

Resoluciones Celulares

Umberto Martínez Peñas

Trabajo de Fin de Máster
Máster en Investigación en Matemáticas
Tutor: Philippe T. Gimenez
Universidad de Valladolid, 24 de junio de 2014

Índice

Introducción	5
1. Ideales monomiales y multigraduaciones	7
1.1. Multigraduaciones	8
1.2. Diagramas de Betti	14
1.3. Invariantes del ideal inicial	18
1.4. Ideales Borel-fixed	24
1.5. Otras condiciones de tipo Borel	30
2. Complejos simpliciales y celulares	33
2.1. Complejos simpliciales	34
2.2. Complejos celulares	41
2.3. La resolución de Taylor	48
2.4. La resolución de Eliahou-Kervaire	52
3. Mapping Cones	57
3.1. Planteamiento general	58
3.2. La resolución de Taylor vía mapping cones	64
3.3. La resolución de Eliahou-Kervaire generalizada	65
3.4. La resolución de Eliahou-Kervaire es celular	73

Introducción

Esta memoria se enmarca en la realización de un trabajo de fin de máster y tiene como objetivo estudiar ciertos aspectos de las resoluciones de ideales monomiales, centrándonos en una técnica que ha surgido recientemente, y que es la de estudiar dichas resoluciones desde un punto de vista topológico combinatorio, que da lugar a las resoluciones celulares que aparecen en el título.

Dentro de la teoría de las sicingias graduadas, juegan un papel muy importante las resoluciones libres minimales graduadas de ideales monomiales en el anillo de polinomios. La importancia de su estudio fue remarcada por Kaplansky a principios de los años sesenta, y ha recibido un fuerte impulso tras ciertas obras que han conectado dichas resoluciones con aspectos combinatorios, como son los libros de Stanley y de Bruns y Herzog ([BH]), aparte de los muchos artículos recientes que han surgido en las últimas dos décadas, y de los cuales trataremos algunos.

Este trabajo constituye una continuación natural del trabajo de fin de grado [Mar]. Tener dicho punto de partida nos permitirá llegar en breve a resultados de actualidad, y que desarrollaremos en los tres capítulos. En el **primer capítulo**, tras introducir algunos conceptos que no aparecían en [Mar], veremos la relación que hay entre los invariantes de un ideal homogéneo y su ideal inicial, y que dan otra motivación para estudiar los ideales monomiales. Finalmente, daremos dos ejemplos de familias de ideales monomiales que son bien conocidos en la actualidad, pero que siguen en el punto de mira de la investigación en este campo (como demuestran los artículos [HT], [Mer], [DM] y [Goo]), y que son los ideales **estables** y **estables libres de cuadrados**, y de los que los ideales **Borel-fixed** son un caso particular en característica cero. En el **segundo capítulo**, introduciremos los conceptos combinatorios clave en relación a las **resoluciones celulares**. In-

troduciremos los complejos simpliciales y los celulares, y veremos otras de sus aplicaciones, como la correspondencia de **Stanley-Reisner**. Finalmente, en el **tercer capítulo**, presentamos una técnica que ha sido usada en topología algebraica prácticamente desde sus comienzos, que es la de **mapping cones**, y que ha tenido un impulso en la teoría de resoluciones monomiales en la actualidad gracias a varios artículos recientes. En particular, presentamos dos artículos, [HT] y [DM], en los que se da una resolución que generaliza la de Eliahou-Kervaire, y que resulta ser celular.

Capítulo 1

Ideales monomiales y multigraduaciones

Los **ideales monomiales** del anillo de polinomios $S = k[x_1, \dots, x_n]$ juegan un papel muy importante en Álgebra Conmutativa. Esto es debido a varios hechos. Por un lado, a la estrecha relación que hay entre un ideal I y su ideal inicial $\text{in}(I)$, pues conocida la resolución libre minimal graduada o algunos invariantes de uno de ellos, se pueden obtener ciertas propiedades para el otro (por ejemplo, cotas para los invariantes). Y por otro lado, recientemente se ha establecido una estrecha relación entre los ideales monomiales y la combinatoria. Esta relación comenzó con el estudio de la correspondencia que hay entre ideales monomiales libres de cuadrados y complejos simpliciales, debido a Richard Stanley y Gerald Reisner en los años setenta. Sin embargo, a finales de los años noventa se dio una vuelta de tuerca más, y se inició el estudio de ideales monomiales a través de complejos celulares, como veremos en el segundo capítulo.

Por otro lado, muchos conceptos, como el de **graduación**, se especializan para el caso de ideales monomiales. En este capítulo estudiaremos varios resultados relativos a ideales monomiales y veremos algunas relaciones entre un ideal y su ideal inicial. Finalmente, veremos cómo para cierta familia de ideales monomiales, los llamados **ideales Borel-fixed** (y más generalmente, los **ideales estables**), se conoce explícitamente su resolución libre minimal graduada y, por tanto, todos sus invariantes. No daremos aún la prueba de que el complejo que introducimos es de hecho una resolución (lo veremos en

el capítulo tercero), pero veremos cuáles son sus consecuencias inmediatas.

El punto de partida de este primer capítulo será [Mar], donde aparecen la mayoría de requisitos previos que necesitaremos para esta memoria. Por tanto, citaremos si es necesario, pero sin repetirlos, algunos de los resultados que ahí aparecen y que necesitemos. Por otro lado, varias referencias que incluyen los requisitos y muchos de los resultados de este capítulo son [Eis], [Pee] y [MS].

Notación. La notación que usaremos a lo largo de toda la memoria será la siguiente:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

k será un cuerpo,

$\text{char}(k)$ su característica, en principio arbitraria,

S el anillo de polinomios $k[x_1, \dots, x_n]$ (el contexto nos dirá cual es n , el número de indeterminadas),

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ los elementos de \mathbb{N}^n ,

$$|\mathbf{a}| = a_1 + \dots + a_n,$$

$\underline{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ los monomios de S ,

$f = \sum \lambda_{\mathbf{a}} \underline{x}^{\mathbf{a}}$ será un polinomio genérico de S ,

\mathfrak{m} será el ideal maximal homogéneo de S , es decir, $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, y

$\text{rank}(M)$ será el rango de un R -módulo libre M , sobre el anillo R .

Además, normalmente los elementos de S^m se escribirán en negrita.

1.1. Multigraduaciones

Como se ve al comienzo de [Mar], una propiedad importante del anillo de polinomios es que admite una graduación natural, denominada **graduación estándar**. Dicha graduación es la que surge al trabajar con polinomios homogéneos, entre los cuales están los monomios. Sin embargo, para tratar ideales monomiales, es conveniente introducir una graduación más refinada. Pero antes, veamos la definición general de **graduación** sobre un anillo, que

no es más que una generalización de [Mar, definición 1.1] (ver también [Eis, Section 1.5]).

Definición 1.1. Sean R un anillo y N un monoide conmutativo (es decir, un semigrupo conmutativo con elemento neutro). Diremos que R es **graduado sobre** N si existen subgrupos $\{R_m\}_{m \in N}$ de R tales que

1. $R = \bigoplus_{m \in N} R_m$ (como grupos), y
2. $R_m R_{m'} \subset R_{m+m'}$, $\forall m, m' \in N$.

Análogamente, si M es un R -módulo, se dice que es **graduado sobre** N si existen subgrupos suyos $\{M_m\}_{m \in N}$ tales que

1. $M = \bigoplus_{m \in N} M_m$ (como grupos), y
2. $R_m M_{m'} \subset M_{m+m'}$, $\forall m, m' \in N$.

R_m y M_m se denominan **componentes homogéneas m -ésimas** de R y M , respectivamente, y a sus elementos, f , **elementos homogéneos** o **formas de grado m** de R y M , respectivamente.

Si $f \in R$, se escribe de forma única como $f = \sum_m f_m$ con $f_m \in R_m$ y $f_m = 0$ salvo para una cantidad finita. Decimos entonces que f_m es la **componente homogénea m -ésima** de f . Análogamente para módulos.

Si denotamos por 0 al elemento neutro de N , vemos que de $R_0 R_0 \subset R_0$ se deduce que R_0 en realidad es un subanillo de R , y de $R_0 R_m \subset R_m$ se deduce que cada R_m es un R_0 -módulo, y la suma directa es suma directa de R_0 -módulos. Análogamente para módulos.

Tomando $R = S$ y $N = \mathbb{N}$, vemos que S es graduado sobre \mathbb{N} utilizando la graduación estándar. Ahora consideremos $N = \mathbb{N}^n$. Entonces, obtenemos una **graduación de S sobre \mathbb{N}^n** dada por:

$$S_{\mathbf{a}} = \{a \underline{x}^{\mathbf{a}} / a \in k\} = \langle \underline{x}^{\mathbf{a}} \rangle_k,$$

o equivalentemente, dada por la asignación de **multigrados** $\text{mdeg}(x_i) = \mathbf{e}_i$, donde \mathbf{e}_i es el vector i -ésimo estándar de \mathbb{N}^n . Esta graduación de S se denomina **multigraduación** o **\mathbb{N}^n -graduación estándar**.

Observemos que los elementos homogéneos de S para esta graduación son precisamente los monomios, y $\text{mdeg}(\underline{x}^{\mathbf{a}}) = \mathbf{a}$. Dado un S -módulo multigraduado M y $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$, podemos definir igualmente la graduación **desplazada** o **trasladada** (**shifted**) con **desfase** (**shift**) \mathbf{a} , como $M(-\mathbf{a})$ tal que $M(-\mathbf{a})_{\mathbf{b}} = M_{\mathbf{b}-\mathbf{a}}$, donde se define $M_{\mathbf{c}} = 0$ si $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^n$ tiene alguna componente negativa. Es decir, los grados de $M(-\mathbf{a})$ son los mismos que los de M , pero comenzando en grado \mathbf{a} .

Aunque no sea costumbre, por comodidad utilizaremos a veces una notación monomial para denotar los multigrados. Es decir, en lugar de usar el monoide \mathbb{N}^n , pasamos a usar el monoide formado por los monomios de S , $\{\underline{x}^{\mathbf{a}}/\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n\}$, junto con la operación de multiplicación. Con dicha notación, escribiremos la graduación trasladada como $M(\underline{x}^{\mathbf{a}}) = M(-\mathbf{a})$. Por ejemplo, $S(\underline{x}^{\mathbf{a}}) \oplus S(\underline{x}^{\mathbf{b}}) = S(-\mathbf{a}) \oplus S(-\mathbf{b})$, y diríamos que \mathbf{e}_1 tiene multigrado $\text{mdeg}(\mathbf{e}_1) = \underline{x}^{\mathbf{a}}$.

Por otro lado, se suele decir que esta \mathbb{N}^n -graduación es una **graduación refinada** de la estándar, lo cual es debido a que

$$S_i = \bigoplus_{|\mathbf{a}|=i} S_{\mathbf{a}} \quad \text{y} \quad M_i = \bigoplus_{|\mathbf{a}|=i} M_{\mathbf{a}}.$$

Pasemos ahora a ver cómo muchos de los conceptos y resultados relativos a la graduación de S sobre \mathbb{N} se traducen a la multigraduación. Por brevedad, tratamos conjuntamente el caso de ideales y módulos sobre S , y no damos las demostraciones debido a que son las mismas que aparecen en [Mar, Capítulo 1] para la graduación sobre \mathbb{N} .

Proposición 1.2. *Sea N un submódulo de un S -módulo multigraduado $M = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} M_{\mathbf{a}}$. Son equivalentes:*

1. *Si $m \in N$, entonces toda componente homogénea de m está en N .*
2. *$N = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} N_{\mathbf{a}}$ (como grupos), donde $N_{\mathbf{a}} = N \cap M_{\mathbf{a}}$.*
3. *N está generado por sus elementos homogéneos.*

*A todo submódulo que cumpla estas propiedades se le denomina **submódulo multigraduado** de M , y es un módulo multigraduado con la graduación heredada de M , $N = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} N_{\mathbf{a}}$.*

Vemos, por tanto, que los ideales multigraduados de S son exactamente los **ideales monomiales**, y los **submódulos monomiales** de S^m (ver [Mar, definición 3.8]) son multigraduados, con la graduación dada por $\text{mdeg}(\underline{x}^{\mathbf{a}}\mathbf{e}_i) = \mathbf{a}$, pero hay submódulos multigraduados que no son monomiales. También observamos que todo **cociente** M/N , donde M y N son ambos multigraduados, vuelve a heredar de forma natural una multigraduación (ver [Mar, proposición 1.14]).

Se definen igualmente los **homomorfismos multigraduados**, los **complejos multigraduados** y las **resoluciones multigraduadas** (ver [Mar, 1.15, 1.25 y 1.32]). Observamos igualmente que núcleos, imágenes y conúcleos de homomorfismos multigraduados son de nuevo módulos multigraduados (ver [Mar, proposición 1.16]). Se obtiene de nuevo que todo módulo multigraduado admite una **resolución libre minimal multigraduada**, es decir, una resolución libre multigraduada que verifica que $d_{i+1}(F_{i+1}) \subset \mathfrak{m}F_i$, para $i \geq 0$, donde F_i son los módulos libres de la resolución y d_i , las diferenciales. La construcción funciona igual debido a que tenemos un **lema de Nakayama multigraduado**, donde observamos de nuevo que el ideal $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ es multigraduado y todo ideal propio multigraduado está contenido en él.

Lema 1.3 (de Nakayama multigraduado). *Sean J un ideal propio multigraduado de S y M un S -módulo multigraduado. Se cumple que:*

1. *Si $M = JM$, entonces $M = 0$.*
2. *Si $M = JM + N$, donde N es un submódulo multigraduado de M , entonces $M = N$.*

Demostración. Igual que en el caso graduado, basta ver 1, pues para 2 tomamos M/N . La prueba es esencialmente la misma que para el caso graduado, pero ahora necesitamos considerar un orden monomial $<$ en S , que es un orden en el conjunto de multigrados. Si $M \neq 0$, tomamos m un generador homogéneo de multigrado mínimo (para $<$) de M , entonces $m \in JM$, y como los elementos homogéneos de J tienen grados no nulos, llegamos a la contradicción $\text{mdeg}(m) > \text{mdeg}(m)$, para el orden monomial elegido. \square

Y como consecuencia, obtenemos los resultados que habíamos anticipado:

Teorema 1.4. *Sea M un S -módulo multigraduado finitamente generado. Entonces:*

12 CAPÍTULO 1. IDEALES MONOMIALES Y MULTIGRADUACIONES

1. Si $\{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_p\}$ es una base del k -espacio vectorial $\bar{M} = M/\mathfrak{m}M$, con m_i un elemento homogéneo de M , entonces $\{m_1, \dots, m_p\}$ es un sistema minimal de generadores homogéneos de M . Además, todo sistema minimal de generadores homogéneos de M se obtiene de esta forma.
2. Todo sistema minimal de generadores homogéneos de M tiene p elementos, y de los cuales, $\dim_k(\bar{M}_{\mathbf{a}})$ tienen multigrado \mathbf{a} .
3. Si M es libre y $\{m_1, \dots, m_p\}$ es un sistema minimal de generadores homogéneos, entonces forma una base y, por tanto, existe un isomorfismo multigraduado $S(-\mathbf{a}_1) \oplus \dots \oplus S(-\mathbf{a}_p) \cong M$.
4. La resolución libre minimal graduada de M coincide con su resolución libre minimal multigraduada y, por tanto, toda resolución libre multigraduada de M es suma directa de la minimal y un complejo multigraduado trivial corto (ver [Mar, 1.37 y 1.38]).

Demostración. Los apartados 1, 2 y 3 se demuestran de la misma forma que en el caso graduado (ver [Mar, 1.18 y 1.19]). En cuanto al cuarto apartado, la resolución libre minimal graduada de M se construye tomando en cada paso (en M o en los núcleos sucesivos) un sistema minimal de generadores homogéneos para la graduación sobre \mathbb{N} (ver [Mar, 1.33 y 1.36]). En el caso multigraduado, se pueden tomar dichos generadores multigraduados, de tal manera que la resolución que se obtiene es multigraduada. Dicha resolución cumple igualmente (por [Mar, 1.36]) la condición $d_{i+1}(F_{i+1}) \subset \mathfrak{m}F_i$, para $i \geq 0$. \square

Observamos que, como caso particular del segundo apartado de este teorema, obtenemos que todo ideal monomial de S (o todo submódulo monomial de S^m) admite un único sistema minimal de generadores monomiales. Este hecho se puede probar también de forma elemental (ver [Mar, corolario 3.11]) o viendo que un sistema minimal de generadores monomiales no es más que una base de Groebner reducida (para cualquier orden monomial, ver [Mar, teorema 3.26]).

Por otra parte, los **invariantes** numéricos definidos para ideales y módulos graduados sobre \mathbb{N} (ver [Mar, 1.42 y 4.1]) pueden refinarse para el caso multigraduado:

Definición 1.5. Sean M un S -módulo multigraduado finitamente generado y (\mathbf{F}, d) su resolución libre minimal multigraduada. Se definen los siguientes invariantes:

1. Los **números de Betti multigraduados** de M (sobre S) son los números $\beta_{i,\mathbf{a}}^S(M) = c_{i,\mathbf{a}}$, donde $F_i = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} S(-\mathbf{a})^{c_{i,\mathbf{a}}}$ ($\beta_{i,\mathbf{a}}^S(M) < \infty$, pues F_i es finitamente generado).
2. La **función de Hilbert multigraduada** de M es la función $\text{Hilb}_M : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $\text{Hilb}_M(\mathbf{a}) = \dim_k(M_{\mathbf{a}})$.
3. La **serie de Hilbert multigraduada** de M es la serie

$$H_M(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \dim_k(M_{\mathbf{a}}) \underline{x}^{\mathbf{a}} \in \mathbb{Z}[[x_1, \dots, x_n]].$$

Observemos que, si $M = I$ es un ideal monomial, las funciones de Hilbert de I y S/I tienen llegada en $\{0, 1\}$ y lo único que indican es qué monomios están en I y S/I . Por tanto, observamos que:

$$H_I(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\underline{x}^{\mathbf{a}} \in I} \underline{x}^{\mathbf{a}} \quad \text{y} \quad H_{S/I}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\underline{x}^{\mathbf{a}} \notin I} \underline{x}^{\mathbf{a}}.$$

En particular, se obtiene fácilmente por inducción en n que

$$H_S(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \underline{x}^{\mathbf{a}} = \frac{1}{(1-x_1) \cdots (1-x_n)}.$$

Por otra parte, el hecho de que la graduación sobre \mathbb{N}^n refine a la graduación sobre \mathbb{N} se traduce en términos de números de Betti y serie de Hilbert en lo siguiente:

$$\beta_{i,p}^S(M) = \sum_{|\mathbf{a}|=p} \beta_{i,\mathbf{a}}^S(M) \quad \text{y} \quad \beta_i^S(M) = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{i,p}^S(M) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \beta_{i,\mathbf{a}}^S(M)$$

y, por otra parte,

$$H_M(t) = H_M(t, \dots, t),$$

que, aplicado a $M = S$, proporciona la serie de Hilbert graduada de S (ver [Mar, proposición 4.4], donde aparece una demostración diferente):

$$H_S(t) = \frac{1}{(1-t)^n}.$$

Por último, finalizamos esta sección observando que se obtiene igualmente una descripción de los números de Betti multigraduados en términos del funtor derivado Tor (ver [Mar, proposición 2.14]):

Proposición 1.6. *Sean M y N dos S -módulos multigraduados. Entonces:*

1. $\text{Tor}_i^S(M, N)$ es un S -módulo multigraduado de forma natural.
2. Si M es finitamente generado, entonces $\beta_{i,\mathbf{a}}^S = \dim_k(\text{Tor}_i^S(M, k)_{\mathbf{a}})$.

Demostración. 1. Dada una resolución libre multigraduada (\mathbf{F}, d) de M , tenemos que $(\mathbf{F} \otimes N, d \otimes \text{Id}_N)$ es un complejo multigraduado dado por la graduación:

$$(F_i \otimes N)_{\mathbf{a}} = \bigoplus_{\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}} (F_{i,\mathbf{b}} \otimes N_{\mathbf{c}}).$$

Ahora, como $\text{Tor}_i^S(M, N) = H_i(\mathbf{F} \otimes N)$ es un cociente de módulos multigraduados, hereda una multigraduación de forma natural.

2. Sea (\mathbf{F}, d) la resolución libre minimal multigraduada de M . Si escribimos $F_{i,\mathbf{a}} = S^{\beta_{i,\mathbf{a}}(M)}$, tenemos que

$$(F_i \otimes_S k)_{\mathbf{a}} = F_{i,\mathbf{a}} \otimes_S k = S^{\beta_{i,\mathbf{a}}(M)} \otimes_S k \cong k^{\beta_{i,\mathbf{a}}(M)}.$$

Como \mathbf{F} es minimal, se tiene que $d_{i+1}(F_{i+1}) \subset \mathfrak{m}F_i$, por lo que la diferencial del complejo $(\mathbf{F} \otimes k, d \otimes \text{Id}_k)$ es nula y $\text{Tor}_i^S(M, N)_{\mathbf{a}} \cong_S k^{\beta_{i,\mathbf{a}}(M)}$, de donde se deduce el resultado. □

Observación 1.7. Debido a que el **complejo de Koszul** es la resolución libre minimal multigraduada de $k = S/\mathfrak{m}$ (ver [Mar, teorema 2.32]), vemos que:

$$\beta_{i,\mathbf{a}}^S(M) = \dim_k(\text{Tor}_i^S(M, k)_{\mathbf{a}}) = \dim_k(H_i(\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n) \otimes M)_{\mathbf{a}}).$$

1.2. Diagramas de Betti

Los números de Betti de un S -módulo nos proporcionan gran parte de la información almacenada en su resolución libre minimal graduada, pues a

partir de ellos obtenemos los módulos libres de la resolución (faltaría determinar las diferenciales). En el caso **multigradado**, los números de Betti multigradados proporcionan más información, pues las diferenciales vendrán dadas por matrices cuyos coeficientes serán monomios, y estos, si son no nulos, vendrán dados por los multigrados de los elementos de la base de los módulos libres de la resolución.

En todo caso, para muchos S -módulos no se conocen explícitamente todos sus números de Betti, pero sí que se pueden obtener **cotas**. Si M es un S -módulo graduado finitamente generado, sabemos (por el teorema de las sicigias de Hilbert, ver [Mar, 1.47, 1.48, 2.33 ó 3.40]) que su resolución libre minimal graduada tiene longitud finita (la dimensión proyectiva de M) y, por tanto, sus números de Betti no graduados $\beta_i^S(M)$ quedan acotados por:

$$\beta_i^S(M) \leq \text{máx}\{\beta_i^S(M)/i \leq \text{dp}_S(M)\} \quad \text{y} \quad \beta_i^S(M) = 0 \iff i > \text{dp}_S(M).$$

En cuanto a los **números de Betti graduados**, sabemos que $\beta_{i,j}^S(M) = 0$ si $j < i + c$, donde c es el mínimo grado de un elemento en un sistema minimal de generadores homogéneos de M (ver [Mar, proposición 1.45]). Es decir, fijado un grado homológico i , tenemos una cota inferior de $\beta_{i,j}^S(M)$. Para estudiar cuáles pueden ser cotas superiores, se introduce la noción de **regularidad**:

Definición 1.8. Sea M un S -módulo graduado finitamente generado. Se define su **regularidad de Castelnuovo-Mumford** o, simplemente **regularidad**, como:

$$\text{reg}_S(M) = \text{máx}\{j/\beta_{i,i+j}^S(M) \neq 0 \text{ para algún } i\}.$$

La razón por la que se estudia $\beta_{i,i+j}^S(M)$ en lugar de $\beta_{i,j}^S(M)$ tiene que ver con la cota inferior que citábamos antes, y con la forma tradicional de escribir los números de Betti graduados en una tabla. Si denotamos, por simplicidad, β_i y $\beta_{i,j}$ a los números de Betti de M , llamamos **diagrama de Betti** de M sobre S a la siguiente tabla:

	β_0	β_1	β_2	\dots	β_d
0	$\beta_{0,0}$	$\beta_{1,1}$	$\beta_{2,2}$	\dots	$\beta_{d,d}$
1	$\beta_{0,1}$	$\beta_{1,2}$	$\beta_{2,3}$	\dots	$\beta_{d,d+1}$
2	$\beta_{0,2}$	$\beta_{1,3}$	$\beta_{2,4}$	\dots	$\beta_{d,d+2}$
3	$\beta_{0,3}$	$\beta_{1,4}$	$\beta_{2,5}$	\dots	$\beta_{d,d+3}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
r	$\beta_{0,r}$	$\beta_{1,1+r}$	$\beta_{2,2+r}$	\dots	$\beta_{d,d+r}$

Entonces, vemos que podemos introducir todos los números de Betti graduados no nulos en una tabla finita como esta, donde, si exigimos que la última columna, d , y la última fila, r , no tengan todos sus coeficientes nulos, entonces por definición vemos que $d = \text{dp}_S(M)$ y $r = \text{reg}_S(M)$. Es decir, la dimensión proyectiva y la regularidad nos acotan el diagrama de Betti lo máximo posible.

Suele ser costumbre utilizar la siguiente nomenclatura a la hora de estudiar casos extremos de diagramas de Betti:

Definición 1.9. Sean M un S -módulo graduado finitamente generado y (\mathbf{F}, d) una resolución libre graduada suya. Se dice que dicha resolución es **pura** si $F_i = S(-p_i)^{c_i}$, y se dice que es **q -lineal** si $F_i = S(-q - i)^{c_i}$, para $i \geq 0$, donde $q \in \mathbb{N}$. Se dice simplemente que es **lineal** si es 0-lineal.

Por otra parte, si q es el mínimo grado de un generador minimal homogéneo de M y (\mathbf{F}, d) es la resolución libre minimal graduada de M , se define la **banda lineal** (**linear strand** en inglés) de M como el subcomplejo:

$$L(\mathbf{F}) \equiv \dots \longrightarrow S(-q-i)^{\beta_{i,i+q}} \xrightarrow{d_i} S(-q-(i-1))^{\beta_{i-1,i-1+q}} \longrightarrow \dots \longrightarrow S(-q)^{\beta_{0,q}}.$$

Es decir, la resolución libre minimal graduada de M es **pura** si en el diagrama de Betti sólo hay un coeficiente no nulo por columna, y es **q -lineal** si los coeficientes no nulos están concentrados en la fila q . Por otro lado, la **banda lineal** de M refleja los números de Betti de la primera fila no nula del diagrama.

Un ejemplo clásico de resolución lineal es el **complejo de Koszul**:

Ejemplo 1.10. Consideremos el S -módulo graduado $k = S/\mathfrak{m}$. Sabemos (por [Mar, teorema 2.32]) que el complejo de Koszul $\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n)$ es la resolución libre minimal graduada de k , donde los elementos $\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_i}$, con $j_1 < j_2 < \dots < j_i$, forman una base de K_i , cuya graduación está dada por $\deg(\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_i}) = i$. Por tanto, dicha resolución adquiere la forma

$$0 \longrightarrow S(-n) \longrightarrow S(-n+1)^n \longrightarrow \dots \longrightarrow S(-1)^n \longrightarrow S \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0.$$

Es decir, $\beta_{i,i}^S(k) = \binom{n}{i}$, la resolución es **lineal** y el diagrama queda:

	β_0	β_1	β_2	\dots	β_{n-1}	β_n
0	$\beta_{0,0} = 1$	$\beta_{1,1} = n$	$\beta_{2,2} = \frac{n(n-1)}{2}$	\dots	$\beta_{n-1,n-1} = n$	$\beta_{n,n} = 1,$

por lo que $\text{dp}_S(k) = n$ y $\text{reg}_S(k) = 0$.

Ejemplo 1.11. En general, podríamos proceder como en el ejemplo anterior para cualquier **sucesión S -regular** de monomios $m_1, \dots, m_r \in S$. De la misma forma que se demuestra en [Mar, teorema 2.32], se verifica que el complejo de Koszul $\mathbf{K}(m_1, \dots, m_r)$ es la resolución libre minimal graduada de $S/\langle m_1, \dots, m_r \rangle$. Ahora, la graduación estaría dada por

$$\deg(\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_i}) = \deg(m_1) + \dots + \deg(m_r).$$

Sin embargo, esta resolución no tiene por qué ser necesariamente lineal, pero es fácil verificar que es lineal si, y sólo si, los m_i son variables, y si $\deg(m_i) = q$ para $i = 1, \dots, r$, entonces la resolución es pura, aunque no es q -lineal, y el diagrama de Betti sería:

	β_0	β_1	\dots	β_{r-1}	β_r
0	$\beta_{0,0} = 1$		\dots		
\vdots			\dots		
$q-1$		$\beta_{1,q} = r$	\dots		
\vdots			\dots		
$(r-1)(q-1)$			\dots	$\beta_{r-1,(r-1)q} = r$	
\vdots			\dots		
$r(q-1)$			\dots		$\beta_{r,rq} = 1,$

de donde $\text{dp}_S(S/\langle m_1, \dots, m_r \rangle) = r$ y $\text{reg}_S(S/\langle m_1, \dots, m_r \rangle) = r(q-1)$, y vemos además que en este caso la banda lineal es un complejo no exacto.

Un caso particular es el de las potencias de variables x_1^q, \dots, x_n^q . En general, todas las sucesiones de la forma $x_1^{a_1}, \dots, x_r^{a_r}$ son S -regulares (ver [Eis, corollary 17.8, exercise 17.5]).

Finalizamos la sección con una observación sobre resoluciones q -lineales. Sabemos de [Mar, teorema 4.5] que podemos calcular la serie (y la función) de Hilbert de un S -módulo finitamente generado a partir de sus números de Betti. Ahora bien, en el caso de que la resolución libre minimal graduada de dicho módulo sea q -lineal, entonces podemos obtener los números de Betti a partir de la serie de Hilbert:

Proposición 1.12. *Sea M un S -módulo graduado finitamente generado. Si su resolución libre minimal graduada es q -lineal para algún $q \in \mathbb{N}$, entonces se pueden obtener los números de Betti de M a partir de su serie de Hilbert.*

Demostración. Por [Mar, teorema 4.5], obtenemos que

$$(1-t)^n H_M(t) = \sum_{i=0}^d (-1)^i \beta_{i,i+q}^S t^{i+q},$$

de donde se obtienen los números de Betti. \square

1.3. Invariantes del ideal inicial

En esta sección veremos cómo se relacionan los invariantes de un ideal de S y su ideal inicial para un cierto orden monomial dado. Primero veremos que ambos tienen la misma función de Hilbert, y después veremos que en general no ocurre lo mismo para los números de Betti: los del ideal inicial suelen ser mayores. Para ver esto último, necesitaremos usar varios resultados sobre deformaciones en el anillo de polinomios, de los cuales no demostraremos todos por brevedad (la principal referencia será [Eis, Chapter 15]). Dado un orden monomial $<$, denotaremos siempre por $\text{in}(I)$ al ideal inicial de I respecto de $<$.

Teorema 1.13 (de Macaulay). *Sean I un ideal de S y $<$ un orden monomial. Entonces, los monomios que no están en $\text{in}(I)$ forman una base como k -espacio vectorial de S/I .*

Demostración. Primero, si $f = a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \in I$, donde los a_i son escalares y los m_i , monomios, entonces $\text{in}(f) = a_j m_j$, para cierto j , de donde se deduce la independencia lineal. Para ver que son generadores, sean $f \in S$ y $\{g_1, \dots, g_s\}$ una base de Groebner de I . Del algoritmo de división (ver [Mar, teorema 3.7]), obtenemos la expresión $f = a_1 g_1 + \dots + a_s g_s + r$, por lo que $f - r \in I$, y ningún monomio de r está en $\text{in}(I)$, de donde se deduce que el conjunto de monomios fuera de $\text{in}(I)$ generan S/I . \square

Y como corolario inmediato obtenemos la relación entre las **funciones de Hilbert** de ambos ideales:

Corolario 1.14. *Sean I un ideal homogéneo de S y $<$ un orden monomial. Entonces S/I y $S/\text{in}(I)$ tienen la misma función de Hilbert. Además, si $J \subset S$ es un ideal monomial con la misma función de Hilbert que I , y*

$J \subset \text{in}(I)$ ó $\text{in}(I) \subset J$, entonces $J = \text{in}(I)$.

El estudio de los **números de Betti** del ideal inicial es bastante más complicado, y requiere dos conceptos clave: los órdenes en el conjunto de monomios dados por pesos, y las deformaciones entre ideales.

Definición 1.15. Se denomina **función peso** a toda aplicación \mathbb{Z} -lineal $\lambda : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Se define su **vector de pesos** como $\mathbf{w}_\lambda \in \mathbb{Z}^n$ tal que $w_i = \lambda(\mathbf{e}_i)$, para $i = 1, \dots, n$, y su **orden asociado** como el orden parcial en el conjunto de monomios de S dado por:

$$\underline{x}^{\mathbf{a}} \leq_\lambda \underline{x}^{\mathbf{b}} \iff \mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ ó } \lambda(\mathbf{a}) < \lambda(\mathbf{b}).$$

Dado un orden monomial $<$ en S , se dice que λ es **compatible** con $<$ ó que este **refina** al orden $<_\lambda$ si $m <_\lambda n$ implica que $m < n$, para todos los monomios $m, n \in S$.

Por último, dado $f \in S$, se define su **polinomio inicial**, $\text{in}_\lambda(f)$, como la suma de todos los términos de f maximales respecto del orden $<_\lambda$. Y si $I \subset S$ es un ideal, se define su **ideal inicial** respecto de λ , $\text{in}_\lambda(I)$, como el ideal generado por los polinomios iniciales de los polinomios de I .

Antes de continuar, hay que destacar un par de aspectos de este tipo de órdenes. Por un lado, no son órdenes monomiales, pues no son totales. Sin embargo, si los pesos son no negativos, entonces definen una **graduación** en S dada por $\deg_\lambda(x_i) = w_i = \lambda(\mathbf{e}_i)$. El orden $<_\lambda$ no es más que el orden dado por el grado. Por tanto, podemos extenderlo a un orden monomial utilizando, por ejemplo, el orden lexicográfico para comparar dos monomios distintos con el mismo grado.

Por otro lado, este tipo de órdenes, a pesar de ser parciales, cumplen todos los resultados básicos de la teoría de bases de Groebner, siempre que los pesos sean no negativos y los polinomios iniciales de los polinomios involucrados sean monomios.

Ejemplo 1.16. Consideremos los polinomios $f = xy$ y $g = y + xy$ en $k[x, y]$, y sean λ y μ las funciones dadas por los pesos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

Vemos que para λ , $\text{in}_\lambda(g) = xy$, es un monomio, y podemos dividir f por g mediante el algoritmo clásico ([Mar, teorema 3.7]). Obtenemos que

$f = qg + r$, con $q = 1$ y $r = -y$, y el monomio inicial de r no puede ser dividido por $\text{in}_\lambda(g) = xy$.

Por otro lado, para μ , $\text{in}_\mu(g) = y$, también es un monomio, pero si intentamos dividir f por g mediante el algoritmo clásico, vemos que dicho algoritmo no termina nunca. Esto es debido a que para $<_\mu$ existen sucesiones decrecientes que no se estabilizan, ya que tiene pesos negativos. Vemos también que $<_\mu$ no podría ser extendido a un orden monomial, ya que estos son buenos órdenes.

Nosotros nos centraremos en funciones con pesos no negativos, es decir, funciones del tipo $\lambda : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$. Los dos siguientes lemas técnicos se pueden encontrar en [Eis, exercise 15.12 y proposition 15.16]:

Lema 1.17 (de Bayer). Sean $<$ un orden monomial en S y $m_1 > n_1, \dots, m_r > n_r$ pares de monomios. Entonces existe una función peso $\lambda : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ compatible con $<$ tal que $m_1 >_\lambda n_1, \dots, m_r >_\lambda n_r$.

Lema 1.18. Sean $<$ un orden monomial en S , $I \subset S$ un ideal y $\{g_1, \dots, g_s\}$ una base de Groebner suya. Entonces existen pares de monomios $m_1 > n_1, \dots, m_r > n_r$ tales que, si $\lambda : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ verifica que $m_1 >_\lambda n_1, \dots, m_r >_\lambda n_r$, entonces $\text{in}_\lambda(I) = \text{in}_<(I)$ y $\{g_1, \dots, g_s\}$ es una base de Groebner de I respecto de $<_\lambda$.

Observemos que el segundo lema no trata casos “vacíos”, pues el primer lema garantiza que siempre existe al menos una función λ que verifica las hipótesis. Añadiendo los monomios y relaciones $x_1 > 1, \dots, x_n > 1$, vemos que siempre podemos tomar pesos positivos.

Por otro lado, dada una función peso $\lambda : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, podemos considerar el anillo de polinomios con una variable extra $\tilde{S} = S[t] = k[x_1, \dots, x_n, t]$, y extender λ a una función peso en \tilde{S} , $\tilde{\lambda}$, dada por los pesos $\tilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}, 1)$.

Sea ahora $f \in S$, definimos su **homogeneización** en \tilde{S} como

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n, t) = t^{\max \lambda(m_i)} f(t^{-\lambda(x_1)} x_1, \dots, t^{-\lambda(x_n)} x_n).$$

Es decir, \tilde{f} realmente es la homogeneización en \tilde{S} para la graduación dada por los pesos $\tilde{\mathbf{w}}$, si son no negativos.

Dado un ideal $I \subset S$, se define su **homogeneización** en \tilde{S} como $\tilde{I} = \langle \{\tilde{f}/f \in I\} \rangle$.

Tenemos entonces **morfismos naturales** de k -álgebras:

1. $\varphi_0 : \tilde{S} \rightarrow S$ tal que $\varphi_0(x_i) = x_i$ y $\varphi_0(t) = 0$. Verifica obviamente que $\varphi_0(\tilde{f}) = \text{in}_\lambda(f)$ y $\varphi_0(\tilde{I}) = \text{in}_\lambda(I)$.
2. $\varphi_1 : \tilde{S} \rightarrow S$ tal que $\varphi_1(x_i) = x_i$ y $\varphi_1(t) = 1$. Verifica entonces que $\varphi_1(\tilde{f}) = f$ y $\varphi_1(\tilde{I}) = I$.

La principal propiedad que nos interesa de este proceso de homogeneización en \tilde{S} es la siguiente:

Teorema 1.19. *Sean $I \subset S$ un ideal y $\lambda : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ una función peso, con pesos no negativos. La $k[t]$ -álgebra \tilde{S}/\tilde{I} es libre. En particular, es plana y $t - \alpha \in k[t]$ es un elemento \tilde{S}/\tilde{I} -regular, para todo $\alpha \in k$.*

Demostración. La primera parte del teorema se encuentra en [Eis, theorem 15.17]. Ahora, si $t - \alpha \in k[t]$, entonces la aplicación $k[t] \rightarrow k[t]$ que consiste en multiplicar por $t - \alpha$, es inyectiva. Tensorizando con \tilde{S}/\tilde{I} , vemos que $t - \alpha \in k[t]$ es \tilde{S}/\tilde{I} -regular. \square

En esta situación, se dice que los ideales I e $\text{in}_\lambda(I)$ están **conectados por una deformación** en \mathbb{A}_k^1 , y que son las **fibras** de la **familia plana** \tilde{S}/\tilde{I} sobre 1 y 0, respectivamente.

Antes de ver el principal resultado sobre los números de Betti del ideal inicial, necesitamos un par de lemas:

Lema 1.20. *Consideremos en S una graduación dada por pesos no negativos en las variables, y sean $I \subset S$ un ideal homogéneo contenido en \mathfrak{m} y $R = S/I$. Sean M un R -módulo finitamente generado, y (\mathbf{F}, d) una resolución libre suya. Si $f \in R$ es un elemento R -regular y M -regular, entonces $(\mathbf{F} \otimes R/\langle f \rangle, d \otimes \text{Id})$ es una resolución libre de $M/\langle f \rangle M$ sobre $R/\langle f \rangle$.*

Si además, M y \mathbf{F} son graduados y f homogéneo, entonces $\mathbf{F} \otimes R/\langle f \rangle$ es graduada, y si \mathbf{F} es minimal y $f \in \mathfrak{m}$, entonces $\mathbf{F} \otimes R/\langle f \rangle$ es minimal.

22 CAPÍTULO 1. IDEALES MONOMIALES Y MULTIGRADUACIONES

Demostración. Para ver la exactitud de $\mathbf{F} \otimes R/\langle f \rangle$, basta tomar la sucesión exacta larga en homología (ver [Mar, teorema 2.3]) en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{f} & F_1 & \longrightarrow & F_1 \otimes R/\langle f \rangle \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & F_0 & \xrightarrow{f} & F_0 & \longrightarrow & F_0 \otimes R/\langle f \rangle \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & M & \longrightarrow & M/\langle f \rangle M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Por otro lado, si $f \in \mathfrak{m}$ (es decir, si $I + \langle f \rangle \subset \mathfrak{m}$), entonces podemos hablar de minimalidad de una resolución sobre el anillo $R/\langle f \rangle$, es decir, de la condición $d_{i+1}(F_{i+1}) \subset \mathfrak{m}F_i$, para $i \geq 0$. Ahora, si los pesos de las variables son positivos y f no es una unidad, obtenemos automáticamente que $f \in \mathfrak{m}$, la condición $I \subset \mathfrak{m}$ es superflua y la minimalidad de la resolución coincide con [Mar, definición 1.34], por la caracterización [Mar, lema 1.36]. \square

Lema 1.21. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$, con las componentes de \mathbf{b} positivas. Consideramos en S las graduaciones dadas por los pesos \mathbf{a} y \mathbf{b} en las variables. Sean $I \subset J \subset S$ ideales homogéneos respecto de \mathbf{a} y \mathbf{b} . Entonces, existe una resolución libre, \mathbf{F} , de S/J sobre el anillo S/I , que es graduada respecto de \mathbf{a} y \mathbf{b} , y minimal, es decir, $d_{i+1}(F_{i+1}) \subset \mathfrak{m}F_i$, para $i \geq 0$.

Demostración. Sea $R = S/I$. Basta observar que si tomamos un R -módulo libre graduado por \mathbf{a} y \mathbf{b} tal que exista una base de elementos que son homogéneos tanto para \mathbf{a} como para \mathbf{b} , entonces todo submódulo suyo homogéneo para \mathbf{a} y \mathbf{b} , admite un sistema minimal de generadores que son homogéneos tanto para \mathbf{a} como para \mathbf{b} . Por tanto, podemos realizar la construcción descrita en [Mar, teorema 1.33], tomando sistemas minimales de generadores homogéneos para \mathbf{a} y \mathbf{b} . Como los pesos de \mathbf{b} son positivos, la minimalidad equivale a la condición $d_{i+1}(F_{i+1}) \subset \mathfrak{m}F_i$, para $i \geq 0$, por [Mar, lema 1.36]. \square

Y, por último, vemos la relación entre los números de Betti del ideal inicial y el original:

Teorema 1.22. Sean $I \subset J \subset S$ ideales homogéneos para la graduación estándar, y $<$ un orden monomial en S . Entonces:

1. $\beta_{i,j}^{S/I}(S/J) \leq \beta_{i,j}^{S/\mathbf{in}(I)}(S/\mathbf{in}(J))$, para todo i, j .
2. $\beta_{i,j}^S(S/J) \leq \beta_{i,j}^S(S/\mathbf{in}(J))$, para todo i, j .

Además, los números de Betti de la izquierda se obtienen de los de la derecha por cancelaciones sucesivas.

Demostración. Sean $\mathbf{a} = (1, \dots, 1, 0) \in \mathbb{N}^{n+1}$, λ una función peso con pesos positivos tal que $\mathbf{in}_\lambda(I) = \mathbf{in}_<(I)$ y $\mathbf{in}_\lambda(J) = \mathbf{in}_<(J)$ (existe por 1.17 y 1.18), \mathbf{w} su vector de pesos y $\mathbf{b} = (\mathbf{w}, 1) \in \mathbb{N}^{n+1}$.

Entonces, \tilde{I} y \tilde{J} son homogéneos respecto de \mathbf{a} y \mathbf{b} . Por el lema anterior, existe una resolución libre $\tilde{\mathbf{F}}$ de \tilde{S}/\tilde{J} sobre \tilde{S}/\tilde{I} , graduada respecto de \mathbf{a} y \mathbf{b} y minimal. Ahora, $t, t-1 \in k[t]$ son \tilde{S}/\tilde{I} -regulares y \tilde{S}/\tilde{J} -regulares, por 1.19. Por tanto, por 1.20,

1. $\tilde{\mathbf{F}} \otimes \tilde{S}/\langle t \rangle$ es una resolución libre graduada de $S/\mathbf{in}(J)$ sobre $S/\mathbf{in}(I)$, que además es minimal porque $t \in \langle x_1, \dots, x_n, t \rangle$.
2. $\tilde{\mathbf{F}} \otimes \tilde{S}/\langle t-1 \rangle$ es una resolución libre graduada de S/J sobre S/I , que no tiene por qué ser minimal, ya que $t-1 \notin \langle x_1, \dots, x_n, t \rangle$.

Por tanto, $\beta_{i,j}^{S/I}(S/J) \leq \text{rank}(\tilde{F}_{i,j}) = \beta_{i,j}^{S/\mathbf{in}(I)}(S/\mathbf{in}(J))$. Tomando $I = 0$, obtenemos 2, y la última afirmación se deduce de [Mar, teorema 1.38]. \square

Esta desigualdad entre los números de Betti se verifica en contextos más generales, y se demuestra con el mismo procedimiento (ver [MS, section 8.3]). Debido a que lo utilizaremos en una sección posterior, enunciamos el teorema para módulos y multigraduaciones, que es un caso particular de [MS, theorem 8.29]:

Teorema 1.23. Sea M un submódulo graduado (resp. multigraduado) de un módulo libre sobre S , $S^r = S(-p_1) \oplus \dots \oplus S(-p_r)$ (resp. $S^r = S(-\mathbf{a}_1) \oplus \dots \oplus S(-\mathbf{a}_r)$), y sea $<$ un orden monomial en S^r . Entonces:

$$\beta_{i,j}^S(S^r/M) \leq \beta_{i,j}^S(S^r/\mathbf{in}(M)) \quad (\text{resp. } \beta_{i,\mathbf{a}}^S(S^r/M) \leq \beta_{i,\mathbf{a}}^S(S^r/\mathbf{in}(M))),$$

para todos $i, j \in \mathbb{N}$ (resp. para todo $i \in \mathbb{N}$ y todo $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$).

1.4. Ideales Borel-fixed

Aunque existan métodos constructivos para hallar la resolución libre minimal graduada de un ideal homogéneo cualquiera (ver [Mar, capítulo 3]), y por tanto obtener también sus invariantes, en general no se conocen muchas familias de ideales para los cuales exista una descripción explícita de dicha resolución ni sus invariantes. Quizá una de las familias más importantes de ideales, de hecho monomiales, para la cuál se conocen todos los invariantes de forma explícita, son los llamados **ideales Borel-fixed**, que estudiaremos en esta sección. Su resolución libre minimal graduada apareció por primera vez en [EK], y por eso se suele denominar **resolución de Eliahou-Kervaire**.

Los ideales Borel-fixed aparecen de forma natural en geometría algebraica en el estudio de **acciones de grupos** sobre el anillo de polinomios $S = k[x_1, \dots, x_n]$, cuando el cuerpo k es de **característica cero**. En esta sección, daremos los principales resultados relacionados con estos ideales. Algunos los demostraremos en capítulos posteriores, y otros no los demostraremos por brevedad.

Definición 1.24. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Definimos el n -ésimo **grupo lineal general** sobre k como el grupo $GL_n(k)$, formado por todas las matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con coeficientes en k . Definimos el **grupo de Borel**, denotado por $B_n(k)$, y el **grupo tórico**, denotado por $T_n(k)$, como los subgrupos de $GL_n(k)$ formados por matrices triangulares inferiores y diagonales, respectivamente.

Observemos que cualquier subgrupo G de $GL_n(k)$ actúa sobre el anillo de polinomios, S , de la siguiente manera:

$$A \cdot f(x_1, \dots, x_n) = f(A \cdot \underline{x}) = f\left(\sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{n,j}x_j\right).$$

Ahora, si $I \subset S$ es un ideal, podemos definir $A \cdot I = \{A \cdot f / f \in I\}$ (obviamente es un ideal). Diremos que un ideal I es **fijo** por la acción de G si $A \cdot I = I$, para toda matriz $A \in G$. Observemos que

$$T_n(k) \subset B_n(k) \subset GL_n(k).$$

Los ideales fijos por estos tres grupos admiten caracterizaciones sencillas cuando la **característica de k es cero**. Veámoslo en las tres siguientes proposiciones:

Proposición 1.25. *Si $\text{char}(k) = 0$, un ideal $I \subset S$ es fijo por la acción del grupo tórico, $T_n(k)$, si, y sólo si, es monomial.*

Demostración. Es inmediato ver que los ideales monomiales son fijos por esta acción. Veamos la implicación recíproca. Sea I un ideal fijo por la acción de $T_n(k)$, tomemos un orden monomial $<$ y la base de Groebner reducida de I respecto de $<$, $\{g_1, \dots, g_s\}$, y veamos que los g_i son monomios, es decir, que su único término es su término inicial.

Consideremos n números primos $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n$, y sea la matriz diagonal $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$, formada con dichos primos. Es obvio que si $\underline{x}^a \neq \underline{x}^b$, entonces por ser $\text{char}(k) = 0$, al evaluar dichos monomios en (p_1, \dots, p_n) , obtenemos elementos distintos de k .

Por tanto, si $1 \leq j \leq s$ y $\lambda \in k$ es la evaluación del monomio $\text{in}(g_j)$ en (p_1, \dots, p_n) , obtenemos que $\lambda g_j - P \cdot g_j \in I$, pero sus términos son los de $g_j - \text{in}(g_j)$ multiplicados por escalares no nulos, y ninguno de ellos es divisible por ningún $\text{in}(g_i)$, por ser la base de Groebner reducida. Por tanto, debe ser $g_j = \text{in}(g_j)$, y hemos terminado. \square

Ejemplo 1.26. La condición $\text{char}(k) = 0$ no se puede omitir. Para verlo, consideremos el cuerpo de dos elementos $k = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle$, por lo que $T_n(k)$ se reduce a la matriz identidad, y todo ideal de S es fijo por su acción. Sin embargo, en S siempre hay ideales no monomiales, como por ejemplo el ideal principal $I = \langle x_1 + x_2 + \dots + x_n \rangle$ (para $n > 1$).

Proposición 1.27. *Si $\text{char}(k) = 0$, un ideal $I \subset S$ es fijo por la acción del grupo de Borel, $B_n(k)$, si, y sólo si, es monomial y satisface la siguiente condición: Si $m \in I$ es un monomio tal que x_j divide a m e $i < j$, entonces $x_i \cdot (m/x_j) \in I$.*

Demostración. Supongamos que I es fijo por la acción de $B_n(k)$. Como $T_n(k) \subset B_n(k)$, por la proposición anterior, I es monomial. Sea entonces $m = \underline{x}^a \in I$, con $a_j > 0$ e $i < j$, y consideremos la matriz A formada por unos en la diagonal y en la posición (j, i) , y ceros en el resto. Entonces:

$$A \cdot m = \sum_{r=0}^{a_j} \binom{a_j}{r} x_1^{a_1} \cdots x_i^{a_i} \cdots (x_i^r \cdot x_j^{a_j-r}) \cdots x_n^{a_n} \in I.$$

Por tanto, como $\binom{a_j}{r} \neq 0$, todos los términos pertenecen a I , en particular $x_i \cdot (m/x_j)$ pertenece a I .

Supongamos ahora que I es monomial y verifica la condición de la proposición. Basta ver que para cualquier monomio $m \in I$ y cualquier matriz $A \in B_n(k)$, se verifica que $A \cdot m \in I$. Utilizando una expresión similar a la anterior, vemos que todos los términos de $A \cdot m$ son escalares que multiplican a monomios obtenidos a partir de m mediante transformaciones sucesivas de la forma $x_i \cdot (m/x_j) \in I$, con $i < j$. \square

Corolario 1.28. *Si $\text{char}(k) = 0$, entonces un ideal no nulo $I \subset S$ es fijo por la acción del grupo lineal general, $GL_n(k)$, si, y sólo si, es una potencia del ideal homogéneo maximal, es decir, si existe $d > 0$ tal que $I = \mathfrak{m}^d$.*

Demostración. Si $I = \mathfrak{m}^d$ para algún $d > 0$, es obvio que $A \cdot I \subset I$, para toda $A \in GL_n(k)$, pues $A \cdot m$ es un polinomio homogéneo de grado d si m es un monomio de grado d . Utilizando que $A^{-1} \cdot I \subset I$, vemos que I es fijo por la acción de $GL_n(k)$.

Recíprocamente, Si I es fijo por la acción de $GL_n(k)$, debe ser monomial por 1.25, y si $m \in I$ es un monomio de grado $d > 0$, con d mínimo posible, vemos entonces que $\mathfrak{m}^d \subset I$ aplicando transformaciones del tipo anterior, usando la caracterización de 1.27 para matrices triangulares inferiores, y la respectiva para superiores. Ahora bien, \mathfrak{m}^d contiene a todos los monomios de grado mayor o igual que d , por lo que $I = \mathfrak{m}^d$. \square

Ejemplo 1.29. Al igual que en 1.25, en las dos caracterizaciones anteriores, la condición $\text{char}(k) = 0$ es necesaria. Consideremos de nuevo $k = \mathbb{F}_2$, por lo que $GL_2(\mathbb{F}_2)$ es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces es obvio que $I = \langle x^2, y^2 \rangle \subset \mathbb{F}_2[x, y]$ es fijo por su acción, pues $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, pero I no es una potencia del maximal, ni verifica la condición de la proposición 1.27, ya que debería verificar $xy \in I$.

Aunque estas caracterizaciones no se verifiquen cuando $\text{char}(k) > 0$, sí que podemos definir en característica arbitraria una noción similar a la de ideal Borel-fixed:

Definición 1.30. Decimos que un ideal monomial $I \subset S$ es **fuertemente estable** (**strongly stable** en inglés) si verifica la condición de Borel: Si $m \in I$ es un monomio tal que x_j divide a m e $i < j$, entonces $x_i \cdot (m/x_j) \in I$.

Ejemplo 1.31. Algunos primeros ejemplos sencillos de ideales fuertemente estables pueden ser $\langle x^2, xy, xz^3 \rangle$, $\langle x^2, xy, y^3, xz^2 \rangle$ ó el ideal con siete generadores $\langle x^2, y^6, xy^2, xyz^2, xz^6, xyz^2, xyt^4 \rangle$, donde el orden de las variables es el usual.

Obviamente, aunque $\text{char}(k) > 0$, se verifica que los ideales del tipo \mathfrak{m}^d , con $d > 0$, son fuertemente estables. También observamos que un ideal monomial $I \subset S$ verifica la condición de Borel si, y sólo si, verifica dicha condición para un sistema de generadores monomiales dado. En particular, podemos tomar el sistema minimal.

Aparte de la caracterización en términos de cierta acción de grupo, los ideales Borel-fixed también aparecen en geometría algebraica en lo que se denomina el ideal inicial genérico. No daremos las demostraciones de los dos siguientes teoremas, las cuales se encuentran en [Eis, theorem 15.18 y theorem 15.20].

Teorema 1.32 (de Galligo, Bayer y Stillman). *Sea $I \subset S$ un ideal homogéneo. Dado un orden monomial \langle que verifica $x_1 > \dots > x_n$, existe un abierto de Zariski U de $GL_n(k)$, no vacío, tal que $\text{in}(A \cdot I)$ no depende de $A \in U$. Además, $U \cap B_n(k) \neq \emptyset$.*

Dicho ideal se denomina **ideal inicial genérico** de I respecto de \langle , y se denota por $\text{gin}_{\langle}(I)$. Su nombre se debe a que dicho ideal es el inicial de I respecto de \langle en “coordenadas genéricas”, ya que es el mismo para casi todo $A \cdot I$, $A \in U$, y dicha acción se puede entender como un cambio de coordenadas en k^n .

Teorema 1.33 (de Galligo). *En las condiciones anteriores, si $\text{char}(k) = 0$, entonces $\text{gin}_{\langle}(I)$ es Borel-fixed.*

Y el siguiente teorema, demostrado en [BSti, theorem 2.4], también señala la importancia de conocer la resolución libre minimal graduada de los ideales fuertemente estables:

Teorema 1.34. *Sean $I \subset S$ un ideal homogéneo y \langle el orden lexicográfico inverso. Si $\text{in}(I)$ es fuertemente estable, entonces*

$$\text{reg}(I) = \text{reg}(\text{in}(I)).$$

Por último, veamos la descripción explícita de la resolución de Eliahou-Kervaire. Primero, dado un monomio $\underline{x}^{\mathbf{a}} \in S$, definimos $\text{mín}(\underline{x}^{\mathbf{a}}) = \text{mín}\{i/a_i \neq 0\}$ y $\text{máx}(\underline{x}^{\mathbf{a}}) = \text{máx}\{i/a_i \neq 0\}$. En lo que sigue, $I \subset S$ será un ideal monomial, y $\{m_1, \dots, m_r\}$ su sistema minimal de generadores monomiales. Supondremos que I verifica una condición un poco más débil que la de fuertemente estable: para cada $j = 1, 2, \dots, r$ y cada $i \leq \text{máx}(m_j)$, se tiene que $x_i \cdot (m_j/x_{\text{máx}(m_j)}) \in I$. A estos ideales se les denomina **estables**, a secas.

Lema 1.35. *Para todo monomio $m \in I$, existe una única descomposición en monomios $m = m_i n$, tal que $\text{máx}(m_i) \leq \text{mín}(n)$. Se denota $b(m) = m_i$ y $e(m) = n$ (“principio” y “final” de m respecto de I).*

Demostración. Primero, existe un j tal que $m = m_j n'$. Si no se verifica que $\text{máx}(m_j) \leq \text{mín}(n')$, entonces $x_{\text{mín}(n')}(m_j/x_{\text{máx}(m_j)}) = m_k n''$. Tomando $m' = n'' x_{\text{máx}(m_j)}(n'/x_{\text{mín}(n')})$, obtenemos la descomposición $m = m_k m'$, que verifica $\text{máx}(m_k) \leq \text{máx}(m_j)$ y $\text{mín}(m') \geq \text{mín}(n')$. Debemos llegar en un número finito de pasos a la descomposición que buscamos, pues cada vez obtenemos un monomio distinto de entre $\{m_1, \dots, m_r\}$. Por último, dicha descomposición es única por ser el sistema de generadores minimal. \square

Con estas notaciones, llamamos **resolución de Eliahou-Kervaire** de S/I al complejo $(\mathbf{EK}^I, \partial)$, tal que EK_{p+1}^I es el S -módulo libre cuya base denotamos por:

$$\{(m_i; j_1, \dots, j_p) / 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p < \text{máx}(m_i), 1 \leq i \leq r\},$$

si $p \geq 1$, de base $\{(m_1; \emptyset), \dots, (m_r; \emptyset)\}$ si $p = 0$, y definimos $EK_0^I = S$. Damos la multigraduación $\text{mdeg}(m_i; j_1, \dots, j_p) = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_p} m_i$, y definimos la diferencial como $\partial = d_1 - d_2$, donde:

$$d_1(m_i; j_1, \dots, j_p) = \sum_{q=1}^p (-1)^q x_{j_q} (m_i; j_1, \dots, \widehat{j}_q, \dots, j_p), \text{ y}$$

$$d_2(m_i; j_1, \dots, j_p) = \sum_{q=1}^p (-1)^q e(m_i x_{j_q})(b(m_i x_{j_q}); j_1, \dots, \widehat{j}_q, \dots, j_p),$$

para $p \geq 1$, $\partial(m_i; \emptyset) = m_i$ para $p = 0$, y $\partial : S \rightarrow S/I$, el homomorfismo canónico. También, adoptamos el convenio $(m_i; j_1, \dots, j_p) = 0$ si $\text{máx}(m_i) \leq j_q$ para algún $1 \leq q \leq p$, ó si $p \geq \text{máx}(m_i)$.

Veremos en capítulos posteriores que $(\mathbf{EK}^I, \partial)$ es la resolución libre minimal multigradaada de S/I . Lo único que no es sencillo es comprobar su exactitud, pero el hecho de ser un complejo (es decir, $\partial^2 = 0$) es una comprobación rutinaria (la omitimos por brevedad), y la minimalidad es obvia, pues $\partial(EK_{p+1}^I) \subset \mathfrak{m}EK_p^I$.

Una vez que hayamos visto que realmente es una resolución, podemos hallar explícitamente los invariantes de los ideales estables, ya que estos se “leen” en la resolución:

Proposición 1.36. *Dado un ideal estable $I \subset S$, y $\{m_1, \dots, m_r\}$ su sistema minimal de generadores monomiales, se verifica que:*

1. $\beta_{p,p+q}^S(I) = \sum \binom{\text{máx}(m_i) - 1}{p}$, sumando para los m_i con $\deg(m_i) = q$,
2. $\beta_p^S(I) = \sum_{i=1}^r \binom{\text{máx}(m_i) - 1}{p}$,
3. $\text{dp}_S(I) = \text{máx}\{\text{máx}(m_i) - 1/1 \leq i \leq r\}$, y
4. $\text{reg}_S(I) = \text{máx}\{\deg(m_i)/1 \leq i \leq r\}$.

Por otro lado, la serie de Hilbert de un ideal estable se puede describir de forma sencilla, gracias también al lema 1.35:

Proposición 1.37. *Sea, como antes, $I \subset S$ un ideal estable generado por los monomios $m_1, \dots, m_r \in S$, de forma minimal. Entonces,*

$$H_I(\underline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^r \left(m_i \prod_{j=1}^{u_i-1} (1 - x_j) \right)}{(1 - x_1) \cdots (1 - x_n)},$$

donde $u_i = \text{máx}(m_i)$.

Demostración. Basta usar 1.35 y tener en cuenta del capítulo primero que

$$H_I(\underline{x}) = \sum_{\underline{x}^{\mathbf{a}} \in I} \underline{x}^{\mathbf{a}} \quad \text{y} \quad H_S(\underline{x}) = \frac{1}{(1 - x_1) \cdots (1 - x_n)}.$$

□

1.5. Otras condiciones de tipo Borel

En esta sección veremos brevemente dos familias de ideales monomiales similares a la de ideales fuertemente estables. La primera, menos conocida en la actualidad, intenta imitar el comportamiento de los ideales Borel-fixed cuando la característica del cuerpo k es positiva, mientras que la segunda, conocida en la actualidad de forma explícita, hace compatible la propiedad de Borel con los ideales monomiales libres de cuadrados.

Primero introducimos el siguiente orden parcial en \mathbb{N} . Sea p un número primo. Para cada $a, b \in \mathbb{N}$, definimos el orden $a <_p b$ si, y sólo si, $a < b$ y p no divide a $\binom{b}{a}$. En [Eis, proposition 15.21] se da una caracterización de este orden debida a Gauss.

Definición 1.38. Si $\text{char}(k) = p > 0$, decimos que un ideal monomial $I \subset S$ es p -**Borel-fixed** si verifica la condición p -Borel: Si $m \in I$ es un monomio tal que x_j^r divide a m , con r máximo posible, e $i < j$, entonces $(x_i/x_j)^s \cdot m \in I$, para todo $s \leq_p r$.

De nuevo, basta comprobar esta propiedad para un sistema generadores monomiales de I cualquiera, en particular, el minimal.

Ejemplo 1.39. Quizá el ejemplo más sencillo de ideal p -Borel-fixed sea $I = \langle x_1^p, \dots, x_n^p \rangle$, pues el único s de la definición posible para cada generador es $s = p$, ya que si $0 < s < p$, entonces p divide a $\binom{p}{s}$ y por tanto, $s \not\leq_p p$.

La importancia de estos ideales viene dada por un resultado análogo a 1.33, demostrado en [Eis, theorem 15.23], junto con el teorema 1.34:

Teorema 1.40. Si $I \subset S$ es un ideal homogéneo y $\text{char}(k) = p > 0$, entonces $\text{gin}_{<}(I)$ es p -Borel-fixed.

Sin embargo, esta clase de ideales aún presentan muchos problemas abiertos en la actualidad, como queda expuesto en [Pee, problems 28.16]. No se conoce de forma explícita su resolución libre minimal graduada, ni siquiera algunos de sus invariantes más importantes, como su regularidad o sus números de Betti. Otro problema abierto es ver si su resolución e invariantes dependen de la característica, p , al contrario de lo que ocurre para los ideales fuertemente estables.

Veamos ahora los ideales conocidos como fuertemente estables libres de cuadrados. Dado un monomio cualquiera $m \in S$, decimos que es **libre de cuadrados** si x_i^2 no lo divide, para todo $i = 1, \dots, n$. Es decir, si es un producto de variables no repetidas. Y decimos que un ideal $I \subset S$ es **libre de cuadrados** si está generado por monomios libres de cuadrados.

Definición 1.41. Decimos que un ideal libre de cuadrados $I \subset S$ es **fuertemente estable libre de cuadrados** si verifica la condición de Borel libre de cuadrados: Si $m \in I$ es un monomio tal que x_j divide a m , $i < j$ y $x_i \cdot (m/x_j)$ es libre de cuadrados, entonces $x_i \cdot (m/x_j) \in I$.

Como antes, decimos que I es **estable libre de cuadrados** si verifica que $x_i \cdot (m/x_{\max(m)}) \in I$, para todo generador monomial minimal m de I , tal que $i < \max(m)$ y $x_i \cdot (m/x_{\max(m)})$ es libre de cuadrados.

Los ideales libres de cuadrados son, por definición, monomiales, y como en los otros casos, basta que la condición Borel libre de cuadrados se verifique para el sistema minimal de generadores monomiales.

Ejemplo 1.42. Ejemplos sencillos de ideales fuertemente estables libres de cuadrados son $\langle xy, yz, zx \rangle$, $\langle x, yz \rangle$ ó $\langle x, yz, yt \rangle$, donde el orden de las variables es el usual.

Puede surgir confusión entre los ideales fuertemente estables libres de cuadrados y los ideales libres de cuadrados que son fuertemente estables. Sin embargo, es sencillo comprobar que de hecho los ideales libres de cuadrados que son estables son los de la forma $\langle x_1, x_2, \dots, x_r \rangle$, para $1 \leq r \leq n$.

En este caso, el resultado análogo a 1.33 en relación con estos ideales tiene que ver con las álgebras exteriores. No entraremos en detalles, simplemente enunciaremos el teorema por completitud (ver [Pee, theorem 56.6]):

Teorema 1.43 (de Aramova, Herzog y Hibi). *El ideal genérico inicial de un ideal homogéneo en una álgebra exterior es fuertemente estable libre de cuadrados.*

A diferencia de los ideales p -Borel-fixed, para estos ideales se conoce su resolución libre minimal graduada, denominada en la literatura resolución de **Eliahou-Kervaire libre de cuadrados**, por analogía a la de los ideales estables. Su descripción es similar. Tomemos un ideal estable libre de cuadrados $I \subset S$, de generadores monomiales minimales m_1, \dots, m_r . Primero, se verifica un lema similar a 1.35, con la misma demostración:

Lema 1.44. *Para todo monomio libre de cuadrados $m \in I$, existe una única descomposición en monomios $m = m_i n$, tal que $\max(m_i) \leq \min(n)$. Se denota $b(m) = m_i$ y $e(m) = n$ (“principio” y “final” de m respecto de I).*

Definimos ahora el complejo $(\widetilde{\mathbf{E}\mathbf{K}}^I, \partial)$, tal que \widetilde{EK}_{p+1}^I es el S -módulo libre cuya base denotamos por:

$$\{(m_i; j_1, \dots, j_p)/1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p < \max(m_i), 1 \leq i \leq r, \\ \text{y } m_i x_{j_1} \cdots x_{j_p} \text{ es libre de cuadrados}\},$$

si $p \geq 1$, de base $\{(m_1; \emptyset), \dots, (m_r; \emptyset)\}$ si $p = 0$, y definimos $\widetilde{EK}_0^I = S$. Damos la multigraduación $\text{mdeg}(m_i; j_1, \dots, j_p) = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_p} m_i$, y definimos la diferencial como $\partial = d_1 - d_2$, donde:

$$d_1(m_i; j_1, \dots, j_p) = \sum_{q=1}^p (-1)^q x_{j_q} (m_i; j_1, \dots, \widehat{j}_q, \dots, j_p), \text{ y}$$

$$d_2(m_i; j_1, \dots, j_p) = \sum_{q=1}^p (-1)^q e(m_i x_{j_q}) (b(m_i x_{j_q}); j_1, \dots, \widehat{j}_q, \dots, j_p),$$

para $p \geq 1$, $\partial(m_i; \emptyset) = m_i$ para $p = 0$, y $\partial : S \rightarrow S/I$, el homomorfismo canónico. También, adoptamos el convenio $(m_i; j_1, \dots, j_p) = 0$ si $\max(m_i) \leq j_q$ para algún $1 \leq q \leq p$, ó si $p \geq \max(m_i)$, ó si $x_{j_1} \dots x_{j_p} m_i$ no es libre de cuadrados.

De nuevo, la única parte complicada es ver que dicho complejo es exacto, y podemos extraer de él los invariantes de I :

Proposición 1.45. *Dado un ideal estable libre de cuadrados $I \subset S$, y $\{m_1, \dots, m_r\}$ su sistema minimal de generadores monomiales, se verifica que:*

1. $\beta_{p,p+q}^S(I) = \sum \binom{\max(m_i) - \deg(m_i)}{p}$, sumando para los m_i tales que $\deg(m_i) = q$,
2. $\beta_p^S(I) = \sum_{i=1}^r \binom{\max(m_i) - \deg(m_i)}{p}$,
3. $\text{dp}_S(I) = \max\{\max(m_i) - \deg(m_i)/1 \leq i \leq r\}$, y
4. $\text{reg}_S(I) = \max\{\deg(m_i)/1 \leq i \leq r\}$.

Capítulo 2

Complejos simpliciales y celulares

Las resoluciones monomiales se han estudiado recientemente desde muchos puntos de vista, gracias a la rica información combinatoria que guardan. Sin embargo, ha dado especialmente frutos su relación con complejos que surgen en Topología Algebraica, debido principalmente a dos trabajos, [BPS] primero y [BStu] después, que a su vez se basan en ideas recogidas en [BH].

La idea principal es construir un **objeto topológico**, como los complejos simpliciales, polihedrales o celulares, y obtener a partir de ellos un complejo de módulos que acabe proporcionando una resolución de cierto ideal monomial.

Quizá el ejemplo más sencillo de todos sea la **resolución de Taylor**, que apareció por primera vez en la tesis de D. Taylor en 1960. Dicha resolución constituye una resolución libre multigradaada de un ideal monomial dado, construida simplemente a partir de unos generadores dados. Obviamente, no siempre dicha resolución será minimal. Sin embargo, a partir de los trabajos anteriores sobre resoluciones simpliciales, se observó que dicha resolución está codificada de forma natural en la estructura combinatoria de un símplice.

En este capítulo veremos los conceptos y resultados básicos relativos a las resoluciones celulares, comenzando por las más sencillas, es decir, las simpliciales, y terminaremos hallando los números de Betti multigradaados de los **ideales fuertemente estables**. No entraremos en detalles topológicos para no extendernos ni desviarnos de nuestro objetivo. Referencias generales

para ello son [Rot] y [Mas], aunque ciertas secciones de [MS] o [BH] también serán de gran utilidad.

2.1. Complejos simpliciales

En esta primera sección veremos el tipo más sencillo de complejo celular, que son los complejos simpliciales. Antes de utilizar estos objetos para obtener resoluciones monomiales, se utilizaron para explorar la estructura combinatoria de los ideales libres de cuadrados, mediante lo que se denomina la **correspondencia de Stanley-Reisner**.

Comenzamos con las definiciones básicas, haciendo la distinción, conveniente para la generalización a complejos celulares, entre complejos simpliciales abstractos y geométricos. Recordemos que la **clausura convexa** de un subconjunto de \mathbb{R}^d , para cierto d , es la intersección de todos los subconjuntos convexos que lo contienen, y es por tanto, el menor conjunto convexo de \mathbb{R}^d que lo contiene (ver [Rot, chapter 2]).

Definición 2.1. Sean $r, d \in \mathbb{N}$, $r, d > 0$. Un **símplice geométrico** en \mathbb{R}^d es la clausura convexa de r puntos $v_1, v_2, \dots, v_r \in \mathbb{R}^d$, afinmente independientes, denominados **vértices** del símplice. Llamamos **caras** de dicho símplice a los símplices cuyos vértices son algunos de los v_i . Un **complejo simplicial geométrico** en \mathbb{R}^d es una colección Δ de símplices (llamados **caras** de Δ), en \mathbb{R}^d , tales que:

1. Si $\sigma \in \Delta$ y τ es una cara de σ , entonces $\tau \in \Delta$.
2. Si $\sigma, \tau \in \Delta$, entonces $\sigma \cap \tau$ es, o bien vacía, o bien una cara común a σ y τ .

Denotamos por $V(\Delta) \subset \mathbb{R}^d$ al conjunto de vértices de todas las caras de Δ , y denotamos por $|\Delta| \subset \mathbb{R}^d$ a la unión conjuntista de todas las caras de Δ .

Por otro lado, un **complejo simplicial abstracto** en los r vértices $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ es una colección Δ de subconjuntos (llamados **caras** de Δ) de A tal que $\{a_i\} \subset \Delta$, para todo $i = 1, 2, \dots, r$, y si $\sigma \in \Delta$ y $\tau \subset \sigma$, entonces $\tau \in \Delta$. También denotaremos $V(\Delta) = A$.

En ambos casos, se define la **dimensión** de una cara $\sigma \in \Delta$ como $\dim(\sigma) = s - 1$, donde s es el número de vértices que lo forman, y se define $\dim(\Delta) = \max\{\dim(\sigma) / \sigma \in \Delta\}$.

Observación 2.2. Es bien conocido que ambos conceptos de complejo simplicial son equivalentes ([Rot, theorem 7.8]). Dado un complejo simplicial geométrico Δ , obtenemos uno abstracto $\tilde{\Delta}$, de vértices $V(\Delta)$ y cuyos símlices son los conjuntos $V(\sigma)$, donde $\sigma \in \Delta$.

Recíprocamente, dado un complejo simplicial abstracto Δ de vértices $V(\Delta) = \{a_1, \dots, a_r\}$, consideramos en \mathbb{R}^r el complejo simplicial geométrico dado por los símlices $\tilde{\sigma}$, donde $\tilde{\sigma}$ es la clausura convexa de los vectores canónicos $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_s}$, si $\sigma = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_s}\} \in \Delta$. Por ejemplo, el complejo abstracto Δ formado por los subconjuntos de $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ y $\{c, a\}$ se corresponde con el complejo geométrico de la figura:

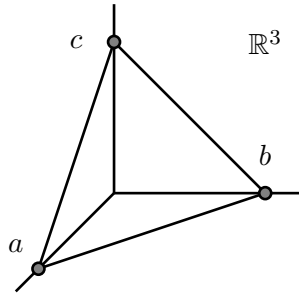


Figura 2.1: Realización geométrica de Δ .

A partir de ahora, llamaremos simplemente complejo simplicial a todo complejo simplicial abstracto.

Observación 2.3. Normalmente y para abreviar, diremos que Δ es un complejo simplicial en r vértices, si es un complejo simplicial abstracto en los vértices $\{1, 2, \dots, r\}$. Se suele considerar también como complejo simplicial al **complejo vacío**, $\Delta = \emptyset$, cuya dimensión se define como $\dim(\emptyset) = -\infty$, que no debe confundirse con el **complejo irrelevante** $\{\emptyset\}$, cuya dimensión es -1 (Asumimos por definición que el vacío es una cara de todo complejo simplicial).

En la sección 1.5 vimos qué eran los ideales libres de cuadrados. A continuación veremos que estos están estrechamente relacionados con los com-

plejos simpliciales, hasta el punto de que hay una correspondencia biunívoca entre unos y otros:

Definición 2.4. Dado un subconjunto $\sigma \subset \{1, 2, \dots, n\}$, definimos:

$$\underline{x}^\sigma = \prod_{i \in \sigma} x_i \quad \text{y} \quad \mathfrak{m}^\sigma = \langle \{x_i / i \in \sigma\} \rangle,$$

en $S = k[x_1, \dots, x_n]$. Por otro lado, dado un complejo simplicial Δ en n vértices, definimos su **ideal** y **anillo de Stanley-Reisner** como

$$I_\Delta = \langle \{\underline{x}^\sigma / \sigma \notin \Delta\} \rangle \quad \text{y} \quad S_\Delta = S/I_\Delta,$$

respectivamente. Llamaremos **correspondencia de Stanley-Reisner** a la dada por $\Delta \rightsquigarrow I_\Delta$.

Así definidos, observamos que los monomios libres de cuadrados que no se anulan en S/I_Δ son exactamente los de la forma \underline{x}^σ , donde $\sigma \in \Delta$. Por esta razón, la correspondencia de Stanley-Reisner es inyectiva. Como todo ideal libre de cuadrados se puede expresar en la forma I_Δ , vemos que dicha correspondencia es una biyección entre el conjunto de todos los complejos simpliciales en n vértices, y el conjunto de ideales libres de cuadrados en S .

Ejemplo 2.5. El complejo simplicial Δ formado por todos los subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ salvo el total (un “símplice hueco”) se corresponde con el ideal principal $I_\Delta = \langle x_1 x_2 \cdots x_n \rangle$, mientras que el ideal maximal $\mathfrak{m} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ se corresponde con el complejo irrelevante $\{\emptyset\}$.

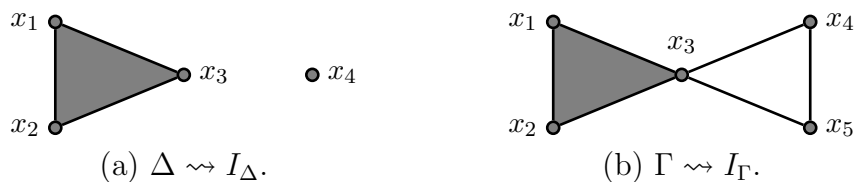


Figura 2.2: (a) $\Delta \rightsquigarrow I_\Delta$, (b) $\Gamma \rightsquigarrow I_\Gamma$.

Un par de ejemplos sencillos no triviales pueden ser los siguientes: un triángulo y un punto, Δ , en $n = 4$ vértices, formado por los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\{4\}$. Se corresponde con el ideal $I_\Delta = \langle x_1 x_4, x_2 x_4, x_3 x_4 \rangle$. El otro ejemplo sería Γ , formado por los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$ y $\{4, 5\}$. Se corresponde con el ideal $I_\Gamma = \langle x_1 x_4, x_1 x_5, x_2 x_4, x_2 x_5, x_3 x_4 x_5 \rangle$. Ver la figura 2.2.

Por otro lado, esta correspondencia también nos permite expresar mediante complejos simpliciales algunas características de los ideales libres de cuadrados, como se puede observar en los tres resultados siguientes:

Proposición 2.6. *Todo ideal libre de cuadrados admite una única descomposición irredundante como intersección de ideales primos de S . Además, para I_Δ , dicha descomposición se obtiene a partir de:*

$$I_\Delta = \bigcap_{\sigma \in \Delta} \mathfrak{m}^{\bar{\sigma}},$$

donde $\bar{\sigma}$ indica el complementario de σ .

Demostración. Primero, es sencillo comprobar que los ideales monomiales radicales y los ideales monomiales primos son justo los libres de cuadrados y los generados por variables, respectivamente. Ahora bien, los ideales radicales admiten una única descomposición irredundante como intersección de ideales primos, pues estos deben coincidir con sus primos asociados (ver [AM, capítulo 4] ó [Eis, chapter 3]).

Por otra parte, $\underline{x}^\tau \in I_\Delta$ si, y sólo si, $\tau \notin \Delta$, lo que equivale a $\tau \not\subseteq \sigma$, para todo $\sigma \in \Delta$, es decir, $\underline{x}^\tau \in \mathfrak{m}^{\bar{\sigma}}$, para todo $\sigma \in \Delta$. \square

Teorema 2.7. *Dado un complejo simplicial en n vértices, Δ , se verifica que:*

$$H_{S/I_\Delta}(\underline{x}) = \sum_{\sigma \in \Delta} \left(\prod_{i \in \sigma} \frac{x_i}{1 - x_i} \right).$$

Demostración. Si para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$, definimos $\text{supp}(\mathbf{a}) = \{i/a_i \neq 0\}$, entonces

$$H_{S/I_\Delta}(\underline{x}) = \sum_{\underline{x}^{\mathbf{a}} \notin I_\Delta} \underline{x}^{\mathbf{a}} = \sum_{\sigma \in \Delta} \left(\sum_{\text{supp}(\mathbf{a})=\sigma} \underline{x}^{\mathbf{a}} \right) \quad \text{y} \quad \sum_{\text{supp}(\mathbf{a})=\sigma} \underline{x}^{\mathbf{a}} = \prod_{i \in \sigma} \frac{x_i}{1 - x_i},$$

de donde se deduce el resultado. \square

Corolario 2.8. *Dado un complejo simplicial en n vértices, Δ , denotamos por f_i al número de caras de dimensión i de Δ , y $d = \dim(\Delta) + 1$. Entonces:*

$$H_{S/I_\Delta}(t) = \frac{1}{(1-t)^n} \sum_{i=0}^d f_{i-1} t^i (1-t)^{n-i}.$$

Ejemplo 2.9. Volviendo al triángulo y un punto, es decir, al complejo Δ formado por los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\{4\}$, tenemos la descomposición $I_\Delta = \langle x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4 \rangle = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \cap \langle x_4 \rangle$, y:

$$\begin{aligned} H_{S/I_\Delta}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{x_1}{(1-x_1)} + \frac{x_2}{1-x_2} + \frac{x_3}{1-x_3} + \frac{x_4}{1-x_4} + \\ &+ \frac{x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} + \frac{x_2x_3}{(1-x_2)(1-x_3)} + \frac{x_3x_1}{(1-x_3)(1-x_1)} + \\ &+ \frac{x_1x_2x_3}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)}. \end{aligned}$$

El vector $\mathbf{f} = (f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ se suele denominar en la literatura *f-vector*. Dicho vector, junto al *h-polinomio*, que es el que surge al escribir $H_{S/I}(t) = h(t)/(1-t)^e$, con $h(1) \neq 0$, juegan un papel combinatorio muy importante, y que ha sido extensamente estudiado por Stanley.

Pasemos ahora a construir complejos de módulos a partir de complejos simpliciales. En principio, la construcción será la estándar en topología algebraica, que se encuentra con todo detalle en [Rot, Chapter 7]. Sin embargo, nosotros seguiremos dos construcciones, la clásica para coeficientes en el cuerpo k , y otra adaptada a nuestros propósitos, en la que los coeficientes estarán en el anillo S , como se hace en [MS, Chapter 1], y que consiste en multigraduar u “homogeneizar” el complejo sobre k , como se indica con detalle en [Pee, Section 55]. Esta construcción se introdujo en el artículo [BPS].

Para definir los siguientes complejos de módulos, es necesario ordenar los vértices de un complejo simplicial (es decir, **orientar** el complejo). Por ello, supondremos siempre que Δ será un complejo simplicial abstracto de dimensión d en los r vértices $\{1, 2, \dots, r\}$, y consideraremos su orden natural.

Definición 2.10. Denotamos por $\Gamma_i(\Delta)$ (ó simplemente Γ_i si no hay confusión) al conjunto de **caras** de Δ de dimensión i , $i \geq -1$, y denotamos por k^{Γ_i} al k -espacio vectorial de base Γ_i , donde denotamos simplemente por σ al vector de la base asociado a $\sigma \in \Gamma_i$. Se define entonces el **complejo de cadenas (aumentado)** de Δ sobre k como el complejo:

$$\tilde{\mathbf{C}}(\Delta, k) \equiv 0 \longrightarrow k^{\Gamma_d} \xrightarrow{\partial_d} k^{\Gamma_{d-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow k^{\Gamma_1} \xrightarrow{\partial_1} k^{\Gamma_0} \xrightarrow{\partial_0} k^{\Gamma_{-1}} \longrightarrow 0,$$

donde la diferencial es:

$$\partial_i(\sigma) = \sum_{p=0}^i (-1)^p (\sigma \setminus j_p),$$

si $\sigma = \{j_0, j_1, \dots, j_i\}$, y donde $\partial_0(\sigma) = 1 = \emptyset$. Y definimos su **homología reducida** i -ésima como $\tilde{H}_i(\Delta, k) = \ker(\partial_i) / \text{Im}(\partial_{i+1})$.

Por otro lado, dados monomios $m_1, \dots, m_r \in S$, definimos el **complejo de cadenas etiquetado** asociado a Δ y m_1, \dots, m_r , como el complejo:

$$\mathbf{F}_\Delta \equiv 0 \longrightarrow F_{d+1} \xrightarrow{\partial_{d+1}} F_d \longrightarrow \dots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \longrightarrow 0,$$

donde F_i es el S -módulo libre de base Γ_{i-1} , cuyos elementos denotamos igualmente por σ , multigraduado por $\text{mdeg}(\sigma) = \text{mcm}\{m_j / j \in \sigma\}$, y cuya diferencial es:

$$\partial_{i+1}(\sigma) = \sum_{p=0}^i (-1)^p \frac{\text{mcm}(m_{j_0}, \dots, m_{j_i})}{\text{mcm}(m_{j_0}, \dots, \widehat{m_{j_p}}, \dots, m_{j_i})} (\sigma \setminus j_p),$$

si $\sigma = \{j_0, j_1, \dots, j_i\}$, y donde $\partial_1(\{p\}) = m_p = m_p \emptyset$.

La comprobación de que $\partial_{i-1}\partial_i = 0$ en ambos casos es rutinaria, se procede como en el complejo de Koszul ([Mar, proposición 2.25]). Si $\sigma = \{j_0, j_1, \dots, j_i\} \in \Gamma_i$, entonces:

$$\partial_{i-1}\partial_i(\sigma) = \sum_{p \neq s} f_{p,s}(\sigma \setminus \{j_p, j_s\}),$$

y en ambos casos, al quitar primero j_p y después j_s obtenemos el mismo coeficiente que al quitar primero j_s y después j_p , pero con signo contrario. Es decir, $f_{p,s} = -f_{s,p}$, de donde la suma anterior es cero.

Observación 2.11. Hemos utilizado un convenio de índices bastante extendido en la literatura (ver [MS] o [Pee]), donde el complejo de cadenas $\tilde{\mathbf{C}}(\Delta, k)$ tiene base Γ_i en grado homológico i , mientras que \mathbf{F}_Δ tiene base Γ_{i-1} en grado homológico i . Esto es debido a que en el primer caso nos interesa representar por i la **dimensión** de las caras correspondientes, mientras que en el segundo caso, nos interesa representar por i el **número de vértices** de los símlices.

Básicamente, lo que hemos hecho es considerar el complejo de cadenas clásico sobre k , y etiquetar al complejo simplicial con multigrados, provenientes de ciertos monomios, para formar un complejo multigrado sobre S . El primero encierra información puramente topológica de Δ , mientras que el segundo proporciona un complejo sobre el ideal $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$. Lo que haremos en un contexto más general en la siguiente sección será relacionar ambos para saber cuándo son exactos y obtener así resoluciones de ideales monomiales. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.12. Sean $I \subset S$ un ideal monomial generado por los monomios $m_1, \dots, m_r \in S$ y Δ un complejo simplicial en r vértices. Si \mathbf{F}_Δ es exacto salvo en grado homológico $i = 0$, se dice que es una **resolución simplicial** de S/I .

Ejemplo 2.13. Tomemos de nuevo el complejo simplicial Δ del ejemplo 2.9, que tiene cuatro vértices. Consideremos en $S = k[x, y, z]$ el ideal $I = \langle x^2, xy, y^2, xz \rangle$. Con dicho orden, Δ quedaría etiquetado como en la figura:

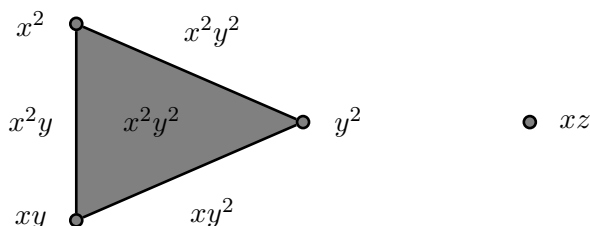


Figura 2.3:

Si ordenamos los símplices de dimensión 1 de Δ de la siguiente forma: $\{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2\}$ y el resto en la forma obvia, y escribimos las diferenciales en forma matricial, obtenemos que \mathbf{F}_Δ es el complejo:

$$\begin{aligned}
 0 \longrightarrow S(x^2y^2) \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow S(xy^2) \oplus S(x^2y^2) \oplus S(x^2y) \begin{pmatrix} 0 & y^2 & y \\ y & 0 & -x \\ -x & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
 \longrightarrow S(x^2) \oplus S(xy) \oplus S(y^2) \oplus S(xz) \begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & xz \end{pmatrix} \longrightarrow S \longrightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Vemos que dicho complejo no es exacto, debido a que el elemento $(z, 0, 0, -x)$, en grado homológico 1, tiene imagen nula, y no está en la imagen de la diferencial anterior. Por otro lado, vemos que aparece una constante en una de las matrices. Por tanto, incluso si los generadores del ideal son minimales, vemos que un complejo de módulos dado por un complejo simplicial no tiene por qué ser exacto, ni cumplir la condición de minimalidad $\partial_i(F_i) \subset \mathfrak{m}F_{i-1}$.

2.2. Complejos celulares

El punto de partida de las resoluciones celulares, que generalizan el proceso descrito en 2.10, se encuentra en [BStu]. En esta sección daremos las definiciones y resultados básicos que relacionan los complejos celulares y las resoluciones monomiales.

Tradicionalmente en Topología Algebraica, se ha intentado buscar un tipo de objeto que generalice a los bien conocidos complejos simpliciales. Un primer paso fueron los politopos y los complejos polihedrales que surgen a partir de ellos. Sin embargo, ciertos problemas requerían un grado de generalización mayor, para lo cual J.H.C. Whitehead definió el concepto de **complejo celular** o **CW**. Sin embargo, nosotros nos quedaremos a medio camino entre los complejos polihedrales y los CW, que son los complejos celulares regulares, los cuales denominaremos celulares a secas.

Definición 2.14. Llamaremos **politopo** en \mathbb{R}^d a la clausura convexa de una cantidad finita de puntos. Diremos que $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^d$ son los **vértices** del politopo \mathcal{P} si este es la clausura convexa de todos ellos, y ninguno está en la clausura convexa del resto. Escribiremos $V(\mathcal{P}) = \{v_1, \dots, v_r\}$, y definiremos su **dimensión**, $\dim(\mathcal{P})$, como la dimensión del subespacio afín generado por sus vértices. Llamaremos **caras** de \mathcal{P} a las clausuras convexas de subconjuntos de $V(\mathcal{P})$ que sean de la forma $H \cap \mathcal{P}$, donde H es un hiperplano de \mathbb{R}^d y \mathcal{P} está contenido en uno de los semiespacios que determina. Convenimos que el **vacío** es una cara de todo politopo.

Un **complejo celular polihedral** (o simplemente polihedral), X , es una colección de politopos (llamados **caras** de X) en cierto \mathbb{R}^d , que verifican:

1. Si $\mathcal{P} \in X$, entonces todas sus caras están en X .

2. Si $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in X$, entonces $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ es una cara de ambos.

Es decir, los conceptos de politopo y complejo polihedral generalizan en su forma geométrica los de símplice y complejo simplicial. El término **polihedro** se utiliza en la literatura para denotar a los subconjuntos de \mathbb{R}^d que son intersección de una cantidad finita de semiespacios, y se puede probar que entonces los politopos son justo los polihedros acotados (ver [BH, section 5.2]).

Por otro lado, en la definición de **cara** de un politopo, es superfluo que sean la clausura convexa de un subconjunto de vértices: se puede ver que todo subconjunto de un politopo \mathcal{P} de la forma $H \cap \mathcal{P}$, donde \mathcal{P} está en un semiespacio determinado por H , es la clausura convexa de un subconjunto de $V(\mathcal{P})$. Véase la figura 2.4.

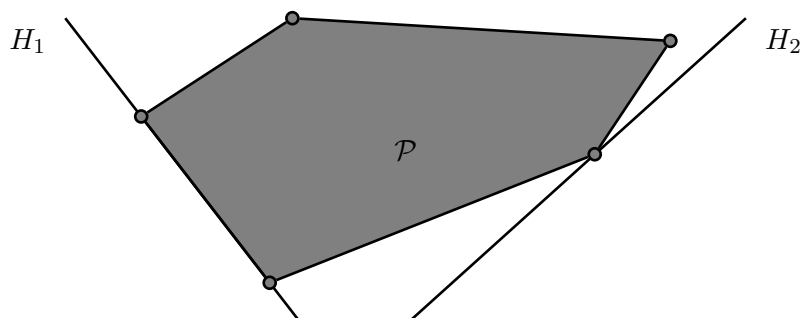


Figura 2.4: Caras de un politopo.

Una generalización, no tan abstracta como la de complejo CW, es la siguiente:

Definición 2.15. Un **complejo celular (regular)** es un par $X = (|X|, \Gamma)$, donde $|X|$ es un espacio topológico de Hausdorff y Γ una colección finita de subconjuntos suyos, llamados **caras** o **células abiertas**, tales que:

1. $|X| = \bigcup \Gamma$.
2. Si $e, e' \in \Gamma$ son distintos, entonces $e \cap e' = \emptyset$.
3. Para todo $e \in \Gamma$ no vacío, existe un homeomorfismo $f_e : \bar{B}_i \rightarrow \bar{e}$, que se restringe a un homeomorfismo $f_e : B_i \rightarrow e$, donde B_i es la bola

euclídea unidad (en \mathbb{R}^i) de dimensión $i \geq 0$, y \overline{E} indica la adherencia de E .

4. $\emptyset \in \Gamma$.

Se dice que $e \in \Gamma$ tiene **dimensión** i , y se escribe $\dim(e) = i$, si e es homeomorfo a B_i . Denotamos por Γ_i al conjunto de caras de X de dimensión i y llamamos **vértices** de X a las caras de dimensión cero, donde escribimos $V(X) = \Gamma_0$. Convenimos que $\Gamma_{-1} = \{\emptyset\}$. Definimos la **dimensión** de X como $\dim(X) = \max\{i/\Gamma_i \neq \emptyset\}$.

Por otro lado, dados $e, e' \in \Gamma$, se dice que e es una **cara** (resp. **propia**) de e' si $e \subset \overline{e'}$ (resp. si además, $e \neq e'$). Se dice que $Y = (|Y|, \Delta)$ es un **subcomplejo** de X si $|Y| \subset |X|$ es cerrado y tiene la topología inducida, y $\Delta \subset \Gamma$.

Tras estas definiciones, haremos varios comentarios. Primero, la **dimensión** de una cara de X está bien definida, pues $B_i \cong B_j$ sólo si $i = j$ (gracias al teorema de invarianza del dominio [Rot, theorem 6.36] o quitando un punto a ambos y hallando la homología singular [Rot, theorem 6.8]). Por otro lado, si e es una cara propia de e' , debe ser $\dim(e) < \dim(e')$ (de nuevo por invarianza del dominio, ver [Rot, exercise 6.20]). Además, por convenio definimos $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ y $B_0 = \{0\}$, por lo que los vértices son conjuntos unipuntuales.

Por otra parte, dar un **subcomplejo** de un complejo X es equivalente a dar una subcolección $\Delta \subset \Gamma$ tal que, si $e \in \Gamma$ es una cara de $e' \in \Delta$, entonces $e \in \Delta$ (en tal caso, se definiría $|Y| = \bigcup \Delta$).

Por último, los complejos polihedrales realmente generalizan a los simpliciales, y a su vez, los celulares a los polihedrales. Dejamos recogidos estos hechos en la siguiente proposición, cuya demostración omitimos por sencillez:

Proposición 2.16. *Todo símlice en \mathbb{R}^d es un politopo y, por tanto, todo complejo simplicial geométrico es un complejo polihedral. Por otro lado, todo complejo polihedral X es un complejo celular, donde $|X| = \bigcup X$, y sus células abiertas son los politopos de X , sustrayendo de ellos sus caras propias. Además, los conceptos de vértice, cara y dimensión, coinciden salvo que una cara de un complejo simplicial o polihedral es la adherencia de una cara del complejo celular correspondiente.*

Antes de continuar, conviene tener en cuenta las siguientes propiedades, triviales para complejos simpliciales, sencillas para polihedrales, y cuya demostración para complejos celulares requiere de nuevo el uso del teorema de invarianza del dominio (ver [Mas, section IV.6, (1) y (3)]):

Lema 2.17. *Dado un complejo celular $X = (|X|, \Gamma)$, $e, e' \in \Gamma$, se verifica:*

1. *Si $\dim(e) < \dim(e')$ y $e \cap (\overline{e'} \setminus e') \neq \emptyset$, entonces e es una cara de e' .*
2. *Si e es una cara de e' y $\dim(e') - \dim(e) = 2$, entonces existen exactamente dos caras $e_1, e_2 \in \Gamma$, tales que e es una cara propia de ambas y ambas son caras propias de e' . En particular, $\dim(e_1) = \dim(e_2) = \dim(e) + 1 = \dim(e') - 1$.*

En particular, toda cara $e \in \Gamma$, de dimensión $\dim(e) > 0$, tiene al menos dos vértices como caras suyas.

Este lema nos permite considerar funciones de incidencia, necesarias para definir la homología celular:

Definición 2.18. Dado un complejo celular $X = (|X|, \Gamma)$, una **función de incidencia** sobre X es una aplicación

$$\epsilon : \{(e, e') \in \Gamma^2 / \dim(e') - \dim(e) = 1\} \longrightarrow \{0, 1, -1\}$$

tal que:

1. $\epsilon(e, e') \neq 0$ si, y sólo si, e es una cara de e' .
2. $\epsilon(\emptyset, e) = 1$, para todo vértice $e \in \Gamma_0$.
3. Si $e, e' \in \Gamma$ son tales que e es una cara de e' y $\dim(e') - \dim(e) = 2$, entonces

$$\epsilon(e, e_1)\epsilon(e_1, e') + \epsilon(e, e_2)\epsilon(e_2, e') = 0,$$

para las dos caras propias e_1, e_2 de e' que contienen a e .

El concepto de función de incidencia formaliza el de **orientación relativa**. Es decir, indica cuándo una cara lo es de otra (por la propiedad 1), y en caso afirmativo, indica si la orientación de la cara mayor induce la de la cara menor (mediante un signo positivo o negativo). El siguiente lema, que no demostraremos (ver [Mas, section IV.5 y lemma IV.7.1]), es necesario para que la definición de homología celular sea consistente.

Lema 2.19. *Para cualquier complejo celular existe al menos una función de incidencia.*

Definición 2.20. Sea $X = (|X|, \Gamma)$ un complejo celular de dimensión d . Denotamos por k^{Γ_i} al k -espacio vectorial de base Γ_i . Se define entonces el **complejo de cadenas (aumentado)** de X sobre k como el complejo:

$$\tilde{\mathbf{C}}(X, k) \equiv 0 \longrightarrow k^{\Gamma_d} \xrightarrow{\partial_d} k^{\Gamma_{d-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow k^{\Gamma_1} \xrightarrow{\partial_1} k^{\Gamma_0} \xrightarrow{\partial_0} k^{\Gamma_{-1}} \longrightarrow 0,$$

donde la diferencial es:

$$\partial_i(e) = \sum_{e' \in \Gamma_{i-1}} \epsilon(e', e)e',$$

y definimos su **homología reducida** i -ésima como $\tilde{H}_i(X, k) = \ker(\partial_i) / \text{Im}(\partial_{i+1})$, para $-1 \leq i \leq d$.

Por otro lado, dados monomios $m_1, \dots, m_r \in S$, definimos el **complejo de cadenas etiquetado** asociado a X y m_1, \dots, m_r , como el complejo:

$$\mathbf{F}_X \equiv 0 \longrightarrow F_{d+1} \xrightarrow{\partial_{d+1}} F_d \longrightarrow \dots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \longrightarrow 0,$$

donde F_i es el S -módulo libre de base Γ_{i-1} , $V(X) = \{v_1, \dots, v_r\}$, multigradado por $\text{mdeg}(e) = m_e = \text{mcm}\{m_j/v_j \in \bar{e}\}$ (tiene sentido por 2.17), y cuya diferencial es:

$$\partial_{i+1}(e) = \sum_{e' \in \Gamma_{i-1}} \epsilon(e', e)(m_e/m_{e'})e'.$$

De nuevo, se verifica que $\partial_{i-1}\partial_i = 0$, donde la demostración es la misma que para el caso de complejos simpliciales, donde ahora se utilizan las propiedades de la función de incidencia.

Se observará que hemos definido el complejo de cadenas de X utilizando una función de incidencia, sin especificar cuál. Se puede demostrar que para dos de estas funciones cualesquiera, obtenemos un isomorfismo canónico entre ambos complejos de cadenas (ver [BH, theorem 6.2.2] y [Mas, theorem IV.7.2]).

De nuevo, lo que hemos hecho es considerar dos complejos de módulos construidos a partir de X . Uno, no etiquetado, y que guarda la información topológica de X , y otro, etiquetado, que proporciona un complejo sobre el ideal $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$. Esto generaliza la construcción 2.10:

Proposición 2.21. *Dado un complejo simplicial abstracto Δ en los vértices $\{1, 2, \dots, r\}$, $\tilde{\Delta}$ su realización geométrica en \mathbb{R}^r (ver 2.2), y cuyos vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ se corresponden en orden con los de Δ , se tiene que la asignación*

$$\epsilon(\sigma, \sigma \setminus j_p) = (-1)^p,$$

donde $\sigma = \{j_0, j_1, \dots, j_i\} \in \Delta$, define una función de incidencia para el complejo celular $\tilde{\Delta}$, y los complejos de cadenas definidos en 2.10 para Δ coinciden con los definidos en 2.20 para $\tilde{\Delta}$ y ϵ .

Definición 2.22. Sean $I \subset S$ un ideal monomial generado por los monomios $m_1, \dots, m_r \in S$ y $X = (|X|, \Gamma)$ un complejo celular de r vértices. Si \mathbf{F}_X es exacto salvo en grado homológico $i = 0$, se dice que es una **resolución celular** de S/I .

Observación 2.23. Dada esta definición, surgen varias preguntas. Por un lado, nos preguntamos si todo ideal monomial admite una resolución celular. La respuesta es afirmativa, y de hecho, la resolución de Taylor, que veremos en la siguiente sección, proporciona una resolución simplicial para todo ideal monomial.

Por otro lado, nos preguntamos si hay ideales monomiales cuya resolución minimal sea simplicial, celular pero no simplicial, o ninguna de las dos cosas. Los tres casos pueden ocurrir. La resolución minimal del ideal \mathfrak{m} es el complejo de Koszul $\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n)$, que, como veremos en el siguiente capítulo, coincide con la resolución de Taylor y, por tanto, es simplicial. Al final de la sección 3.4 veremos un ejemplo de ideal fuertemente estable cuya resolución minimal es polihedral pero no simplicial. Y por último, en [Vel] se dan ejemplos de ideales monomiales cuya resolución minimal no es celular.

Dado un complejo celular $X = (|X|, \Gamma)$ etiquetado por los monomios $m_1, \dots, m_r \in S$, y $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ tal que $\underline{x}^{\mathbf{a}} \in I$, denotaremos por $X_{\prec \mathbf{a}}$ y $X_{\preceq \mathbf{a}}$ a los subcomplejos celulares dados por las caras con multigrados $\mathbf{b} \prec \mathbf{a}$ y $\mathbf{b} \preceq \mathbf{a}$, respectivamente, donde $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ si, y sólo si, $a_i \leq b_i$, para cada i . Obviamente, ninguna cara de X tiene multigrado $\preceq \mathbf{a}$ si $\underline{x}^{\mathbf{a}} \notin I$. Un criterio sencillo de **exactitud** es el siguiente:

Lema 2.24. *Dado un complejo celular X y unos monomios $m_1, \dots, m_r \in S$, \mathbf{F}_X es una resolución celular de S/I (para $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$) si, y sólo si, $X_{\prec \mathbf{a}}$ es **acíclico** (su homología reducida es nula), para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ tal que $\underline{x}^{\mathbf{a}} \in I$.*

Demostración. Como \mathbf{F}_X es multigraduado, su homología verifica $H_i(\mathbf{F}_X) = \bigoplus_{\mathbf{a}} H_i(\mathbf{F}_X)_{\mathbf{a}}$, y $H_i(\mathbf{F}_X)_{\mathbf{a}} = H_i(\mathbf{F}_{X,\mathbf{a}})$, donde $\mathbf{F}_{X,\mathbf{a}}$ es el subcomplejo de k -espacios vectoriales de \mathbf{F}_X formado por los elementos de multigrado \mathbf{a} . Por tanto, vemos que \mathbf{F}_X es exacto en grado homológico i si, y sólo si, $\mathbf{F}_{X,\mathbf{a}}$ también lo es, para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$.

Ahora bien, se ve fácilmente que $\mathbf{F}_{X,\mathbf{a}}$ es un complejo canónicamente isomorfo a $\tilde{\mathbf{C}}(X_{\preceq \mathbf{a}}, k)$, cuando $\underline{x}^{\mathbf{a}} \in I$, que siempre tiene homología nula en $i = 0$. Observemos que la homología que aparece en \mathbf{F}_X , para el grado homológico $i = 0$, proviene precisamente de los multigrados \mathbf{a} que verifican que $\underline{x}^{\mathbf{a}} \notin I$. \square

Por otro lado, la información topológica de los complejos celulares, junto con su etiquetado, proporcionan también algunos invariantes de los ideales monomiales que resuelven:

Teorema 2.25. *Sea \mathbf{F}_X una resolución celular de S/I , para un ideal monomial $I \subset S$. Entonces:*

$$\beta_{i,\mathbf{a}}(I) = \dim_k(\tilde{H}_{i-1}(X_{\prec \mathbf{a}}, k)),$$

si $\underline{x}^{\mathbf{a}} \in I$, y $\beta_{i,\mathbf{a}}(I) = 0$ en otro caso.

Demostración. Si $\underline{x}^{\mathbf{a}} \notin I$, es claro que $\beta_{i,\mathbf{a}}(I) = 0$. Si $\underline{x}^{\mathbf{a}} \in I$, utilizaremos la caracterización en términos de Tor (proposición 1.6). Se ve fácilmente que $(\mathbf{F}_X \otimes_S k)_{i,\mathbf{a}}$ es el cociente de $\tilde{\mathbf{C}}(X_{\preceq \mathbf{a}}, k)_i$ por $\tilde{\mathbf{C}}(X_{\prec \mathbf{a}}, k)_i$, es decir, tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathbf{C}}(X_{\prec \mathbf{a}}, k) \longrightarrow \tilde{\mathbf{C}}(X_{\preceq \mathbf{a}}, k) \longrightarrow (\mathbf{F}_X \otimes_S k)_{\mathbf{a}} \longrightarrow 0.$$

Por el lema anterior, $X_{\prec \mathbf{a}}$ es acíclico, por lo que el resultado se deduce tomando la sucesión exacta larga en homología (ver [Mar, teorema 2.3]). \square

Y en cuanto a la serie de Hilbert, esta queda determinada por la versión multigraduada de la bien conocida característica de Euler de un complejo simplicial o celular:

Definición 2.26. Dado un complejo celular $X = (|X|, \Gamma)$ etiquetado por los monomios $m_1, \dots, m_r \in S$, se define su **característica de Euler multigraduada** como el polinomio:

$$\chi(X; x_1, \dots, x_n) = \sum_{e \in \Gamma} (-1)^{1+\dim(e)} m_e,$$

donde $m_e = \text{mcm}\{m_j/v_j \text{ es un vértice de } e\}$.

Si tomamos la definición usual de característica de Euler (ver [Rot, páginas 145 y 221]), $\chi(X) = \sum_i (-1)^i f_i(X)$, donde $f_i(X)$ es el número de caras de X de dimensión i , obtenemos que:

$$\chi(X) = -\chi(X; 1, \dots, 1).$$

Teorema 2.27. *Sea X un complejo celular etiquetado por los monomios $m_1, \dots, m_r \in S$, y sea $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$. Si \mathbf{F}_X es una resolución celular de S/I , entonces:*

$$H_{S/I}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\chi(X; x_1, \dots, x_n)}{(1-x_1) \cdots (1-x_n)}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\frac{\chi(X; x_1, \dots, x_n)}{(1-x_1) \cdots (1-x_n)} = \sum_{e \in \Gamma} (-1)^{1+\dim(e)} \left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} m_e \underline{x}^{\mathbf{a}} \right).$$

Ahora bien, para cada multigrado \mathbf{b} , si hallamos $\dim_k((S/I)_{\mathbf{b}})$ mediante una suma alternada para $\mathbf{F}_{X, \mathbf{b}}$, obtenemos que:

$$\dim_k((S/I)_{\mathbf{b}}) = \sum (-1)^{1+\dim(e)},$$

para los $e \in \Gamma$ tales que m_e divide a $\underline{x}^{\mathbf{b}}$, de donde se deduce el resultado. \square

2.3. La resolución de Taylor

En esta sección construiremos la **resolución de Taylor**, que consiste en el ejemplo más sencillo de resolución celular. De hecho, es una resolución simplicial construida a partir de un símplice, y puede aplicarse a cualquier ideal monomial. Su principal desventaja es que no sólo no será minimal en la mayoría de los casos, sino que su longitud coincide con el número de generadores monomiales elegido para el ideal que resuelve, y por tanto puede ser muy grande, alejándose de la cota que proporciona el teorema de las sigijas de Hilbert y que es el número de variables, n (ver [Mar, teorema 1.48]).

Por otro lado, el **complejo de Koszul** ([Mar, sección 2.4]) construido a partir de una sucesión S -regular de monomios será un caso particular de resolución de Taylor. Esta nueva interpretación del complejo de Koszul sugiere definir un **complejo simplicial de Koszul** asociado al ideal monomial de partida para hallar sus números de Betti de forma similar a 1.7.

Definición 2.28. Sea $I \subset S$ un ideal monomial generado por los monomios $m_1, \dots, m_r \in S$. Definimos la **resolución de Taylor** de S/I asociada a los generadores m_1, \dots, m_r como \mathbf{T}_I , el complejo de cadenas etiquetado asociado a Δ y m_1, \dots, m_r , donde Δ es el complejo simplicial $(r - 1)$ -dimensional formado por todos los subconjuntos de $\{1, 2, \dots, r\}$ (es decir, un “simplex lleno”).

En principio, \mathbf{T}_I depende del sistema de generadores elegido, pero no haremos referencia a estos a no ser que sea necesario. Podemos describir explícitamente dicho complejo de forma análoga al complejo de Koszul, utilizando productos exteriores, debido a la simple estructura de Δ : Definimos $T_{I,i} = \bigwedge^i(S^r)$, y podemos tomar como base multigradaada

$$\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_i}, \text{ donde } \text{mdeg}(\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_i}) = \text{mcm}\{m_{j_1}, \dots, m_{j_i}\},$$

siempre que $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq r$, e $i \leq r$. La diferencial de \mathbf{T}_I en esta base tiene la siguiente expresión:

$$\partial_i(\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_i}) = \sum_{p=1}^i (-1)^{p+1} \frac{\text{mcm}(m_{j_1}, \dots, m_{j_i})}{\text{mcm}(m_{j_1}, \dots, \widehat{m_{j_p}}, \dots, m_{j_i})} (\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{e}_{j_p}} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_i}).$$

Antes de comprobar su exactitud, veamos que el complejo de Koszul es un caso particular (recordemos de [Mar, sección 2.4] la definición de sucesión regular y complejo de Koszul asociado):

Teorema 2.29. Sea $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ una sucesión S -regular de monomios de S . Entonces $(\mathbf{K}(\mathbf{m}), d) = (\mathbf{T}_I, \partial)$, donde $(\mathbf{K}(\mathbf{m}), d)$ es el complejo de Koszul asociado a \mathbf{m} , e $I = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$. Además, es su resolución libre minimal multigradaada.

Demostración. Se deduce de la descripción anterior en términos de productos exteriores. Observemos que \mathbf{m} es S -regular si, y sólo si, los monomios m_i no comparten variables, lo que equivale a $\text{mcm}\{m_{j_1}, \dots, m_{j_i}\} = m_{j_1} \cdots m_{j_i}$, si $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq r$, e $i \leq r$. El hecho de que sea minimal es obvio, pues se cumple la condición $\partial_{i+1}(T_{I,i+1}) \subset \mathbf{m}T_{I,i}$. \square

Observación 2.30. Podemos decir más. Sabemos también que \mathbf{m} es S -regular si, y sólo si, $\mathbf{K}(\mathbf{m})$ es exacto (por [Mar, teorema 2.30]), y como veremos a continuación, \mathbf{T}_I siempre lo es. Por tanto, vemos que de hecho, $\mathbf{K}(\mathbf{m}) = \mathbf{T}_I$ si, y sólo si, \mathbf{m} es S -regular. En cuanto a lo que comentábamos antes sobre la longitud de \mathbf{T}_I , sabemos que es justo el número de generadores escogidos, y la resolución minimal de I tiene longitud a lo sumo n . Ahora bien, si \mathbf{m} es S -regular, al no compartir variables, debe ser $r \leq n$, por lo que no entramos en ninguna contradicción (ver también el ejemplo 1.11).

Ahora, para ver su **exactitud**, utilizamos el criterio 2.24 y observamos que, para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ tal que $\underline{x}^{\mathbf{a}} \in I$, $\Delta_{\preceq \mathbf{a}}$ es el complejo simplicial formado por todos los subconjuntos de $\{j/m_j \text{ divide a } \underline{x}^{\mathbf{a}}\}$, por lo que vuelve a ser un “símplice lleno”. Procedemos ahora de dos formas.

Un **argumento topológico** sería el siguiente: podemos aplicar directamente [Rot, corollary 7.18], que dice simplemente que estos complejos son acíclicos, o ver que su homología reducida coincide con la homología singular de $|\Delta|$ (por [Rot, theorem 7.22], para una realización geométrica cualquiera de Δ), que es un subconjunto convexo de cierto \mathbb{R}^d y por tanto tiene homología singular nula (por [Rot, theorem 4.19]).

Pero también podemos dar un **argumento algebraico**: podemos aprovechar lo que conocemos del complejo de Koszul $\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n)$. Sabemos que es multigradado y exacto (ver 1.7). Ahora bien, $\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{T}_{\mathbf{m}}$ para los generadores x_1, \dots, x_n de \mathbf{m} , y para cada $r \leq n$, $\Delta_{\preceq x_1 \dots x_r}$ es el complejo simplicial formado por todos los subconjuntos de $\{1, 2, \dots, r\}$, y es acíclico por 2.24.

Es decir, aunque el complejo $\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n)$ sea un caso muy particular de resolución de Taylor, conocer su exactitud equivale a conocer la exactitud de todas las resoluciones de Taylor posibles. En el capítulo 3 veremos otra demostración.

Aunque la resolución de Taylor no sea minimal, permite obtener algunas cotas (poco ajustadas en general) para los números de Betti. Recogemos estos hechos en la siguiente proposición, que se deducen directamente de la propia resolución:

Proposición 2.31. *Sea $I \subset S$ un ideal monomial generado por los monomios $m_1, \dots, m_r \in S$. Entonces,*

1. $\beta_{i,\mathbf{a}}^S(S/I) = 0$, si $\underline{x}^{\mathbf{a}}$ no divide a $\text{mcm}\{m_1, \dots, m_r\}$.
2. Si I es libre de cuadrados, entonces $\beta_{i,\mathbf{a}}^S(S/I) = 0$ si $\underline{x}^{\mathbf{a}}$ no es libre de cuadrados.
3. $\text{reg}(S/I) \leq \text{deg}(\text{mcm}\{m_1, \dots, m_r\})$.

En los apartados 1 y 3, se pueden ajustar las cotas tomando como m_1, \dots, m_r el sistema minimal de generadores monomiales de I .

Observación 2.32. El apartado 2 asegura que los números de Betti multigrados no nulos de un ideal libre de cuadrados caen en multigrados que son libres de cuadrados. Observamos que, de la descripción de la resolución de Eliahou-Kervaire libre de cuadrados de la sección 1.5, los **ideales estables libres de cuadrados** son un ejemplo no trivial de este hecho.

Por último, introduciremos el **complejo simplicial de Koszul** asociado a un ideal monomial. Dicho complejo simplicial permite calcular los números de Betti de dicho ideal, en analogía a cómo lo permite el complejo de Koszul $\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n)$ tensorizado con dicho ideal (ver 1.7).

Definición 2.33. Sea $I \subset S$ un ideal monomial, y sea $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ un multigrado. Se define el **complejo simplicial de Koszul** asociado a I en multigrado \mathbf{a} como:

$$K^{\mathbf{a}}(I) = \{\sigma \subset \{1, 2, \dots, n\} / \underline{x}^{\mathbf{a}-\sigma} \in I\},$$

donde $\underline{x}^{\mathbf{a}-\sigma} = \prod_{i \notin \sigma} x_i^{a_i}$, como en 2.4.

Teorema 2.34. Dado un ideal monomial $I \subset S$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$, se tiene:

$$\beta_{i,\mathbf{a}}^S(I) = \dim_k(\tilde{H}_{i-1}(K^{\mathbf{a}}(I), k)).$$

Demostración. Primero, por 1.7, tenemos que

$$\beta_{i,\mathbf{a}}^S(I) = \dim_k(H_i(\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n) \otimes I)_{\mathbf{a}}).$$

Ahora veamos que los complejos de k -espacios vectoriales $(\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n) \otimes I)_{\mathbf{a}}$ y $\tilde{\mathbf{C}}(K^{\mathbf{a}}(I), k)$ son canónicamente isomorfos, salvo por el correspondiente desfase en grado homológico (según 2.11):

Primero, una base de $(\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n) \otimes I)_{\mathbf{a},i}$ la forman los elementos $(\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_i}) \otimes \underline{x}^{\mathbf{b}}$, donde, si $\tau = \{j_1, \dots, j_i\}$, entonces $\underline{x}^{\mathbf{b}} = \underline{x}^{\mathbf{a}-\tau} \in I$. Estos se corresponden con los símplices que aparecen en $K^{\mathbf{a}}(I)$. Por otro lado, es claro de sus definiciones, que ambas diferenciales coinciden en dichas bases. Por lo tanto, ambos complejos son isomorfos. \square

2.4. La resolución de Eliahou-Kervaire

En esta sección no demostraremos que la resolución de Eliahou-Kervaire realmente es un complejo exacto, pero hallaremos los números de Betti multi-graduados (y por tanto el resto de invariantes que aparecen en 1.36) de un ideal fuertemente estable viendo que coinciden con los del módulo inicial del módulo de sus primeras sicigias, para ciertos órdenes monomiales. Esto da una información complementaria, ya que indica que el módulo de primeras sicigias de un ideal fuertemente estable verifica la igualdad en 1.23.

Para llegar a este objetivo, veremos qué propiedades verifican los complejos simpliciales de Koszul de un ideal fuertemente estable. Para este estudio necesitamos algunas nociones técnicas sobre complejos simpliciales, que desarrollaremos según sea necesario para nuestros propósitos.

Definición 2.35. Sean $\Delta' \subset \Delta$ dos complejos simpliciales. Definimos el **complejo de cadenas relativo** al par (Δ', Δ) como el complejo:

$$\tilde{\mathbf{C}}(\Delta', \Delta, k) \equiv \dots \longrightarrow k^{\Gamma_i(\Delta) \setminus \Gamma_i(\Delta')} \xrightarrow{\bar{\partial}_i} k^{\Gamma_{i-1}(\Delta) \setminus \Gamma_{i-1}(\Delta')} \longrightarrow \dots,$$

es decir, el complejo formado por los cocientes $k^{\Gamma_i(\Delta) \setminus \Gamma_i(\Delta')}$, con las diferenciales inducidas. Se define entonces la **homología relativa** i -ésima del par (Δ', Δ) como $\tilde{H}_i(\Delta', \Delta) = \ker(\bar{\partial}_i) / \text{Im}(\bar{\partial}_{i+1})$.

Es sencillo ver que dicho complejo de k -espacios vectoriales está bien definido, y de hecho tenemos la sucesión exacta corta natural:

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathbf{C}}(\Delta', k) \longrightarrow \tilde{\mathbf{C}}(\Delta, k) \longrightarrow \tilde{\mathbf{C}}(\Delta', \Delta, k) \longrightarrow 0,$$

que induce la sucesión exacta larga en homología (por [Mar, teorema 2.3]):

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(\Delta', \Delta) \longrightarrow \tilde{H}_i(\Delta') \longrightarrow \tilde{H}_i(\Delta) \longrightarrow \tilde{H}_i(\Delta', \Delta) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(\Delta') \longrightarrow \dots$$

Otro par de conceptos técnicos que necesitaremos son los siguientes:

Definición 2.36. Sea Δ un complejo simplicial en los vértices $\{1, 2, \dots, r\}$. Decimos que es **desfasado** o **shifted** si verifica la siguiente condición: Para todos $1 \leq i < j \leq r$, y para toda cara $\sigma \in \Delta$ con $i \in \sigma$, se verifica $(\sigma \setminus i) \cup j \in \Delta$. Por otro lado, considerando un vértice más, $r + 1$, definimos el **cono** de Δ desde el vértice $r + 1$ como el complejo simplicial:

$$(r + 1) * \Delta = \{\sigma \cup \{r + 1\} / \sigma \in \Delta\}.$$

La formación del cono sobre un complejo simplicial es la usual en topología. Véase la figura 2.5.

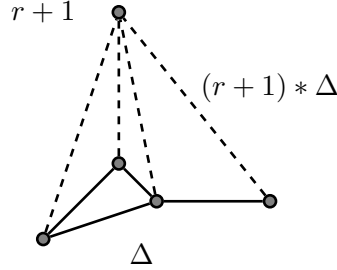


Figura 2.5: Cono sobre Δ .

Los complejos simpliciales de Koszul de un ideal fuertemente estable serán desfasados, y es por lo que introducimos esta noción. Necesitaremos la siguiente propiedad que cumplen este tipo de complejos:

Lema 2.37. *Sea Δ un complejo simplicial desfasado en los vértices $\{1, 2, \dots, r\}$, y sea $\Delta' \subset \Delta$ el subcomplejo formado por las caras de Δ que no tienen a r como vértice. Entonces, $\dim_k(\tilde{H}_i(\Delta, k))$ es el número de caras maximales, σ , de dimensión i de Δ' tales que $\sigma \cup r$ no es una cara de Δ . Es decir:*

$$\dim_k(\tilde{H}_i(\Delta, k)) = \#(\Gamma_{i+1}(r * \Delta') \setminus \Gamma_{i+1}(\Delta)).$$

Demostración. Obviamente $\Delta \subset r * \Delta'$, por lo que podemos considerar la homología relativa de dicho par. Por la sucesión exacta larga correspondiente, tenemos para cada i la sucesión exacta

$$\tilde{H}_{i+1}(r * \Delta') \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(r * \Delta', \Delta) \longrightarrow \tilde{H}_i(\Delta) \longrightarrow \tilde{H}_i(r * \Delta').$$

Ahora bien, si tomamos la realización geométrica estándar, vemos que $|r * \Delta'|$ es un espacio contráctil, de hecho, es el cono sobre $|\Delta'|$ según la definición usual en topología, que sabemos que es contráctil ([Rot, theorem 1.11]), y como ya habíamos comentado, su homología reducida coincide con su homología singular ([Rot, theorem 7.22]) y esta es nula por ser contráctil ([Rot, corollary 4.25]). En resumen, juntando esto con la sucesión exacta anterior, obtenemos que $\tilde{H}_i(\Delta) \cong \tilde{H}_{i+1}(r * \Delta', \Delta)$.

Por otro lado, como Δ es desfasado, se comprueba fácilmente que, en el complejo relativo $\widetilde{\mathbf{C}}(\Delta', \Delta, k)$, la diferencial es nula, ya que, si $\sigma \in \Delta'$, entonces todas las caras de $\sigma \cup r$ están en Δ . Por lo tanto,

$$\dim_k(\widetilde{H}_{i+1}(r * \Delta', \Delta)) = \dim_k(k^{\Gamma_{i+1}(r * \Delta')} / k^{\Gamma_{i+1}(\Delta)}),$$

de donde se deduce el resultado. \square

Ya disponemos de las herramientas combinatorias necesarias para continuar con nuestro estudio. En el resto de la sección, fijaremos $I \subset S$ un ideal fuertemente estable, $\{m_1, \dots, m_r\}$ su sistema minimal de generadores monomiales y $M \subset S^r$ el primer módulo de sicigias de I , es decir, según la notación de [Mar, secciones 1.3 y 1.5], $M = \text{Sic}(m_1, \dots, m_r) = \text{Sic}_1(I)$.

Por comodidad, denotaremos $u_i = \text{máx}(m_i)$, y ordenaremos los monomios m_i de forma que, si $i > j$, entonces $u_i \leq u_j$ y $\deg_{u_j}(m_i) \leq \deg_{u_j}(m_j)$, donde \deg_u indica el grado de un monomio respecto de la variable x_u .

En los siguientes resultados utilizamos la notación de [Mar, capítulo 3] sobre órdenes monomiales y bases de Groebner, y la notación de la sección 1.4 sobre ideales fuertemente estables.

Teorema 2.38. *El conjunto $G = \{x_u \mathbf{e}_j - e(x_u m_j) \mathbf{e}_i / u < u_j \text{ y } m_i = b(x_u m_j)\}$ es la base de Groebner reducida de M , para cualquier orden POT, $<$, en S^r con el orden de los vectores $\mathbf{e}_1 > \mathbf{e}_2 > \dots > \mathbf{e}_n$. En particular:*

1. $\text{in}(M) = \bigoplus_{i=1}^r \langle x_1, x_2, \dots, x_{u_j-1} \rangle \mathbf{e}_j$.
2. $\beta_{p, \mathbf{a}}^S(\text{in}(M))$ es el número de índices $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ tales que $\underline{x}^{\mathbf{a}} = \underline{x}^\sigma m_i$, para cierto $\sigma \subset \{1, 2, \dots, u_i - 1\}$ con $\#\sigma = p + 1$.

Demostración. Lo primero que debemos tener en cuenta es que $M \subset S^r$ es un submódulo multigraduado para la multigraduación $S(m_1) \oplus \dots \oplus S(m_r)$, pero no tiene por qué ser monomial, según lo visto en la sección 1.1.

Ahora, sean $1 \leq j \leq r$ y $u < u_j$. Por el lema 1.35, podemos escribir $x_u m_j = m' m_i$, con $m_i = b(x_u m_j)$ y $m' = e(x_u m_j)$, y $u_i \leq \text{mín}(m')$. En particular vemos que $i \neq j$, y veamos que de hecho $i > j$. Claramente, $\text{mín}(m') \leq u_j$, y si tenemos que $\text{mín}(m') < u_j$, entonces no puede ser $j > i$ por cómo hemos ordenado los m_i , ya que tendríamos $u_j > \text{mín}(m') \geq u_i$ y

$u_j \leq u_i$. Y si $\text{mín}(m') = u_j$, entonces debe ser $\deg_{u_j}(m_i) < \deg_{u_j}(m_j)$, por ser $x_u m_j = m' m_i$, por lo que tampoco puede ser $j > i$.

En definitiva, $x_u \mathbf{e}_j - e(x_u m_j) \mathbf{e}_i \in M$ y es una sicigia no nula, por lo que $G \subset M$. Veamos que es una base de Groebner de M para $<$. Primero, por ser el orden POT, tenemos que $\text{in}(x_u \mathbf{e}_j - e(x_u m_j) \mathbf{e}_i) = x_u \mathbf{e}_j$, ya que $i > j$. Si G no fuera base de Groebner, por ser I monomial, existiría una sicigia no nula de la forma $m'' \mathbf{e}_j - m' \mathbf{e}_i$, con $m', m'' \in S$ monomios, tales que $x_u \mathbf{e}_l$ no divide a $m' \mathbf{e}_i$ ni a $m'' \mathbf{e}_j$ para ningún l y ningún $u < u_l$. Esto implica que $\text{mín}(m') \geq u_i$ y $\text{mín}(m'') \geq u_j$, pero entonces el monomio $m = m' m_i = m'' m_j$ admitiría dos descomposiciones distintas como la indicada en el lema 1.35, lo cual es absurdo.

Finalmente, para ver que G es reducida, basta observar que si $i > j$ y $u < u_j$, y $v < u_i$, entonces $x_v \mathbf{e}_i$ no divide a $e(x_u m_j) \mathbf{e}_i$, por ser $v < u_i \leq \text{mín}(e(x_u m_j))$.

Ahora, el apartado 1 se deduce de que $\text{in}(x_u \mathbf{e}_j - e(x_u m_j) \mathbf{e}_i) = x_u \mathbf{e}_j$, si $i > j$, $u < u_j$. Por tanto, la resolución libre minimal multigradaada de $\text{in}(M)$ es la suma directa de los correspondientes complejos de Koszul, utilizando en cada uno la multigraduación dada por $\text{mdeg}(\mathbf{e}'_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}'_{j_i}) = x_{j_1} \cdots x_{j_i} m_j$, si $1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq u_j - 1$, para la correspondiente base canónica $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{u_j-1}\}$. Esto es debido a que estamos dando la multigraduación $\text{mdeg}(\mathbf{e}_j) = m_j$ en S^r . \square

Por la expresión que hemos obtenido de los números de Betti multigradaados de $\text{in}(M)$, vemos que si realmente se verifica $\beta_{p,\mathbf{a}}^S(\text{in}(M)) = \beta_{p,\mathbf{a}}^S(M)$, y no sólo la desigualdad en el teorema 1.23, entonces los números de Betti que surgirían de la resolución de Eliahou-Kervaire, si fuera realmente una resolución, son los correctos. Veamos entonces que se cumple dicha igualdad:

Teorema 2.39. *En la situación anterior, para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ y cada $p \geq 0$, $\beta_{p,\mathbf{a}}^S(\text{in}(M)) \leq \beta_{p,\mathbf{a}}^S(M)$ y por tanto, son iguales.*

Demostración. Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que $\beta_{p,\mathbf{a}}^S(\text{in}(M)) \neq 0$, y sea $k = \text{máx}\{i/a_i \neq 0\}$. Por el apartado 2 del teorema anterior, $\beta_{p,\mathbf{a}}^S(\text{in}(M))$ es el número de índices $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ que proporcionan un $\sigma \subset \{1, 2, \dots, u_j - 1\}$ tal que $\underline{x}^{\mathbf{a}} = \underline{x}^{\sigma} m_j$ y $\#\sigma = p + 1$. Para cada uno de estos, es claro que $\deg_{x_k}(m_j) = a_k$, por lo que los símlices anteriores verifican que $\sigma \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$.

Por otro lado, por 2.34, tenemos $\beta_{p,\mathbf{a}}^S(M) = \beta_{p+1,\mathbf{a}}^S(I) = \dim_k(\tilde{H}_p(K^{\mathbf{a}}(I)))$. Ahora, por ser I fuertemente estable, tenemos que $K^{\mathbf{a}}(I)$ es desfasado, y es sencillo ver que es un complejo simplicial en los vértices $\{1, 2, \dots, k\}$. Por el lema 2.37, tenemos que:

$$\beta_{p,\mathbf{a}}^S(M) = \#(\Gamma_{p+1}(k * \Delta') \setminus \Gamma_{p+1}(K^{\mathbf{a}}(I))) \geq \beta_{p,\mathbf{a}}^S(\text{in}(M)),$$

donde Δ' es como en 2.37, y la última desigualdad se deduce de lo descrito en el párrafo anterior. \square

Capítulo 3

Mapping Cones

La técnica de considerar “conos” sobre un cierto espacio topológico es tradicional en Topología Algebraica, pues sirve para reflejar cuándo una aplicación continua puede ser homótopa a una aplicación constante. De forma más general, se puede considerar lo que se denomina “**mapping cone**” de dos espacios topológicos, y que también refleja propiedades de homotopía (ver [Mas, section X.3]).

Pasando a los complejos de módulos que surgen en las teorías de homología singular, simplicial, celular, etc. se definió su versión en Álgebra Homológica, también denominada “mapping cone”, y que es la que trataremos en este capítulo (ver [Wei, pages 19, 20] para un breve comentario).

La idea de utilizar esta técnica para obtener resoluciones de ideales monomiales ha ido surgiendo poco después de que apareciera la **resolución de Eliahou-Kervaire** y, hasta la fecha, este es quizá el ejemplo más claro donde ha tenido éxito. Cinco años después de la aparición del artículo original [EK], en 1995 el artículo [EC] dio un primer paso en este sentido, definiendo de forma precisa la técnica que se utilizaría más adelante, que es la de **mapping cones iterados**.

Más adelante, en [HT] (y en una versión simplificada, en [PS]), se aplicó esta técnica para ideales monomiales que admiten **cocientes lineales y funciones de descomposición regulares**, que son precisamente las herramientas que permiten que el proceso de mapping cones iterados funcione. Sin embargo, no existen muchas familias de ideales con propiedades tan fuertes, y es precisamente la de ideales **estables** (y estables **libres de cuadrados**)

la que mejor se adapta a estas herramientas. Es por ello que veremos dicho proceso para la resolución de Eliahou-Kervaire, en la forma en que aparece en [HT], que ha sido apodada en otros artículos como **resolución de Eliahou-Kervaire generalizada**, y que se ha demostrado que es celular de forma simultánea en los artículos en [DM] y [Goo]. Veremos también cómo la exactitud de la resolución de Taylor se puede obtener con esta técnica.

3.1. Planteamiento general

En esta primera sección daremos la construcción general, y que actualmente sigue abierta a nuevas aplicaciones, más allá de situaciones tan específicas como la de ideales monomiales con cocientes lineales y funciones de descomposición. Recordemos las definiciones básicas de complejos y morfismos de complejos ([Mar, definiciones 1.25 y 1.27] ó [Wei, definition 1.1.1]).

Definición 3.1. Sean R un anillo cualquiera, (\mathbf{F}, d) y (\mathbf{G}, ∂) dos complejos de R -módulos y $\varphi : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ un morfismo entre ellos. Llamamos **mapping cone** de φ al complejo de R -módulos $\mathbf{MC}(\varphi)$ dado por $MC_i = F_{i-1} \oplus G_i$, y cuya diferencial es:

$$\delta_i(m, n) = (-d_{i-1}(m), \varphi_{i-1}(m) + \partial_i(n)), \quad \forall(m, n) \in F_{i-1} \oplus G_i.$$

Cuando no sea necesario especificar el morfismo φ , escribiremos simplemente **MC**.

Conviene recordar cómo se define la diferencial del mapping cone según el siguiente **diagrama**, o mediante una **matriz** de morfismos:

$$\delta_i \equiv \begin{array}{ccc} F_{i-1} & \xrightarrow{-d_{i-1}} & F_{i-2} \\ \oplus & \searrow \varphi_{i-1} & \oplus \\ G_i & \xrightarrow{\partial_i} & G_{i-1} \end{array} \quad \text{ó} \quad \delta_i = \begin{pmatrix} -d_{i-1} & 0 \\ \varphi_{i-1} & \partial_i \end{pmatrix}.$$

Expresar morfismos de R -módulos entre dos sumas directas como matrices cuyos coeficientes son a su vez morfismos de R -módulos puede aligerar la notación, y por tanto la utilizaremos en algunas ocasiones. Las reglas de composición de morfismos se traducen en esta notación en el producto de matrices, tal y como se define en su versión usual.

En los dos siguientes lemas recogemos las principales propiedades de exactitud del mapping cone que utilizaremos más adelante:

Lema 3.2. *Dado un morfismo $\varphi : (\mathbf{F}, d) \longrightarrow (\mathbf{G}, \partial)$, su mapping cone $(\mathbf{MC}(\varphi), \delta)$ es un complejo de R -módulos, y la siguiente sucesión es exacta:*

$$0 \longrightarrow \mathbf{G} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{MC}(\varphi) \xrightarrow{\beta} \mathbf{F}(-1) \longrightarrow 0,$$

donde α_i es el morfismo de inclusión, β_i el de proyección y en \mathbf{F} consideramos la diferencial $-d$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Dicha sucesión induce la sucesión exacta larga en homología:

$$\dots \longrightarrow H_i(\mathbf{G}) \xrightarrow{H_i(\alpha)} H_i(\mathbf{MC}) \xrightarrow{H_i(\beta)} H_{i-1}(\mathbf{F}) \xrightarrow{H_{i-1}(\varphi)} H_{i-1}(\mathbf{G}) \longrightarrow \dots$$

En particular, φ induce un isomorfismo $H_i(\varphi)$ en homología si, y sólo si, el complejo $\mathbf{MC}(\varphi)$ es exacto.

Demostración. Para ver que realmente $\mathbf{MC}(\varphi)$ es un complejo, la notación matricial simplificará los cálculos:

$$\delta_i \delta_{i+1} = \begin{pmatrix} -d_{i-1} & 0 \\ \varphi_{i-1} & \partial_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_i & 0 \\ \varphi_i & \partial_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{i-1}d_i & 0 \\ -\varphi_{i-1}d_i + \partial_i\varphi_i & \partial_i\partial_{i+1} \end{pmatrix} = 0.$$

Y, por otro lado, α y β definen morfismos de complejos:

$$\delta_i \alpha_i = \begin{pmatrix} -d_{i-1} & 0 \\ \varphi_{i-1} & \partial_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Id} \end{pmatrix} \partial_i = \alpha_{i-1} \partial_i, \text{ y}$$

$$(-d_{i-1})\beta_i = -d_{i-1}(\text{Id}, 0) = (-d_{i-1}, 0) = (\text{Id}, 0) \begin{pmatrix} -d_{i-1} & 0 \\ \varphi_{i-1} & \partial_i \end{pmatrix} = \beta_{i-1} \delta_i.$$

Ahora, los complejos (\mathbf{F}, d) y $(\mathbf{F}, -d)$ son canónicamente isomorfos y sus módulos de homología son de hecho el mismo. Por tanto, la sucesión exacta larga en homología se deduce de [Mar, teorema 2.3]. Falta comprobar que el homomorfismo conector, τ , es de hecho $H_i(\varphi)$. Siguiendo la prueba de dicho teorema, tomamos $\bar{x} \in H_i(\mathbf{F})$ y $(x, 0) \in MC_{i+1}$, una contraimagen de x . Entonces, $(0, \varphi_i(x)) = \delta_{i+1}(x, 0)$, por lo que $\tau_i(\bar{x}) = \underline{\varphi_i(x)}$, como queríamos demostrar. \square

Ahora utilizaremos este lema para construir resoluciones libres a partir de otras dadas:

Lema 3.3. *Dada una sucesión exacta corta de R -módulos:*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

y resoluciones libres (\mathbf{F}', d') y (\mathbf{F}, d) de M' y M , respectivamente, si llamamos también $\varphi : \mathbf{F}' \longrightarrow \mathbf{F}$ a la única (salvo homotopía) elevación de $\varphi : M' \longrightarrow M$, entonces $\mathbf{MC}(\varphi)$ es una resolución libre de M'' .

Demostración. La definición, existencia y unicidad (salvo homotopía) de la elevación $\varphi : \mathbf{F}' \longrightarrow \mathbf{F}$ se encuentra en [Mar, lema 2.5]. Ahora, claramente los módulos que aparecen en $\mathbf{MC}(\varphi)$ son libres por ser sumas directas de módulos libres. Por otro lado, la sucesión exacta larga en homología del lema anterior implica que $H_i(\mathbf{MC}(\varphi)) = 0$, para $i > 1$. El final de dicha sucesión exacta larga es:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(\mathbf{MC}) \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow H_0(\mathbf{MC}) \longrightarrow 0,$$

pues $H_0(\mathbf{F}') \cong M'$ y $H_0(\mathbf{F}) \cong M$ (y por ser $\varphi : \mathbf{F}' \longrightarrow \mathbf{F}$ elevación de $\varphi : M' \longrightarrow M$). Como φ es inyectiva, concluimos que $H_1(\mathbf{MC}) = 0$ y $H_0(\mathbf{MC}) \cong M''$, por lo que \mathbf{MC} es una resolución libre de M'' . \square

Ahora concretamos poco a poco el contexto en el que nos movemos para llegar a las aplicaciones que buscamos. Primero, vemos que si R es un anillo graduado, y (\mathbf{F}, d) y (\mathbf{G}, ∂) son complejos graduados de R -módulos, entonces su mapping cone es de nuevo un **complejo graduado**. Y en el segundo lema, si M', M, M'' y φ son graduados, y (\mathbf{F}', d') y (\mathbf{F}, d) son resoluciones libres graduadas, entonces \mathbf{MC} es una **resolución libre graduada** de M'' .

En el caso **graduado estándar** (o multigraduado) sobre $R = S$, puede ser que las resoluciones (\mathbf{F}', d') y (\mathbf{F}, d) sean **minimales**, pero \mathbf{MC} no serlo.

Ejemplo 3.4. Dados ideales $I, J \subset S$, siempre tenemos la sucesión exacta corta natural:

$$0 \longrightarrow I \cap J \xrightarrow{\varphi} I \oplus J \xrightarrow{\psi} I + J \longrightarrow 0,$$

donde $\varphi(f) = (f, -f)$ y $\psi(f, g) = f + g$. Podemos aplicar esto a los ideales monomiales $I = \langle x^2, y \rangle$ y $J = \langle x \rangle$ en el anillo $S = k[x, y]$. Tenemos entonces la sucesión:

$$0 \longrightarrow \langle xy, x^2 \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \longrightarrow \end{pmatrix} \langle x^2, y \rangle \oplus \langle x \rangle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \longrightarrow \end{pmatrix} \langle x, y \rangle \longrightarrow 0.$$

Ahora, es sencillo comprobar (mediante el algoritmo de Schreyer [Mar, lema 3.29 ó teorema 3.31], por ejemplo), que las resoluciones libres minimales graduadas de $I \cap J$ e $I \oplus J$ son, respectivamente:

$$0 \longrightarrow S \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \longrightarrow S^2 \begin{pmatrix} xy & x^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \langle xy, x^2 \rangle \longrightarrow 0, \text{ y}$$

$$0 \longrightarrow S \begin{pmatrix} y \\ -x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow S^3 \begin{pmatrix} x^2 & y & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \longrightarrow \langle x^2, y \rangle \oplus \langle x \rangle \longrightarrow 0.$$

Por otro lado, la elevación del morfismo φ viene dado por las matrices siguientes (indicadas a la derecha de su flecha correspondiente):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & S^2 & \longrightarrow & \langle xy, x^2 \rangle \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (-1) & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \\ -y & -x \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & S^3 & \longrightarrow & \langle x^2, y \rangle \oplus \langle x \rangle \longrightarrow 0. \end{array}$$

Por tanto, el mapping cone de φ nos proporciona la siguiente resolución libre del ideal $\langle x, y \rangle$:

$$0 \longrightarrow S \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow S^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & y \\ x & 0 & -x^2 \\ -y & -x & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow S^3 \begin{pmatrix} x^2 & y & -x \end{pmatrix} \longrightarrow \langle x, y \rangle \longrightarrow 0.$$

Vemos que efectivamente es graduada (de hecho multigrada), pero no es minimal, ya que aparecen términos constantes no nulos (haciendo fallar la condición de minimalidad $d_{i+1}(F_{i+1}) \subset \mathfrak{m}F_i$). También sabemos que no es minimal porque la dimensión proyectiva de $S/\langle x, y \rangle$ es 2 y sus números de Betti son 1 y 2 (ver [Mar, página 52]).

Por otro lado, la descripción de la diferencial del mapping cone como una matriz de morfismos nos permite construir sus matrices por cajas, adjuntando las matrices correspondientes. En este ejemplo, en grado homológico $i = 1$:

$$\delta = \left(\begin{array}{cc|c} -d & 0 & y \\ \varphi & \partial & -x^2 \\ \hline & & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \varphi & \partial & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & y \\ x & 0 & -x^2 \\ -y & -x & 0 \end{array} \right).$$

Finalmente, pasamos a aplicar el lema anterior al caso de **ideales monomiales**, para obtener la técnica que llamaremos de mapping cones iterados.

Sea $I \subset S$ un ideal monomial, cuyo sistema minimal de generadores monomiales es $\{m_1, \dots, m_r\}$. Consideremos $I_j = \langle m_1, m_2, \dots, m_j \rangle$, para $j = 1, 2, \dots, r$, ideales encajados. Entonces, para cada $j \geq 1$, la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow S/(I_j : m_{j+1}) \xrightarrow{m_{j+1}} S/I_j \longrightarrow S/I_{j+1} \longrightarrow 0,$$

donde el morfismo de la izquierda es multiplicar por m_{j+1} y el morfismo de la derecha es el morfismo natural de paso al cociente. Éste último es multigraduado (de grado 0), mientras que el de la izquierda es multigraduado, pero de grado m_{j+1} , por lo que consideraremos la **multigraduación desplazada** $S/(I_j : m_{j+1})(m_{j+1})$.

Observemos que la condición de minimalidad sobre el sistema de generadores $\{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ implica que la sucesión de ideales encajados $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_r = I$ es estrictamente creciente y por tanto en la sucesión exacta anterior, $S/(I_j : m_{j+1}) \neq 0$.

La técnica de **mapping cones iterados** consiste entonces en conocer resoluciones libres multigraduadas de S/I_1 (que es obvia por ser $I_1 = \langle m_1 \rangle$ principal) y de los cocientes $S/(I_j : m_{j+1})$, para $j = 1, 2, \dots, r-1$, y obtener así una resolución libre multigraduada de $S/I_r = S/I$, aplicando el lema anterior de forma iterada.

Observación 3.5. En el lema 3.3, no hemos especificado cuál es el morfismo sobreyectivo $\epsilon : MC_0 \longrightarrow M''$ que hace que $\dots \longrightarrow MC_1 \longrightarrow MC_0 \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ sea una sucesión exacta. Es decir, según la definición [Mar, definición 1.25], no hemos dado de forma explícita el **morfismo de aumento** de la resolución que proporciona el mapping cone. De hecho, podemos elegir varios (podemos multiplicar uno dado por un escalar de k para obtener otro, por ejemplo).

Sin embargo, cuando hacemos mapping cones iterados para ideales monomiales, en el paso $j \geq 1$, es natural considerar el morfismo de paso al cociente $S \longrightarrow S/I_{j+1}$, ya que la diferencial obtenida a partir de los sucesivos mapping cones en grado homológico $i = 1$ tiene la siguiente expresión:

$$S^{j+1} \begin{pmatrix} m_{j+1} & m_j & \dots & m_1 \end{pmatrix} S \longrightarrow 0,$$

lo cual es obviamente debido a que el morfismo φ que escogemos en el paso j es multiplicar por m_{j+1} .

Ejemplo 3.6. Consideremos el anillo $S = k[x, y]$ y el ideal $I = \langle x^2y, y^3, xy^2 \rangle$. Dichos generadores son minimales, en dicho orden los ideales encajados son $I_1 = \langle x^2y \rangle$, $I_2 = \langle x^2y, y^3 \rangle$ e $I_3 = I$, y los cocientes anteriores son:

$$(x^2y : y^3) = \langle x^2 \rangle \quad \text{y} \quad (\langle x^2y, y^3 \rangle : xy^2) = \langle x, y \rangle.$$

Conocemos las resoluciones de dichos cocientes y por tanto podemos aplicar el procedimiento anterior. En el siguiente diagrama aparecen dichas resoluciones junto con el morfismo de elevación, para la primera iteración del procedimiento:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{x^2} & S & \longrightarrow & S/\langle x^2 \rangle \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow y^2 & & \downarrow y^3 & & \downarrow y^3 \\ 0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{x^2y} & S & \longrightarrow & S/\langle x^2y \rangle \longrightarrow 0. \end{array}$$

Por tanto, obtenemos la siguiente resolución de S/I_2 :

$$0 \longrightarrow S \begin{pmatrix} -x^2 \\ y^2 \\ \longrightarrow \end{pmatrix} S^2 \begin{pmatrix} y^3 & x^2y \\ \longrightarrow & \end{pmatrix} S \longrightarrow S/\langle x^2y, y^3 \rangle \longrightarrow 0.$$

Ahora, para la segunda iteración, tenemos el morfismo de elevación entre las siguientes resoluciones:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S & \begin{pmatrix} y \\ -x \\ \longrightarrow \end{pmatrix} & S^2 & \begin{pmatrix} x & y \\ \longrightarrow & \end{pmatrix} & S & \longrightarrow & S/\langle x, y \rangle \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} & & \downarrow xy^2 & & \downarrow xy^2 \\ 0 & \longrightarrow & S & \begin{pmatrix} -x^2 \\ y^2 \\ \longrightarrow \end{pmatrix} & S^2 & \begin{pmatrix} y^3 & x^2y \\ \longrightarrow & \end{pmatrix} & S & \longrightarrow & S/\langle x^2y, y^3 \rangle. \end{array}$$

Y finalmente, hallando el mapping cone de este morfismo, obtenemos una resolución de S/I :

$$0 \longrightarrow S \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \\ \longrightarrow \end{pmatrix} S^3 \begin{pmatrix} -x & -y & 0 \\ 0 & x & -x^2 \\ y & 0 & y^2 \\ \longrightarrow & & \end{pmatrix} S^3 \begin{pmatrix} xy^2 & y^3 & x^2y \\ \longrightarrow & & \end{pmatrix} S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0,$$

que observamos que no es minimal, ya que tiene longitud 3 y la dimensión proyectiva de un S -módulo graduado es como mucho 2, el número de variables. Además, aparece un coeficiente constante no nulo en la primera matriz.

Este ejemplo nos sirve para ver que el orden en el que tomamos los generadores del ideal monomial es esencial, ya que si los ordenáramos como $I = \langle x^2y, xy^2, y^3 \rangle$, entonces los cocientes serían:

$$(x^2y : xy^2) = \langle x \rangle \quad \text{y} \quad (\langle x^2y, xy^2 \rangle : y^3) = \langle x \rangle.$$

Y en este caso ambas iteraciones son más sencillas y obtenemos la resolución siguiente:

$$0 \longrightarrow S^2 \begin{pmatrix} -x & 0 \\ y & -x \\ 0 & y \end{pmatrix} \longrightarrow S^3 \begin{pmatrix} y^3 & xy^2 & x^2y \end{pmatrix} \longrightarrow S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0,$$

que sí es minimal, ya que los coeficientes no nulos tienen grado positivo. De hecho, el ideal I no es fuertemente estable para el orden usual de las variables, pero sí lo es si ponemos $x_1 = y$ y $x_2 = x$. En este ejemplo hemos adelantado la prueba de cómo construir la resolución de Eliahou-Kervaire mediante mapping cones, que veremos en la siguiente sección.

3.2. La resolución de Taylor vía mapping cones

En esta breve sección aplicaremos el método anterior para demostrar directamente que la **resoluciones de Taylor** (sección 2.3) realmente es un complejo exacto. De hecho, lo que haremos será volver a **construir** dicha resolución.

Teorema 3.7. *Dado un ideal monomial $I \subset S$ y generadores monomiales suyos $m_1, \dots, m_r \in S$, la resolución de Taylor de S/I asociada a dichos generadores, \mathbf{T}_I , es un complejo exacto.*

Demostración. Utilizaremos las notaciones de la sección 2.3, y denotamos $I_j = \langle m_1, m_2, \dots, m_j \rangle$, para $1 \leq j \leq r$, y $Q_j = (I_j : m_{j+1})$, para $1 \leq j \leq r-1$. Procedemos entonces por inducción en j . Para $j = 1$, tenemos

$$\mathbf{T}_{I_1} \equiv 0 \longrightarrow \bigwedge^1 S = S \xrightarrow{m_1} \bigwedge^0 S = S \longrightarrow S/I_1 \longrightarrow 0,$$

que obviamente es exacto. Supongamos que hemos demostrado que \mathbf{T}_{I_j} es exacto, para cierto $j \geq 1$. Primero, observemos que $Q_j = \langle n_1, n_2, \dots, n_j \rangle$, donde $n_i = \text{mcm}(m_i, m_{j+1})/m_{j+1}$. Por tanto, por hipótesis de inducción, podemos utilizar las resoluciones \mathbf{T}_{I_j} y \mathbf{T}_{Q_j} , y obtenemos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & T_{Q_j,2} & \xrightarrow{\partial'_2} & T_{Q_j,1} & \xrightarrow{\partial'_1} & T_{Q_j,0} & \xrightarrow{\epsilon'} & S/Q_j & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi & & \\ \dots & \longrightarrow & T_{I_j,2} & \xrightarrow{\partial_2} & T_{I_j,1} & \xrightarrow{\partial_1} & T_{I_j,0} & \xrightarrow{\epsilon} & S/I_j & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

donde $\varphi(\bar{n}) = m_{j+1}\bar{n}$, $\{\varphi_i\}_{i \geq 0}$ es su elevación, y ϵ y ϵ' son los morfismos de paso al cociente. Podemos escoger la elevación de la siguiente forma:

$$\varphi_i(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}) = \frac{\text{mcm}(m_{j_1}, \dots, m_{j_i}, m_{j+1})}{\text{mcm}(m_{j_1}, \dots, m_{j_i})} (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}),$$

pues se verifica que $\partial_i \varphi_i = \varphi_{i-1} \partial'_i$ para $i \geq 1$, y $\epsilon \varphi_0 = \varphi \epsilon'$, para lo cual basta utilizar que

$$m_{j+1} \text{mcm}(n_{j_1}, \dots, n_{j_i}) = \text{mcm}(m_{j_1}, \dots, m_{j_i}, m_{j+1}).$$

Por tanto, al hallar el mapping cone de φ , obtenemos:

$$MC_i(\varphi) = T_{Q_j, i-1} \oplus T_{I_j, i} = \left(\bigwedge^{i-1} S^j \right) \oplus \left(\bigwedge^i S^j \right) \cong \bigwedge^i (S^{j+1}) \cong T_{I_{j+1}, i},$$

donde los isomorfismos son los naturales, y vemos que la diferencial de dicho mapping cone,

$$\delta_i = \begin{pmatrix} -d_{i-1} & 0 \\ \varphi_{i-1} & \partial_i \end{pmatrix},$$

resulta ser la diferencial $T_{I_{j+1}, i} \longrightarrow T_{I_{j+1}, i-1}$. Para ver esto, basta utilizar las expresiones anteriores entre las m_i y las n_i . Y hemos concluido la demostración. \square

3.3. La resolución de Eliahou-Kervaire generalizada

A continuación, utilizaremos la técnica de mapping cones iterados para obtener la resolución de Eliahou-Kervaire. Aunque la versión que aparece en

[PS] supone una pequeña simplificación de la prueba de [HT], seguiremos esta última, ya que proporciona una versión generalizada, donde se ve que los cocientes lineales y las funciones de descomposición son justo las herramientas que necesitamos para obtener la resolución que buscamos.

Además, esta versión generalizada incluye a la resolución de Eliahou-Kervaire libre de cuadrados y las resoluciones minimales de otros ideales monomiales, como los llamados “ideales matroidales”, que son los ideales de Stanley-Reisner de complejos simpliciales que verifican cierta propiedad y que se denominan “matroides” (ver [HT, section 1]).

En esta sección necesitaremos introducir bastante notación, aunque parte de ella no será más que una extensión de la utilizada en las secciones 1.4 y 1.5. En lo que sigue, fijaremos un **ideal monomial** $I \subset S$, cuyo conjunto de **monomios** y sistema minimal de **generadores** monomiales denotamos por $M(I)$ y $G(I)$, respectivamente.

Definición 3.8. Decimos que I tiene **cocientes lineales** si podemos ordenar los elementos de $G(I) = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ de forma que los cocientes $Q_j = \langle m_1, \dots, m_j \rangle : m_{j+1}$ están generados por variables, para todo $j \geq 1$. En tal caso, definimos

$$\text{set}(m_j) = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} / x_i \in Q_{j-1}\}.$$

También definimos $\text{set}(m_1) = \emptyset$.

Cuando pongamos $G(I) = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$, supondremos siempre que este es el orden para el cual I tiene cocientes lineales, y escribiremos $I_j = \langle m_1, \dots, m_j \rangle$. Cuando apliquemos la técnica de mapping cones iterados a estos ideales, supondremos siempre que tomamos como resolución de S/Q_j el **complejo de Koszul** $\mathbf{K}(\text{set}(m_{j+1}))$, que es su resolución libre minimal multigradaada.

Veamos ahora que los ideales **estables** y **estables libres de cuadrados** tienen cocientes lineales. Daremos dos órdenes en $G(I)$, donde $<_{\text{revlex}}$ es el orden lexicográfico inverso (es decir, en \mathbb{N}^n , $\alpha < \beta$ si la componente no nula más a la derecha de $\beta - \alpha$ es negativa):

1. Si $i < j$, entonces $\deg(m_i) < \deg(m_j)$ ó $\deg(m_i) = \deg(m_j)$ y en tal caso, $m_i >_{\text{revlex}} m_j$.

2. Si $i < j$, entonces $m_i >_{\text{revlex}} m_j$.

Ambos órdenes servirán para nuestros propósitos, pero con el primero obtenemos la ventaja de que $\deg(m_1) \leq \deg(m_2) \leq \dots \leq \deg(m_r)$. Denotamos también, al igual que en la sección 2.4, $u_i = \text{máx}(m_i)$.

Lema 3.9. *Si I es estable (resp. fuertemente), entonces para todo j , con dichos órdenes, el ideal $I_j = \langle m_1, m_2, \dots, m_j \rangle$ también es estable (resp. fuertemente) y*

$$(I_j : m_{j+1}) = \langle x_1, x_2, \dots, x_{u_{j+1}-1} \rangle.$$

Lema 3.10. *Si I es estable libre de cuadrados (resp. fuertemente), entonces para todo j , con dichos órdenes, el ideal $I_j = \langle m_1, m_2, \dots, m_j \rangle$ también es estable libre de cuadrados (resp. fuertemente) y*

$$(I_j : m_{j+1}) = \langle \{x_i/x_i \text{ no divide a } m_{j+1} \text{ e } i < u_{j+1}\} \rangle.$$

Demostración. Haremos simultáneamente ambas pruebas. Primero, I_j es estable (resp. fuertemente, ó libre de cuadrados), pues si x_k divide a m_q e $i < k$, $q \leq j$, (resp. $k = \text{máx}(m_q)$, ó además $x_i(m_q/x_k)$ es libre de cuadrados), entonces existe un m_s tal que $x_i m_q = x_k m_s m$, para cierto monomio $m \in S$. Si fuera $s > q$, como no puede ser $\deg(m_q) < \deg(m_s)$, tendríamos que $m_q >_{\text{revlex}} m_s$, por lo que $x_i m_q >_{\text{revlex}} x_k m_s m$, lo que es absurdo.

Veamos ahora la igualdad indicada. Primero, si $i < u_{j+1}$ (resp. y x_i no divide a m_{j+1}), entonces existe un m_s tal que $x_i m_{j+1} = x_{u_{j+1}} m_s m$, para cierto monomio $m \in S$. Se concluye igual que antes que debe ser $s < j + 1$, por lo que $x_i \in (I_j : m_{j+1})$.

Recíprocamente, si la contención fuera estricta, existiría un monomio $m \in S$ tal que $m_{j+1} m \in I_j$ y x_i no divide a m , para $i < u_{j+1}$ (resp. y tal que x_i no divide a m_{j+1}). En particular, vemos que $\text{máx}(m_{j+1}) \leq \text{mín}(m)$. Como I_j es estable (resp. fuertemente, libre de cuadrados), existe un m_s con $s \leq j$ y tal que $m_{j+1} m = m_s m'$, para cierto monomio $m' \in S$ con $\text{máx}(m_s) \leq \text{mín}(m')$. Entonces hemos encontrado dos expresiones distintas como la del lema 1.35 (resp. 1.44), lo que es absurdo. \square

Antes de hallar la resolución de forma completa, veamos cómo obtener sus bases multigraduadas de forma sencilla, lo que ya nos daría los números de Betti y todos los invariantes que aparecen en 1.36 y 1.45:

Teorema 3.11. *Si I admite cocientes lineales con el orden m_1, m_2, \dots, m_r y $\deg(m_1) \leq \deg(m_2) \leq \dots \leq \deg(m_r)$, entonces la resolución de S/I obtenida por mapping cones iterados es minimal y la base homogénea en grado homológico $p+1$, para $p \geq 1$ está dada por los siguientes símbolos:*

$$\{(m_j; j_1, \dots, j_p) / \{j_1, j_2, \dots, j_p\} \subset \text{set}(m_j), 1 \leq j \leq r\},$$

en grado homológico $i = 1$ por $(m_1; \emptyset), \dots, (m_r; \emptyset)$, y con la multigraduación dada por $\text{mdeg}(m_j; j_1, \dots, j_p) = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_p} m_j$.

Demostración. Haremos mapping cones iterados, por lo que procedemos por inducción en $j \geq 1$, donde denotamos por $\mathbf{F}^{(j)}$ a la resolución de S/I_j que obtendremos en cada paso. Para $j = 1$, tenemos $I_1 = \langle m_1 \rangle$, es principal y el teorema es obvio en este caso.

Si suponemos que es cierto para $j \geq 1$, entonces para construir la resolución de S/I_{j+1} , tenemos que hacer el mapping cone de $\mathbf{F}^{(j)}$ con la resolución minimal de S/Q_j , que es el complejo de Koszul $\mathbf{K}^{(j)} = \mathbf{K}(\text{set}(m_{j+1}))$. Ahora, $F_{p+1}^{(j+1)} = F_{p+1}^{(j)} \oplus K_p^{(j)}$, para $p \geq 0$, por lo que obtenemos la base deseada, definiendo $(m_{j+1}; j_1, \dots, j_p) = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p}$, en $K_p^{(j)}$.

Por último, si $\varphi : \mathbf{K}^{(j)} \rightarrow \mathbf{F}^{(j)}$ es el morfismo de elevación, como por hipótesis $\mathbf{K}^{(j)}$ y $\mathbf{F}^{(j)}$ son minimales, para ver que $\mathbf{F}^{(j+1)}$ también lo es, basta ver que $\varphi(K_{p+1}^{(j)}) \subset \mathfrak{m}F_{p+1}^{(j)}$. Pero esto se deduce de la multigraduación dada a las correspondientes bases, ya que el elemento $(m_{j+1}; j_1, \dots, j_{p+1})$ de la base de $K_{p+1}^{(j)}$ tiene multigrado $x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{p+1}} m_{j+1}$, y el elemento $(m_k; j_1, \dots, j_p)$ de la base de $F_{p+1}^{(j)}$ tiene multigrado $x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_p} m_k$, pero $\deg(m_k) \leq \deg(m_{j+1})$, para $k \leq j$, por lo que hay que multiplicar por cierto monomio no constante para que φ sea multigraduada. \square

Ahora, si queremos hallar completamente la resolución, es decir, calcular también sus diferenciales, necesitamos una herramienta más, que son las funciones de descomposición:

Definición 3.12. Si el ideal I tiene cocientes lineales para el orden $G(I) = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$, definimos la correspondiente **función de descomposición** como $b : M(I) \rightarrow G(I)$ tal que:

$$b(m) = m_j, \quad \text{donde } j = \min\{k \in \{1, 2, \dots, r\} / m \in I_k\}.$$

3.3. LA RESOLUCIÓN DE ELIAHOU-KERVAIRE GENERALIZADA 69

Y decimos que dicha función de descomposición es **regular** si verifica que $\text{set}(b(x_i m_j)) \subset \text{set}(m_j)$, para todo $i \in \text{set}(m_j)$, y $1 \leq j \leq r$.

De los lemas 3.9 y 3.10 es inmediato que las funciones de descomposición de los ideales estables y estables libres de cuadrados son regulares. Por otra parte, necesitaremos las siguientes propiedades básicas de las funciones de descomposición:

Lema 3.13. *Sea I un ideal con cocientes lineales para el orden $G(I) = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$, y sean $m, n \in M(I)$. Entonces:*

1. $m = b(m)e(m)$, para cierto monomio $e(m)$ que verifica $\text{set}(b(m)) \cap \text{supp}(e(m)) = \emptyset$.
2. Si $m = m_j n$, y $\text{set}(m_j) \cap \text{supp}(n) = \emptyset$, entonces $b(m) = m_j$.
3. $b(mn) = b(m)$ si, y sólo si, $\text{set}(b(m)) \cap \text{supp}(n) = \emptyset$.
4. Si $b : M(I) \rightarrow G(I)$ es regular, entonces $b(x_i b(x_j m_k)) = b(x_i x_j m_k) = b(x_j b(x_i m_k))$, para todos $i, j \in \text{set}(m_k)$, y $1 \leq k \leq r$.

Demostración. 1. Por definición, si $b(m) = m_j$, entonces $m \in I_j$, pero $m \notin I_{j-1}$, por lo que debe ser $m = m_j n$, para cierto monomio n . Ahora, si existe un $i \in \text{set}(m_j) \cap \text{supp}(n)$, entonces poniendo $n = x_i n'$, tenemos que $x_i m_j \in I_{j-1}$ y entonces $m = (x_i m_j) n' \in I_{j-1}$, lo que sería absurdo.

2. Primero, es obvio que $m \in I_j$. Si $m \in I_{j-1}$, entonces $n \in Q_{j-1}$, por lo que existiría un $i \in \text{set}(m_j)$ tal que x_i divide a n , lo que sería absurdo.
3. Si $b(mn) = b(m) = m_j$, entonces $mn = m_j e(mn)$ y $m = m_j e(m)$, por lo que $e(mn) = ne(m)$ y $\text{supp}(n) \subset \text{supp}(e(mn))$, y por tanto $\text{supp}(n) \cap \text{set}(b(m)) = \emptyset$. Recíprocamente, si $\text{supp}(n) \cap \text{set}(b(m)) = \emptyset$, y $m_j = b(m)$, entonces $mn = m_j ne(m)$, y $\text{supp}(ne(m)) \cap \text{set}(m_j) = \emptyset$, por lo que $b(mn) = m_j$.
4. Primero, si $i \in \text{set}(b(x_j m_k))$, entonces $\text{set}(b(x_i b(x_j m_k))) \subset \text{set}(b(x_j m_k))$, por ser b regular, y si $i \notin \text{set}(b(x_j m_k))$, entonces $b(x_i b(x_j m_k)) =$

$b(x_j m_k)$. Por tanto, siempre $\text{set}(b(x_i b(x_j m_k))) \subset \text{set}(b(x_j m_k))$. Es decir, tenemos que

$$x_i x_j m_k = x_i b(x_j m_k) e(x_j m_k) \text{ y } \text{set}(b(x_i b(x_j m_k))) \cap \text{supp}(e(x_j m_k)) = \emptyset,$$

y por el apartado 3, tenemos que $b(x_i x_j m_k) = b(x_i b(x_j m_k))$.

□

Observemos que las propiedades 1 y 2 caracterizan a la función de descomposición y dan lugar a su nombre. Además, observamos que, junto con los lemas 3.9 y 3.10, las asignaciones dadas por b y e en dichos apartados coinciden con las dadas en los lemas 1.35 y 1.44. Utilizando estas propiedades, obtenemos la serie de Hilbert (argumentando como en 1.37) y la descripción completa de la resolución que buscamos:

Proposición 3.14. *Sea I un ideal con cocientes lineales para el orden $G(I) = \{m_1, \dots, m_r\}$. Entonces,*

$$H_I(\underline{x}) = \sum_{i=1}^r \left(m_i \prod_{j \notin \text{set}(m_i)} \frac{1}{(1-x_j)} \right).$$

Teorema 3.15. *Sea $I \subset S$ un ideal monomial con cocientes lineales para el orden $G(I) = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$, y con función de descomposición regular $b : M(I) \rightarrow G(I)$. Entonces, la resolución (\mathbf{F}, ∂) de S/I obtenida por mapping cones iterados es minimal, tiene la misma base multigrada que en 3.11, y la diferencial ∂ está dada por la siguiente expresión:*

$$\partial_{p+1}(m_j; \alpha) = \sum_{q=1}^p (-1)^q x_{j_q} (m_j; \alpha \setminus j_q) - \sum_{q=1}^p (-1)^q e(x_{j_q} m_j) (b(x_{j_q} m_j); \alpha \setminus j_q),$$

donde $\alpha = \{j_1, j_2, \dots, j_p\} \subset \text{set}(m_j)$, con $j_1 < j_2 < \dots < j_p$, y donde adoptamos el convenio $(m_j; \alpha) = 0$ si $\alpha \not\subset \text{set}(m_j)$.

Demostración. Primero, si las diferenciales realmente son así, claramente la resolución es minimal. Volvemos a proceder por inducción en $j \geq 1$, donde volvemos a denotar por $\mathbf{F}^{(j)}$ y $\mathbf{K}^{(j)}$ a las resoluciones minimales de S/I_j y S/Q_j , respectivamente (de nuevo, $\mathbf{K}^{(j)} = \mathbf{K}(\text{set}(m_{j+1}))$). El caso $j = 1$ vuelve a ser trivial.

3.3. LA RESOLUCIÓN DE ELIAHOU-KERVAIRE GENERALIZADA 71

Supongamos entonces que se verifica para $j \geq 1$. De nuevo, la base de $F_i^{(j)}$ vuelve a ser como en 3.11. Como $\mathbf{F}^{(j)}$ es un subcomplejo de $\mathbf{F}^{(j+1)}$, basta comprobar la expresión de ∂ en los elementos de la base $(m_{j+1}; \alpha)$, con $\alpha \subset \text{set}(m_{j+1})$. Sea $\varphi : \mathbf{K}^{(j)} \rightarrow \mathbf{F}^{(j)}$ el morfismo de elevación. Entonces, por definición de mapping cone, tenemos que $\partial(m_{j+1}; \alpha) = -d(m_{j+1}; \alpha) + \varphi(m_{j+1}; \alpha)$, donde d es la diferencial del complejo de Koszul. Por tanto, vemos que si la siguiente expresión

$$\varphi(m_{j+1}; \alpha) = \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} e(x_{j_q} m_{j+1})(b(x_{j_q} m_{j+1}); \alpha \setminus j_q),$$

cuando $\alpha \neq \emptyset$, y $\varphi(m_{j+1}; \emptyset) = m_{j+1}$, define una elevación del morfismo $S/Q_j \xrightarrow{m_{j+1}} S/I_j$, entonces ya hemos obtenido la expresión que buscamos. Para ello, tenemos que verificar (por inducción en grado homológico) que $\varphi d = \partial \varphi$, donde d es la diferencial de $\mathbf{K}^{(j)}$ y ∂ la de $\mathbf{F}^{(j)}$. Para simplificar la notación, escribiremos $m = m_{j+1}$. Primero, $\varphi(d(m; \emptyset)) = m = \partial(\varphi(m; \emptyset))$, y si $i \in \text{set}(m)$, entonces

$$\varphi(d(m; i)) = \varphi(x_i(m; \emptyset)) = x_i m = \partial(e(x_i m)(b(x_i m); \emptyset)) = \partial(\varphi(m; i)).$$

Supongamos entonces que $\alpha = \{j_1, j_2, \dots, j_p\} \subset \text{set}(m)$, $j_1 < j_2 < \dots < j_p$ y $p \geq 2$. Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(d(m; \alpha)) &= \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} x_{j_q} \varphi(m; \alpha \setminus j_q) \\ &= \sum_{q=1}^p \sum_{s < q} (-1)^{q+s} x_{j_q} e(x_{j_s} m)(b(x_{j_s} m); \alpha \setminus \{j_q, j_s\}) \\ &\quad - \sum_{q=1}^p \sum_{s > q} (-1)^{q+s} x_{j_q} e(x_{j_s} m)(b(x_{j_s} m); \alpha \setminus \{j_q, j_s\}). \end{aligned}$$

Y por otra parte,

$$\begin{aligned} \partial(\varphi(m; \alpha)) &= \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} e(x_{j_q} m) \partial(b(x_{j_q} m); \alpha \setminus j_q), \text{ y} \\ \partial(b(x_{j_q} m); \alpha \setminus j_q) &= \sum_{s \neq q} \epsilon_s x_{j_s} (b(x_{j_q} m); \alpha \setminus \{j_q, j_s\}) \\ &\quad - \sum_{s \neq q} \epsilon_s e(x_{j_s} b(x_{j_q} m))(b(x_{j_s} b(x_{j_q} m)); \alpha \setminus \{j_q, j_s\}), \end{aligned}$$

donde $\epsilon_s = (-1)^s$, si $s < q$, y $\epsilon_s = (-1)^{s+1}$, si $s > q$. Ahora bien, puede ocurrir que $\alpha \setminus j_q \not\subseteq \text{set}(b(x_{j_q}m))$, y entonces $(b(x_{j_q}m); \alpha \setminus j_q) = 0$. En ese caso, si $\alpha \setminus \{j_q, j_s\} \not\subseteq \text{set}(b(x_{j_q}m))$, entonces $\alpha \setminus \{j_q, j_s\} \not\subseteq \text{set}(b(x_{j_s}b(x_{j_q}m)))$, y por tanto, los términos de la derecha son todos nulos. Por otra parte, si $\alpha \setminus \{j_q, j_s\} \subset \text{set}(b(x_{j_q}m))$, entonces $j_s \notin \text{set}(b(x_{j_q}m))$, y por tanto, $b(x_{j_s}b(x_{j_q}m)) = b(x_{j_q}m)$ y los términos de la derecha se cancelan unos con otros. Por tanto, dicha igualdad es válida, y aplicándola a la anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial(\varphi(m; \alpha)) &= \sum_{q=1}^p \sum_{s < q} (-1)^{q+s+1} x_{j_s} e(x_{j_q}m) (b(x_{j_q}m); \alpha \setminus \{j_q, j_s\}) \\ &\quad - \sum_{q=1}^p \sum_{s > q} (-1)^{q+s+1} x_{j_s} e(x_{j_q}m) (b(x_{j_q}m); \alpha \setminus \{j_q, j_s\}) \\ &\quad - \sum_{q=1}^p \sum_{s < q} (-1)^{q+s+1} e(x_{j_s}b(x_{j_q}m)) (b(x_{j_s}b(x_{j_q}m)); \alpha \setminus \{j_q, j_s\}) \\ &\quad + \sum_{q=1}^p \sum_{s > q} (-1)^{q+s+1} e(x_{j_s}b(x_{j_q}m)) (b(x_{j_s}b(x_{j_q}m)); \alpha \setminus \{j_q, j_s\}). \end{aligned}$$

Pero los dos últimos sumandos se cancelan, ya que podemos intercambiar el papel de q y s por el apartado 4 del lema 3.13, y los dos primeros sumandos se corresponden justo con $\varphi(d(m; \alpha))$, de nuevo intercambiando los papeles de q y s , lo que concluye la demostración. \square

Para finalizar la sección, veamos con unos ejemplos que las condiciones que hemos ido imponiendo en cada paso no siempre se verifican:

Ejemplo 3.16. Primero, puede ser que I admita cocientes lineales para el orden $G(I) = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$, y que no se verifique que $\deg(m_1) \leq \deg(m_2) \leq \dots \leq \deg(m_r)$. Dos ejemplos son $I = \langle x_1x_2, x_2x_3x_4, x_1x_3 \rangle$ y $J = \langle x_1x_2^2, x_2^s, x_1^2x_2 \rangle$, para cualquier $s > 3$. Por lo que en estos ejemplos no podemos aplicar 3.11. Sin embargo, sus funciones de descomposición son regulares y podemos aplicar 3.15.

Por otro lado, no toda función de descomposición es regular. Dos ejemplos son $I = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4 \rangle$, pues $\text{set}(x_3x_4) = \{2\}$ y $\text{set}(b(x_2(x_3x_4))) = \{1\}$, y $J = \langle x_1x_2^2, x_2^2x_3, x_2x_3^2 \rangle$, pues $\text{set}(x_2x_3^2) = \{2\}$ y $\text{set}(b(x_2(x_2x_3^2))) = \{1\}$. Sin embargo, en estos ejemplos podemos aplicar 3.11.

Un ejemplo de ideal con cocientes lineales que no verifica las hipótesis de 3.11 ni de 3.15 es $I = \langle x_1x_2^2, x_2^s, x_2^2x_3, x_2x_3^2 \rangle$, para cualquier $s > 3$.

Por último, la propiedad de intercambio del apartado 4 de 3.13 no es equivalente a la regularidad de la función de descomposición. Los ejemplos anteriores $I = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4 \rangle$ y $J = \langle x_1x_2^2, x_2^2x_3, x_2x_3^2 \rangle$ son claros. Otro ejemplo menos sencillo sería $K = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_1x_4, x_2x_5, x_4x_5 \rangle$.

3.4. La resolución de Eliahou-Kervaire es celular

En esta última sección, veremos cómo la resolución de Eliahou-Kervaire es celular en el sentido de la definición 2.22, es decir, existe un **complejo celular** $X = (|X|, \Gamma)$ junto con una **función de incidencia** ϵ tales que la resolución de Eliahou-Kervaire coincide con \mathbf{F}_X .

Actualmente existen varias construcciones de estos complejos celulares. El primero en dar una fue J. Mermin en el artículo [Mer], y que funciona para la resolución clásica de Eliahou-Kervaire. Sin embargo, muy recientemente, dos artículos casi simultáneos dieron una construcción para la resolución de Eliahou-Kervaire generalizada de [HT] que hemos presentado en la sección anterior. Dichas construcciones se deben, por un lado, a A. Goodarzi en el artículo [Goo], y por otro, a A. Dochtermann y F. Mohammadi en el artículo [DM]. En esta sección, presentaremos esta última construcción, ya que la descripción es más elemental y fácil de visualizar. De hecho, por primera vez en esta memoria, podremos obtener ejemplos de resoluciones celulares que no son simpliciales, como la de Taylor.

Aunque la descripción celular se puede hacer a partir de símlices abstractos, comenzamos identificando cada monomio $\underline{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ con el vector $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Por otra parte, en toda la sección, $I \subset S$ será un ideal monomial con **cocientes lineales** para el orden $G(I) = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ y cuya **función de descomposición**, $b : M(I) \rightarrow G(I)$, es **regular**. Utilizaremos también las notaciones de la sección anterior, es decir, $I_j = \langle m_1, m_2, \dots, m_j \rangle$ y $Q_j = (I_j : m_{j+1})$, y además, para prescindir de subíndices, escribiremos $m_1 < m_2 < \dots < m_r$ para indicar el orden de los generadores.

Comenzamos definiendo los símlices que constituirán los “ladrillos” de

la construcción celular que obtendremos.

Definición 3.17. Para cada $m \in G(I)$, cada $\alpha \subset \text{set}(m)$, con $\#\alpha = p$, y cada permutación $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ de α , definimos inductivamente

$$b(x_{\sigma_{i+1}}, x_{\sigma_i}, \dots, x_{\sigma_1}, m) = b(x_{\sigma_{i+1}} b(x_{\sigma_i}, \dots, x_{\sigma_1}, m)).$$

Por otro lado, definimos como $s(m, \alpha, \sigma)$ al símplice abstracto formado por los elementos $m, b(x_{\sigma_1} m), \dots, b(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_p}, m)$. Diremos que $s(m, \alpha, \sigma)$ es **no degenerado** si estos monomios no se repiten, y en caso contrario, diremos que es degenerado.

A posteriori veremos que la clausura convexa en \mathbb{R}^n de los puntos de $s(m, \alpha, \sigma)$ es siempre un símplice, y constituirá una realización geométrica natural, pero de momento seguiremos considerándolos como símplices abstractos, y para abreviar utilizaremos la notación de upla ordenada, lo que ya da una orientación de dichos símplices:

$$s(m, \alpha, \sigma) = (m, b(x_{\sigma_1} m), \dots, b(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_p}, m)).$$

Para manejar estos conjuntos, necesitaremos algunas propiedades básicas que cumplen:

Lema 3.18. Sean $m \in G(I)$, $\alpha \subset \text{set}(m)$, con $\#\alpha = p$, y σ una permutación de α , como antes. Denotemos $s(m, \alpha, \sigma) = (w_0 = m, w_1, \dots, w_p)$. Observemos que $w_i = b(x_{\sigma_i} w_{i-1})$, para todo $i \geq 1$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. Siempre $w_0 \geq w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_p$ y $s(m, \alpha, \sigma)$ es no generado si, y sólo si, las desigualdades son estrictas, que a su vez es equivalente a $\sigma_i \in \text{set}(w_{i-1})$, para todo $i \geq 1$.
2. Siempre se verifica que $\text{set}(w_i) \subset \text{set}(w_{i-1})$, y si $s(m, \alpha, \sigma)$ es no degenerado, entonces $\sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_p \in \text{set}(w_{i-1})$, para todo $i \geq 1$.
3. Para cualquier $s(m, \alpha, \sigma)$, tenemos que $b(x_{\sigma_i}, \dots, x_{\sigma_1}, m) = b(x_{\sigma_i} \cdots x_{\sigma_1} m)$, y por tanto, si $\sigma' = (\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_i)$ es otra permutación de los elementos $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i$, entonces

$$b(x_{\sigma_i}, \dots, x_{\sigma_1}, m) = b(x_{\sigma'_i}, \dots, x_{\sigma'_1}, m).$$

4. Si $s(m, \alpha, \sigma)$ y $s(m, \alpha, \sigma') = (w'_0 = m, w'_1, \dots, w'_p)$ son no degenerados y $w'_j = w_j$, para todo $j = 1, 2, \dots, i$, entonces $\sigma'_j = \sigma_j$, para todo $j = 1, 2, \dots, i$. En particular, si $s(m, \alpha, \sigma) = s(m, \alpha, \sigma')$, entonces $\sigma = \sigma'$.
5. No pueden existir dos símplices no degenerados de la forma $s(m, \alpha, \sigma)$ y $s(m, \alpha, \sigma') = (w'_0 = m, w'_1, \dots, w'_p)$ con $w'_j = w_j$ para todo $j < i$, y $w'_{i+1} = w_i$.

Demostración. 1. Primero, $w_{i-1} \geq w_i = b(x_{\sigma_i} w_{i-1})$ es obvio por la definición de b . Por otra parte, de nuevo por la definición de b y set , $w_{i-1} > b(x_{\sigma_i} w_{i-1})$ si, y sólo si, $\sigma_i \in \text{set}(w_{i-1})$.

2. Por ser b regular, tenemos que $\text{set}(w_i) \subset \text{set}(w_{i-1})$, y lo segundo es consecuencia de esto y del apartado 1.
3. Procedemos por inducción en i , donde el caso $i = 1$ es trivial. Supongamos que $b(x_{\sigma_{i-1}}, \dots, x_{\sigma_1}, m) = b(x_{\sigma_{i-1}} \cdots x_{\sigma_1} \cdot m)$, entonces, por el lema 3.13 y por hipótesis de inducción, tenemos que

$$x_{\sigma_i} w_{i-1} = w_i n \quad \text{y} \quad x_{\sigma_{i-1}} \cdots x_{\sigma_1} m = w_{i-1} n',$$

para ciertos monomios $n, n' \in S$, con $\text{supp}(n) \cap \text{set}(w_i) = \text{supp}(n') \cap \text{set}(w_{i-1}) = \emptyset$. Como $\text{set}(w_i) \subset \text{set}(w_{i-1})$, entonces $\text{supp}(nn') \cap \text{set}(w_i) = \emptyset$, por lo que de la igualdad $x_{\sigma_i} \cdots x_{\sigma_1} m = w_i n n'$, y el lema 3.13, obtenemos el resultado.

4. Supongamos que $\sigma'_j = \sigma_j$ para todo $j < k \leq i$ y que $\sigma'_k \neq \sigma_k$. Tenemos que $w_k = b(x_{\sigma_k} w_{k-1}) = b(x_{\sigma'_k} w_{k-1})$, por lo tanto, por el lema 3.13,

$$x_{\sigma_k} w_{k-1} = w_k n \quad \text{y} \quad x_{\sigma'_k} w_{k-1} = w_k n',$$

para ciertos monomios $n, n' \in S$, con $\text{supp}(nn') \cap \text{set}(w_k) = \emptyset$. Por tanto, como $\sigma'_k \neq \sigma_k$, tenemos que x_{σ_k} y $x_{\sigma'_k}$ dividen a n y n' , respectivamente (pues $x_{\sigma'_k} n = x_{\sigma_k} n'$). Pero entonces $\sigma'_k \notin \text{set}(w_k)$, y $\sigma'_k = \sigma_l$ para cierto $l > k$, lo cual contradice el apartado 2.

5. Por el apartado anterior, $\sigma'_j = \sigma_j$ para todo $j < i$. Por otro lado, por el apartado 3 y el lema 3.13,

$$x_{\sigma_i} w_{i-1} = w_i n \quad \text{y} \quad x_{\sigma'_{i+1}} x_{\sigma'_i} w_{i-1} = w_i n',$$

para ciertos monomios $n, n' \in S$ con $\text{supp}(nn') \cap \text{set}(w_i) = \emptyset$. Si fuera $\sigma'_i \neq \sigma_i$, se llega a un absurdo como en el apartado anterior. Y si $\sigma'_i = \sigma_i$, entonces $w'_i = w_i$ y $s(m, \alpha, \sigma')$ sería degenerado. \square

Estas propiedades nos dan una ligera idea de la combinatoria de los símplices $s(m, \alpha, \sigma)$, y el cuarto apartado nos garantiza que fijados m y α , no hay dos de ellos iguales no degenerados. Deduciremos tres corolarios sencillos que nos permitirán conocer mejor la estructura de estos símplices y definir el complejo celular que buscamos:

Corolario 3.19. *Sean $m \in G(I)$, $\alpha \subset \text{set}(m)$, con $\#\alpha = p$, y σ una permutación de α . Si $s(m, \alpha, \sigma) = (w_0 = m, w_1, \dots, w_p)$ es no degenerado, entonces la clausura convexa en \mathbb{R}^n de w_0, w_1, \dots, w_p es un símplice geométrico de dimensión p .*

Demostración. Denotemos por $\mathbf{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$ al vector exponente de $w_i = b(x_{\sigma_i} \cdots x_{\sigma_1} m)$, para $0 \leq i \leq p$, y veamos que son afinmente independientes. Para ello, demostraremos primero que, si $1 \leq j \leq p$,

$$a_{i,\sigma_j} = \begin{cases} a_{j-1,\sigma_j}, & \text{si } i < j \\ a_{j-1,\sigma_j} + 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Si $i < j$, entonces tenemos que $x_{\sigma_i} w_{i-1} = w_i n$, para cierto monomio $n \in S$ con $\text{supp}(n) \cap \text{set}(w_i) = \emptyset$. Ahora, por el apartado 2 del lema anterior, $\sigma_j \in \text{set}(w_i)$, por lo que el exponente en x_{σ_j} es igual para w_{i-1} y w_i , y por tanto, $a_{i,\sigma_j} = a_{j-1,\sigma_j}$. Por otro lado, $x_{\sigma_j} w_{j-1} = w_j n'$, para cierto monomio $n' \in S$ con $\text{supp}(n') \cap \text{set}(w_j) = \emptyset$. Pero x_{σ_j} no puede dividir a n' , porque si no, dividiendo y utilizando el apartado 3 de 3.13, tendríamos que $w_{i-1} = w_i$. Por tanto, vemos que $a_{j,\sigma_j} = a_{j-1,\sigma_j} + 1$.

Ahora, supongamos que $\lambda_0 \mathbf{a}_0 + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_p \mathbf{a}_p = 0$ y $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_p = 0$. Entonces,

$$(a_{p,\sigma_p} - 1)(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{p-1}) + a_{p,\sigma_p} \lambda_p = 0,$$

de donde obtenemos que $\lambda_p = 0$, y por inducción en orden decreciente, vemos que $\lambda_{p-1} = 0$, $\lambda_{p-2} = 0$, etc. \square

Corolario 3.20. *Sean $m \in G(I)$, $\alpha \subset \text{set}(m)$, con $\#\alpha = p$, y σ una permutación de α . Si $s(m, \alpha, \sigma)$ es degenerado, entonces existe una permutación*

σ' de α tal que $s(m, \alpha, \sigma)$ es una cara de $s(m, \alpha, \sigma')$ y este es no degenerado. En particular, la clausura convexa de los elementos de $s(m, \alpha, \sigma)$ también forman un símplice.

Demostración. Procedemos por inducción decreciente en el número de monomios distintos que aparecen en $s(m, \alpha, \sigma)$. Pongamos $s(m, \alpha, \sigma) = (w_0 = m, w_1, \dots, w_p)$ y tomemos i el primer índice tal que $w_{i+1} = w_i$ ($i \geq 1$). Sea

$$\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \sigma_i, \sigma_{i+2}, \dots, \sigma_p).$$

Si $b(x_{\sigma_{i+1}} w_{i-1}) \neq w_{i-1}$, entonces $s(m, \alpha, \sigma')$ tiene un elemento distinto más y concluimos por inducción. Si $b(x_{\sigma_{i+1}} w_{i-1}) = w_{i-1}$, entonces tomamos la permutación

$$\sigma'' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-2}, \sigma_{i+1}, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+2}, \dots, \sigma_p),$$

etc. En el peor de los casos, llegamos a la permutación

$$\tau = (\sigma_{i+1}, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \widehat{\sigma_{i+1}}, \dots, \sigma_p),$$

y como $m \neq b(x_{\sigma_{i+1}} m)$, tenemos que $s(m, \alpha, \tau)$ tiene un elemento distinto más. \square

En particular, vemos que para cada $\alpha \subset \text{set}(m)$, existe una permutación σ de α tal que $s(m, \alpha, \sigma)$ es no degenerado. Para el siguiente corolario, necesitamos una definición:

Definición 3.21. Sean $m \in G(I)$, $\alpha \subset \text{set}(m)$, y σ una permutación de α tal que $s(m, \alpha, \sigma)$ es no degenerado. En esta sección, llamamos **caras propias** de $s(m, \alpha, \sigma)$ a sus caras F de dimensión $\dim(s(m, \alpha, \sigma)) - 1$. Decimos que F es **exterior** si no es una cara propia de otro símplice de la forma $s(m, \alpha, \sigma')$, para otra permutación σ' de α , y en caso contrario, decimos que es **interior**.

La clave de la construcción celular posterior será cómo se disponen las caras propias de unos símplices respecto a otros:

Corolario 3.22. Sean $m \in G(I)$, $\alpha \subset \text{set}(m)$, con $\#\alpha = p$, y σ una permutación de α . Pongamos $s(m, \alpha, \sigma) = (w_0 = m, w_1, \dots, w_p)$ y supongamos que es no degenerado. Sea $F = \{w_0, w_1, \dots, \widehat{w_i}, \dots, w_p\}$ una cara propia suya. Entonces:

1. F es interior si, y sólo si, $1 \leq i < p$ y $\sigma_i \in \text{set}(b(x_{\sigma_{i+1}}w_{i-1}))$. En tal caso, F es cara propia de exactamente dos símlices no degenerados: $s(m, \alpha, \sigma)$ y $s(m, \alpha, \sigma')$, donde $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \sigma_i, \dots, \sigma_p)$.
2. Supongamos que F es exterior. Entonces, si $i = 0$, $F = s(b(x_{\sigma_1}m), \alpha \setminus \sigma_1, \tau)$, con $\tau = (\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_p)$. Y si $1 \leq i \leq p$, entonces $F = s(m, \alpha \setminus \sigma_i, \tau)$, con $\tau = (\sigma_1, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_p)$. En ambos casos, F es no degenerado.

Demostración. Si $i = 0$, entonces es claro que $F = s(b(x_{\sigma_1}m), \alpha \setminus \sigma_1, \tau)$, con $\tau = (\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_p)$, y no puede ser cara propia de otro símlice no degenerado $s(m, \alpha, \sigma')$ por el apartado 4 de 3.18. Y si $i = p$, entonces $F = s(m, \alpha \setminus \sigma_p, \tau)$, con $\tau = (\sigma_1, \dots, \sigma_{p-1})$ y es exterior, de nuevo por el apartado 4 de 3.18.

Supongamos ahora que $1 \leq i < p$ y que F es cara propia de un símlice no degenerado $s(m, \alpha, \sigma'') = (w''_0 = m, w''_1, \dots, w''_p)$, por los apartados 4 y 5 de 3.18, debe ser $w''_j = w_j$, para todo $j \neq i$, y $\sigma''_j = \sigma_j$, para todo $j < i$. Como $w''_{i+1} = w_{i+1}$, tenemos que

$$x_{\sigma_{i+1}}x_{\sigma_i}w_{i-1} = w_{i+1}n \quad \text{y} \quad x_{\sigma''_{i+1}}x_{\sigma''_i}w_{i-1} = w_{i+1}n',$$

para ciertos monomios $n, n' \in S$ tales que $\text{supp}(nn') \cap \text{set}(w_{i+1}) = \emptyset$. Por tanto, $x_{\sigma_{i+1}}x_{\sigma_i}n' = x_{\sigma''_{i+1}}x_{\sigma''_i}n$, y debe ser $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\} = \{\sigma''_i, \sigma''_{i+1}\}$, pues si no llegaríamos a que $\sigma_j \notin \text{set}(w_{i+1})$ para cierto $j > i + 1$, lo que contradiría el apartado 2 de 3.18. Por tanto, $\sigma'' = \sigma$ ó $\sigma'' = \sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \sigma_i, \dots, \sigma_p)$, y tenemos dos casos:

1. Si $\sigma_i \in \text{set}(b(x_{\sigma_{i+1}}w_{i-1}))$, entonces por el apartado 3 de 3.13, $s(m, \alpha, \sigma')$ es no degenerado y F es cara propia suya, por lo que F es interior y pertenece solamente a los símlices $s(m, \alpha, \sigma)$ y $s(m, \alpha, \sigma')$.
2. Si $\sigma_i \notin \text{set}(b(x_{\sigma_{i+1}}w_{i-1}))$, entonces $s(m, \alpha, \sigma')$ es degenerado, y F es exterior, porque $s(m, \alpha, \sigma)$ es el único símlice no degenerado al que pertenece.

□

Con estos preliminares, ya podemos definir el complejo celular que buscamos. Dado $m \in G(I)$ y $\alpha \subset \text{set}(m)$, definimos la **célula** $C(m, \alpha)$ como

$$C(m, \alpha) = \bigcup_{\sigma} (s(m, \alpha, \sigma)),$$

donde podemos tomar la unión conjuntista en \mathbb{R}^n ó la unión disjunta de dichos símlices geométricos e identificar las caras propias comunes. Como cada uno de esos símlices es una cara de otro no degenerado, podemos limitarnos a considerar sólo estos últimos. En el siguiente teorema recogemos el hecho de que estas células realmente proporcionan un complejo celular tal y como los definimos en la sección 2.2, aunque nos referiremos al artículo original [DM] para la demostración rigurosa, ya que se necesitan resultados topológicos que omitiremos:

Teorema 3.23. *Considerando una realización geométrica en \mathbb{R}^r , identificando $m_i \in G(I)$ con el i -ésimo vector de la base canónica, o la realización anterior en \mathbb{R}^n , tenemos que $X = (|X|, \Gamma)$, con $\Gamma = \{C(m, \alpha)/m \in G(I) \text{ y } \alpha \subset \text{set}(m)\}$ y $|X| = \bigcup \Gamma$, constituye un complejo celular en el que los vértices son m_1, m_2, \dots, m_r , y las caras de $C(m, \alpha)$, si $\alpha = \{j_1, j_2, \dots, j_p\}$, son de dos tipos: $C(m, \alpha \setminus j_i)$ y $C(b(x_{j_i}m), \alpha \setminus j_i)$, para $1 \leq i \leq p$.*

Demostración. Primero, para cada par de símlices $S = s(m, \alpha, \sigma)$ y $G' = s(m, \alpha, \sigma')$, es obvio que existe una cadena de símlices $G_i = s(m, \alpha, \sigma_i)$, con $G_0 = S$ y $G_q = G'$ (basta considerar transposiciones de índices consecutivos para pasar de una permutación a otra). Según [DM, theorem 3.10], esto implica que el complejo simplicial obtenido al unir los símlices no degenerados de la forma $s(m, \alpha, \sigma)$, variando σ , es lo que se suele denominar “shellable”.

Un complejo simplicial Δ se dice que es “shellable” si sus caras maximales se pueden ordenar F_1, F_2, \dots, F_q , de forma que $(\bigcup_{i=1}^{j-1} F_i) \cap F_j$ es puro de dimensión $\dim(F_j) - 1$, para $j = 2, 3, \dots, q$, donde “puro” quiere decir que todas sus caras maximales tienen la misma dimensión. Por esta propiedad, junto con la forma en que las caras propias de los símlices no degenerados $s(m, \alpha, \sigma)$ se disponen y [DK, proposition 1.2], obtenemos que $C(m, \alpha)$ son homeomorfos a bolas cerradas de la dimensión correspondiente, y X es un complejo celular (para que se corresponda exactamente con la definición 2.15, deberíamos considerar el interior de las células $C(m, \alpha)$).

Ahora, las caras de $C(m, \alpha)$ estarán formadas por caras exteriores F de ciertos $s(m, \alpha, \sigma)$ no degenerados, pues las interiores “desaparecen” al pegar

los correspondientes símplexes. Dichas caras exteriores, por 3.22, deben ser de la forma $F = s(m, \alpha \setminus \sigma_i, \tau)$, con $\tau = (\sigma_1, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_p)$, para $1 \leq i \leq p$, o de la forma $F = s(b(x_{\sigma_1} m), \alpha \setminus \sigma_1, \tau)$, con $\tau = (\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_p)$. Los primeros proporcionan células de la forma $C(m, \alpha \setminus j_i)$, y los segundos, células de la forma $C(b(x_{j_i} m), \alpha \setminus j_i)$. \square

Ejemplo 3.24. Veamos con un ejemplo cómo la propiedad de ser “shellable”, junto con el corolario 3.22, nos permiten concluir que la construcción realizada da un complejo celular.

Tomemos el ideal $I = \langle x_1x_2, x_1x_3, x_1x_5, x_2x_3, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5 \rangle$, y denotemos por m_i , para $1 \leq i \leq 7$, a dichos generadores, con este orden. Entonces el ideal I admite cocientes lineales y función de descomposición regular, y si tomamos $m = m_7$ y $\alpha = \text{set}(m_7) = \{1, 2, 3\}$, se comprueba fácilmente que los símplexes no degenerados que obtenemos son $F_1 = \{1, 2, 3, 7\}$, $F_2 = \{1, 2, 6, 7\}$, $F_3 = \{1, 4, 6, 7\}$ y $F_4 = \{1, 4, 5, 7\}$, donde hemos identificado $i = m_i$:

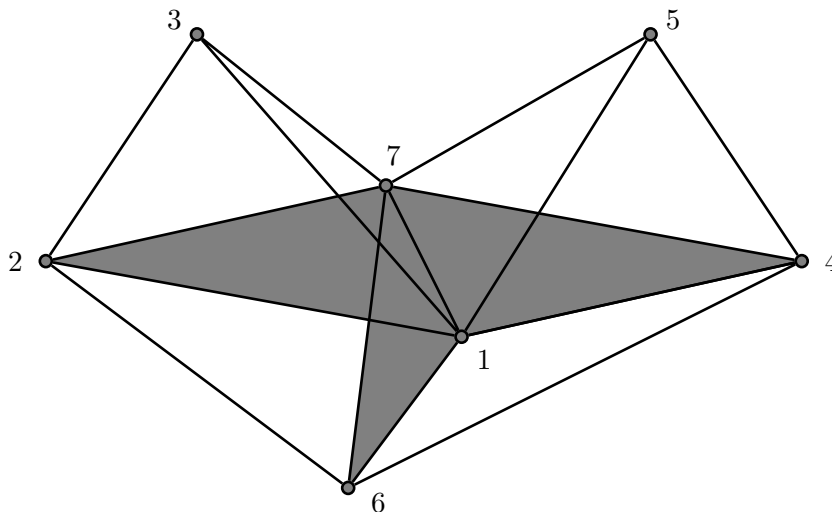


Figura 3.1:

Los símplexes tridimensionales F_1, F_2, F_3, F_4 forman las caras maximales de este complejo simplicial, y con dicho orden vemos que se cumple la propiedad de ser “shellable”. Pegando entonces dichos símplexes por las caras interiores obtenemos la célula tridimensional $C(m_7, \text{set}(m_7))$, y se puede com-

probar que, a su vez, las caras exteriores también se pegan formando las caras de dicha célula.

Finalmente, sólo nos queda definir una **función de incidencia** para obtener el complejo de cadenas etiquetado \mathbf{F}_X , donde la forma de etiquetar X es la obvia. Para ello, tenemos dos estrategias. Por un lado, podemos proceder como en [DM, lemmas 3.8 y 3.9] y definir orientaciones en los símlices $s(m, \alpha, \sigma)$ de forma coherente y definir la diferencial del complejo X de forma intrínseca, o podemos directamente dar una fórmula para la función de incidencia y comprobar que verifica las propiedades de la definición 2.18. Procederemos de esta última forma, que es más directa, aunque perdemos información topológica intrínseca a las células $C(m, \alpha)$:

Definición 3.25. Definimos la **función de incidencia** ϵ en X de la siguiente forma: para cada $m \in G(I)$ y cada $\alpha = \{j_1, j_2, \dots, j_p\} \subset \text{set}(m)$, con $j_1 < j_2 < \dots < j_p$, sean

$$\epsilon(C(m, \alpha \setminus j_i), C(m, \alpha)) = (-1)^{i+1} \quad \text{y} \quad \epsilon(C(b(x_{j_i} m), \alpha \setminus j_i), C(m, \alpha)) = (-1)^i,$$

y 0 en el resto de casos. Definimos también $\epsilon(\emptyset, m_i) = 1$.

La condición 1 de la definición 2.18 se deduce del teorema anterior, y la condición 3 es un cálculo sencillo que omitimos por brevedad. Ahora, al construir el **complejo de cadenas etiquetado** \mathbf{F}_X asociado a X y m_1, m_2, \dots, m_r , tenemos que comprobar que la multigraduación dada por la definición 2.20 es $\text{mdeg}(C(m, \{j_1, \dots, j_p\})) = x_{j_1} \cdots x_{j_p} m$. Por un lado, los vértices de $C(m, \alpha)$ son, por construcción, los de la forma $b(\underline{x}^\beta m)$, con $\beta \subset \alpha$. Ahora, $\underline{x}^\beta m = m' n$, con $\text{set}(m') \cap \text{supp}(n) = \emptyset$, por lo que \underline{x}^β no divide a n , ya que $\text{set}(m) \subset \text{set}(m')$, y por tanto, es claro que el mínimo común múltiplo de todos los $b(\underline{x}^\beta m)$ es $\underline{x}^\alpha m$.

Debido a todo lo anterior, obtenemos el teorema que habíamos anunciado:

Teorema 3.26. *Sea $I \subset S$ un ideal monomial con cocientes lineales para el orden $G(I) = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$, y cuya función de descomposición es regular. Entonces, para dicho orden, la resolución de S/I obtenida por mapping cones iterados es minimal y celular, coincidiendo con el complejo de cadenas etiquetado \mathbf{F}_X asociado al complejo celular anterior X y los monomios m_1, m_2, \dots, m_r .*

Veamos, para concluir, un par de ejemplos:

Ejemplo 3.27. Consideremos, en $S = k[x, y, z]$, los ideales $I = \langle x^2, xy, y^3, xz^2 \rangle$ y $J = \langle x^2, xy, y^2, xz, yz \rangle$, con el orden usual de las variables. Dichos ideales son fuertemente estables y el orden de los generadores dado es el que aparece en 3.9. En el caso de I , su resolución minimal es de hecho simplicial, mientras que en el caso de J , es polihedral pero no simplicial. Los complejos que soportan dichas resoluciones son los siguientes:

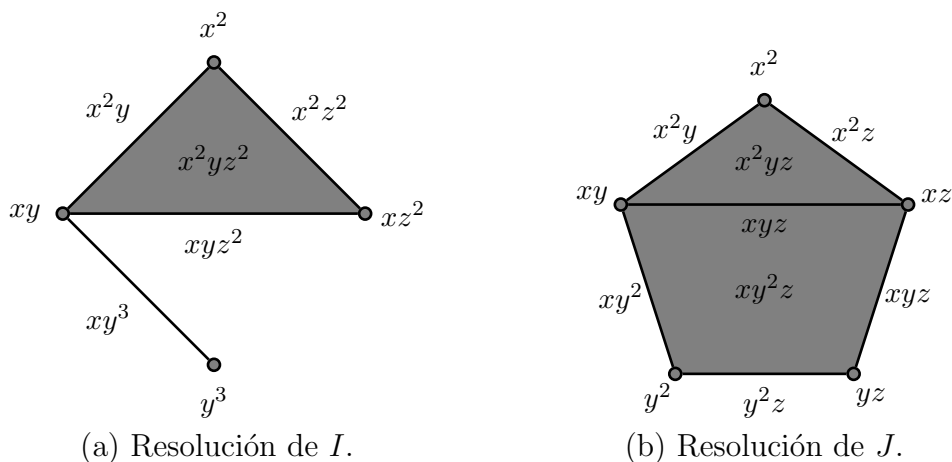


Figura 3.2: Complejos que soportan las resoluciones de I y J .

Ejemplo 3.28. Es interesante estudiar la resolución minimal de los ideales de la forma $I = \mathfrak{m}^d$, para cierto $d > 0$, que como vimos en la sección 1.4, son fuertemente estables. En [Mer] y [DM] se afirma que, en dicho caso, la resolución de Eliahou-Kervaire se obtiene como un subcomplejo de un complejo simplicial dilatado y subdividido. El caso aún más particular de dos variables, $I = \langle x, y \rangle^d = \langle x^d, x^{d-1}y, x^{d-2}y^2, \dots, xy^{d-1}, y^d \rangle$, es particularmente sencillo. En este caso, la resolución está soportada por un segmento subdividido en d segmentos:

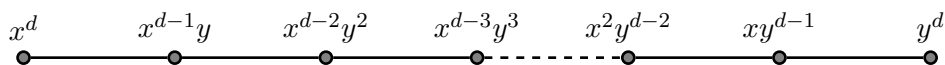


Figura 3.3:

Bibliografía

- [AM] M. F. Atiyah & I. G. Macdonald, *Introducción al álgebra conmutativa*, Reverté Barcelona Buenos Aires Caracas, 1973
- [BSti] D. Bayer, M. Stillman, A criterion for detecting m-regularity, *Invent. Math.* **87** (1987), 1-11.
- [BStu] D. Bayer, B. Sturmfels, Cellular resolutions of monomial modules, *J. Reine Angew. Math.* **502** (1998), 123-140.
- [BPS] D. Bayer, I. Peeva, B. Sturmfels, Monomial resolutions, *Math. Res. Lett.* **5** (1998), no. 1-2, 31-46.
- [BH] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, 1996
- [DK] G. Danaraj, V. Klee, Shellings of spheres and polytopes, *Duke Math. J.* **41** (2) (1974), 443-451.
- [DM] A. Dochtermann, F. Mohammadi, Cellular resolutions from mapping cones, arXiv: 1311.4599, Preprint 19 November 2013
- [Eis] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer Berlin Heidelberg New York, 1995
- [EK] S. Eliahou, M. Kervaire, Minimal resolutions of some monomial ideals, *J. Algebra*, **129** (1990), 1-25
- [EC] G. Evans, H. Charalambous, Resolutions obtained by iterated mapping cones, *J. Algebra*, **176** (1995), 750-754

- [**Go**] A. Goodarzi, Cellular structure for the Herzog-Takayama Resolution, arXiv:1305.4302, Preprint 6 February 2014
- [**HT**] J. Herzog, Y. Takayama, Resolutions by mapping cones, *Homology, Homotopy and Applications*, **4** (2), 2002, 277-294
- [**Mas**] W.S. Massey, *Singular Homology Theory*, Graduate Texts in Mathematics **70**, Springer Berlin Heidelberg New York, 1980
- [**Mar**] U. Martínez Peñas, *Una introducción a la teoría de las sicigias*, Trabajo de Fin de Grado, Universidad de Valladolid, 2013
- [**Mer**] J. Mermin, The Eliahou-Kervaire resolution is cellular, *J. Commutative Algebra* **2** (2010), no. 1, 55-78
- [**MS**] E. Miller & B. Sturmfels, *Combinatorial commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics **227**, Springer Berlin Heidelberg New York, 2005
- [**Pee**] I. Peeva, *Graded syzygies*, Algebra and Applications Volume **14**, Springer Berlin Heidelberg New York, 2011
- [**PS**] I. Peeva, M. Stillman, The minimal free resolution of a Borel ideal, *Expositiones Math.* **26** (2008), 237-247
- [**Rot**] J.J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics **119**, Springer Berlin Heidelberg New York, 1988
- [**Vel**] M. Velasco, Minimal free resolutions that are not supported by a CW-complex, *J. Algebra*, **319** (2008), no. 1, 102-114
- [**Wei**] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics **38**, Cambridge University Press, 1994