



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

FORMALISMO VARIACIONAL DE LA GRAVEDAD

Autor: Pablo Nieto Gallego
Tutor: José Manuel Izquierdo Rodríguez
2023

Índice

Abstract	2
Planteamiento del trabajo	2
1. Introducción	3
1.1. Geometría diferencial	3
1.2. Grupo de Lorentz.....	4
2. Principio variacional en relatividad general.....	6
2.1. Tensor energía-momento	8
2.1.1. Tensor energía momento canónico	10
2.1.2. Conservación del momento angular	13
2.1.3. Método de Belinfante	15
2.1.4. Método de Rosenfeld.....	19
2.2. Término de frontera (Gibbons-Hawking-York)	21
3. Gravedad y teorías gauge.....	25
3.1. Lagrangiano Yang-Mills	26
3.1.1. Campo de gluones.....	26
3.1.2. Los venusianos de Feynman.....	32
3.1.3. Lagrangiano QCD.....	33
3.2. Formulación de Utiyama	35
3.2.1. Formalismo de tétradas	36
3.2.2. Relatividad general.....	37
4. Conclusiones y líneas futuras	41
5. Bibliografía	42

Abstract

The present work provides a comprehensive overview of the variational formalism in general relativity. We delve into the fundamental aspects of this formalism, covering key concepts such as the Einstein-Hilbert action, the energy-momentum tensor, the Gibbons-Hawking-York boundary term, and the boundary conditions involved. Additionally, the Utiyama formulation in terms of the vierbein is examined, highlighting both the similarities and differences compared to Yang-Mills theory.

El presente trabajo proporciona una visión completa del formalismo variacional en la relatividad general. Se tratan los aspectos fundamentales de este formalismo, cubriendo conceptos clave como la acción de Einstein-Hilbert, el tensor energía momento, el término de frontera de Gibbons-Hawking-York y las condiciones de contorno involucradas. Además, se examina la formulación de Utiyama en términos de las tétradas, destacando tanto las similitudes como las diferencias con la teoría de Yang-Mills.

Planteamiento del trabajo

El trabajo se divide en dos partes:

En la Parte 1, se aborda el estudio de la relatividad general desde un enfoque variacional.

En la primera parte se realiza una breve introducción sobre los conceptos que se utilizarán a lo largo del trabajo [1]. En el segundo apartado [2], se exploran las distintas definiciones del tensor energía-momento [2.1] y se analiza la conservación del momento angular [2.1.2]. Se presentan tres perspectivas diferentes del tensor energía-momento: el tensor energía-momento canónico [2.1.1], el procedimiento de Belinfante [2.1.3] y el método de Rosenfeld [2.1.4].

El último apartado se dedica al término de frontera de la acción gravitatoria y las condiciones de contorno [2.2]. Se introduce inicialmente la idea principal utilizando el ejemplo de un campo escalar real sin masa. Posteriormente, se aborda el caso de la relatividad general, en particular se trata el término de frontera propuesto por Gibbons-Hawking-York.

En la Parte 2, se busca obtener la acción de Einstein-Hilbert utilizando un enfoque similar al empleado en una teoría Yang-Mills.

La primera parte inicia con una breve introducción a las teorías gauge [3] seguida de la presentación de un plan para construir el lagrangiano de una teoría de Yang-Mills [3.1]. Se examina específicamente el caso de la cromodinámica cuántica (QCD) [3.1.1,3.1.3], que describe la interacción fuerte entre las partículas elementales conocidas como quarks y gluones. También se abordará la gravedad mediante el formalismo ideado por Feynman y el problema del tensor energía momento gravitacional [3.1.2]. Finalmente, se sigue un proceso similar conocido como la formulación de Utiyama [3.2] para abordar la relatividad general. Se analizan las diferencias que surgen al intentar tratar la relatividad general como una teoría gauge, en contraste con la descripción de las demás de fuerzas fundamentales que aparecen en física.

Parte 1

1. Introducción

En este apartado se presentan de manera concisa los conceptos que se utilizarán a lo largo del trabajo.

1.1. Geometría diferencial

En este apartado se introducen brevemente aspectos de geometría diferencial que serán utilizados en el trabajo.

La transformación de tensores bajo cambios de coordenadas generales viene dada por la siguiente expresión.:

$$t'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}(x(x')) \dots \frac{\partial x'^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}(x') \dots t^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q}(x(x')) \quad (1.1)$$

Los símbolos de Christoffel se definen como:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}) \quad (1.2)$$

$$\Gamma'^{\mu}_{\rho\sigma}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x') + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \quad (1.3)$$

La torsión se define como la parte antisimétrica de la conexión: $T^{\mu}_{\nu\rho} = 2\Gamma^{\mu}_{[\nu\rho]}$

En la formulación estándar de la relatividad general, se asume que la conexión es simétrica. Sin embargo, en generalizaciones de la relatividad general, como por ejemplo la teoría de Einstein-Cartan (U_4) esta condición se relaja.

La derivada covariante de un tensor p-veces contravariante y q-veces covariante se define como:

$$\nabla_{\rho} t'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \partial_{\rho} t'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \Gamma^{\mu_1}_{\rho\lambda} t'^{\lambda \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + p \text{ términos} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu_1} t'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\lambda \dots \nu_q} - q \text{ términos}$$

El tensor de curvatura de Riemann se define de la siguiente forma:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^{\lambda} = R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu} V^{\sigma} \quad (1.4)$$

$$R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \quad (1.5)$$

Algunas propiedades del tensor de Riemann incluyen:

1. Antisimetría en los dos últimos índices y en los dos primeros:
2. Primera identidad de Bianchi:

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} + R^{\mu}_{\sigma\nu\rho} + R^{\mu}_{\rho\sigma\nu} = 0$$

3. Simetría bajo el intercambio de los dos pares de índices.

También nos van a ser útiles las contracciones del tensor de curvatura, como el tensor de Ricci: $R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$ y el escalar de curvatura: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

Salvo que se indique lo contrario, los índices con letras griegas (μ, ν, σ, \dots) se refieren al espacio-tiempo de cuatro dimensiones; las letras latinas se refieren al espacio tridimensional. En el contexto del formalismo de tétradas, las letras latinas se reservan para los índices del espacio tangente. La coordenada temporal se etiqueta como 0, y utilizamos la convención de métrica (-+++). A lo largo del trabajo, no se tendrá en consideración la constante cosmológica Λ .

1.2. Grupo de Lorentz

En esta sección, se presentarán de manera concisa las características fundamentales del grupo de Lorentz. El grupo de Lorentz, nombrado así en honor al físico holandés Hendrik Lorentz, es una estructura matemática de gran importancia en la teoría de la relatividad especial.

Consideramos transformaciones de la forma:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1.6)$$

O expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & \Lambda_2^0 & \Lambda_3^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 \\ \Lambda_0^2 & \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 \\ \Lambda_0^3 & \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

El grupo de Lorentz se define como el grupo de transformaciones lineales que preservan la métrica:

$$\Lambda^{\mu}_{\rho} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \quad (1.7)$$

Si aplicamos el determinante a ambos lados de la ecuación, obtenemos la condición de que el valor absoluto del determinante de Λ debe ser igual a uno, $|\det \Lambda| = 1$. Esta relación establece una propiedad importante del grupo de Lorentz.

El grupo de Lorentz se divide en dos partes disconexas: aquellos elementos con determinante +1, que contiene a la identidad, y aquellos elementos con determinante -1.

Si en la ecuación anterior utilizamos los índices $\mu = (0, i)$:

$$\Lambda^{\rho}_0 \eta_{00} \Lambda^{\sigma}_0 + \Lambda^{\rho}_i \eta_{ij} \Lambda^{\sigma}_i = \eta_{\rho\sigma}$$

Tomamos $\rho = 0, \sigma = 0$:

$$-(\Lambda_0^0)^2 + \Lambda_0^i \delta_{ij} \Lambda_0^i = -1$$

$$(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \Lambda_0^i \Lambda_0^i$$

Donde el segundo término $\Lambda_0^i \Lambda_0^i \geq 0$, por tanto:

$$(\Lambda_0^0)^2 \geq 1$$

Tenemos dos posibilidades: $\Lambda_0^0 \geq 1$ o $\Lambda_0^0 \leq -1$. Teniendo en cuenta estas dos posibilidades y los distintos valores para el determinante, obtenemos cuatro piezas disconexas del grupo de Lorentz (Figura 1):

- \mathcal{L}_+^{\uparrow} : grupo de Lorentz propio ortócrono ($\det \Lambda = +1; \Lambda_0^0 \geq 1$)

Es la parte conexa de la identidad, es subgrupo del grupo de Lorentz \mathcal{L} .

- \mathcal{L}_-^\uparrow : ortócronas impropias ($\det \Lambda = -1; \Lambda_0^0 \geq 1$)

$$\mathcal{L}_-^\uparrow = P \mathcal{L}_+^\uparrow, \text{ donde } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ es la inversión de paridad.}$$

- \mathcal{L}_+^\downarrow : anti-ortócronas propias ($\det \Lambda = +1; \Lambda_0^0 \leq 1$)

$$\mathcal{L}_+^\downarrow = T \mathcal{L}_+^\uparrow, \text{ donde } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es la inversión temporal.}$$

- \mathcal{L}_-^\downarrow : anti-ortócronas impropias ($\det \Lambda = -1; \Lambda_0^0 \leq 1$)

$$\mathcal{L}_-^\downarrow = P T \mathcal{L}_+^\uparrow$$

Las transformaciones ortócronas no cambian el sentido del tiempo. En contraste, las transformaciones anti-ortócronas producen una inversión temporal. Las transformaciones propias no cambian la orientación del espacio, mientras que las impropias conllevan la inversión espacial.

El resto de subgrupos importantes de \mathcal{L} son (siguiendo la notación de [11]):

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow \quad \mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \quad \mathcal{L}^\uparrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow$$

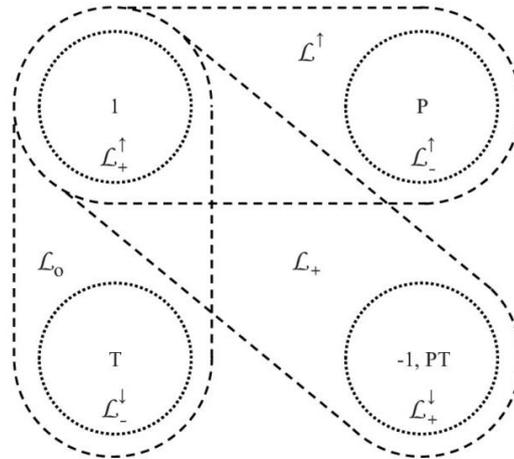


Figura 1: Las cuatro piezas del grupo de Lorentz y sus correspondientes subgrupos [11].

Los seis generadores del grupo de Lorentz $\{J_{\mu\nu}\}$ satisfacen el álgebra de Lie:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = J_{cb}\eta_{ad} - J_{ab}\eta_{ac} + J_{ac}\eta_{bd} - J_{ad}\eta_{bc} \quad (1.8)$$

En el apartado [3.2.2], se volverá a hablar del grupo de Lorentz, en particular de la representación de Dirac.

El grupo de Poincaré, también conocido como grupo de Lorentz inhomogéneo, consiste en incorporar las traslaciones al grupo de Lorentz:

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (1.9)$$

Los generadores del grupo de Poincaré son $\{J_{\mu\nu}\}\{P_{\mu}\}$, donde se han incluido los cuatro generadores de las traslaciones. Además de las relaciones de conmutación [1.8], el algebra de Lie del grupo de Poincaré es el siguiente:

$$\begin{aligned} [P_a, P_b] &= 0 \\ [P_a, J_{bc}] &= P_b \eta_{ac} - P_c \eta_{ab} \end{aligned} \quad (1.10)$$

2. Principio variacional en relatividad general

Para derivar las ecuaciones del campo gravitatorio desde un principio variacional, tenemos que determinar su acción. Las ecuaciones se obtienen variando la suma de las acciones del campo gravitatorio S_G y del campo de materia S_m .

La acción del campo gravitatorio tiene que expresarse de la siguiente forma:

$$S_G = \int \sqrt{-g} d^4x G$$

Donde G es un escalar y se cumple¹: $\sqrt{-g'} d^4x' = \sqrt{-g} d^4x$.

Si queremos que las ecuaciones del campo no contengan derivadas de orden mayor que el segundo, el escalar G no debe contener derivadas de $g_{\mu\nu}$ de orden superior al primero $G(g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})$.

Sin embargo, no se puede construir un escalar a partir $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas primeras. Para poner este hecho en manifiesto, seguimos el siguiente razonamiento [3].

El lagrangiano debe ser independiente del sistema de coordenadas que elijamos. Si consideramos un lagrangiano que dependa únicamente de la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas primeras, en la vecindad de un punto siempre vamos a poder elegir una base tal que las derivadas primeras de la métrica se anulen. La única opción que tenemos es que el lagrangiano sea una constante, el cual no es válido. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que vamos a necesitar derivadas de orden más alto. Consideremos que el lagrangiano dependa también de las derivadas segundas de la métrica. En ese caso tenemos:

$$R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} - \partial_{\nu} \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$$

Utilizando las propiedades del tensor de Riemann [1.5], el número de parámetros independientes se reduce de 4^4 hasta 20. En un sistema de referencia en caída libre, tendremos $20 - 6 = 14$, donde el seis proviene de las distintas transformaciones Lorentz que podemos tomar. Por tanto, tenemos 14 invariantes de curvatura que no dependen de la base utilizada, de los cuales el único que es lineal en las segundas derivadas de la métrica es el escalar de curvatura R .

La acción de Einstein-Hilbert tiene la siguiente forma:

¹ Sobre las densidades tensoriales y sus leyes de transformación se sigue [5].

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (2.1)$$

Esta acción fue presentada por Hilbert el mismo mes en que Einstein presentó la forma final de las ecuaciones del campo gravitatorio. Sobre la historia del desarrollo de la relatividad general deo como referencias [13-16].

Haciendo variaciones con respecto de la métrica se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} R) = \int d^4x (R \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta R) \\ &= \int d^4x (R \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Primero calculamos la variación de $\sqrt{-g}$, para ello utilizamos la fórmula de Jacobi que, relaciona la derivada del determinante de una matriz con la adjunta de la matriz y su derivada:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \quad (2.3)$$

La variación de la acción nos queda:

$$\delta S_{EH} = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \right] \quad (2.4)$$

El primer término ya nos daría las ecuaciones de Einstein en el vacío, tenemos que demostrar que el segundo término no contribuye.

Para calcular el segundo término, primero calculamos la derivada covariante de la variación de la conexión:

$$\nabla_\nu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \partial_\nu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \delta \Gamma_{\rho\alpha}^\mu \delta \Gamma_{\nu\beta}^\rho - \delta \Gamma_{\rho\beta}^\mu \delta \Gamma_{\alpha\nu}^\rho \quad (2.5)$$

Y la variación del tensor de curvatura:

$$\delta R_{\alpha\nu\beta}^\mu = \partial_\nu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\beta \delta \Gamma_{\alpha\nu}^\mu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \Gamma_{\rho\beta}^\mu \delta \Gamma_{\alpha\nu}^\rho - \delta \Gamma_{\rho\nu}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\rho + \delta \Gamma_{\rho\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\rho \quad (2.6)$$

Podemos escribir este término en función de derivadas covariantes de $\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ y, al contraer los índices, podemos obtener la variación del tensor de Ricci:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda \quad (2.7)$$

Otra forma de calcular $\delta R_{\alpha\nu\beta}^\mu$ es como lo hacen en [3]. Podemos elegir un sistema de referencia donde los coeficientes de la conexión se cancelen, quedándonos solo con los términos:

$$\delta R_{\alpha\nu\beta}^\mu = \partial_\nu \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\beta \delta \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \quad (2.8)$$

Por último, cambiamos las derivadas ordinarias por las derivadas covariantes para obtener una fórmula correcta en cualquier sistema de referencia.

El último paso es obtener $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)$$

Renombrando índices mudos, obtenemos:

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\nu) \quad (2.9)$$

La variación de la conexión es un tensor, lo cual se puede demostrar de forma explícita, pero también se puede argumentar de la siguiente manera: como el término inhomogéneo que aparece al transformar los coeficientes de la conexión no dependen de la métrica [1.3], al variar la métrica, estos términos se cancelan y, por tanto, transforma como un tensor.

Más adelante veremos que $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ es una derivada total y, por el teorema de Gauss, solo contribuirá con un término de frontera que en este apartado vamos a ignorar. En el apartado [2.2], se hará un inciso sobre este término de frontera y como modificar la acción para que, al imponer condiciones de contorno adecuadas, se cancele su contribución.

Por tanto, en ausencia de campos de materia, obtenemos las ecuaciones de Einstein en el vacío:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (2.10)$$

Multiplicando por $g^{\mu\nu}$, obtenemos:

$$0 = g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = R - 2R = -R$$

Por tanto, $R = 0$ y la ecuación [2.10] se puede escribir como:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.11)$$

En presencia de materia las ecuaciones de Einstein son las siguientes:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Con $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.13)$$

Y κ la constante de gravitación de Einstein:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{(c^4)} \quad (2.14)$$

$T_{\mu\nu}$ es el tensor energía momento del campo de materia. En el límite de campo débil y velocidades bajas, se recupera la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (2.15)$$

Ahora necesitamos algunos ejemplos para $T_{\mu\nu}$. Si no podemos calcular $T_{\mu\nu}$ mediante algún otro principio físico, no tenemos una teoría de la gravitación completa.

2.1. Tensor energía-momento

En este apartado, se presentará la definición del tensor energía-momento canónico derivado mediante el teorema de Noether. También se abordará la conservación del momento angular y se discutirá el método de Belinfante para simetrizar el tensor energía-momento. Por último, se hablará del método de Rosenfeld y su relación con el tensor canónico.

La motivación de esta sección se puede resumir con la siguiente cita de Feynman, donde resalta que la belleza geométrica de un lado de la ecuación de Einstein no debe eclipsar a la otra parte, ya que sin ella no podemos obtener una descripción física completa:

There are some consistency requirements similar to those we find in electromagnetism. In order to solve Maxwell's equations, we need to have the currents. They must be conserved currents, not just arbitrary currents. The conserved source currents which are meaningful are obtained by solving some other problems of physics, following some independent law, such as Ohm's Law or Hooke's Law or Schrodinger's equation for such-and-such a system. If we did not have these other laws, the theory of electromagnetic fields would be useless and empty of meaning.

For gravity the thing is more complicated. The tensor $T_{\mu\nu}$ involves the motion of matter, hence we must have a law which matter follows, including Ohm's Law and Hooke's Law; but also $T_{\mu\nu}$ will involve the gravity fields $g_{\mu\nu}$, a circumstance which tangles up the problems much more than in electromagnetism. In general, it is not possible to write down any kind of consistent $T_{\mu\nu}$ except for the vacuum, unless one has already solved the complete, tangled problem. The trouble is that any specified $T_{\mu\nu}$ will not solve the problem except for special cases of the metric tensor $g_{\mu\nu}$; the complete relativistic solution should work regardless of the particular choice of coordinates and their curvatures. Even for very simple problems, we have no idea of how to go about writing down a proper $T_{\mu\nu}$. We do not know how to write a $T_{\mu\nu}$ to represent a rotating rod, so that we cannot calculate exactly its radiation of gravity waves. We cannot calculate the $T_{\mu\nu}$ for a system consisting of the earth and the moon, because the tidal forces and the elasticity of the earth change the gravity fields significantly. If we assume that the earth is rigid, the equations are inconsistent. If we assume that the earth is a point, the equations are too singular to have solutions. And yet it is obvious that a glob of matter of a given stiffness, such as the earth, will rotate about a moon of another mass and stiffness, whether or not the equations are manageable.

The theory of gravity suffers at this point because one side of the equation is beautiful and geometric, and the other side is not-it has all the dirt of Hooke's Law and of the other laws that govern matter, and these are neither pretty nor geometric. Many physicists have become so hypnotized by the beauty of one side of the equation that they ignore the other, and hence have no physics to investigate. (Feynman, 1995).

Referencia: Feynman, R. P., Morinigo, F. B., & Wagner, W. G. (1995). Feynman lectures on gravitation. Capítulo 10.2: The Action for Classical Particles in a Gravitational Field. Página: 141.

Primero vamos a tratar brevemente algunos aspectos del formalismo lagrangiano de la teoría de campos.

Consideramos un campo de materia ψ , descrito por la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, x^\mu)$. El lagrangiano es:

$$L(\psi, \partial_\mu\psi, x^\mu) = \int d^3x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, x^\mu) \quad (2.16)$$

Y la acción:

$$S = \int dt L = \int_\Sigma dx^4 \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, x^\mu) \quad (2.17)$$

La variación de la acción se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Sigma} dx^4 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi)} \delta (\partial_\nu \psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \right] = \\ &= \int_{\Sigma} dx^4 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi)} \right] \delta \psi + \int_{\Sigma} dx^4 \partial_\nu J^\nu\end{aligned}\quad (2.18)$$

Donde hemos definido J^ν de la siguiente manera:

$$J^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi)} \delta \psi + \mathcal{L} \delta x^\nu \quad (2.19)$$

El último término es la integral de una quadri-divergencia, aplicando el teorema de Gauss:

$$\int_{\Sigma} dx^4 \partial_\nu J^\nu = \oint_{F(\Sigma)} J^\nu dS_\nu \quad (2.20)$$

Pero en el infinito, los campos se anulan y las variaciones δx , $\delta \psi$ también son nulas en t_1 y t_2 . Por tanto, la integral de este término es nula. Imponiendo $\delta S = 0$ se llega a las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi)} = 0 \quad (2.21)$$

2.1.1. Tensor energía momento canónico

En este apartado buscamos determinar la magnitud conservada asociada a la simetría bajo traslaciones rígidas infinitesimales. Comenzamos con el caso particular del campo electromagnético.

El lagrangiano del campo electromagnético libre se expresa como:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4(c)} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.22)$$

Donde $F^{\mu\nu}$ es el denominado *field strength tensor*, y viene dado por la expresión:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.23)$$

Consideramos transformaciones rígidas de coordenadas $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$. Queremos determinar cómo son las variaciones del campo A_ν para un mismo punto. Para ello, utilizamos la transformación de A_μ bajo GCTs (General Coordinate Transformations) [1.1]:

$$A'_\nu(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}(x') A_\mu(x(x')) \quad (2.24)$$

En nuestro caso, $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \delta_\nu^\mu$. Expandimos en serie de Taylor el término de la derecha, a primer orden, obtenemos la siguiente expresión:

$$A'_\nu(x') = A_\nu(x') - a^\mu \partial_\mu A_\nu(x') \quad (2.25)$$

$$\delta A_\nu = -a^\mu \partial_\mu A_\nu \quad (2.26)$$

La variación de la acción debida a la transformación viene dada por:

$$\delta S = \int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} \delta A_\nu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} \delta (\partial_\mu A_\nu) =$$

$$= \int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} \delta A_\nu + \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} \delta A_\nu \right) - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} \right) \delta A_\nu \quad (2.27)$$

Sobre soluciones, la suma del primer y último término se cancela:

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} \right) \right) \delta A_\nu = 0 \quad (2.28)$$

Teniendo esto en consideración, la variación de la acción queda de la siguiente forma:

$$\delta S = \int \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} \delta A_\nu \right) = \frac{1}{c} \int \partial_\mu (F^{\mu\nu} \partial_\sigma A_\nu) a^\sigma \quad (2.29)$$

Donde se ha utilizado que $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu}$. Para demostrarlo² empezamos derivando F_{ab} respecto de $\partial_\mu A_\nu$:

$$\begin{aligned} F_{ab} &= \partial_a A_b - \partial_b A_a \\ F^{ab} &= \eta^{a\rho} \eta^{b\sigma} F_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por otro lado, tenemos que la derivada de F_{ab} respecto de $\partial_\mu A_\nu$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{ab}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} &= \delta_a^\mu \delta_b^\nu - \delta_b^\mu \delta_a^\nu \\ \frac{\delta F^{ab}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} &= \eta^{a\rho} \eta^{b\sigma} \frac{\delta F_{\rho\sigma}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ahora calculamos la derivada del producto:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(F^{ab} F_{ab})}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} &= \eta^{a\rho} \eta^{b\sigma} \frac{\delta F_{\rho\sigma}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} F_{ab} + F^{ab} \left(\frac{\delta F_{ab}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} \right) = \\ &= (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) F^{\rho\sigma} + F^{ab} (\delta_a^\mu \delta_b^\nu - \delta_b^\mu \delta_a^\nu) = \\ &= F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} = 4F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.32)$$

En el último paso se ha utilizado la antisimetría del tensor $F^{\mu\nu}$, llegando a la expresión deseada:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4(c)} \frac{\delta(F^{ab} F_{ab})}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} \quad (2.33)$$

Por otra parte, la variación del lagrangiano se expresa de la siguiente forma:

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\nu + \delta A_\nu, \partial_\mu A_\nu + \delta(\partial_\mu A_\nu)) - \mathcal{L} \quad (2.34)$$

Haciendo un desarrollo en serie y quedándonos a primer orden esta variación queda:

$$\delta \mathcal{L} = \delta A_\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} + \partial_\mu (\delta A_\nu) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} \quad (2.35)$$

² En las demostraciones se han utilizado indistintamente letras griegas y latinas para simplificar la notación, es el único caso en el que no se aplica el convenio presentado en [1.1].

El primer término se anula ya que el lagrangiano solo depende de las derivadas del campo y no del campo en sí, por tanto:

$$\delta\mathcal{L} = -a^\rho \partial_\mu \partial_\rho A_\nu \left(-\frac{1}{4(c)} \frac{\delta(F^{ab} F_{ab})}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} \right) = \frac{a^\rho}{4c} \partial_\rho (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (2.36)$$

Cambiando el orden de las derivadas μ y ρ y aplicando regla de la cadena, obtenemos el último término.

La variación de la acción vendrá dada por:

$$\delta S = \frac{1}{4(c)} \int a^\rho (\partial_\rho F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (2.37)$$

Combinando ambas expresiones de la variación δS [2.37, 2.29] e igualándolas, obtenemos:

$$\int -\frac{1}{4} a^\rho (\partial_\rho F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \partial_\mu (F^{\mu\nu} \partial_\sigma A_\nu) a^\sigma = 0 \quad (2.38)$$

Del primer término hacemos el cambio $\rho \rightarrow \mu$ y escribimos $a^\mu = \eta^{\mu\nu} a_\nu$. En el segundo término hacemos el cambio $\rho \leftrightarrow \nu$ y escribimos $a^\nu = \eta^{\nu\sigma} a_\sigma$.

$$\int \partial_\mu \left(-\frac{1}{4} F^2 \eta^{\mu\nu} \right) a_\nu + \partial_\mu (F^{\mu\rho} \partial_\nu A_\rho) \eta^{\nu\sigma} a_\sigma = 0 \quad (2.39)$$

Haciendo el cambio $\sigma \rightarrow \nu$ se llega a la expresión:

$$\partial_\mu \left(-\frac{1}{4} F^2 \eta^{\mu\nu} + F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho \right) = 0 \quad (2.40)$$

El tensor energía momento del campo electromagnético libre es:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F^2 \eta^{\mu\nu} + F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho \quad (2.41)$$

Podemos ver que este tensor no es simétrico, ni tampoco es invariante bajo transformaciones gauge. Este es el tensor energía momento que llamaremos canónico $T_{can}^{\mu\nu}$ (derivado por el teorema de Noether). Más adelante veremos un procedimiento para mejorar este tensor y conseguir que sea simétrico e invariante gauge (método de Belinfante), también discutiremos otra forma de abordar el problema que llamaremos tensor energía momento métrico (o dinámico), que se debe a Rosenfeld.

Sobre la autoría de cada método hay discrepancias en la literatura. Hay quienes atribuyen el tensor mejorado a ambos (Belinfante y Rosenfeld), nosotros seguiremos el convenio utilizado por [1] y [2] entre otros.

Para el caso de un campo general, la expresión del tensor energía momento canónico se puede estudiar de la siguiente forma.

Si trabajamos sobre soluciones e imponemos que los campos se anulen solo en uno de los límites temporales, la variación del lagrangiano es:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\nu J^\nu \quad (2.42)$$

Consideramos transformaciones rígidas infinitesimales: $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu$ y $\delta\psi = -\varepsilon^\mu \partial_\mu \psi$.

En este caso, $\delta\mathcal{L} = \partial_\nu J^\nu$ tiene la siguiente forma:

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon^\mu \partial_\mu \left[\mathcal{L} \delta_\mu^\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)} \partial_\mu\psi \right] \quad (2.43)$$

Imponiendo la invariancia de la acción, se llega a la conservación de J^ν :

$$\partial_\mu \left[\mathcal{L} \delta_\mu^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi)} \partial_\mu \psi \right] = 0 \quad (2.44)$$

Definimos el tensor energía momento como el término que aparece entre corchetes en la expresión anterior.

$$T_\mu^\nu = \mathcal{L} \delta_\mu^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi)} \partial_\mu \psi \quad (2.45)$$

Podemos observar que esta definición es equivalente al resultado obtenido para el campo electromagnético. La anulación de la divergencia del tensor energía momento nos indica que se conserva el vector P^i , cuyas componentes son las integrales de T^{ik} en una hipersuperficie³.

Este vector se identifica con el tetramomento del sistema, la componente temporal es la energía dividida por c :

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{ik} dS_k \quad (2.46)$$

El tensor energía momento es una densidad de corriente de tetramomento.

2.1.2. Conservación del momento angular

Si la acción es invariante bajo transformaciones Lorentz globales, se obtiene la conservación del momento angular. Consideramos transformaciones del tipo [1.6]:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Las transformaciones de Lorentz infinitesimales se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad (2.47)$$

Imponiendo la conservación del producto interno, quedándonos a primer orden en ω^μ_ν :

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\sigma} &= \Lambda^\mu_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\mu\nu} (\delta^\mu_\rho + \omega^\mu_\rho) (\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu_\sigma) = \\ &= \eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\nu} (\delta^\mu_\rho \omega^\nu_\sigma + \delta^\nu_\sigma \omega^\mu_\rho) \end{aligned} \quad (2.48)$$

El término de la l.h.s. se cancela con el primer término de la derecha, lo que nos queda es:

$$\eta_{\mu\nu} (\delta^\mu_\rho \omega^\nu_\sigma + \delta^\nu_\sigma \omega^\mu_\rho) = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\nu} \omega^\nu_\sigma + \eta_{\mu\sigma} \omega^\mu_\rho &= 0 \\ \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} &= 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Llegamos a que $\omega_{\rho\sigma}$ es antisimétrica, las variaciones nos quedan de la siguiente forma:

$$\delta x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu \quad (2.50)$$

Por otro lado, los campos se transforman como:

³ [7] 32. Tensor energía-impulso y 29. La ecuación de continuidad.

$$\psi'(x) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) \quad (2.51)$$

Donde $D(\Lambda)$ es la representación del grupo de Lorentz⁴ en la que transformen los campos, infinitesimalmente se puede representar como:

$$D(1 + \omega) = 1 + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu} \quad (2.52)$$

La variación de los campos a primer orden se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\psi - \delta x^\mu\partial_\mu\psi = \\ &= \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(S_{\mu\nu} - x_\nu\partial_\mu + x_\mu\partial_\nu)\psi \end{aligned} \quad (2.53)$$

Donde $S_{\mu\nu}$ son los generadores del grupo de Lorentz en la representación elegida para ψ , con $S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$. Si la acción es invariante bajo transformaciones Lorentz, obtenemos que la siguiente corriente se conserva:

$$\partial_\nu J^\nu = \partial_\nu \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)} \left[\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(S^{\alpha\beta} - x^\beta\partial^\alpha + x^\alpha\partial^\beta)\psi \right] + \mathcal{L}\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(\eta^{\alpha\nu}x^\beta - \eta^{\beta\nu}x^\alpha) \right\}$$

Se ha utilizado la antisimetría de $\omega_{\alpha\beta}$ para escribir el segundo término, veremos que está relacionado con la representación vectorial de los generadores del grupo de Lorentz [2.69]. Reordenando la expresión anterior, obtenemos:

$$\partial_\nu J^\nu = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\partial_\nu \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)} S^{\alpha\beta}\psi + \left[\mathcal{L}\eta^{\alpha\nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)}\partial^\alpha\psi \right] x^\beta - \left[\mathcal{L}\eta^{\beta\nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)}\partial^\beta\psi \right] x^\alpha \right\} =$$

Utilizando la expresión obtenida para el tensor energía momento [2.45], se llega a:

$$\partial_\nu J^\nu = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\partial_\nu \left\{ -S^{\alpha\beta\nu} + \frac{1}{2}(x^\beta T^{\alpha\nu} - x^\alpha T^{\beta\nu}) \right\} \quad (2.54)$$

Donde se ha definido $S^{\alpha\beta\nu}$ de la siguiente forma (el prefactor puede variar según la bibliografía utilizada):

$$S^{\alpha\beta\nu} \equiv -\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)} S^{\alpha\beta}\psi = -S^{\beta\alpha\nu} \quad (2.55)$$

Podemos definir la densidad de corriente de momento angular como:

$$J^{\alpha\beta\nu} \equiv -S^{\alpha\beta\nu} + \frac{1}{2}(x^\beta T^{\alpha\nu} - x^\alpha T^{\beta\nu}) = -J^{\beta\alpha\nu} \quad (2.56)$$

El término $\frac{1}{2}(x^\beta T^{\alpha\nu} - x^\alpha T^{\beta\nu})$ corresponde a la densidad de corriente de momento angular orbital, mientras que el primer término $S^{\alpha\beta\nu}$ se identifica con la densidad de corriente de spin. Podemos tomar la divergencia de $J^{\alpha\beta\nu}$:

$$\begin{aligned} \partial_\nu J^{\alpha\beta\nu} &= -\partial_\nu S^{\alpha\beta\nu} + \frac{1}{2}(\delta_\nu^\beta T^{\alpha\nu} - \delta_\nu^\alpha T^{\beta\nu}) = 0 \\ \frac{1}{2}(\delta_\nu^\beta T^{\alpha\nu} - \delta_\nu^\alpha T^{\beta\nu}) &= T^{[\alpha\beta]} \end{aligned}$$

Nos queda la siguiente expresión:

⁴ [22] 12. The representations of the Lorentz group.

$$T^{[\alpha\beta]} = \partial_\nu S^{\alpha\beta\nu} \quad (2.57)$$

Podemos ver que la parte antisimétrica del tensor energía momento está relacionada, según [2.57], con la divergencia de la densidad de corriente de spin. Esto se pone de manifiesto en el caso del campo electromagnético, donde comprobamos que el tensor energía momento no era simétrico.

El único caso en el que obtenemos un tensor energía momento simétrico al aplicar el teorema de Noether es el de un campo escalar. Por ejemplo, para uno real sin masa tenemos el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L}(\psi) = \frac{1}{2}(\partial\psi)^2 \quad (2.58)$$

El tensor energía momento asociado es [2.45]:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial\psi)^2 - \partial_\mu\psi\partial_\nu\psi \quad (2.59)$$

Donde podemos ver que efectivamente es simétrico bajo el intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$.

2.1.3. Método de Belinfante

La fórmula [2.57] nos sugiere que podemos simetrizar el tensor energía momento canónico añadiendo un término de la forma:

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{can} - \partial^\nu(S_{\alpha\beta\nu} - S_{\beta\nu\alpha} + S_{\nu\alpha\beta}) \quad (2.60)$$

Podemos ver que el nuevo tensor es simétrico:

$$\begin{aligned} T_{[\alpha\beta]} &= \partial^\nu S_{\alpha\beta\nu} - \frac{1}{2}\partial^\nu S_{\alpha\beta\nu} + \frac{1}{2}\partial^\nu S_{\beta\alpha\nu} + \\ &+ \frac{1}{2}\partial^\nu S_{\beta\nu\alpha} - \frac{1}{2}\partial^\nu S_{\alpha\nu\beta} - \frac{1}{2}\partial^\nu S_{\nu\alpha\beta} + \frac{1}{2}\partial^\nu S_{\nu\beta\alpha} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Utilizando que $S^{\alpha\beta\nu} = -S^{\beta\alpha\nu}$, podemos observar que los tres primeros términos se compensan y los términos restantes se cancelan por pares:

$$T_{[\alpha\beta]} = 0 \quad (2.62)$$

También podemos comprobar que la divergencia del término que estamos añadiendo es nula:

$$\begin{aligned} \partial^\beta\partial^\nu(S_{\alpha\beta\nu} - S_{\beta\nu\alpha} + S_{\nu\alpha\beta}) &= \\ &= \partial^\beta\partial^\nu S_{\alpha\beta\nu} - \partial^\beta\partial^\nu S_{\beta\nu\alpha} + \partial^\beta\partial^\nu S_{\nu\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.63)$$

En el tercer término, renombramos los índices mudos $\beta \leftrightarrow \nu$. Por los mismos argumentos expuestos en la demostración anterior, este término se cancela con el primero. El término $\partial^\beta\partial^\nu S_{\beta\nu\alpha}$ es nulo, ya que estamos contrayendo los índices antisimétricos: $\partial^\beta\partial^\nu S_{\beta\nu\alpha} = -\partial^\beta\partial^\nu S_{\beta\nu\alpha} = 0$.

Siguiendo la notación de [1]⁵ se define:

$$\partial_\mu\phi^{\mu\rho}{}_\sigma \quad \text{con} \quad \phi^{\mu\rho}{}_\sigma = -\phi^{\rho\mu}{}_\sigma \quad (2.64)$$

⁵ En [1], el tensor $S^{\alpha\beta\nu}$ [2.55] se define de forma distinta. Ecuación 2.47, página 34.

$$\phi^{\mu\rho}{}_{\sigma} = -S^{\mu\rho}{}_{\sigma} + S^{\rho\mu}{}_{\sigma} + S_{\sigma}{}^{\mu\rho} \quad (2.65)$$

El tensor $\phi^{\mu\rho}{}_{\sigma}$ se denomina potencial spin-energía. su divergencia es nula por construcción tal y como hemos demostrado, por lo que no afecta a nuestra definición de tensor energía momento.

Por tanto, podemos incluir un término a nuestro tensor energía momento canónico:

$$T_{\nu}^{\mu} = T_{can}^{\mu}{}_{\nu} + \partial_{\rho}\phi^{\rho\mu}{}_{\nu} \quad (2.66)$$

La expresión anterior nos proporciona una manera sistemática de simetrizar el tensor energía momento canónico derivado por Noether. Este procedimiento se debe a Belinfante. En relatividad general, es necesario trabajar con el tensor mejorado, ya que es este el que se acopla a la gravedad.

Volvamos a nuestro cálculo del tensor energía momento del campo electromagnético. Aplicando el teorema de Noether obtuvimos:

$$T_{can}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F^2\eta^{\mu\nu} + F^{\nu\rho}\partial^{\mu}A_{\rho} \quad (2.67)$$

Vamos a aplicar el procedimiento que hemos obtenido para simetrizarlo. En este caso la variación del campo bajo transformaciones de Lorentz infinitesimales es:

$$A'^{\mu} = \left(\delta_{\nu}^{\mu} + \frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(S_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} \right) A^{\nu} \quad (2.68)$$

Donde la representación $(1/2, 1/2)$ de los generadores del grupo de Lorentz es⁶:

$$(S_{\lambda\sigma})^{\nu}{}_{\mu} = -(\delta_{\lambda}^{\nu}\eta_{\sigma\mu} - \delta_{\sigma}^{\nu}\eta_{\lambda\mu}) \quad (2.69)$$

$$A'^{\mu} = A^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu} \quad (2.70)$$

Por tanto, la variación de A_{μ} viene dada por:

$$\tilde{\delta}A_{\mu} = -A_{\nu}\omega^{\nu}{}_{\mu} \quad (2.71)$$

El tensor densidad de spin en este caso es el siguiente:

$$S^{\alpha\beta\nu} \equiv -\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}A_{\rho})}(S^{\alpha\beta})^{\sigma}{}_{\rho}A_{\sigma} \quad (2.72)$$

Utilizando [2.33], obtenemos la siguiente expresión:

$$S^{\alpha\beta\nu} = -\frac{1}{2}F^{\nu\rho}(S^{\alpha\beta})^{\sigma}{}_{\rho}A_{\sigma} \quad (2.73)$$

Sustituyendo la expresión para los generadores, tenemos:

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta\nu} &= -\frac{1}{2}(F^{\nu\beta}A^{\alpha} - F^{\nu\alpha}A^{\beta}) \\ S^{\alpha\beta\nu} &= -F^{\nu[\beta}A^{\alpha]} \end{aligned} \quad (2.74)$$

La expresión para el potencial spin-energía es:

⁶ Ecuación 10.2-19 [6]. Sobre las representaciones del grupo de Lorentz: apartado 10.5.1: Wave Functions and Field Operators y apéndice VI. En el libro se toman los generadores como $(S_{\lambda\sigma})^{\nu}{}_{\mu} = -i(\delta_{\lambda}^{\nu}\eta_{\sigma\mu} - \delta_{\sigma}^{\nu}\eta_{\lambda\mu})$, nosotros seguimos el convenio utilizado por [1], [22] y [53].

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta\nu} &= S_{\alpha\beta\nu} - S_{\beta\nu\alpha} + S_{\nu\alpha\beta} = \\ &= -\frac{1}{2}(F_{\nu\beta}A_\alpha - F_{\nu\alpha}A_\beta - F_{\alpha\nu}A_\beta + F_{\alpha\beta}A_\nu + F_{\beta\alpha}A_\nu - F_{\beta\nu}A_\alpha)\end{aligned}\quad (2.75)$$

Teniendo en cuenta la antisimetría de $F_{\mu\nu}$, el segundo término se cancela con el tercero, y el cuarto término se cancela con el quinto. El primer término y el último son idénticos. Por lo tanto, la expresión del potencial spin-energía queda:

$$\phi_{\alpha\beta\nu} = -F_{\nu\beta}A_\alpha \quad (2.76)$$

Por tanto, el tensor de Belinfante queda de la siguiente forma [2.60]:

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{can} - \partial^\nu(-F_{\nu\beta}A_\alpha)$$

Sustituyendo la expresión del tensor energía momento canónico:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}F^2\eta_{\alpha\beta} + F_\beta^\rho\partial_\alpha A_\rho + \partial^\nu(F_{\nu\beta}A_\alpha) \quad (2.77)$$

Operando con los dos últimos términos se obtiene:

$$F_\beta^\rho\partial_\alpha A_\rho + \partial^\nu(F_{\nu\beta}A_\alpha) = F_\beta^\rho\partial_\alpha A_\rho + (\partial^\nu F_{\nu\beta})A_\alpha + F_{\nu\beta}\partial^\nu A_\alpha \quad (2.78)$$

En el vacío $\partial^\nu F_{\nu\beta} = 0$, simplificando la expresión y renombrando índices mudos obtenemos:

$$F_\beta^\rho\partial_\alpha A_\rho + \partial^\nu(F_{\nu\beta}A_\alpha) = F_\beta^\rho\partial_\alpha A_\rho + F_{\rho\beta}\partial^\rho A_\alpha \quad (2.79)$$

Utilizando el hecho de que $F_{\rho\beta}$ es antisimétrico, podemos sacar factor común:

$$F_\beta^\rho\partial_\alpha A_\rho - F_{\beta\rho}\partial^\rho A_\alpha = F_\beta^\rho(\partial_\alpha A_\rho - \partial_\rho A_\alpha)$$

Identificando el tensor $F_{\alpha\rho}$ en la r.h.s. llegamos a la siguiente expresión:

$$F_\beta^\rho\partial_\alpha A_\rho - F_{\beta\rho}\partial^\rho A_\alpha = F_\beta^\rho F_{\alpha\rho}$$

La expresión final viene dada por:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}F^2\eta_{\alpha\beta} + F_{\alpha\rho}F_\beta^\rho \quad (2.80)$$

Podemos comprobar que es simétrico, invariante gauge y con traza nula. Lo último está relacionado con la invariancia bajo cambios de escala. En una teoría Yang Mills clásica, los campos son conformes.

Las transformaciones conformes se pueden expresar como:

$$\delta g^{\mu\nu} = \varepsilon g^{\mu\nu} \quad (2.81)$$

Utilizando una expresión que veremos en el siguiente apartado [2.1.4] para calcular el tensor energía momento, obtenemos la siguiente expresión:

$$T_{\mu\nu} \propto \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.82)$$

Imponiendo que la acción sea invariante bajo cambios de escala, obtenemos:

$$\delta S \propto T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = \varepsilon T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \varepsilon T^\mu_\mu = 0 \quad (2.83)$$

Por tanto, podemos observar que la traza del tensor energía momento es nula.

La explicación formal de lo que ocurre en una teoría cuántica de campos hace uso de la función β , que se define como:

$$\beta(g) = \frac{\partial g}{\partial \log(\mu)} \quad (2.84)$$

El signo de la función β nos determina como varía el valor de la constante de acoplamiento en función de la escala de energía.

En el caso de la electrodinámica cuántica (QED), la función β es positiva, lo que significa que la constante de acoplamiento aumenta con la escala de energía. Esto contrasta con la teoría clásica, donde tenemos una teoría de campos conforme (CFT) y la función β es nula. Sin embargo, al cuantizar la teoría surgen anomalías que rompen la simetría conforme.

Lo mismo ocurre con ϕ^4 . De hecho, en teorías que no tienen libertad asintótica, la constante de acoplamiento se hace infinita para una escala de energías finita. Esto es lo que se conoce como *Landau Pole*. En realidad, dado que las funciones β se suelen calcular mediante teoría de perturbaciones, uno espera que las predicciones no sean correctas a medida que la constante de acoplamiento aumente.

En la QCD ocurre lo contrario: la constante de acoplamiento disminuye a medida que aumenta la energía. Este fenómeno es el que hemos llamado libertad asintótica [38].

$$\beta(g) = - \left[\frac{11}{3} T(A) - \frac{4}{3} n_F T(R) \right] \frac{g^3}{16\pi^2} + O(g^5) \quad (2.85)$$

Donde n_F es el número de especies de fermiones en la representación R , $T(R)$ es la constante que aparece en la relación de ortogonalidad: $Tr[t_R^a t_R^b] = T(R) \delta^{ab}$. Por último $T(A)$ es el operador Casimir cuadrático en la representación adjunta: $t_A^a t_A^a = T(A) \cdot \mathbb{I}$, donde $T(A) = N$.

En la cromodinámica cuántica, el grupo gauge es $SU(3)$ y los quarks están en la representación fundamental. Por lo tanto, $T(A) = 3$ y $T(R) = \frac{1}{2}$, y el factor entre corchetes en la ecuación es $11 - \frac{2}{3} n_F$. Se obtiene que para $n_F \leq 16$, la función beta es negativa: la constante de acoplamiento en la cromodinámica cuántica se debilita a altas energías y se hace más fuerte a bajas energías.

Esto tiene consecuencias físicas drásticas. La teoría de perturbaciones no es viable para la física de bajas energías. De hecho, en la naturaleza no se observan quarks o gluones libres. Los quarks, en particular, tienen cargas eléctricas fraccionarias y serían fáciles de detectar. La conclusión es que las partículas con carga de color no pueden existir de forma aislada, esto es lo que se conoce como confinamiento del color.

Aún no se ha demostrado analíticamente (aunque sí se ha conseguido con Lattice QCD), pero es la única hipótesis que es consistente con toda la información teórica y experimental disponible.

Por último, vamos a considerar el caso del campo de Dirac: [1]

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\nu \partial_\nu \psi - \frac{1}{2} m \bar{\psi} \psi + c. h. \quad (2.86)$$

Los generadores del grupo de Lorentz en la representación bispinorial son los siguientes:

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (\gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\alpha) \quad (2.87)$$

Utilizando la expresión [2.55], se obtiene la siguiente densidad de corriente de spin:

$$\begin{aligned}
S^{\alpha\beta\nu} &= -\frac{i}{8}\bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]}\psi + c. h. = \\
&= -\frac{i}{8}\bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]}\psi - \frac{i}{8}\bar{\psi}\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]}\gamma^\nu\psi
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Utilizando propiedades de las matrices gamma y escribiendo en una notación más compacta:

$$S^{\alpha\beta\nu} = -\frac{i}{4}\bar{\psi}\gamma^{[\nu}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]} = S^{[\alpha\beta\nu]} \tag{2.89}$$

El tensor energía momento canónico del campo de Dirac es:

$$\begin{aligned}
T_{can\lambda}^\mu &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\lambda\psi - \partial_\lambda\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\bar{\psi})} + \eta_\lambda^\mu\mathcal{L} = \\
&= -\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\lambda\psi + \frac{i}{2}\partial_\lambda\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \eta_\lambda^\mu\left[\frac{1}{2}(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - i\bar{\psi}\overleftarrow{\gamma^\mu\partial_\mu}\psi) - 2m\bar{\psi}\psi\right]
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Donde $\bar{\psi}\overleftarrow{\gamma^\mu\partial_\mu} \equiv \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu$.

La parte antisimétrica del tensor energía momento canónico es:

$$T_{[\alpha\beta]}^{can} = \partial^\nu S_{\alpha\beta\nu}$$

El tensor energía momento mejorado es:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{can} - \partial^\alpha(S_{\mu\nu\alpha} - S_{\nu\alpha\mu} + S_{\alpha\mu\nu})$$

Sustituyendo la expresión para $S^{\alpha\beta\nu}$:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \frac{i}{4}\partial_\lambda\bar{\psi}(\gamma_\nu\eta_\mu^\lambda + \gamma_\mu\eta_\nu^\lambda)\psi - \frac{i}{4}\bar{\psi}(\gamma_\nu\eta_\mu^\lambda + \gamma_\mu\eta_\nu^\lambda)\partial_\lambda\psi + \\
&+ \eta_\mu^\nu\left[\frac{1}{2}(i\bar{\psi}\gamma^\lambda\partial_\lambda\psi - i\bar{\psi}\overleftarrow{\gamma^\lambda\partial_\lambda}\psi) - 2m\bar{\psi}\psi\right]
\end{aligned} \tag{2.91}$$

2.1.4. Método de Rosenfeld

En este apartado vamos a definir el tensor energía momento de una forma completamente distinta, basándonos en la relatividad general. Para ello, partimos de la acción total de un campo de materia acoplado a la gravedad:

$$S = \frac{1}{2\kappa}S_{EH} + S_m \tag{2.92}$$

Donde S_m es la acción del campo de materia. Siguiendo un procedimiento idéntico al que vimos en el apartado [2], podemos obtener el tensor energía momento del campo de materia.

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2\kappa}\mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_m \right\} \tag{2.93}$$

Puesto que la acción de Einstein-Hilbert no depende de los campos de materia, al variar S respecto de la métrica se obtienen las ecuaciones de Einstein [2.12]:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Donde $T_{\mu\nu}$ viene dado por⁷:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.94)$$

Vamos a aplicar este procedimiento para el caso del campo electromagnético libre. Para ello primero aplicamos las reglas de covariantización a la acción:

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{4(c)} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} \quad (2.95)$$

Originalmente teníamos que el tensor de Faraday era [2.23]:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

En espacio-tiempos curvos, aplicando el principio de acoplo mínimo sustituimos las derivadas parciales por derivadas covariantes:

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$$

Nos queda:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \quad (2.96)$$

En este caso, por la antisimetría de $F_{\mu\nu}$ y considerando una conexión sin torsión $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, es decir, simétrica bajo el intercambio $\mu \leftrightarrow \nu$, la expresión anterior es idéntica a la original. Explícitamente:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda - \partial_\nu A_\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda A_\lambda \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned} \quad (2.97)$$

Por tanto, al derivar respecto de la métrica no tendremos que tener en cuenta el término $F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho}$.

$$\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{ab}} = -\frac{1}{4(c)} \left[\left(\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g_{ab}} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} \right) + 2 \left(\sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} \frac{\delta g^{\mu\sigma}}{\delta g_{ab}} g^{\nu\rho} \right) \right] \quad (2.98)$$

Primero calculamos la segunda derivada. Para ello simplemente utilizamos la siguiente identidad:

$$g^{ab} g_{bc} = \delta_c^a \quad (2.99)$$

Derivando respecto de $g_{\mu\nu}$ a ambos lados de la ecuación⁸:

$$\frac{\delta(g^{ab} g_{bc})}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow \frac{\delta g^{ab}}{\delta g_{\mu\nu}} g_{bc} = -g^{ab} \frac{\delta g_{bc}}{\delta g_{\mu\nu}} = -g^{ab} \delta_b^\mu \delta_c^\nu \quad (2.100)$$

Multiplicando por $g^{c\gamma}$ obtenemos:

$$\frac{\delta g^{a\gamma}}{\delta g_{\mu\nu}} = -g^{a\mu} g^{\nu\gamma} \quad (2.101)$$

⁷ El signo que aparece en la definición del tensor $T_{\mu\nu}$ se debe al convenio de signos utilizado. En [1] lo define con un signo positivo.

⁸ Por la simetría de $g_{\mu\nu}$, hay que tener en cuenta que la derivada $\frac{\delta g_{bc}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} (\delta_b^\mu \delta_c^\nu + \delta_b^\nu \delta_c^\mu)$, pero al estar multiplicando por otro g^{ab} simétrico, podemos obviar este paso.

Para calcular la derivada del determinante de la métrica utilizamos [2.3]:

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g_{ab}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta g_{ab}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}g^{\mu a}g^{b\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab} \quad (2.102)$$

Sustituyendo en la expresión para la derivada de la acción:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g_{ab}} &= -\frac{1}{4(c)}\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right) + 2(-\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}g^{\mu a}g^{b\sigma}g^{\nu\rho})\right] = \\ &= \frac{1}{4(c)}\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}F^{\sigma\rho}F_{\sigma\rho}\right) - 2(\sqrt{-g}F^{a\rho}F^b{}_{\rho})\right] = \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{-g}g^{ab}F^2 - \frac{1}{2}\sqrt{-g}F^{a\rho}F^b{}_{\rho} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Utilizando la expresión [2.94], el tensor energía momento de Rosenfeld es:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2 + F^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho} \quad (2.104)$$

El último paso es volver al espacio de Minkowski, obteniendo el mismo tensor que en el procedimiento de Belifante.

No hemos tenido que realizar ninguna mejora, ya que el tensor de Rosenfeld es simétrico por construcción y contiene todas las simetrías de la acción. Una demostración de la equivalencia entre el tensor energía momento canónico y el de Rosenfeld se encuentra en [17].

2.2. Término de frontera (Gibbons-Hawking-York)

En esta sección abordaremos el problema mencionado en [2] respecto al término de frontera, con el objetivo de comprender como solucionarlo. Para ello, comenzaremos analizando el caso más simple de un campo escalar real sin masa [4]. La acción correspondiente se expresa como:

$$S_0[\psi] = \frac{1}{2}\int \partial^\mu\psi\partial_\mu\psi \quad (2.105)$$

La variación de la acción respecto de ψ viene dada por:

$$\delta S_0[\psi] = \frac{1}{2}\int 2(\partial^\mu\psi)\partial_\mu(\delta\psi) \quad (2.106)$$

Aplicando regla de la cadena, se puede escribir como:

$$\delta S_0[\psi] = \int (\partial^\mu\partial_\mu\psi)\delta\psi - \int \partial_\nu(\delta\psi\partial^\nu\psi) \quad (2.107)$$

El segundo término es una divergencia total, por el teorema de Gauss contribuirá como un término de frontera:

$$\delta S_0[\psi] = \int (\partial^\mu\partial_\mu\psi)\delta\psi - \oint_{\Sigma} d\sigma_\nu(\delta\psi\partial^\nu\psi) \quad (2.108)$$

En este caso, imponiendo condiciones de contorno de Dirichlet el término de frontera es nulo.

Si para el mismo campo escalar hubiéramos considerado la siguiente acción:

$$S_1[\psi] = \frac{1}{2}\int \psi\partial^\mu\partial_\mu\psi = \frac{1}{2}\int \partial^\mu\psi\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}\int \partial_\nu(\psi\partial^\nu\psi) \quad (2.109)$$

Al diferir en una derivada total, las ecuaciones de campo son las mismas. La variación vendrá dada por:

$$\delta S_1[\psi] = \int (\partial^\mu \partial_\mu \psi) \delta \psi - \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} d\sigma_\nu (\delta \psi \partial^\nu \psi - \psi \partial^\nu \delta \psi) \quad (2.110)$$

En este caso, el término de frontera involucra tanto a los campos como a sus derivadas. No existe una forma clara *a priori* para las condiciones de contorno que habría que aplicar.

Hemos visto dos acciones que difieren en una derivada total y que tienen que cumplir condiciones de contorno distintas en cada caso. Para la acción de Einstein-Hilbert, veremos que tampoco hay unas condiciones de contorno claras para eliminar el término de frontera. Sin embargo, siguiendo un procedimiento idéntico al que acabamos de comentar vamos a poder solucionar este problema.

En el apartado [2], obtuvimos que la variación de la acción de Einstein-Hilbert viene dada por la siguiente expresión [2.4]:

$$\delta S_{EH} = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \left(\sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\nu) \right) \right]$$

Aplicando el teorema de Gauss, esta divergencia contribuirá a la variación con el siguiente término de frontera⁹:

$$\begin{aligned} \int d^4x \left(\sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\nu) \right) &= \\ &= \oint_{\Sigma} d\sigma_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\nu) \end{aligned} \quad (2.111)$$

Donde se ha utilizado la siguiente identidad [5]:

$$\int \sqrt{-g} d^4x \nabla_\lambda X^\lambda = \int d^4x \partial_\lambda (\sqrt{-g} X^\lambda) \quad (2.112)$$

Escribiendo este término en función de la métrica inducida en la frontera y de sus coordenadas locales, se llega a la siguiente expresión:

$$\varepsilon \oint_{\Sigma} d^3x' \sqrt{|h|} N_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\nu) \quad (2.113)$$

Con N_λ el vector normal a la hipersuperficie, $\varepsilon = N^\alpha N_\alpha = \pm 1$ dependiendo de si la frontera es de tipo espacio o de tipo tiempo, y $d\sigma_\lambda = d^3x' \sqrt{|h|} N_\lambda$. El siguiente paso es escribir la variación de la conexión en función de la métrica¹⁰:

$$N_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\nu) = (N^\rho g^{\mu\nu} - N^\mu g^{\mu\nu}) \nabla_\mu \delta g_{\rho\nu} \quad (2.114)$$

Utilizando la siguiente identidad [4]:

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \varepsilon N_\alpha N_\beta \quad (2.116)$$

⁹ [4] Sección 16.3: Integration on non-null hypersurfaces and the Gauss theorem.

¹⁰ [4] Ecuación 20.14:

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\nabla_\alpha \delta g_{\rho\beta} + \nabla_\beta \delta g_{\rho\alpha} - \nabla_\rho \delta g_{\alpha\beta}) \quad (2.115)$$

Llegamos a la siguiente expresión:

$$N_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\nu) = N^\rho h^{\mu\nu} \nabla_\mu \delta g_{\rho\nu} - N^\mu h^{\rho\nu} \nabla_\mu \delta g_{\rho\nu} \quad (2.117)$$

Imponiendo condiciones de contorno de Dirichlet, el primer término se anula, mientras que, utilizando condiciones de contorno de Neumann, el segundo término es nulo. Sin embargo, no existe una opción clara para las condiciones de contorno de tal forma que ambos términos se anulen simultáneamente. Para resolver este problema, utilizamos el mismo argumento que presentamos al comienzo de esta sección: añadir a la acción una derivada total de manera que, al imponer las condiciones de contorno adecuadas, la contribución del término de frontera se compense.

Entre los distintos candidatos a este nuevo término, el más extendido es el término de Gibbons-Hawking-York [27-29]:

$$S_{GHY}[g_{\alpha\beta}] = 2\varepsilon \oint_\Sigma \sqrt{|h|} d^3 x' K \quad (2.118)$$

Con K la curvatura extrínseca de la hipersuperficie Σ :

$$K = h^{ab} K_{ab} = h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha N_\beta = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha N_\beta = \nabla_\alpha N^\alpha \quad (2.119)$$

Donde se ha utilizado que $N^\alpha N^\beta \nabla_\alpha N_\beta = 0$ por ser ortogonales.

La acción mejorada S_G es la siguiente:

$$S_G = S_{EH} + S_{GHY} = \int \sqrt{-g} d^4 x R + 2\varepsilon \oint_\Sigma \sqrt{|h|} d^3 x' K \quad (2.120)$$

Nuestro último paso consiste en evaluar la variación de la acción mejorada y comprobar que, al elegir las condiciones de contorno adecuadas, obtenemos las ecuaciones de Einstein. En este caso, veremos que las condiciones de contorno de Dirichlet son suficientes.

$$K = h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha N_\beta = h^{\alpha\beta} (N_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda N_\lambda) \quad (2.121)$$

Utilizando [2.116, 2.115], la variación de la curvatura extrínseca se expresa como:

$$\begin{aligned} \delta K &= \delta g^{\alpha\beta} N_{\beta,\alpha} - h^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda N_\lambda = \\ &= \delta g^{\alpha\beta} N_{\beta,\alpha} - h^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\nabla_\alpha \delta g_{\rho\beta} + \nabla_\beta \delta g_{\rho\alpha} - \nabla_\rho \delta g_{\alpha\beta}) \right) N_\lambda \end{aligned} \quad (2.122)$$

En las derivadas covariantes de la variación de la métrica:

$$\nabla_\alpha \delta g_{\rho\beta} = \delta g_{\rho\beta,\alpha} - \Gamma_{\alpha\rho}^\lambda \delta g_{\lambda\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \delta g_{\rho\lambda} \quad (2.123)$$

Si imponemos condiciones de contorno de Dirichlet solo sobrevive la derivada parcial. En la expresión de δK el primer término también se hace nulo, lo que nos queda es:

$$\begin{aligned} \delta K &= -h^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\delta g_{\rho\beta,\alpha} + \delta g_{\rho\alpha,\beta} - \delta g_{\alpha\beta,\rho}) \right) N_\lambda = \\ &= -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \left((\delta g_{\rho\beta,\alpha} + \delta g_{\rho\alpha,\beta} - \delta g_{\alpha\beta,\rho}) \right) N^\rho \end{aligned} \quad (2.124)$$

Los dos primeros términos también se anulan ya que corresponden a derivadas tangenciales.

$$\delta K = \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\rho} N^\rho \quad (2.125)$$

$$\delta S_{GHY} = 2\varepsilon \oint_{\Sigma} \sqrt{|h|} d^3 x' K = 2\varepsilon \oint_{\Sigma} \sqrt{|h|} d^3 x' \delta K \quad (2.126)$$

El término asociado a la variación de $\sqrt{|h|}$ es proporcional a $\delta g_{\rho\beta}$, el cual se anula debido a las condiciones de contorno de Dirichlet.

Llegando a la expresión final:

$$\delta S_{GHY} = \varepsilon \oint_{\Sigma} \sqrt{|h|} d^3 x' (h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta, \rho} N^{\rho}) \quad (2.127)$$

Por otro lado, la variación de la acción de Einstein-Hilbert contiene el siguiente término de frontera [2.9]:

$$\int d^4 x (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) = \int d^4 x (\sqrt{-g} \nabla_{\lambda} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\nu})) \quad (2.128)$$

Por [2.112], sabemos que este término es una derivada total. Al aplicar el teorema de Gauss obtenemos la siguiente expresión:

$$\int d^4 x (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) = \varepsilon \oint_{\Sigma} d^3 x' \sqrt{|h|} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\nu}) N_{\lambda} \quad (2.129)$$

Expresando $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ en función de la variación de la métrica, como hicimos anteriormente:

$$\varepsilon \oint_{\Sigma} d^3 x' \sqrt{|h|} (g^{\lambda\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\lambda\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_{\nu} \delta g_{\alpha\beta} N_{\lambda} \quad (2.130)$$

Utilizando [2.116], obtenemos:

$$(g^{\lambda\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\lambda\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_{\nu} \delta g_{\alpha\beta} N_{\lambda} = N^{\rho} h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \delta g_{\rho\nu} - N^{\mu} h^{\rho\nu} \nabla_{\mu} \delta g_{\rho\nu} \quad (2.131)$$

Por el mismo argumento que en [2.123, 2.125], si imponemos condiciones de contorno de Dirichlet el término de frontera queda de la siguiente forma:

$$\varepsilon \oint_{\Sigma} d^3 x' \sqrt{|h|} (-N^{\mu} h^{\rho\nu} \delta g_{\rho\nu, \mu}) \quad (2.132)$$

Al comparar [2.132, 2.127], comprobamos que ambos términos se compensan.

Con condiciones de contorno de Dirichlet, la variación de la acción mejorada es la siguiente:

$$\delta S_G = \int \sqrt{-g} d^4 x G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.133)$$

Donde podemos observar que se obtienen correctamente las ecuaciones de Einstein [2.10]. Este término de frontera desempeña un papel importante tanto en el formalismo ADM como el formalismo de la integral de caminos.

Parte 2

3. Gravedad y teorías gauge

El apartado se divide en dos partes. En la primera parte, se abordará el enfoque moderno de las teorías gauge, centrándonos en el lagrangiano de Yang-Mills. Se prestará especial atención al caso específico de la Cromodinámica Cuántica (QCD) utilizando el grupo SU (3). En la segunda parte, se presentará la gravedad desde una perspectiva similar, utilizando el grupo de Lorentz. Además, se comentarán las principales diferencias entre este enfoque y la teoría de Yang-Mills.

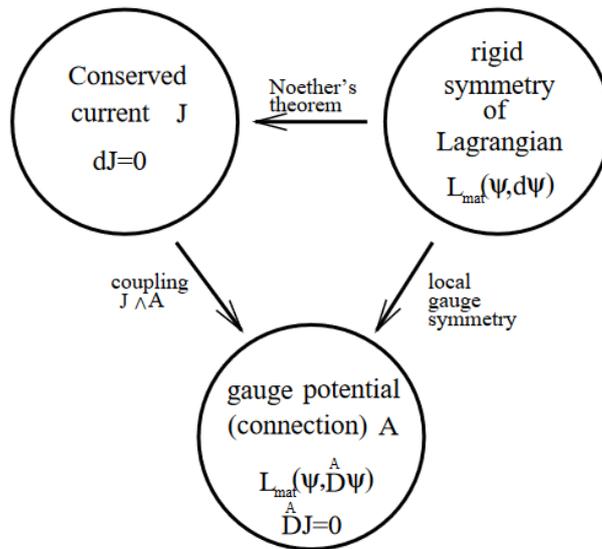


Figura 2: Descripción esquemática de una teoría gauge a la Yang-Mills [58]

Antes de adentrarnos en la teoría de Yang-Mills, es importante tener en cuenta un aspecto de la Electrodinámica Cuántica (QED). En unidades naturales, la densidad lagrangiana de la QED está dada por:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu D_\mu - m]\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

Donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Faraday definido por la derivada exterior del cuadripotencial electromagnético:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.2)$$

La derivada covariante (gauge) viene dada por:

$$D_\mu \psi = [\partial_\mu - ieA_\mu]\psi \quad (3.3)$$

El resultado interesante que podemos utilizar para derivar la teoría de Yang-Mills se obtiene al evaluar el conmutador de las derivadas covariantes aplicadas a ψ .

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = D_\mu D_\nu \psi - D_\nu D_\mu \psi = -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi = -ieF_{\mu\nu}\psi \quad (3.4)$$

En este caso, podemos observar que el conmutador proporciona el tensor de Faraday, también conocido como *field strength tensor*.

El procedimiento para construir una teoría gauge, en particular para la QED, se puede resumir de la siguiente forma:

- Observamos que el lagrangiano de Dirac tiene una simetría global $U(1)$.
- Con la introducción de una derivada covariante gauge, esta simetría se puede hacer local, agregando un nuevo campo que transforma de la manera requerida. En QED los campos gauge deben transformar de la forma: $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)$
- Dadas las mismas propiedades de invariancia $U(1)$, este campo gauge se toma como el cuadripotencial electromagnético. El lagrangiano del campo libre es $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Este lagrangiano cumple todas las propiedades que buscamos.
- El tensor $F_{\mu\nu}$ se puede obtener calculando el conmutador de las derivadas covariantes. Esto implica que el lagrangiano del campo se puede derivar construyendo un escalar utilizando el *field strength tensor* obtenido a través del conmutador.

Este procedimiento nos proporciona un plan para construir la teoría de Yang-Mills, que es la generalización de la QED cuando se considera un grupo gauge $SU(N)$. Al aplicar este enfoque al caso particular del grupo gauge $SU(3)$, obtenemos la Cromodinámica Cuántica (QCD).

3.1. Lagrangiano Yang-Mills

En 1954, Yang y Mills [55] extendieron la idea de Weyl [54] partiendo de la invarianza de isospín de las interacciones fuertes, que está asociada a la ley de conservación (aproximada) del isospín. En su trabajo, generalizaron el concepto de invarianza gauge de Weyl desde el grupo $U(1)$ de la electrodinámica al grupo no abeliano $SU(2)_f$.

Las teorías gauge rápidamente fueron generalizadas para incluir grupos no abelianos arbitrarios, y su cuantización continuó siendo objeto de estudio matemático por parte de Faddeev, Popov y Feynman entre otros. Estos avances se consideraron como un paso inicial o un ejercicio de calentamiento para abordar la cuantización de la relatividad general. En este trabajo no se tratarán los problemas que aparecen al intentar cuantizar una teoría gauge mediante la integral de caminos, ni el método de Faddeev-Popov. Trataremos con una teoría Yang-Mills clásica.

3.1.1. Campo de gluones

La Cromodinámica Cuántica es una teoría gauge Yang-Mills del grupo $SU(3)$ que describe la interacción entre quarks y gluones. La densidad lagrangiana de QCD está dada por:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}^f(x) [i\gamma^\mu D_\mu - m_f] \psi^f(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (3.5)$$

El Lagrangiano de la Cromodinámica Cuántica (QCD) fue propuesto por Fritzsche, Gell-Mann, y Leutwyler, así como por Gross, Wilczek, Weinberg y otros, en el año 1973. La forma del Lagrangiano de la QCD se fundamenta en dos suposiciones que han sido confirmadas por observaciones experimentales:

1. Todos los hadrones, tales como protones y neutrones, están compuestos por quarks. Los quarks son partículas fundamentales que poseen carga de color y se unen a través de la interacción fuerte descrita por la QCD.

2. Los quarks no pueden ser observados como partículas libres en la naturaleza. Esto se debe a un fenómeno conocido como confinamiento del color, que implica que los quarks siempre están confinados dentro de los hadrones y no pueden existir de forma aislada.

La primera observación nos lleva a un nuevo número cuántico para los quarks: el color. De hecho, sin este número cuántico no podemos construir las funciones de onda para algunos bariones.

La primera observación nos lleva a la introducción de un nuevo número cuántico para los quarks, conocido como el color. Sin este número cuántico, no seríamos capaces de construir las funciones de onda adecuadas para ciertos bariones.

Un ejemplo es el hiperión Ω^- , que consiste en tres quarks s (strange) y tiene un espín de $3/2$. Esto significa que las partes de espín y sabor de su función de onda son simétricas con respecto al intercambio de los quarks s idénticos. Según el principio de exclusión de Pauli, la función de onda completa de los tres quarks idénticos debe ser antisimétrica.

Si consideráramos únicamente el espín y el sabor como números cuánticos, se esperaría que la parte espacial de la función de onda de los tres quarks s fuera antisimétrica. Sin embargo, esto entraría en contradicción con el hecho de que el Ω^- es una partícula estable y por consiguiente la función de onda espacial debe ser simétrica. Para resolver esta aparente contradicción, es necesario introducir un nuevo número cuántico que tenga al menos tres valores distintos para distinguir los tres quarks extraños que forman el hiperión Ω^- . Este número cuántico es el color del quark. La función de onda de color debe ser antisimétrica para satisfacer la antisimetría de la función de onda.

La segunda observación experimental necesaria para la construcción del lagrangiano de la QCD es que los quarks nunca se observan como partículas libres. Esto implica que las fuerzas entre los quarks deben volverse más intensas a distancias mayores para evitar que los quarks puedan salir de un hadrón. Como veremos más adelante, esto se logra si las interacciones entre quarks son mediadas por gluones, que es un bosón no-abeliano de spin 1^{11} y sin masa.

Sobre el desarrollo histórico de la QCD y los experimentos que se llevaron a cabo se deja como referencia el libro *Quark & Leptons: An introductory course in modern particle physics* de Halzen [31]. Específicamente los capítulos 8, 9 y 10.

Existe una relación muy interesante entre la geometría diferencial y las teorías gauge. Dado que este tema se encuentra fuera del alcance de este trabajo, también dejo como referencia el libro "Quantum Field Theory" de Lewis Ryder.¹² para obtener más información al respecto.

En la teoría de Yang-Mills, se considera el grupo gauge $SU(N)$. El objetivo es construir el lagrangiano más sencillo para el campo con dicho grupo de simetría, evitando incluir derivadas de orden superior al segundo en las ecuaciones.

Primero, en el procedimiento para construir una teoría gauge, se comienza por elegir una representación bajo la que transformen los campos de materia, e.g. fermiones.

Una vez se ha elegido la representación adecuada, se procede a elevar la simetría global a una simetría local. Esto se logra introduciendo una derivada covariante, la cual introduce un nuevo

¹¹ Comparando las predicciones de la QCD con un modelo donde la interacción entre quarks está mediada por un bosón escalar, se puede verificar experimentalmente que el spin del gluon es 1. Esto puede observarse en procesos $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q} + g$. Véase figura 15.7 [30] y el problema 17.2 [38].

¹² [33] Ryder, L. H. *Quantum field theory*. Capítulo 3.6: The geometry of gauge fields.

campo que suele denominarse como compensador o simplemente campo gauge. Este campo se transforma de la forma requerida para que se preserve la invariancia gauge.

Después de introducir la derivada covariante, se evalúa su conmutador aplicado a los campos. Esto nos proporciona el *field strength tensor*. Una vez obtenido este tensor, se utiliza para construir un escalar que será el lagrangiano del campo gauge.

El lagrangiano que obtenemos será el único que presente invariancia gauge, invariancia de Lorentz, y que sea unitario (con un Hamiltoniano autoadjunto) para el grupo gauge SU(N).

Primero, recordamos que los generadores del grupo SU(N) satisfacen el algebra de Lie:

$$[\tau^a, \tau^b] = i f_c^{ab} \tau^c, \quad \tau^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad (3.6)$$

Donde λ^a son las matrices de Gell-Mann en el caso de SU (3) y f_c^{ab} las constantes de estructura del grupo.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Las constantes de estructura son totalmente antisimétricas:

$$f_{ijk} = -f_{jik} = f_{jki} = -f_{kji} = -f_{ikj} = f_{kij} \quad (3.8)$$

Y toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1 \\ f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} &= \frac{1}{2} \\ f_{458} = f_{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Bajo la acción del grupo SU (3), consideramos que los campos se transforman bajo la representación fundamental:

$$\begin{aligned} \psi_i &\rightarrow \Omega_i^j \psi_j \\ \bar{\psi}_i &\rightarrow \bar{\psi}_j \Omega^{-1}_i{}^j \end{aligned} \quad (3.10)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \Omega_i^j &= [\exp(-i\theta^a \tau_a)]_i^j \\ \bar{\psi}(x) &= (\bar{\psi}_r, \bar{\psi}_g, \bar{\psi}_b) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tenemos un multiplete, el lagrangiano correspondiente se puede expresar como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i [i\delta^{ij}\gamma^\mu\partial_\mu - m\delta^{ij}]\psi_j \quad (3.12)$$

Este lagrangiano es similar al lagrangiano de Dirac original, pero con la adición de una simetría SU(N) global, donde el campo ψ se transforma como hemos visto anteriormente. En este caso, hemos considerado un único valor para el sabor (u, d, s, c, b, t) por simplicidad. Es importante destacar que en realidad existen múltiples sabores de quarks que se pueden incorporar en el formalismo.

Nuestro siguiente paso es elevar esta simetría global a una simetría local. Para lograr esto, introducimos la derivada covariante y los campos gauge.

$$D_\mu^{ij}\psi_j = (\delta^{ij}\partial_\mu - ig\tau_a^{ij}A_\mu^a)\psi_j \quad (3.13)$$

Se ha utilizado τ_a en esta expresión debido a que estamos trabajando en la representación fundamental. En caso de trabajar en una representación r distinta, reemplazaríamos ese término por T_a . Es importante destacar que también existe otra representación relevante conocida como la representación adjunta, la cual exploraremos más adelante.

Ahora imponemos que la derivada covariante transforme de la misma manera que el propio campo, es decir:

$$D_\mu\psi \rightarrow (D_\mu\psi)' = \partial_\mu\psi' - igA'_\mu\psi' = \Omega(x)D_\mu\psi \quad (3.14)$$

Donde se ha definido $(\tau_a^{ij}A_\mu^a) \equiv A_\mu(x)$, desarrollando la expresión anterior:

$$\partial_\mu\Omega(x)\psi - igA'_\mu\Omega(x)\psi = \Omega(x)D_\mu\psi \quad (3.15)$$

Aplicando la derivada al primer término, obtenemos:

$$(\partial_\mu\Omega(x))\psi + \Omega(x)(\partial_\mu\psi) - igA'_\mu\Omega(x)\psi = \Omega(x)(\partial_\mu\psi - igA_\mu\psi) \quad (3.16)$$

Esto no es equivalente al caso abeliano, ya que en el último término de l.h.s., $\Omega(x)$ se multiplica a la derecha de $A_\mu(x)$, mientras que en la r.h.s., se multiplica a la izquierda. Esta diferencia es significativa ya que dentro de $A_\mu(x)$ tenemos un τ_a que no conmuta con $\Omega(x)$.

Para que esta igualdad se cumpla, es necesario lo siguiente:

$$\partial_\mu\Omega(x) - igA'_\mu\Omega(x) = \Omega(x)(-igA_\mu\psi) \quad (3.17)$$

Resolviendo para A'_μ , obtenemos la siguiente expresión:

$$A'_\mu = \Omega(x) \left[A_\mu + \frac{i}{g} \partial_\mu \right] \Omega^{-1}(x) \quad (3.18)$$

O escrito de otra forma:

$$(\tau_a^{ij}A_\mu^a) \equiv A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = -\frac{i}{g} [\partial_\mu\Omega(x)]\Omega^{-1}(x) + \Omega(x)A_\mu(x)\Omega^{-1}(x) \quad (3.19)$$

Siempre podremos elegir los generadores de SU(N) de tal manera que se cumpla la siguiente identidad:

$$Tr[\tau^a\tau_b] = \frac{1}{2}\delta_b^a \quad (3.20)$$

Por último, si consideramos transformaciones gauge infinitesimales, encontramos que los campos gauge se transforman de la siguiente manera¹³:

$$A_i^\mu(x) \rightarrow A_i^{\mu'}(x) \equiv A_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega_i(x) - g f_{ijk} \omega_j(x) A_k^\mu(x) \quad (3.21)$$

Para demostrarlo desarrollamos $\Omega(x)$ en serie, quedándonos a primer orden en $\theta^a(x)$:

$$\Omega(x) \approx (1 - i\theta^a(x)\tau_a) \quad (3.22)$$

Los campos se transforman como:

$$\psi \rightarrow (1 - i\theta^a(x)\tau_a)\psi \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} A_\mu^a \tau_a &= \exp(-i\theta^b(x)\tau_b) \left[A_\mu^a \tau_a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right] \exp(i\theta^c(x)\tau_c) \\ &\approx A_\mu^a \tau_a - i[\theta^b(x)\tau_b, A_\mu^a \tau_a] - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^c(x)\tau_c \\ &= A_\mu^a \tau_a + \theta^b(x) f^{bca} \tau^c A_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^c(x)\tau_c \\ &= A_\mu^a \tau_a - \theta^b(x) f^{cba} \tau^c A_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^c(x)\tau_c \end{aligned} \quad (3.24)$$

En algunos libros toman la derivada y la transformación de los campos gauge como punto de partida para después comprobar que la derivada covariante transforma de la misma manera que el campo:

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &\rightarrow (D_\mu \psi)' = \partial_\mu \psi' - ig A_\mu^a \psi' = \\ &= \partial_\mu (\Omega(x)\psi) + ig \frac{i}{g} [\partial_\mu \Omega(x)] \Omega^{-1}(x) \Omega(x) \psi - ig \Omega(x) A_\mu(x) \Omega^{-1}(x) \Omega(x) \psi = \\ &= \Omega(x) \partial_\mu \psi - ig \Omega(x) A_\mu(x) \psi = \Omega(x) D_\mu \psi \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por tanto, el lagrangiano de Dirac invariante gauge nos queda:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i [iD_\mu^{ij} - m\delta^{ij}] \psi_j \quad (3.26)$$

El siguiente paso es calcular el conmutador de las derivadas covariantes para obtener el *field strength tensor*:

$$[D_\mu, D_\nu]^{ij} \psi_j = D_\mu^i D_\nu^{kj} \psi_j - D_\nu^i D_\mu^{kj} \psi_j = -ig G_{\mu\nu}^{ij} \psi_j \quad (3.27)$$

$$G_{\mu\nu}^{ij} = \tau_a^{ij} G_{\mu\nu}^a \quad (3.28)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (3.29)$$

Vemos que la gran diferencia en comparación con el caso QED es que las constantes de estructura no son nulas, debido a que estamos trabajando con un grupo no abeliano.

El *field strength tensor* transforma en la representación adjunta:

$$G_{\mu\nu}^{ij} \rightarrow \Omega_k^i(x) G_{\mu\nu}^{kl} \Omega^{-1}{}^j{}_l(x) \quad (3.30)$$

¹³ Quantum Field Theory, Mandl and Shaw [30]: 11.4 Appendix: Two Gauge Transformation Results, 11.4.1 The transformation law (11.26b). En el libro se toma el signo opuesto en la exponencial $\Omega(x)$, también aparece un factor g multiplicando. Por último, ω_i sería nuestra θ^a .

Podemos ver que, bajo esta transformación, el conmutador de las derivadas covariantes transforma como los campos, algo que era de esperar por construcción.

El último paso consiste en construir un escalar con el *field strength tensor* para obtener el lagrangiano del campo gauge:

$$\mathcal{L}_{Yang-Mills} = -\frac{1}{2} Tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \quad (3.31)$$

Podemos ver que el lagrangiano es invariante utilizando la propiedad cíclica de las trazas:

$$Tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \rightarrow Tr[\Omega(x)G_{\mu\nu}\Omega^{-1}(x)\Omega(x)G^{\mu\nu}\Omega^{-1}(x)] = Tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \quad (3.32)$$

Es importante recordar que tomamos la traza porque $G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ es una matriz 3x3, a diferencia del caso del electromagnetismo. Por tanto, para conseguir un escalar, debemos tomar la traza. El lagrangiano que hemos obtenido es el único que es invariante gauge, Lorentz y unitario para el caso SU (3).

Podemos observar que el lagrangiano de Yang-Mills (sin quarks) muestra interacciones debido al término que acompaña a la constante de estructura en la fórmula de $G_{\mu\nu}$, a diferencia del caso abeliano donde el lagrangiano Yang-Mills sería libre. En este caso, los gluones interactúan entre sí incluso sin tener quarks.

Desarrollamos el lagrangiano en función de los campos gauge [3.31]:

$$\mathcal{L}_{Yang-Mills} = -\frac{1}{2} Tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$$

Utilizamos la expresión [3.29]:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$$

Por tanto, el lagrangiano de gluones nos queda como: (a partir de ahora escribo \mathcal{L}_G)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & -\frac{1}{4} F_{i\mu\nu}(x) F_i^{\mu\nu}(x) + gf_{ijk} A_{i\mu}(x) A_{j\nu}(x) \partial^\mu A_k^\nu(x) \\ & -\frac{1}{4} g^2 f_{ijk} f_{ilm} A_j^\mu(x) A_k^\nu(x) A_{l\mu}(x) A_{m\nu}(x) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Donde se ha definido:

$$F_i^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\nu A_i^\mu(x) - \partial^\mu A_i^\nu(x) \quad (3.34)$$

El segundo y tercer término representan interacciones de los campos de gluones consigo mismos. En teoría de perturbaciones a primer orden, estos términos generan los siguientes diagramas: uno de tres vértices y otro de cuatro vértices respectivamente [Figura 3].

Esto contrasta con el caso QED, ya que en ese caso los fotones no tienen carga eléctrica y no hay interacciones fundamentales entre fotones. Sin embargo, los gluones poseen carga de color, lo que da lugar a interacciones entre ellos.

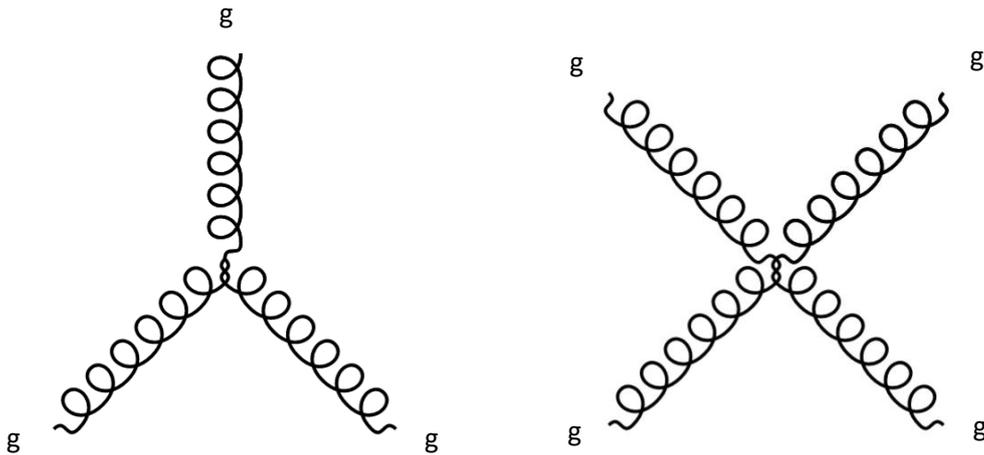


Figura 3: Vértices gluon-gluon generados por el segundo y tercer término del lagrangiano.

3.1.2. Los venusianos de Feynman

Llegados este punto, resulta conveniente mostrar otra analogía entre las teorías de Yang-Mills y la relatividad general.

Tal y como hemos visto, el hecho de que el grupo gauge sea no abeliano hace que sea imposible introducir un término cinemático para el campo A_α^μ sin incluir interacciones. Este es otro aspecto en el que la relatividad general y las teorías gauge no abelianas coinciden: ambas son no lineales.

En relatividad general, el campo gravitatorio está descrito por la acción de Einstein-Hilbert, la cual también contiene términos de interacción. La razón de esto es que el campo gravitacional interactúa con cualquier campo que tenga un tensor energía momento. En el caso de las teorías gauge, el campo gauge interactúa con cualquier campo que no transforme en la representación trivial del grupo.

En [2], Feynman narra la historia de ficción de unos científicos venusianos que intentan construir una teoría de la gravedad.

En Venus, los científicos ya tenían un conocimiento completo sobre las interacciones que se presentan en física en términos de campos. Sin embargo, se encontraron con una sorpresa cuando un nuevo experimento reveló que dos cuerpos masivos neutros se atraen entre sí, y lo hacen con una fuerza considerablemente más débil en comparación con las otras interacciones que ya conocían. Por ejemplo, la atracción eléctrica entre dos electrones es 10^{42} veces más fuerte que su atracción gravitatoria

Al no tener la posibilidad de contactar con Einstein y desconocer la formulación geométrica de la gravedad, los científicos venusianos deciden abordar este problema desde el punto de vista que sí conocen: tratar la gravedad como una teoría de campos relativista (SRFT). Después de numerosos intentos, llegan a la conclusión de que el campo gravitatorio debe tener spin 2 y no tener masa¹⁴.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_m + \kappa h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

¹⁴ [2] Lecture 4.1: The connection between the tensor rank and the spin of a field.

Volviendo al mundo real, en el libro, Feynman parte del lagrangiano de Fierz-Pauli y construye una teoría auto consistente. Para lograrlo, toma en consideración el tensor energía momento gravitacional $\chi^{\mu\nu}$, de manera que se cumpla la siguiente ley de conservación:

$$(T^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu})_{,\nu} = 0$$

Repitiendo un cálculo iterativo¹⁵, se llega a una formulación de la gravedad que es correcta a todos los órdenes que coincide con la teoría de la relatividad general de Einstein.

Fuera del marco SRFT, el tratamiento del tensor energía momento del campo gravitacional planteó varios desafíos en los comienzos de la relatividad general. De hecho, una de las críticas planteadas por Hilbert sobre el trabajo de Emmy Noether fue el hecho de que aparentemente sus teoremas de conservación no funcionaban correctamente al tratar el campo gravitatorio [23].

Sin embargo, es posible construir pseudotensores energía momento, como el pseudotensor de Landau-Lifshitz¹⁶, que se define en términos de $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}$. Estas cantidades se denominan pseudotensores porque solo se comportan como tensores bajo transformaciones lineales, donde el segundo término de la transformación [1.3] es nulo, y no bajo transformaciones generales de coordenadas (GCTs).

En relación al tensor energía momento gravitacional en relatividad general voy a parafrasear la siguiente reflexión que se encuentra en el libro de Misner, Thorne y Wheeler [3]:

Anybody who looks for a magic formula for “local gravitational energy-momentum” is looking for the right answer to the wrong question. Unhappily, enormous time and effort were devoted in the past trying to “answer this question” before investigators realized the futility of the enterprise. Toward the end, above all mathematical arguments, one came to appreciate the quiet but rock-like strength of Einstein’s equivalence principle. One can always find in any given locality a frame of reference in which all local “gravitational fields” (all Christoffel symbols; all $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$) disappear. No Γ ’s means no “gravitational field” and no local gravitational field means no “local gravitational energy-momentum”.

Referencia: [3] Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. Macmillan. Capítulo 20.4: Why the energy of the gravitational field cannot be localized. Página: 467.

3.1.3. Lagrangiano QCD

El lagrangiano QCD será la suma del lagrangiano de Dirac invariante y el lagrangiano del campo gauge:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}_i [i\gamma^{\mu} D_{\mu}^{ij} - m\delta^{ij}] \psi_j - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (3.35)$$

Otra propiedad fundamental de la Cromodinámica Cuántica es la independencia del sabor. Esto implica que la fuerza y la forma de la interacción entre quarks y gluones no depende del sabor específico del quark involucrado. Esta propiedad conlleva una consecuencia interesante sobre los quarks u y d. En el caso límite en el que las masas de estos quarks fueran iguales, los protones (p - uud) y los neutrones (p - udd) serían indistinguibles bajo la interacción fuerte, ya que solo se distinguirían por su interacción electromagnética debido a sus cargas diferentes. Esta simetría

¹⁵ [2] 6.2. Formulation of a theory correct to all orders.

¹⁶ [7] 101. El pseudotensor energía-impulso

se conoce como simetría de isospín y proporciona una buena aproximación en la descripción de las interacciones nucleares a bajas energías.

Finalmente, la última propiedad que se examinará es la conservación de los seis números del quark. Estos números se definen como la diferencia entre el número de quarks y el número de antiquarks de un determinado sabor f : $N_f = N(f) - N(\bar{f})$ para $f = u, d, s$, etc. Experimentalmente se ha demostrado que este número se conserva.

Para completar nuestro análisis, podemos calcular las ecuaciones de campo clásicas que surgen a partir de la acción del campo de gluones:

$$\begin{aligned}\delta S_{YM}[A] &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} G^{a\mu\nu} \delta G_{\mu\nu}^a \right) \\ &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} G^{a\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu^a - \partial_\nu \delta A_\mu^a + g(\delta A_\mu^b A_\nu^c + A_\mu^b \delta A_\nu^c) f^{abc}) \right] \\ &= \int d^4x (\partial_\mu G^{a\mu\nu} + g f^{abc} A_\mu^b G^{c\mu\nu}) \delta A_\nu^a\end{aligned}\quad (3.36)$$

Las ecuaciones del campo clásico son:

$$\partial_\mu G^{a\mu\nu} + g f^{abc} A_\mu^b G^{c\mu\nu} = 0 \quad (3.37)$$

Teniendo en cuenta que $G^{a\mu\nu}$ transforma en la adjunta, la expresión anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$D_\mu G^{a\mu\nu} = 0 \quad (3.38)$$

Donde hemos utilizado que, si un campo transforma en la representación adjunta, la derivada covariante es la siguiente:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i[A_\mu, \phi] \quad (3.39)$$

Con $\phi = \phi^a T_a$, en este caso estamos trabajando con los campos sin contraer.

En presencia del campo de materia (quarks) tenemos:

$$S[A, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(G^2) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \right) \quad (3.40)$$

Obteniendo las siguientes ecuaciones de campo:

$$D_\mu G^{a\mu\nu} = -g \bar{\psi} \gamma^\nu \tau^a \psi \quad (3.41)$$

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0 \quad (3.42)$$

Se puede demostrar que el término r.h.s. es la corriente de Noether asociada a la simetría global SU(3), que denotaremos como S_i^μ . Tenemos una corriente conservada para cada valor de a , las cargas conservadas asociadas son [30]:

$$\hat{Q}_i \equiv \int d^3x S_i^0(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x) \tau_i \psi(x) \quad (3.43)$$

Las cargas conservadas de un grupo de simetría son los generadores del grupo. En el caso de la simetría traslacional, la magnitud conservada es el momento. En este caso ocurre algo similar a la simetría rotacional SO(3), donde los momentos angulares no conmutan. En nuestro caso, las cargas de color tampoco conmutan entre sí. Además, tenemos dos operadores Casimir (τ^3 y τ^8), el rango de SU(3) es dos.

Por ejemplo, para \hat{Q}_3 :

$$\hat{Q}_3 = \int d^3x N [\psi_r^\dagger(x)\psi_r(x) - \psi_g^\dagger(x)\psi_g(x)] \quad (3.44)$$

En función del operador número:

$$\hat{Q}_3 = \frac{1}{2} [N_r - \bar{N}_r] - \frac{1}{2} [N_g - \bar{N}_g] \quad (3.45)$$

Hemos visto que los gluones transforman bajo la representación adjunta, la cual tiene dimensión 8. No necesitamos introducir más colores de los que ya tenemos (red, green, blue). Existe una propiedad que nos permite construir la base de la representación adjunta utilizando esos tres colores.

$$F \otimes \bar{F} = A \oplus 1 \quad (3.46)$$

Donde \bar{F} es la representación anti-fundamental (conjugada), la base de dimensión 9 de l.h.s. es:

$$\begin{aligned} &|r\rangle|\bar{r}\rangle, |r\rangle|\bar{g}\rangle, |r\rangle|\bar{b}\rangle \\ &|g\rangle|\bar{r}\rangle, |g\rangle|\bar{g}\rangle, |g\rangle|\bar{b}\rangle \\ &|b\rangle|\bar{r}\rangle, |b\rangle|\bar{g}\rangle, |b\rangle|\bar{b}\rangle \end{aligned} \quad (3.47)$$

La representación trivial (singlete) es:

$$(|r\rangle|\bar{r}\rangle + |g\rangle|\bar{g}\rangle + |b\rangle|\bar{b}\rangle)/\sqrt{3} \quad (3.48)$$

No existen gluones en el estado singlete, aunque el confinamiento no lo prohíbe. Si existieran, dado que el gluon no tiene masa, la interacción fuerte tendría una componente de rango infinito. Experimentalmente se ha comprobado que no puede haber gluones en el estado singlete. Esto implica que el grupo de simetría de la QCD es SU (3) y no U (3).

Podemos observar que en la acción de la QCD no aparece un término de masa del campo, de hecho, no podemos tenerlo si deseamos mantener la invariancia gauge. Tenemos $N^2 - 1$ campos gauge sin masa, en el caso SU (3) tenemos ocho gluones.

3.2. Formulación de Utiyama

En la sección anterior, hemos visto como derivar el lagrangiano de Yang-Mills. En particular hemos trabajado con el grupo no abeliano SU (3). En esta sección, seguiremos un procedimiento similar para encontrar el lagrangiano asociado al campo gravitatorio.

En [56], Utiyama presenta una generalización de los resultados de Yang-Mills [55] y Weyl [54], trabajando con el grupo de Lorentz SO (3,1). Es importante tener en cuenta que esta formulación de la gravedad no es completamente satisfactoria debido a que la corriente conservada asociada al grupo de Lorentz es la densidad de corriente de momento angular, tal y como vimos en [2.1.2]. Sin embargo, puesto que la gravedad se acopla al tensor energía momento [2.12], debemos introducir las traslaciones de alguna forma. Es tentador construir una teoría gauge de la gravedad considerando el grupo de Poincaré debido a la relación con las GCTs, pero no se tratará en este trabajo.

En esta sección, veremos cómo podemos utilizar el formalismo de tétradas para encontrar la acción de Einstein-Hilbert. También comentaremos las diferencias más importantes entre la formulación de una teoría Yang-Mills y la formulación de Utiyama.

3.2.1. Formalismo de tétradas

La materia, tal como la conocemos, está formada por fermiones. Estos fermiones están descritos por campos que transforman bajo representaciones spinoriales del grupo de Lorentz. Sin embargo, no hay una representación spinorial del grupo de GUTs. Para tratar los campos spinoriales es necesario introducir el denominado formalismo del vierbein. Este formalismo proporciona, en cada punto, un mapa desde el espacio-tiempo curvo al espacio tangente, donde se pueden definir representaciones arbitrarias del grupo de Lorentz. El formalismo de tétradas desempeña un papel crucial en la formulación de Utiyama.

Consideramos una base arbitraria en el espacio tangente, esta base está definida por un conjunto de cuatro vectores contravariantes etiquetados por índices del espacio tangente (letras latinas). $\{e_a = e_a^\mu \partial_\mu\}$ y se conocen como por base Vielbein o tétradas. Podemos expresar cualquier vector en esta nueva base: $\xi = \xi^a e_a$, y sus componentes en la base coordenada $\{\partial_\mu\}$ se obtienen mediante la siguiente expresión:

$$\xi^\mu = \xi^a e_a^\mu \quad (3.49)$$

De igual manera, se define la base dual:

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a \quad (3.50)$$

Asimismo, las componentes de la métrica en función de las tétradas se expresan de la siguiente manera:

$$g_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} \quad (3.51)$$

En el caso de tener una base de vierbein ortonormal, $g_{ab} = \eta_{ab}$.

Para subir y bajar índices en la base coordenada se utiliza $g_{\mu\nu}$, como habitualmente. En el caso de la base de vierbein, se utiliza g_{ab} .

Las tétradas son mapas definidos en cada punto que nos permiten relacionar la variedad del espacio-tiempo con espacio tangente y viceversa. Por ejemplo, las componentes de un vector se pueden escribir de la siguiente forma:

$$e_\mu^a V^\mu = V^a \quad (3.52)$$

$$e_b^\mu V^b = V^\mu \quad (3.53)$$

Dado un conjunto de tétradas $\{e_\mu^a\}$ podemos realizar transformaciones de Lorentz locales:

$$e_\mu'^a = \Lambda_b^a(x) e_\mu^b \quad (3.54)$$

La única restricción que tenemos sobre las tétradas es que deben cumplir la relación:

$$\eta_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} \quad (3.55)$$

Pero sabemos que las transformaciones de Lorentz preservan la métrica de Minkowski. Por tanto, tenemos la libertad de realizar transformaciones Lorentz locales (LLTs) sobre los vierbeins.

Igual que definimos una derivada covariante en términos de la conexión métrica, podemos definir una derivada covariante utilizando la conexión de spin¹⁷ de la siguiente forma:

$$D_\mu X_b^a = \partial_\mu X_b^a + \omega_\mu^a{}_c X_b^c - \omega_\mu^c{}_b X_c^a \quad (3.56)$$

¹⁷ El nombre proviene de que esta conexión se utiliza para tomar derivadas covariantes de spinores.

También podemos considerar derivadas covariantes de tensores que tengan índices ambos tipos. La regla general establece que por cada índice curvo se tiene una conexión métrica, y por cada índice plano una conexión de spin. Sin embargo, un tensor no debe depender de la base elegida. Esta condición nos lleva al primer *postulado*¹⁸ de vielbein:

$$\nabla_{\mu} e_{\nu}^a = \partial_{\mu} e_{\nu}^a + \omega_{\mu}^a e_{\nu}^b - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} e_{\lambda}^a = 0 \quad (3.57)$$

A partir de esta ecuación, podemos ver que la conexión métrica viene dada por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = e_{\alpha}^{\lambda} D_{\mu} e_{\nu}^{\alpha} \quad (3.58)$$

De la condición de metricidad se puede deducir que la conexión de spin tiene que ser antisimétrica en sus dos índices planos:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\beta} g_{\mu\nu} = \nabla_{\beta} (\eta_{ab} e_{\mu}^a e_{\nu}^b) = e_{\mu}^a e_{\nu}^b \nabla_{\beta} \eta_{ab} = \\ &= e_{\mu}^a e_{\nu}^b (\partial_{\beta} \eta_{ab} - \omega_{\beta}^c e_{\mu}^c \eta_{cb} - \omega_{\beta}^d e_{\nu}^d \eta_{da}) = -\omega_{\beta ba} - \omega_{\beta ab} \end{aligned}$$

Llegando a la expresión buscada:

$$\omega_{\beta ba} = -\omega_{\beta ab} \quad (3.59)$$

Por último, vamos a expresar la conexión de spin en función de las tétradas. Como veremos más adelante, esto marcará una de las diferencias más importantes entre una teoría Yang-Mills y la formulación de Utiyama.

Imponiendo que la torsión de la conexión métrica sea nula en la expresión [3.57], obtenemos:

$$\partial_{[\mu} e_{\nu]}^a + \omega_{[\mu}^a e_{\nu]}^b = 0 \quad (3.60)$$

Resolviendo para la conexión de spin, se obtiene [52]:

$$\omega_{\mu}^a e_{\nu}^b = 2e^{\lambda[a} \partial_{[\lambda} e_{\mu]b]} + e_{\mu}^c e^{\lambda a} e_b^{\rho} \partial_{[\lambda} e_{\rho]}^c \quad (3.61)$$

De esta expresión, lo que nos interesa es observar que la conexión de spin puede expresarse en términos de las tétradas y sus primeras derivadas.

3.2.2. Relatividad general

Aunque no exista una representación spinorial del grupo de GCTs, se pueden definir los campos spinoriales en el espacio tangente. Como el grupo SO(3,1) sí que tiene representación spinorial, lo que se hace es definir un campo en cada punto de la variedad que sea un escalar bajo GCTs y un spinor bajo el grupo de Lorentz en el espacio tangente.

El primer paso para incorporar spinores Lorentz en relatividad general es construir un lagrangiano de Dirac con simetría gauge del grupo de Lorentz.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) [i\hbar\gamma^{\mu} \nabla_{\mu} - mc^2] \psi(x) \quad (3.62)$$

Con:

$$\nabla_{\mu} \psi = \left(\partial_{\mu} - \frac{i}{4} \omega_{\mu}^{ab} \sigma_{ab} \right) \psi \quad (3.63)$$

¹⁸ En realidad, no se trata de un postulado, se demuestra explícitamente en [9] ecuación 3.133. Además, se cumple siempre, sin imponer condiciones como la compatibilidad de la métrica o torsión nula.

Donde ω_μ^{ab} es la conexión de spin o de Lorentz, como hemos visto en el apartado anterior, y σ_{ab} los generadores del grupo de Lorentz en la representación que transformen los campos.

Utilizando el lema de Schur se puede demostrar que la representación spinorial del grupo de Lorentz no es irreducible. Los generadores están dados por la expresión:

$$\sigma^{ab} = \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b] \quad (3.64)$$

Donde γ^a son las matrices de Dirac. Además, estas matrices satisfacen la relación anticonmutativa:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} \quad (3.65)$$

Por otro lado, se define la matriz γ^5 como:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (3.66)$$

Esta matriz tiene las siguientes propiedades [38]:

$$\begin{aligned} (\gamma^5)^\dagger &= \gamma^5 \\ (\gamma^5)^2 &= 1 \\ \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

La matriz γ^5 conmuta con los generadores del grupo:

$$[\gamma^5, \sigma^{ab}] = 0 \quad (3.68)$$

De acuerdo con el lema de Schur, si la representación fuera irreducible, la matriz γ^5 debería ser proporcional a la identidad, lo cual no es cierto. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que la representación spinorial (o de Dirac) del grupo de Lorentz es reducible.

Tal y como mencionamos en la introducción, los índices con letras latinas se reservan para el espacio tangente y las letras griegas se reservan para los índices del espacio-tiempo curvo. Además, es necesario multiplicar la densidad lagrangiana por un factor $\sqrt{-g}$ para que la acción sea invariante bajo GCTs.

Para ello utilizamos el formalismo de tétradas que hemos visto en el apartado anterior [3.55]:

$$\eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b = g_{\mu\nu}$$

Además, las matrices gamma con índices curvos satisfacen la siguiente relación de anticonmutación:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (3.69)$$

En función de las tétradas, las matrices gamma con índices curvos se relacionan con las del espacio tangente de la siguiente manera:

$$e_a^\mu \gamma^a = \gamma^\mu \quad (3.70)$$

En el caso de QCD, vimos cómo construir el lagrangiano del campo gauge a través del conmutador de la derivada covariante. Siguiendo el mismo procedimiento, en este caso el conmutador queda de la siguiente forma:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi = \nabla_\mu \nabla_\nu \psi - \nabla_\nu \nabla_\mu \psi \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi &= \partial_\mu \partial_\nu \psi - \frac{i}{4} \partial_\mu (\omega_\nu^{ab} \sigma_{ab}) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \left(\partial_\lambda \psi - \frac{i}{4} \omega_\lambda^{ab} \sigma_{ab} \psi \right) - \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \partial_\nu \psi \\
&\quad + \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \frac{i}{4} \omega_\nu^{cd} \sigma_{cd} \psi - \partial_\nu \partial_\mu \psi + \frac{i}{4} \partial_\nu (\omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi) \\
&\quad + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \left(\partial_\lambda \psi - \frac{i}{4} \omega_\lambda^{ab} \sigma_{ab} \psi \right) + \frac{i}{4} \omega_\nu^{ab} \sigma_{ab} \partial_\mu \psi - \frac{i}{4} \omega_\nu^{cd} \sigma_{cd} \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando las identidades [3.65, 3.64], el conmutador se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi &= -\frac{i}{4} (\partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab}) \sigma_{ab} \psi - \frac{i}{4} (\omega_\mu^{ac} \omega_\nu^b - \omega_\nu^{ac} \omega_\mu^b) \sigma_{ab} \psi \\
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi &= -\frac{i}{4} \mathcal{R}_{\mu\nu}^{ab} \sigma_{ab} \psi \tag{3.72}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}^{ab} \equiv \partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + \omega_\mu^{ac} \omega_\nu^b - \omega_\nu^{ac} \omega_\mu^b \tag{3.73}$$

A partir de este tensor $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{ab}$, podemos construir un escalar para obtener la acción del campo. Para ello, contraemos los índices del tensor $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{ab}$. Además, multiplicamos por el determinante de la tétrada para que se transforme como una densidad escalar. Se observa que el tensor $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{ab}$ contiene derivadas primeras de la conexión de spin, y a su vez, esta conexión contiene derivadas primeras de las tétradas.

Si deseamos obtener ecuaciones de movimiento que no contengan derivadas de orden mayor que el segundo, la acción tiene que tener la forma:

$$S = \int d^4x e \mathcal{R}_{\mu\nu}^{ab} e_a^\mu e_b^\nu \tag{3.74}$$

Con $e = \det(e^c_\alpha) = \sqrt{-g}$.

Para demostrar que efectivamente se trata de la acción de Einstein-Hilbert tenemos que relacionar el tensor $\mathcal{R}_{\mu\nu}^b$ con el tensor de curvatura $R_{\nu\mu\rho}^\lambda$.

Podemos resumir las diferentes derivadas covariantes en la siguiente lista, siguiendo las reglas que se mencionaron en [3.2.1].

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu A_\nu &= \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda \\
\nabla_\mu A_a &= \partial_\mu A_a + \omega_{\mu a}^b A_b \\
\nabla_\mu \psi &= \left(\partial_\mu - \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \right) \psi
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Para relacionar el tensor $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{ab}$ con el tensor de curvatura, evaluamos el conmutador de la derivada covariante actuando sobre un vector del espacio tangente:

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu] B_a &= \nabla_\mu \nabla_\nu B_a - \nabla_\nu \nabla_\mu B_a \\
&= \partial_\mu (\partial_\nu B_a + \omega_{\nu a}^b B_b) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (\partial_\lambda B_a + \omega_{\lambda a}^b B_b) + \omega_{\mu a}^c (\partial_\nu B_c + \omega_{\nu c}^b B_b) \\
&\quad - \partial_\nu (\partial_\mu B_a + \omega_{\mu a}^b B_b) + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda (\partial_\lambda B_a + \omega_{\lambda a}^b B_b) - \omega_{\nu a}^c (\partial_\mu B_c + \omega_{\mu c}^b B_b) \\
&= \partial_\mu (\omega_{\nu a}^b) B_b + \omega_{\nu a}^b \partial_\mu (B_b) - \partial_\nu (\omega_{\mu a}^b) B_b - \omega_{\mu a}^b \partial_\nu (B_b) + \omega_{\mu a}^c \partial_\nu (B_c) \\
&\quad + \omega_{\mu a}^c \omega_{\nu c}^b B_b - \omega_{\nu a}^c \partial_\mu B_c - \omega_{\nu a}^c \omega_{\mu c}^b B_b
\end{aligned}$$

Llegando a la expresión final:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] B_a = (\partial_\mu \omega_{\nu a}^b - \partial_\nu \omega_{\mu a}^b + \omega_{\mu a}^c \omega_{\nu c}^b - \omega_{\nu a}^c \omega_{\mu c}^b) B_b \tag{3.76}$$

Donde podemos identificar el tensor $\mathcal{R}_{\mu\nu a}^b$ [3.73], como último paso lo que tenemos que hacer es partir del tensor de curvatura y pasar el índice curvo a uno del espacio tangente:

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda B_\lambda = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] B_\rho = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] e_\rho^a B_a = e_\rho^a [\nabla_\mu, \nabla_\nu] B_a = e_\rho^a \mathcal{R}_{\mu\nu a}^b B_b \quad (3.77)$$

Obteniendo la siguiente expresión:

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda B_\lambda = e_\rho^a \mathcal{R}_{\mu\nu a}^b e_b^\lambda B_\lambda \quad (3.78)$$

La relación entre el tensor de curvatura $R_{\mu\nu\rho}^\lambda$ y $\mathcal{R}_{\mu\nu a}^b$ es:

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda = e_\rho^a \mathcal{R}_{\mu\nu a}^b e_b^\lambda \quad (3.79)$$

Lo cual no nos sorprende, ya que el tensor $\mathcal{R}_{\mu\nu a}^b$ lo hemos obtenido evaluando el conmutador de las derivadas covariantes actuando sobre un vector del espacio tangente.

Introduciendo esta relación en la expresión para la acción que habíamos obtenido en [3.74], obtenemos:

$$S = \int d^4x e \mathcal{R}_{\mu\nu}^{ab} e_a^\mu e_b^\nu = \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu}^{\lambda\rho} e_\lambda^a e_\rho^b e_a^\mu e_b^\nu \quad (3.80)$$

Utilizando [3.55], podemos despejar la métrica. Llegamos a la siguiente expresión:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu}^{\lambda\rho} g_\lambda^\mu g_\rho^\nu \quad (3.81)$$

Podemos observar que esto coincide con la definición del escalar de curvatura:

$$R = g_\lambda^\mu R_\mu^\lambda = g_\lambda^\mu g_\rho^\nu R_{\mu\nu}^{\lambda\rho} \quad (3.82)$$

Por lo tanto, hemos obtenido el lagrangiano de Einstein-Hilbert siguiendo un procedimiento similar al de una teoría Yang-Mills, en el caso de QCD con el grupo SU(3) y en el de la gravedad con el grupo de Lorentz. La densidad lagrangiana total viene dada por:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\bar{\psi}(x) [i\hbar\gamma^\mu \nabla_\mu - mc^2] \psi(x) + \frac{1}{2\kappa} R \right] \quad (3.83)$$

No hay que olvidar las diferencias que se mencionaron al inicio entre las teorías Yang-Mills y la formulación de Utiyama. Resumiéndolas brevemente:

- La simetría del grupo de Lorentz es una simetría externa. Al introducir las tétradas, esta simetría externa se convierte en una simetría interna similar a las de una teoría Yang-Mills.
- La derivada covariante en relatividad genera no transforma como los campos, sino como un tensor de orden superior.
- La acción de Einstein-Hilbert es lineal en la curvatura en lugar de cuadrática, aunque es posible añadir términos cuadráticos a S_{EH} siempre y cuando se respeten ciertas condiciones.
- En el caso de la gravedad, partimos de las tétradas, que son campos con simetría local del grupo de Lorentz. En la teoría de Yang-Mills, partimos del campo de materia e introducimos los campos compensadores para que el lagrangiano sea invariante.

La diferencia más importante entre la formulación de Utiyama y la teoría de Yang-Mills es la siguiente:

En la formulación de Utiyama, no introducimos nuevos campos compensadores. En cambio, el primer postulado de vierbein establece una relación directa entre la conexión de spin y las

tétradas. Esta relación implica que la conexión de spin se puede expresar en términos de las tétradas sin la necesidad de introducir campos adicionales.

4. Conclusiones y líneas futuras

En esta sección se presentarán de manera concisa las conclusiones obtenidas a lo largo del trabajo, resumiendo los resultados de cada sección. Además, se mencionarán posibles líneas futuras de investigación.

En la Parte 1, se ha realizado la derivación de las ecuaciones de Einstein utilizando el principio variacional. Además, se han obtenido de forma explícita las expresiones del tensor energía-momento para diferentes campos, considerando las tres versiones correspondientes. En la última parte del trabajo, se abordó el término de frontera propuesto por Gibbons-Hawking-York. Se derivó explícitamente su variación y se comprobó que, al imponer condiciones de contorno de Dirichlet, esta variación se compensa con la del término de frontera de la acción de Einstein-Hilbert.

En la Parte 2, se ha derivado el lagrangiano clásico de Yang-Mills y se ha aplicado específicamente al caso de la Cromodinámica Cuántica (QCD), destacando las similitudes que presenta con la relatividad general. Además, se ha abordado una formulación de la gravedad a *la Feynman* y se ha discutido el problema del tensor energía-momento gravitacional. Por último, se ha presentado la formulación de Utiyama de la relatividad general y se han analizado las principales diferencias que existen con una teoría Yang-Mills.

Las futuras líneas de investigación propuestas son las siguientes:

Generalizar la demostración de la equivalencia entre el tensor energía-momento canónico y el tensor de Rosenfeld trabajando en el formalismo de tétradas, con el objetivo de incluir campos de materia fermiónicos.

Profundizar en la importancia de la acción en el formalismo de la integral de caminos y explorar las consecuencias de los términos de frontera, centrándose en particular en el término de Gibbons-Hawking-York.

Tratar las teorías de gravedad modificada $f(R)$ [62, 63] desde un enfoque variacional y discutir las predicciones de estas teorías en relación con fenómenos como la expansión acelerada del universo y el colapso gravitacional. Esta línea de investigación permitiría explorar diferentes enfoques teóricos para comprender la gravedad y sus implicaciones observacionales, así como evaluar las capacidades explicativas de las teorías de gravedad modificada $f(R)$ en comparación con los modelos convencionales de energía oscura y la relatividad general.

Por último, se propone explorar la teoría de Einstein-Cartan [64-68], considerando tanto su desarrollo histórico como sus controversias asociadas. En este contexto, se busca derivar las ecuaciones del campo gravitatorio y el campo de torsión, los cuales son conceptos fundamentales en esta teoría.

5. Bibliografía

- [1] Ortín, T. (2004). *Gravity and strings*. Cambridge University Press.
- [2] Feynman, R. P., Morinigo, F. B., & Wagner, W. G. (1995). *Feynman lectures on gravitation. Reading*.
- [3] Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. Macmillan.
- [4] Blau, M. (2011). *Lecture notes on general relativity*. Bern: Albert Einstein Center for Fundamental Physics.
- [5] DeBenedictis, A. (1998). Integration in general relativity. *arXiv preprint physics/9802027*.
- [6] Tung, W. K. (1985). *Group theory in physics* (Vol. 1). World Scientific.
- [7] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1973). *Teoría clásica de los campos* (Vol. 2). Reverté.
- [8] Straumann, N. (2000). Reflections on gravity. *arXiv preprint astro-ph/0006423*.
- [9] Carroll, S. M. (1997). Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*.
- [10] Einstein, A. (1922). *The Meaning of Relativity: Four Lectures Delivered at Princeton University, May, 1921*. Methuen & Company Limited.
- [11] Aste, A. (2016). Weyl, Majorana and Dirac fields from a unified perspective. *Symmetry*, 8(9), 87.
- [12] Di Mauro, M., Esposito, S., & Naddeo, A. (2021). A road map for Feynman's adventures in the land of gravitation. *The European Physical Journal H*, 46(1), 22.
- [13] Pais, A., & Goldberg, S. (1984). "Subtle is the Lord...": The Science and the Life of Albert Einstein.
- [14] Ferraris, M., Francaviglia, M., & Reina, C. (1982). Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 "Palatini's method" discovered by Einstein in 1925. *General relativity and gravitation*, 14, 243-254.
- [15] Straumann, N. (2011). Einstein's 'Zürich Notebook' and his journey to general relativity. *Annalen der Physik*, 523(6), 488-500.
- [16] Sauer, T. (2004). Albert Einstein's 1916 Review Article on General Relativity. *arXiv preprint physics/0405066*.
- [17] Babak, S. V., & Grishchuk, L. P. (1999). Energy-momentum tensor for the gravitational field. *Physical Review D*, 61(2), 024038.
- [18] Belinfante, F. J. (1939). On the spin angular momentum of mesons. *Physica*, 6(7-12), 887-898.
- [19] Forger, M., & Römer, H. (2004). Currents and the energy-momentum tensor in classical field theory: a fresh look at an old problem. *Annals of Physics*, 309(2), 306-389.
- [20] Rosenfeld, L. (1940). On the energy-momentum tensor. *Mem. Acad. Royal Belg*, 18, N6.
- [21] Gotay, M. J., & Marsden, J. E. (1992). Stress-energy-momentum tensors and the Belinfante-Rosenfeld formula. *Contemporary Mathematics*, (132), 367-392.
- [22] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*.

- [23] Byers, N. (1998). E. Noether's discovery of the deep connection between symmetries and conservation laws. *arXiv preprint physics/9807044*.
- [24] Gupta, S. N. (1954). Gravitation and electromagnetism. *Physical Review*, 96(6), 1683.
- [25] Avery, S. G., & Schwab, B. U. (2016). Noether's second theorem and Ward identities for gauge symmetries. *Journal of High Energy Physics*, 2016(2), 1-31.
- [26] Fulton, T., Rohrlich, F., & Witten, L. (1962). Conformal invariance in physics. *Reviews of Modern Physics*, 34(3), 442.
- [27] Hawking, S. W., & Horowitz, G. T. (1996). The gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms. *Classical and Quantum Gravity*, 13(6), 1487.
- [28] Gibbons, G. W., & Hawking, S. W. (1977). Action integrals and partition functions in quantum gravity. *Physical Review D*, 15(10), 2752.
- [29] York Jr, J. W. (1972). Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation. *Physical review letters*, 28(16), 1082.
- [30] F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory*, 2nd Ed., John Wiley and Sons Ltd, 2010.
- [31] Halzen, F., & Martin, A. D. (2008). *Quark & Leptons: An introductory course in modern particle physics*. John Wiley & Sons.
- [32] Kovchegov, Y. V., & Levin, E. (2013). *Quantum chromodynamics at high energy* (p. 339). Cambridge University Press.
- [33] Ryder, L. H. (1996). *Quantum field theory*. Cambridge university press.
- [34] R.D. Kenway (2000). *An introduction to Lattice QCD*
- [35] Wilczek, F. (2005). Nobel Lecture: Asymptotic freedom: From paradox to paradigm. *Reviews of Modern Physics*, 77(3), 857.
- [36] Friedman, J. I., & Kendall, H. W. (1972). Deep inelastic electron scattering. *Annual Review of Nuclear Science*, 22(1), 203-254.
- [37] Srednicki, M. (2007). *Quantum field theory*. Cambridge University Press.
- [38] Peskin, M. (2018). *An introduction to quantum field theory*. CRC press.
- [39] Greiner, W., & Reinhardt, J. (1996). *Field quantization*. Springer Science & Business Media.
- [40] Arnowitt, R. L., & Fickler, S. I. (1962). Quantization of the Yang-Mills field. *Physical Review*, 127(5), 1821.
- [50] Bacry, H. (1977). Lectures on group theory and particle theory. Capítulo7: The Lorentz Group.
- [51] Thirring, W. E. (1961). An alternative approach to the theory of gravitation. *Annals of Physics*, 16(1), 96-117.
- [52] Andringa, R. (2016). *Newton-Cartan gravity revisited* (Doctoral dissertation, Rijksuniversiteit Groningen).
- [53] Blagojevic, M. (2001). *Gravitation and gauge symmetries*. CRC Press.
- [54] Weyl, H. (1929). Electron and gravitation. *z. Phys*, 56, 330-352.

- [55] Yang, C. N., & Mills, R. L. (1954). Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical review*, 96(1), 191.
- [56] Utiyama, R. (1980). Introduction to the theory of general gauge fields. *Progress of Theoretical Physics*, 64(6), 2207-2221.
- [57] Utiyama, R. (1956). Invariant theoretical interpretation of interaction. *Physical Review*, 101(5), 1597.
- [58] Blagojevic, M., & Hehl, F. W. (2012). Gauge theories of gravitation. *arXiv preprint arXiv:1210.3775*.
- [59] Kibble, T. W. (1961). Lorentz invariance and the gravitational field. *Journal of mathematical physics*, 2(2), 212-221.
- [60] Nakahara, M. (2003). *Geometry, topology and physics*. CRC press.
- [61] Ohanian, H. C., & Ruffini, R. (2013). *Gravitation and spacetime*. Cambridge University Press. Capítulo 7: Einstein's gravitational theory. Apéndice: Variational principle and energy-momentum tensor.
- [62] Capozziello, S., & De Laurentis, M. (2011). Extended theories of gravity. *Physics Reports*, 509(4-5), 167-321.
- [63] Olmo, G. J. (2011). Palatini approach to modified gravity: $f(R)$ theories and beyond. *International Journal of Modern Physics D*, 20(04), 413-462.
- [64] Schucking, E. L., & Surowitz, E. J. (2007). Einstein's Apple: His First Principle of Equivalence. *arXiv preprint gr-qc/0703149*.
- [65] De Sabbata, V., & Gasperini, M. (1986). *Introduction to gravitation*. World Scientific Publishing Company.
- [66] Hehl, F. W., & Obukhov, Y. N. (2007). Élie Cartan's torsion in geometry and in field theory, an essay. *arXiv preprint arXiv:0711.1535*.
- [67] Hehl, F. W., Von der Heyde, P., Kerlick, G. D., & Nester, J. M. (1976). General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Reviews of Modern Physics*, 48(3), 393.
- [68] Hammond, R. T. (2002). Torsion gravity. *Reports on Progress in Physics*, 65(5), 599.
- [69] Weinberg, S. (1995). *The Quantum Theory of Fields* (Vol. 1). Cambridge University Press. Capítulo 7: The Canonical Formalism.
- [70] Weinberg, S. (1995). *The quantum theory of fields* (Vol. 2). Cambridge university press. Capítulo 15: Non-Abelian Gauge Theories.

Para dibujar los diagramas de Feynman se ha utilizado la siguiente página web:
<https://www.aidansean.com/feynman/>