Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Física

Emisión y propagación de ondas gravitacionales en fusiones de sistemas binarios

Autor: Alberto Revilla Peña

Tutor: Diego Sáez-Chillón Gómez

Abstract

We analyze the phenomena of emission of Gravitational Waves focusing on a binary system of compact objects. This cutting edge topic has experienced a lot of advances on the recent years. The first observation of Gravitational Waves on 2015 opened a window to obtain new information from our universe. Multi-messenger astronomy let us receive signals from electromagnetic radiation, neutrinos, cosmic rays and now Gravitational Waves are added to the list. But, building accurate detectors is not enough. To separate the signal of Gravitational Waves from the noise it is necessary to rely on a good prediction of the wavefront. This is not an easy task due to the non-linearity of General Relativity. We will focus on the first phase of the collision of compact objects where the objects follow an inspiral orbit.

As a first approximation, we use the multipole expansion on the typical velocities of the source, working on linearized theory. We compute the wavefront and the power carried by the Gravitational Waves for a binary system taking only the leading term on the multipole expansion (mass quadrupole). The next step would be to apply the Post-Newtonian formalism, which is valid for self-gravitating systems in the region near the source. This is an expansion on low velocities and weak gravitational field that takes into account the non-linearity of General Relativity. We analyze how this expansion works and compute the general expression of the metric tensor components up to 1PN order in terms of static potentials. Finally, we provide some information about the other phases of black holes mergers and about the signal emitted.

Índice general

Introducción

En este trabajo bibliográfico, vamos a exponer como se modela la emisión de Ondas Gravitacionales (OGs) en fusiones de sistemas binarios de objetos compactos (estrellas de neutrones, agujeros negros, ...). Las fusiones de objetos compactos se pueden dividir en 3 fases. En la primera fase, el sistema está sometido a un campo gravitatorio débil y los objetos siguen orbitas que se pueden describir usando la dinámica Newtoniana con correcciones de la Relatividad General (formalismo Post-Newtoniano (PN)). En la segunda fase, cuando se acerca la fusión, el sistema está sometido a un campo gravitatorio muy intenso, para estas condiciones es necesario usar métodos numéricos para modelar el sistema. Por último, inmediatamente tras la fusión, el objeto resultante entra en una fase de estabilización.

En este trabajo nos vamos a centrar en la primera fase. Para ello, primero haremos un pequeño repaso de Relatividad General (RG). Introduciremos las OGs utilizando la aproximación de campo gravitatorio débil, suponiendo un espacio-tiempo plano. Esto nos permite describir la métrica del espacio-tiempo con una perturbación asociada a la OG sobre el espacio-tiempo plano. Para obtener una expresión de la perturbación resolvemos las ecuaciones de Einstein en el marco de la teoría linealizada, es decir, aproximando en primer orden en el término perturbativo. Para obtener una expresión del flujo de energía de las OGs emitidas usaremos el método de separación de escalas. Este método se puede aplicar cuando existen grandes diferencias entre la escala de frecuencias de los modos de vibración asociados al sistema sin perturbar y los modos de vibración asociados a la perturbación. El fundamento de este método es usar promedios en frecuencias intermedias para eliminar los modos que vibran a altas frecuencias sin afectar a los modos que vibran en bajas frecuencias.

Se van a obtener las expresiones que describan la producción de OGs realizando una expansión para velocidades bajas trabajando en teoría linealizada para sistemas cuya dinámica esta gobernada por fuerzas no gravitatorias. Es decir, aplicamos la aproximación de campo débil y suponemos que el fondo es plano. A partir de ahí, se cortará la expansión en el primer término (aproximación cuadrupolar) y se obtendrán expresiones generales de la perturbación de la métrica y de la potencia irradiada en forma de OGs en la aproximación cuadrupolar. Aplicaremos estas expresiones a problemas concretos: una masa oscilando a lo largo de un eje y un sistema binario de masas puntuales realizando una órbita circular. Desarrollaremos en mayor profundidad el problema del sistema binario considerando la reacción de las OGs sobre la dinámica del sistema recurriendo al balance energético.

El siguiente paso es hacer uso del formalismo PN, ya que sí que es válido para sistemas donde domina la interacción gravitatoria. Seguiremos considerando velocidades bajas y campo gravitatorio débil. El procedimiento a seguir para aplicar este formalismo consiste en expandir las ecuaciones de Einstein en términos de un parámetro pequeño que da cuenta de las velocidades típicas de la fuente o de la intensidad del campo gravitatorio. Para ello, se expanden la métrica y el tensor energía-momento en serie de potencias y se sustituye en las ecuaciones de Einstein agrupando los términos del mismo orden en el pequeño parámetro. Calculamos la expresión para los términos de la métrica hasta primer orden PN (orden 1PN). A partir de la métrica podemos llegar a unas ecuaciones del movimiento para un sistema binario en orden 1PN que tengan en cuenta estas primeras correcciones relativistas. También se hará un análisis de los problemas asociados a la forma en la que hemos aplicado el formalismo PN y se observará como aparece la reacción de las OGs sobre la fuente en dicho formalismo. Por último, se hará una breve descripción de las fases en las que se da la fusión de sistemas binarios y las características de la señal de OGs emitida.

Notación

Los índices griegos $\alpha, \beta, ...$ toman los valores $0, 1, 2, 3$. Los índices espaciales en cambio se denotan con letras latinas $i, j, ...$ y toman los valores $1, 2, 3$. La métrica del espacio-tiempo plano es

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{Diag}(-, +, +, +) \tag{1}$$

Las coordenadas se definen como

$$x^\mu = \left(x^0, \mathbf{x}\right) = (ct, x, y, z) \tag{2}$$

Los vectores se escriben en negrita o usando los índices con letras latinas $\mathbf{x} = x^i$. La derivada parcial se denota como

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\partial_t, \partial_i\right) \tag{3}$$

Usamos el convenio de Einstein, los índices repetidos se suman. Cuando estemos trabajando solo con índices espaciales podemos subir y bajar índices arbitrariamente porque debido a la elección de la signatura, la métrica espacial es la delta de Kronecker δ_{ij}. Entonces, si los índices espaciales se repiten se suman independientemente de donde estén, arriba o abajo.

La métrica del espacio tiempo curvo se escribe $g_{\mu\nu}(x)$. Su determinante se escribe g y es una cantidad negativa para esta elección de la signatura. La conexión afín se escribe en términos de la métrica como

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) \tag{4}$$

El tensor de Riemann se escribe

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho} \tag{5}$$

El tensor de Ricci es $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$ y el escalar de Ricci es $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. El tensor energía-momento se escribe $T^{\mu\nu}$. El intervalo se escribe

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{6}$$

donde τ es el tiempo propio. Nuestra convención para la Transformada de Fourier n-dimensional es

$$F(x) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \tilde{F}(k) e^{ik_\mu x^\mu} \tag{7}$$

$$\tilde{F}(k) = \int d^n x F(x) e^{-ik_\mu x^\mu} \tag{8}$$

La delta de Dirac n-dimensional satisface la siguiente relación

$$\int d^n x e^{ikx} = (2\pi)^n \delta^{(n)}(k) \tag{9}$$

Capítulo 1

Relatividad General

La teoría de la Relatividad General (RG) fue publicada por Albert Einstein en 1915. Esta teoría constituye una generalización de la teoría de la Relatividad Especial (publicada por el propio Einstein en 1905) para un observador arbitrario. Los principios sobre los que se basa esta teoría son el principio de equivalencia y el principio de covarianza general.

El principio de equivalencia débil establecido por Newton sostiene la igualdad entre la masa gravitatoria y la masa inercial y que la trayectoria de un cuerpo no depende de su masa. El principio de equivalencia fuerte establecido por Einstein dice que en cada punto del espacio-tiempo sometido a un campo arbitrario, es posible elegir un sistema de coordenadas localmente inercial de tal forma que para una región espacio-temporal suficientemente pequeña alrededor del punto en cuestión, todas las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en un sistema de referencia plano, sin aceleración y en ausencia de gravitación, es decir, se satisfacen las leyes de la relatividad especial.

El principio de covarianza general sostiene que para que unas ecuaciones del movimiento sean válidas para un campo gravitatorio general, se deben dar dos condiciones. La primera es que las ecuaciones sean válidas en el vacío, en ausencia de campo gravitatorio. Por lo tanto, las ecuaciones deben de ser coherentes con la relatividad especial que es la teoría que describe el espacio-tiempo plano. La segunda condición es que las ecuaciones deben preservar su forma bajo un cambio de coordenadas general. Por lo tanto, una ecuación bajo el marco de la RG debe ser generalmente covariante.

Una partícula sometida al campo gravitatorio seguirá una trayectoria geodésica. Estas trayectorias se caracterizan porque minimizan el tiempo propio de la partícula. Podemos obtener la ecuación de las geodésicas aplicando el principio variacional sobre la integral del tiempo propio de una partícula que sigue una trayectoria de un punto del espacio-tiempo a otro.

$$\int d\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}d\tau \tag{1.1}$$

Aplicando el principio variacional, las ecuaciones geodésicas quedan

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{1.2}$$

La acción gravitacional se define como $S = S_E + S_M$ donde

$$S_E = \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}R \tag{1.3}$$

es la acción de Einstein y S_M es la acción material. El tensor energía-momento viene definido por la variación de la acción material bajo una transformación en la métrica $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$. La variación de la acción material se escribe como

$$\delta S_M = \frac{1}{2c}\int d^4x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{1.4}$$

Si tomamos la variación de la acción total S con respecto de la métrica $g_{\mu\nu}$ obtenemos las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

La RG es invariante bajo el grupo de todas las posibles transformaciones de coordenadas

$$x^\mu \to x'^\mu(x) \tag{1.6}$$

donde x'^μ es un difeomorfismo arbitrario de x^μ. Llamamos a este grupo de transformaciones simetria gauge de la RG. La métrica es un tensor 2 veces covariante y bajo una transformación gauge, se transforma de la siguiente manera

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}\left(x'\right) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \tag{1.7}$$

Capítulo 2

Ondas Gravitacionales

La existencia de OGs fue predicha por Albert Einstein en 1916, pero, no ha sido hasta muy recientemente en septiembre de 2015 cuando fueron detectadas por primera vez por los observatorios LIGO, en EEUU. La fuente de esta señal fue la colisión de 2 agujeros negros de unas 36 y 29 masas solares que formaban un sistema binario. Las OGs comparten una serie de similitudes con las Ondas Electromagnéticas (OEs), pero también existen importantes diferencias. La fuente del campo electromagnético es la carga eléctrica, mientras que en el caso del campo gravitatorio la fuente es toda forma de energía, en particular la masa. Una carga eléctrica acelerada emite OEs y análogamente una masa sometida a ciertas formas de aceleración emite OGs. Ambos tipos de onda son transversales y se propagan a la velocidad de la luz c en el vacío.

Una diferencia importante es que es lo que 'vibra' en la propagación de cada tipo de onda. En el caso de las OEs, el campo electromagnético vibra de forma transversal a la dirección de propagación de la onda. Mientras que, en el caso de las OGs, lo que vibra es el propio tejido del espacio-tiempo. La gravedad es una interacción mucho más débil que la interacción electromagnética, además, las OGs interactúan poco con la materia. Esto tiene como consecuencia que sea mucho más difícil observar OGs. Otra diferencia muy importante está en la no linealidad de la gravedad. Las OGs al contrario que las OEs, son fuentes de su propio campo. Esto implica una serie de dificultades a la hora de calcular un frente de onda preciso necesario para detectar OGs. En las siguientes secciones analizaremos como modelar este frente de onda centrándonos en el caso de la emisión de OGs en la fusión de sistemas binarios.

2.1. Perturbaciones sobre fondo plano

Para abordar primeramente la emisión de OGs partimos de la aproximación de campo gravitatorio débil [3]. En esta aproximación suponemos que existe un sistema de referencia para el que se puede descomponer la métrica en un término que representa el espacio tiempo plano (métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$) más otro asociado a las perturbaciones

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \tag{2.1}$$

y que el término asociado a la perturbación debe cumplir que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. De este modo podemos expandir las ecuaciones de Einstein alrededor de la métrica de Minkowski. A la aproximación en primer orden en $h_{\mu\nu}$ de forma sistemática se le conoce como teoría linealizada. Bajo este marco, despreciamos los elementos de orden mayor que 1 en $h_{\mu\nu}$.

Al bajar o subir índices con la métrica de un elemento de primer orden en $h_{\mu\nu}$ solo contribuye la métrica de Minkowski ya que si también consideramos la contribución de la perturbación, obtenemos un término de orden superior en $h_{\mu\nu}$ y esto queda fuera del marco de la teoría linealizada. Por lo tanto, dentro de este marco subimos y bajamos índices con la métrica de Minkowski.

El tensor de Riemann linealizado se escribe

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu\partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\rho}\right) \tag{2.2}$$

Podemos escribir las ecuaciones del movimiento de manera más compacta si definimos las cantidades $h \equiv \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ y $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$. Y podemos invertir la última relación usando que $\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = h - 2h = -h$, por lo tanto, $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$. Con esto, las ecuaciones de Einstein linealizadas se escriben

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho\partial_\nu\bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho\partial_\mu\bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

La métrica es un tensor con 16 componentes. Debido a que es un tensor simétrico podemos ver que 6 de estas componentes no son independientes. Veamos cuales de estas componentes son realmente independientes evaluando los grados de libertad de un sistema bajo el marco de la RG. Las ecuaciones de Einstein (1.5) son 16 y el tensor de Einstein $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ es simétrico, por lo tanto, 6 de estas ecuaciones no son independientes. Las Ecuaciones de Einstein cumplen las identidades de Bianchi, esto nos permite eliminar 4 grados de libertad. Como la RG es invariante bajo transformaciones de coordenadas, podemos elegir arbitrariamente un sistema de coordenadas eliminando otros 4 grados de libertad. Teniendo esto en cuenta, mediante el cambio de coordenadas apropiado podemos eliminar los grados de libertad que no aporten ningún significado físico, quedando 2 componentes de la métrica independientes que no se pueden eliminar mediante transformaciones Gauge. Elegimos la siguiente transformación de coordenadas

$$x^\mu \to x'^\mu(x) = x^\mu + \xi^\mu(x) \tag{2.4}$$

donde las derivadas de $\xi^\mu(x)$ son del mismo orden que la perturbación $|\partial_\mu\xi_\nu| \sim |h_{\mu\nu}|$. Desarrollando la transformación de coordenadas de la métrica definida en (1.7), la transformación de la perturbación queda

$$h_{\mu\nu}(x) \to h'_{\mu\nu}\left(x'\right) = h_{\mu\nu}(x) - \left(\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu\right) \tag{2.5}$$

Podemos eliminar los grados de libertad residuales seleccionando un sistema de coordenadas. Eligiendo el gauge de Lorentz en particular las ecuaciones del movimiento se simplifican en gran medida. Para imponer el gauge de Lorentz se deben de cumplir las condiciones de Lorentz

$$\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{2.6}$$

Operando en la ecuación (2.3) con las nuevas condiciones queda la ecuación de onda

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.7}$$

Veamos como siempre es posible encontrar una transformación de coordenadas (2.4) que cumpla las condiciones de Lorentz (2.6). Para ello, es posible realizar una nueva transformación de coordenadas del tipo (2.4). La transformación sobre $\bar{h}_{\mu\nu}$ queda

$$\bar{h}_{\mu\nu} \to \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu\nu} \tag{2.8}$$

donde $\xi_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\xi^\rho$. La transformación de coordenadas en primer orden de la derivada ∂_ν queda $\partial_\nu \to \partial'_\nu = \partial_\nu - \partial_\mu\partial_\nu\xi^\mu$ donde el segundo término es de orden $O(h_{\mu\nu})$. Este término no contribuye si aplicamos la derivada transformada ∂'^ν sobre $\bar{h}'_{\mu\nu}$. Por lo tanto, aplicar la derivada sobre $\bar{h}_{\mu\nu}$ y realizar la transformación de coordenadas en teoría linealizada, es lo mismo que realizar la transformación de coordenadas sobre $\bar{h}_{\mu\nu}$ y luego aplicar la derivada $\partial^\nu\left(\bar{h}'_{\mu\nu}\right) = \left(\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}\right)'$

$$\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} \to \left(\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}\right)' = \partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} - \Box\xi_\mu \tag{2.9}$$

Si imponemos que se cumpla la condición de Lorentz (2.6) $\left(\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}\right)' = 0$, tenemos la condición sobre ξ_μ que buscabamos

$$\Box \xi_\mu = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

esta ecuación siempre tiene solución porque el operador d'Alambertiano es invertible a través de las funciones de Green.

2.2. El Gauge TT

Al imponer el gauge de Lorentz eliminamos 4 grados de libertad. Pero, sigue habiendo 4 grados de libertad residuales, pues como se expone en la anterior sección, solo hay 2 grados de libertad que tienen significado físico.

Considerando la propagación de OGs fuera de la fuente, el tensor energía momento se anula y las ecuaciones de Einstein linealizadas (2.7) quedan

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{2.11}$$

Podemos realizar otra transformación de coordenadas como la que se muestra en la ecuación (2.4). Esta transformación debe de seguir satisfaciendo las condiciones de Lorentz (2.6). Para ello, debe cumplirse la ecuación (2.10) y entonces, $\Box \xi_\mu = 0$.

De este modo, al aplicar esta nueva transformación de coordenadas, se van a seguir cumpliendo las ecuaciones de Einstein linealizadas fuera de la fuente (2.11). Esto se debe a que al realizar el cambio de coordenadas sobre $\bar{h}_{\mu\nu}$ que se muestra en la ecuación (2.8) y aplicar el operador d' Alambertiano, dado que este conmuta con la derivada parcial (∂_μ), entonces, $\Box \xi_{\mu\nu} = 0$. Por lo tanto, para fijar el gauge completamente, podemos elegir 4 funciones arbitrarias independentes ξ^μ tales que se sigan cumpliendo las condiciones de Lorentz, es decir, que cumplan $\Box \xi_\mu = 0$ y que nos permitan imponer 4 condiciones sobre $h_{\mu\nu}$ arbitrariamente.

Elegimos la primera condición sobre ξ^0 de tal forma que la traza de $\bar{h}_{\mu\nu}$ se anule $\bar{h} = 0$, de este modo, $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Las condiciones sobre ξ^i permiten elegir $h^{0i}(x) = 0$. Con esto, la condición de Lorentz con $\mu = 0$ se lee como

$$\partial^\nu \bar{h}_{0\nu} = \partial^\nu h_{0\nu} = \partial^0 h_{00} + \partial^i h_{0i} = \partial^0 h_{00} = 0 \tag{2.12}$$

Esto implica que h_{00} es constante en el tiempo. Un término h_{00} constante se corresponde con el potencial Newtoniano asociado a la fuente de las OGs. El término en h_{00} asociado a las OGs debe depender del tiempo asi que como estamos considerando la emisión fuera de la fuente, tenemos que $h_{00} = 0$. Esto fija las cuatro componentes $h_{\mu 0} = 0$. Sobre las componentes espaciales h_{ij}, no tienen traza ${h^i}_i = 0$ y las condiciones de Lorentz quedan $\partial^i h_{ij} = 0$. Con esto tenemos todas las condiciones necesarias para fijar el gauge quedando solo los 2 grados de libertad con significado físico.

$$h^{0\mu} = 0, \quad {h^i}_i = 0, \quad \partial^j h_{ij} = 0 \tag{2.13}$$

Estas condiciones definen el gauge transversal sin traza (TT). Sobre los grados de libertad, hemos reducido los 10 grados de libertad de la matriz simétrica $h_{\mu\nu}$ a 6 imponiendo la condición de Lorentz y fijando las funciones ξ^μ de tal forma que se cumpla $\Box \xi_\mu = 0$ los reducimos a 2 grados de libertad. Denotamos a la perturbación de la métrica en el gauge TT como h_{ij}^{TT}.

Las ecuaciones de Einstein linealizadas fuera de la fuente (2.11) tienen soluciones de onda plana

$$h_{ij}^{TT}(x) = e_{ij}(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu} \tag{2.14}$$

donde $e_{ij}(\mathbf{k})$ es el tensor de polarización y $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ y $|\mathbf{k}| = \omega/c$. Tomamos la parte real de la expresión al final de los cálculos. Para una onda plana monocromática o con distintas frecuencias desplazándose en la misma dirección de propagación: $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Imponiendo las condiciones del gauge TT (2.13) y tomando como dirección de propagación el eje z podemos calcular todas las componentes no nulas de la métrica. Como $k_\mu x^\mu = \omega(-t + z/c)$, la métrica solo depende de la componente espacial

z. Para una onda plana las componentes no nulas de h_{ij}^{TT} se encuentran en el plano transversal a la dirección de propagación $\hat{\mathbf{n}}$. Esto significa que la condición de Lorentz $\partial^i h_{ij} = 0$ es equivalente a $n^i h_{ij} = 0$ y como la dirección de propagación coincide con el eje z, las componentes h_{iz} son nulas. Imponiendo que h_{ij} debe ser simétrica $h_{ij} = h_{ji} \Rightarrow h_{xy} = h_{yx}$ y de traza nula $h^i{}_i = 0 \Rightarrow h_{yy} = -h_{xx}$ quedan solamente las 2 componentes independientes de la métrica que esperábamos. La expresión de la perturbación queda

$$h_{ab}^{TT}(t,z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix}_{ab} \cos(\omega(t - z/c)) \tag{2.15}$$

donde a y b representan los índices en el plano transversal $(x,\, y)$. $h_+ = h_{xx} = -h_{yy}$ y $h_\times = h_{xy} = h_{yx}$ son las amplitudes de polarización de la onda. La expresión de la métrica en términos del intervalo ds^2 queda

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dz^2 + (1 + h_+ \cos[\omega(t - z/c)])\, dx^2 + (1 - h_+ \cos[\omega(t - z/c)])\, dy^2 + 2h_\times \cos[\omega(t - z/c)] dxdy \tag{2.16}$$

Podemos construir un tensor $\Lambda_{ij,kl}$ que nos permita encontrar la parte transversal y de traza nula de cualquier tensor simétrico $S_{ij} = S_{ji}$

$$S_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} S_{kl} \tag{2.17}$$

Primero introducimos el siguiente tensor

$$P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ij} - n_i n_j \tag{2.18}$$

Es un tensor simétrico $P_{ij} = P_{ji}$, es transversal $n^i P_{ij}(\hat{\mathbf{n}})$ y es un proyector $P_{ik}P_{kj} = P_{ij}$. A partir de el tensor P_{ij} podemos construir el tensor $\Lambda_{ij,kl}$

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \tag{2.19}$$

Es simétrico bajo el intercambio de los índices $(i,j) \leftrightarrow (k,l)$, es transversal respecto de todos los índices $n^i \Lambda_{ij,kl} = 0$, ..., su traza es nula respecto a los índices (i,j) y (k,l), es decir, $\Lambda_{ii,kl} = \Lambda_{ij,kk} = 0$ y es un proyector

$$\Lambda_{ij,kl}\Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn} \tag{2.20}$$

Podemos escribirlo explícitamente en términos de $\hat{\mathbf{n}}$

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} + \frac{1}{2} n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2} n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2} n_i n_j n_k n_l \tag{2.21}$$

Entonces, dada una onda plana en el gauge de Lorentz podemos convertirla al TT gauge aplicando el tensor Lambda $\Lambda_{ij,kl}$

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl} \tag{2.22}$$

2.3. Energía transportada por las OGs

En esta sección vamos a buscar una expresión para la energía asociada a las OGs en términos de los 2 grados de libertad físicos contenidos en h_{ij}^{TT}. Considerando que, dentro del marco de la RG, toda forma de energía es fuente de curvatura del espacio-tiempo, podemos evaluar la contribución de las OGs a la curvatura del fondo. En las anteriores secciones hemos considerado un fondo plano (métrica de Minkowski). Ahora, si consideramos un fondo plano, estamos eliminando la posibilidad de observar cual es la contribución de la OG en curvar el fondo. Por lo tanto, definimos la métrica del espacio tiempo como una perturbación $h_{\mu\nu}(x)$ sobre un fondo curvo $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x) \tag{2.23}$$

con la condición de que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ (asumiendo que usamos un sistema de coordenadas tal que $|\bar{g}_{\mu\nu}| \approx O(1)$) porque seguimos trabajando en el marco de la teoría linearizada. En el caso más general, esta separación de la métrica presenta ambigüedades para distinguir que parte de la métrica corresponde al fondo curvo y cual a la perturbación ya que ambos elementos dependen de las coordenadas. En la aproximación de fondo plano, no encontrábamos este problema. Para dar solución a este problema, restringimos el caso general al caso en el que hay una clara diferencia de escalas entre el fondo y la perturbación. Hay dos separaciones de escalas que resultan particularmente útiles: escalas espaciales y escalas temporales. Podemos trabajar en algún sistema de coordenadas en el que la métrica de fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$ tenga una escala típica de variación espacial L_B (distancia a la que podemos percibir cambios en la métrica del fondo) sobre la que se superponen pequeñas perturbaciones caracterizadas por la longitud de onda λ tales que

$$\lambda \ll L_B \tag{2.24}$$

donde $\lambda = \lambda/2\pi$ es la longitud de onda reducida. Cabe destacar que la escala típica de variación espacial de una función con longitud de onda λ es λ. Esto se debe a que para una función $f(x) = Ae^{ikx}$ donde A no depende de x y $k = 2\pi/\lambda = 1/\lambda$, al calcular la variación respecto de x queda

$$\left|\frac{\partial f}{dx}\right| = \frac{1}{\lambda}|f| \tag{2.25}$$

En este caso, $h_{\mu\nu}$ representa pequeñas perturbaciones sobre un fondo suave $\bar{g}_{\mu\nu}$. Entonces, la separación en el espacio de frecuencias se da si el fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$ tiene frequencias características hasta f_B que es mucho menor que la frequencia f en la que la amplitud de $h_{\mu\nu}$ tiene su máximo

$$f \gg f_B \tag{2.26}$$

Esta separación de escalas se puede interpretar como que $h_{\mu\nu}$ es una perturbación de alta frecuencia sobre un fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$ estático o que varía lentamente. En el gauge apropiado, $h_{\mu\nu}$ cumple una ecuación de onda. Por lo tanto, la longitud de onda λ y la frecuencia f características de la onda están relacionadas en el vacio por $f\lambda = c$. Por el contrario, las escalas f_B y L_B que caracterizan al fondo, no tienen por qué estar relacionadas de forma general y con que se satisfaga una de las dos relaciones (2.24) o (2.26) el procedimiento de separación de escalas es aplicable.

Para entender como la perturbación $h_{\mu\nu}$ se propaga e interactúa con el fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$ podemos expandir las ecuaciones de Einstein alrededor de la métrica del fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$. En esta expansión tenemos 2 pequeños parámetros: la amplitud típica de la perturbación $h \equiv O(|h_{\mu\nu}|)$ y uno de los parámetros de la separación de escalas λ/L_B o f_B/f. La situación (2.24) y la situación (2.26) se pueden tratar en paralelo con el cambio de notación adecuado, a esta situación nos podemos referir de forma genérica como expansión de onda-corta.

En primer lugar, nos es más adecuado escribir las ecuaciones de Einstein en su forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{2.27}$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía momento de fuentes materiales y T es su traza. Expandimos el tensor de Ricci alrededor de la métrica de fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$ hasta orden cuadrático en $h_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu} + O(h^3) \tag{2.28}$$

donde $\bar{R}_{\mu\nu}$ esta construido únicamente a partir de $\bar{g}_{\mu\nu}$, $R^{(1)}_{\mu\nu}$ es lineal en $h_{\mu\nu}$ y $R^{(2)}_{\mu\nu}$ es cuadrático en $h_{\mu\nu}$. Como $\bar{R}_{\mu\nu}$ solo depende de $\bar{g}_{\mu\nu}$, estará compuesto únicamente por modos de baja frecuencia. $R^{(1)}_{\mu\nu}$ depende linealmente de $h_{\mu\nu}$ por lo tanto estará compuesto únicamente por modos de alta frecuencia. $R^{(2)}_{\mu\nu}$ en cambio está compuesto por ambos, modos de alta y baja frecuencia. Una forma de ilustrar esto es tomando un término cuadrático de la forma $h_{\mu\nu}h_{\rho\sigma}$. Un modo de alta frecuencia $\mathbf{k}_1$ de $h_{\mu\nu}$ se puede combinar con otro modo de alta frecuencia $\mathbf{k}_2 \approx -\mathbf{k}_1$ de $h_{\rho\sigma}$ para resultar en un modo de baja frecuencia porque las contribuciones de los 2 modos se pueden compensar $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \approx 0$. De esta forma, las ecuaciones de Einstein se pueden separar en 2 ecuaciones para baja frecuencia

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -\left[R^{(2)}_{\mu\nu}\right]^{\text{Low}} + \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)^{\text{Low}} \tag{2.29}$$

y alta frecuencia

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = -\left[R^{(2)}_{\mu\nu}\right]^{\text{High}} + \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)^{\text{High}} \tag{2.30}$$

donde el superíndice 'Low' se refiere a la proyección en bajas frecuencias o longitudes de onda largas según en cual de las dos situaciones nos encontremos (2.24) o (2.26) y viceversa para el superíndice 'High'. Podemos calcular explícitamente las expresiones de $R^{(1)}_{\mu\nu}$ y $R^{(2)}_{\mu\nu}$

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\bar{D}^{\alpha}\bar{D}_{\mu}h_{\nu\alpha} + \bar{D}^{\alpha}\bar{D}_{\nu}h_{\mu\alpha} - \bar{D}^{\alpha}\bar{D}_{\alpha}h_{\mu\nu} - \bar{D}_{\nu}\bar{D}_{\mu}h\right) \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\sigma}\bar{g}^{\alpha\beta}\Big[&\frac{1}{2}\bar{D}_{\mu}h_{\rho\alpha}\bar{D}_{\nu}h_{\sigma\beta} + (\bar{D}_{\rho}h_{\nu\alpha})(\bar{D}_{\sigma}h_{\mu\beta} - \bar{D}_{\beta}h_{\mu\sigma}) + \\ &+h_{\rho\alpha}(\bar{D}_{\nu}\bar{D}_{\mu}h_{\sigma\beta} + \bar{D}_{\beta}\bar{D}_{\sigma}h_{\mu\nu} - \bar{D}_{\beta}\bar{D}_{\nu}h_{\mu\sigma} - \bar{D}_{\beta}\bar{D}_{\mu}h_{\nu\sigma}) + \\ &+(\frac{1}{2}\bar{D}_{\alpha}h_{\rho\sigma} - \bar{D}_{\rho}h_{\alpha\sigma})(\bar{D}_{\nu}h_{\mu\beta} + \bar{D}_{\mu}h_{\nu\beta} - \bar{D}_{\beta}h_{\mu\nu})\Big] \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde $\bar{D}_{\mu}$ es la derivada covariante respecto a la métrica de fondo.

A partir de la ecuación (2.29) podemos calcular cual es el tensor energía-momento asociado a las OGs. Cuando se da el caso descrito en la expresión (2.24) y observamos una gran diferencia entre la escala de distancias de λ y L_B, introducimos una escala intermedia $\bar{l}$ tal que $\lambda \ll \bar{l} \ll L_B$. Si promediamos sobre un volumen espacial de lado $\bar{l}$, los modos que tengan una longitud de onda de orden L_B permanecerán inalterados porque son prácticamente constantes dentro del volumen de integración. En cambio, los modos que tengan una longitud de onda de orden λ no contribuyen porque en el promedio se anulan las oscilaciones periódicas al integrarlas en una escala de muchos periodos de oscilación. Podemos proceder de forma análoga en el dominio temporal. Cuando se da el caso descrito en la expresión (2.26) y observamos una gran diferencia entre la escala de tiempos de $1/f$ y de $1/f_B$, introducimos una escala intermedia $\bar{t}$ tal que $1/f \ll \bar{t} \ll 1/f_B$. Si promediamos sobre una escala de tiempo $\bar{t}$, los modos que tengan una frecuencia temporal de orden f_B permanecerán inalterados porque son prácticamente constantes dentro de la escala de tiempos sobre la que se integra. En cambio, los modos que tengan una frecuencia temporal de orden f no contribuyen. De esta forma podemos aplicar el promedio sobre la ecuación 2.29 y queda

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\right\rangle + \frac{8\pi G}{c^4}\left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right\rangle \tag{2.33}$$

donde $\langle ... \rangle$ denota promedio espacial sobre un volumen de lado $\bar{l}$ si se aplica la condición (2.24) o denota promedio temporal sobre una escala de tiempos $\bar{t}$ si se aplica la condición (2.26).

También, definimos un tensor energía-momento efectivo que denotamos como $\bar{T}_{\mu\nu} \equiv \langle T_{\mu\nu}\rangle$ con $\bar{T} = \bar{g}_{\mu\nu}\bar{T}^{\mu\nu}$ su traza. Esto nos permite reescribir el último término de la ecuación (2.33) como

$$\left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right\rangle = \bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{T} \tag{2.34}$$

Podemos asociar $T_{\mu\nu}$ a la cantidad fundamental que nos da una descripción microscópica mientras que $\bar{T}_{\mu\nu}$ es la versión promediada que nos da una información macroscópica manteniendo solo los modos de baja frecuencia temporal. También definimos la cantidad $t_{\mu\nu}$ como

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G}\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^{(2)}\right\rangle \tag{2.35}$$

donde $R^{(2)} = \bar{g}^{\mu\nu}R^{(2)}_{\mu\nu}$. Y definimos su traza como $t = \bar{g}^{\mu\nu}t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G}\left\langle R^{(2)}\right\rangle$ donde hemos usado que $\bar{g}_{\mu\nu}$ es una cantidad ya promediada, es decir, que solo contribuyen los modos de baja frecuencia y se puede introducir dentro del promedio. Sustituyendo en la expresión (2.35), obtenemos una expresión para $\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\right\rangle$ en términos de la cantidad $t_{\mu\nu}$ y su traza

$$\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\right\rangle = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}t\right) \tag{2.36}$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.33) obtenemos

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}t\right) + \frac{8\pi G}{c^4}\left(\bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{T}\right) \tag{2.37}$$

Contrayendo con la métrica del fondo obtenemos que $\bar{R} = -\frac{8\pi G}{c^4}(\bar{T}+t)$, sustituyendo queda la expresión

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}\right) \tag{2.38}$$

Estas serían las ecuaciones de Einstein de 'grano-grueso'. Estás ecuaciones determinan el comportamiento de $\bar{g}_{\mu\nu}$ a partir de la versión macroscópica del tensor energía-momento $\bar{T}_{\mu\nu}$ que depende de las fuentes materiales y de la cantidad $t_{\mu\nu}$ que no depende de las fuentes materiales sino del propio campo gravitatorio y es cuadrática en $h_{\mu\nu}$. Formalmente, la influencia de las OGs sobre la métrica del fondo es idéntica a la de una fuente material con tensor energía-momento $t_{\mu\nu}$. Esto permite asociar un tensor-energía momento a las OGs. Es posible observar que $t_{\mu\nu}$ viene promediado $\langle t_{\mu\nu}\rangle = t_{\mu\nu}$. Esto se debe a que, para evaluar la influencia de la perturbación en el fondo, hemos tenido que ir de una descripción fundamental (microscópica) a una descripción de 'grano-grueso' (macroscópica)

Vamos a calcular una expresión para el tensor energía-momento de las OGs $t_{\mu\nu}$ a partir de su definición (2.35). Para ello tenemos que calcular $R^{(2)}_{\mu\nu}$ usando la expresión (2.32). Si suponemos que nos encontramos a gran distancia de la fuente material, podemos aproximar la métrica del fondo como plano $\bar{g}_{\mu\nu}(|\mathbf{x}| \to \infty) \approx \eta_{\mu\nu}$. Así, en la expresión (2.32) podemos sustituir las derivadas covariantes respecto del fondo por derivadas parciales $\bar{D}^\mu \to \partial^\mu$ quedando

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big[&\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial_\nu h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu h_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\beta h_{\alpha\mu} - h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\beta h_{\alpha\nu} + \\ &+h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h_{\mu\nu} + \partial^\beta h^\alpha_\nu\partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial^\beta h^\alpha_\nu\partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta}\partial_\nu h_{\alpha\mu} + \\ &+\partial_\beta h^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta}\partial_\mu h_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\partial^\alpha h\partial_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\alpha h\partial_\nu h_{\alpha\mu} + \frac{1}{2}\partial^\alpha h\partial_\mu h_{\alpha\nu}\Big] \end{aligned} \tag{2.39}$$

Como vimos anteriormente, la matriz simétrica $h_{\mu\nu}$ tiene 10 grados de libertad, 8 de ellos son modos gauge y 2 son modos físicos. En el cálculo del tensor $t_{\mu\nu}$ debemos tener en cuenta que solo los modos físicos representan el tensor energía-momento asociado a las OGs y no se pueden eliminar mediante cambios de coordenadas. En cambio, los modos gauge si que se pueden eliminar con un cambio adecuado en el sistema de coordenadas.

La forma más directa de eliminar los modos gauge es imponiendo la condición de Lorentz (2.6) eliminando 4 modos gauge. Esto deja 2 grados de libertad físicos contenidos en $h_{\mu\nu}$ más los 4 modos gauge ξ_μ que satisfacen que $\Box\xi_\mu = 0$. Podemos elegir ξ_μ de tal forma que $h = 0$ quedando 3 modos gauge independientes. De esta forma $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ y la condición de Lorentz queda $\partial^\nu h_{\mu\nu} = 0$.

Con estas condiciones es posible simplificar la expresión de $R^{(2)}_{\mu\nu}$ en (2.39). Dentro del promedio espacial o temporal, la derivada parcial ∂_μ se puede integrar por partes. Normalmente, solo podemos integrar por partes ∂_t si aparece dentro de una integral temporal o también podemos integrar ∂_i si aparece dentro de una integral espacial. Pero, en este caso, dentro del gauge de Lorentz la ecuación del movimiento es la ecuación de onda $\Box h_{\mu\nu} = 0$ y para una solución que se propague en la dirección z, todas las cantidades dependen de $x^0 - z$ donde $x^0 = ct$. En expresiones de la forma $\int dz g(x^0 - z)\partial_0 f(x^0 - z)$, podemos intercambiar $\partial_0 f$ y $-\partial_z f$. Esto nos permite integrar por partes en z y luego recuperar de nuevo la derivada parcial en t intercambiando vía regla de la cadena otra vez $\partial_z g$ y $-\partial_0 g$. Al integrar por partes, el término que queda evaluado en las condiciones de contorno se anula solo si se evalúa en una región del espacio de lado infinitamente más grande que λ.

Entonces, aplicando integración por partes e imponiendo las condiciones gauge $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$ y $h = 0$ y la ecuación del movimiento en el gauge de Lorentz $\Box h_{\mu\nu}$ vemos que todos los términos en la expresión (2.39) de $R^{(2)}_{\mu\nu}$ se anulan salvo los 2 primeros que se pueden relacionar aplicando integración por partes

$$\left\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\right\rangle = -\frac{1}{4}\left\langle\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial_\nu h^{\alpha\beta}\right\rangle \tag{2.40}$$

vemos que $R^{(2)}$ se anula al contraer $R^{(2)}_{\mu\nu}$, aplicar integración por partes y usar las ecuaciones del movimiento $\Box h_{\mu\nu} = 0$. Con esto podemos escribir $t_{\mu\nu}$ a partir de la ecuación (2.35)

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \left\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \right\rangle \tag{2.41}$$

Para comprobar que los modos gauge residuales asociados a ξ_μ no contribuyen podemos calcular la variación de $t_{\mu\nu}$ bajo la transformación (2.4). Para realizar este cálculo podemos realizar subidas y bajadas en los índices que se están sumando (α y β), aplicar la transformación (2.5) $\delta h_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu}(x') - h_{\mu\nu}(x) = -(\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)$ y que la perturbación en simétrica $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$

$$\begin{aligned}\delta t_{\mu\nu} &= \frac{c^4}{32\pi G} \left[\left\langle \partial_\mu (\delta h_{\alpha\beta}) \partial_\nu h^{\alpha\beta} \right\rangle + (\mu \leftrightarrow \nu) \right] \\ &= -\frac{c^4}{32\pi G} \left[\left\langle \partial_\mu (\partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha) \partial_\nu h^{\alpha\beta} \right\rangle + (\mu \leftrightarrow \nu) \right] \\ &= -\frac{c^4}{16\pi G} \left[\left\langle \partial_\mu \partial_\alpha \xi_\beta \partial_\nu h^{\alpha\beta} \right\rangle + (\mu \leftrightarrow \nu) \right]\end{aligned} \tag{2.42}$$

donde $(\mu \leftrightarrow \nu)$ indica intercambio de índices. Vemos que la variación se anula porque es posible integrar por partes ∂_α dentro del promedio y usar la condición de Lorentz $\partial_\alpha h^{\alpha\beta} = 0$. Una vez que hemos comprobado que $t_{\mu\nu}$ depende únicamente de los modos físicos, es posible sustituir la perturbación en la ecuación (2.41) por la métrica en el gauge TT. Podemos calcular la densidad de energía invariante gauge

$$t^{00} = \frac{c^2}{32\pi G} \left\langle \dot{h}^{\mathrm{TT}}_{ij} \dot{h}^{\mathrm{TT}}_{ij} \right\rangle \tag{2.43}$$

donde un punto indica derivada temporal ($\dot{f} = \partial_t f = c\partial_0 f$). Sustituyendo con las amplitudes h_+ y $h_\times$ queda

$$t^{00} = \frac{c^2}{16\pi G} \left\langle \dot{h}^2_+ + \dot{h}^2_\times \right\rangle \tag{2.44}$$

Para una onda plana cuya dirección coincide con el eje z, al ser una solución de la ecuación de onda, h^{TT}_{ij} depende de $t - z/c$. De este modo, las derivadas en x e y se anulan y $t^{01} = t^{02} = 0$. Por otro lado, la derivada respecto de z no se anula y se puede convertir en una derivada temporal a través de la regla de la cadena y subiendo y bajando índices con la métrica de Minkowski $\partial^z h^{TT}_{ij} = \partial_z h^{TT}_{ij} = -\partial_0 h^{TT}_{ij} = +\partial^0 h^{TT}_{ij}$ por lo tanto

$$t^{03} = t^{00} \tag{2.45}$$

Observamos que la parte izquierda de la ecuación (2.38) se conserva de forma covariante con respecto a la métrica del fondo debido a las identidades de Bianchi. Es decir $\bar{D}^\mu(\bar{G}_{\mu\nu}) = 0$, entonces el lado derecho también se conserva de forma covariante

$$\bar{D}^\mu \left(\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu} \right) = 0 \tag{2.46}$$

La cantidad conservada es $\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}$ y no cada elemento por separado. Esto es una muestra de que existe intercambio energético entre las fuentes materiales y las OGs. Si tomamos distancias lejos de la fuente, la métrica de fondo se aproxima a la de Minkowski, por lo tanto, $\bar{D}^\mu \to \partial^\mu$. Además, al encontrarnos fuera de la fuente, el tensor energía-momento se anula $\bar{T}_{\mu\nu} = 0$ y la ecuación de conservación (2.46) lejos de la fuente queda

$$\partial^\mu t_{\mu\nu} = 0 \tag{2.47}$$

Una vez obtenido el tensor energía-momento asociado a las OGs podemos calcular el flujo de energía, es decir, la cantidad de energía de las OGs por unidad de tiempo que atraviesa una unidad de superficie a gran distancia de la fuente. Partimos de la ley de conservación obtenida en (2.47), subimos y bajamos índices e integramos en un volumen V que cubre una región que se encuentra lejos de la fuente y está limitado por una superficie S.

$$\int_V d^3x \left(\partial_0 t^{00} + \partial_i t^{i0} \right) = 0 \tag{2.48}$$

Este volumen es en concreto una corteza esférica cuyas 2 superficies se encuentran en la zona alejada de la fuente. La energía asociada a las OGs dentro del volumen V se obtiene integrando la densidad de energía en V

$$E_V = \int_V d^3x t^{00} \tag{2.49}$$

Derivando respecto del tiempo y sustituyendo en la relación (2.48) queda

$$\frac{dE_V}{dt} = c\int_V d^3x\partial_0 t^{00} = -c\int_V d^3x\partial_i t^{0i} \tag{2.50}$$

Aplicando el teorema de Gauss obtenemos

$$\frac{dE_V}{dt} = -c\int_S dAn_i t^{0i} = -c\int_S dAt^{0r} \tag{2.51}$$

donde dA es un elemento infinitesimal de superficie, n_i es un vector perpendicular a la superficie exterior que apunta hacia afuera radialmente. Podemos sustituir t^{0r} usando la relación (2.45). Como la energía asociada a la fuente decrece (signo menos), entonces la onda que se propaga lleva un flujo de energía $dE/dt = -dE_V/dt$

$$\frac{dE}{dAdt} = +ct^{00} \tag{2.52}$$

Como estamos fuera de la fuente se puede imponer el gauge TT de modo que el flujo de energía queda

$$\frac{dE}{dAdt} = \frac{c^3}{32\pi G}\langle\dot{h}_{ij}^{TT}\dot{h}_{ij}^{TT}\rangle \tag{2.53}$$

Capítulo 3

Generación de OGs en teoría linealizada

En esta sección vamos a centrarnos en el estudio de las OGs en el contexto de la teoría linealizada. Asumimos que el campo gravitatorio emitido por la fuente es lo suficientemente débil como para aproximar el fondo a un espacio-tiempo plano. Dentro de esta aproximación consideramos que la dinámica de la fuente viene regida por la dinámica Newtoniana.

Para obtener las expresiones que describan la producción de OGs realizamos una expansión en v/c. En un sistema en el que las fuerzas gravitacionales no sean dominantes, la expansión de campo gravitatorio débil y la expansión en bajas velocidades son independientes y esto nos permite considerar fuentes de campo gravitatorio débil con velocidades arbitrarias. En cambio, si en el sistema las fuerzas gravitatorias son dominantes, este formalismo pierde validez. Para ilustrar esta idea consideramos un sistema binario de objetos compactos. Sean 2 cuerpos con masa reducida μ y masa total m. El teorema del virial establece que

$$E_G + 2E_K = 0 \tag{3.1}$$

donde E_G es la energía potencial gravitatoria y es E_K la energía cinética. Por lo tanto, para el sistema binario que estamos considerando, se debe cumplir que

$$-\frac{G\mu m}{d} + \mu v^2 = 0 \tag{3.2}$$

donde d es la distancia entre los cuerpos. Sustituyendo $R_S = 2Gm/c^2$, el radio de Schwarzschild asociado a una masa m y operando queda

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{R_S}{2d} \tag{3.3}$$

De este modo, podemos observar como la expansión en velocidades depende también de la intensidad del campo gravitatorio expresada a través del coeficiente R_S/d. Esto implica que más allá de una primera aproximación, la dinámica en la fuente no puede ir descrita por la gravedad Newtoniana, el formalismo adecuado para sistemas donde la gravedad es dominante es la generación de OGs por fuentes Post-Newtonianas (PN) como veremos más adelante. De todos modos, incluso para un sistema donde el propio campo gravitatorio es dominante, algunos cálculos en orden bajo funcionan bien dentro del marco de la teoría linealizada.

3.1. Aproximación de campo débil para fuentes con velocidades arbitrarias

Partimos de las ecuaciones del movimiento linealizadas en el gauge de Lorentz $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

Esta ecuación es lineal en $\bar{h}_{\mu\nu}$ y se puede resolver aplicando el método de la función de Green. La solución de la ecuación es de la forma

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G\left(x - x'\right) T_{\mu\nu}\left(x'\right) \tag{3.5}$$

si $G(x - x')$ satisface la ecuación

$$\Box_x G\left(x - x'\right) = \delta^4\left(x - x'\right) \tag{3.6}$$

donde $\Box_x$ es el d'Alambertiano aplicado a funciones que dependan de las coordenadas x^μ. Esto se puede comprobar fácilmente ya que al aplicar el d'Alambertiano $\Box_x$ sobre la ecuación (3.5) y sustituyendo por la delta de Dirac de la ecuación (3.6) recuperamos la ecuación original (3.4). La solución a la ecuación (3.6) depende de las condiciones de contorno que impongamos. Imponemos las condiciones de Kirchoff-Sommerfeld (no llega radiación a la fuente desde infinito), es decir

$$\lim_{t\to-\infty}\left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{c\partial t}\right]\left(r\bar{h}_{\mu\nu}\right)(t, \mathbf{x}) = 0 \tag{3.7}$$

donde el límite se toma en una superficie donde la cantidad $ct + r$ es constante y las cantidades $r\bar{h}_{\mu\nu}$ y $r\partial_\rho\bar{h}_{\mu\nu}$ estén acotadas. La solución para estas condiciones es la función de Green retardada

$$G\left(x - x'\right) = -\frac{1}{4\pi\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right|}\delta\left(x^0_{ret} - x'^0\right) \tag{3.8}$$

donde $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ representa el vector de coordenadas espaciales, $x'^0 = ct'$, $x^0_{ret} = ct_{ret}$ y $t_{ret} = t - \left|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right|/c$ es el tiempo retardado. Así, la solución a la ecuación (3.4) es

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4}\int d^3x' \frac{1}{\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right|} T_{\mu\nu}\left(t - \frac{\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right|}{c}, \mathbf{x}'\right) \tag{3.9}$$

Fuera de la fuente podemos pasar al gauge TT usando el tensor Lambda. En el gauge TT $h = 0 \Rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, por lo tanto, $h^{TT}_{ij} = \Lambda_{ij,kl}h_{kl} = \Lambda_{ij,kl}\bar{h}_{kl}$. De este modo, la expresión de la perturbación fuera de la fuente queda

$$h^{TT}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\int d^3x' \frac{1}{\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right|} T_{kl}\left(t - \frac{\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right|}{c}, \mathbf{x}'\right) \tag{3.10}$$

usamos la notación $|\mathbf{x}| = r$. Podemos observar que en la anterior expresión h^{TT}_{ij} solo depende de las componentes espaciales del tensor energía-momento T_{kl}. Esto no implica que $T_{0\mu}$ haya sido eliminado ya que se relaciona con las componentes espaciales por medio de la conservación del tensor energía-momento. Para teoría linealizada

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{3.11}$$

Denotamos como d el radio típico de la fuente. El tensor energía-momento se anula fuera de la fuente, en $|\mathbf{x}'| \equiv r' \geq d$. Lejos de la fuente podemos realizar la expansión en $d/r \ll 1$ teniendo en cuenta que r' va a ser del orden de d como máximo porque fuera de la fuente la integral se anula.

$$\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right| = \sqrt{(x^i - x'^i)(x^i - x'^i)} = r\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{x^i x'^i}{r^2}} = r - x'^i n_i + O\left(\frac{d^2}{r}\right) \tag{3.12}$$

donde $n_i = x^i/r$ y la aproximación que se ha utilizado es $\sqrt{1+\epsilon} = 1 + \epsilon/2 + O(\epsilon^2)$ cuando $\epsilon \to 0$. Aplicamos esta aproximación tomando $r \to \infty$ para t fijo en la expresión (3.10) sustituyendo en el argumento de T_{kl} el término $\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right|$ por el primer término de la aproximación $r - x'^i n_i$. En el denominador sustituimos $\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right|$ por r. Despreciamos términos de orden $O(1/r^2)$. De modo que la expresión aproximada para largas distancias queda

$$h^{TT}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{rc^4}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\int d^3x' T_{kl}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{x'^i n_i}{c}, \mathbf{x}'\right) \tag{3.13}$$

calculamos la transformada de Fourier de T_{kl} respetando el convenio utilizado en (7)

$$T_{kl}(t,\mathbf{x}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{T}_{kl}(\omega,\mathbf{k})e^{-ik_\mu x^\mu} \tag{3.14}$$

donde definimos el tetravector de onda $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ con $\mathbf{k} = k^i = (k^1, k^2, k^3)$ el vector de onda y por lo tanto $d^4k = (1/c)d\omega d^3k$. También tenemos que $k_\mu x^\mu = -\omega t + k_i x^i$. Entonces, sustituyendo en la integral de la expresión (3.13), utilizando la expresión de la transformada de Fourier de la delta de Dirac (9) y operando queda

$$\int d^3x' T_{kl}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{x'^i n_i}{c}, \mathbf{x}'\right) = \int d^3x' \int \frac{d\omega}{2\pi c}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\tilde{T}_{kl}(\omega,\mathbf{k})e^{-i\omega(t-r/c)}e^{i(k_i-\omega n_i/c)x'^i} \tag{3.15}$$

$$= \int \frac{d\omega}{2\pi c}d^3k\tilde{T}_{kl}(\omega,\mathbf{k})e^{-i\omega(t-r/c)}\delta^{(3)}(k_i - \omega n_i/c) = \int \frac{d\omega}{2\pi c}\tilde{T}_{kl}(\omega,\omega n_i/c)e^{-i\omega(t-r/c)}$$

Así, sustituyendo en (3.13) queda

$$h_{ij}^{TT}(t,\mathbf{x}) = \frac{4G}{rc^5}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\tilde{T}_{kl}(\omega,\omega\hat{\mathbf{n}}/c)e^{-i\omega(t-r/c)} \tag{3.16}$$

3.2. Expansión en bajas velocidades

Las ecuaciones que describen la generación de radiación quedan más simplificadas si realizamos una expansión en bajas velocidades en relación con la velocidad de la luz. ω_S es la frecuencia angular típica del movimiento dentro de la fuente y d es la distancia típica que ocupa la fuente. Por lo tanto, las velocidades típicas dentro de la fuente serán $v \sim \omega_S d$. En un sistema binario, ω_S es la velocidad ángular con la que gira un objeto respecto al otro y d es la distancia entre los dos objetos. Asumimos que la frecuencia angular de la radiación gravitacional emitida $\omega = c/\lambda$ será del orden de la de la fuente ω_S, así

$$\lambda \sim \frac{c}{v}d \tag{3.17}$$

Para un sistema no relativista ($1 \ll c/v$), la longitud de onda reducida de la radiación emitida es mucho mayor que el tamaño de la fuente

$$d \ll \lambda \tag{3.18}$$

De este modo, no necesitamos conocer la dinámica de la fuente en todo detalle ya que si se cumple la condición (3.18), la emisión de OGs es gobernada por los multipolos de orden más bajo. Para una fuente no relativista $\bar{T}_{kl}(\omega,\mathbf{k})$, el pico de intensidad se encuentra alrededor de una frecuencia típica ω_S. Que la fuente sea no relativista implica que $\omega_S d \sim v \ll c$. Por otro lado, el tensor energía-momento se anula fuera de la fuente así que en el cálculo de la integral, se pueden restringir los límites de integración de tal forma que $|\mathbf{x}'| \leq d$. Aplicando estas condiciones sobre el término $\frac{\omega}{c}x'^i n_i$ dentro del tensor energía-momento en la expresión (3.13) queda

$$\frac{\omega}{c}x'^i n_i \leq \frac{\omega d}{c} \sim \frac{\omega_s d}{c} \ll 1 \tag{3.19}$$

Con esto, podemos expandir $T_{kl}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{x'^i n_i}{c}, \mathbf{x}'\right)$ en serie de potencias alrededor del punto $\left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}'\right)$

$$T_{kl}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{x'^i n_i}{c}, \mathbf{x}'\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_t^n T_{kl}\left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}'\right)\left(\frac{x'^i n_i}{c}\right)^n \tag{3.20}$$

$$= T_{kl}\left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}'\right) + \partial_t T_{kl}\left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}'\right)\frac{x'^i n_i}{c} + \frac{1}{2}\partial_t^2 T_{kl}\left(t - \frac{r}{c}, \mathbf{x}'\right)\frac{1}{c^2}x'^i n_i x'^j n_j + ...$$

Definimos los momentos asociados al tensor de estrés T^{ij} como

$$S^{ij}(t) = \int d^3x T^{ij}(t,\mathbf{x}) \tag{3.21}$$

$$S^{ij,k}(t) = \int d^3x T^{ij}(t,\mathbf{x})x^k \tag{3.22}$$

$$S^{ij,k_1\ldots k_N}(t) = \int d^3x T^{ij}(t,\mathbf{x})x^{k_1}\cdot\ldots\cdot x^{k_N} \tag{3.23}$$

En esta notación, la coma sirve para separar los índices que proceden de T^{ij} de los índices que proceden de $x^{k_1},...,x^{k_N}$. El tensor energía-momento es simétrico $T^{ij}=T^{ji}$. Por lo tanto, sus momentos asociados también serán simétricos a la izquierda de la coma $S^{ij,k_1\ldots k_N} = S^{ji,k_1\ldots k_N}$. A la derecha de la coma también son simétricos porque el intercambio de dos de esos índices no cambia la expresión del momento asociado. Pero, los momentos asociados no son necesariamente simétricos al permutar los índices a un lado y al otro de la coma. Sustituyendo la expansión de (3.20) en la expresión de h_{ij}^{TT} en (3.13) y sustituyendo los momentos asociados $S^{ij,k_1\ldots k_N}$, la expresión queda

$$\begin{aligned} h_{ij}^{TT}(t,\mathbf{x}) &= \frac{4G}{rc^4}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{1}{c^m}n_{k_1}\cdot\ldots\cdot n_{k_m}\partial_t^m\int d^3x' T^{kl}\left(t-\frac{r}{c},\mathbf{x}'\right)x'^{k_1}\cdot\ldots\cdot x'^{k_m} \\ &= \frac{4G}{rc^4}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{1}{c^m}n_{k_1}\cdot\ldots\cdot n_{k_m}\partial_t^m S^{kl,k_1\ldots k_m}\left(t-\frac{r}{c},\mathbf{x}'\right) \\ &= \frac{4G}{rc^4}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\left[S^{kl}+\frac{1}{c}n_{k_1}\dot{S}^{kl,k_1}+\frac{1}{2c^2}n_{k_1}n_{k_2}\ddot{S}^{kl,k_1k_2}+\ldots\right]_{ret} \end{aligned} \tag{3.24}$$

donde los momentos y sus derivadas están evaluados en $t_{ret}=t-r/c$. Al añadir un índice y pasar del momento $S^{ij,k_1\ldots k_N}$ a $S^{ij,k_1\ldots k_N k_{N+1}}$ se añade un factor adicional $x^{k_{N+1}} \approx O(d)$. Y cada derivada temporal sobre T_{kl} da como resultado un nuevo factor $O(\omega_S)$ ya que la dependencia temporal viene en forma de exponencial $e^{-i\omega t}$. Esto implica que cada término sucesivo en la expansión $(S^{kl}, \frac{1}{c}n_{k_1}\dot{S}^{kl,k_1}, \frac{1}{c^2}n_{k_1}n_{k_2}\dot{S}^{kl,k_1k_2},\ldots)$ introduce un factor $O(v/c)$ adicional porque $\omega_S d\sim v$.

El significado físico de los términos de la expansión se ve más claro si sustituimos los momentos de T^{ij} por los momentos de la densidad de energía T_{00} y los momentos de momento lineal T_{0i}. Definimos los momentos de T_{00}/c^2 como

$$M = \frac{1}{c^2}\int d^3x T^{00}(t,\mathbf{x}) \tag{3.25}$$

$$M^k = \frac{1}{c^2}\int d^3x T^{00}(t,\mathbf{x})x^k \tag{3.26}$$

$$M^{k_1\ldots k_N} = \frac{1}{c^2}\int d^3x T^{00}(t,\mathbf{x})x^{k_1}\cdot\ldots\cdot x^{k_N} \tag{3.27}$$

de forma similar para los momentos de T_{0i}/c

$$P^i = \frac{1}{c}\int d^3x T^{0i}(t,\mathbf{x}) \tag{3.28}$$

$$P^{i,k} = \frac{1}{c}\int d^3x T^{0i}(t,\mathbf{x})x^k \tag{3.29}$$

$$P^{i,k_1\ldots k_N} = \frac{1}{c}\int d^3x T^{0i}(t,\mathbf{x})x^{k_1}\cdot\ldots\cdot x^{k_N} \tag{3.30}$$

Estamos trabajando en teoría linealizada, por lo tanto, se satisface la ecuación de conservación en espacio-tiempo plano $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$. A partir de estas ecuaciones es posible construir una serie de identidades que relacionan los momentos de $T^{\mu\nu}$. Para ello tomamos un volumen V mayor que la fuente y escribimos su frontera como ∂V de forma que el tensor energía momento se anula en la frontera. Usando que $\partial_\mu T^{\mu 0}=0$, tenemos

$$\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{0i} \tag{3.31}$$

Luego, a partir de la definición de M, integrando en V y aplicando el Teorema de Gauss

$$c\dot{M} = \int_V d^3x\partial_0 T^{00} = \int_V d^3x \partial_i T^{0i} = \int_{\partial V} dA\partial_i T^{0i} = 0 \tag{3.32}$$

donde la última integral se anula porque el tensor-energía momento se anula en la frontera (∂V). Que $\dot{M}$ sea nulo implica que, en la aproximación lineal del campo gravitatorio, la masa de la fuente se mantiene constante en la emisión de OGs. Realmente, T^{00} no solo representa la contribución de la masa a la densidad de energía, sino todas las demás contribuciones: energía cinética y potencial de todos los elementos de la fuente,... . Solo en el marco de campos débiles y en el límite no relativista T^{00}/c^2 representa la densidad de masa ρ. Fuera de la teoría linealizada, este resultado no es correcto, ya que hay que considerar la reacción de las OGs sobre la fuente.

De forma similar al cálculo en (3.32), aplicando integración por partes obtenemos la identidad

$$c\dot{M}^i = \int_V d^3x x^i \partial_0 T^{00} = -\int_V d^3x x^i \partial_j T^{0j} = \int_V d^3x \left(\partial_j x^i\right) T^{0j} = cP^i \tag{3.33}$$

De este modo podemos obtener las identidades para ordenes mayores. Partimos de $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$ y multiplicamos por x^{k_N} para añadir un superíndice más

$$\dot{M} = 0 \tag{3.34}$$

$$\dot{M}^i = P^i \tag{3.35}$$

$$\dot{M}^{ij} = P^{i,j} + P^{j,i} \tag{3.36}$$

$$\dot{M}^{ijk} = P^{i,jk} + P^{j,ik} + P^{k,ij} \tag{3.37}$$

y lo mismo para los momentos asociados a T^{0i} partiendo de $\partial_\mu T^{\mu i} = 0$

$$\dot{P}^i = \partial_t \left(\frac{1}{c}\int_V d^3x T^{0i}(t,\mathbf{x})\right) = -\int_V d^3x \partial_j T^{ij}(t,\mathbf{x}) = -\int_{\partial V} dA n_j T^{ij}(t,\mathbf{x}) = 0 \tag{3.38}$$

$$\dot{P}^{i,j} = S^{ij} \tag{3.39}$$

$$\dot{P}^{i,jk} = S^{ij,k} + S^{ik,j} \tag{3.40}$$

vemos que para las aproximaciones mencionadas se conservan tanto la masa ($\dot{M} = 0$) como el momento total ($\dot{P}^i = 0$) de la fuente, lo cual no se corresponde con lo que sucede en la realidad, pero es válido como primera aproximación. Ahora expresamos los momentos $\{S^{ij}, \dot{S}^{ij,k}, ...\}$ en términos de $\{M, M^i, M^{ij}, ...\}$ y $\{P^i, P^{i,j}, ...\}$ a partir de las identidades previamente calculadas. Tomando la derivada temporal de la identidad (3.36), sustituyendo la identidad (3.39) y teniendo en cuenta que $S^{ij} = S^{ji}$ es simétrico tenemos que

$$S^{ij} = \frac{1}{2}\ddot{M}^{ij} \tag{3.41}$$

Tomando la derivada temporal de la identidad (3.37), sustituyendo la identidad (3.40) y teniendo en cuenta que $S^{ij,k} = S^{ji,k}$ es simétrico en los índices a un lado de la coma y aplicando otra derivada temporal queda

$$\dddot{M}^{ijk} = 2\left(\dot{S}^{ij,k} + \dot{S}^{ik,j} + \dot{S}^{jk,i}\right) \tag{3.42}$$

Tomando la derivada temporal de la identidad (3.40) queda $\ddot{P}^{i,jk} = \dot{S}^{ij,k} + \dot{S}^{ik,j}$, con esto podemos calcular $\ddot{P}^{i,jk} + \ddot{P}^{j,ik} - 2\ddot{P}^{k,ij} = 2\dot{S}^{ij,k} - \dot{S}^{ik,j} - \dot{S}^{jk,i}$. Combinando la anterior expresión con (3.42) obtenemos la siguiente identidad

$$\dot{S}^{ij,k} = \frac{1}{6}\dddot{M}^{ijk} + \frac{1}{3}\left(\ddot{P}^{i,jk} + \ddot{P}^{j,ik} - 2\ddot{P}^{k,ij}\right) \tag{3.43}$$

Los dos términos calculados en (3.41) y (3.43) representan el primer y el segundo término en la expansión sobre v/c de la perturbación h_{ij}^{TT}. Se puede proceder de forma similar para hallar términos de orden superior.

3.3. Cuadrupolo gravitacional

Cortamos la expansión en v/c (3.24) en el primer término, es decir S^{kl}. La expresión del primer término en función de los momentos asociados a T^{00}/c^2 se puede escribir a partir de la expresión (3.41).

$$\left[h_{ij}^{TT}(t,\mathbf{x})\right]_{quad} = \frac{2G}{rc^4}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\ddot{M}^{kl}(t-r/c) \tag{3.44}$$

Podemos descomponer cualquier tensor simétrico con 2 índices en su representación irreducible. Se puede dividir en una parte de traza nula más la parte que representa la traza, que es un escalar multiplicado por la delta de Kronecker. Para el caso del segundo momento de masa

$$M^{kl} = Q^{kl} + \frac{1}{3}\delta^{kl}M_{ii} \tag{3.45}$$

donde M_{ii} representa la traza del momento M^{kl} y definimos el momento cuadrupolar $Q^{kl} \equiv M^{kl} - \frac{1}{3}\delta^{kl}M_{ii}$. Por construcción, la traza del momento cuadrupolar es nula $Q_{ii} = 0$. En la expresión (3.44), la segunda derivada temporal del momento M^{kl} aparece contraída con el tensor $\Lambda_{ij,kl}$. A partir de la definición del tensor $\Lambda_{ij,kl}$ en (2.19) vemos que se anula al contraerse con δ^{kl}. De este modo, en la expresión (3.44) podemos sustituir el momento M^{kl} por el momento cuadrupolar Q^{kl} de forma que se sigue manteniendo la igualdad.

$$\left[h_{ij}^{TT}(t,\mathbf{x})\right]_{quad} = \frac{2G}{rc^4}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\ddot{Q}_{kl}(t-r/c) = \frac{2G}{rc^4}\ddot{Q}_{ij}^{TT}(t-r/c) \tag{3.46}$$

En la última igualdad usamos la ecuación (2.17) ya que $\ddot{Q}_{kl}$ es un tensor simétrico.

Con el fin de obtener el frente de onda en una dirección radial arbitraria $n_i = (\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, \cos\theta)$ es posible proceder directamente a partir de las definiciones (2.18) y (2.19), calcular una expresión general del tensor Lambda y contraerlo con $\ddot{Q}_{kl}$. Este procedimiento es más directo, pero podemos realizar los cálculos de forma que sean más intuitivos. Vamos a proceder calculando primero las componentes de $\ddot{M}_{kl}^{TT} = \Lambda_{ij,kl}\ddot{M}_{kl}$ para el caso en el que la dirección de propagación coincide con el eje z . Luego aplicando una transformación de coordenadas, vamos a cambiar la dirección de propagación del eje z a una dirección de propagación arbitraria. Para realizar estos cálculos es más cómodo trabajar en lenguaje matricial en lugar de en lenguaje tensorial. En primer lugar, si la dirección de propagación de la onda es el eje z, P_{ij} es un proyector en el plano (x,y), se puede escribir como matriz (P) y también podemos expresar los elementos de $\ddot{M}_{kl}$ como matriz $(\ddot{M})$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ddot{M} = \begin{pmatrix} \ddot{M}_{11} & \ddot{M}_{12} & \ddot{M}_{13} \\ \ddot{M}_{21} & \ddot{M}_{22} & \ddot{M}_{23} \\ \ddot{M}_{31} & \ddot{M}_{32} & \ddot{M}_{33} \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

a partir de la expresión (2.19) podemos escribir la contracción $\ddot{M}_{kl}^{TT} = \Lambda_{ij,kl}\ddot{M}_{kl}$ en lenguaje matricial

$$\ddot{M}_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl}\ddot{M}_{kl} = \left[P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}\right]\ddot{M}_{kl} = (P\ddot{M}P)_{ij} - \frac{1}{2}P_{ij}Tr(P\ddot{M}) \tag{3.48}$$

Realizamos los cálculos

$$P\ddot{M} = \begin{pmatrix} \ddot{M}_{11} & \ddot{M}_{12} & \ddot{M}_{13} \\ \ddot{M}_{21} & \ddot{M}_{22} & \ddot{M}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P\ddot{M}P = \begin{pmatrix} \ddot{M}_{11} & \ddot{M}_{12} & 0 \\ \ddot{M}_{21} & \ddot{M}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

y $Tr(P\ddot{M}) = \ddot{M}_{11} + \ddot{M}_{22}$. Con esto podemos calcular la expresión explícita de $\ddot{M}_{ij}^{TT}$

$$\ddot{M}_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} \ddot{M}_{11} & \ddot{M}_{12} & 0 \\ \ddot{M}_{21} & \ddot{M}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} - \frac{\ddot{M}_{11} + \ddot{M}_{22}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \tag{3.50}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}\right)/2 & \ddot{M}_{12} & 0 \\ \ddot{M}_{21} & -\left(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}\right)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij}$$

De este modo, cuando la dirección de propagación coincide con el eje z, las amplitudes de polarización se pueden escribir como

$$h_+ = \frac{G}{rc^4}\left(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}\right) \tag{3.51}$$

$$h_\times = \frac{2G}{rc^4}\ddot{M}_{12} \tag{3.52}$$

donde las derivadas de los segundos momentos de masa están evaluadas en el tiempo retardado.

Continuamos calculando $\ddot{M}_{ij}$ para una dirección arbitraria. Vamos a denotar con una $'$ a los elementos que se encuentren en el sistema de referencia en el que la OG se propaga en paralelo al eje z. Así, los componentes de $\ddot{M}'_{ij}$ se encuentran en el sistema de referencia (x', y', z') en el que la OG se propaga en paralelo al eje z, es decir, en la dirección $n'_i = (0, 0, 1)$. Las amplitudes de polarización se pasarían a escribir como

$$h_+ = \frac{G}{rc^4}\left(\ddot{M}'_{11} - \ddot{M}'_{22}\right) \tag{3.53}$$

$$h_\times = \frac{2G}{rc^4}\ddot{M}'_{12} \tag{3.54}$$

Nuestro objetivo es encontrar los componentes de $\ddot{M}_{ij}$, que se encuentran en el sistema de referencia (x, y, z) respecto del cual, la OG se propaga en una dirección arbitraría $n_i = (\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, \cos\theta)$. De este modo, las componentes de n_i y de n'_i están relacionadas por una transformación de coordenadas que se puede descomponer en 2 matrices de rotación. Sobre el sistema de coordenadas (x', y', z'), sabemos que la onda se propaga de forma paralela al eje z' y que los otros 2 ejes deben ser ortogonales entre sí. Por lo tanto, elegimos el eje x' de tal forma que se encuentre en el plano (x, y). El eje y' siendo ortogonal a los otros 2, queda fijado de tal forma que el eje z se encuentra en el plano (y', z'). De este modo, la primera matriz de rotación genera una rotación de un ángulo θ alrededor del eje x', así, el eje z' pasa a coincidir con el eje z y el eje y' pasa a encontrarse en el plano (x, y),al igual que el eje x' por construcción. La segunda matriz de rotación genera una rotación de un ángulo ϕ alrededor del eje z' (que tras la primera rotación, se corresponde con el eje z) y lleva los ejes x' e y' a coincidir con los ejes x e y. Con esto se completa la transformación. Podemos escribir explícitamente esta transformación en lenguaje matricial

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

Esta transformación de coordenadas se puede representar como

$$x'^i \to x^i = \mathcal{R}^i{}_j x'^j \tag{3.56}$$

Las componentes de n_i y de n'_i cumplen la relación $n_i = \mathcal{R}_{ij}n'_j$. Con esto ya podemos obtener la relación entre las componentes de $\ddot{M}_{ij}$ y $\ddot{M}'_{ij}$.

$$\ddot{M}_{ij} = \mathcal{R}_{ik}\mathcal{R}_{jl}\ddot{M}'_{kl} = \left(\mathcal{R}\ddot{M}'\mathcal{R}^T\right)_{ij} \tag{3.57}$$

donde $\mathcal{R}^T$ es la matriz traspuesta. Como las matrices de rotación son matrices ortogonales (la multiplicación de la matriz por su traspuesta da la identidad), entonces la relación inversa se escribe como

$$\ddot{M}'_{ij} = \left(\mathcal{R}^T\ddot{M}\mathcal{R}\right)_{ij} \tag{3.58}$$

Con este resultado podemos calcular la expresión de las amplitudes de polarización sustituyendo en (3.53) y en (3.54)

$$h_+(t;\theta,\phi) = \frac{1}{r}\frac{G}{c^4}\Big[\ddot{M}_{11}\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cos^2\theta\right) + \ddot{M}_{22}\left(\sin^2\phi - \cos^2\phi\cos^2\theta\right) - \ddot{M}_{33}\sin^2\theta \tag{3.59}$$

$$-\ddot{M}_{12}\sin 2\phi\left(1+\cos^2\theta\right) + \ddot{M}_{13}\sin\phi\sin 2\theta + \ddot{M}_{23}\cos\phi\sin 2\theta\Big]$$

$$h_\times(t;\theta,\phi) = \frac{1}{r}\frac{G}{c^4}\left[\left(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}\right)\sin 2\phi\cos\theta + 2\ddot{M}_{12}\cos 2\phi\cos\theta - 2\ddot{M}_{13}\cos\phi\sin\theta + 2M_{23}\sin\phi\sin\theta\right] \tag{3.60}$$

Para calcular la potencia irradiada por unidad de ángulo sólido partimos de la expresión del flujo de energía (2.53). El diferencial de superficie se puede descomponer en $dA = r^2 d\Omega$ donde $d\Omega$ es el diferencial de ángulo sólido y la potencia P es por definición la variación de la energía que llevan las OGs por unidad de tiempo $P = dE/dt$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{quad} = \frac{r^2c^3}{32\pi G}\left\langle \dot{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}\dot{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}\right\rangle \tag{3.61}$$

donde tenemos un promedio temporal sobre varios periodos característicos de la OG. Sustituyendo la expresión de la perturbación (3.46) y considerando que el tensor $\Lambda_{ij,kl}$ es simétrico en los índices $(i,j) \leftrightarrow (k,l)$ y que es un proyector en el sentido expresado en la ecuación (2.20) queda

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{quad} = \frac{G}{8\pi c^5}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\left\langle \dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{kl}\right\rangle \tag{3.62}$$

donde los momentos cuadrupolares están evaluados en el tiempo retardado. Podemos integrar el ángulo sólido para obtener la potencia irradiada, el tensor $\Lambda_{ij,kl}$ es el único elemento que depende de las componentes angulares por lo tanto usando las siguientes identidades trigonométricas

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j = \frac{1}{3}\delta_{ij} \tag{3.63}$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j n_k n_l = \frac{1}{15}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{3.64}$$

podemos integrar el tensor $\Lambda_{ij,kl}$ sobre el ángulo sólido

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = \frac{2\pi}{15}\left(11\delta_{ik}\delta_{jl} - 4\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{3.65}$$

Con esto ya podemos obtener una expresión para la potencia total irradiada en la aproximación cuadrupolar

$$P_{quad} = \frac{G}{5c^5}\left\langle \dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij}\right\rangle \tag{3.66}$$

Como hemos visto, las OGs transportan energía. Está energía debe de ser drenada de la fuente. Dentro de la aproximación cuadrupolar, la energía que lleva un frente de OGs que se desplaza a la velocidad de la luz c en un instante de tiempo t y a una distancia r de la fuente ha sido emitida en un instante de tiempo $t_{ret} = t - r/c$. En la realidad, fuera de esta aproximación lineal, nos encontramos con que la no linealidad de la gravedad tiene efectos en la propagación de las OGs. Usando el formalismo PN que tiene en cuenta la no linealidad de la gravedad es posible observar que parte de la radiación gravitacional sufre un cierto retraso respecto del frente de onda que se mueve a la velocidad de la luz. Es decir, que además del frente de onda que va a la velocidad de la luz, podemos encontrar una cola que llega más tarde a pesar de haber sido emitida a la vez. De todos modos, en el marco de la teoría linealizada donde el fondo es plano, las OGs se propagan a la velocidad de la luz.

Para una fuente no relativista ($v/c \ll 1$) podemos tomar el primer término en la expansión en v/c (3.24). Es decir, que tomamos la aproximación cuadrupolar para calcular el ratio de energía drenada a la fuente dE_S/dt en el tiempo retardado t_{ret} que es igual a la potencia transportada por las OGs cambiada de signo $-P_{quad}$ a una distancia r de la fuente en un instante de tiempo t

$$\frac{dE_S}{dt} = -\frac{G}{5c^5}\left\langle \dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij}\right\rangle \tag{3.67}$$

de este modo, como Q_{ij} también está evaluado en el tiempo retardado, los 2 lados de la ecuación están evaluados en el mismo instante de tiempo.

Hemos tomado el orden más bajo en la expansión multipolar, es decir que asumimos bajas velocidades $v/c \ll 1$. Por lo tanto, por lo menos en el orden más bajo, el movimiento en la fuente será descrito por la gravedad Newtoniana. Podemos describir la reacción de las OGs sobre la fuente a partir de una fuerza F_i. Esto nos permite reescribir la ecuación (3.67) para un cuerpo extenso como

$$\frac{dE_S}{dt} = \left\langle \int d^3x' \frac{dF_i}{dV'}\dot{x}'_i \right\rangle \tag{3.68}$$

donde d/dV' representa la derivada respecto al volumen espacial. La energía solo ha sido bien definida si tomamos un promedio sobre varios periodos. Dentro de la integral del promedio podemos integrar por partes dos veces y reescribir el término de dentro del promedio de la expresión (3.67) como

$$\left\langle \frac{d^3Q_{ij}}{dt^3}\frac{d^3Q_{ij}}{dt^3}\right\rangle = \left\langle \frac{dQ_{ij}}{dt}\frac{d^5Q_{ij}}{dt^5}\right\rangle \tag{3.69}$$

Adaptando la expresión (3.45) a un cuerpo extenso y teniendo en cuenta que en la aproximación Newtoniana, la densidad de masa es el único factor que contribuye a la densidad de energía de la fuente tenemos que

$$Q_{ij} = \int d^3x' \rho\left(t, \mathbf{x}'\right)\left(x'_i x'_j - \frac{1}{3}r'^2\delta_{ij}\right) \tag{3.70}$$

entonces, al calcular la derivada temporal d/dt y contraer el término que contiene una delta δ_{ij} con d^5Q_{ij}/dt^5 que no tiene traza $Q_{ii} = \delta_{ij}Q_{ij} = 0$, este término se anula. Para una fuente Newtoniana, podemos escribir la densidad de masa y de momento como $\rho = T^{00}/c^2$ y $\rho\dot{x}^i = T^{0i}/c$. Por lo tanto, la conservación del tensor energía momento en espacio-tiempo plano lleva a la siguiente ecuación de continuidad

$$\partial_\mu T^{\mu 0} = 0 \Rightarrow \partial_t\rho + \partial_k\left(\rho\dot{x}_k\right) = 0 \tag{3.71}$$

entonces podemos integrar por partes en el término que sobrevive en dQ_{ij}/dt y el término de contorno se anula porque la fuente tiene un volumen finito y a partir de cierta distancia la densidad de masa se anula

$$\int d^3x'\partial_t\rho\left(t,\mathbf{x}'\right)x'_ix'_j = -\int d^3x'\partial_k\left[\rho\left(t,\mathbf{x}'\right)\dot{x}'_k\right]x'_ix'_j = \int d^3x'\rho\left(t,\mathbf{x}'\right)\left[\dot{x}'_ix'_j + x'_i\dot{x}'_j\right] \tag{3.72}$$

y como $Q_{ij} = Q_{ji}$ es un tensor simétrico, la expresión (3.67) queda

$$\frac{dE_S}{dt} = -\frac{2G}{5c^5}\left\langle \frac{d^5Q_{ij}}{dt^5}\int d^3x'\rho\left(t,\mathbf{x}'\right)\dot{x}'_ix'_j\right\rangle \tag{3.73}$$

igualando esta expresión a la obtenida en (3.68) obtenemos una fuerza atractiva por unidad de volumen que se puede expresar como

$$\frac{dF_i}{dV'} = -\frac{2G}{5c^5}\rho\left(t,\mathbf{x}'\right)x'_j\frac{d^5Q_{ij}}{dt^5}(t) \tag{3.74}$$

3.4. Radiación cuadrupolar de una masa que oscila

En este apartado vamos a analizar la emisión de OGs en aproximación cuadrupolar de una masa puntual que oscila. La masa sigue un movimiento harmónico simple en el eje z, su movimiento viene determinado por

$$z_0(t) = a\cos\omega_s t \tag{3.75}$$

dentro de la aproximación cuadrupolar asumimos que $a\omega_S \equiv v \ll c$ donde v es la velocidad máxima que alcanza la masa. La expresión para la densidad de masa es

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \mu\delta(x)\delta(y)\delta\left(z - z_0(t)\right) \tag{3.76}$$

donde m es la masa de la partícula que oscila. Con esto podemos calcular el segundo momento de masa

$$M^{ij}(t) = \int d^3x\rho(t, \mathbf{x})x^i x^j = mz_0^2(t)\delta^{i3}\delta^{j3} = \frac{ma^2}{2}\left(1 + \cos 2\omega_s t\right)\delta^{i3}\delta^{j3} \tag{3.77}$$

La única componente no nula es M^{33}. Calculamos las amplitudes de polarización sustituyendo en las ecuaciones (3.59) y (3.60) evaluando en el tiempo retardado la derivada del segundo momento de masa ya que las expresiones de las amplitudes están evaluadas en el instante t

$$h_+(t; \theta, \phi) = -\frac{G}{rc^4}\ddot{M}_{33}\sin^2\theta = \frac{2Gma^2\omega_s^2}{rc^4}\sin^2\theta\cos\left(2\omega_s t_{ret}\right) \tag{3.78}$$

$$h_\times(t; \theta, \phi) = 0 \tag{3.79}$$

Podemos observar que la radiación emitida es monocromática con una frecuencia $\omega = 2\omega_S$. Las amplitudes no dependen de ϕ debido a la simetría cilíndrica de la fuente. Vemos que la radiación es nula en el eje z. Esto se debe a que no se generan OGs en la dirección de movimiento de la fuente sino en las direcciones transversales. Esto es un resultado general que viene de la propiedad de transversalidad del tensor Lambda $\Lambda_{ij,kl}n^k = \Lambda_{ij,kl}n^l = 0$, este tensor proyecta el movimiento de la fuente en el plano transversal a la dirección de propagación. Si realizamos una transformación de coordenadas como la rotación en (3.56), el patrón de polarización físico no puede cambiar, por lo tanto, cambiarían las amplitudes de polarización de tal forma que se describa la misma realidad física. Por ejemplo, si rotamos 45° sobre el eje x, pasamos de una polarización puramente $+$ a una polarización puramente $\times$, para conservar el patrón de polarización físico. Para otras rotaciones, por lo general tenemos una combinación de polarización $+$ y $\times$.

La potencia irradiada se calcula a partir de la ecuación (3.61)

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{quad} = \frac{r^2c^3}{16\pi G}\left\langle \dot{h}_+^2 \right\rangle = \frac{Gm^2a^4\omega_S^6}{2\pi c^5}\sin^4\theta \tag{3.80}$$

3.5. Radiación emitida en la fase de órbita espiral en un sistema binario

En esta sección vamos a trabajar con un sistema binario de objetos compactos (por ejemplo, estrellas de neutrones o agujeros negros). Usaremos la aproximación cuadrupolar y trataremos a los objetos como masas puntuales m_1 y m_2 en las posiciones $\mathbf{r_1} = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ y $\mathbf{r_2} = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$. Denotamos la masa total como $m \equiv m_1 + m_2$ y la masa reducida del sistema como $\mu = m_1m_2/m$. Para usar la aproximación cuadrupolar asumimos bajas velocidades y campo gravitatorio débil, entonces el movimiento vendrá regido por la dinámica Newtoniana.

Vamos a trabajar en el sistema de referencia centro de masas (CM). Definimos las coordenadas relativas

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{3.81}$$

y las coordenadas del CM como

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m} \tag{3.82}$$

las coordenadas del CM son válidas para velocidades bajas y campos gravitatorios débiles porque asumimos que la única contribución a la densidad de energía viene de la masa. Fuera de esta aproximación deberíamos de definir el centro de energías que recibe contribuciones de otras fuentes como la energía cinética y potencial. En el sistema de referencia CM, la densidad de masa viene dada por la siguiente expresión

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \mu\delta^{(3)}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)\right) \tag{3.83}$$

Por lo tanto, podemos calcular el segundo momento de masa usando la expresión (3.27). Para 2 masas se escribe

$$M^{ij} = m_1 x_1^i x_1^j + m_2 x_2^i x_2^j \tag{3.84}$$

Invirtiendo las relaciones (3.81) y (3.82) queda

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{CM} + \frac{m_2}{m}\mathbf{r}_0 \tag{3.85}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{CM} - \frac{m_1}{m}\mathbf{r}_0 \tag{3.86}$$

Y sustituyendo en (3.84) queda

$$M^{ij} = m x_{CM}^i x_{CM}^j + \mu x_0^i x_0^j \tag{3.87}$$

Como el sistema está aislado, el CM está estático es este sistema de referencia, por lo tanto, no contribuye a la emisión de OGs. Podemos elegir el origen de coordenadas en la posición del CM de forma que $x^i_{\mathrm{CM}} = 0$. Así reducimos el problema a la dinámica de una única partícula con masa efectiva μ. El segundo momento de masas queda

$$M^{ij} = \mu x_0^i(t) x_0^j(t) \tag{3.88}$$

Elegimos un sistema de coordenadas (x, y, z) tal que la órbita se encuentra en el plano (x, y) y viene dada por las coordenadas relativas $\mathbf{r}_0 = (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$

$$x_0(t) = R\cos\left(\omega_s t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.89}$$

$$y_0(t) = R\sin\left(\omega_s t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.90}$$

$$z_0(t) = 0 \tag{3.91}$$

donde ω_S es la frecuencia a la que rota la coordenada relativa y R es el radio orbital. Por lo tanto, la velocidad relativa entre las 2 partículas será $v = \omega_S R$. Debemos de tener en cuenta las identidades trigonométricas $\cos(x+\pi/2) = -\sin x$, $\sin(x+\pi/2) = \cos x$. Con esto ya podemos calcular explícitamente las coordenadas del segundo momento de masa

$$M_{11} = \mu R^2 \frac{1 - \cos 2\omega_s t}{2} \tag{3.92}$$

$$M_{22} = \mu R^2 \frac{1 + \cos 2\omega_s t}{2} \tag{3.93}$$

$$M_{12} = M_{21} = -\frac{1}{2}\mu R^2 \sin 2\omega_s t \tag{3.94}$$

Calculamos las segundas derivadas temporales

$$\ddot{M}_{11} = -\ddot{M}_{22} = 2\mu R^2 \omega_s^2 \cos 2\omega_s t \tag{3.95}$$

$$\ddot{M}_{12} = \ddot{M}_{21} = 2\mu R^2 \omega_s^2 \sin 2\omega_s t \tag{3.96}$$

Podemos obtener las expresiones de las amplitudes de polarización sustituyendo en (3.59) y (3.60)

$$h_+(t; \theta, \phi) = \frac{4G\mu\omega_S^2 R^2}{rc^4}\left(\frac{1 + \cos^2\theta}{2}\right)\cos\left(2\omega_S t_{ret} + 2\phi\right) \tag{3.97}$$

$$h_\times(t; \theta, \phi) = \frac{4G\mu\omega_S^2 R^2}{rc^4}\cos\theta \sin\left(2\omega_S t_{ret} + 2\phi\right) \tag{3.98}$$

donde la dependencia en la coordenada angular ϕ aparece en las amplitudes de polarización al contrario de el caso de una masa que oscila a lo largo de un eje. La órbita es circular, por lo tanto, una rotación alrededor del eje z un ángulo $\Delta\phi$ es equivalente a una translación temporal $\Delta t = \Delta\phi/\omega_S$. Así es como introducimos la dependencia en ϕ en las expresiones anteriores, $t \to t + \phi/\omega_S$. De todos modos, podemos hacer $\phi = 0$ con una translación temporal adecuada.

Dentro del marco de la dinámica Newtoniana podemos aplicar la III Ley de Kepler.

$$\omega_S^2 = \frac{Gm}{R^3} \tag{3.99}$$

La usamos para expresar R en función de ω_S y eliminarla de las ecuaciones anteriores. También introducimos la masa de gorjeo (chirp mass) M_c

$$M_c = \mu^{3/5} m^{2/5} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \tag{3.100}$$

y como podemos observar en las expresiones (3.97) y (3.98), dentro de las funciones trigonométricas, la frecuencia de las OGs emitidas f_{gw} (el subíndice viene de gravitational waves) es el doble que la frecuencia orbital $\omega_{gw} = 2\omega_S$. Por lo tanto, sustituimos $2\omega_S$ por $2\pi f_{GW}$. Aplicando los anteriores cambios sobre las expresiones (3.97) y (3.98) queda

$$h_+(t) = \frac{1}{r}\left(\frac{GM_c}{c^2}\right)^{5/3}\left(\frac{\pi f_{gw}}{c}\right)^{2/3}\left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right)\cos\left(2\pi f_{gw} t_{ret} + 2\phi\right) \tag{3.101}$$

$$h_\times(t) = \frac{4}{r}\left(\frac{GM_c}{c^2}\right)^{5/3}\left(\frac{\pi f_{gw}}{c}\right)^{2/3}\cos\theta\sin\left(2\pi f_{gw} t_{ret} + 2\phi\right) \tag{3.102}$$

observamos que en estas expresiones la dependencia sobre las masas m_1 y m_2 solo se da a través de la dependencia en M_c.

Obtenemos la distribución angular de la potencia irradiada en la aproximación cuadrupolar usando la expresión (3.61). El único término que contribuye al promedio temporal son las funciones trigonométricas $\left\langle \sin^2(\omega_{gw} t + 2\phi)\right\rangle = \left\langle \cos^2(\omega_{gw} t + 2\phi)\right\rangle = 1/2$, el promedio elimina la dependencia en ϕ. La expresión queda

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{quad} = \frac{2}{\pi}\frac{c^5}{G}\left(\frac{GM_c\omega_{\mathrm{gw}}}{2c^3}\right)^{10/3} g(\theta) \tag{3.103}$$

donde

$$g(\theta) = \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right)^2 + \cos^2\theta \tag{3.104}$$

Si calculamos la integral respecto del ángulo sólido, el único término que contribuye es $g(\theta)$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} g(\theta) = \frac{4}{5} \tag{3.105}$$

donde el elemento diferencial de ángulo sólido se escribe en función de las coordenadas angulares como $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$. Así, la potencia total irradiada queda

$$P = \frac{32 c^5}{5G}\left(\frac{GM_c\omega_{\mathrm{gw}}}{2c^3}\right)^{10/3} \tag{3.106}$$

La emisión de OGs tiene un coste energético. Esto implica que, en nuestro modelo, esta energía debe provenir de la energía de la órbita. Por lo tanto, la fuente no sigue una trayectoria circular fija como hemos supuesto para obtener las amplitudes de polarización (3.101) y (3.102). Podemos calcular la energía de la órbita E_S haciendo uso del teorema del virial (3.1)

$$E_S = E_K + E_G = \frac{1}{2}E_G = -\frac{Gm_1m_2}{2R} \tag{3.107}$$

Para compensar la pérdida de energía por emisión de OGs, o bien el producto de las masas $m_1 m_2$ aumenta o el radio orbital R disminuye. Que las masas aumenten no tiene ningún sentido físico y de hecho, aunque en esta aproximación las masas de los 2 objetos se mantienen constantes como se puede apreciar en (3.34), en la realidad estas masas disminuyen durante la fusión. Por lo tanto, solo queda la opción de que el radio disminuya con el tiempo, de modo que E_S va hacia valores más negativos.

Si observamos la ecuación (3.99) vemos que si el radio orbital decrece, entonces ω_S aumenta. Al aumentar ω_S, la potencia irradiada (3.106) también aumenta y por lo tanto el radio orbital decrece más rápido. En este proceso, los dos fenómenos de disminución del radio orbital y mayor potencia emitida en forma de OGs se retroalimentan. Siguiendo esta dinámica, finalmente los dos objetosse fusionarán. La aproximación de órbita circular será válida siempre que la tasa de decrecimiento del radio orbital $\dot{R}$ sea baja en relación con la velocidad orbital $v = \omega_S R$. Mientras que se cumpla la siguiente aproximación

$$\dot{\omega}_S \ll \omega_S^2 \tag{3.108}$$

decimos que nos encontramos en un régimen de movimiento cuasi-circular. Realmente la trayectoria es una espiral hacia el centro, pero dentro de este régimen, las órbitas se pueden seguir aproximando a circunferencias. Tomando la derivada temporal en (3.99) y considerando que en este régimen tanto R como ω_S dependen del tiempo

$$R^3 = Gm\omega_S^{-2} \Rightarrow \dot{R} = -\frac{2}{3}\frac{\dot{\omega}_S}{\omega_S}R = -\frac{2}{3}\frac{\dot{\omega}_S}{\omega_S^2}v \tag{3.109}$$

Vemos que si la aproximación cuasi-circular (3.108) se mantiene, entonces, el radio orbital varia muy lentamente en relación con la velocidad orbital $|\dot{R}| \ll |v|$. De aquí en adelante asumimos que las condiciones de la aproximación cuasi-circular (3.108) se cumplen. Eliminamos R de la ecuación (3.107) usando la ecuación (3.99) con lo que obtenemos

$$E_S = -\left(\frac{G^2 M_c^5 \omega_{gw}^2}{32}\right)^{1/3} \tag{3.110}$$

nuevamente la dependencia sobre las masas se encuentra solo en M_c al igual que en las expresiones (3.101) y (3.102). La potencia irradiada en forma de OGs (3.106) debe de ser igual a la potencia perdida por la fuente con un cambio de signo (3.110) $P = -dE_S/dt$. Derivando y operando queda

$$\dot{\omega}_{gw} = \frac{2^{1/3}12}{5}\left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3}\omega_{gw}^{11/3} \tag{3.111}$$

esto se puede reescribir en términos de la frecuencia $f_{\rm gw} = \omega_{\rm gw}/(2\pi)$

$$\dot{f}_{gw} = \frac{96}{5}\pi^{8/3}\left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3} f_{gw}^{11/3} \tag{3.112}$$

Integramos entre un instante de tiempo t y el instante de tiempo en el que los dos objetos se fusionan t_{coal} (coalescence). De esta forma calculamos la frecuencia de las OGs emitidas en términos del tiempo de fusión $\tau \equiv t_{coal} - t$

$$\int_{f_{gw}}^{f_{coal}\to\infty} f^{-11/3} df = \frac{96}{5}\pi^{8/3}\left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3}\int_t^{t_{coal}} dt \tag{3.113}$$

$$f_{gw}(\tau) = \frac{5^{3/8}}{8\pi}\left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{-5/8}\left(\frac{1}{\tau}\right)^{3/8} \tag{3.114}$$

cuando $\tau = 0$, las ecuaciones divergen, pero, en la realidad, con objetos que no pueden ser considerados puntuales, la fusión se produce antes. Además, la aproximación de órbita cuasi-circular (3.108) deja de ser válida mucho antes de la fusión y se deben utilizar otros métodos para obtener expresiones para las trayectorias y el frente de onda.

Podemos calcular la expresión del radio orbital en función de τ a partir de la anterior expresión y de (3.109). Debemos tener en cuenta que hay un cambio de signo en la derivada ya que $\tau = t_{coal} - t$ entonces, $d/d\tau = -d/dt$ y el punto denota derivada temporal d/dt

$$\frac{\dot{R}}{R} = -\frac{2}{3}\frac{\dot{\omega}_{gw}}{\omega_{gw}} = -\frac{1}{4\tau} \tag{3.115}$$

integrando desde el tiempo de fusión inicial $\tau_0 = t_{coal} - t_0$ donde t_0 es el instante de tiempo inicial hasta τ queda

$$R(\tau) = R_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{1/4} = R_0 \left(\frac{t_{\text{coal}} - t}{t_{\text{coal}} - t_0}\right)^{1/4} \tag{3.116}$$

donde R_0 es el valor de R en el instante de tiempo inicial.

El cambio de una trayectoria circular a una trayectoria cuasi-circular en espiral conlleva cambios en el frente de ondas también. En este caso, debemos considerar una órbita cuasi-circular en el plano (x, y) con un radio orbital $R = R(t)$ y una velocidad angular $\omega_S = \omega_S(t)$ calculados previamente y con las siguientes expresiones para las coordenadas relativas

$$x(t) = R(t)\cos\left(\frac{1}{2}\Phi(t) + \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.117}$$

$$y(t) = R(t)\sin\left(\frac{1}{2}\Phi(t) + \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.118}$$

$$z(t) = 0 \tag{3.119}$$

donde definimos

$$\Phi(t) \equiv 2\int_{t_0}^{t} dt'\omega_S\left(t'\right) \tag{3.120}$$

si tomamos R y ω_S constantes recuperamos las ecuaciones anteriores. Podemos calcular una expresión explicita para $\Phi(t)$ sustituyendo la expresión (3.113) en el integrando de la anterior expresión

$$\Phi(\tau) = -2\left(\frac{5GM_c}{c^3}\right)^{-5/8} \tau^{5/8} + \Phi_0 \tag{3.121}$$

donde $\Phi_0 = \Phi(\tau = 0)$ es una constante de integración que es igual al valor de Φ en el instante de la fusión. A la hora de escribir las nuevas expresiones para las amplitudes de polarización debemos implementar estos cambios que aparecen al calcular las derivadas temporales del segundo momento cuadrupolar. Escribimos las expresiones para las componentes del momento cuadrupolar no nulas a partir de la expresión (3.88)

$$M_{11} = \mu R^2(t)\frac{1 - \cos\Phi(t)}{2} \tag{3.122}$$

$$M_{22} = \mu R^2(t)\frac{1 + \cos\Phi(t)}{2} \tag{3.123}$$

$$M_{12} = M_{21} = -\frac{1}{2}\mu R^2(t)\sin\Phi(t) \tag{3.124}$$

Al calcular las derivadas temporales hacemos uso de la aproximación de órbita cuasi-circular (3.108) para simplificar las ecuaciones

$$\dot{M}_{11} = \mu\dot{R}(t)R(t)\left(1 - \cos\Phi(t)\right) + \frac{1}{2}\mu R^2(t)\omega_{gw}(t)\sin\Phi(t) \tag{3.125}$$

considerando que las funciones trigonométricas están acotadas $|\sin\Phi(t)|, |\cos\Phi(t)| \leq 1$ y que la aproximación de órbita cuasi-circular implica que $\dot{R} \ll v = \omega_S R$ podemos despreciar el primer término de la expresión anterior quedando

$$\dot{M}_{11} = \frac{1}{2}\mu R^2(t)\omega_{gw}(t)\sin\Phi(t) \tag{3.126}$$

calculamos la segunda derivada

$$\ddot{M}_{11} = \mu\dot{R}(t)R(t)\omega_{gw}(t)\sin\Phi(t) + \mu R^2(t)\dot{\omega}_{gw}(t)\sin\Phi(t) + \frac{1}{2}\mu R^2(t)\omega_{gw}^2(t)\cos\Phi(t) \tag{3.127}$$

da forma similar a como procedimos al calcular la derivada primera, eliminamos el primer término usando $\dot{R} \ll \omega_S R$ y el segundo usando (3.108). Procediendo de forma análoga para el resto de los momentos, las segundas derivadas quedan

$$\ddot{M}_{11} = -\ddot{M}_{22} = \frac{1}{2}\mu R^2(t)\omega_{gw}^2(t)\cos\Phi(t) \tag{3.128}$$

$$\ddot{M}_{12} = \ddot{M}_{21} = \frac{1}{2}\mu R^2(t)\omega_{gw}^2(t)\sin\Phi(t) \tag{3.129}$$

debido a las aproximaciones usadas, las expresiones quedan igual que para órbitas circulares (3.95) y (3.96) pero añadiendo la dependencia temporal

$$h_+(t) = \frac{1}{r}\left(\frac{GM_c}{c^2}\right)^{5/3}\left(\frac{\pi f_{gw}(t)}{c}\right)^{2/3}\left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right)\cos\Phi(t) \tag{3.130}$$

$$h_\times(t) = \frac{4}{r}\left(\frac{GM_c}{c^2}\right)^{5/3}\left(\frac{\pi f_{gw}(t)}{c}\right)^{2/3}\cos\theta\sin\Phi(t) \tag{3.131}$$

Las derivadas de los momentos deben evaluarse en t_{ret}. Sin embargo, en las expresiones anteriores aparecen evaluadas en t. Esto se debe a que la dependencia temporal de las amplitudes viene en la forma $f(t) = t_{coal} - t = \tau$, podríamos escribir estas expresiones en función de τ y no de t. Si calculamos el valor del tiempo de fusión evaluado en el tiempo retardado $\tau_{ret} = (t_{coal})_{ret} - t_{ret} = t_{coal} - t = \tau$ vemos que al ser una diferencia de tiempos, si aplicamos una translación temporal, se cancela. Por lo tanto, en este caso, da igual que evaluemos en el tiempo retardado t_{ret} o en el instante de tiempo t. Podemos observar que conforme nos vamos acercando a la fusión, la frecuencia y la amplitud de las amplitudes de polarización aumentan. Nos referimos a este comportamiento como fase de gorjeo (chirp phase) en analogía a las características en amplitud y frecuencia del gorjeo de las aves.

Los calculos anteriores se han realizado en el marco de la teoría linealizada asumiendo un espacio-tiempo plano. Sin embargo, para sistemas binarios de estrellas de neutrones o agujeros negros, este no es el caso ya que el campo gravitatorio cerca de estos objetos es bastante intenso. Esto tiene importantes consecuencias en la dinámica de los objetos que se hacen más notables conforme el radio orbital se va acortando. De hecho, si vamos a una mejor aproximación usando la geometría de Schwarzschild, hay una distancia radial mínima más allá de la cual, las órbitas circulares no están permitidas (Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)). Para distancias orbitales menores, es necesario considerar que los campos gravitatorios tienen una intensidad elevada.

Capítulo 4

Fuentes Post-Newtonianas

En las secciones anteriores hemos trabajado en teoría linealizada, asumiendo que el espacio-tiempo de fondo es plano. Este procedimiento asume que podemos despreciar la contribución de la fuente sobre la curvatura del espacio-tiempo en la región cercana y consideramos solo la emisión de OGs en la región lejana. Anteriormente hemos obtenido expresiones que describen la emisión de OGs aplicando un desarrollo multipolar en v/c. Hemos aplicado este formalismo a un sistema binario de objetos compactos cortando la expansión en v/c en el primer término (cuadrupolo de masa).

Al realizar una expansión en v/c hemos asumido que la velocidad típica de la fuente y la métrica del espacio-tiempo son independientes, lo que nos ha permitido mantener el fondo plano mientras que consideramos las correcciones en v/c. Esta idea es válida si la dinámica del sistema no está gobernada por las fuerzas gravitatorias. Un ejemplo puede ser un haz de partículas cargadas aceleradas por un campo eléctrico externo. Estas pueden viajar a velocidades relativistas, pero su contribución al campo gravitatorio de fondo es despreciable. Para este tipo de sistemas, el formalismo usado anteriormente es adecuado.

Este trabajo se centra en estudiar un sistema binario de objetos compactos, que es un sistema donde la dinámica está dominada por el campo gravitatorio. En este caso, asumir que la velocidad orbital y la métrica del espacio-tiempo son independientes solo es válido para bajas velocidades y campo gravitatorio débil, pero no podemos usar este formalismo de forma general para velocidades arbitrarias. Como vimos en la ecuación (3.3) $(v/c)^2 \sim R_S/d$, dado que la cantidad R_S/d esta relacionada con la intensidad del campo gravitatorio, si consideramos velocidades que no sean muy bajas, el campo gravitatorio se vuelve demasiado intenso como para poder considerar un fondo plano.

En este capítulo vamos a trabajar en el formalismo Post-Newtoniano (PN). Dejamos de asumir un fondo plano, por lo tanto, las trayectorias en la fuente ya no vendrán dadas por la gravedad Newtoniana sino por la RG. En esta sección, tiene especial interés que dejamos la teoría linealizada para enfrentarnos a la no linealidad de la RG. Además, el uso del formalismo PN es clave a la hora de calcular un frente de onda preciso para extraer la señal de la OG a partir de los datos experimentales en los detectores de OGs existentes actualmente.

4.1. La expansión PN

En primer lugar, vamos a comentar los diferentes regímenes en los que se pueden encontrar las fuentes según la intensidad del campo gravitatorio. Cuando el campo gravitatorio es despreciable, la emisión de OGs puede ser descrita por la teoría linealizada. Las fuentes con velocidades típicas muy bajas por lo general no son una fuente de OGs que merezca la pena considerar. En los sistemas donde la gravedad es la fuerza dominante, pero el campo gravitatorio no es extremadamente fuerte y donde las velocidades no son extremadamente altas podemos utilizar el formalismo PN. Bajo estas condiciones, para un sistema binario, $(v/c)^2$ será comparable a R_S/d y ninguna de estas cantidades estará muy cerca de 1. Cuando R_S/d se acerca mucho a 1, estamos tratando campos gravitatorios muy intensos y el formalismo PN deja de ser válido. En estos casos tenemos que atacar el problema con métodos de campo fuerte.

Nos vamos a centrar en el formalismo PN para fuentes dominadas por la gravedad, pero donde ni el campo gravitatorio es extremadamente fuerte, ni las velocidades son extremadamente altas. Lo cual significa que podemos realizar una expansión en los parámetros $v/c \sim (R_S/d)^{1/2}$. Para aplicar el formalismo PN, también es necesario que la fuente ocupe un volumen finito a lo largo del tiempo. Y la fuente $T^{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$ también debe de ser infinitamente diferenciable en todo el espacio-tiempo.

Nuestro objetivo es entender como calcular de manera sistemática correcciones a la teoría linealizada en una expansión de potencias v/c considerando un fondo curvo. Para una fuente no relativista, es conveniente diferenciar entre la zona cercana y la zona lejana. Como vimos en (3.17), considerando una fuente no relativista, la longitud de onda reducida λ es mucho mayor que la distancia entre los objetos d. Definimos la zona cercana como la región donde $r \ll \lambda$ y definimos la zona cercana externa como la región que cumple

$$d < r \ll \lambda \tag{4.1}$$

En la zona cercana, los efectos debido al retardo son despreciables. Asumimos que los sucesos que ocurren en la fuente tienen consecuencias instantáneas dentro de la zona cercana. Podemos ampliar la clasificación considerando la intensidad del campo dentro de la zona cercana. La zona cercana de campo fuerte está contenida en bolas centradas en las fuentes, para un sistema binario, estas bolas rodean a los 2 objetos compactos. La zona cercana de campo débil es el resto de la zona cercana. Las condiciones para utilizar el formalismo PN se cumplen en la región cercana de campo débil.

En la zona lejana se cumple que $r \gg \lambda$. Es la región donde los frentes de onda se han formado y si que se deben de considerar los efectos de retardo. Cuando se estudian los efectos de la propagación de OGs a distancias cosmológicas conviene dividir la zona lejana en zona de onda local y zona de onda distante. La diferencia entre estas 2 zonas se encuentra en si debemos de considerar efectos de corrimiento al rojo o de lente gravitacional debido a la curvatura de fondo del universo o debido a la presencia de galaxias en la trayectoria de las OGs. En nuestro caso, no vamos a considerar estos fenómenos, así que nos restringimos a la zona de onda local. También cabe mencionar la zona que separa la zona cercana de la zona lejana, esta región intermedia se encuentra en $r \sim \lambda$.

Cuando intentamos extender los resultados de orden PN más bajo a una expansión general o cuando se aplica el formalismo PN a la emisión y propagación de OGs surgen dificultades conceptuales y técnicas. Aunque el formalismo PN fue desarrollado en 1916 por Einstein, Droste, de Stitter y Lorentz solo en los últimos años se ha logrado una formulación que funciona de forma adecuada. Vamos a analizar la expansión PN en orden bajo sin considerar la reacción de la emisión de OGs sobre la propia fuente. Esto se debe a que para primer y segundo orden PN, no aparecen correcciones en el movimiento de la fuente debido a la emisión de OGs. Entonces, asumimos que la fuente es no relativista $v/c \ll 1$ y la fuerza gravitatoria es la fuerza dominante, de modo que $(R_S/d)^{1/2} \sim v/c$. Introducimos el parámetro sobre el que realizaremos la expansión PN

$$\epsilon \sim (R_S/d)^{1/2} \sim v/c \tag{4.2}$$

Imponemos que la fuente se encuentre débilmente estresada $\left|T^{ij}\right| / T^{00} = O\left(\epsilon^2\right)$. Buscamos expandir las ecuaciones de Einstein alrededor del parámetro ϵ. Para ello, primero expandimos la métrica y el tensor energía momento. Mientras que despreciemos la emisión de OGs, un sistema clásico dominado por fuerzas conservativas es invariante bajo inversión temporal. No consideramos la emisión de OGs porque para hallar la solución de los potenciales retardados aplicamos condiciones de contorno (3.7) tal que no se recibe radiación del infinito. Si se invierte la coordenada temporal, estas condiciones de contorno también se transforman y tenemos una función de Green diferente como solución. Si aplicamos la inversión temporal sobre el intervalo (6), este se mantiene invariante y queda

$$ds^2 = c^2 g_{00}(-t)dt^2 + c - 2g_{0i}(-t)dx^i(-dt) + g_{ij}(-t)dx^i dx^j \tag{4.3}$$

igualando con la expresión del intervalo sin invertir tenemos que

$$g_{00}(t) = g_{00}(-t), \quad g_{0i}(t) = -g_{0i}(-t), \quad g_{ij}(t) = g_{ij}(-t) \tag{4.4}$$

Esto implica que g_{00} y g_{ij} son funciones pares en t y g_{0i} es impar. $v^i = dx^i/dt$ también cambia de signo con la inversión temporal. Por lo tanto, a la hora de plantear la expansión en potencias de $\epsilon \sim v/c$, tenemos que g_{00} y g_{ij} solo pueden contener potencias pares en v (y por tanto en ϵ) y g_{0i} solo impares. Esto solo es válido si consideramos que la emisión de OGs no reacciona sobre la dinámica de la fuente. Aplicando la regla de la cadena vemos que las derivadas temporales son un orden mayor en v que las espaciales

$$\partial_0 = O(\epsilon)\partial_i \tag{4.5}$$

Teniendo esto en cuenta, de las ecuaciones de Einstein, podemos deducir que para trabajar en el mismo orden en ϵ, si expandimos g_{00} hasta orden ϵ^n, tenemos que expandir también g_{0i} hasta orden ϵ^{n-1} y g_{ij} hasta orden ϵ^{n-2}. Y considerando que las componentes de la métrica de Minkowski son $\eta_{00} = -1$, $\eta_{0i} = 0$ y $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ tenemos que

$$g_{00} = -1 + {}^{(2)}g_{00} + {}^{(4)}g_{00} + {}^{(6)}g_{00} + ... \tag{4.6}$$

$$g_{0i} = {}^{(3)}g_{0i} + {}^{(5)}g_{0i} + ... \tag{4.7}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + {}^{(2)}g_{ij} + {}^{(4)}g_{ij} + ... \tag{4.8}$$

donde los términos ${}^{(n)}g_{\mu\nu}$ denotan orden ϵ^n en la expansión de $g_{\mu\nu}$. De forma análoga, expandimos el tensor energía-momento

$$T^{00} = {}^{(0)}T^{00} + {}^{(2)}T^{00} + ... \tag{4.9}$$

$$T^{0i} = {}^{(1)}T^{0i} + {}^{(3)}T^{0i} + ... \tag{4.10}$$

$$T^{ij} = {}^{(2)}T^{ij} + {}^{(4)}T^{ij} + ... \tag{4.11}$$

el siguiente paso es sustituir estas expansiones en las ecuaciones de Einstein e igualar los términos que tengan el mismo orden en ϵ teniendo en cuenta que las derivadas temporales son un orden mayor en ϵ que las espaciales (4.5). En particular, aplicando esto, el operador d'Alambertiano $\Box$ en orden más bajo se convierte en el operador Laplaciano $\nabla^2 = \partial^i\partial_i$

$$\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = \left[1 + O\left(\epsilon^2\right)\right]\nabla^2 \tag{4.12}$$

esto tiene una implicación importante, y es que los efectos de retardo se convierten en pequeñas correcciones y en orden más bajo, se dan en términos de potenciales instantaneos.

En la expansión PN tratamos de calcular cantidades que dependen del tiempo retardado $F(t - r/c)$. Observamos que para $F(t - r/c)$ es lo mismo derivar respecto de t que de $-r/c$. Expandimos esta cantidad para pequeño retardo en serie de potencias alrededor de t y con $r/c \ll t$

$$F(t - r/c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n F(t)}{dt^n}\left(-\frac{r}{c}\right)^n = F(t) - \frac{r}{c}\dot{F}(t) + \frac{r^2}{2c^2}\ddot{F}(t) + ... \tag{4.13}$$

podemos suponer que como en la sección anterior, la dependencia temporal se encuentra en un factor de la forma $e^{-i\omega t}$, entonces, cada derivada temporal añade un factor ω. Como $1/\lambda = \omega/c$, vemos que se trata de una serie de potencias en r/λ. esto confirma lo que mencionábamos anteriormente, la expansión PN es solo válida para la zona cercana, ya que $r \ll \lambda$ y falla completamente en la zona lejana porque $r \gg \lambda$. De este modo, vemos que dado que la expansión PN es solo válida para la zona cercana, es necesario otro enfoque que sirva para calcular el campo en la zona lejana. Trataremos este problema más adelante.

4.2. Límite Newtoniano y Primer orden PN

La ecuación del movimiento de una partícula con velocidad v sometida a un campo gravitatorio se obtiene a partir de la ecuación de las geodésicas (1.2). Suponemos un campo gravitatorio débil, podemos escribir la métrica como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Suponemos también que la partícula es no relativista $v/c \ll 1$. En primera aproximación, el tiempo propio τ y el tiempo coordenado t son iguales.

Considerando (4.5), el término de orden más bajo en ϵ en la ecuación de las geodésicas (1.2) se obtiene considerando únicamente los índices $\mu = \nu = 0$ y queda

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -c^2\Gamma^i_{00} = c^2\left(\frac{1}{2}\partial^i h_{00} - \partial_0 {h_0}^i\right) \tag{4.14}$$

recordamos que la derivada temporal es de orden mayor que la derivada espacial (4.5). Así que solo sobrevive el primer término

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{c^2}{2}\partial^i h_{00} \tag{4.15}$$

Introducimos el potencial de Burke-Thorne $\phi \equiv -h_{00}/2$ y definimos también el potencial gravitatorio con signo invertido $U \equiv -E_G = c^2h_{00}/2$. Vemos que recuperamos las ecuaciones del movimiento Newtonianas $\mathbf{a} = \nabla U$. A partir del teorema del virial (3.1) se obtiene que $U = O(v^2)$, y esto implica que h_{00} es de orden ϵ^2. Si comparamos con la ecuación (4.6) vemos que ${}^{(2)}g_{00} = 2U/c^2$. Esta es la única corrección a la métrica plana incluida en el límite Newtoniano. Representa una corrección de orden ϵ^2 al primer término ${}^{(0)}g_{00} = -1$ proveniente de la métrica de Minkowski. En las ecuaciones del movimiento, el término en ${}^{(2)}g_{00}$ será del mismo orden PN que el término ${}^{(0)}g_{ij} = \delta_{ij}$. Esto se debe a que al aproximar la ecuación (4.14), el término en Γ^i_{jk} es dos órdenes mayor en ϵ que el término en Γ^i_{00}.

De este modo, tenemos que en la aproximación Newtoniana, la métrica se escribe como $g_{00} = -1 + {}^{(2)}g_{00}$, $g_{0i} = 0$ y $g_{ij} = \delta_{ij}$. Los términos de orden 1PN vendrán dados por los siguientes términos en la expansión (4.6), (4.7) y (4.8), siendo estos ${}^{(4)}g_{00}, {}^{(3)}g_{0i}$ y ${}^{(2)}g_{ij}$. Los términos de orden n PN serán ${}^{(2n+2)}g_{00}, {}^{(2n+1)}g_{0i}$ y ${}^{(2n)}g_{ij}$. Vamos a calcular los términos de la métrica para orden 1PN. Un primer paso para simplificar las ecuaciones es imponer una condición gauge. Es este caso, elegimos las condiciones harmónicas como condición gauge

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{4.16}$$

El siguiente paso es sustituir las expansiones de la métrica y del tensor energía-momento en las ecuaciones de Einstein [4]. Usamos la ecuación (4.5) para conocer el orden en ϵ de los diferentes términos y la condición gauge (4.16) para simplificar las ecuaciones. Las componentes de la métrica que consideramos en la expansión en orden 1PN son

$$g_{00} = -1 + {}^{(2)}g_{00} + {}^{(4)}g_{00} \tag{4.17}$$

$$g_{0i} = {}^{(3)}g_{0i} \tag{4.18}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + {}^{(2)}g_{ij} \tag{4.19}$$

La inversa de la métrica esperamos que tenga la siguiente forma

$$g^{00} = -1 + {}^{(2)}g^{00} + {}^{(4)}g^{00} \tag{4.20}$$

$$g^{0i} = {}^{(3)}g^{0i} \tag{4.21}$$

$$g^{ij} = \delta^{ij} + {}^{(2)}g^{ij} \tag{4.22}$$

Podemos expresar los términos con los índices arriba en función de los términos con los índices abajo usando la identidad

$$\delta^\nu{}_\rho = g^{\nu\mu}g_{\rho\mu} \tag{4.23}$$

separamos la anterior ecuación en 3 ecuaciones evaluando los índices

$$g^{i\mu}g_{0\mu} = g^{i0}g_{00} + g^{ij}g_{j0} = 0 \tag{4.24}$$

$$g^{0\mu}g_{0\mu} = g^{00}g_{00} + g^{0i}g_{0i} = 1 \tag{4.25}$$

$$g^{i\mu}g_{j\mu} = g^{i0}g_{j0} + g^{ik}g_{jk} = \delta_{ij} \tag{4.26}$$

Igualando en (4.24) los términos de orden 3 en ϵ queda ${}^{(3)}g^{0i} = \delta^{ij\,(3)}g_{0j} = {}^{(3)}g_{0i}$. Igualando en (4.25) los términos de orden 2 queda ${}^{(2)}g^{00} = -{}^{(2)}g_{00}$, igualando en los términos de orden 4 y sustituyendo el término de orden 2 que acabamos de obtener queda ${}^{(4)}g^{00} = -{}^{(4)}g_{00} + {}^{(2)}g^{00}\,{}^{(2)}g_{00} = -{}^{(4)}g_{00} - {}^{(2)}g_{00}\,{}^{(2)}g_{00}$. Y por último, igualando los términos de orden 2 en (4.26) queda ${}^{(2)}g^{ij} = -{}^{(2)}g_{ij}$. La expresión de la conexión afín en términos de la métrica viene definida en (4). Para calcular las componentes de la conexión afín, primero evaluamos el orden de las potencias que aparecen en la expansión. Para el caso de ${\Gamma^i}_{00}$

$$ {\Gamma^i}_{00} = \frac{1}{2} g^{i\rho}\left(2\partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}\right) = \frac{1}{2} g^{i0}\partial_0 g_{00} + \frac{1}{2} g^{ij}\left(2\partial_0 g_{j0} - \partial_j g_{00}\right) \tag{4.27} $$

teniendo en cuenta (4.5), vemos que las potencias deben de ser todas pares. Haciendo lo mismo con el resto de las componentes tenemos que

$$ {\Gamma^\mu}_{v\lambda} = {}^{(2)}{\Gamma^\mu}_{v\lambda} + {}^{(4)}{\Gamma^\mu}_{v\lambda} + \ldots \quad \left(\text{pares para } {\Gamma^i}_{00}, {\Gamma^i}_{jk}, {\Gamma^0}_{0i}\right) \tag{4.28} $$

$$ {\Gamma^\mu}_{v\lambda} = {}^{(3)}{\Gamma^\mu}_{v\lambda} + {}^{(5)}{\Gamma^\mu}_{v\lambda} + \ldots \quad \left(\text{impares para } {\Gamma^i}_{0j}, {\Gamma^0}_{00}, {\Gamma^0}_{ij}\right) \tag{4.29} $$

Desarrollando la expresión para ${\Gamma^i}_{00}$ eliminando términos de orden mayor que 4.

$$ {\Gamma^i}_{00} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - {}^{(2)}g_{ij}\right)\left[2\partial_0 {}^{(3)}g_{j0} - \partial_j\left({}^{(2)}g_{00} + {}^{(4)}g_{00}\right)\right] \tag{4.30} $$

Podemos agrupar los términos del mismo orden y queda

$$ {}^{(2)}{\Gamma^i}_{00} = -\frac{1}{2}\partial_i {}^{(2)}g_{00} \tag{4.31} $$

$$ {}^{(4)}{\Gamma^i}_{00} = \partial_0 {}^{(3)}g_{0i} - \frac{1}{2}{}^{(2)}g_{ij}\partial_j {}^{(2)}g_{00} - \frac{1}{2}\partial_i {}^{(4)}g_{00} \tag{4.32} $$

Hemos cortado la expansión en orden ϵ^4 porque para ordenes mayores en ϵ también hay contribuciones de términos de la métrica de orden PN mayor que aquí no aparecen ya que cortamos la expansión en orden 1 PN. El procedimiento es el mismo para el resto de las componentes de la conexión afín. El siguiente paso es calcular las componentes del tensor de Ricci en serie de potencias. El tensor de Ricci es por construcción una contracción del tensor de Riemann (5). El procedimiento a seguir es exactamente el mismo que el que hemos seguido para calcular la expansión en ϵ de la conexión afín, por lo tanto, no vamos a explicitar los cálculos. Una vez tenemos la expansión del tensor de Ricci, esta se puede simplificar usando las condiciones harmónicas (4.16), que se pueden escribir también en la forma $g^{\mu v}{\Gamma^\lambda}_{\mu v} = 0$. Vamos a usar las ecuaciones de Einstein en la forma (2.27). Con los cálculos realizados anteriormente, tenemos la expansión de la parte izquierda de la ecuación (2.27), queda realizar el mismo tipo de procedimiento en la parte derecha. Para ello usamos la expansión del tensor energía-momento en (4.9), (4.10) y (4.11) y como hemos hecho antes, agrupamos términos de mismo orden ϵ^n cortando la expansión en ϵ^4. Así se obtiene la expansión hasta orden 1PN de las ecuaciones de Einstein. Para el término ${}^{(2)}g_{00}$ se obtiene la ecuación Newtoniana

$$ \nabla^2\left[{}^{(2)}g_{00}\right] = -\frac{8\pi G}{c^4}{}^{(0)}T^{00} \tag{4.33} $$

y para las correcciones de la métrica de orden 1PN obtenemos

$$ \nabla^2\left[{}^{(2)}g_{ij}\right] = -\frac{8\pi G}{c^4}\delta_{ij}{}^{(0)}T^{00} \tag{4.34} $$

$$ \nabla^2\left[{}^{(3)}g_{0i}\right] = \frac{16\pi G}{c^4}{}^{(1)}T^{0i} \tag{4.35} $$

$$ \begin{aligned} \nabla^2\left[{}^{(4)}g_{00}\right] = {} & \partial_0^2\left[{}^{(2)}g_{00}\right] + {}^{(2)}g_{ij}\partial_i\partial_j\left[{}^{(2)}g_{00}\right] - \partial_i\left[{}^{(2)}g_{00}\right]\partial_i\left[{}^{(2)}g_{00}\right] \\ & - \frac{8\pi G}{c^4}\left({}^{(2)}T^{00} + {}^{(2)}T^{ii} - 2{}^{(2)}g_{00}{}^{(0)}T^{00}\right) \end{aligned} \tag{4.36} $$

Con condiciones de contorno que hagan que la métrica se anule en el infinito espacial, la solución a las ecuaciones (4.33), (4.34) y (4.35) se da en forma de potenciales instantaneos

$$^{(2)}g_{00} = -2\phi, \quad ^{(2)}g_{ij} = -2\phi\delta_{ij}, \quad ^{(3)}g_{0i} = \zeta_i \tag{4.37}$$

donde

$$\phi(t, \mathbf{x}) = -\frac{G}{c^4}\int d^3x' \frac{^{(0)}T^{00}\,(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{4.38}$$

$$\zeta_i(t, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{c^4}\int d^3x' \frac{^{(1)}T^{0i}\,(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{4.39}$$

Para resolver la ecuación (4.36) sustituimos las correcciones de la métrica del lado derecho por los potenciales definidos en (4.37), también aplicamos la identidad

$$\partial_i\phi\partial_i\phi = \frac{1}{2}\nabla^2\left(\phi^2\right) - \phi\nabla^2\phi \tag{4.40}$$

e introducimos un nuevo potencial ψ definido por

$$^{(4)}g_{00} = -2\left(\phi^2 + \psi\right) \tag{4.41}$$

Entonces, la ecuación (4.36) simplificada queda

$$\nabla^2\psi = \partial_0^2\phi + \frac{4\pi G}{c^4}\left[^{(2)}T^{00} + {}^{(2)}T^{ii}\right] \tag{4.42}$$

La solución viene dada de la misma forma que en las otras correcciones de la métrica, en forma de potencial estático con condiciones de contorno que hagan que la métrica se anule en el infinito espacial

$$\psi(t, \mathbf{x}) = -\int \frac{d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\left(\frac{1}{4\pi}\partial_0^2\phi + \frac{G}{c^4}\left[^{(2)}T^{00}\left(t, \mathbf{x}'\right) + {}^{(2)}T^{ii}\left(t, \mathbf{x}'\right)\right]\right) \tag{4.43}$$

La imposición de las condiciones harmónicas (4.16) hace que exista una relación entre los potenciales ψ y ζ^i

$$4\partial_0\phi + \partial_i\zeta^i = 0 \tag{4.44}$$

Como hemos comentado antes, las expresiones de las correcciones de la métrica se dan como potenciales instantáneos ϕ, ζ_i y ψ. Esto implica que cuando los potenciales instantáneos están evaluados en un instante t dependen de un valor del tensor energía-momento evaluado también en t y no en t_{ret}. Sin embargo, es posible dar las soluciones para la expansión en orden 1PN en función de potenciales retardados, lo cual es útil para calcular ordenes PN más altos.

Lejos de la fuente $r \gg d$, podemos expandir el término $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ que aparece en los potenciales usando

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}{r^3} + ... \tag{4.45}$$

Esta expansión tiene validez en la parte de la zona cercana externa (4.1) alejada de la fuente donde se cumple $d \ll r \ll \lambda$.

Para evaluar las trayectorias de los objetos compactos en la fuente calculamos sus ecuaciones del movimiento a partir de la acción S. Una vez que tenemos una expresión para la métrica válida en la zona cercana, es posible evaluar las trayectorias geodésicas de los objetos moviéndose en la zona cercana aplicando cálculo variacional. La acción para una partícula de masa m en un espacio-tiempo curvo se escribe como

$$S = -mc\int dt\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}} = -mc^2\int dt\sqrt{-g_{00} - 2g_{0i}\frac{v^i}{c} - g_{ij}\frac{v^iv^j}{c^2}} \tag{4.46}$$

para las ecuaciones de un sistema binario tenemos 2 objetos con masas m_1 y m_2 que en ordenes PN bajos se pueden considerar puntuales. Para ordenes más altos, la aproximación de masas puntuales deja de ser válida y es necesario usar algún procedimiento de regularización sobre la delta de Dirac, esto es, usar algún método para evitar las singularidades que aparecen en ciertos observables haciéndolos finitos. Para conocer la expresión de la acción necesitamos calcular los elementos de la métrica en el integrando. Los calculamos a partir de la expresión del tensor energía-momento para masas puntuales. Para N masas puntuales con masas m_a, coordenadas x_a^μ y tiempo propio τ_a, definido por $c^2 d\tau_a^2 = -g_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_a^\nu$ la expresión del tensor energía-momento es

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_a m_a \frac{d\tau_a}{dt} \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dx_a^\nu}{d\tau_a} \delta^{(3)} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t)\right) \tag{4.47}$$

El siguiente paso es expandir los elementos del tensor energía momento hasta orden 2 en ϵ. A partir de las expresiones de la expansión de la métrica en términos de las componentes de la expansión del tensor energía-momento sustituimos en la acción y obtenemos el Lagrangiano. Aplicando calculo variacional se obtienen las ecuaciones del movimiento (Euler Lagrange) de orden 2 en ϵ, es decir, para orden 1PN.

4.3. Dificultades de la expansión PN

El procedimiento que hemos seguido anteriormente para trabajar en la expansión PN (que se usó hasta principios de la década de los años ochenta) tiene varios problemas importantes. El primero tiene que ver con divergencias al integrar en todo el espacio. A continuación, se va a exponer este problema de forma cualitativa. Nuestro objetivo es resolver las ecuaciones de Einstein de forma iterativa, que se pueden escribir esquemáticamente así

$$\Box h_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}[h] \tag{4.48}$$

donde $S_{\mu\nu}$ es el término asociado a la fuente que depende de la contribución del tensor energía-momento de materia y de forma no lineal de la perturbación $h_{\mu\nu}$. Podemos expandir $h_{\mu\nu}$ en bajas velocidades o en campo débil como hicimos en (4.2)

$$h_{\mu\nu} = {}^{(0)}h_{\mu\nu} + {}^{(1)}h_{\mu\nu} + {}^{(2)}h_{\mu\nu} + ... \tag{4.49}$$

Fijamos ${}^{(0)}h_{\mu\nu} = 0$ porque en orden 0 no consideramos perturbaciones. Estamos resolviendo las ecuaciones de Einstein de forma iterativa, por lo tanto, para la solución de primer orden ${}^{(1)}h_{\mu\nu}$, en el término que da cuenta de las fuentes del campo, solo aparecen fuentes materiales porque ${}^{(0)}h_{\mu\nu} = 0$. El d'Alambertiano en primer orden se convierte en el Laplaciano como se vio en (4.12). La ecuación para primer orden queda

$$\nabla^2 \left[{}^{(1)}h_{\mu\nu}\right] = (\text{fuentes materiales}) \tag{4.50}$$

Para resolver la ecuación se usa la integral de Poisson, que para una función general $f(\mathbf{x})$ se escribe como

$$\left[\Delta^{-1} f\right](\mathbf{x}) \equiv -\frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f\left(\mathbf{x}'\right) \tag{4.51}$$

donde integramos sobre todo el espacio y escribimos el Laplaciano como $\Delta \equiv \nabla^2$ para evitar confusiones en los superíndices. En la siguiente iteración, se desprecia el término $\partial_0^2 \left[{}^{(2)}h_{\mu\nu}\right]$ por ser de orden mayor en ϵ que el resto de términos y los términos que dependen de ${}^{(1)}h_{\mu\nu}$ pasan al lado derecho de la ecuación a formar parte de $S[h]$. Y queda al lado izquierdo, el Laplaciano de la componente de orden mayor ${}^{(2)}h_{\mu\nu}$

$$\nabla^2 \left[{}^{(2)}h_{\mu\nu}\right] = (\text{fuentes materiales}) + (\text{términos que dependen de } {}^{(1)}h_{\mu\nu}) \tag{4.52}$$

Si intentamos resolver usando el mismo procedimiento que en orden 1, a partir de cierto orden, la contribución de $h_{\mu\nu}$ hace que encontremos divergencias en la integral de Poisson. Esto se debe a que la perturbación $h_{\mu\nu}$ se extiende por todo el espacio mientras que la fuente material es compacta espacialmente, es decir, que ocupa un volumen finito. Además, cuanto mayor es el orden PN, mayor es el orden también de los multipolos que contribuyen a la integral de Poisson. Un multipolo de orden l contendrá un factor $\left(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'\right)^l$ que viene de la expansión (4.45). Este problema se ha ignorado porque las integrales no divergen hasta que se llega a orden 3PN. El problema de fondo es que la integral de

Poisson (4.51) no es siempre la solución correcta a la ecuación de Poisson. La solución a este problema está en cambiar las condiciones de contorno de la ecuación de Poisson (procedimiento de continuidad analítica). La solución se reduce a la integral de Poisson si converge, si no la integral que debemos utilizar es diferente a la de Poisson y da siempre un resultado finito.

El segundo problema es conceptual y lo hemos presentado previamente en la ecuación (4.51) e implica que no es posible imponer condiciones de contorno en el infinito espacial. Estamos reconstruyendo un campo retardado, que depende de t_{ret}. Digamos que es de la forma $\frac{1}{r}F_{\mu\nu}(t - r/c)$, si expandimos para pequeño retardo $r/c \ll t$

$$\frac{1}{r}F_{\mu\nu}(t - r/c) = \frac{1}{r}F_{\mu\nu}(t) - \frac{1}{c}\dot{F}_{\mu\nu}(t) + \frac{r}{2c^2}\ddot{F}_{\mu\nu}(t) - \frac{r^2}{6c^3}\dddot{F}_{\mu\nu}(t) + ... \tag{4.53}$$

en la expansión, cada término adicional añade un orden más en r^n. Por lo tanto, si $r \to \infty$, la expansión diverge, cuando debería ser asintóticamente plana en el infinito espacial. Esto muestra como dijimos anteriormente que la expansión PN no es válida para regiones espaciales grandes. La expansión no será uniformemente valida en r y por lo tanto no puede ser utilizada en $r \to \infty$ lo que hace que las condiciones de contorno impuestas en infinito (3.7) no sirvan.

Entonces, tenemos que la expansión PN funciona dentro de la región cercana $r < R$ siendo R el límite de la región cercana. Para fuentes no relativistas $\lambda \gg d$ por lo tanto el límite de la zona cercana se extiende más allá de las dimensiones de la fuente $R \gg d$. El formalismo PN deja de ser válido fuera de la zona cercana $r > R$. Fuera de la fuente $r > d$ el tensor energía-momento asociado a la fuente material se anula y la única fuente de campo gravitatorio es el campo gravitatorio en sí mismo debido a la no linealidad de la gravedad. Por lo tanto, si asumimos que el campo gravitatorio es débil, a partir de $r > d$, la métrica se aproximara a la métrica Minkowskiana. Esto nos da pie a introducir en $r > d$ la aproximación Post-Minkowskiana (PM) fuera de la fuente material. Este formalismo funciona resolviendo las ecuaciones de Einstein en el vacio en su zona de validez usando la expansión PM que considera la desviación respecto del espacio-tiempo plano.

La región de validez de la aproximación PN es la zona cercana $0 < r < R$. La región de validez de la aproximación PM es la zona que queda fuera de la fuente $d < r < \infty$. Por lo tanto, ambas aproximaciones son válidas en la región que va desde que el tensor energía momento asociado a la fuente material se anula hasta el límite de la región cercana $d < r < R$. El enfoque de Blanchet-Damour consistiría entonces en usar las dos aproximaciones en sus respectivas zonas de validez y hacer que coincidan en la región intermedia donde sus regiones de validez se superponen.

Por último, vamos a mencionar algunos detalles sobre la reacción de la emisión de OGs sobre la dinámica de la fuente. En la sección 3.5 calculamos los efectos de esta reacción sobre la trayectoria de la fuente en aproximación cuadrupolar. Estos efectos de reacción también aparecen obviamente cuando usamos el formalismo PN. Al desarrollar el formalismo PN anteriormente hemos supuesto que podemos despreciar la contribución de la reacción sobre la fuente. Esto es válido para bajo orden PN, pero para ordenes más altos, si que contribuye. Al incluir este mecanismo de reacción, la estructura de la expansión cambia porque se ha usado un argumento de invarianza bajo inversión temporal y este argumento deja de ser válido por las condiciones de contorno impuestas de que no llegue radiación desde el infinito (3.7). La inversión temporal intercambia la radiación emitida por radiación recibida. Por lo tanto, el argumento de invarianza bajo inversión temporal que hemos utilizado para evaluar la paridad de $g_{\mu\nu}$ pierde su validez. Esto implica que en la expansión de la métrica que hemos construido en (4.6), (4.7) y (4.8), a partir de cierto orden, el mecanismo de reacción va a contribuir introduciendo términos con cualquier paridad.

Podemos comprobar a partir de que orden aparecen los efectos de reacción. Tomamos la expresión de la potencia irradiada por emisión de OGs calculada usando la aproximación cuadrupolar en las secciones 3.4 y 3.5

$$P \sim \frac{Gm^2}{r^2}\frac{v^6}{c^5} \tag{4.54}$$

Aplicando el teorema del virial (3.1) tenemos que la energía total en la fuente es $E_S = -E_K = -mv^2/2$. Por balance energético

$$-\frac{dE_S}{dt} = P \Rightarrow mv\frac{dv}{dt} \sim \frac{Gm^2}{r^2}\frac{v^6}{c^5} \tag{4.55}$$

despejando la acceleración

$$\frac{dv}{dt} \sim \frac{Gm}{r^2}\left(\frac{v}{c}\right)^5 \tag{4.56}$$

Por lo tanto, esperamos que los efectos debidos a la reacción de la emisión de OGs sobre la fuente aparezcan a partir de $O(\epsilon^5)$. Entonces, la ecuación del movimiento de un sistema binario tendrá la forma genérica

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2}\left(\hat{x}^i\left[1 + O\left(\epsilon^2\right) + O\left(\epsilon^4\right) + O\left(\epsilon^5\right) + O\left(\epsilon^6\right)...\right]\right. \\ \left.+\hat{v}^i\left[O\left(\epsilon^2\right) + O\left(\epsilon^4\right) + O\left(\epsilon^5\right) + O\left(\epsilon^6\right) + ...\right]\right)\end{aligned} \tag{4.57}$$

con potencias pares en ϵ hasta orden $O(\epsilon^5)$ y a partir de este orden tenemos potencias de todas las paridades. Tradicionalmente se usaban potencias de $(v/c)^2$ para llamar al orden PN en vez de v/c. Por lo tanto los términos $O(\epsilon^5)$ son correcciones de orden 2.5 PN, los términos $O(\epsilon^6)$ son correcciones de orden 3 PN. Y en general, los términos $O(\epsilon^{2n})$ son correcciones de orden n PN.

Capítulo 5

Fases de la colisión

En este trabajo nos hemos enfocado en describir la fase temprana de la fusión de un sistema binario. Cuando el campo es débil y las velocidades son bajas, el formalismo PN es adecuado para describir el sistema. Pero, cuando la distancia orbital se acorta y tenemos campos gravitatorios intensos, la herramienta principal con la que contamos es la Relatividad Numérica (RN) [1]. En este caso, obtener soluciones semi-analíticas de las ecuaciones de Einstein es más complicado debido a la no linealidad. De todos modos, la RN permite obtener buenos modelos de los frentes de onda que coinciden con las predicciones de la RG. Para un sistema binario de agujeros negros, la RN debe cubrir 8 parámetros: el ratio de masa $q = m_1/m_2$, el momento angular de spin S_i para los dos agujeros negros y la excentricidad e. Las simulaciones son muy costosas computacionalmente, pero, resultan cruciales para verificar los modelos usados en la detección de OGs. Los modelos computacionales se usan en todas las fases de la fusión de sistemas binarios para modelar tanto el estado de la fuente como el frente de ondas emitido.

Tras la fusión, el objeto resultante entra en una fase de estabilización [2]. Al modelar esta fase en teoría linealizada, cuando se introducen las condiciones de contorno, la solución viene dada por unos modos normales de vibración (ringdown phase). Estos modos vibran en un conjunto discreto de frecuencias llamadas frecuencias normales. Las frecuencias son puramente reales porque se trata de un problema conservativo. Si pasamos de la teoría linealizada al espacio-tiempo asociado a un agujero negro, al imponer las condiciones de contorno, las frecuencias obtenidas son números complejos. A estos modos de vibración se les denomina modos cuasi-normales de vibración. La componente imaginaria representa el decaimiento de las vibraciones. Bajo las condiciones de contorno propias del espacio-tiempo en presencia de un agujero negro, el problema no tiene solución analítica y hay que recurrir a la RN.

Hemos descrito la señal emitida en la primera fase de órbita en espiral en la sección 3.5. La amplitud y la frecuencia de la señal aumentan conforme el radio orbital decrece (chirping phase) y nos acercamos a la fusión. Durante la fusión, la amplitud de la señal alcanza su máximo. Luego en la fase de estabilización, la señal refleja estos modos cuasi-normales de vibración y su amplitud decae rápidamente.

Conclusiones

En este trabajo hemos utilizado una serie de importantes resultados usados en RG como son la separación de escalas, la teoría linealizada o el formalismo PN. Se ha visto como son útiles en particular para describir el sistema que estamos estudiando: la emisión de OGs en la fusión de un sistema binario en la fase de órbita espiral. La separación de escalas es un mecanismo que nos permite separar la perturbación del fondo. En el caso más general no tenemos forma de distinguirlos. Pero, si existe una gran diferencia de escala entre ellos sí que es posible realizar la separación promediando los modos de alta frecuencia temporal o pequeña longitud de onda. En el caso del sistema binario, la separación de escalas funciona bien porque la OG tiene una alta frecuencia temporal y una pequeña longitud de onda con respecto a las escalas típicas de variación del fondo. Esto se puede aplicar tanto cuando el fondo es la fuente como en un detector de OGs.

La teoría linealizada no es una buena aproximación para sistemas donde la gravedad es dominante. Por lo tanto, no es una buena aproximación para estudiar la fusión de sistemas binarios. Aunque, sirve como primera aproximación para afrontar el problema. El desarrollo multipolar pierde validez conforme vamos añadiendo multipolos ya que la velocidad típica de la fuente y los componentes de la métrica no son independientes. Por lo tanto, al cortar en el primer término (cuadrupolo de masa), nos quedamos con el término válido para describir el caso de velocidades muy bajas y campo gravitatorio muy débil. El problema es que, al añadir más términos en el desarrollo multipolar y aumentar la velocidad típica, el fondo gana curvatura y la aproximación deja de ser válida. De todos modos, para los casos concretos en los que se ha utilizado la aproximación ha servido para ilustrar ciertas características de la emisión de OGs. En el caso de la masa que oscila sobre un eje, hemos visto que no se emiten OGs en la misma dirección en la que se mueve la fuente. En el caso del sistema binario de masas puntuales realizando órbitas circulares, ha servido para ilustrar la reacción de las OGs sobre la dinámica de la fuente. Y nos ha permitido modelar el frente de ondas para una trayectoria en espiral.

El formalismo PN si que es una buena aproximación para sistemas donde la gravedad es dominante. Por lo tanto, es válido para describir nuestro sistema. De hecho, es el formalismo adecuado para calcular los frentes de onda emitidos en la primera fase de la fusión de un sistema binario. En este sistema en particular, conforme los objetos reducen su radio orbital y sus velocidades aumentan y el campo gravitatorio se hace más fuerte, la aproximación PN pierde validez y es necesario recurrir a métodos de campo fuerte. Los cálculos realizados hasta orden 1PN describen una aproximación en la que las masas de los objetos se pueden considerar puntuales y no aparecen efectos de reacción de las OGs sobre la fuente. De hecho, como hemos calculado, estos efectos no aparecen hasta orden 2.5PN. También hemos visto que la reacción de las OGs sobre la trayectoria de la fuente tiene como consecuencia que no se pueda utilizar el argumento de invarianza ante inversión temporal para evaluar la paridad de las potencias en la expansión de la métrica. Entonces, el mecanismo de reacción trae como consecuencia potencias de cualquier paridad en las ecuaciones del movimiento a partir de orden 2.5PN.

Es interesante observar también los problemas asociados al procedimiento que hemos utilizado. El problema de convergencia al resolver las ecuaciones de Einstein de forma iterativa se puede resolver cambiando las condiciones de contorno. De esta forma la solución a la ecuación de Poisson solo es la integral de Poisson cuando esta es convergente. En caso contrario, la solución debe de ser diferente y siempre podemos encontrar una solución finita. El otro problema, es la falta de validez de la expansión PN en volúmenes espaciales grandes que impide imponer condiciones de contorno en el infinito espacial.

La solución a esto es utilizar la expansión PN en la zona cercana donde es válida y usar la expansión PM (que considera la desviación respecto del espacio-tiempo plano) fuera de la fuente haciendo que coincidan en la región donde se superpongan. Esto permite introducir las condiciones de contorno en la región donde la expansión PM es válida.

Bibliografía

[1] Leor Barack et al. «Black holes, gravitational waves and fundamental physics: a roadmap». En: *Classical and quantum gravity* 36.14 (2019), pág. 143001.

[2] Vitor Cardoso y Paolo Pani. «Testing the nature of dark compact objects: a status report». En: *Living Reviews in Relativity* 22.1 (2019), págs. 1-104.

[3] Michele Maggiore. *Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments*. OUP Oxford, 2007.

[4] Steven Weinberg. «Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity». En: (1972).