acción de una representación de un grupo sobre nuestro sistema lo deja invariante.

Esto lo podemos ver de manera clara con el teorema de Noether, ya que si por ejemplo tenemos una simetría bajo traslaciones espaciales. La acción del grupo de las traslaciones no afecta a nuestro Lagrangiano, de manera que decimos que hay una simetría bajo traslaciones espaciales.

Esto es muy importante, ya que el hecho de que en el teorema de Noether exista una cantidad conservada, no es más que el hecho de que la acción del grupo sobre nuestro conjunto tiene un estabilizador. Donde un estabilizador es [15]:

Definición 1.2.3 (Estabilizador). Sea x un elemento de un conjunto X y g un elemento del grupo G , entonces definimos un estabilizador S_x como

$$S_x = \{g \in G | g \cdot x = x\}$$

Que en el caso que hemos mencionado, el estabilizador para cuando tenemos traslaciones espaciales se trata del generador del grupo de las traslaciones que es el momento. Vamos a ver esto en detalle.[12][13]

Sea un sistema de N partículas en 3D que interaccionan según un potencial 'a pares' de la forma $V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ $i \neq j$ $i, j = 1, \dots, N$

La transformación de traslación es

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$$

$$\mathcal{L}[\{\mathbf{r}_i\}, \{\dot{\mathbf{r}}_i\}, t] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

Haciendo la transformación del Lagrangiano, y viendo si este cambia debido a la transformación de traslación

$$\mathcal{L}[\{\mathbf{r}_i'(\boldsymbol{\alpha})\}, \{\dot{\mathbf{r}}_i'(\boldsymbol{\alpha})\}, t] \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha^j} = 0$$

Vemos que este no cambia ya que su derivada es cero, y por tanto hay una cantidad conservada que vamos a ver que son las componentes del momento.

$$C_j = \sum_{\substack{i,k \\ i=1,\dots,N \\ k=1,2,3}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i^k} \frac{\partial r_i^k}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i^j} = \sum_{i=1}^N p_i^j = p_{tot}^j$$

Esto no sólo es aplicable a la mecánica clásica, sino también lo podemos aplicar a sistemas cuánticos de la misma manera que hemos hecho antes.

No sólo por esto, las representaciones son importantes, además veremos la importancia de la descomposición de una representación en sus representaciones irreducibles, es decir que descomponemos el espacio V como la suma de subespacios W tal que para todo $x \in W$, la acción de la representación hace que siga estando en W , $\rho(s)x \in W$ para cualquier s . En el capítulo siguiente cuando tratemos con el momento angular y el spin veremos con detalle su utilidad.

A continuación vamos a ver de que se trata esto que acabamos de mencionar del generador de un grupo.

Para ello nos va a ser importante ver lo que es un grupo de Lie [16], que es un tipo de grupo que tiene unas características bastante especiales.

Definición 1.2.4 (Grupo de Lie). Un grupo de Lie es un grupo que a su vez es una variedad diferenciable n -dimensional, lo que significa que alrededor de un elemento del grupo g , los elementos del grupo $g(\mathbf{s})$ vienen determinados por n de parámetros (s_1, s_2, \dots, s_n)

Esto es lo que tenemos en el grupo de las rotaciones cuyos parámetros pueden ser los ángulos de Euler. O el grupo de las transformaciones de Lorentz [32, 33], en el que los elementos del grupo vienen determinados por 4 parámetros, uno que determina el subgrupo de los boosts puros y otros 3 para determinar el subgrupo de las rotaciones en el espacio 3D.

De manera que la ley de composición funciona igual que para las representaciones, salvo que ahora tenemos n parámetros

$$\rho(\mathbf{s})\rho(\mathbf{t}) = \rho(\mathbf{u})$$

Para un grupo unidimensional, podemos escribir la ley de composición mediante la adición de manera que

$$\rho(s)\rho(t) = \rho(s+t) \quad \rho(0) = 1$$

Si derivamos respecto de s e igualamos $s = 0$ obtenemos la ecuación diferencial para nuestra representación del grupo.

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = A\rho(t)$$

Si la resolvemos e imponemos como condición inicial el hecho de que la identidad es $\rho(0)$.

$$\rho(t) = e^{tA}$$

Podemos obtener cómo es cualquier elemento del grupo de Lie en función de A , por lo que a este lo vamos a llamar generador infinitesimal del grupo. Si tenemos los n -parámetros s_n , tendremos asociados n -generadores I_n infinitesimales y por tanto

$$\rho(\mathbf{s}) = e^{s_1 I_1 + s_2 I_2 + \dots + s_n I_n}$$

Si queremos que nuestro generador infinitesimal sea auto-adjunto basta con multiplicarlo por $-i$ y a la hora de elevarlo lo multiplicamos por i .

Lo cual es igual a la ecuación de Schrodinger [6, 5], ya que si tenemos un Hamiltoniano, la ecuación de evolución del sistema es (en unidades naturales)

$$i \frac{d}{dt}\psi(t) = H\psi(t) \longrightarrow \psi(t) = e^{-iHt}$$

Por este motivo decimos que el Hamiltoniano es el generador infinitesimal de las traslaciones temporales (en este caso lo hemos visto para mecánica cuántica, aunque en mecánica clásica es igual y lo podríamos ver mediante el teorema de Noether).

Nos falta por ver el álgebra de Lie de un grupo de Lie [20].

Definición 1.2.5 (Álgebra de Lie). Un álgebra de Lie de dimensión finita, real o complejo, es un espacio vectorial de dimensión finita, real o complejo G , junto con una aplicación $[\cdot, \cdot]$ que va desde $G \times G$ a G , con las siguientes propiedades:

1. $[\cdot, \cdot]$ es bilineal.
2. $[\cdot, \cdot]$ es antisimétrico, $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in G$.

3. Se cumple la identidad de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Para todo $X, Y, Z \in G$

Las transformaciones infinitesimales definidas por un vector en una dirección arbitraria $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ que está asociado a la transformación

$$J = u_1 I_1 + u_2 I_2 + \dots + u_n I_n$$

Forma un álgebra perteneciente al grupo G , y el álgebra tiene tres operaciones.

La suma, la multiplicación por números reales y la operación de conmutación $[A, B] = AB - BA$. Donde la conmutación entre los generadores de un grupo determinan el álgebra de Lie del grupo, por lo que a las constantes que aparecen en las relaciones de conmutación las llamamos constantes de estructura c_{ij}^k

$$[I_i, I_j] = c_{ij}^k I_k$$

Y tenemos que si dos grupos tienen las mismas constantes de estructuras son isomorfos localmente. Ya veremos ejemplos de dos grupos localmente isomorfos en el siguiente capítulo con los grupos de las rotaciones $SO(3)$ y del spin $SU(2)$.

Capítulo 2

$SU(2)$

2.1. Rotaciones, $SO(3)$, Matrices Unitarias y $SU(2)$

Vamos a empezar viendo como son las matrices de las rotaciones en el espacio tridimensional, para ello vemos como es una rotación en cada eje del espacio, las matrices son:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices tienen la característica de ser objetos pertenecientes a un grupo de Lie, que en este caso el grupo se trata del grupo de las rotaciones. Por lo que si tenemos dos rotaciones distintas R_1, R_2 su producto será una rotación y su inversa también

$$R_1(\theta)R_2(\phi) = R_3(\varphi), \quad R^{-1}(\alpha) = R(\beta)$$

Esto junto con la propiedad asociativa y el hecho de que existe el elemento identidad, verifica que es un grupo.

Además como es un grupo de Lie, tenemos que cuando hacemos el producto de dos rotaciones respecto del mismo eje, tenemos

$$R(\theta)R(\phi) = R(\theta + \phi)$$

Por lo que podemos formar cualquier rotación en función del vector $\boldsymbol{\theta} = \theta \hat{n}$, donde el vector \hat{n} indica la dirección del eje de giro y θ el ángulo de giro.

$$R(\boldsymbol{\theta}) = e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}}$$

Y \mathbf{J} son sus generadores infinitesimales, que son de manera general

$$X_i = -i \frac{\partial A}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} \quad \text{donde } x_i \text{ es una variable}$$

En este caso

$$J_1 = -i \frac{\partial R_x(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = -i \frac{\partial R_y(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$J_3 = -i \frac{\partial R_z(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de estructura de un grupo, vienen dados por las relaciones de conmutación de sus generadores, por tanto para $SO(3)$.

$$[J_i, J_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$$

Tenemos que el grupo $SU(2)$, es el grupo de las matrices unitarias de orden 2 ($U^{-1} = U^+$) de determinante 1 por tanto si tenemos una matriz $A \in SU(2)$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad ad - bc = 1, \quad A^{-1} = A^+$$

Utilizando el determinante podemos calcular la inversa de A que es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Como $A^{-1} = A^+$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \rightarrow d = a^*, c = -b^*$$

Por lo que de manera general las matrices de $SU(2)$ tienen la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{donde } a, b \in \mathbb{C} \text{ y } |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Si lo expresamos en términos de números reales

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix}$$

Podemos obtener sus generadores infinitesimales como

$$X_1 = -i \left. \frac{\partial A}{\partial a_1} \right|_{a_1=0} = -iI, \quad X_2 = -i \left. \frac{\partial A}{\partial a_2} \right|_{a_2=0} = \sigma_3, \quad X_3 = -i \left. \frac{\partial A}{\partial b_1} \right|_{b_1=0} = \sigma_2, \quad X_4 = -i \left. \frac{\partial A}{\partial b_2} \right|_{b_2=0} = \sigma_1$$

Donde I es la matriz identidad y σ_i son las matrices de Pauli.

La matriz X_1 la descartamos ya que al generar una matriz de $SU(2)$ como e^{iX_1} podemos ver que su determinante es distinto de 1 (Esto es porque es un generador de $U(2)$ ya que no hemos impuesto que el determinante sea 1.) y por tanto no es un generador de $SU(2)$.

Para calcular sus constantes de estructura, hay que calcular los conmutadores de X_i y lo mejor es hacerlo con los siguientes generadores del grupo¹

$$X_1 = \frac{1}{2}\sigma_1, \quad X_2 = \frac{1}{2}\sigma_2, \quad X_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$$

$$[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk}X_k$$

Por lo que tenemos que las constantes de estructura de $SO(3)$ y $SU(2)$ son las mismas (salvo un factor, pero esto no afecta ya que si hubiésemos multiplicado a los generadores infinitesimales de $SO(3)$ por -1 nos darían exactamente igual).

Al ocurrir esto tenemos que los dos grupos son isomorfos localmente, es decir que mediante un morfismo podemos asociar las matrices de $SU(2)$ con las de $SO(3)$ con una correspondencia de

¹Los generadores son equivalentes ya que simplemente es un factor de escala.

una a una. Pero no exactamente, ya que esto solo ocurre de manera local. Mientras que de manera global, tenemos que cada par de matrices $(A, -A) \in SU(2)$ corresponden a una rotación $R \in SO(3)$.

$$R \rightleftharpoons (A, -A)$$

Donde la asignación a las matrices A la vamos a hacer de la siguiente manera:

Para cada vector de tres componente \mathbf{v} vamos a asociarle una matriz 2×2 hermítica y sin traza \hat{v}

$$\hat{v} = \mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}, \quad \hat{v}^+ = \hat{v}, \quad \text{Tr}\hat{v} = 0, \quad \det \hat{v} = -\mathbf{v}^2$$

Si R es una matriz de rotación y \mathbf{v}_R es la imagen de \mathbf{v} bajo R , su matriz asociada \hat{v}_R sigue siendo hermítica y sin traza. Por tanto podemos describir la rotación en este espacio mediante una matriz de $SU(2)$ U que es unitaria y de determinante 1.

$$\hat{v}_R = U\hat{v}U^+$$

Donde si $R = R(\boldsymbol{\theta})$, hay dos posibles matrices de $SU(2)$ que describen la rotación

$$U = \pm e^{i\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{\theta}}$$

Por lo que se ve de manera clara la correspondencia bivaluada entre las matrices de rotación y las matrices de $SU(2)$.

Este resultado es de especial importancia en mecánica cuántica, ya que si recordamos las matrices de spin están asociadas a $SU(2)$, mientras que las de el momento angular están asociadas a $SO(3)$. Y por el hecho de que la correspondencia entre matrices de ambos grupos sea bivaluada, es lo que hace que el spin sea un número semientero. Ya que para un J entero las representaciones de las matrices A y $-A$ coinciden, mientras que cuando es un número semientero no coinciden. Por lo tanto las matrices de $SO(3)$ de la representación irreducible tienen una correspondencia univaluada con las representaciones de $SU(2)$ cuando el spin es un número entero.

Finalmente, vamos a hacer un breve comentario sobre los coeficientes de Clebsch-Gordan, ya que estos los podemos ver como un cambio de base, cuando descomponemos el producto tensorial de dos representaciones de un grupo en sus representaciones irreducibles. Por ejemplo si los ρ son las representaciones irreducibles de $SU(2)$, donde la base de las representaciones irreducibles está formado por los estados que tienen el mismo spin $|s, m_s\rangle$. Y si hacemos el producto tensorial de dos de estas representaciones, veremos que esta representación no es irreducible, si la descomponemos en sus representaciones irreducibles

$$\rho_j \otimes \rho_{j'} = \rho_{j+j'} \oplus \cdots \oplus \rho_{|j-j'|}$$

Los coeficientes de Clebsch-Gordan, nos dirán como se expresar la base de las distintas representaciones irreducibles $\rho_{j+j'}, \cdots \rho_{|j-j'|}$ en función de la base del producto tensorial $\rho_j \otimes \rho_{j'}$.

Y tenemos varias formas de obtener los coeficientes de $SU(n)$ (aunque en especial nos interesan los de $SU(2)$ y $SU(3)$), como utilizar varias veces los operadores escaleras al igual que podemos hacer en $SU(2)$ (como veremos para $SU(3)$ más adelante, esto se complica bastante), pero el método más sencillo es utilizar los tableros de Young.

Estos son unas cajas que nos indican que etiquetas de un estado tenemos que simetrizar y antisimetrizar. Y veremos que para hallar un estado primero antisimetrizamos las etiquetas de las columnas y luego simetrizamos las etiquetas de las columnas.

Vamos a ver como construir un estado con un par de ejemplos.

Si tenemos este tablero completamente horizontal debemos de simetrizar todos las etiquetas y normalizar el estado final, por tanto el estado es

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1, 2\rangle + |2, 1\rangle]$$

Si tenemos un tablero con la siguiente forma

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Antisimetrizamos primero 1 y 3

$$|1, 2, 3\rangle - |3, 2, 1\rangle$$

Y simetrizamos 1 y 2 el estado que habíamos obtenido de simetrizar, y finalmente normalizamos el estado.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}[|1, 2, 3\rangle + |2, 1, 3\rangle - |3, 2, 1\rangle - |2, 3, 1\rangle]$$

Y para hallar los coeficientes de Clebsch-Gordan es sencillo, ya que para hacer el producto tensorial de dos estados.

$$\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}' = \mathcal{Y}^{(1)} + \mathcal{Y}^{(2)} + \dots$$

Lo que hay que hacer es:

1. Nombrar todas las cajas del tablero \mathcal{Y}' con el mismo índice en cada fila. Es decir el índice a en la primera, el índice b en la segunda, etc.
2. Juntar todas las cajas que tengan el mismo índice al tablero de \mathcal{Y} , tal que no aparezca el mismo índice dos veces en la misma fila.
3. Repetir este paso para el resto de índices.
4. Una vez que tenemos todos los tableros posibles, los leemos de derecha a izquierda y de arriba hacia abajo, todos los tableros, esto nos dará una secuencia $abc cd \dots$, si en algún momento hay más letras b que a o c que b o similar, tenemos que rechazar el tablero.

Un ejemplo muy sencillo es el de

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$

Que si estamos en el espacio de spin $s = \frac{1}{2}$, el tablero horizontal tiene $j = 1$ ya que tiene tres posibles estados y por tanto tres valores posibles de m_s y el vertical $j = 0$ ya que sólo hay un estado posible. Además podemos ver que en el horizontal hay tres estados posibles que son completamente simétricos, mientras que en el vertical sólo hay un estado posible que es antisimétrico.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + & + \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline - & - \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline - \\ \hline \end{array}$$

Por lo que hemos obtenido los coeficientes de Clebsch-Gordan sin necesidad de utilizar los operadores escalera.

2.2. Subálgebra de Cartan, Pesos y Raíces de $SU(2)$

Definición 2.2.1 (Subálgebra de Cartan). Sea g el álgebra de Lie de un grupo G . Si $X \in g$ es regular, definimos el subálgebra de Cartan como

$$\mathbb{C}_g(X) = \{Y \in g \mid [X, Y] = 0\}$$

Como ninguno de los generadores de $SU(2)$ conmuta (salvo consigo mismo), podemos tomar a cualquiera de ellos como un generador del subálgebra de Cartan por conveniencia tomamos $J_3 = H$. Un diagrama de pesos, viene dado por los autovalores de los generadores del subálgebra de Cartan en una cierta representación.

Para obtener el diagrama de raíces de $SU(2)$, es mediante los pesos de la representación adjunta.

Definición 2.2.2 (Representación adjunta). Esta representación se construye mediante las constantes de estructura del álgebra de Lie

$$[T_a]_{bc} = -ic_{bc}^a$$

Teniendo la propiedad de que las matrices de esta representación cumplen

$$[T_a, T_b] = ic_{bc}^a T_c$$

Es decir asociamos un endomorfismo entre los generadores y los estados tal que la base de estados es $|X_i\rangle$, y la acción de los generadores de Cartan es

$$H_j |X_i\rangle = |[H_j, X_i]\rangle$$

Como hemos elegido $H = J_3$ y viendo las relaciones de conmutación

$$H|J_1\rangle = i|J_2\rangle, \quad H|J_2\rangle = -i|J_1\rangle, \quad H|J_3\rangle = 0$$

Tenemos que los autovalores de H son

$$\begin{aligned} H|J_1 + iJ_2\rangle &= |J_1 + iJ_2\rangle & |J_1 + iJ_2\rangle &\equiv |E_1\rangle \\ H|J_3\rangle &= 0 & |H\rangle &\equiv |J_3\rangle \equiv |E_0\rangle \\ H|J_1 - iJ_2\rangle &= -|J_1 - iJ_2\rangle & |J_1 - iJ_2\rangle &\equiv |E_{-1}\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto los pesos de los estados son $1, 0, -1$ y el diagrama de raíces es:

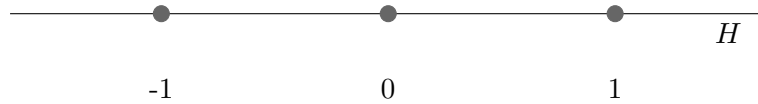


Figura 2.1: Diagrama de raíces de $SU(2)$

Un resultado importante que se puede intuir de mecánica cuántica viendo los operadores $E_{\pm 1}$ es que para el caso general los operadores $E_{\pm\alpha}$ actúan como operadores escalera (Aunque falta ver como son los conmutadores para obtener bien el álgebra como en cuántica) ya que si estamos trabajando en una representación de pesos $|\mu, D\rangle$

$$H_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle = [H_i, E_{\pm\alpha}] |\mu, D\rangle + E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle = \pm\alpha_i E_{\pm\alpha} + \mu_i E_{\pm\alpha} H_i |\mu, D\rangle = (\mu \pm \alpha)_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle \quad (2.1)$$

Por lo que para cada generador del subálgebra de Cartan H_i , hay un subálgebra de $SU(2)$ cuyos generadores son

$$E^\pm = |\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha} \quad E_3 = |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H$$

De manera que obtenemos las relaciones de conmutación

$$[E_3, E^\pm] = |\alpha|^{-3} \alpha \cdot [H, E_{\pm\alpha}] = |\alpha|^{-3} \alpha \cdot (\pm\alpha) E_{\pm\alpha} = \pm E^\pm$$

$$[E^+, E^-] = |\alpha|^{-2} [E_\alpha, E_{-\alpha}]$$

Para acabar de calcular este conmutador, podemos ver que es equivalente a la acción de E_α sobre el ket $|E_{-\alpha}\rangle$ de la representación adjunta, y viendo (2.1) tenemos que su peso tiene que ser $\alpha - \alpha = 0$

$$E_\alpha |E_{-\alpha}\rangle = |\beta \cdot H\rangle$$

Donde sacamos β al proyectar sobre $|H_i\rangle$

$$\beta_i = \langle H_i | E_\alpha | E_{-\alpha} \rangle = \text{Tr}(H_i [E_\alpha, E_{-\alpha}]) = \text{Tr}(E_{-\alpha} [H_i, E_\alpha]) = \alpha_i \text{Tr}(E_{-\alpha} E_\alpha) = \alpha_i \langle E_\alpha | E_\alpha \rangle = \alpha_i$$

Finalmente obteniendo que

$$[E^+, E^-] = |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H = E_3$$

De manera que en cualquier representación de pesos

$$E_3 |\mu, D\rangle = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} |\mu, D\rangle$$

Tenemos que al estar dentro de un subálgebra de $SU(2)$, los autovalores de E_3 sólo pueden ser números enteros o semienteros.

Si aplicamos el operador escalera que sube, llega un punto en el que el estado resultante da cero (Aplicándolo $p + 1$). Si lo aplicamos el máximo número de veces que podemos (p) antes de que de cero y vemos el autovalor de E_3 de este estado obtenemos

$$\frac{\alpha \cdot (\mu + p\alpha)}{\alpha^2} = j$$

De la misma manera para el operador escalera que baja

$$\frac{\alpha \cdot (\mu - q\alpha)}{\alpha^2} = -j$$

Sumando ambas expresiones obtenemos la fórmula maestra

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = \frac{1}{2}(q - p) \tag{2.2}$$

Esta fórmula será importante más adelante ya que nos proporcionará una forma sencilla de conocer todos los pesos y raíces de un álgebra o la representación de un álgebra conociendo sólo las raíces fundamentales del álgebra o el mayor peso de la representación.

Para esto vamos a definir primero las raíces positivas, que son aquellas cuyos vectores raíces $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)$ tienen que su primera componente no nula es positiva.

Decimos que las raíces fundamentales son aquellas raíces positivas que forman una base, es decir que no se pueden escribir como función de otras raíces positivas.

En nuestro caso de $SU(2)$ nuestra raíz fundamental es la asociada al estado $|E_1\rangle$ que vale 1.

Hay una forma de recrear el álgebra partiendo de las raíces fundamentales, que consiste en hallar cuanto vale p sabiendo que $q = 0$, utilizando la fórmula maestra (2.2) obteniendo así el número de veces que podemos utilizar el operador E_{α_i} sobre $|\alpha_j\rangle$ y repitiendo este proceso hasta que todos los valores que hallemos de p sean cero.

Sin embargo hay un proceso mucho más sencillo que sirve también para hallar la representación de un peso, que es utilizar la matriz de Cartan. Que se basa en que como los vectores de las raíces fundamentales α_i son linealmente independientes podemos utilizar los valores de $q_i - p_i$ para etiquetar a los pesos ya que como vemos de la fórmula maestra (2.2) es el doble del autovalor y por tanto contiene la misma información que el vector peso.

Para ello vemos que podemos escribir cualquier peso como una combinación lineal de las raíces fundamentales

$$\phi = \sum_j k_j \alpha_j$$

Para este peso, la fórmula maestra es

$$q_i - p_i = \frac{2\phi \cdot \alpha_i}{\alpha_i^2} = \sum_j k_j \frac{2\alpha_j \cdot \alpha_i}{\alpha_i^2} = \sum_j k_j A_{ji}$$

Donde A es la matriz de Cartan. Por lo que cuando aplicamos el operador E_{α_j} pasamos de k_j a $k_j + 1$, y de $q_i - p_i$ a $q_i - p_i + A_{ji}$.

En nuestro caso de $SU(2)$, tenemos que la matriz de Cartan es $A = 2$ y por tanto podemos ver que la raíz fundamental es la mayor raíz que podemos obtener.

Por último vamos a introducir el mayor peso de una representación y los pesos fundamentales.

El mayor peso μ es aquel que viendo la fórmula maestra (2.2) tiene el mayor p posible por lo que la acción de cualquier operador sobre $|\mu\rangle$ hace que de cero. Haciendo que

$$\frac{2\alpha_j \cdot \mu}{\alpha_j^2} = l_j$$

Donde l_j son los coeficientes de Dynkin que son números enteros no negativos.

Podemos expresar cualquier peso máximo en función de unos pesos que van a ser los pesos fundamentales μ_k y los coeficientes de Dynkin

$$\mu = \sum_j l_j \mu_j$$

Por tanto

$$\frac{2\alpha_j \cdot \mu_k}{\alpha_j^2} = \delta_{jk} \tag{2.3}$$

Para nuestro caso de $SU(2)$, podemos ver que el peso fundamental es $\mu = \frac{1}{2}$.

Este número se comporta como el número cuántico m_s de un estado, ya que si aplicamos E_{-1} al vector peso $|\frac{1}{2}\rangle$ obtenemos algo proporcional al vector $|\mu - \alpha\rangle$.

Por lo que en mecánica cuántica las raíces se comportan como operadores que conectan a los estados que son los pesos.

Si nuestro coeficiente de Dynkin fuera $l = 2$ nuestro peso fundamental es $\mu = 1$ y podemos aplicar dos veces el operador E_{-1} .

Por lo que podemos obtener cualquier representación de un grupo de Lie en función de los coeficientes de Dynkin y viendo mediante la matriz de Cartan, como se conectan los diferentes estados de la representación.

Capítulo 3

Pesos y raíces de $SU(3)$

De la misma manera que hemos hecho para $SU(2)$, podemos hallar los generadores de $SU(3)$, son una generalización de las matrices de Pauli, llamados las matrices de Gell-Mann

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Y al igual que en $SU(2)$ tomamos $T_i = \frac{1}{2}\lambda_i$ para que las relaciones de conmutación sean iguales y no haya factores en unas y no en otras, y podemos ver que T_3 y T_8 conmutan ya que son diagonales pero no conmutan con el resto al ser una generalización de las matrices de Pauli.

Por tanto tomamos como generadores del subálgebra de Cartan a $H_1 = T_3$ y $H_2 = T_8$.

En este caso para hallar el diagrama de raíces lo vamos a hacer utilizando el diagrama de pesos, ya que si utilizamos la representación adjunta tenemos matrices de dimensión 8×8 .

Y sabiendo que las matrices que actúan sobre estados de la representación adjunta actúan de manera análoga a los operadores escalamero, ya que

$$H_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle = (\mu \pm \alpha)_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle$$

Si los vectores de nuestra representación van a ser $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ya que las matrices son

diagonales, tenemos que los pesos son

$$H_1|1\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle \quad H_1|2\rangle = -\frac{1}{2}|2\rangle \quad H_1|3\rangle = 0$$

$$H_2|1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{6}|1\rangle \quad H_2|2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{6}|2\rangle \quad H_2|3\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{3}|3\rangle$$

Podemos representar su diagrama de pesos, diagrama 3.1.

Un resultado importante es el hecho de que los vectores raíces conectan a los distintos pesos por la eq.(2.1) de manera que si restamos los pesos obtenemos las raíces (excepto las dos asociadas con H_1, H_2 que son cero) que son

$$\begin{aligned} (-1/2, \sqrt{3}/6) - (1/2, \sqrt{3}/6) &= (-1, 0) & -(-1/2, \sqrt{3}/6) + (1/2, \sqrt{3}/6) &= (1, 0) \\ (1/2, \sqrt{3}/6) - (0, \sqrt{3}/3) &= (1/2, \sqrt{3}/2) & -(1/2, \sqrt{3}/6) + (0, \sqrt{3}/3) &= (-1/2, -\sqrt{3}/2) \\ (0, -\sqrt{3}/3) - (-1/2, \sqrt{3}/6) &= (1/2, -\sqrt{3}/2) & -(0, -\sqrt{3}/3) + (-1/2, \sqrt{3}/6) &= (-1/2, \sqrt{3}/2) \end{aligned}$$

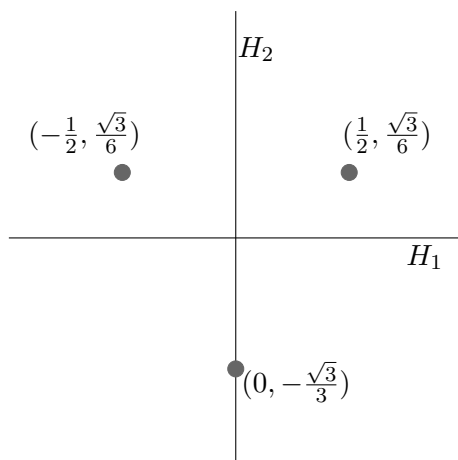


Figura 3.1: Diagrama de pesos de $SU(3)$

Representando las raíces tenemos

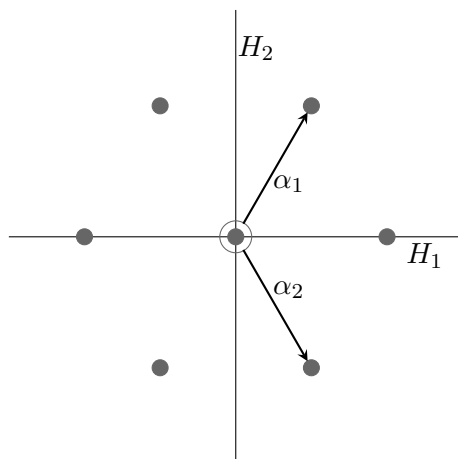


Figura 3.2: Diagrama de raíces de $SU(3)$

Además también hay otra representación de pesos que es importante ya que es la representación conjugada, esta representación viene dada por los pesos

$$\mu_i^{\text{conj}} = -\mu_i$$

ya que si los restamos obtenemos las mismas raíces, y su diagrama es

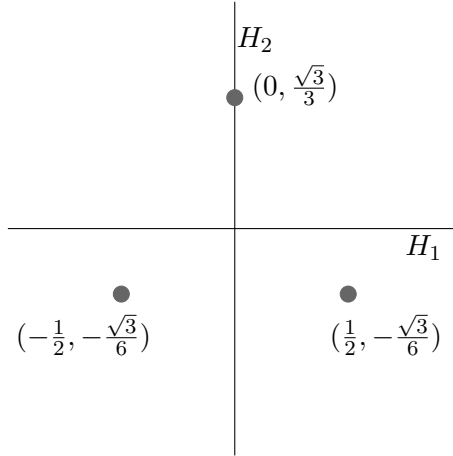


Figura 3.3: Diagrama de pesos conjugado de $SU(3)$

Viendo el diagrama de raíces que hemos obtenido para $SU(3)$, tenemos que las raíces fundamentales son

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \alpha_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Como un mejor ejemplo que el de $SU(2)$ vamos a recrear el álgebra de $SU(3)$ partiendo de sus raíces fundamentales.

Para empezar vamos a calcular la matriz de Cartan utilizando

$$A_{ji} = \frac{2\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_i^2}$$

Y sustituyendo α_1 y α_2 tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora lo que vamos a hacer es un diagrama con sus filas y con k , ya que con $j = 1$ tenemos el valor de $q_i - p_i$ y sabiendo que q_i es cero sabemos cual es el valor de p_i y por tanto que raíces podemos sumar y cuantas veces las podemos sumar.

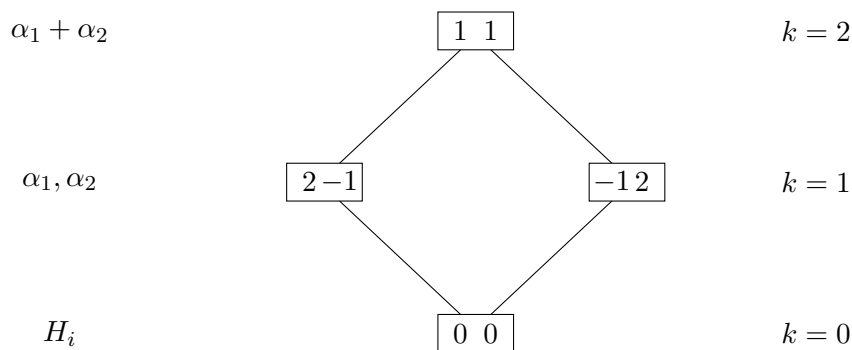


Figura 3.4: Reconstrucción del álgebra de $SU(3)$

En este caso lo que hemos hecho es escribir en cajas los valores de las filas de la matriz de Cartan y vemos que la caja que representa a α_1 es $(2,-1)$, por tanto $p_2 = 1$ y podemos sumarle una vez la caja de α_2 una vez. De la misma manera vemos en la caja de α_2 que $p_1 = 1$ y por tanto le podemos sumar la caja de α_1 una vez.

Una vez hecha la suma vemos que la caja de $\alpha_1 + \alpha_2$ es $(1,1)$ por lo que tenemos $q_1 = q_2 = 1$ y $p_1 = p_2 = 0$ por lo que no tenemos más raíces más allá de $\alpha_1 + \alpha_2$ y para hallar el resto de raíces simplemente basta con hacer el simétrico, es decir que tenemos $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2$.

Si hallamos los pesos fundamentales de $SU(3)$ usando (2.3) y $\alpha_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\alpha_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, tenemos

$$\mu_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}), \quad \mu_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$$

Ambos son los mayores pesos de los diagramas 3.1 y 3.3. Y podemos construir sus representaciones usando la matriz de Cartan, ya que conocemos las raíces fundamentales de $SU(3)$. Para ello el proceso es igual a lo que hemos hecho antes para construir todas las raíces salvo que ahora trabajamos con q en vez de con p y partimos de los coeficientes de Dynkin. Para $(1, 0)$

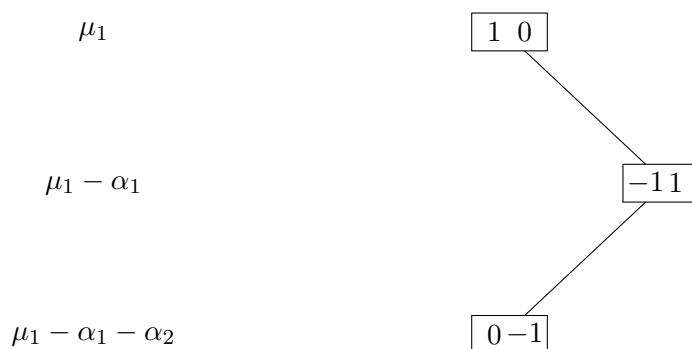


Figura 3.5: Reconstrucción de la representación de $(1,0)$ de $SU(3)$

Como $\mu_1 - \alpha_1 = (0, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ y $\mu_1 - \alpha_1 - \alpha_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$, obtenemos el diagrama 3.1.

Si lo hacemos para $(0,1)$.

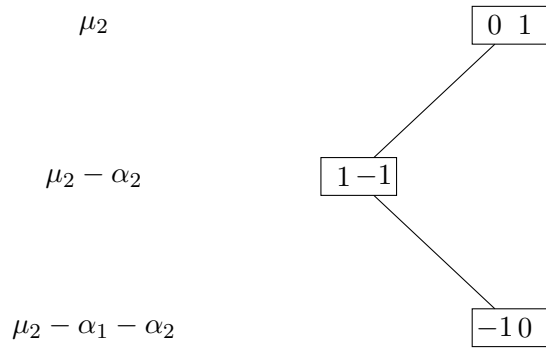


Figura 3.6: Reconstrucción de la representación de $(0,1)$ de $SU(3)$

Como $\mu_2 - \alpha_2 = (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ y $\mu_2 - \alpha_1 - \alpha_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$, obtenemos el diagrama 3.3. Finalmente otro diagrama que será importante es el de $(3,0)$

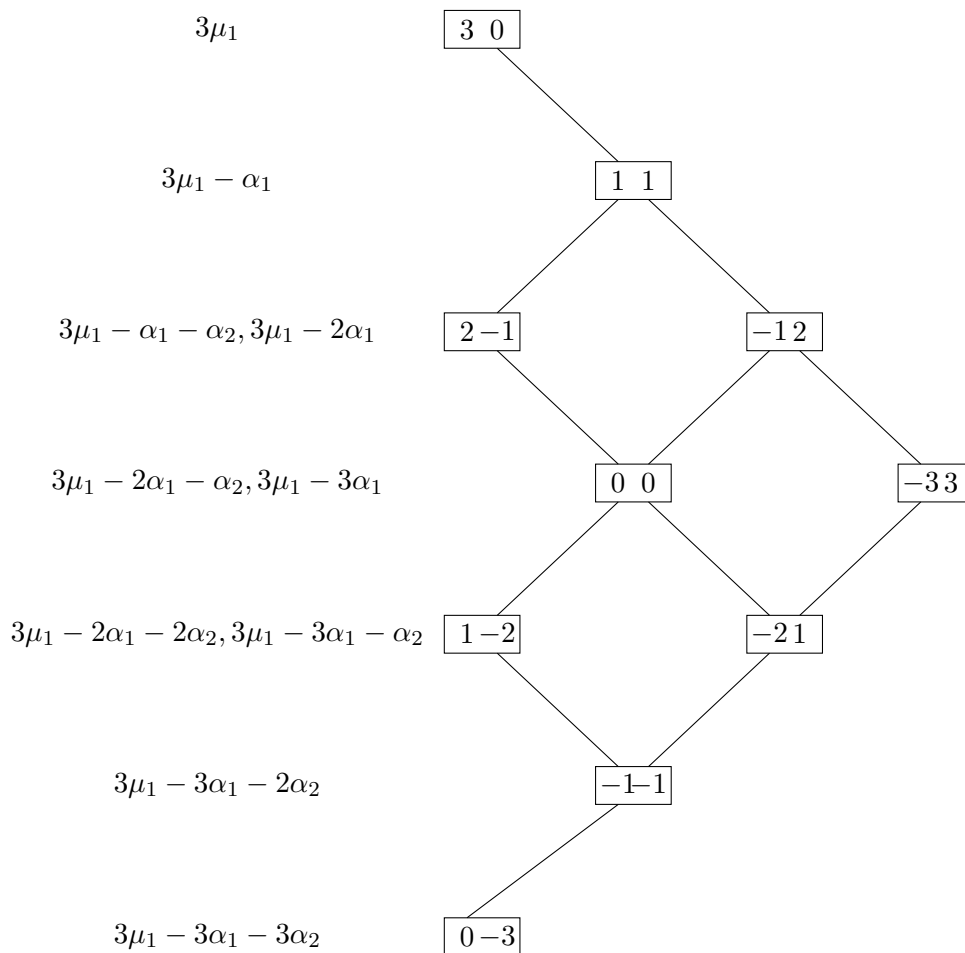


Figura 3.7: Reconstrucción de la representación de $(3,0)$ de $SU(3)$

Si ahora hacemos la representación en el diagrama de Cartan

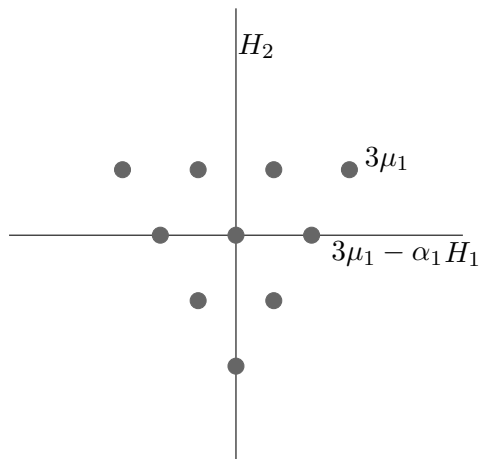


Figura 3.8: Representación de $SU(3)$ $(3, 0)$

Capítulo 4

El Camino Óctuple. Isospin e Hipercarga

4.1. Isospin e Hipercarga

La idea del isospin históricamente surge, de intentar ver cómo es la fuerza entre los nucleones dentro del núcleo, y pensando viendo la similitud entre las masas del protón y del neutrón, que el neutrón es un estado ligado de un protón con un neutrón y las fuerzas nucleares surgen mediante el intercambio de electrones, lo cual no es correcto. Sin embargo es innegable que el protón y el neutrón son equivalentes respecto a la interacción de la fuerza fuerte. De manera que si escribimos como es un nucleón en el espacio de estados del neutrón y del protón tenemos

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |N(p, n)\rangle = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

Por lo que podemos ver que tanto el protón y el neutrón tienen las mismas propiedades de transformación que dos partículas de spin $\frac{1}{2}$ bajo la fuerza fuerte. Así que generalizando esto, podemos ver que la fuerza fuerte tiene una simetría de transformación bajo el grupo $SU(2)$, por lo que podemos introducir dos números cuánticos I, I_3 que se conservan bajo la fuerza fuerte. Al número cuántico I lo denotamos por número de isospin.

Si observamos las propiedades de los bariones veremos que estas satisfacen la fórmula de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} \quad (4.1)$$

Donde B es el número bariónico que vale 1 para los bariones, -1 para los antibariones y 0 para el resto de partículas. Y S es el número cuántico extrañeza que se conserva por la fuerza fuerte.

La suma de ambos números es la hipercarga. Que también lo podemos ver como la tercera componente de una representación de $SU(2)$. Si juntamos todo esto y hacemos un diagrama para los bariones, los mesones y los hadrones, en el que $H_1 = I_3, H_2 = \frac{\sqrt{3}Y}{2}$. Además de que viendo las matrices de Gell-Mann y viendo sus relaciones de conmutación con T_3 que es la matriz que da lugar a la tercera componente de isospin, vemos que la simetría $SU(2)$ de \mathbf{I} viene dada por las matrices T_1, T_2, T_3 ya que cumplen las relaciones de conmutación de este grupo. Si representamos los diagramas, podremos ver que todos tienen se pueden ver como distintas representaciones de $SU(3)$, en el que para los bariones y mesones tenemos el diagrama de raíces o $(1, 1)$ y para los hadrones tenemos la representación $(3, 0)$.

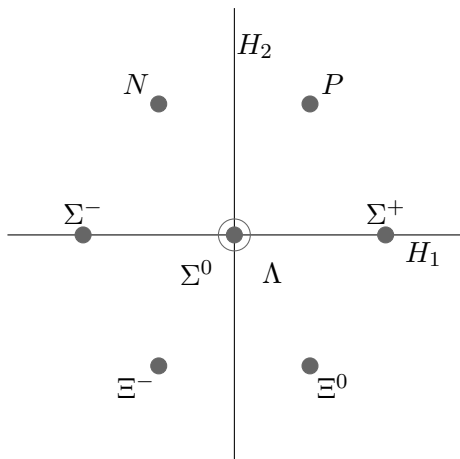


Figura 4.1: Diagrama para los bariones

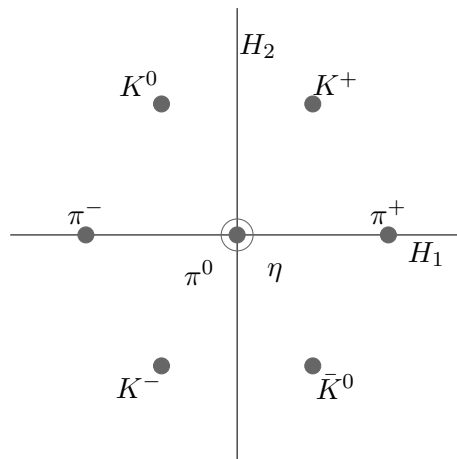


Figura 4.2: Diagrama para los mesones

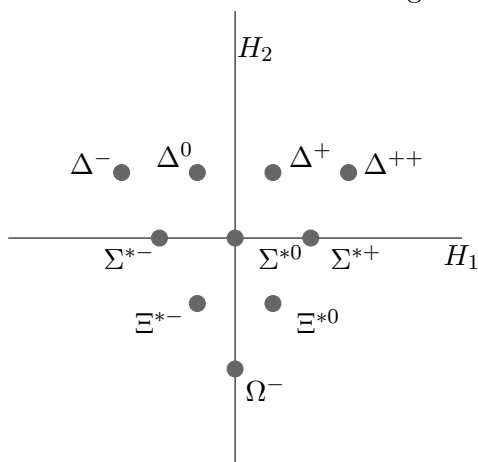


Figura 4.3: Diagrama para los hadrones

Al igual que como vimos en el capítulo de $SU(3)$ el hecho de que estas partículas se puedan escribir como representaciones de $SU(3)$, significa que podemos construir estas partículas como productos tensoriales de las representaciones $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Donde estas representaciones son los quarks y antiquarks.

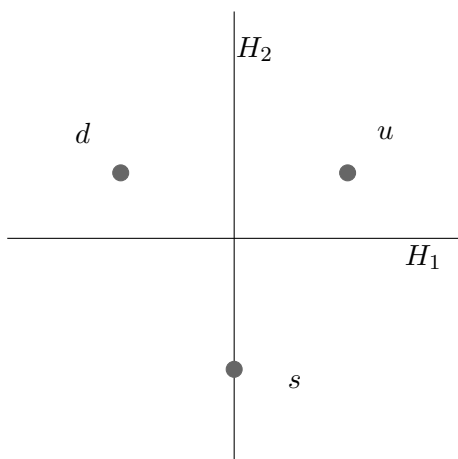


Figura 4.4: Diagrama de quarks

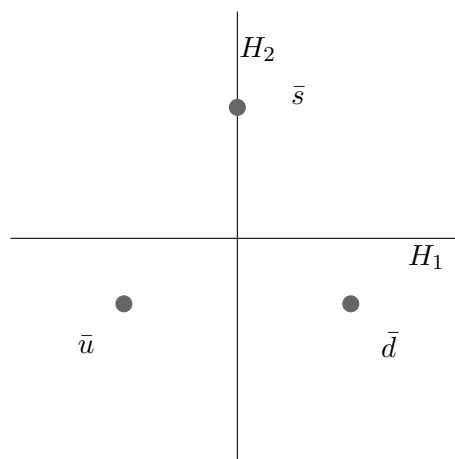


Figura 4.5: Diagrama de antiquarks

De manera que para obtener los bariones, mesones y hadrones es juntar varios quarks, lo que significa que hay que hacer un producto tensorial.

Como para los hadrones tenemos una representación fundamental $(3, 0)$ tenemos que hacer el producto tensorial de $(1, 0)$ por si mismo tres veces. Y para los bariones y mesones al ser una representación $(1, 1)$ hay que añadir la posibilidad de que uno de los octetes esté formado por un quark y un antiquark, haciendo el producto tensorial de $(1, 0)$ por $(0, 1)$.

Las reglas para hacer los productos tensoriales están basadas en los tableros de Young, que se han visto en los capítulos anteriores, y son:

$$(n, m) \otimes (n', m') = (n, n'; m, m') \oplus (n-1, n'; m, m'-1) \oplus (n, n'-1; m-1, m') \oplus (n-1, n'-1; m-1, m'-1) \oplus \dots$$

$$(n, n'; m, m') = (n+n', m+m') \oplus \sum_{i=1}^{\min(n, n')} (n+n'-2i, m+m'+i) \oplus \sum_{j=1}^{\min(m, m')} (n+n'+j, m+m'-2j)$$

Por tanto las partículas subatómicas se obtienen como el producto tensorial de tres quarks

$$(1, 0) \otimes (1, 0) \otimes (1, 0) = [(2, 0) \oplus (0, 1)] \otimes (1, 0) = (3, 0) \oplus (1, 1) \oplus (1, 1) \oplus (0, 0)$$

$$(1, 0) \otimes (0, 1) = (1, 1) \oplus (0, 0)$$

Un resultado importante de hacer $(1, 0) \otimes (1, 0)$ es que los antiquarks $(0, 1)$ se pueden formar como la parte antisimétrica del producto de dos quarks, al menos en el espacio de sabor.

Usando los tableros de Young para construirlos.

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Y viendo cuales son las posibles combinaciones de dos quarks para dar un antiquark tenemos que en el espacio de sabor de $SU(3)$

$$|\bar{u}\rangle = \begin{array}{|c|} \hline d \\ \hline s \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ds\rangle - |sd\rangle)$$

$$|\bar{d}\rangle = \begin{array}{|c|} \hline u \\ \hline s \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|us\rangle - |su\rangle)$$

$$|\bar{s}\rangle = \begin{array}{|c|} \hline u \\ \hline d \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle)$$

4.2. Construcción de los estados

La forma de extender el espacio de estados de $SU(3)$ es incluyendo en los estados de los quarks, el spin de estos y el tipo de quark que son:

$$(|u\rangle, |d\rangle, |s\rangle), (|+\rangle, |-\rangle)$$

Ya hemos visto como construir los antiquarks en el espacio de sabor, ahora falta ver que al ser las antipartículas de los quarks, veremos de los diagramas 4.4 y 4.5 sus distintos valores de isospin e hipercarga, para hallar su número bariónico nos basta saber que los hadrones son bariones, por tanto $B = 1$ y al estar formados por tres quarks el número bariónico de estos es $\frac{1}{3}$. Como conocemos ya el valor de la hipercarga, podemos ver cuanto vale la extrañeza S de los quarks, y con la fórmula de Gell-Mann-Nishijima 4.1 podemos calcular su carga eléctrica. Además los quarks son partículas de spin $\frac{1}{2}$.

Quedando así:

Quark	B	Q	I_3	S	Y
u	$1/3$	$2/3$	$1/2$	0	$1/3$
d	$1/3$	$-1/3$	$-1/2$	0	$1/3$
s	$1/3$	$-1/3$	0	-1	$-2/3$
\bar{u}	$-1/3$	$-2/3$	$-1/2$	0	$-1/3$
\bar{d}	$-1/3$	$1/3$	$1/2$	0	$-1/3$
\bar{s}	$-1/3$	$1/3$	0	1	$2/3$

Cuadro 4.1: Números cuánticos de los quarks conservados por $SU(3)$

De manera que ya podemos calcular los estados usando los tableros de Young y saber sus propiedades por la tabla 4.1.

Empecemos con los hadrones, estos forman un triplete de isospin, por lo que están formados por tres quarks de spin $\frac{1}{2}$ siendo así que el estado de estas partículas debe de ser antisimétrica.

Eso hace que tengamos unas ciertas dificultades, ya que si calculamos el producto tensorial para el espacio $SU(3)$ de sabor. Obtenemos los siguientes tableros.

$$\square \otimes \square \otimes \square = \square \square \square, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Mientras que en el espacio $SU(2)$ de spin.

$$\square \otimes \square \otimes \square = \square \square \square, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

Donde el último tablero de $SU(2)$ se anula al cumplir el principio de exclusión de Pauli ya que no podemos tener tres estados de spin $1/2$ que sean antisimétricos.

Ahora podemos ver claramente que si imponemos que los estados sean antisimétricos, tenemos que asociar el tablero completamente antisimétrico que sólo tiene un estado en el espacio de sabor con el tablero completamente simétrico del espacio de spin que tiene cuatro estados posibles. De manera que no conseguimos ninguno de los diagramas vistos anteriormente.

Para solucionar este problema tenemos que introducir el color.

El color es una propiedad de los quarks que también tiene una simetría de $SU(3)$ al interactuar con los gluones, que proporcionan la fuerza de ligadura entre los quarks.

Los estados de los quarks tienen un índice que va de 1 a 3

$$q^i, \quad i = 1, 2, 3$$

La idea es que la interacción de color junta a tres quarks en un estado bariónico o a un quark y un antiquark en un estado mesónico. Por lo tanto al contraer las funciones de onda de bariones y mesones

$$\epsilon_{ijk} q^i q^j q^k \quad q^i \bar{q}_i$$

Como el tensor de Levi-Civita es antisimétrico, tenemos que para los bariones el estado de color es antisimétrico y la parte de sabor y spin del estado debe de ser simétrica, mientras que para los mesones formados por un quark tienen un producto escalar que es simétrico, por lo que al juntar un quark y un antiquark tenemos que la parte de spin-sabor debe de ser simétrica también ya que al juntar dos partículas de spin 1/2 tenemos un bosón.

Una vez resuelta esta dificultad, ya podemos empezar a calcular los estados.

Para los hadrones que pertenecen a un multiplete $\frac{3}{2}$ de isospin, tenemos que usar el tablero de Young que es completamente simétrico para poder construir los estados en el espacio de sabor, y por tanto tenemos que usar el tablero de Young completamente simétrico en el espacio de spin.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Por lo que para los hadrones, en el espacio de sabor tenemos viendo el diagrama ??

$$\begin{aligned} |\Delta^{++}\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & u & u \\ \hline \end{array} = |uuu\rangle \\ |\Delta^+\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & u & d \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}[|uud\rangle + |udu\rangle + |duu\rangle] \\ |\Delta^0\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & d & d \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}[|udd\rangle + |dud\rangle + |ddu\rangle] \\ |\Delta^-\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline d & d & d \\ \hline \end{array} = |ddd\rangle \\ |\Sigma^{*+}\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & u & s \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}[|uus\rangle + |usu\rangle + |suu\rangle] \\ |\Sigma^{*0}\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & d & s \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{6}}[|uds\rangle + |usd\rangle + |dus\rangle + |dsu\rangle + |sud\rangle + |sdu\rangle] \\ |\Sigma^{*-}\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline d & d & s \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}[|dds\rangle + |dsd\rangle + |sdd\rangle] \\ |\Xi^{*0}\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & s & s \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}[|uss\rangle + |sus\rangle + |ssu\rangle] \\ |\Xi^{*-}\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline d & s & s \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}[|dss\rangle + |sds\rangle + |ssd\rangle] \\ |\Omega^-\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline s & s & s \\ \hline \end{array} = |sss\rangle \end{aligned}$$

Y para el espacio de spin tenemos los siguientes posibles estados simétricos

$$\begin{aligned} \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & + & + \\ \hline \end{array} = |+++ \rangle \\ \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & + & - \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}[|++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle] \\ \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & - & - \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}[|+--\rangle + |-+-\rangle + |--+\rangle] \\ \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline - & - & - \\ \hline \end{array} = |--- \rangle \end{aligned}$$

Si hacemos lo mismo para el octete bariónico, si queremos que sea simétrico tenemos que utilizar los siguientes tableros de Young para construir los estados.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Ya que en ambos hay las componentes horizontales son simétricas entre sí, mientras que las verticales son antisimétricas, por lo que al hacer su producto tensorial no queda completamente antisimétrico, para conseguir que lo sea, tenemos que definir algo parecido a un tablero de Young

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant}$$

Que lo que hace es antisimetrizar tanto en filas como en columnas. Y el estado formado por la suma de estos es completamente simétrico, mientras que la resta es completamente antisimétrica.

Los estados, los vamos a obtener para el peso máximo del spin, si quisiéramos obtener los estados de menor peso deberíamos cambiar el signo + por el -.

Viendo el octete bariónico 4.1

$$\begin{aligned} |\Sigma^+, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{|c|c|} \hline u & u \\ \hline s & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline + & + \\ \hline - & \\ \hline \end{array} + \left(\begin{array}{|c|c|} \hline s & u \\ \hline u & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline - & + \\ \hline + & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{6} (2|uus\rangle - |suu\rangle - |usu\rangle) (2|++-\rangle - |-++\rangle - |+-+\rangle) + \frac{1}{2} (|suu\rangle - |usu\rangle) (|-++\rangle - |+-+\rangle) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \{ |uus\rangle (2|++-\rangle - |-++\rangle - |+-+\rangle) + |usu\rangle (2|+-+\rangle - |-++\rangle - |++-\rangle) + \\ & \quad |suu\rangle (2|-++\rangle - |++-\rangle - |+-+\rangle) \} \end{aligned}$$

Para el resto de estados, no vamos a escribir los pasos intermedios, sólo los tableros y el estado final.

$$\begin{aligned} |P, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{|c|c|} \hline u & u \\ \hline d & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline + & + \\ \hline - & \\ \hline \end{array} + \left(\begin{array}{|c|c|} \hline d & u \\ \hline u & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline - & + \\ \hline + & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \{ |uud\rangle (2|++-\rangle - |-++\rangle - |+-+\rangle) + |udu\rangle (2|+-+\rangle - |-++\rangle - |++-\rangle) + \\ & \quad |duu\rangle (2|-++\rangle - |++-\rangle - |+-+\rangle) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |N, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{|c|c|} \hline d & d \\ \hline u & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline + & + \\ \hline - & \\ \hline \end{array} + \left(\begin{array}{|c|c|} \hline u & d \\ \hline d & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline - & + \\ \hline + & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \{ |ddu\rangle (2|++-\rangle - |-++\rangle - |+-+\rangle) + |dud\rangle (2|+-+\rangle - |-++\rangle - |++-\rangle) + \\ & \quad |udd\rangle (2|-++\rangle - |++-\rangle - |+-+\rangle) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Sigma^-, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{|c|c|} \hline d & d \\ \hline s & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline + & + \\ \hline - & \\ \hline \end{array} + \left(\begin{array}{|c|c|} \hline s & d \\ \hline d & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline - & + \\ \hline + & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \{ |dds\rangle (2|++-\rangle - |-++\rangle - |+-+\rangle) + |dsd\rangle (2|+-+\rangle - |-++\rangle - |++-\rangle) + \\ & \quad |sdd\rangle (2|-++\rangle - |++-\rangle - |+-+\rangle) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\Xi^0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{|c|c|} \hline s & s \\ \hline u & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline + & + \\ \hline - & \\ \hline \end{array} + \left(\begin{array}{|c|c|} \hline u & s \\ \hline s & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline - & + \\ \hline + & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{6} \{ |ssu\rangle (2|++-\rangle - |-++\rangle - |+ - +\rangle) + |sus\rangle (2|+-+\rangle - |-++\rangle - |++-\rangle) + \\
 & \quad |uss\rangle (2|-++\rangle - |++-\rangle - |+ - +\rangle) \} \\
 |\Xi^-, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{|c|c|} \hline s & s \\ \hline d & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline + & + \\ \hline - & \\ \hline \end{array} + \left(\begin{array}{|c|c|} \hline d & s \\ \hline s & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline - & + \\ \hline + & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{6} \{ |ssd\rangle (2|++-\rangle - |-++\rangle - |+ - +\rangle) + |sds\rangle (2|+-+\rangle - |-++\rangle - |++-\rangle) + \\
 & \quad |dss\rangle (2|-++\rangle - |++-\rangle - |+ - +\rangle) \}
 \end{aligned}$$

Para los dos últimos hay que hallar una combinación lineal que nos de que sea completamente antisimétrico, y en este caso lo más fácil es hallar como es uno de los estados y hallar las permutaciones cíclicas. El primero lo podemos ver como las permutaciones cíclicas de los tableros *Ant* y el segundo como las permutaciones cíclicas de los tableros normales.

$$\begin{aligned}
 |\Lambda, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \left[\alpha \begin{array}{|c|c|} \hline u & d \\ \hline s & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline + & + \\ \hline - & \\ \hline \end{array} + \beta \left(\begin{array}{|c|c|} \hline s & d \\ \hline u & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline - & + \\ \hline + & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \right] \\
 &= \alpha (|uds\rangle - |sdu\rangle + |dus\rangle - |sud\rangle) (2|++-\rangle - |+ - +\rangle - |-++\rangle) \\
 & \quad + \beta (|sdu\rangle - |dsu\rangle - |uds\rangle + |dus\rangle) (|-++\rangle - |+ - +\rangle) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{6} [(|uds\rangle - |dus\rangle) (|+ - +\rangle - |-++\rangle) \\
 & \quad + (|sud\rangle - |sdu\rangle) (|++-\rangle - |+ - +\rangle) \\
 & \quad + (|dsu\rangle - |usd\rangle) (|-++\rangle - |++-\rangle)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\Sigma^0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \left[\alpha \begin{array}{|c|c|} \hline u & d \\ \hline s & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline + & + \\ \hline - & \\ \hline \end{array} + \beta \left(\begin{array}{|c|c|} \hline s & d \\ \hline u & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline - & + \\ \hline + & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} \right] \\
 &= \alpha (|uds\rangle - |sdu\rangle + |dus\rangle - |sud\rangle) (2|++-\rangle - |+ - +\rangle - |-++\rangle) \\
 & \quad + \beta (|sdu\rangle - |dsu\rangle - |uds\rangle + |dus\rangle) (|-++\rangle - |+ - +\rangle) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{6} [(|uds\rangle + |dus\rangle) (2|++-\rangle - |+ - +\rangle - |-++\rangle) + (|sud\rangle + |sdu\rangle) (2|-++\rangle - |++-\rangle - |+ - +\rangle) \\
 & \quad + (|dsu\rangle + |usd\rangle) (2|+-+\rangle - |++-\rangle - |-++\rangle)]
 \end{aligned}$$

Ahora para calcular el octete mesónico volvemos a tener el mismo problema de la simetría, ya que los antiquarks vienen de acoplar dos quarks. Mientras que la parte de spin es completamente antisimétrica. Al menos en este caso, ya que vamos a construir el que tiene $s = 0$, hay otro octete posible que tiene $s = 1$ y en este la parte de spin es completamente simétrica.

El único estado de spin es

$$|0, 0\rangle = \begin{array}{|c|} \hline + \\ \hline - \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle)$$

Para resolver este problema vamos a antisimetrizar el espacio de sabor calculando

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant}$$

Esto se debe a que al tener sólo dos partículas buscamos que el quark sea antisimétrico frente al antiquark, por tanto al obtener el tablero tenemos que antisimetrizar en las dos direcciones.

Viendo el diagrama 4.2 para saber que quark y que antiquark conforman al estado, vamos a calcular entonces los estados del espacio de sabor.¹

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle &= \left(\begin{array}{|c|c|} \hline s & u \\ \hline u & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|suu\rangle - |usu\rangle) = |\bar{d}u\rangle \\ |K^+\rangle &= \left(\begin{array}{|c|c|} \hline d & u \\ \hline u & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|duu\rangle - |udu\rangle) = |\bar{s}u\rangle \\ |K^0\rangle &= \left(\begin{array}{|c|c|} \hline u & d \\ \hline d & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|udd\rangle - |dud\rangle) = |\bar{s}d\rangle \\ |\pi^-\rangle &= \left(\begin{array}{|c|c|} \hline s & d \\ \hline d & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|sdd\rangle - |dsd\rangle) = |\bar{u}d\rangle \\ |K^-\rangle &= \left(\begin{array}{|c|c|} \hline d & s \\ \hline s & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|dss\rangle - |sds\rangle) = |\bar{u}s\rangle \\ |\bar{K}^0\rangle &= \left(\begin{array}{|c|c|} \hline u & s \\ \hline s & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|uss\rangle - |sus\rangle) = |\bar{d}s\rangle \\ |\pi^0\rangle &= \left(\begin{array}{|c|c|} \hline u & d \\ \hline s & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} = \frac{1}{2}(|usd\rangle - |sud\rangle) - |dsu\rangle + |sdu\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{u}u\rangle - |\bar{d}d\rangle) \end{aligned}$$

Para el último estado vamos a hacer una combinación lineal para obtener un estado ortonormal a el de $|\pi^0\rangle$

$$|\eta_8\rangle = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline u & s \\ \hline d & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} + \left(\begin{array}{|c|c|} \hline d & u \\ \hline s & \\ \hline \end{array} \right)_{Ant} = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle - 2|\bar{s}s\rangle)$$

Además del octete existe un estado singlete que es ortonormal a ambos estados

$$|\eta_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle + |\bar{s}s\rangle)$$

¹A la hora de simplificar los estados de los antiquarks, tomamos todos como positivos, independientemente de como hayamos definido los estados antes, salvo que tengamos un factor de fase que no sea global.

4.3. Cálculo de los momentos magnéticos

Finalmente queremos comprobar si la teoría funciona bien, para ello vamos a calcular los momentos magnéticos de las partículas que hemos hallado.

Para ello tenemos que utilizar:

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^3 \frac{2\mu_i}{\hbar} \mathbf{s}_i, \quad \mu_i = \frac{eQ_i}{2m_i} \quad \text{Para cada quark, } i=u,s,d \quad (4.2)$$

Y tenemos que hallar el valor medio de la componente z de $\boldsymbol{\mu}$ cuando estamos en la proyección máxima del spin.

Si hacemos este cálculo para los mesones, se ve de manera trivial que no tienen momento magnético, ya que no tienen carga neta y su componente $s_z = 0$.

$$\mu(\text{mesones}) = 0$$

Vamos a empezar por el decuplete bariónico en vez de por el octete ya que es más sencillo, y vamos a suponer que todos los quarks tienen la misma masa. Entonces

$$\mu(\Delta^{++}) = \langle \Delta^{++}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} | (\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2 + \boldsymbol{\mu}_3)_z | \Delta^{++}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle = \frac{2}{\hbar} \sum_i \langle u+, u+, u+ | \mu_i s_{zi} | u+, u+, u+ \rangle = 3\mu_u$$

Una vez calculado el primero, el resto se calculan de manera análoga, en el caso del decuplete es muy sencillo, ya que como tenemos todos los spines $+$ y el estado de color es completamente simétrico, simplemente basta con sumar los momentos magnéticos de los quarks que forman la partícula.²

Barión	Predicción teórica	Valor teórico en μ_N	Valor experimental en μ_N
Δ^{++}	$3\mu_u$	5.586	4.52
Δ^+	$2\mu_u + \mu_d$	2.793	
Δ^0	$2\mu_d + \mu_u$	0	
Δ^-	$3\mu_d$	-2.793	
Σ^{*+}	$2\mu_u + \mu_s$	3.114	
Σ^{*0}	$\mu_u + \mu_d + \mu_s$	0.321	
Σ^{*-}	$2\mu_d + \mu_s$	-2.472	
Ξ^{*0}	$2\mu_s + \mu_u$	0.642	
Ξ^{*-}	$2\mu_s + \mu_d$	-2.151	
Ω^-	$3\mu_s$	-1.83	-2.02

Cuadro 4.2: Valores teóricos de los momentos magnéticos del decuplete bariónico

Si lo hacemos para el octuplete el cálculo es exactamente el mismo, pero vamos a mostrar como se hace para el protón para que quede más claro.

En este caso como el estado tiene permutaciones cíclicas, basta con calcularlo para una de ellas, ya que en el resto darán lo mismo. Primero calculamos la acción del operador.

$$\begin{aligned} \sum_i \mu_i s_{zi} |P, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_i \mu_i s_{iz} [2|u+, u+, d-\rangle - |u-, u+, d+\rangle - |u+, u-, d+\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\hbar}{2} [2(2\mu_u - \mu_d)|u+, u+, d-\rangle - \mu_d|u-, u+, d+\rangle - \mu_d|u+, u-, d+\rangle] \end{aligned}$$

²El como hallar los calcular los valores teóricos de los quarks viene hecho más adelante.

Multiplicando por $\frac{2}{\hbar}\langle P, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} |$

$$\mu(P) = \frac{1}{6}[4(2\mu_u - \mu_d) + \mu_d + \mu_d] = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d)$$

Y para calcular los valores de los momentos magnéticos de los quarks, vamos a suponer que tienen la misma masa m_q y como ya conocemos sus cargas

$$\mu_u = \frac{2}{3} \frac{e}{2m_q}, \quad \mu_d = \mu_s = -\frac{1}{3} \frac{e}{2m_q}$$

Por lo tanto tenemos que $\mu_u = -2\mu_d = -2\mu_s$.

Sabemos que el momento magnético del protón experimentalmente es $\mu(P) = 2,793\mu_N$. Por tanto

$$\frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d) = \frac{3}{2}\mu_u = 2,793\mu_N$$

Obteniendo así

$$\mu_u = 1,862\mu_N, \quad \mu_d = \mu_s = -0,931\mu_N$$

Si hacemos los cálculos de la predicción teórica del octete (la mayoría de los cálculos son muy sencillos ya que partiendo del calculo del protón podemos sustituir los diferentes momentos magnéticos viendo los tableros de Young, ya que dan el mismo estado cambiando los quarks de las etiquetas), tendremos que $\mu(\Lambda) = \mu_s = -0,931$ teóricamente, pero experimentalmente falla siendo su valor $-0,61$. Esto se debe a que la masa de s es distinta de la masa de u, d y teniendo en cuenta esta corrección podemos hallar que $\frac{m_s}{m_{u,d}} = 1,5516$. Corrigiendo esto

$$\mu_u = 1,862\mu_N, \quad \mu_d = -0,931\mu_N, \quad \mu_s = -0,61\mu_N$$

. Repitiendo los cálculos que hemos hecho para el protón, obtenemos:

Barión	Predicción teórica	Valor teórico en μ_N	Valor experimental en μ_N
P	$\frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d)$	2.793	2.79
N	$\frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u)$	-1.862	-1.91
Λ	μ_s	-0.61	-0.61
Σ^+	$\frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_s)$	2.686	2.41
Σ^0	$\frac{1}{3}[2(\mu_u + \mu_d) - \mu_s]$	0.824	
Σ^-	$\frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_s)$	-1.038	-1.16
Ξ^0	$\frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_u)$	-1.434	-1.25
Ξ^-	$\frac{1}{3}(4\mu_s - \mu_d)$	-0.5033	-0.651

Cuadro 4.3: Valores teóricos de los momentos magnéticos del octete bariónico

Por lo que podemos ver un acuerdo con los valores experimentales.

4.4. Cálculo de las masas

Con la corrección que hemos hecho antes podemos hallar las diferencias entre las masas de los quarks.

Para ello partimos de que la fuerza fuerte se puede separar en dos partes, una de interacciones muy fuertes que conserva la simetría de $SU(3)$ y una medianamente fuerte que rompe esta simetría, pero conserva el isospin y la hipercarga.

De tal manera que la masa de los quarks y de los bariones se puede separar en dos términos, un

término debido a la interacción muy fuerte que es provocado por las interacciones de los quarks y el término de las interacciones medianamente fuertes contribuye con las masas de los quarks.

$$H_{ms} = \sum_i m_i$$

Además de física nuclear [34], sabemos que la fuerza nuclear fuerte es muy dependiente del spin, por lo que la parte de interacción muy fuerte que conserva $SU(3)$ será distinta para las partículas de spin distinto. Y tendrá la forma siguiente, debido al acople del spin de los quarks

$$H_{vs} = \sum_{(pares)i,j} \frac{k}{m_i m_j} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j$$

Faltaría finalmente tener en cuenta la masa electromagnética de las partículas, que viene dada por la interacción entre las cargas de los quarks

$$H_{em} = \delta \sum_{(pares)i,j} Q_i Q_j$$

Por tanto la masa de los multipletes de isospin va a ser la misma excepto por la masa electromagnética (Al estar formados por el mismo número de quarks ligeros y de quarks strange, las contribuciones de H_{vs} y H_{ms} son las mismas). Haciendo que las masas de las partículas sean

$$m(P) = \langle P, s, m_s | H_{vs} + H_{ms} + H_{em} | P, s, m_s \rangle$$

Si hacemos los cálculos para los bariones de spin $\frac{3}{2}$, como en el espacio de spin su estado es $|+++ \rangle$, a la hora de calcular el valor esperado de $\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j = \frac{2}{\hbar^2} [(\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j)^2 - \mathbf{s}_i^2 - \mathbf{s}_j^2]$, que en este caso al tener este estado, para todos los valores da que $s_i + s_j = 1$, $s_i = s_j = \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{\hbar^2} [(\mathbf{s}_i + \mathbf{s}_j)^2 - \mathbf{s}_i^2 - \mathbf{s}_j^2] |+++ \rangle = 2 \left[2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right] = |+++ \rangle$$

Por lo tanto podemos ver que las masas totales de los bariones de spin $\frac{3}{2}$ haciendo el cálculo con los estados de estos, al igual que hemos hecho para los momentos magnéticos. (En este caso para simplificar un poco $m_{u,s} = m_l$ ya que son los quarks ligeros)

Barión	Predicción teórica	Valor teórico en MeV	Valor experimental en MeV
Δ^{++}	$\frac{3k}{m_l^2} + 3m_l + \frac{4}{3}\delta$	1235.6	1232
Δ^+	$\frac{3k}{m_l^2} + 3m_l$	1232	1232
Δ^0	$\frac{3k}{m_l^2} + 3m_l - \frac{\delta}{3}$	1232.9	1232
Δ^-	$\frac{3k}{m_l^2} + 3m_l + \frac{\delta}{3}$	1230.2	1232
Σ^{*+}	$k \left(\frac{1}{m_l^2} + \frac{2}{m_l m_s} \right) + 2m_l + m_s$	1382.80	1382.80
Σ^{*0}	$k \left(\frac{1}{m_l^2} + \frac{2}{m_l m_s} \right) + 2m_l + m_s - \frac{\delta}{3}$	1383.7	1383.7
Σ^{*-}	$k \left(\frac{1}{m_l^2} + \frac{2}{m_l m_s} \right) + 2m_l + m_s + \frac{\delta}{3}$	1381.9	1387.2
Ξ^{*0}	$k \left(\frac{1}{m_s^2} + \frac{2}{m_l m_s} \right) + 2m_s + m_l - \frac{\delta}{3}$	1542.08	1531.8
Ξ^{*-}	$k \left(\frac{1}{m_s^2} + \frac{2}{m_l m_s} \right) + 2m_s + m_l + \frac{\delta}{3}$	1540.28	1535.0
Ω^-	$\frac{3k}{m_s^2} + 3m_s + \frac{\delta}{3}$	1708.04	1672.45

Cuadro 4.4: Valores teóricos de las masas del decuplete bariónico

Para hallar los valores teóricos, necesitamos tres valores experimentales, dos de ellos de las masas que no tienen un aporte de masa electromagnética para despejar las masas de los quarks y el valor de k y la tercera para hallar el valor de δ . Por ello comparamos los valores de $m(\Delta^+)$ con $m(\Sigma^{*+})$. Para despejar la k y las masas de los quarks recordando que $m_s = 1,5516m_l$. Despejando de ambas obtenemos

$$m_u = m_d = 350,693 \frac{\text{MeV}}{c^2}, \quad m_s = 544,135 \frac{\text{MeV}}{c^2}, \quad k = 7,26343 \cdot 10^6 \frac{\text{MeV}^3}{c^6}$$

Para hallar el valor de δ , comparamos el valor de $m(\Sigma^{*+})$ y $m(\Sigma^{*0})$, por tanto

$$\delta = -2,7 \text{ MeV}$$

Pudiendo así calcular el resto de valores teóricos.

Finalmente, podemos observar que hay una diferencia de unos 4MeV entre las masas de $m(\Sigma^{*-}) - m(\Sigma^{*0})$, al igual que sucede para $m(\Xi^{*-}) - m(\Xi^{*0})$ siendo mayor la masa que teóricamente debería ser menor debido la contribución electromagnética. Esta diferencia se debe a que las masas de los quarks up y down no son exactamente iguales, pero si que son lo suficientemente parecidas para que la masa debida a la interacción muy fuerte de ambas sea la misma, pero la interacción medianamente fuerte no. De manera que, si restamos las contribuciones de la fuerza fuerte a las masas

$$m_d - m_u \approx 4 \frac{\text{MeV}}{c^2} \rightarrow m_u = 350,693 \frac{\text{MeV}}{c^2} \quad m_d = 354,693 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

Con esto ya podemos calcular las masas de los bariones de spin $\frac{1}{2}$ y la de los mesones de spin 0.

Barión	Predicción teórica	Valor teórico en MeV/ c^2	Valor experimental en MeV/ c^2
P	$-\frac{3k}{m_l^2} + 3m_l$	872.16	938.272
N	$-\frac{3k}{m_l^2} + 3m_l - \frac{\delta}{3}$	873.06	939.565
Λ	$4k \left(\frac{1}{4m_l^2} - \frac{1}{m_s m_l} \right) + 2m_l + m_s - \frac{\delta}{3}$	1151.78	1115.683
Σ^+	$4k \left(\frac{1}{4m_l^2} - \frac{1}{m_s m_l} \right) + 2m_l + m_s$	1150.88	1189.37
Σ^0	$4k \left(\frac{1}{4m_l^2} - \frac{1}{m_s m_l} \right) + 2m_l + m_s - \frac{\delta}{3}$	1151.78	1192.642
Σ^-	$4k \left(\frac{1}{4m_l^2} - \frac{1}{m_s m_l} \right) + 2m_l + m_s + \frac{\delta}{3}$	1149.98	1197.45
Ξ^0	$4k \left(\frac{1}{4m_s^2} - \frac{1}{m_s m_l} \right) + 2m_s + m_l - \frac{\delta}{3}$	1310.16	1314.86
Ξ^-	$4k \left(\frac{1}{4m_s^2} - \frac{1}{m_s m_l} \right) + 2m_s + m_l + \frac{\delta}{3}$	1308.36	1321.71

Cuadro 4.5: Valores teóricos de las masas del octete bariónico

Finalmente haciendo lo mismo para el octete mesónico, teniendo en cuenta que las masas de los quarks y los antiquarks son iguales. Además que su estado en el espacio de spin es el $|0,0\rangle$. Y tenemos que volver a calcular el valor de k ya que la fuerza de la interacción entre un quark y un antiquark es distinta. En este caso vamos a utilizar la masa del pión π^+ para calcularla.

$$m(\pi^+) = -\frac{3k}{m_l^2} + 2m_l + \frac{2\delta}{9} = 139,57 \frac{\text{MeV}}{c^2} \rightarrow k = 2,3007 \cdot 10^7 \frac{\text{MeV}^3}{c^6}$$

Mesón	Predicción teórica	Valor teórico en MeV	Valor experimental en MeV
π^+	$-\frac{3k}{4m_l^2} + 2m_l + \frac{2\delta}{9}$	139.57	139.57
K^+	$-\frac{3k}{4m_l m_s} + m_l + m_s + \frac{2\delta}{9}$	532.526	493.677
K^0	$-\frac{3k}{4m_l m_s} + m_l + m_s - \frac{\delta}{9}$	533.426	497.614
π^-	$-\frac{3k}{4m_l^2} + 2m_l + \frac{2\delta}{9}$	139.57	139.57
K^-	$-\frac{3k}{4m_l m_s} + m_l + m_s + \frac{2\delta}{9}$	532.526	493.677
\bar{K}^0	$-\frac{3k}{4m_l m_s} + m_l + m_s - \frac{\delta}{9}$	533.426	497.614
π^0	$-\frac{3k}{4m_l^2} + 2m_l - \frac{5\delta}{18}$	140.92	134.976
η_8	$-\frac{k}{4} \left(\frac{1}{m_l^2} + \frac{2}{m_s^2} \right) + \frac{1}{3}(2m_l + 4m_s) - \frac{\delta}{6}$	617.276	547.862

Cuadro 4.6: Valores teóricos de las masas del octete mesónico

4.5. Transiciones Radiativas

Finalmente queremos calcular las probabilidades de que los bariones de spin $\frac{3}{2}$ decaigan en bariones de spin $\frac{1}{2}$ emitiendo un fotón $\mathcal{P}(B_{10} \rightarrow B_8 + \gamma)$.

Para ello, tenemos que el decaimiento está caracterizada por el momento magnético, y el Hamiltoniano que da cuenta de la interacción es:

$$H_I = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = B\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{k} \wedge \hat{\epsilon}_\lambda) \quad \text{Al ser el campo magnético } \mathbf{B} = iA_0(\mathbf{k} \wedge \hat{\epsilon}_\lambda)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

Donde \mathbf{k} es la dirección de avance del campo y $\hat{\epsilon}_\lambda$ son las dos direcciones de polarización de los fotones.

Por tanto la probabilidad de que una partícula decaiga en otra es

$$\mathcal{P}(B_{10} \rightarrow B_8 + \gamma) = |\langle B_{10} | \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} | B_8 \rangle|^2$$

Hay que tener en cuenta que a la hora de hacer el cálculo hay que sumar las distintas polarizaciones de los fotones, ya que no sabemos cuál vamos a obtener en el fotón, al igual que con los spines finales por el mismo motivo. Además de que hay que hacer el promedio del spin de los estados iniciales ya que vamos a suponer que las probabilidades de obtener un cierto estado de spin inicial son equiprobables. Por tanto,

$$\mathcal{P}(B_{10} \rightarrow B_8 + \gamma) = \frac{1}{4} \sum_{m, m', \lambda} |\langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle|^2$$

Primero vamos a calcular la suma sobre las polarizaciones de los fotones.

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} |\langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | B\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{k} \wedge \hat{\epsilon}_\lambda) | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle|^2 = \\ \sum_{\lambda} B^2 (\hat{\epsilon}_\lambda \wedge k)^l (\hat{\epsilon}_\lambda \wedge k)^m \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \mu_1 \sigma_1^l + \mu_2 \sigma_2^l + \mu_3 \sigma_3^l | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle \\ \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \mu_1 \sigma_1^m + \mu_2 \sigma_2^m + \mu_3 \sigma_3^m | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle \end{aligned}$$

Si hacemos la suma de las componentes vectoriales, utilizando el tensor de Levi-Civita

$$\sum_{\lambda} B^2 (\hat{\epsilon}_\lambda \wedge k)^l (\hat{\epsilon}_\lambda \wedge k)^m = \sum_{\lambda} \epsilon_{pq}^l \hat{\epsilon}_\lambda^p k^q \epsilon_{st}^m \hat{\epsilon}_\lambda^s k^t$$

Como en el gauge que hemos elegido $\hat{\varepsilon}_\lambda \cdot \mathbf{k} = 0$. Tenemos un triedro ortogonal formado por los vectores $\hat{\varepsilon}_1 \perp \hat{\varepsilon}_2 \perp \mathbf{k}$. Por lo que

$$\sum_\lambda \hat{\varepsilon}_\lambda^p \hat{\varepsilon}_\lambda^q = \delta^{pq} - \frac{k^p k^q}{k^2}$$

Sustituyendo esto en la ecuación anterior, obtenemos

$$\sum_\lambda B^2(\hat{\varepsilon}_\lambda \wedge k)^l (\hat{\varepsilon}_\lambda \wedge k)^m = \epsilon^l{}_{pq} \epsilon^m{}_{st} (\delta^{ps} - \frac{k^p k^s}{k^2}) k^q k^t$$

Por las propiedades del tensor de Levi-Civita, el segundo término del paréntesis contribuye a un $\frac{(\mathbf{k} \wedge \mathbf{k})^2}{k^2}$, de manera que se anula. Y usando más propiedades ($\epsilon_{ijk} \epsilon^{pqk} = \delta_i^p \delta_j^q - \delta_i^q \delta_j^p$)

$$\sum_\lambda B^2(\hat{\varepsilon}_\lambda \wedge k)^l (\hat{\varepsilon}_\lambda \wedge k)^m = \epsilon^{ps}{}_q \epsilon^m{}_{st} k^q k^t = (\delta^{lm} \delta_{qt} - \delta_t^l \delta_q^m) k^q k^t = \delta^{lm} k^2 - k^l k^m$$

Obteniendo así

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B_{10} \rightarrow B_8 + \gamma) &= \frac{B^2}{4} \sum_{m, m'} [k^2 \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \boldsymbol{\mu} | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \boldsymbol{\mu} | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle \\ &\quad - \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu} | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu} | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle] \end{aligned}$$

Donde como los estados son simétricos tanto en $|B_{10}, \frac{3}{2}, m'\rangle$, como en $|B_8, \frac{1}{2}, m\rangle$. De manera que podemos sustituir $\boldsymbol{\mu}$ por $3\boldsymbol{\mu}_1$ en vez de por $\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2 + \boldsymbol{\mu}_3$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B_{10} \rightarrow B_8 + \gamma) &= \frac{9B^2}{4} \sum_{m, m'} [k^2 \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \boldsymbol{\mu}_1 | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \boldsymbol{\mu}_1 | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle \\ &\quad - \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu}_1 | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mu}_1 | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle] \end{aligned}$$

Si separamos la parte de sabor y la parte de spin para ver cómo actúa el operador $\boldsymbol{\mu}_1 = 2\boldsymbol{\mu}_1 \boldsymbol{\sigma}_1$

$$\begin{cases} |B_{10}, \frac{3}{2}, m'\rangle = |B_{10}\rangle \otimes |\frac{3}{2}, m'\rangle \\ |B_8, \frac{1}{2}, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|B_8\rangle_S \otimes |\frac{1}{2}, m\rangle_S + |B_8\rangle_A \otimes |\frac{1}{2}, m\rangle_A] \end{cases}$$

Sustituyendo queda

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B_{10} \rightarrow B_8 + \gamma) &= \frac{9B^2}{8} \sum_{m, m'} [k^2 \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \boldsymbol{\mu}_1 | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle_S \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \boldsymbol{\mu}_1 | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle \\ &\quad + k^2 \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \boldsymbol{\mu}_1 | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle_A \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \boldsymbol{\mu}_1 | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle \\ &\quad - \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{k} | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle_S \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{k} | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle \\ &\quad - \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{k} | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle_A \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{k} | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle \\ &\quad + 2k^2 \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \boldsymbol{\mu}_1 | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle_S \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \boldsymbol{\mu}_1 | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle \\ &\quad - 2 \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{k} | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle_S \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{k} | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle] \end{aligned}$$

Ya que en los dos últimos términos, tenemos que al aplicar los operadores $\boldsymbol{\mu}_1$ y $\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{k}$

$$\begin{aligned} & \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{k} \end{matrix} \right\} | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle_S \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{k} \end{matrix} \right\} | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle = \\ & = \langle B_{10}, \frac{3}{2}, m' | \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{k} \end{matrix} \right\} | B_8, \frac{1}{2}, m \rangle_A \langle B_8, \frac{1}{2}, m | \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{k} \end{matrix} \right\} | B_{10}, \frac{3}{2}, m' \rangle \end{aligned}$$

Desacoplando los elementos del espacio de sabor y del espacio de spin (Hay que tener cuidado, ya que $\boldsymbol{\mu} = \mu\boldsymbol{\sigma}$, y lo vamos a añadir ahora que lo separamos)

$$\mathcal{P}(B_{10} \rightarrow B_8 + \gamma) = \frac{9B^2}{8} \sum_{i,j} \langle B_{10} | \mu_1 | B_8 \rangle_i \langle B_8 | \mu_1 | B_{10} \rangle_j F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, i, j\right)$$

Donde $i, j = A, S$ Para calcular los productos escalares de la parte de spin, utilizamos el teorema de Wigner-Eckart [5].

$$F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, i, j\right) = \sum_{m, m'} k^2 \langle \frac{3}{2}, m' | \boldsymbol{\sigma}_1 | \frac{1}{2}, m \rangle_i \langle \frac{1}{2}, m | \boldsymbol{\sigma}_1 | \frac{3}{2}, m' \rangle - \langle \frac{3}{2}, m' | \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 | \frac{1}{2}, m \rangle_i \langle \frac{1}{2}, m | \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 | \frac{3}{2}, m' \rangle$$

Teorema 4.5.1 (Wigner-Eckart). Los elementos de matriz de operadores tensoriales con respecto a los autoestados del momento angular satisfacen

$$\langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle = \langle j, k; m, q | j, k; j', m' \rangle \frac{\langle \alpha', j' || T^{(k)} || \alpha, j \rangle}{\sqrt{2j' + 1}}$$

Donde el elemento de matriz con una doble barra, indica que es independiente de m, m', q .

De tal manera que debemos de expresar el operador en sus componentes esféricas para tener en cuenta la conservación del momento angular. (Ya que al estar trabajando en el espacio de estados con esta representación, tenemos que los estados son propios del operador momento angular total. Ya que trabajamos con las representaciones irreducibles del tensor, que en este caso al ser de orden 1, esta representación son las componentes esféricas.)

Las componentes esféricas de un operador vectorial, son iguales a los armónicos esféricos de un vector

$$A^0 = A_z, \quad A^{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x \pm iA_y)$$

Haciendo que el producto escalar en coordenadas esféricas sea

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_m (-1)^m A^m B^{-m}$$

Por lo que haciendo el producto escalar, con las componentes esféricas

$$\begin{aligned} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, i, j\right) = \sum_{m, m'} \left[\sum_q k^2 (-1)^q \langle \frac{3}{2}, m' | \sigma_1^q | \frac{1}{2}, m \rangle_i \langle \frac{1}{2}, m | \sigma_1^{-q} | \frac{3}{2}, m' \rangle \right. \\ \left. - \sum_{q, \bar{q}} (-1)^{q+\bar{q}} k^q k^{-\bar{q}} \langle \frac{3}{2}, m' | \sigma_1^{-q} | \frac{1}{2}, m \rangle_i \langle \frac{1}{2}, m | \sigma_1^{\bar{q}} | \frac{3}{2}, m' \rangle \right] \end{aligned}$$

Donde el segundo en el segundo sumatorio dentro del corchete sólo contribuyen los términos $q = \bar{q}$, ya que este término es un producto escalar. Haciendo

$$F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, i, j\right) = \sum_{m, m', q} \left[k^2 (-1)^q \langle \frac{3}{2}, m' | \sigma_1^q | \frac{1}{2}, m \rangle_i \langle \frac{1}{2}, m | \sigma_1^{-q} | \frac{3}{2}, m' \rangle_j - k^q k^{-q} \langle \frac{3}{2}, m' | \sigma_1^{-q} | \frac{1}{2}, m \rangle_i \langle \frac{1}{2}, m | \sigma_1^q | \frac{3}{2}, m' \rangle_j \right]$$

Si aplicamos ahora el teorema de Wigner-Eckart, y utilizamos los símbolos 3-j de Wigner [35] para representar a los coeficientes de Clebsch-Gordan por conveniencia

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_3, m_3 \rangle = (-1)^{-j_1+j_2-m_3} \sqrt{2j_3+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$$

Obteniendo así (Cuidado con la notación que el \times simplemente indica una multiplicación.)

$$F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, i, j\right) = \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_i \langle \frac{1}{2} || \sigma_1 || \frac{3}{2} \rangle_j \times \sum_{m, m', q} \left[k^2 (-1)^q (-1)^{3/2-m'} (-1)^{1/2-m} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -m' & q & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -m & -q & m' \end{pmatrix} - (-1)^{3/2-m'} (-1)^{1/2-m} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -m' & -q & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -m & q & m' \end{pmatrix} \right]$$

Usando las propiedades de los coeficientes

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -m' & q & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -m & -q & m' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -m' & -q & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -m & q & m' \end{pmatrix}$$

Además de que para la primera igualdad $m' = q + m$, mientras que para la segunda $m = m' + q$.

$$F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, i, j\right) = \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_i \langle \frac{1}{2} || \sigma_1 || \frac{3}{2} \rangle_j \sum_{m, m', q} \left[-k^2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -m' & m & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -m' & m & q \end{pmatrix} + (-1)^q \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -m' & m & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -m' & m & -q \end{pmatrix} \right]$$

Y usando la propiedad

$$\sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} = \frac{\delta(j_3, j_3') \delta(m_3, m_3')}{2j_3 + 1}$$

Obtenemos

$$F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, i, j\right) = \frac{1}{3} \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_i \langle \frac{1}{2} || \sigma_1 || \frac{3}{2} \rangle_j \sum_q \left(-k^2 + (-1)^q k^q k^{-q} \right) = -\frac{2}{3} k^2 \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_i \langle \frac{1}{2} || \sigma_1 || \frac{3}{2} \rangle_j$$

Sólo nos falta hallar los elementos de matriz reducidos, donde vamos a tener que

$${}_i \langle \frac{1}{2} || \sigma_1 || \frac{3}{2} \rangle = -\langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_i$$

Ya que si analizamos el término de σ_1^0 , como las componentes de la matriz son números reales, al hacer el conjugado hermítico el resultado es el mismo

$$\langle \frac{3}{2}, m' | \sigma_1^0 | \frac{1}{2}, m \rangle_i = {}_i \langle \frac{1}{2}, m | \sigma_1^0 | \frac{3}{2}, m' \rangle$$

Y usando el teorema de Wigner-Eckart

$$\begin{cases} \langle \frac{3}{2}, m' | \sigma_1^0 | \frac{1}{2}, m \rangle_i = \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_i (-1)^{3/2-m'} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -m' & 0 & m \end{pmatrix} \\ i \langle \frac{1}{2}, m | \sigma_1^0 | \frac{3}{2}, m \rangle = \langle \frac{1}{2} || \sigma_1 || \frac{3}{2} \rangle_i (-1)^{1/2-m} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} \end{cases}$$

Usando las propiedades de los símbolos 3j, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -m' & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} \neq 0 \longleftrightarrow m = m'$$

Haciendo que para que se cumpla la igualdad, requerimos que $m = m'$, e igualando

$$(-1)^{3/2-m} \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_i = (-1)^{1/2-m} i \langle \frac{1}{2} || \sigma_1 || \frac{3}{2} \rangle \longrightarrow i \langle \frac{1}{2} || \sigma_1 || \frac{3}{2} \rangle = -\langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_i$$

Obteniendo finalmente que

$$F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, i, j\right) = \frac{2k^2}{3} \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_i \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_j$$

Haciendo que la probabilidad sea

$$\mathcal{P}(B_{10} \rightarrow B_8 + \gamma) = \frac{3B^2k^2}{4} \sum_{i,j} [\langle B_{10} | \mu_1 | B_8 \rangle_i \langle B_8 | \mu_1 | B_{10} \rangle_j \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_i \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_j]$$

Donde podemos calcular los elementos de matriz reducida utilizando el teorema de Wigner-Eckart.

$$\begin{aligned} \langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | \sigma_1^0 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\langle ++- | + \langle +-+ | + \langle -++ | + \sigma_{1z} \frac{1}{\sqrt{2}} [|+-+ \rangle - |-++ \rangle] = \frac{2}{\sqrt{6}} \\ &= \langle \frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, 0 | \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle \frac{\langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_A}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_A \rightarrow \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_A = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | \sigma_1^0 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle_S &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\langle ++- | + \langle +-+ | + \langle -++ | + \sigma_{1z} \frac{1}{\sqrt{6}} [2|++- \rangle - |-++ \rangle - |+-+ \rangle] = \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ &= \langle \frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, 0 | \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle \frac{\langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_S}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_S \rightarrow \langle \frac{3}{2} || \sigma_1 || \frac{1}{2} \rangle_S = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos visto en detalle distintas aplicaciones de la teoría de grupos en física, ya que este es un tema que, en particular, no se estudia más que de refilón en ciertas asignaturas.

Teniendo en cuenta lo que hemos visto en los capítulos anteriores, podemos ver a primera vista, la utilidad de la teoría de grupos en la física, como hemos visto a lo largo de la introducción, siendo el más relevante el teorema de Noether en mecánica y en las teorías de campos. En el resto del trabajo hemos hecho una construcción de las representaciones de pesos y raíces de manera general, utilizando un ejemplo sencillo como es $SU(2)$. Posteriormente hemos realizado la misma construcción para $SU(3)$, poniendo un énfasis especial en los casos que posteriormente serían relevantes.

Ya que mediante la existencia del isospin y de la hipercarga, podemos darnos cuenta de manera natural de que el espacio de sabor de las partículas fundamentales, ya que los diagramas de Cartan las partículas son los mismos que los diagramas de $SU(3)$, llevándonos esto a la existencia de los quarks como entidades que forman a las distintas partículas, además de la existencia del color, una propiedad que deducimos gracias a la simetría de los estados y es la responsable de que las partículas elementales se agrupen de la manera en la que lo hacen.

Conociendo el modelo quark, podemos construir los estados de las diferentes partículas elementales, en base a las representaciones fundamentales de $SU(3)$ en el espacio de sabor, que son los quarks. El conocer los distintos estados nos lleva a poder conocer las distintas partículas elementales, así como sus propiedades.

Dándonos predicciones que se ajustan bien a las medidas experimentales [1, 2], tanto para los momentos magnéticos y para las masas. Así como también hemos calculado la probabilidad de transición de un barión del decuplete a un barión del octete emitiendo un fotón mediante el teorema de Wigner-Eckart [5].

Sin embargo no todo es perfecto, ya que los últimos desarrollos de la física de partículas nos llevan a la existencia de nuevos tipos de quarks [36, 1].

No sólo eso, además para ver la dinámica de partículas debida a la interacción fuerte, no podemos utilizar la electrodinámica cuántica, ya que los nuevos desarrollos teóricos indican que la fuerza fuerte no está mediada por el intercambio de mesones entre partículas como se creía antes [14], sino que está mediada por los gluones al intercambiarse entre quarks, donde estos son las partículas responsables de mantener a los quarks unidos [37].

Por lo que se ha llegado a una nueva teoría para dar cuenta de esta dinámica, esta teoría es la cromodinámica cuántica [38].

Y a día de hoy sigue siendo un tema de investigación abierto.

Bibliografía

- [1] J. Beringer et al. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, 86:010001, Jul 2012.
- [2] J. G. Contreras, R. Huerta, and L. R. Quintero. The Baryon magnetic moments of the octet and the decuplet using different limits of the SU(3) flavor group. 10 1998.
- [3] Hermann Weyl. *Symmetry*. Princeton University Press, Princeton, 2017.
- [4] Callen H.B. *Thermodynamics And An Introduction To Thermostatistics*. Wiley, 2ed. edition, 1985.
- [5] J. J. Sakurai. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley Pub. Co, rev. ed edition, 1994.
- [6] E. M. Lifshitz L. D. Landau. *Quantum mechanics: non-relativistic theory*, volume Volume 3 of *Course on Theoretical Physics, Vol 3*. Pergamon Pr, 3 edition, 1981.
- [7] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 8th ed edition, 2005.
- [8] Christopher J. Foot. *Atomic physics*. Oxford master series in physics 7. Atomic, Optical, and laser physics. Oxford University Press, 1 edition, 2005.
- [9] J. J. Griffin Eugene P. Wigner. *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Academic Press, revised edition, 1959.
- [10] Felix C. Klein. A comparative review of recent researches in geometry, 2008.
- [11] Emmy Nöether. Invariante variationsprobleme. *Nachrichten der Königlischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Math.-phys. Klasse*, page 235–257, 1918.
- [12] Herbert Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley series in physics. Addison-Wesley Pub. Co, 2d ed edition, 1980.
- [13] E.M. Lifshitz L D Landau. *Mechanics*, volume Volume 1 of *Course of Theoretical Physics*. Butterworth-Heinemann, 3 edition, 1976.
- [14] Bryan Gin ge Chen et al. *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory (Foreword by David Kaiser)*. World Scientific, 2019.
- [15] George R. Kempf. *Algebraic Structures*. Vieweg Verlag, 1995.
- [16] B. L. van der Waerden. *Group theory and quantum mechanics*. Springer-Verlag, 1974.
- [17] Jean-Pierre Serre. *Linear Representations of Finite Groups*. Springer-Verlag, 1977.
- [18] Wu-Ki Tung. *Group theory in physics*. World Scientific, 1985.
- [19] Howard Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics*. CRC Press, 2 edition, 1999.

- [20] Brian C. Hall (auth.). *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Graduate Texts in Mathematics 222. Springer-Verlag New York, 1 edition, 2003.
- [21] F. J. Yndurain. *Elements of group theory*, 2007.
- [22] M Gell-Mann. The eightfold way: A theory of strong interaction symmetry. 3 1961.
- [23] Y. Ne'eman. Derivation of strong interactions from a gauge invariance. *Nuclear Physics*, 26(2):222–229, August 1961.
- [24] Sidney Coleman. *Aspects of symmetry: selected Erice lectures of Sidney Coleman*. Cambridge University Press, 1985.
- [25] M. Gell-Mann. A schematic model of baryons and mesons. *Physics Letters*, 8(3):214–215, 1964.
- [26] G Zweig. An SU_3 model for strong interaction symmetry and its breaking; Version 1. Technical report, CERN, Geneva, 1964.
- [27] Gilbert Grynberg Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc. *Photons and atoms: Introduction to quantum electrodynamics*. Wiley Professional. Wiley-VCH, 1997.
- [28] Richard P. Feynman. *Quantum electrodynamics*. Advanced Book Classics. Westview Press, 1998.
- [29] Schwinger J. (ed.). *Selected papers on quantum electrodynamics*. Dover, 1958.
- [30] R. P. Feynman. Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction. *Physical Review*, 80(3):440–457, November 1950.
- [31] S. Tomonaga. On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields*. *Progress of Theoretical Physics*, 1(2):27–42, 08 1946.
- [32] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of GR*. John Wiley & Sons, Inc., first edition edition, 1972.
- [33] Francisco J. Yndurain. *Relativistic Quantum Mechanics and Introduction to Field Theory*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer, 1 edition, 1996.
- [34] Victor F. Weisskopf (auth.) John M. Blatt. *Theoretical Nuclear Physics*. Springer-Verlag New York, 1 edition, 1979.
- [35] A. R. Edmonds. *Angular momentum in quantum mechanics*. Investigations in Physics. Princeton University Press, 1996.
- [36] H. Harari. A new quark model for hadrons. *Physics Letters B*, 57(3):265–269, 1975.
- [37] A. Ali and G. Kramer. JETS and QCD: a historical review of the discovery of the quark and gluon jets and its impact on QCD. *The European Physical Journal H*, 36(2):245–326, sep 2011.
- [38] Francisco J. Yndurain. *The theory of quark and gluon interactions*. Theoretical and mathematical physics. Springer, 4th ed., [expanded and updated] edition, 2006.