



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Matemáticas

**IDEALES DE ARISTAS: UN EJEMPLO DE INTERACCIÓN ENTRE EL ÁLGEBRA
CONMUTATIVA Y LA COMBINATORIA**

Autora: Sara Asensio Ferrero

Tutor: Philippe Gimenez

Año 2023

*A Philippe, por tanta confianza depositada en mí y por hacer que todo sea más fácil,
con el deseo de poder seguir trabajando juntos muchos años*

*A mi madre, mi padre y mi hermano, por la incondicionalidad de su amor y por
demostrarme que nunca voy a estar sola mientras estén ellos*

*A mis abuelos, por la suerte que tengo de haber podido disfrutar de su compañía tanto
tiempo y porque no sería la misma persona si no hubiese podido hacerlo*

A mis amigos, porque una de las mejores cosas que he hecho ha sido rodearme de ellos

Al lugar en el mundo que he encontrado para mí

Índice general

1. Introducción	1
2. Ideales de aristas asociados a grafos	3
2.1. Preliminares	3
2.1.1. Teoría de grafos	5
2.1.2. Escisión de ideales	6
2.2. Aristas de escisión	7
2.3. Vértices de escisión	17
3. Generalización	31
3.1. Complejos simpliciales e ideales de facetas	31
3.2. Hipergrafos e ideales de aristas	32
3.2.1. Preliminares	34
3.2.2. Aristas de escisión	35
3.2.3. Hipergrafos triangulados	49
4. Líneas de investigación relacionadas	55
A. Implementación en <i>Macaulay2</i>	57
Bibliografía	61

Capítulo 1

Introducción

El estudio de las resoluciones libres minimales graduadas de ideales monomiales es un área de trabajo clásica dentro del álgebra conmutativa que permite el uso de métodos combinatorios y ofrece por lo tanto un puente entre las dos áreas: el álgebra conmutativa y la combinatoria. Además, la técnica conocida como *polarización* permite restringir este estudio al caso de los ideales monomiales libres de cuadrados sin pérdida de generalidad. Los ideales monomiales cuadráticos libres de cuadrados, también llamados ideales de aristas, que fueron introducidos y estudiados por primera vez por Rafael H. Villarreal en un artículo publicado en 1990 ([23]), serán nuestro objeto principal de estudio en el Capítulo 2 de este trabajo. Pocos años más tarde de haberlos introducido, el mismo autor publicaba un destacado artículo junto con Aron Simis y Wolmer V. Vasconcelos ([24]) en el que continuaban estudiando en profundidad este tipo de ideales asociados a grafos. Es posible encontrar un repaso a la historia de este estudio en un artículo de Rafael H. Villarreal y María Vaz Pinto dedicado a la memoria de Wolmer V. Vasconcelos que ha sido publicado en el mismo año de la redacción de este trabajo ([21]).

Tradicionalmente, la forma de abordar este estudio consistía en recurrir a herramientas propias del álgebra homológica. No obstante, problemas como hallar la dimensión de un grupo de homología pueden llegar a ser altamente complicados y en los últimos años se ha desarrollado una nueva técnica que permite evitarlos. Esta técnica, que fue introducida por Shalom Eliahou y Michel Kervaire en 1990 en un artículo que ha resultado ser de gran impacto ([5]), se conoce como *escisión* de ideales y permite recuperar muchos de los resultados conocidos como simples corolarios de otros resultados más generales. Mi principal objetivo va a ser presentarla detalladamente para ilustrar las ventajas que proporciona, permitiéndonos sustituir los problemas propios de la homología por otros puramente combinatorios. Para ello, nos vamos a dedicar a estudiar principalmente los trabajos de Huy Tài Hà y Adam Van Tuyl ([16], [17]).

Aunque en este trabajo nos centraremos en mostrar la interacción entre el álgebra conmutativa y la combinatoria vía el estudio de las resoluciones de ideales monomiales libres de cuadrados, este no es más que un ejemplo concreto dentro de los muchos ámbitos en los que la combinatoria está ganando fuerza en los últimos años. Por ejemplo, en mi Trabajo de Fin de Grado ([1]), del que se puede encontrar un resumen extendido en una nota publicada en la Gaceta de la RSME ([2]), ya mostrábamos cómo la teoría de

grafos resultaba de gran ayuda para resolver una conjetura que había sido enunciada hace casi treinta años dentro de la teoría de la complejidad computacional: la conjetura de la sensibilidad.

La forma en la que se estructura este trabajo es la siguiente: en primer lugar, comenzaremos introduciendo las nociones básicas para comprender el problema al que queremos enfrentarnos y la forma en que queremos hacerlo, recurriendo a herramientas combinatorias como los grafos, los complejos simpliciales o los hipergrafos, así como a la técnica de escisión de ideales. A continuación, lo que haremos será seguir un orden creciente de generalidad; es decir, empezaremos estudiando los ideales de aristas asociados a grafos para continuar con los ideales de facetas asociados a complejos simpliciales y, por último, estudiaremos el caso más general de los ideales de aristas asociados a hipergrafos.

Otro de mis objetivos en este trabajo va a consistir en transmitir mi percepción acerca de la naturalidad con la que van surgiendo los distintos objetos de trabajo, en la mayoría de los casos pensados para generalizar algunos tipos concretos de grafos.

El Capítulo 2 va a estar dedicado a estudiar los ideales de aristas asociados a grafos, utilizando [16] como referencia principal. Consideraremos dos tipos de escisiones: la primera, que corresponde a las aristas de escisión, nos permitirá proporcionar una fórmula para el cálculo de los números de Betti graduados de estos ideales en términos de los números de Betti graduados de los ideales de aristas asociados a ciertos subgrafos. Además, estudiaremos un caso en el que esta fórmula es recursiva. El otro tipo de escisión que vamos a estudiar corresponde a los llamados vértices de escisión y nos va a permitir obtener un resultado que supone una mejora del conocido Teorema de Fröberg y que muestra una fuerte conexión entre el álgebra conmutativa y la teoría de grafos.

En el Capítulo 3 nos vamos a dedicar a estudiar ideales monomiales libres de cuadrados no necesariamente cuadráticos. Para ello utilizaremos [17] como principal referencia, y consideraremos los hipergrafos como objeto combinatorio que nos permitirá generalizar varios de los resultados presentados en el capítulo previo. En particular, obtendremos una fórmula para los números de Betti graduados de los ideales de aristas asociados a hipergrafos en términos de los números de Betti graduados de los ideales de aristas asociados a ciertos subhipergrafos, y también trataremos de generalizar el Teorema de Fröberg. En este último caso, veremos que no es posible obtener una generalización término a término del mismo.

El último capítulo estará dedicado a ilustrar la contemporaneidad del tema tratado en este trabajo, comentando brevemente algunas de las líneas de investigación relacionadas con el tema que permanecen abiertas y con gran actividad en la actualidad.

Además del desarrollo teórico principal del trabajo, dedicaremos un apéndice a introducir de forma elemental ciertos aspectos básicos del paquete `EdgeIdeals` de *Macaulay2*. Este paquete, que fue escrito por Christopher A. Francisco, Andrew Hoefel y Adam Van Tuyl, resulta muy cómodo para el manejo computacional de los ideales de aristas que estudiamos.

Capítulo 2

Ideales de aristas asociados a grafos

Comenzamos el desarrollo de este trabajo con un capítulo dedicado a los objetos menos generales de todos aquellos con los que vamos a trabajar: los grafos. En primer lugar, introduciremos las nociones básicas de teoría de grafos que vamos a necesitar, y presentaremos la llamada *escisión* de ideales, técnica que vamos a utilizar también en capítulos posteriores para estudiar las resoluciones libres minimales graduadas del tipo de ideales monomiales libres de cuadrados que corresponda a cada sección. Cuando hayamos introducido estos preliminares, así como la forma de identificar un grafo con un ideal monomial libre de cuadrados (cuadrático en este caso), pasaremos a exponer dos tipos de escisiones que podemos llevar a cabo con el ideal de aristas de un grafo para obtener información acerca de su resolución libre minimal graduada.

2.1. Preliminares

Sea $R = k[x_1, \dots, x_n]$ un anillo de polinomios sobre un cuerpo arbitrario k . Si I es un ideal homogéneo de R (o, más generalmente, un R -módulo graduado finitamente generado), sabemos que le podemos asociar una resolución libre minimal graduada

$$0 \rightarrow \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{l,j}(I)} \rightarrow \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{l-1,j}(I)} \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{0,j}(I)} \rightarrow I \rightarrow 0,$$

donde la sucesión anterior de R -módulos y homomorfismos de R -módulos es exacta, $l \leq n$ y $R(-j)$ es el resultado de desplazar los grados de los elementos de R en j unidades. Cada número $\beta_{i,j}(I)$ es el i, j -ésimo número de Betti graduado de I , y tiene la propiedad de que es un invariante de I igual al número de generadores minimales de grado j en el i -ésimo módulo de sizigias de I .

En este capítulo nos vamos a centrar en el estudio de las resoluciones libres minimales graduadas de un tipo concreto de ideales monomiales: aquellos generados por monomios cuadráticos libres de cuadrados. El principal motivo que nos lleva a empezar estudiando este tipo de ideales es que es posible identificarlos con grafos simples de n vértices vía una biyección sencilla. Antes de detallar esta identificación, definimos un *grafo simple* como un grafo no dirigido que no tiene aristas múltiples (es decir, entre cada par de vértices puede existir a lo sumo una arista) y tampoco tiene aristas que vayan de un vértice cualquiera en sí mismo. Ahora sí, es claro que un grafo simple G con vértices

$V_G = \{x_1, \dots, x_n\}$ y aristas E_G se puede identificar con el ideal monomial cuadrático libre de cuadrados

$$\mathcal{I}(G) = (\{x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E_G\}) \subseteq k[x_1, \dots, x_n],$$

que recibe el nombre de *ideal de aristas* de G , teniendo en cuenta que estamos cometiendo un abuso de notación y denotando de igual forma a los vértices de G y a las variables en el anillo de polinomios asociado. A través de esta biyección, el grafo de n vértices aislados se identifica con el ideal $I = (0)$, que podemos suponer por convenio que también es un ideal monomial cuadrático libre de cuadrados.

En la identificación que acabamos de presentar, es importante que los grafos considerados sean simples. En caso contrario, podrían ocurrir distintos inconvenientes:

- Si existiese más de una arista entre dos vértices x_i y x_j , entonces estas nos proporcionarían varios generadores iguales de $\mathcal{I}(G)$. Sin embargo, como generadores podríamos omitir todos salvo uno y perderíamos la información de que existía una arista múltiple en el grafo de partida.
- Si existiese una arista de un vértice x_i en sí mismo, entonces esta se traduciría vía nuestra mencionada identificación en el monomio x_i^2 , de manera que nuestro ideal $\mathcal{I}(G)$ no sería libre de cuadrados.

Nota 2.1.1. En el segundo de los casos anteriores, si existiese una arista de un vértice x_i en sí mismo, entonces podríamos añadir un nuevo vértice x_{i1} a nuestro grafo y sustituir la mencionada arista por una arista entre x_i y x_{i1} . Esto no es más que el proceso equivalente a polarizar el ideal de aristas del grafo, y existe un resultado que afirma que los números de Betti graduados de un ideal coinciden con los de su polarizado. En consecuencia, en lugar de trabajar con grafos simples, se podría haber exigido simplemente que nuestros grafos no tuvieran aristas múltiples. No obstante, como lo único que nos interesa en nuestro estudio son los números de Betti y estos coinciden para un ideal y su polarizado, podemos asumir siempre que nuestros grafos son de hecho simples y, por tanto, más sencillos de tratar. Esto se debe a que si el ideal del que partimos no es libre de cuadrados, basta polarizarlo y asociarle el mismo grafo que al ideal polarizado, que sí que va a ser simple.

Es trivial a partir de la definición del ideal de aristas de G que

$$\beta_{0,j}(\mathcal{I}(G)) = \begin{cases} |E_G| & \text{si } j = 2 \\ 0 & \text{si } j \neq 2 \end{cases},$$

donde utilizamos las barras verticales para referirnos al cardinal de un conjunto. Además, es habitual fijar

$$\beta_{-1,j}(\mathcal{I}(G)) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j \neq 0 \end{cases},$$

y así lo haremos en este trabajo. En consecuencia, los números de Betti que vamos a estudiar serán los $\beta_{i,j}(\mathcal{I}(G))$ con $i \geq 1$. Es para ello para lo que recurriremos a la noción de ideal monomial escindible, aunque antes de esto introduciremos algunas nociones básicas de teoría de grafos.

2.1.1. Teoría de grafos

Todo grafo G con el que vamos a trabajar va a ser finito y simple, aunque no necesariamente conexo. Si $V_G = \{x_1, \dots, x_n\}$, entonces asociaremos a G y a un cuerpo k a priori arbitrario un anillo de polinomios $R = k[x_1, \dots, x_n]$. Para evitar recargar la notación, la arista $\{x_i, x_j\}$ se denotará simplemente por $x_i x_j$, que también será el monomio resultante de multiplicar las dos variables asociadas en el anillo de polinomios. En particular, simplificando la notación como acabamos de comentar, es posible reescribir la definición del ideal de aristas de G como $\mathcal{I}(G) = (\{x_i x_j \mid x_i x_j \in E_G\})$.

Se dice que un vértice y es *adyacente* al vértice x si $xy \in E_G$. Vamos a denotar por $N(x)$ al conjunto de vértices adyacentes a x en G ; es decir,

$$N(x) := \{y \in V_G \mid xy \in E_G\}.$$

La notación anterior procede de la palabra inglesa *neighbour*, que significa *vecino* y que proporciona una idea clara sobre los vértices de $N(x)$: son los vecinos de x en el grafo. El *grado* de un vértice $x \in V_G$ es el número de aristas de G a las que x pertenece y se denota por $\deg_G(x)$ o simplemente por $\deg(x)$ cuando no hay confusión. Como estamos suponiendo que todo grafo G con el que vamos a trabajar es simple, se verifica que $|N(x)| = \deg(x)$. Se define el *complementario* de un grafo G , y se denota por G^c , como el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices que G y cuyas aristas son todos aquellos pares de vértices que no son aristas de G ; es decir, $E_{G^c} = \{xy \mid xy \notin E_G\}$.

Si e es una arista de G , $G \setminus e$ representa el grafo que tiene los mismos vértices que G y aristas $E_G \setminus \{e\}$. Si $S = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \subseteq V_G$, $G \setminus S$ representará el resultado de eliminar en G los vértices de S y las aristas incidentes a ellos. Por otra parte, G_S denotará el subgrafo inducido de G en S ; es decir, el subgrafo de G cuyos vértices son los elementos de S y cuyas aristas son todas las aristas de G que unían entre sí elementos de S . En particular, siguiendo con la notación anterior, se verifica que $G_S = G \setminus (V_G \setminus S)$.

Diremos que $C = (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l} x_{i_1})$ es un *ciclo* de G de *longitud* l si $x_{i_j} x_{i_{j+1}}$ es una arista de G para cada $j \in \{1, \dots, l\}$, con $x_{i_{l+1}} = x_{i_1}$. El grafo *completo* de tamaño n se denota por \mathcal{K}_n y es aquel que tiene n vértices y cuyas aristas son todas las posibles entre esos vértices. Cuando un grafo completo \mathcal{K}_n es un subgrafo de otro grafo G recibe el nombre de *n-clique* de G . El grafo *bipartito completo* se denota por $\mathcal{K}_{m,n}$ y es el grafo cuyo conjunto de vértices se puede dividir en dos conjuntos disjuntos A y B , el primero de tamaño m y el segundo de tamaño n , y cuyas aristas son $\{xy \mid x \in A, y \in B\}$. En general, un grafo *bipartito* es un grafo cuyo conjunto de vértices se puede dividir en dos conjuntos disjuntos A y B , y cuyas aristas están formadas exactamente por un elemento de A y otro de B .

Se dice que un grafo G es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos. Un *bosque* será una unión disjunta de árboles, y una *hoja* de un bosque será una arista que contenga a un vértice de grado 1. Con estas definiciones, es muy sencillo probar que todo árbol posee al menos una hoja razonando por reducción al absurdo y utilizando la suposición de que G es finito.

En el siguiente apartado vamos a introducir, también como parte de los preliminares, el concepto de ideal escindible y algunos de los resultados básicos sobre estos ideales.

2.1.2. Escisión de ideales

Dado un ideal monomial I , vamos a denotar por $\mathcal{G}(I)$ al conjunto de monomios que forman un sistema minimal de generadores de I , el cual se sabe que es único. Una prueba de ello se puede encontrar, por ejemplo, en el primer capítulo de [20].

La siguiente definición, así como el teorema que vamos a enunciar a continuación, fueron introducidos por primera vez por Shalom Eliahou y Michel Kervaire en [5] y son fundamentales a lo largo de este trabajo. No presentaremos aquí la demostración del teorema porque lo que realmente nos interesa es aplicarlo al estudio de las resoluciones de nuestros ideales.

Definición 2.1.2. Se dice que un ideal monomial I es *escindible* si I es la suma de dos ideales monomiales no nulos J y K , es decir, $I = J + K$, tales que:

1. $\mathcal{G}(I)$ es la unión disjunta de $\mathcal{G}(J)$ y $\mathcal{G}(K)$.
2. Existe una *función de escisión*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(J \cap K) &\longrightarrow \mathcal{G}(J) \times \mathcal{G}(K) , \\ w &\longmapsto (\phi(w), \psi(w)) \end{aligned}$$

que satisface

- (a) para todo $w \in \mathcal{G}(J \cap K)$, $w = \text{mcm}(\phi(w), \psi(w))$, donde mcm representa el mínimo común múltiplo, y
- (b) para cada subconjunto $S \subseteq \mathcal{G}(J \cap K)$, tanto $\text{mcm}(\phi(S))$ como $\text{mcm}(\psi(S))$ dividen estrictamente a $\text{mcm}(S)$.

Si J y K satisfacen las propiedades anteriores, entonces decimos que $I = J + K$ es una *escisión* de I .

Nota 2.1.3. De la propiedad (a) de la definición anterior se deduce que tanto $\phi(w)$ como $\psi(w)$ dividen a w para todo $w \in \mathcal{G}(J \cap K)$. Esto implica que $\text{mcm}(\phi(S))$ y $\text{mcm}(\psi(S))$ dividen a $\text{mcm}(S)$ para cada subconjunto S de $\mathcal{G}(J \cap K)$, y por tanto lo realmente importante de la propiedad (b) anterior (y que será lo que comprobaremos junto con la propiedad (a) para demostrar que una determinada aplicación es una función de escisión) es que lo hagan estrictamente.

Teorema 2.1.4. *Supongamos que I es un ideal monomial escindible con escisión $I = J + K$. Entonces para todos $i, j \geq 0$ se verifica que*

$$\beta_{i,j}(I) = \beta_{i,j}(J) + \beta_{i,j}(K) + \beta_{i-1,j}(J \cap K) .$$

Dos invariantes interesantes de un ideal I son su regularidad y su dimensión proyectiva, cuyas definiciones recordamos a continuación:

- La *regularidad* de I , denotada por $\text{reg}(I)$, se define como

$$\text{reg}(I) := \text{máx}\{j - i \mid \beta_{i,j}(I) \neq 0\} .$$

- La *dimensión proyectiva* de I , denotada por $\text{pd}(I)$, se define como

$$\text{pd}(I) := \text{máx}\{i \mid \beta_{i,j}(I) \neq 0\}.$$

A partir de estas definiciones y del Teorema 2.1.4, es posible obtener fácilmente el siguiente resultado:

Teorema 2.1.5. *Si I es un ideal monomial escindible con escisión $I = J + K$, entonces*

$$(i) \text{ reg}(I) = \text{máx}\{\text{reg}(J), \text{reg}(K), \text{reg}(J \cap K) - 1\}, \text{ y}$$

$$(ii) \text{ pd}(I) = \text{máx}\{\text{pd}(J), \text{pd}(K), \text{pd}(J \cap K) + 1\}.$$

Demostración. Para demostrar (i) basta darse cuenta de que

$$\begin{aligned} \text{máx}\{j - i \mid \beta_{i-1,j}(J \cap K) \neq 0\} &= \text{máx}\{j - (i - 1) \mid \beta_{i-1,j}(J \cap K) \neq 0\} - 1 = \\ &= \text{reg}(J \cap K) - 1 \end{aligned}$$

y observar la fórmula que aparece en el enunciado del Teorema 2.1.4.

Análogamente, para demostrar (ii) basta darse cuenta de que

$$\begin{aligned} \text{máx}\{i \mid \beta_{i-1,j}(J \cap K) \neq 0\} &= \text{máx}\{i - 1 \mid \beta_{i-1,j}(J \cap K) \neq 0\} + 1 = \\ &= \text{pd}(J \cap K) + 1 \end{aligned}$$

y observar la fórmula que aparece en el enunciado del Teorema 2.1.4. □

Pasamos ahora a estudiar la resolución libre minimal graduada del ideal de aristas $\mathcal{I}(G)$ asociado a un grafo simple G , y lo vamos a hacer en primer lugar a partir de un tipo concreto de escisiones, que son las que corresponden a las llamadas *aristas de escisión*.

2.2. Aristas de escisión

Sea G un grafo simple con ideal de aristas $\mathcal{I}(G)$ y sea $e = uv$ una arista de G . Si $J = (uv)$ y $K = \mathcal{I}(G \setminus e)$, entonces es claro que $\mathcal{I}(G) = J + K$. Sin embargo, esta suma no tiene por qué ser una escisión de $\mathcal{I}(G)$ ya que podría ocurrir que no verificara todas las condiciones de la Definición 2.1.2 (en particular, lo que podría ocurrir es que no existiera una función de escisión como la que se describe en la mencionada definición). En esta sección vamos a estudiar cuándo la suma anterior es efectivamente una escisión de $\mathcal{I}(G)$, y cuando lo sea estudiaremos cómo utilizarla para obtener información acerca de la resolución libre minimal graduada de $\mathcal{I}(G)$.

Definición 2.2.1. Se dice que una arista $e = uv$ es una *arista de escisión* si $\mathcal{I}(G) = (uv) + \mathcal{I}(G \setminus e)$ es una escisión de $\mathcal{I}(G)$.

Empezamos introduciendo un lema que nos va a permitir obtener posteriormente una descripción útil de $\mathcal{G}(J \cap K)$ para $J = (uv)$ y $K = \mathcal{I}(G \setminus e)$ en el caso general, sea $e = uv$ una arista de escisión o no.

Lema 2.2.2. Sean $J = (uv)$ y $K = \mathcal{I}(G \setminus e)$ con $e = uv \in E_G$. Si $N(u) \setminus \{v\} = \{u_1, \dots, u_p\}$, $N(v) \setminus \{u\} = \{v_1, \dots, v_q\}$ y $H = G \setminus (N(u) \cup N(v))$, entonces

$$J \cap K = uv \left((u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) + \mathcal{I}(H) \right) .$$

Demostración. Como J y K son ambos ideales monomiales, es conocido que se puede calcular fácilmente su intersección de la siguiente manera:

$$J \cap K = (\{ \text{mcm}(uv, m) \mid m \in \mathcal{G}(K) \}) .$$

Cada $m \in \mathcal{G}(K)$ se corresponde con una arista de $G \setminus e$, y existen dos posibles opciones para esta arista:

1. La arista contiene a u o v , o a algún otro vértice adyacente a u o v , de manera que en este caso

$$\begin{aligned} \text{mcm}(uv, m) &\in uv(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) \subseteq \\ &\subseteq uv \left((u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) + \mathcal{I}(H) \right) . \end{aligned}$$

2. La arista no contiene a ningún elemento de $N(u) \cup N(v)$, en cuyo caso

$$\begin{aligned} \text{mcm}(uv, m) &\in uv \mathcal{I}(H) \subseteq \\ &\subseteq uv \left((u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) + \mathcal{I}(H) \right) . \end{aligned}$$

Hemos probado que $J \cap K \subseteq uv \left((u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) + \mathcal{I}(H) \right)$, y la otra contención es evidente. \square

A partir de este lema, el siguiente corolario es inmediato:

Corolario 2.2.3. Sean $e = uv \in E_G$, $J = (uv)$, $K = \mathcal{I}(G \setminus e)$ y $H = G \setminus (N(u) \cup N(v))$. Si $A = N(u) \setminus \{v\}$ y $B = N(v) \setminus \{u\}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(J \cap K) &= \{uvu_i \mid u_i \in A \setminus B\} \sqcup \{uvv_i \mid v_i \in B \setminus A\} \sqcup \\ &\sqcup \{uvz_i \mid z_i \in A \cap B\} \sqcup \{uvm \mid m \in \mathcal{I}(H)\} , \end{aligned}$$

donde utilizamos el símbolo \sqcup para denotar la unión disjunta.

Presentamos ahora un teorema que nos permite caracterizar las aristas de escisión, y que va a resultarnos muy útil en el sentido de que nos permitirá sustituir la comprobación de las condiciones en la Definición 2.1.2 de la escisión de ideales por una comprobación sencilla y puramente combinatoria dentro del grafo asociado al ideal.

Teorema 2.2.4. Una arista $e = uv$ es una arista de escisión de G si y solo si $N(u) \subseteq (N(v) \cup \{v\})$ o $N(v) \subseteq (N(u) \cup \{u\})$.

Demostración. Vamos a probar la doble implicación.

\Leftarrow Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $N(u) \subseteq (N(v) \cup \{v\})$. Utilizando las notaciones del corolario previo, donde $A = N(u) \setminus \{v\}$, $B = N(v) \setminus \{u\}$ y $H = G \setminus (N(u) \cup N(v))$, la contención que estamos suponiendo implica que $A \setminus B = \emptyset$, $A \cap B = A$ y $B \setminus A = (N(v) \setminus \{u\}) \setminus (N(u) \setminus \{v\})$.

Aplicando el Corolario 2.2.3 a este caso concreto, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(J \cap K) &= \{uvv_i \mid v_i \in (N(v) \setminus \{u\}) \setminus (N(u) \setminus \{v\})\} \sqcup \\ &\quad \sqcup \{uvz_i \mid z_i \in N(u) \setminus \{v\}\} \sqcup \{uvm \mid m \in \mathcal{I}(H)\} . \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} N(v) \setminus \{u\} &= (N(v) \setminus \{u\}) \cap ((N(u) \setminus \{v\}) \cup (V_G \setminus (N(u) \setminus \{v\}))) = \\ &= (N(u) \setminus \{v\}) \cup ((N(v) \setminus \{u\}) \setminus (N(u) \setminus \{v\})) , \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la propiedad distributiva de la intersección y el hecho de que $X \cap (V_G \setminus Y) = X \setminus Y$ para X e Y subconjuntos cualesquiera de V_G , podemos precisar aún más la descripción de $\mathcal{G}(J \cap K)$:

$$\mathcal{G}(J \cap K) = \{uvv_i \mid v_i \in N(v) \setminus \{u\}\} \sqcup \{uvm \mid m \in \mathcal{I}(H)\} .$$

Para demostrar que $e = uv$ es una arista de escisión, basta comprobar que la función

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(J \cap K) &\longrightarrow \mathcal{G}(J) \times \mathcal{G}(K) , \\ w &\longmapsto (\phi(w), \psi(w)) = \begin{cases} (uv, vv_i) & \text{si } w = uvv_i \\ (uv, m) & \text{si } w = uvm \end{cases} \end{aligned}$$

verifica las propiedades (a) y (b) de la Definición 2.1.2.

La propiedad (a) es inmediata, de manera que lo único que nos falta por comprobar es que se verifica (b). Para ello, sea $S \subseteq \mathcal{G}(J \cap K)$. Nuestra descripción previa de $\mathcal{G}(J \cap K)$ implica que todos los elementos de S son divisibles por uv . Además, $\text{mcm}(S)$ ha de tener grado al menos 3 porque todos los elementos de S lo tienen, lo que implica que $uv = \text{mcm}(\phi(S))$ divide estrictamente a $\text{mcm}(S)$. Por otra parte, u divide a $\text{mcm}(S)$ pero no a $\text{mcm}(\psi(S))$, lo que implica que $\text{mcm}(\psi(S))$ divide estrictamente a $\text{mcm}(S)$.

\Rightarrow Razonamos por el contrarrecíproco. Para ello, supongamos que $e = uv$ es una arista de G tal que $N(u) \not\subseteq (N(v) \cup \{v\})$ y $N(v) \not\subseteq (N(u) \cup \{u\})$. Entonces existe un vértice x de G distinto de u y v tal que $ux \in E_G$ pero $vx \notin E_G$. De la misma manera, existe $y \in V_G$ distinto de u y v tal que $vy \in E_G$ pero $uy \notin E_G$.

Vamos a demostrar que en este caso no puede existir una función de escisión, de donde deduciremos que e no puede ser una arista de escisión.

Para ello razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que existe una función de escisión $\mathcal{G}(J \cap K) \longrightarrow \mathcal{G}(J) \times \mathcal{G}(K)$, que por ser $\mathcal{G}(J) = \{uv\}$ tiene que ser de la forma

$$w \longmapsto (\phi(w), \psi(w)) = (uv, \psi(w)) .$$

Por la descripción de $\mathcal{G}(J \cap K)$ que hemos dado en el Corolario 2.2.3 se tiene que uvx y uvy pertenecen a $\mathcal{G}(J \cap K)$. La condición (a) de la Definición 2.1.2 implicaría que $uvx = \text{mcm}(\phi(uvx), \psi(uvx)) = \text{mcm}(uv, \psi(uvx))$. Entonces $\psi(uvx)$ tendría que ser x , ux , vx o uvx . Pero como $\psi(uvx) \in \mathcal{G}(K) = \mathcal{G}(\mathcal{I}(G \setminus e))$, queda descartado que $\psi(uvx)$ pueda tomar los valores x o uvx porque estos no tienen grado dos; y como $vx \notin E_G$, el único valor posible para $\psi(uvx)$ es ux . Un argumento idéntico nos conduce a que $\psi(uvy) = vy$.

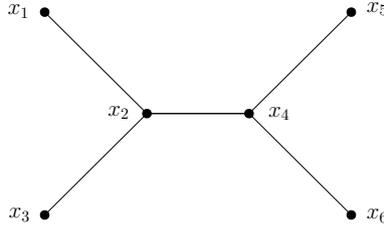
Si consideramos ahora el subconjunto $S = \{uvx, uvy\}$ de $\mathcal{G}(J \cap K)$, este subconjunto no cumple la propiedad (b) que exigíamos en la definición de ideal escindible. Esto se debe a que $\text{mcm}(S) = uvxy = \text{mcm}(\psi(S))$, de manera que $\text{mcm}(\psi(S))$ no divide estrictamente a $\text{mcm}(S)$.

Esto nos permite concluir que $e = uv$ no es una arista de escisión, ya que $\mathcal{I}(G) = (uv) + \mathcal{I}(G \setminus e)$ no es una escisión del ideal $\mathcal{I}(G)$.

Queda probada la doble implicación, y por tanto el teorema. \square

Antes de continuar con el desarrollo teórico del trabajo, vamos a ilustrar la utilidad del Teorema 2.2.4 de caracterización de las aristas de escisión a través de un ejemplo.

Ejemplo 2.2.5. Consideramos el siguiente grafo:



Gracias al Teorema 2.2.4, podemos concluir mediante una comprobación muy sencilla que x_1x_2 es una arista de escisión gracias a que $N(x_1) = \{x_2\} \subseteq N(x_2) \cup \{x_2\}$.

Sin embargo, como $N(x_2) = \{x_1, x_3, x_4\}$ y $N(x_4) = \{x_2, x_5, x_6\}$, se tiene que $N(x_2) \not\subseteq N(x_4) \cup \{x_4\}$ y $N(x_4) \not\subseteq N(x_2) \cup \{x_2\}$. De aquí se deduce, utilizando el Teorema de caracterización de las aristas de escisión que hemos enunciado y demostrado previamente, que x_2x_4 no es una arista de escisión del grafo anterior.

Vamos a introducir ahora un lema que necesitaremos de cara al cálculo de los números de Betti graduados de los ideales que nos interesan. No vamos a demostrarlo por ser bien conocido dentro del estudio de resoluciones de ideales homogéneos, aunque su prueba se puede encontrar en [19].

Lema 2.2.6. Sean $R = k[x_1, \dots, x_n]$ y $S = k[y_1, \dots, y_m]$, y sean $I \subseteq R$ y $J \subseteq S$ ideales homogéneos. Entonces

$$\beta_{i,j} \left(\frac{R}{I} \otimes \frac{S}{J} \right) = \sum_{l_1=0}^i \sum_{l_2=0}^j \beta_{l_1, l_2} \left(\frac{R}{I} \right) \beta_{i-l_1, j-l_2} \left(\frac{S}{J} \right) .$$

Nota 2.2.7. Si $I, J \subseteq R = k[x_1, \dots, x_n]$ son ideales monomiales libres de cuadrados tales que ninguna de las variables que aparecen en los generadores minimales de I aparecen en los generadores minimales de J y viceversa, entonces se tiene un resultado propio del álgebra conmutativa que asegura que $\frac{R}{I} \otimes \frac{R}{J} = \frac{R}{I+J}$. En este caso, el lema anterior implica que

$$\beta_{i,j} \left(\frac{R}{I+J} \right) = \sum_{l_1=0}^i \sum_{l_2=0}^j \beta_{l_1,l_2} \left(\frac{R}{I} \right) \beta_{i-l_1,j-l_2} \left(\frac{R}{J} \right) .$$

Es esta observación la que vamos a utilizar dentro de la prueba del siguiente lema, que nos permite dar un primer paso en nuestro camino hacia el estudio de las resoluciones libres minimales graduadas de los ideales de aristas asociados a grafos.

Lema 2.2.8. *Sea $e = uv$ una arista de escisión de G y supongamos, sin pérdida de generalidad por el Teorema 2.2.4, que $N(u) \subseteq (N(v) \cup \{v\})$. Si $N(v) \setminus \{u\} = \{v_1, \dots, v_d\}$, $J = (uv)$ y $K = \mathcal{I}(G \setminus e)$, entonces para todo $i \geq 1$ y todo $j \geq 0$ se tiene que*

$$\beta_{i-1,j}(J \cap K) = \sum_{l=0}^i \binom{d}{l} \beta_{i-l-1,j-l-2}(\mathcal{I}(H)) ,$$

donde $\mathcal{I}(H)$ es el ideal de aristas de $H = G \setminus \{u, v, v_1, \dots, v_d\}$.

Demostración. Como $e = uv$ es una arista de escisión con $N(u) \subseteq (N(v) \cup \{v\})$, al aplicar el Lema 2.2.2 con $(N(u) \setminus \{v\}) \subset (N(v) \setminus \{u\}) = \{v_1, \dots, v_d\}$ y $H = G \setminus (N(u) \cup N(v)) = G \setminus \{u, v, v_1, \dots, v_d\}$ obtenemos

$$J \cap K = uv((v_1, \dots, v_d) + \mathcal{I}(H)) .$$

Pongamos $L = (v_1, \dots, v_d) + \mathcal{I}(H)$.

Como ningún elemento del sistema minimal de generadores de L formado por monomios es divisible por u y tampoco por v , se tiene que uv no es un divisor de cero en R/L . Esto implica que $\beta_{i-1,j}(J \cap K) = \beta_{i-1,j}(uvL) = \beta_{i-1,j-2}(L)$. Además, sabemos que $\beta_{i-1,j-2}(L) = \beta_{i,j-2}(R/L)$, y como los conjuntos de variables que aparecen en $\mathcal{G}((v_1, \dots, v_d))$ y $\mathcal{G}(\mathcal{I}(H))$ son disjuntos, podemos aplicar lo que habíamos visto en la Nota 2.2.7 para obtener

$$\begin{aligned} \beta_{i,j-2} \left(\frac{R}{L} \right) &= \sum_{l_1=0}^i \sum_{l_2=0}^{j-2} \beta_{l_1,l_2} \left(\frac{R}{(v_1, \dots, v_d)} \right) \beta_{i-l_1,j-l_2-2} \left(\frac{R}{\mathcal{I}(H)} \right) = \\ &= \sum_{l_1=0}^i \sum_{l_2=0}^{j-2} \beta_{l_1,l_2} \left(\frac{R}{(v_1, \dots, v_d)} \right) \beta_{i-l_1-1,j-l_2-2}(\mathcal{I}(H)) . \end{aligned}$$

Finalmente, usando el hecho de que v_1, \dots, v_d es una sucesión regular y por tanto los números de Betti graduados de $\frac{R}{(v_1, \dots, v_d)}$ se pueden obtener a partir del complejo de Koszul, que es en este caso una resolución, y son

$$\beta_{i,j} \left(\frac{R}{(v_1, \dots, v_d)} \right) = \begin{cases} \binom{d}{i} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j , \end{cases}$$

ya podemos concluir:

$$\beta_{i-1,j}(J \cap K) = \sum_{l=0}^i \binom{d}{l} \beta_{i-l-1,j-l-2}(\mathcal{I}(H)) ,$$

que es la fórmula del enunciado. \square

Pasamos ahora a enunciar y demostrar el resultado principal de esta sección:

Teorema 2.2.9. *Sea $e = uv$ una arista de escisión de G , y sea $H = G \setminus (N(u) \cup N(v))$. Si $d = |N(u) \cup N(v)| - 2$, entonces para todo $i \geq 1$ y todo $j \geq 0$ se tiene que*

$$\beta_{i,j}(\mathcal{I}(G)) = \beta_{i,j}(\mathcal{I}(G \setminus e)) + \sum_{l=0}^i \binom{d}{l} \beta_{i-l-1,j-l-2}(\mathcal{I}(H)) .$$

Demostración. Como $e = uv$ es una arista de escisión, gracias al Teorema 2.2.4 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $N(u) \subseteq (N(v) \cup \{v\})$. Por lo tanto, $N(u) \cup N(v) = \{u, v, v_1, \dots, v_d\}$ con $\{v_1, \dots, v_d\} = N(v) \setminus \{u\}$ y $d = |N(u) \cup N(v)| - 2$.

En virtud del Teorema 2.1.4 se tiene que para todos $i, j \geq 0$

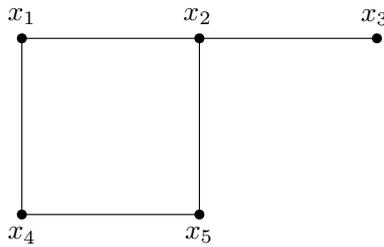
$$\beta_{i,j}(\mathcal{I}(G)) = \beta_{i,j}((uv)) + \beta_{i,j}(\mathcal{I}(G \setminus e)) + \beta_{i-1,j}(J \cap K) .$$

Ahora bien, si $i \geq 1$ se verifica que $\beta_{i,j}((uv)) = 0$ para cada j , ya que no existe ninguna relación no trivial posible entre un único elemento. Aplicando el Lema 2.2.8, ya podemos concluir que para todo $i \geq 1$ y todo $j \geq 0$ se verifica que

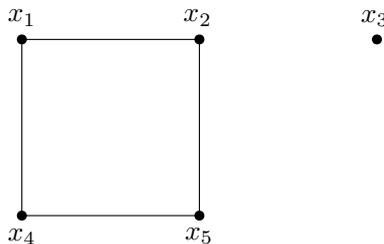
$$\beta_{i,j}(\mathcal{I}(G)) = \beta_{i,j}(\mathcal{I}(G \setminus e)) + \sum_{l=0}^i \binom{d}{l} \beta_{i-l-1,j-l-2}(\mathcal{I}(H)) ,$$

que es lo que queríamos probar. \square

La fórmula que proporciona este teorema no es recursiva en general porque los subgrafos que van apareciendo no tienen por qué poseer aristas de escisión. Por ejemplo, consideremos el siguiente grafo G :



Es claro que la arista $e = x_2x_3$ es una arista de escisión en virtud del Teorema 2.2.4 porque $N(x_3) = \{x_2\} \subseteq N(x_2) \cup \{x_2\}$. Sin embargo, observemos ahora el subgrafo $G \setminus e$:



Este subgrafo de G no tiene aristas de escisión. Para probarlo, y dado que todas las aristas juegan el mismo papel, basta con demostrar que la arista x_1x_2 no es una arista de escisión. Esto es muy sencillo utilizando el Teorema de caracterización de las aristas de escisión, ya que $N(x_1) = \{x_2, x_4\} \not\subseteq N(x_2) \cup \{x_2\} = \{x_1, x_2, x_5\}$ y $N(x_2) = \{x_1, x_5\} \not\subseteq N(x_1) \cup \{x_1\} = \{x_1, x_2, x_4\}$.

A pesar de esta falta de recursividad, la fórmula que proporciona el Teorema 2.2.9 es suficientemente general para proporcionar nuevos resultados sobre la dimensión proyectiva y la regularidad de los ideales de aristas, como veremos en el siguiente corolario:

Corolario 2.2.10. *Con las hipótesis y la notación empleadas en el Teorema 2.2.9, tenemos que*

$$(i) \text{ reg}(\mathcal{I}(G)) = \text{máx}\{2, \text{reg}(\mathcal{I}(G \setminus e)), \text{reg}(\mathcal{I}(H)) + 1\} .$$

$$(ii) \text{ pd}(\mathcal{I}(G)) = \text{máx}\{\text{pd}(\mathcal{I}(G \setminus e)), \text{pd}(\mathcal{I}(H)) + d + 1\} .$$

Demostración. Gracias al Teorema 2.1.5 tenemos que

$$\text{reg}(\mathcal{I}(G)) = \text{máx}\{\text{reg}((uv)), \text{reg}(\mathcal{I}(G \setminus e)), \text{reg}(J \cap K) - 1\} .$$

Además, como se verifica que

$$\beta_{i,j}((uv)) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) = (0, 2) \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (2.1)$$

tenemos que $\text{reg}((uv)) = 2$.

Por lo tanto, solo nos falta comprobar que $\text{reg}(J \cap K) - 1 = \text{reg}(\mathcal{I}(H)) + 1$ o, equivalentemente, que $\text{reg}(J \cap K) = \text{reg}(\mathcal{I}(H)) + 2$. Para ello, recurrimos al Lema 2.2.8, que nos permite deducir que

$$\begin{aligned} \text{reg}(J \cap K) &= \text{máx}\{j - i \mid \beta_{i,j}(J \cap K) \neq 0\} = \\ &= \text{máx}\{j - i + 1 \mid \beta_{i-1,j}(J \cap K) \neq 0\} = \\ &= \text{máx}\{j - i + 1 \mid \beta_{i-l-1,j-l-2}(\mathcal{I}(H)) \neq 0 \text{ con } l \in \{0, \dots, i\}\} = \\ &= \text{máx}\{j - i - 1 \mid \beta_{i-l-1,j-l-2}(\mathcal{I}(H)) \neq 0 \text{ con } l \in \{0, \dots, i\}\} + 2 = \\ &= \text{reg}(\mathcal{I}(H)) + 2 \end{aligned}$$

gracias a que $(j - l - 2) - (i - l - 1) = j - i - 1$ para cada $l \in \{0, \dots, i\}$.

Con esto queda probado entonces el primer apartado del corolario.

De forma similar, para probar el segundo apartado comenzamos notando que en virtud del Teorema 2.1.5

$$\text{pd}(\mathcal{I}(G)) = \text{máx}\{\text{pd}((uv)), \text{pd}(\mathcal{I}(G \setminus e)), \text{pd}(J \cap K) + 1\} .$$

En virtud de los números de Betti graduados de (uv) que hemos escrito en (2.1), es claro que $\text{pd}((uv)) = 0$.

Además, en el Lema 2.2.8 habíamos probado que $\beta_{i-1,j}(J \cap K) = \beta_{i,j-2}(R/((v_1, \dots, v_d) + \mathcal{I}(H)))$, lo que implica que $\text{pd}(J \cap K) = \text{pd}(R/((v_1, \dots, v_d) + \mathcal{I}(H))) - 1$. En ese mismo lema habíamos visto también que

$$\beta_{i,j-2} \left(\frac{R}{(v_1, \dots, v_d) + \mathcal{I}(H)} \right) = \sum_{l=0}^i \beta_{l,l} \left(\frac{R}{(v_1, \dots, v_d)} \right) \beta_{i-l,j-2-l} \left(\frac{R}{\mathcal{I}(H)} \right).$$

Si tenemos en cuenta que $\text{pd}(R/(v_1, \dots, v_d)) = d$ y llamamos p a la dimensión proyectiva de $R/(\mathcal{I}(H))$, entonces considerando $i = d + p$ y $l = d$ en la fórmula anterior, es claro que podemos tomar j de manera que en el lado derecho de la igualdad haya sumandos no nulos. Esto implica que la dimensión proyectiva de $\frac{R}{(v_1, \dots, v_d) + \mathcal{I}(H)}$ es al menos $d + p$. Por otra parte, en la misma fórmula vemos que $l = d$ e $i - l = p$ son de hecho los valores más grandes que podemos tomar sin que todos los sumandos del segundo miembro de la igualdad anterior se anulen, lo que implica que $i = d + p$ es exactamente la dimensión proyectiva de $\frac{R}{(v_1, \dots, v_d) + \mathcal{I}(H)}$; es decir,

$$\text{pd} \left(\frac{R}{(v_1, \dots, v_d) + \mathcal{I}(H)} \right) = d + \text{pd} \left(\frac{R}{\mathcal{I}(H)} \right).$$

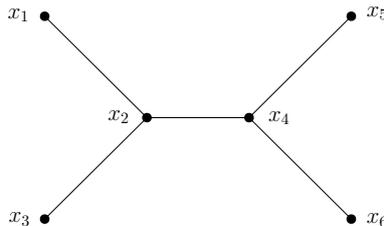
En estas condiciones, ya podemos concluir:

$$\begin{aligned} \text{pd}(J \cap K) + 1 &= \text{pd}(R/((v_1, \dots, v_d) + \mathcal{I}(H))) = \\ &= d + \text{pd}(R/(\mathcal{I}(H))) = d + \text{pd}(\mathcal{I}(H)) + 1, \end{aligned}$$

y podemos aplicar el Teorema 2.1.5. □

El corolario anterior implica que al eliminar en un grafo una arista de escisión e , lo único que les puede ocurrir tanto a la regularidad como a la dimensión proyectiva del ideal de aristas asociado es que permanezcan iguales o disminuyan; es decir, $\text{reg}(\mathcal{I}(G)) \geq \text{reg}(\mathcal{I}(G \setminus e))$ y $\text{pd}(\mathcal{I}(G)) \geq \text{pd}(\mathcal{I}(G \setminus e))$. Sin embargo, si e no es una arista de escisión, entonces podría ocurrir que la regularidad y la dimensión proyectiva de $\mathcal{I}(G \setminus e)$ fuesen estrictamente mayores que las del ideal de aristas asociado al grafo original G . Vamos a ilustrar esto con un ejemplo.

Ejemplo 2.2.11. Consideramos el grafo que habíamos presentado en el Ejemplo 2.2.5, que es el siguiente:



Como habíamos visto en el mencionado ejemplo utilizando el Teorema de caracterización de las aristas de escisión, la arista $e = x_2x_4$ no es una arista de escisión.

Si calculamos ahora los diagramas de Betti de $\mathcal{I}(G) = (x_1x_2, x_2x_3, x_2x_4, x_4x_5, x_4x_6)$ y de $\mathcal{I}(G \setminus e) = (x_1x_2, x_2x_3, x_4x_5, x_4x_6)$, obtenemos

$$\frac{\mathcal{I}(G)}{2} \begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 6 & 2 \end{array} \quad \text{y} \quad \frac{\mathcal{I}(G \setminus e)}{3} \begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 2 & - & - \\ - & 4 & 4 & 1 \end{array} .$$

De aquí se deduce que $\text{pd}(\mathcal{I}(G \setminus e)) = 3 > 2 = \text{pd}(\mathcal{I}(G))$ y $\text{reg}(\mathcal{I}(G \setminus e)) = 3 > 2 = \text{reg}(\mathcal{I}(G))$. Aunque los diagramas de Betti anteriores se pueden hallar efectuando cálculos a mano, por ejemplo utilizando el orden de Schreyer, este proceso resulta tedioso. Por este motivo, dedicamos el Apéndice A de este trabajo a presentar cómo el programa *Macaulay2* nos permite trabajar con ideales de aristas asociados a grafos de una forma más cómoda.

Para terminar esta sección, vamos a proporcionar varios resultados sobre los números de Betti de los ideales de aristas asociados a bosques. Su interés principal se debe a que todo subgrafo inducido de un bosque es nuevamente un bosque, y en consecuencia las fórmulas que se obtienen en este caso sí son recursivas. Aunque el primero en obtener los siguientes resultados que voy a exponer fue Sean Jacques en su tesis ([18]) y en un artículo con Mordechai Katzman ([19]), la forma en la que los voy a abordar en este trabajo no se corresponde con el enfoque original de naturaleza homológica que ellos les habían dado, sino que se encuadra dentro de este enfoque de naturaleza más combinatoria que Huy Tài Hà y Adam Van Tuyl adoptan en [16], y que es el que he estudiado en profundidad para la elaboración de este trabajo.

Corolario 2.2.12. *Sea $e = uv$ una hoja cualquiera de un bosque G . Si $\deg v = d$ y $N(v) = \{u, v_1, \dots, v_{d-1}\}$, entonces para $i \geq 1$ y $j \geq 0$*

$$\beta_{i,j}(\mathcal{I}(G)) = \beta_{i,j}(\mathcal{I}(T)) + \sum_{l=0}^i \binom{d-1}{l} \beta_{i-l-1, j-l-2}(\mathcal{I}(H)) ,$$

donde $T = G \setminus e$ y $H = G \setminus \{u, v, v_1, \dots, v_{d-1}\}$.

Nota 2.2.13. El grafo $T = G \setminus e$ que aparece en el enunciado de este corolario no es un subgrafo inducido de G porque contiene al vértice u aislado, pero sigue siendo un bosque sin más que hacer la consideración trivial de que el grafo formado por un único vértice aislado es un árbol (conexo y acíclico). Otra forma de ver la recursividad de la fórmula anterior sin recurrir a esta consideración consiste en observar que $\mathcal{I}(T) = \mathcal{I}(G \setminus e) = \mathcal{I}(G \setminus \{u\})$, donde $G \setminus \{u\}$ sí que es un subgrafo inducido de G y, por tanto, un bosque.

Demostración. Como uv es una hoja y $\deg v = d$, tenemos que necesariamente $\deg u = 1$. Por lo tanto, $N(u) = \{v\} \subseteq (N(v) \cup \{v\})$ y resulta que uv es una arista de escisión. Basta aplicar entonces el Teorema 2.2.9, teniendo en cuenta que ahora $|N(u) \cup N(v)| - 2 = d - 1$. \square

Corolario 2.2.14. *Con las mismas notaciones que en el Corolario 2.2.12,*

$$\text{pd}(\mathcal{I}(G)) = \max\{\text{pd}(\mathcal{I}(T)), \text{pd}(\mathcal{I}(H)) + d\} .$$

Demostración. Basta aplicar el Corolario 2.2.10, teniendo en cuenta que ahora se tiene que $|N(u) \cup N(v)| - 2 = d - 1$. \square

Se dice que dos aristas u_1v_1 y u_2v_2 de un grafo simple G están *desconectadas* si

(a) $\{u_1, v_1\} \cap \{u_2, v_2\} = \emptyset$, y

(b) $u_1u_2, u_1v_2, v_1u_2, v_1v_2$ no son aristas de G .

En el caso en que G es un bosque, es posible relacionar $\text{reg}(\mathcal{I}(G))$ con el número de aristas desconectadas de G . Es esto a lo que vamos a dedicar el último resultado de esta sección, presentando la demostración alternativa que Huy Tàì Hà y Adam Van Tuyl proporcionaron para un resultado que originalmente había sido enunciado y demostrado por Xinxian Zheng en [25] utilizando otras técnicas.

Corolario 2.2.15. *Sea G un bosque con ideal de aristas $\mathcal{I}(G)$. Entonces $\text{reg}(\mathcal{I}(G)) = j + 1$, donde j es el cardinal del mayor conjunto de aristas desconectadas dos a dos en G .*

Demostración. Vamos a razonar por inducción sobre $|E_G|$.

Cuando $|E_G| = 1$, el resultado es trivial. Por un lado, el número de aristas desconectadas, como solo hay una, tiene que ser igual a uno. Además, si llamamos a esta arista uv , sabemos que $\text{reg}(\mathcal{I}(uv)) = 2 = 1 + 1$.

Supongamos ahora que $|E_G| > 1$, y sea $e = uv$ cualquier hoja de G con $\deg u = 1$ (que existe por ser G un bosque). En virtud del Corolario 2.2.10 tenemos que $\text{reg}(\mathcal{I}(G)) = \max\{2, \text{reg}(\mathcal{I}(T)), \text{reg}(\mathcal{I}(H)) + 1\}$, donde $T = G \setminus e$ y $H = G \setminus (\{v\} \cup N(v))$. Aplicando la hipótesis de inducción, $\text{reg}(\mathcal{I}(T)) = j_1 + 1$, donde j_1 es el cardinal del mayor conjunto de aristas desconectadas dos a dos en T , y $\text{reg}(\mathcal{I}(H)) = j_2 + 1$, donde j_2 es el cardinal del mayor conjunto de aristas desconectadas dos a dos en H . Como T tiene al menos una arista porque estamos suponiendo que $|E_G| > 1$, resulta que $j_1 + 1 \geq 2$. En consecuencia,

$$\text{reg}(\mathcal{I}(G)) = \max\{j_1 + 1, j_2 + 2\} = \max\{j_1, j_2 + 1\} + 1 .$$

Si denotamos por j al cardinal del mayor conjunto de aristas desconectadas dos a dos en G , entonces para terminar la demostración basta probar que $j = \max\{j_1, j_2 + 1\}$.

Sea \mathcal{E}_1 un conjunto de j_1 aristas desconectadas dos a dos de T . Las aristas de \mathcal{E}_1 forman también un conjunto de aristas desconectadas dos a dos de G , luego $|\mathcal{E}_1| = j_1 \leq j$. Si \mathcal{E}_2 es un conjunto de j_2 aristas desconectadas dos a dos de H , entonces afirmamos que $\mathcal{E}_2 \cup \{uv\}$ es un conjunto de aristas desconectadas dos a dos en G . Efectivamente, uv no comparte ningún vértice con ninguna arista de H . Las únicas aristas que comparten algún vértice con uv son las vv_i donde $v_i \in N(v) \setminus \{u\}$. Sin embargo, ninguna de las aristas de \mathcal{E}_2 puede compartir un vértice con esas aristas ya que ninguno de los vértices de $N(v)$ pertenece a H . En consecuencia, $|\mathcal{E}_2 \cup \{uv\}| = j_2 + 1 \leq j$ y por tanto $j \geq \max\{j_1, j_2 + 1\}$.

Vamos a ver que, de hecho, se da la igualdad. Para ello, razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que $j > \max\{j_1, j_2 + 1\}$. Sea \mathcal{E} un conjunto de j aristas desconectadas dos a dos de G . Si $uv \notin \mathcal{E}$, entonces \mathcal{E} también es un conjunto de aristas desconectadas dos a dos en T , luego $j = |\mathcal{E}| \leq j_1$, lo cual es absurdo. Si $uv \in \mathcal{E}$, entonces

ninguna de las aristas que contienen a algún v_i , con $v_i \in N(v) \setminus \{u\}$, pertenecen a \mathcal{E} por tratarse de un conjunto de aristas desconectadas dos a dos. Así pues, $\mathcal{E} \setminus \{uv\}$ es un conjunto de aristas desconectadas dos a dos de $H = G \setminus (\{v\} \cup N(v))$. Pero esto implicaría que $j - 1 \leq j_2$, lo cual de nuevo es absurdo.

Ya podemos concluir entonces que se da la igualdad: $j = \max\{j_1, j_2 + 1\}$. \square

Además del caso de las aristas de escisión que acabamos de presentar, la técnica de la escisión de ideales se puede utilizar de otras formas distintas. Por ejemplo, es posible hablar de vértices de escisión, a los que dedicamos la siguiente sección.

2.3. Vértices de escisión

El concepto de *vértice de escisión* con el que queremos trabajar en esta sección es análogo al concepto de *arista de escisión* con el que trabajábamos en la sección previa. En particular, las dos nociones surgen a partir de la misma idea.

Si G es un grafo simple y v es un vértice de G con conjunto de vértices adyacentes $N(v) = \{v_1, \dots, v_d\}$, entonces es claro que $\mathcal{I}(G) = J + K$, donde $J = (vv_1, \dots, vv_d)$ y $K = \mathcal{I}(G \setminus \{v\})$. Sin embargo, al igual que ocurría en la sección anterior, esta suma no tiene por qué ser una escisión del ideal $\mathcal{I}(G)$, y lo que nos va a interesar es determinar cuándo sí que lo es. No obstante, a diferencia de lo que hacíamos con las aristas de escisión, no va a ser esta la condición que exijamos en la definición de vértice de escisión. En este caso, una condición más natural implicará directamente la condición que deseamos.

Si v es un vértice aislado de G (es decir, v no pertenece a ninguna arista del grafo G), entonces $\mathcal{I}(G) = \mathcal{I}(G \setminus \{v\})$ y, en consecuencia, todos los números de Betti graduados de estos dos ideales coinciden. Por otra parte, si el vértice v tiene grado $d > 0$ y $G \setminus \{v\}$ es el grafo formado por d vértices aislados, entonces lo que tenemos es que el grafo G de partida no es más que el grafo bipartito completo $\mathcal{K}_{1,d}$. En este caso, todos los números de Betti graduados del ideal de aristas asociado son conocidos y los recogemos en el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1. *Si $G = \mathcal{K}_{1,d}$, entonces para todos $i, j \geq 0$ se tiene que*

$$\beta_{i,j}(\mathcal{I}(G)) = \begin{cases} \binom{d}{i+1} & \text{si } j = i + 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Es claro que el ideal de aristas de $G = \mathcal{K}_{1,d}$ es $\mathcal{I}(G) = (vv_1, \dots, vv_d)$, donde los dos conjuntos disjuntos en los que se divide el conjunto de vértices de G son $\{v\}$, de cardinal 1, y $\{v_1, \dots, v_d\}$, de cardinal d .

Entonces $\beta_{i,j}(\mathcal{I}(G)) = \beta_{i,j}((vv_1, \dots, vv_d)) = \beta_{i,j-1}((v_1, \dots, v_d))$.

En la demostración del Lema 2.2.8 habíamos visto que

$$\beta_{i,j} \left(\frac{R}{(v_1, \dots, v_d)} \right) = \begin{cases} \binom{d}{i} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$\beta_{i,j-1}((v_1, \dots, v_d)) = \beta_{i+1,j-1} \left(\frac{R}{(v_1, \dots, v_d)} \right) = \begin{cases} \binom{d}{i+1} & \text{si } j = i + 2 \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

siendo esto lo que queríamos probar. \square

Dejando entonces a un lado estos dos casos, que hemos visto que son conocidos, vamos a llamar vértice de escisión a todo aquel que no esté en ninguna de las dos situaciones que acabamos de describir. Para mayor precisión, recogemos la definición de este nuevo concepto a continuación:

Definición 2.3.2. Se dice que un vértice $v \in V_G$ es un *vértice de escisión* si $\deg(v) = d > 0$ y $G \setminus \{v\}$ no es el grafo formado por d vértices aislados.

A continuación, vamos a presentar un resultado que prueba lo que avanzábamos al comienzo de esta sección: basta definir los vértices de escisión como lo hemos hecho en la definición anterior para que estos nos proporcionen una escisión del ideal de aristas de G .

Teorema 2.3.3. *Sea v un vértice de escisión de G con $N(v) = \{v_1, \dots, v_d\}$, y sean $J = (vv_1, \dots, vv_d)$ y $K = \mathcal{I}(G \setminus \{v\})$. Entonces $\mathcal{I}(G) = J + K$ es una escisión de $\mathcal{I}(G)$.*

Demostración. Es claro que $\mathcal{I}(G) = J + K$ y que $\mathcal{G}(\mathcal{I}(G))$ es la unión disjunta de $\mathcal{G}(J)$ y $\mathcal{G}(K)$. Por lo tanto, para probar que $\mathcal{I}(G) = J + K$ es una escisión, basta construir una función de escisión. Para ello, necesitamos conocer primero el conjunto $\mathcal{G}(J \cap K)$.

Como tanto J como K son ideales monomiales, tenemos que

$$J \cap K = (\{\text{mcm}(m_1, m_2) \mid m_1 \in \{vv_1, \dots, vv_d\}, m_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{I}(H))\}) ,$$

donde $H = G \setminus \{v\}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(J \cap K) = & \{vv_iv_j \mid v_iv_j \in E_G\} \sqcup \{vv_iy_j \mid v_iy_j \in E_G\} \sqcup \\ & \sqcup \{vv_iy_jy_k \mid y_jy_k \in E_G \text{ pero } v_iy_j, v_iy_k \notin E_G\} , \end{aligned}$$

donde los y_j son vértices de G que no pertenecen al conjunto $\{v, v_1, \dots, v_d\}$, y los tres conjuntos que aparecen en la unión anterior son disjuntos.

Vamos a definir ahora una aplicación $\mathcal{G}(J \cap K) \rightarrow \mathcal{G}(J) \times \mathcal{G}(K)$, y probaremos que es una función de escisión.

Si $w \in \mathcal{G}(J \cap K)$, entonces definimos $\phi : \mathcal{G}(J \cap K) \rightarrow \mathcal{G}(J)$ y $\psi : \mathcal{G}(J \cap K) \rightarrow \mathcal{G}(K)$ por

$$\phi(w) = \begin{cases} vv_i & \text{si } w = vv_iv_j \text{ e } i < j , \\ vv_i & \text{si } w = vv_iy_j , \\ vv_i & \text{si } w = vv_iy_jy_k \end{cases} \quad \text{y} \quad \psi(w) = \begin{cases} v_iv_j & \text{si } w = vv_iv_j , \\ v_iy_j & \text{si } w = vv_iy_j , \\ y_jy_k & \text{si } w = vv_iy_jy_k . \end{cases}$$

Queremos probar que la aplicación dada por $w \mapsto (\phi(w), \psi(w))$ es una función de escisión. Es claro a partir de la propia definición que $w = \text{mcm}(\phi(w), \psi(w))$ para todo $w \in \mathcal{G}(J \cap K)$, de manera que lo único que nos falta probar es que para cada subconjunto $S \subseteq \mathcal{G}(J \cap K)$, tanto $\text{mcm}(\phi(S))$ como $\text{mcm}(\psi(S))$ dividen estrictamente a $\text{mcm}(S)$.

Sea entonces $S \subseteq \mathcal{G}(J \cap K)$. Si S contiene a algún monomio divisible por alguna variable $y \notin \{v, v_1, \dots, v_d\}$, entonces $\text{mcm}(\phi(S))$ divide estrictamente a $\text{mcm}(S)$, ya que

y divide a $\text{mcm}(S)$ pero no divide a ningún elemento de $\phi(S)$, y por tanto tampoco a $\text{mcm}(\phi(S))$.

En caso contrario, necesariamente tendríamos que $S \subseteq \{vv_iv_j \mid v_iv_j \in E_G\}$. Si denotamos por m al mayor índice tal que v_m pertenece a algún monomio de S , entonces, en virtud de la definición de ϕ , se tiene que v_m no divide a ningún elemento de $\phi(S)$ y por tanto $\text{mcm}(\phi(S))$ divide estrictamente a $\text{mcm}(S)$.

Por otra parte, como v divide a todos los elementos de S pero no divide a ningún elemento de $\psi(S)$, se tiene que $\text{mcm}(\psi(S))$ divide estrictamente a $\text{mcm}(S)$.

Esto nos permite concluir que la aplicación que hemos definido es una función de escisión, lo que prueba el teorema. \square

Una consecuencia inmediata de la descripción de $\mathcal{G}(J \cap K)$ que hemos dado en la demostración del teorema anterior es la siguiente:

Corolario 2.3.4. *Con las mismas notaciones que en el Teorema 2.3.3, definimos*

$$G_i := G \setminus (N(v) \cup N(v_i)) \quad \text{para } i = 1, \dots, d, \text{ y}$$

$$G_{(v)} := G_{\{v_1, \dots, v_d\}} \cup \{e \in E_G \mid e \text{ contiene a algún } v_1, \dots, v_d \text{ pero no a } v\},$$

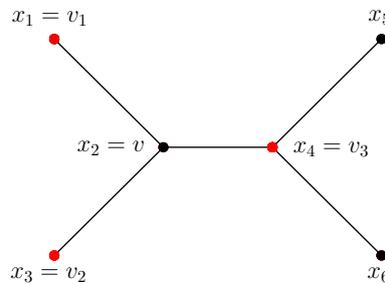
donde recordamos que $G_{\{v_1, \dots, v_d\}}$ no es más que el subgrafo inducido de G sobre el conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_d\}$.

Entonces

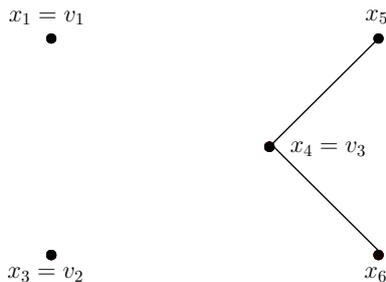
$$J \cap K = v\mathcal{I}(G_{(v)}) + vv_1\mathcal{I}(G_1) + vv_2\mathcal{I}(G_2) + \dots + vv_d\mathcal{I}(G_d).$$

Como los grafos que hemos definido en el corolario anterior van a aparecer en resultados posteriores, conviene aclarar sus definiciones a través de un ejemplo:

Ejemplo 2.3.5. Consideramos el mismo grafo que en el Ejemplo 2.2.5 y tomamos $v = x_2$, de manera que los vértices adyacentes a v son $N(v) = \{x_1 = v_1, x_3 = v_2, x_4 = v_3\}$ y aparecen coloreados de rojo en la siguiente figura:



En este caso, los grafos G_1 y G_2 coinciden con el grafo cuyos dos únicos vértices son x_5 y x_6 , ambos aislados; G_3 es el grafo vacío, dado que $N(v) \cup N(v_3)$ es el conjunto total de vértices de G ; y $G_{(v)}$ es el grafo siguiente:



Además, vemos que $v = x_2$ es un vértice de escisión dado que tiene grado $3 > 0$ y además $G \setminus \{v\}$, que coincide en este caso con $G_{(v)}$, no es el grafo de vértices aislados.

A continuación, presentamos un resultado que recoge cómo pueden cambiar la regularidad y la dimensión proyectiva del ideal de aristas de un grafo al eliminar cualquier vértice.

Corolario 2.3.6. *Sea G un grafo simple que no está formado únicamente por vértices aislados sino que tiene al menos una arista, y sea $v \in V_G$ un vértice cualquiera de G . Entonces*

$$(i) \text{ reg}(\mathcal{I}(G)) \geq \max\{2, \text{reg}(\mathcal{I}(G \setminus \{v\}))\}, \text{ y}$$

$$(ii) \text{ pd}(\mathcal{I}(G)) \geq \max\{d - 1, \text{pd}(\mathcal{I}(G \setminus \{v\}))\}, \text{ donde } d = \deg_G(v).$$

Nota 2.3.7. La segunda de las afirmaciones de este corolario había sido probada por Sean Jacques en su tesis ([18]), aunque en el caso particular en que el vértice v tiene grado menor o igual que 1. Por tanto, el resultado que nos permite obtener la técnica de la escisión de ideales es más general.

Demostración. Para probar este resultado, vamos a distinguir dos casos:

- Si v no es un vértice de escisión, entonces existen a su vez dos posibilidades:

- v es un vértice aislado, en cuyo caso $\mathcal{I}(G) = \mathcal{I}(G \setminus \{v\})$ y $d = 0$.

Como consecuencia, tenemos que $\text{reg}(\mathcal{I}(G)) = \text{reg}(\mathcal{I}(G \setminus \{v\}))$, y este valor es mayor o igual que 2 porque $\beta_{0,2}(\mathcal{I}(G)) \neq 0$ ya que el ideal es no nulo y está generado por elementos de grado 2. Así pues, se verifica (i).

Por otra parte, tenemos que $\text{pd}(\mathcal{I}(G)) = \text{pd}(\mathcal{I}(G \setminus \{v\}))$, y este valor es mayor o igual que 0, que es estrictamente mayor que $d - 1 = 0 - 1 = -1$. Queda probado entonces que también se verifica (ii).

- v tiene grado $d > 0$ y G es el grafo bipartito completo $\mathcal{K}_{1,d}$, lo que implica que $\mathcal{I}(G \setminus \{v\}) = (0)$.

En virtud del Teorema 2.3.1, se tiene que $\text{reg}(\mathcal{I}(\mathcal{K}_{1,d})) = 2$ y $\text{pd}(\mathcal{I}(\mathcal{K}_{1,d})) = d - 1 > -1$.

Además, como el único número de Betti no nulo del ideal (0) es $\beta_{-1,0}((0))$, tenemos que $\text{pd}((0)) = -1$ y $\text{reg}((0)) = 1$. Es claro entonces que en este caso también se verifican (i) y (ii).

Reuniendo ambas posibilidades, se concluye que el resultado es cierto en este caso.

- Si v es un vértice de escisión, entonces $\mathcal{I}(G) = (vv_1, \dots, vv_d) + \mathcal{I}(G \setminus \{v\}) = J + K$ es una escisión. Teniendo en cuenta que $(vv_1, \dots, vv_d) = \mathcal{I}(\mathcal{K}_{1,d})$, podemos aplicar el Teorema 2.1.5 para afirmar que

$$\begin{aligned} \text{reg}(\mathcal{I}(G)) &= \text{máx}\{\text{reg}((vv_1, \dots, vv_d)), \text{reg}(\mathcal{I}(G \setminus \{v\})), \text{reg}(J \cap K) - 1\} \geq \\ &\geq \text{máx}\{2, \text{reg}(\mathcal{I}(G \setminus \{v\}))\}, \text{ y} \\ \text{pd}(\mathcal{I}(G)) &= \text{máx}\{\text{pd}((vv_1, \dots, vv_d)), \text{pd}(\mathcal{I}(G \setminus \{v\})), \text{pd}(J \cap K) + 1\} \geq \\ &\geq \text{máx}\{d - 1, \text{pd}(\mathcal{I}(G \setminus \{v\}))\}. \end{aligned}$$

El análisis de los dos casos por separado nos permite concluir la demostración. \square

Hemos visto que si v es un vértice de escisión con $N(v) = \{v_1, \dots, v_d\}$ y denotamos $J = (vv_1, \dots, vv_d) = \mathcal{I}(\mathcal{K}_{1,d})$ y $K = \mathcal{I}(G \setminus \{v\})$, entonces $\mathcal{I}(G) = J + K$ es una escisión. En consecuencia, se le podrá aplicar la fórmula que proporciona el Teorema 2.1.4, utilizando la descripción de $J \cap K$ que hemos obtenido en el Corolario 2.3.4 como $J \cap K = v\mathcal{I}(G_{(v)}) + vv_1\mathcal{I}(G_1) + vv_2\mathcal{I}(G_2) + \dots + vv_d\mathcal{I}(G_d)$. Con esta información, se deduce inmediatamente el siguiente teorema:

Teorema 2.3.8. *Sea v un vértice de escisión de G con $N(v) = \{v_1, \dots, v_d\}$, y sean $G_{(v)}$ y G_i ($i = 1, \dots, d$) los grafos que hemos definido en el Corolario 2.3.4. Entonces*

$$\beta_{i,j}(\mathcal{I}(G)) = \beta_{i,j}(\mathcal{I}(\mathcal{K}_{1,d})) + \beta_{i,j}(\mathcal{I}(G \setminus \{v\})) + \beta_{i-1,j}(L),$$

donde $L = v\mathcal{I}(G_{(v)}) + vv_1\mathcal{I}(G_1) + vv_2\mathcal{I}(G_2) + \dots + vv_d\mathcal{I}(G_d)$.

Vamos a utilizar ahora este teorema para demostrar un resultado presentado por primera vez en 2005 por David Eisenbud, Mark Green, Klaus Hulek y Sorin Popescu ([4]). La demostración del resultado que presentaron estos autores está basada fundamentalmente en el uso de herramientas propias del álgebra homológica. La demostración que permite obtener la técnica de la escisión de ideales, que es la que voy a detallar a continuación, es pesada pero utiliza herramientas puramente combinatorias y mucho más elementales.

Se trata de un resultado muy interesante, que permite ilustrar de una forma clara el puente existente entre el álgebra conmutativa y la teoría de grafos. No obstante, antes de enunciarlo necesitamos introducir algunas nuevas definiciones.

Definición 2.3.9. Sea G un grafo simple.

- Un ciclo $C = (x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_q}x_{i_1})$ de G tiene una *cuerda* si existe alguna arista entre dos vértices no consecutivos (en el orden en el que los hemos escrito antes) del ciclo C ; es decir, si existen r y s tales que $s \not\equiv r + 1 \pmod{q}$ y $x_{i_r}x_{i_s}$ es una arista de G .
- Se dice que un ciclo C es *minimal* si tiene longitud mayor o igual que cuatro y no tiene ninguna cuerda.

- Un ideal I generado por elementos de grado d tiene una *resolución lineal* si sus únicos números de Betti no nulos pertenecen a la llamada *parte lineal*; es decir, si son de la forma $\beta_{i,i+d}$ para ciertos valores de i .
- Diremos que un ideal I satisface la *propiedad $N_{2,p}$* para algún $p \geq 1$ si I está generado por elementos cuadráticos y su resolución libre minimal graduada es lineal hasta el paso p -ésimo; es decir, si $\beta_{i,j}(I) = 0$ para todo $0 \leq i < p$ y todo $j > i + 2$.

Nota 2.3.10. Notemos que el hecho conocido de que el menor de los grados de los elementos en cada módulo de sizigias crece estrictamente en cada paso implica que también $\beta_{i,j}(I) = 0$ para todo $0 \leq i < p$ y todo $j < i + 2$, de manera que efectivamente la condición descrita en la definición anterior es que I tiene una resolución lineal hasta el paso p -ésimo.

Ahora sí, ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente resultado:

Corolario 2.3.11. *Sea G un grafo simple con ideal de aristas $\mathcal{I}(G)$. Entonces $\mathcal{I}(G)$ satisface la propiedad $N_{2,p}$ con $p > 1$ si y solo si cada ciclo minimal en G^c tiene longitud mayor o igual que $p + 3$.*

Nota 2.3.12. Antes de presentar la demostración de este resultado, notemos que el caso $p = 1$, que no se incluye en su enunciado, es trivial. Efectivamente, $\mathcal{I}(G)$ satisface la propiedad $N_{2,1}$ porque su único número de Betti $0, j$ -ésimo no nulo es $\beta_{0,2}(\mathcal{I}(G))$. Por otra parte, cada ciclo minimal en G^c tiene, por definición, longitud mayor o igual que $4 = p + 3$.

Demostración. Razonamos por inducción sobre $n = |V_G|$.

En primer lugar, vamos a probar que el resultado es cierto si $n \leq 3$.

Por un lado, si $n = |V_G| \leq 3$, entonces $|V_{G^c}| = n \leq 3$, y por tanto G^c no puede tener ciclos minimales ya que estos tienen, por definición, longitud mayor o igual que 4. En consecuencia, la segunda parte del enunciado se verifica trivialmente para todo $p > 1$, y tenemos que probar que la primera parte también lo hace; es decir, que $\mathcal{I}(G)$ satisface la propiedad $N_{2,p}$ para todo $p > 1$, lo que es equivalente a decir que $\mathcal{I}(G)$ tiene una resolución lineal.

Si $n = 1$, entonces el resultado es trivial porque $\mathcal{I}(G) = (0)$.

Si $n = 2$, entonces tenemos dos opciones: que el grafo G no tenga ninguna arista, en cuyo caso estaríamos en la misma situación que con $n = 1$, o que el grafo tenga una arista v_1v_2 . En este caso se tiene que el único número de Betti no nulo de $\mathcal{I}(G) = (v_1v_2)$ es $\beta_{0,2}$, y por tanto el ideal tiene una resolución lineal.

Finalmente, si $n = 3$, tenemos cuatro opciones. Si no hay ninguna arista, nos encontramos en la misma situación que cuando n era igual a 1. Si hay una sola arista, nos encontramos en una situación idéntica a la del segundo caso tratado cuando n era igual a 2. Por tanto, basta analizar lo que ocurre cuando hay 2 o 3 aristas.

Si hay 2 aristas, estas tienen que compartir un vértice. Llamando v a este vértice común y v_1, v_2 a sus vértices adyacentes, resulta que $\mathcal{I}(G) = (vv_1, vv_2) = \mathcal{I}(\mathcal{K}_{1,2})$, y en virtud del Teorema 2.3.1 sabemos que este ideal tiene una resolución lineal.

Por último, si hay 3 aristas y llamamos u , v y w a los tres vértices del grafo, tenemos que $\mathcal{I}(G) = (uv, uw, vw)$. En este caso podemos, por ejemplo, utilizar *Macaulay2* tal y como se expone en el Apéndice A para comprobar que el ideal $\mathcal{I}(G)$ tiene una resolución lineal.

Ahora que sabemos que el resultado es cierto para $n \leq 3$, podemos suponer que $n \geq 4$. Nuestra hipótesis de inducción va a ser que el resultado es cierto siempre que trabajemos con grafos que tengan menos de n vértices.

Veamos ahora que podemos suponer que G no tiene vértices aislados. Lo que vamos a probar es que, si conseguimos demostrar el resultado para grafos sin vértices aislados, entonces el caso de grafos con vértices aislados será una consecuencia inmediata.

Para ello, razonamos de la forma siguiente: si G tiene un vértice aislado, llamémosle v , entonces $\mathcal{I}(G) = \mathcal{I}(G \setminus \{v\})$, luego $\mathcal{I}(G)$ satisface la propiedad $N_{2,p}$ con $p > 1$ si y solo si $\mathcal{I}(G \setminus \{v\})$ lo hace.

Por otra parte, si v es un vértice aislado de G , entonces v tiene grado $n - 1$ en G^c ; es decir, v es adyacente en G^c a todos los demás vértices. Por lo tanto, v no puede formar parte de ningún ciclo minimal de dicho grafo, ya que todo ciclo de longitud mayor o igual que 4 al que v pertenezca tendrá cuerdas (las aristas que unen v con los demás vértices). Como consecuencia de esto, se tiene que los ciclos minimales de G^c y $G^c \setminus \{v\}$ coinciden.

Además, $G^c \setminus \{v\} = (G \setminus \{v\})^c$: para probarlo, veremos que los conjuntos de vértices y aristas de ambos grafos coinciden. Efectivamente:

- $V_{(G \setminus \{v\})^c} = V_{G \setminus \{v\}} = V_G \setminus \{v\}$, y
 $V_{G^c \setminus \{v\}} = V_{G^c} \setminus \{v\} = V_G \setminus \{v\}$.
 - $E_{(G \setminus \{v\})^c} = \{x_i x_j \mid x_i x_j \notin E_{G \setminus \{v\}}, x_i, x_j \in V_{(G \setminus \{v\})^c}\}$, y
 $E_{G^c \setminus \{v\}} = \{x_i x_j \mid x_i x_j \notin E_G, x_i, x_j \in V_{G^c \setminus \{v\}}\}$.
- Como $V_{(G \setminus \{v\})^c} = V_{G^c \setminus \{v\}} = V_G \setminus \{v\}$, decir que $x_i x_j \notin E_{G \setminus \{v\}}$, con $x_i, x_j \in V_{(G \setminus \{v\})^c}$, es lo mismo que decir que $x_i x_j \notin E_G$, con $x_i, x_j \in V_{G^c \setminus \{v\}}$.

Si añadimos esto al hecho que hemos probado previamente de que los ciclos minimales de G^c y $G^c \setminus \{v\}$ coinciden, podemos afirmar que los ciclos minimales de G^c y $(G \setminus \{v\})^c$ coinciden. Por lo tanto, cada ciclo minimal en G^c tiene longitud mayor o igual que $p + 3$ si y solo si cada ciclo minimal en $(G \setminus \{v\})^c$ la tiene.

Ahora, dado un grafo G con vértices aislados, es posible eliminar estos vértices para obtener un grafo G' sin vértices aislados. Además, razonando por recurrencia a partir de lo que hemos probado para la eliminación de un solo vértice aislado, cada una de las afirmaciones del enunciado del teorema se verificará para G si y solo si lo hace para G' . En consecuencia, si probamos el teorema para grafos sin vértices aislados, el resultado será cierto para aquellos que sí los tengan. En efecto:

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}(G) \text{ satisface la propiedad } N_{2,p} \text{ con } p > 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \mathcal{I}(G') \text{ satisface la propiedad } N_{2,p} \text{ con } p > 1 \text{ y } G' \text{ sin vértices aislados} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \text{Todo ciclo minimal en } (G')^c \text{ tiene longitud } \geq p + 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \text{Todo ciclo minimal en } G^c \text{ tiene longitud } \geq p + 3. \end{aligned}$$

Además, podemos suponer que $G \neq \mathcal{K}_{1,n-1}$ porque es sencillo probar que el resultado es cierto en este caso. Por una parte, en virtud del Teorema 2.3.1 sabemos que $\mathcal{I}(\mathcal{K}_{1,n-1})$ tiene una resolución lineal, de manera que verifica la propiedad $N_{2,p}$ para todo $p > 1$. Por otra parte, el grafo complementario de $G = \mathcal{K}_{1,n-1}$ es el grafo completo en los $n - 1$ vértices que son adyacentes a un mismo vértice v en G . Como consecuencia, G^c no tiene ciclos minimales, y por tanto la segunda afirmación del teorema es trivialmente cierta en este caso para cada $p > 1$.

Vamos a suponer entonces a partir de ahora que G no tiene vértices aislados y que no es el grafo bipartito completo $\mathcal{K}_{1,n-1}$, de manera que claramente G tendrá un vértice de escisión, sin más que prestar atención a la definición de estos. Llamemos v a este vértice.

Sean $N(v) = \{v_1, \dots, v_d\}$, $G_i = G \setminus (N(v) \cup N(v_i))$ para cada i entre 1 y d , y $G_{(v)} = G_{\{v_1, \dots, v_d\}} \cup \{e \in E_G \mid e \text{ contiene a algún } v_1, \dots, v_d \text{ pero no a } v\}$.

En virtud del Teorema 2.3.8 sabemos que

$$\beta_{i,j}(\mathcal{I}(G)) = \beta_{i,j}(J) + \beta_{i,j}(K) + \beta_{i-1,j}(L) ,$$

donde $J = (vv_1, \dots, vv_d)$, $K = \mathcal{I}(G \setminus \{v\})$ y $L = J \cap K = v\mathcal{I}(G_{(v)}) + \sum_{i=1}^d vv_i\mathcal{I}(G_i)$.

A partir de la fórmula anterior, vamos a probar que $\mathcal{I}(G)$ satisface la propiedad $N_{2,p}$ si y solo si se verifican las dos condiciones siguientes: K satisface la propiedad $N_{2,p}$, y L , que está generado a priori por elementos de grado mayor o igual que 3, satisface la propiedad $N_{3,p-1}$ (es decir, está generado por elementos de grado 3 y tiene una resolución lineal hasta el $(p - 1)$ -ésimo paso).

$\mathcal{I}(G)$ verifica la propiedad $N_{2,p}$ si y solo si $\beta_{i,j}(\mathcal{I}(G)) = 0$ para todo $0 \leq i < p$ y todo $j > i + 2$. En virtud de la fórmula que proporciona el Teorema 2.3.8 para los números de Betti graduados de $\mathcal{I}(G)$, lo anterior equivale a que ocurran las tres cosas siguientes:

- $\beta_{i,j}(J) = 0$ para todo $0 \leq i < p$ y todo $j > i + 2$, lo que equivale a decir que J satisface la propiedad $N_{2,p}$. Sin embargo, como J tiene una resolución lineal en virtud del Teorema 2.3.1, se tiene que verifica la propiedad $N_{2,p}$ para cada $p > 1$ y, en consecuencia, esta condición se puede omitir.
- $\beta_{i,j}(K) = 0$ para todo $0 \leq i < p$ y todo $j > i + 2$, lo que equivale a decir que K satisface la propiedad $N_{2,p}$.
- $\beta_{i-1,j}(L) = 0$ para todo $-1 \leq i - 1 < p - 1$ y todo $j > i + 2 = (i - 1) + 3$, lo que equivale a decir (cambiando $i - 1$ por i y teniendo en cuenta que $\beta_{-1,j}(L) = 0$ para todo $j > 0$) que $\beta_{i,j}(L) = 0$ para todo $0 \leq i < p - 1$ y todo $j > i + 3$; es decir, que L satisface la propiedad $N_{3,p-1}$.

Es posible observar también que L satisface la propiedad $N_{3,p-1}$ si y solo si $L = v\mathcal{I}(G_{(v)})$ y además el ideal $\mathcal{I}(G_{(v)})$ verifica la propiedad $N_{2,p-1}$. En efecto, la primera parte es clara: L verifica $N_{3,p-1}$ si y solo si $\beta_{i,j}(L) = 0$ para todo $0 \leq i < p - 1$ y todo $j > i + 3$, de manera que solo podemos tener en L generadores de grado 3; es decir, $L = v\mathcal{I}(G_{(v)})$.

Para la segunda parte, como $\beta_{i,j}(v\mathcal{I}(G_{(v)})) = \beta_{i,j-1}(\mathcal{I}(G_{(v)}))$, tenemos que

$$\begin{aligned} & \beta_{i,j}(L) = 0 \text{ para todo } 0 \leq i < p-1 \text{ y todo } j > i+3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \beta_{i,j-1}(\mathcal{I}(G_{(v)})) = 0 \text{ para todo } 0 \leq i < p-1 \text{ y todo } j-1 > i+2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \beta_{i,j}(\mathcal{I}(G_{(v)})) = 0 \text{ para todo } 0 \leq i < p-1 \text{ y todo } j > i+2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \mathcal{I}(G_{(v)}) \text{ satisface la propiedad } N_{2,p-1} . \end{aligned}$$

En resumen, hemos probado que $\mathcal{I}(G)$ satisface la propiedad $N_{2,p}$ si y solo si K satisface la propiedad $N_{2,p}$, $L = v\mathcal{I}(G_{(v)})$, y el ideal $\mathcal{I}(G_{(v)})$ satisface la propiedad $N_{2,p-1}$. Aplicando la hipótesis de inducción a K , que está asociado a un grafo con un vértice menos que G , lo anterior equivale a que ocurran las 3 cosas siguientes: todo ciclo minimal en $(G \setminus \{v\})^c = G^c \setminus \{v\}$ tiene longitud mayor o igual que $p+3$; $L = v\mathcal{I}(G_{(v)})$; y el ideal $\mathcal{I}(G_{(v)})$ satisface la propiedad $N_{2,p-1}$.

Si probamos que el conjunto de las dos condiciones “ $L = v\mathcal{I}(G_{(v)})$ ” y “el ideal $\mathcal{I}(G_{(v)})$ satisface $N_{2,p-1}$ ”, junto con el hecho de que todo ciclo minimal en $G^c \setminus \{v\}$ tiene longitud mayor o igual que $p+3$, son equivalentes a que todo ciclo minimal en G^c que contiene a v tenga longitud mayor o igual que $p+3$, habremos terminado la demostración. Para ello, probaremos la doble implicación.

\Rightarrow Supongamos en primer lugar que $L = v\mathcal{I}(G_{(v)})$ y que $\mathcal{I}(G_{(v)})$ satisface $N_{2,p-1}$, y veamos que entonces todo ciclo minimal en G^c que contiene a v tiene longitud mayor o igual que $p+3$.

Para ello, consideramos un ciclo minimal en G^c que contiene a v , al que vamos a denotar por $C = (vx_1 \dots x_l v)$. Como los ciclos minimales tienen longitud mayor o igual que 4, se tiene que $l \geq 3$. Lo que queremos probar es que la longitud de C es de hecho mayor o igual que $p+3$ o, equivalentemente, que $l \geq p+2$.

Como C es un ciclo minimal en G^c , no tiene cuerdas. En consecuencia, $vx_2, vx_3, \dots, vx_{l-1}$ no son aristas de G^c , lo que equivale a decir que son aristas de G . Por lo tanto, $\{x_2, \dots, x_{l-1}\} \subseteq N(v) = \{v_1, \dots, v_d\}$.

Además, como vx_1 y vx_l son aristas de G^c , no son aristas de G . Esto implica que $x_1, x_l \notin N(v)$, y por tanto x_1x_l no es una arista de $G_{(v)}$, ya que todas las aristas de este grafo contienen al menos un elemento de $N(v)$.

Distinguimos ahora dos casos:

- En primer lugar, consideramos el caso en que l es mayor o igual que 4. Bajo esta suposición, vamos a probar que x_1, \dots, x_l forman un ciclo minimal en $G_{(v)}^c$.

Utilizando lo que habíamos visto justo antes de separar casos, en este caso se tiene que $x_1x_l \in E_{G_{(v)}^c}$. Además, x_1x_2 y $x_{l-1}x_l$ también son aristas de $G_{(v)}^c$, y el razonamiento que nos permite probarlo es el mismo para ambas: ninguna de ellas es una arista de G , ya que la suposición de que C es un ciclo de G^c implica que ambas son aristas de G^c ; además, cada una está formada por un elemento de $N(v)$ y otro elemento que no pertenece a $N(v)$ pero que es adyacente en

G a algún elemento de dicho conjunto (a través de alguna no-cuerda de C), y por tanto es un vértice de $G_{(v)}$.

Para $i \in \{2, \dots, l-2\}$ se tiene que $x_i x_{i+1} \in E_{G_{(v)}^c}$, ya que $x_i x_{i+1}$ no es una arista de G y tanto x_i como x_{i+1} son elementos de $N(v)$.

En consecuencia, $(x_1 x_2 \dots x_{l-1} x_l x_1)$ es un ciclo de $G_{(v)}^c$ de longitud $l \geq 4$. Lo único que nos falta probar es que no tiene cuerdas, y esto es muy sencillo. Por un lado, x_1 no puede ser adyacente en $G_{(v)}^c$ a ningún vértice del ciclo $(x_1 x_2 \dots x_{l-1} x_l x_1)$ distinto de x_2 y de x_l . Esto se debe a que $x_1 x_i \in E_G$ para cada $i \in \{3, \dots, l-1\}$, con $x_i \in N(v)$, y esto implica que $x_1 x_i \in E_{G_{(v)}}$. Un razonamiento idéntico conduce a que x_l no puede ser adyacente en $G_{(v)}^c$ a ninguno de los x_i con i distinto de 1 y de $l-1$. Por otra parte, si tenemos $i < j$, ambos en $\{2, \dots, l-1\}$ y tales que $j \neq i+1$, entonces $x_i x_j \in E_G$ y $x_i, x_j \in N(v)$, lo que implica que $x_i x_j \in E_{G_{(v)}}$ y por tanto $x_i x_j \notin E_{G_{(v)}^c}$.

Dentro del caso $l \geq 4$ vamos a distinguir dos nuevas posibilidades:

1. Si $p = 2$, entonces $C = (v x_1 \dots x_l v)$ tiene longitud $l+1 \geq 4+1 = 5 = p+3$ y se verifica lo que queríamos probar.
2. Supongamos ahora que $p > 2$.

Como $G_{(v)}$ no contiene a v y estamos suponiendo que $\mathcal{I}(G_{(v)})$ satisface la propiedad $N_{2,p-1}$, aplicando la hipótesis de inducción se tiene que todo ciclo minimal en $G_{(v)}^c$ tiene longitud mayor o igual que $(p-1)+3 = p+2$. Pero antes hemos probado que $(x_1 \dots x_l x_1)$ es un ciclo minimal de $G_{(v)}^c$, luego tiene longitud $l \geq p+2$ y esto nos permite concluir que C tiene longitud $l+1 \geq p+3$, que es lo que queríamos probar.

- Para concluir la demostración de la implicación con la que estamos trabajando, vamos a estudiar el caso en que $l = 3$.

Como $C = (v x_1 x_2 x_3 v)$ es un ciclo minimal en G^c , se tiene que $x_1 x_3$ no es una cuerda y, por tanto, es una arista de G . Además, habíamos visto que x_1 y x_3 no pertenecen a $N(v)$.

Se tiene que el monomio $v x_2 x_1 x_3 \in J = (v v_1, \dots, v v_d)$ porque $x_2 \in N(v) = \{v_1, \dots, v_d\}$. Además, $v x_2 x_1 x_3$ también pertenece a $K = \mathcal{I}(G \setminus \{v\})$ porque $x_1 x_3$ es una arista de G con x_1 y x_3 distintos de v .

En consecuencia, $v x_2 x_1 x_3 \in J \cap K = L$, donde estamos suponiendo que $L = v \mathcal{I}(G_{(v)})$, pero esto es absurdo porque $v x_2 x_1 x_3 \notin v \mathcal{I}(G_{(v)})$. Esto se debe a que un razonamiento idéntico al que hacíamos cuando l era mayor o igual que 4 nos permite probar que $(x_1 x_2 x_3 x_1)$ es un ciclo de $G_{(v)}^c$ y, en consecuencia, ninguna de las aristas $x_i x_j$ con $i, j \in \{1, 2, 3\}$ pertenece a $E_{G_{(v)}}$.

Concluimos entonces que el caso $l = 3$ no es posible y queda probada la primera implicación.

\Leftarrow Recíprocamente, supongamos que todo ciclo minimal en G^c que contiene a v tiene longitud mayor o igual que $p+3$. Tenemos que probar que se verifica lo siguiente:

(a) $L = v \mathcal{I}(G_{(v)})$.

(b) $\mathcal{I}(G_{(v)})$ satisface la propiedad $N_{2,p-1}$.

Empecemos probando (a). Para ello vamos a razonar por reducción al absurdo, suponiendo que $v\mathcal{I}(G_{(v)})$ está contenido estrictamente en $L = v\mathcal{I}(G_{(v)}) + \sum_{i=1}^d vv_i\mathcal{I}(G_i)$.

Esto implica que existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tal que el ideal $\mathcal{I}(G_i)$ es no nulo; es decir, el grafo $G_i = G \setminus (N(v) \cup N(v_i))$ tiene al menos una arista, a la que vamos a denotar por uw .

En consecuencia, (vuv_iw) es un ciclo minimal de longitud 4 en G^c . Efectivamente, por una parte es claro que vw , vu , uv_i y v_iw no son aristas de G ya que $u, w \notin (N(v) \cup N(v_i))$. Por otra parte, el ciclo anterior no tiene cuerdas debido a que vv_i y uw sí que son aristas de G , y por tanto no lo son de G^c .

Llegamos de este modo a una contradicción, ya que estamos suponiendo que todo ciclo minimal en G^c que contiene a v tiene longitud mayor o igual que $p+3$ para un cierto p estrictamente mayor que 1, y por tanto la longitud de todo ciclo minimal con esas características tiene que ser estrictamente mayor que 4.

Queremos probar ahora (b); es decir, que $\mathcal{I}(G_{(v)})$ satisface $N_{2,p-1}$.

Si $p = 2$, (b) es claramente cierto. En efecto, lo que tendríamos que probar es que $\beta_{i,j}(\mathcal{I}(G_{(v)})) = 0$ para todo i con $0 \leq i < p - 1 = 1$ y todo $j > i + 2$. Pero esto es evidente ya que el único valor posible de i en estas condiciones sería 0 y, como $\mathcal{I}(G_{(v)})$ está generado por elementos de grado 2, se verifica que su único número de Betti graduado no nulo 0, j -ésimo es $\beta_{0,2}(\mathcal{I}(G_{(v)}))$.

Supongamos entonces a partir de ahora que $p > 2$.

El conjunto de vértices del grafo $G_{(v)}$ no contiene a v , luego $|V_{G_{(v)}}| < |V_G|$. Si probamos que todo ciclo minimal en $G_{(v)}^c$ tiene longitud mayor o igual que $p+2 = (p-1) + 3$, entonces por hipótesis de inducción tendremos que $\mathcal{I}(G_{(v)})$ satisface $N_{2,p-1}$, que es lo que queremos probar.

Sea entonces $D = (x_1x_2 \dots x_lx_1)$ un ciclo minimal en $G_{(v)}^c$, de manera que en particular $l \geq 4$ y $x_i \neq v$ para todo $i \in \{1, \dots, l\}$. Sea también $W = \{w_1, \dots, w_s\}$ el conjunto de vértices de $G \setminus \{v, v_1, \dots, v_d\}$ que son adyacentes en G a al menos uno de los vértices de $N(v)$.

Vamos a distinguir ahora varios casos, en función del número de elementos de W que forman parte del ciclo D que estamos considerando. Antes de ello notemos que, para que D pueda ser un ciclo minimal, este número tendrá que ser a lo sumo 2. Esto se debe a que w_iw_j , con $i \neq j$, no es una arista de $G_{(v)}$ ya que todas las aristas de este grafo contienen al menos a un elemento de $N(v)$. Por lo tanto, todos los elementos de W son adyacentes dos a dos en $G_{(v)}^c$ y no puede haber más de dos en un ciclo minimal de dicho grafo (darían lugar a cuerdas). Analizamos entonces los distintos casos posibles:

(*) Supongamos que existen i y j con $1 \leq i, j \leq s$ e $i \neq j$ tales que $w_i, w_j \in \{x_1, \dots, x_l\}$. Entonces, como w_iw_j es una arista de $G_{(v)}^c$, tendrá que ser una

arista de D (en caso contrario sería una cuerda, lo cual es absurdo). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $w_i = x_1$ y $w_j = x_l$.

En este caso, si probamos que $(x_1x_2 \dots x_lvx_1)$ es un ciclo minimal de G^c , habremos terminado. Efectivamente, como estamos suponiendo en esta implicación que todo ciclo minimal de G^c que contiene a v tiene longitud mayor o igual que $p + 3$, tendríamos que $l + 1 \geq p + 3$ y, en consecuencia, D tendría longitud $l \geq p + 2$, tal y como queríamos probar.

Veamos entonces que $(x_1x_2 \dots x_lvx_1)$ es un ciclo minimal de G^c . Para ello, como toda arista de $G_{(v)}$ es una arista de G (por la propia definición de $G_{(v)}$), la información que proporciona el ciclo minimal D nos permite limitarnos a probar los seis puntos siguientes:

1. $x_1v \in E_{G^c}$, lo cual es cierto porque $x_1 = w_i \notin N(v)$.
2. $x_lv \in E_{G^c}$, lo cual es cierto porque $x_l = w_j \notin N(v)$.
3. $x_iv \notin E_{G^c}$ para $i \in \{2, \dots, l-1\}$.

Esto equivale a probar que $x_iv \in E_G$ para cada $i \in \{2, \dots, l-1\}$, que es lo que vamos a demostrar a continuación.

Como $x_i \notin W$, tenemos dos opciones: o bien x_i no pertenece al conjunto de vértices de $G \setminus \{v, v_1, \dots, v_d\}$, de manera que $x_i \in N(v)$ y por tanto $x_iv \in E_G$; o bien x_i sí pertenece al conjunto de vértices de $G \setminus \{v, v_1, \dots, v_d\}$ pero no es adyacente a ningún elemento de $N(v)$. Esto último es absurdo, porque en ese caso x_i no formaría parte de ninguna arista de $G_{(v)}$ y sabemos que sí lo hace (pertenece a las aristas correspondientes a las no-cuerdas de D).

4. $x_1x_2 \in E_{G^c}$.

Sabemos que $x_1x_2 = w_ix_2$ es una arista de D y, por tanto, de $G_{(v)}^c$. Como $x_2 \notin W$, tenemos dos opciones.

Por una parte, podría ocurrir que x_2 no perteneciese al conjunto de vértices de $G \setminus \{v, v_1, \dots, v_d\}$. En este caso, $x_2 \in N(v)$ y si x_1x_2 perteneciese a E_G tendríamos que x_1x_2 es una arista de $G_{(v)}$, lo cual sabemos que no es cierto. Por tanto, x_1x_2 no es una arista de G .

En caso contrario, tendríamos que x_2 pertenece al conjunto de vértices de $G \setminus \{v, v_1, \dots, v_d\}$ y no es adyacente a ningún elemento de $N(v)$. Esto es absurdo, ya que implicaría que x_2 no pertenece a ninguna arista de $G_{(v)}$, pero sabemos que sí que lo hace (pertenece a las aristas correspondientes a las no-cuerdas de D).

5. De forma análoga al punto 4 se prueba que $x_{l-1}x_l \in E_{G^c}$.
6. $x_ix_{i+1} \in E_{G^c}$ para cada $i \in \{2, \dots, l-2\}$.

Como x_i y x_{i+1} no pertenecen a W para ningún i , tenemos cuatro posibilidades.

En primer lugar, podría ocurrir que x_i y x_{i+1} no fueran elementos del conjunto de vértices de $G \setminus \{v, v_1, \dots, v_d\}$. Como ambos son distintos de v , tendríamos que $x_i, x_{i+1} \in N(v)$. Así, si x_ix_{i+1} fuese una arista de G , lo

sería en particular de $G_{\{v_1, \dots, v_d\}}$ y, por tanto, de $G_{(v)}$. Pero esto es absurdo, porque de la forma de D se deduce que $x_i x_{i+1}$ es una arista de $G_{(v)}^c$.

Otra posibilidad sería que uno de los vértices perteneciese a $N(v)$ y el otro fuese un elemento del conjunto de vértices de $G \setminus \{v, v_1, \dots, v_d\}$, pero no adyacente en G a ningún elemento de $N(v)$. Así pues, x_i y x_{i+1} no podrían ser adyacentes en G , de manera que $x_i x_{i+1}$ sería una arista de G^c .

Por último, podría ocurrir que x_i y x_{i+1} pertenecieran al conjunto de vértices de $G \setminus \{v, v_1, \dots, v_d\}$ y no fueran adyacentes a ningún elemento de $N(v)$. Llegamos en este caso a una contradicción, porque entonces x_i y x_{i+1} no pertenecerían a ninguna arista de $G_{(v)}$ y sí que lo hacen (a las aristas correspondientes a las no-cuerdas de D).

(*) Supongamos que existe a lo sumo un elemento de W que pertenece al conjunto $\{x_1, \dots, x_l\}$, y veamos que entonces D es un ciclo minimal de G^c , lo cual implicaría (gracias a que D no contiene a v y por tanto sería un ciclo de $G^c \setminus \{v\}$) que tiene longitud $l \geq p + 3 > p + 2$. Distinguimos nuevamente dos casos:

(**) Supongamos que existe un único $i_0 \in \{1, \dots, s\}$ tal que $w_{i_0} \in \{x_1, \dots, x_l\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w_{i_0} = x_1$, de manera que $D = (w_{i_0} x_2 \dots x_l w_{i_0})$. Como hacíamos en el caso anterior, basta probar los tres puntos siguientes:

1. $w_{i_0} x_2$ es una arista de G^c :
Sabemos que $x_1 x_2 = w_{i_0} x_2$ es una arista de D y, por tanto, de $G_{(v)}^c$. Como $x_2 \notin W$, podemos razonar igual que en el punto 4 anterior.
2. $w_{i_0} x_l$ es una arista de G^c : se hace un razonamiento análogo al que hicimos en el punto 4 anterior.
3. $x_i x_{i+1} \in E_{G^c}$ para cada $i \in \{2, \dots, l-1\}$.
Como x_i y x_{i+1} no pertenecen a W para ningún i , podemos razonar igual que en el punto 6 anterior.

(**) Supongamos por último que ningún elemento de W pertenece al conjunto $\{x_1, \dots, x_l\}$, y veamos que $D = (x_1 x_2 \dots x_l x_1)$, que es un ciclo minimal en $G_{(v)}^c$, es también un ciclo minimal en G^c . Basta probar los dos puntos siguientes:

1. $x_i x_{i+1}$ es una arista de G^c para cada $i \in \{1, \dots, l\}$, con $x_{l+1} = x_1$.
Como x_i y x_{i+1} no pertenecen a W para ningún i , podemos razonar igual que en el punto 6 del primer caso analizado.
2. Si j no es congruente con $i + 1$ módulo l , entonces $x_i x_j$ no es una arista de G^c .
Efectivamente, por la forma en la que hemos escrito D , tenemos que $x_i x_j$ es una arista de $G_{(v)}$ y por tanto de G , que es lo que queríamos probar.

La prueba de la doble implicación nos permite concluir la demostración. \square

El corolario anterior no solo es interesante en sí mismo porque permite caracterizar una propiedad de los ideales de aristas en términos muy sencillos dentro del grafo asociado, sino que además permite recuperar el principal teorema de Ralf Fröberg como una consecuencia directa. Este teorema, que enunciamos y demostramos a continuación, aparece originalmente en [13] y caracteriza a los ideales de aristas que tienen una resolución lineal. Estos ideales tienen especial interés por la particular sencillez de sus diagramas de Betti, que están formados por una única fila. Antes de enunciar el llamado Teorema de Fröberg, necesitamos introducir una nueva definición:

Definición 2.3.13. Se dice que un grafo G es *cordal* si todo ciclo de longitud estrictamente mayor que 3 tiene alguna cuerda; es decir, si G no tiene ciclos minimales.

Corolario 2.3.14. Sea G un grafo con ideal de aristas $\mathcal{I}(G)$. Entonces $\mathcal{I}(G)$ tiene una resolución lineal si y solo si G^c es un grafo cordal.

Demostración. Para demostrar este resultado, vamos a probar la doble implicación.

\Rightarrow Supongamos que $\mathcal{I}(G)$ tiene una resolución lineal, de manera que verifica la propiedad $N_{2,p}$ para todo $p > 1$.

Queremos probar que G^c no tiene ciclos minimales, y lo haremos razonando por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que G^c tiene un ciclo minimal de longitud $k \geq 4$. Como $\mathcal{I}(G)$ satisface la propiedad $N_{2,k}$, del Corolario 2.3.11 se sigue que todo ciclo minimal en G^c debería tener longitud mayor o igual que $k + 3$, que es estrictamente mayor que k , y por tanto hemos alcanzado una contradicción.

\Leftarrow Supongamos ahora que G^c es un grafo cordal, de manera que no tiene ciclos minimales. Esto implica, en virtud del Corolario 2.3.11, que $\mathcal{I}(G)$ satisface $N_{2,p}$ para todo $p > 1$. Pero, como habíamos comentado en la Nota 2.3.10, lo que esto quiere decir es que $\mathcal{I}(G)$ tiene una resolución lineal hasta el paso p -ésimo para todo $p > 1$. Es decir, $\mathcal{I}(G)$ tiene una resolución lineal.

La prueba de la doble implicación nos permite concluir. □

Después de haber estudiado con detalle los ideales de aristas asociados a grafos, surge de manera natural el interés en estudiar, a través de la misma idea, ideales monomiales libres de cuadrados no necesariamente cuadráticos. Esto nos conduce a considerar objetos combinatorios que constituyan, de alguna manera, una generalización de los grafos. En el siguiente capítulo vamos a presentar cómo los complejos simpliciales surgen como una primera generalización, si bien es cierto que la riqueza de su estructura no va a ser necesaria para nuestro objetivo. Esto último será lo que nos lleve a considerar los hipergrafos, que estudiaremos también detalladamente en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Generalización

Hemos dedicado el capítulo anterior al estudio de los ideales monomiales cuadráticos libres de cuadrados a través de la identificación existente entre ellos y los grafos simples. Es natural que a partir de ahí surja interés por el estudio de ideales monomiales libres de cuadrados que no sean necesariamente cuadráticos. Esto es lo que nos conduce a buscar objetos combinatorios que generalicen los grafos con los que hemos trabajado hasta ahora, y los complejos simpliciales aparecen como primeros candidatos para nuestro estudio. Veámoslo en la primera sección de este capítulo.

3.1. Complejos simpliciales e ideales de facetas

En primer lugar, daremos la definición de complejo simplicial. A continuación, introduciremos algunos de los conceptos más básicos relacionados con los complejos simpliciales, y veremos cómo estos generalizan los grafos que ya conocemos y también cómo se pueden identificar con los ideales monomiales libres de cuadrados generados por monomios de grados arbitrarios.

Definición 3.1.1. Un *complejo simplicial* Δ sobre un conjunto de vértices $V_\Delta = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(V_\Delta)$, la colección de todos los subconjuntos de V_Δ , que cumple las dos propiedades siguientes:

- (a) $\{x_i\} \in \Delta$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.
- (b) Si $F \in \Delta$, entonces todos los subconjuntos de F también pertenecen a Δ .

Los elementos de Δ reciben el nombre de *caras* del complejo simplicial, y aquellas caras que son maximales para la inclusión se denominan *facetas*.

El conjunto de facetas del complejo simplicial Δ se denota por $\mathcal{F}(\Delta)$.

A partir de la definición anterior, ya tenemos todas las herramientas necesarias para identificar los complejos simpliciales con los ideales monomiales libres de cuadrados no necesariamente cuadráticos. Efectivamente, si Δ es un complejo simplicial sobre un conjunto de vértices $V_\Delta = \{x_1, \dots, x_n\}$ y k es un cuerpo a priori arbitrario, entonces

les podemos asociar un ideal $\mathcal{I}(\Delta)$ en el anillo de polinomios $R = k[x_1, \dots, x_n]$ definido como

$$\mathcal{I}(\Delta) = (\{F \mid F \in \mathcal{F}(\Delta)\}) \subseteq R ,$$

donde estamos cometiendo un abuso de notación para denotar por F tanto a una faceta del complejo simplicial como al monomio $\prod_{x \in F} x$. Este ideal $\mathcal{I}(\Delta)$ que acabamos de definir es el que recibe el nombre de *ideal de facetas asociado al complejo simplicial* Δ . Además, es claro que se trata de un ideal monomial libre de cuadrados y que sus generadores tendrán grados arbitrarios, correspondientes al número de elementos que compongan las distintas facetas de Δ .

A la inversa, y gracias a que un complejo simplicial queda determinado por sus facetas, es posible asociar a todo ideal monomial libre de cuadrados un complejo simplicial cuyas facetas sean los conjuntos correspondientes a los monomios que forman parte del sistema minimal de generadores formado por monomios del ideal de partida.

Evidentemente, si todas las facetas de un complejo simplicial Δ tienen cardinal 2, podemos ver al complejo simplicial en cuestión como un grafo cuyas aristas coinciden con las facetas de Δ y cuyo ideal de aristas coincide, en consecuencia, con el ideal de facetas de Δ .

El punto de vista de los ideales de facetas es novedoso, ya que tradicionalmente se solía asociar a un complejo simplicial Δ un ideal que recibía el nombre de *ideal de Stanley-Reisner* y que estaba generado por los monomios correspondientes a las no-caras minimales de Δ . Estos ideales han sido estudiados en la asignatura “Álgebra Combinatoria” del Máster en Matemáticas, en la que se ha introducido la fórmula de Hochster como una de las herramientas principales para calcular los números de Betti de los ideales de Stanley-Reisner. La nueva perspectiva de los ideales de facetas permite llevar a cabo un estudio satisfactorio de los ideales monomiales libres de cuadrados arbitrarios.

Partiendo de esta pequeña introducción que acabamos de realizar, es posible efectuar con los ideales de facetas asociados a complejos simpliciales un estudio análogo al que hacíamos en el capítulo anterior, definiendo en este caso las llamadas *facetas de escisión* y utilizando técnicas semejantes. Una pequeña muestra de este estudio se puede encontrar en la última sección de [16]. No obstante, los autores del mencionado artículo observaron que la riqueza de la estructura simplicial que se presenta en la Definición 3.1.1 no es necesaria para el estudio que nos interesa. Así lo comentan en un artículo posterior ([17]), en el que generalizan el concepto de complejo simplicial a la noción de *hipergrafo*. En la siguiente sección de este capítulo presentaremos este nuevo concepto, veremos cómo generaliza la noción de complejo simplicial, y lo utilizaremos para estudiar detalladamente las resoluciones libres minimales graduadas de los ideales monomiales libres de cuadrados generados por elementos de grados arbitrarios.

3.2. Hipergrafos e ideales de aristas

Comenzamos esta sección introduciendo el concepto de hipergrafo y viendo cómo es posible identificar estos objetos combinatorios, que generalizan los grafos que ya conocemos, con los ideales monomiales libres de cuadrados.

Definición 3.2.1. Sea $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ y sea $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_s\}$ una colección de subconjuntos de \mathcal{X} .

El par $\mathcal{H} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$ recibe el nombre de *hipergrafo* si $E_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, s\}$.

Los elementos de \mathcal{X} se denominan *vértices*, mientras que los elementos de \mathcal{E} se llaman *aristas* del hipergrafo \mathcal{H} .

Un hipergrafo \mathcal{H} es *simple* si verifica las dos condiciones siguientes:

1. \mathcal{H} no tiene lazos; es decir, $|E| \geq 2$ para todo $E \in \mathcal{E}$.
2. \mathcal{H} no tiene aristas múltiples; es decir, si $E_i, E_j \in \mathcal{E}$ y $E_i \subseteq E_j$, entonces $i = j$.

Cuando no haya riesgo de confusión, será habitual referirnos a un hipergrafo haciendo alusión únicamente a su conjunto de aristas. Así, en numerosas ocasiones escribiremos $E \in \mathcal{H}$ en lugar de $E \in \mathcal{E}$.

A partir de esta definición, es claro que el concepto de hipergrafo generaliza la noción de grafo que ya conocemos: un grafo es un hipergrafo en el que todas las aristas tienen cardinal dos.

Si tenemos ahora un cuerpo k , es posible asociar a un hipergrafo simple $\mathcal{H} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, con $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$, el ideal monomial libre de cuadrados

$$\mathcal{I}(\mathcal{H}) = \left(\left\{ x^E = \prod_{x \in E} x \mid E \in \mathcal{E} \right\} \right) \subseteq R = k[x_1, \dots, x_n],$$

donde identificamos los vértices con las variables en el anillo de polinomios asociado. El ideal anterior recibe el nombre de *ideal de aristas* de \mathcal{H} , y a partir de su definición es claro que existe una biyección entre el conjunto de hipergrafos simples con conjunto de vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$ y el conjunto de ideales monomiales libres de cuadrados generados por elementos de grado mayor que 1 en el anillo $R = k[x_1, \dots, x_n]$. Gracias a esta biyección, para estudiar las resoluciones libres minimales graduadas de los ideales monomiales libres de cuadrados podremos limitarnos a estudiar los ideales de aristas asociados a hipergrafos. Antes de proceder a este estudio, vamos a comentar la relación existente entre los hipergrafos y los complejos simpliciales que anunciábamos en la sección anterior.

Si Δ es un complejo simplicial sobre el conjunto de vértices \mathcal{X} y tiene $\mathcal{F}(\Delta)$ como conjunto de facetas, entonces es claro que $\mathcal{H}(\Delta) = (\mathcal{X}, \mathcal{F}(\Delta))$ es un hipergrafo ya que todas las facetas son no vacías por tratarse de conjuntos maximales para la inclusión. Es evidente a partir de las definiciones que $\mathcal{I}(\Delta) = \mathcal{I}(\mathcal{H}(\Delta))$.

Recíprocamente, dado un hipergrafo $\mathcal{H} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, podemos asociarle el conjunto $\Delta(\mathcal{H}) = \{F \subseteq \mathcal{X} \mid F \subseteq E_i \text{ para algún } E_i \in \mathcal{E}\}$, que es un complejo simplicial sobre el conjunto de vértices que aparecen en los distintos elementos de \mathcal{E} . Veamos que efectivamente cumple las condiciones de la Definición 3.1.1:

- Si $x_i \in E_j$ para algún $E_j \in \mathcal{E}$, entonces $\{x_i\} \subseteq E_j$ y por tanto $\{x_i\} \in \Delta(\mathcal{H})$.
- Supongamos que $F \in \Delta(\mathcal{H})$ y veamos que si $A \subseteq F$, entonces también A pertenece a $\Delta(\mathcal{H})$.

Como $F \in \Delta(\mathcal{H})$, tenemos que $F \subseteq \mathcal{X}$ y $F \subseteq E_i$ para algún $E_i \in \mathcal{E}$. En consecuencia, $A \subseteq F \subseteq \mathcal{X}$ y $A \subseteq F \subseteq E_i$, con $E_i \in \mathcal{E}$. Esto nos permite concluir que $A \in \Delta(\mathcal{H})$.

Queda probado entonces que $\Delta(\mathcal{H})$ es efectivamente un complejo simplicial, y además se verifica que $\mathcal{I}(\mathcal{H}) = \mathcal{I}(\Delta(\mathcal{H}))$. En efecto, por un lado tenemos que el ideal de aristas del hipergrafo \mathcal{H} está generado por los monomios correspondientes a las aristas de \mathcal{H} . Por otra parte, el ideal de facetas asociado al complejo simplicial $\Delta(\mathcal{H})$ está generado por los monomios correspondientes a las facetas de $\Delta(\mathcal{H})$, que no son más que los elementos maximales para la inclusión del conjunto de aristas del hipergrafo \mathcal{H} . A partir de estos comentarios podemos concluir que ambos ideales son iguales, sin más que observar que los generadores de $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ correspondientes a aristas que no son maximales son superfluos.

La relación existente entre los complejos simpliciales y los hipergrafos que acabamos de presentar nos permite adoptar dos puntos de vista diferentes, interpretando los generadores de un ideal monomial libre de cuadrados como las facetas de un complejo simplicial o como las aristas de un hipergrafo. Como he comentado en la sección anterior, la riqueza en la estructura del complejo simplicial no es necesaria para nuestro estudio. Esto es lo que nos lleva a trabajar con hipergrafos, que constituyen de hecho una generalización más natural de los grafos con los que trabajábamos en el capítulo anterior, si bien es cierto que los resultados que vamos a presentar en esta sección podrían reinterpretarse en términos de ideales de facetas asociados a ciertos complejos simpliciales.

A continuación, introduciremos algunas nociones básicas relacionadas con los hipergrafos y presentaremos cómo la técnica de escisión de ideales que utilizábamos en el capítulo anterior es útil también en este caso para estudiar las resoluciones libres minimales graduadas de los ideales monomiales libres de cuadrados arbitrarios, que se identifican con los ideales de aristas asociados a hipergrafos.

3.2.1. Preliminares

Al igual que hacíamos en el capítulo previo, a partir de ahora supondremos que todo hipergrafo con el que vamos a trabajar es simple.

Cuando todas las aristas de un hipergrafo tienen el mismo cardinal d , se dice que el hipergrafo en cuestión es d -uniforme. Por tanto, utilizando esta terminología, un grafo simple no es más que un hipergrafo simple 2-uniforme y la mayoría de los resultados que presentaremos consistirán en generalizaciones de los resultados que habíamos estudiado en el capítulo anterior.

Si E es una arista del hipergrafo $\mathcal{H} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$, denotaremos por $\mathcal{H} \setminus E$ al hipergrafo obtenido eliminando la arista E en \mathcal{H} . Análogamente, si x es un vértice de \mathcal{H} , denotaremos por $\mathcal{H} \setminus \{x\}$ al hipergrafo obtenido eliminando x del conjunto de vértices de \mathcal{H} , así como todas las aristas del hipergrafo a las que x pertenece. Si $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, entonces el hipergrafo inducido sobre \mathcal{Y} se denotará por $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$ y será el subhipergrafo de \mathcal{H} con conjunto de vértices \mathcal{Y} y conjunto de aristas $\{E \in \mathcal{E} \mid E \subseteq \mathcal{Y}\}$; es decir, estará formado por aquellas aristas de \mathcal{H} cuyos elementos pertenecen al conjunto \mathcal{Y} . Algunas definiciones que resultarán importantes a lo largo de esta sección son las siguientes:

Definición 3.2.2. Sea \mathcal{H} un hipergrafo.

- Una *cadena de longitud d* en \mathcal{H} es una sucesión $(E_0, y_1, E_1, \dots, y_d, E_d)$ (también denotada a veces simplemente por (E_0, \dots, E_d) cuando los vértices no son relevantes) que verifica las siguientes condiciones:
 1. y_1, \dots, y_d son d vértices distintos de \mathcal{H} .
 2. E_0, \dots, E_d son $d + 1$ aristas distintas de \mathcal{H} .
 3. $y_1 \in E_0, y_d \in E_d$ e $\{y_k, y_{k+1}\} \subseteq E_k$ para cada $k \in \{1, \dots, d - 1\}$.

En particular, la tercera condición implica que la intersección de cada arista de la sucesión con la siguiente es no vacía; es decir, $E_i \cap E_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{0, \dots, d - 1\}$.

- Si E y E' son dos aristas de \mathcal{H} , se dice que están *conectadas* si existe una cadena (E_0, \dots, E_d) en el sentido que acabamos de definir, con $E_0 = E$ y $E_d = E'$.
- Si $|E| \geq |E'|$, entonces una cadena $(E = E_0, \dots, E_d = E')$ que conecta E y E' es *propia* si $|E_i \cap E_{i+1}| = |E_{i+1}| - 1$ para todo i entre 0 y $d - 1$.
- Una cadena (propia) que conecta dos aristas E y E' es una cadena (propia) *irredundante* si ninguna subsucesión estricta es una cadena (propia) entre E y E' .
- Si E y E' son dos aristas de \mathcal{H} con $|E| \geq |E'|$, se define la *distancia* entre E y E' , y se denota por $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, E')$, como

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, E') = \text{mín}\{l \mid (E = E_0, \dots, E_l = E') \text{ es una cadena propia irredundante}\}.$$

Si no existe ninguna cadena propia irredundante entre dos aristas E y E' de \mathcal{H} , entonces decimos que la distancia entre ellas es infinita: $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, E') = \infty$.

Tras haber presentado estas definiciones, vamos a dedicarnos ahora a utilizar la técnica de escisión de ideales para estudiar los ideales monomiales libres de cuadrados a través del estudio de los ideales de aristas asociados a hipergrafos. Para ello, vamos a centrarnos en una posible escisión de estos ideales que resulta de generalizar la noción de arista de escisión que habíamos dado para grafos simples.

3.2.2. Aristas de escisión

Al igual que razonábamos en el capítulo que tenía a los grafos como objeto combinatorio principal de estudio, si tenemos ahora una arista E de un hipergrafo \mathcal{H} y utilizamos las notaciones que hemos introducido previamente, es claro que $\mathcal{I}(\mathcal{H}) = (x^E) + \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E)$. No obstante, esta suma no tiene por qué ser una escisión de $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ y nos interesarán los casos en los que sí lo sea. Surge de esta manera la siguiente definición:

Definición 3.2.3. Dado un hipergrafo \mathcal{H} , se dice que una arista E es una *arista de escisión* de \mathcal{H} si la suma $\mathcal{I}(\mathcal{H}) = (x^E) + \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E)$ es una escisión del ideal $\mathcal{I}(\mathcal{H})$.

Lo que nos interesa ahora es conseguir una forma sencilla para identificar las aristas de escisión de un hipergrafo, sin necesidad de recurrir a la definición de la escisión de ideales. Precisamente esto es lo que nos permite el siguiente teorema:

Teorema 3.2.4. *Sea \mathcal{H} un hipergrafo con al menos dos aristas. Se verifica que una arista E es una arista de escisión de \mathcal{H} si y solo si existe un vértice $z \in E$ tal que*

$$(x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E) \subseteq (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{z\}) .$$

Nota 3.2.5. Aunque la nueva condición que aparece es en general más sencilla de comprobar que recurrir a la propia definición, todavía no se trata de una condición en términos exclusivamente combinatorios. Más adelante presentaremos una nueva condición puramente combinatoria, más sencilla de comprobar, y que se corresponde con la caracterización que habíamos obtenido para las aristas de escisión en el caso de grafos simples.

Demostración. Sea E una arista de \mathcal{H} , y vamos a denotar $J = (x^E)$ y $K = \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E)$.

Para demostrar la equivalencia del enunciado, probaremos la doble implicación.

\Rightarrow Para probar la primera implicación, razonaremos por el contrarrecíproco.

Supongamos que para cada vértice z de E se verifica que $(x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E) \not\subseteq (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{z\})$, y veamos que entonces E no puede ser una arista de escisión.

Nuestra hipótesis de partida implica que para cada $z \in E$ existe un generador minimal x^{Lz} de $J \cap K$ que no pertenece a $(x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{z\})$. Sea $S = \{x^{Lz} \mid z \in E\} \subseteq \mathcal{G}(J \cap K)$.

Vamos a probar que no puede existir una función de escisión en estas condiciones, y lo vamos a hacer razonando por reducción al absurdo. Supongamos entonces que existe una función de escisión $s : \mathcal{G}(J \cap K) \rightarrow \mathcal{G}(J) \times \mathcal{G}(K)$ dada por $s(w) = (\phi(w), \psi(w))$. Como $\mathcal{G}(J) = \{x^E\}$, tenemos que $\phi(x^{Lz}) = x^E$ para cada $x^{Lz} \in S$. Además, para cada $z \in E$, vamos a denotar por x^{Gz} a $\psi(x^{Lz}) \in \mathcal{G}(K)$. En consecuencia, G_z será una arista de \mathcal{H} distinta de E y, como estamos suponiendo que s es una función de escisión, se verificará que $x^{Lz} = \text{mcm}(\phi(x^{Lz}), \psi(x^{Lz})) = \text{mcm}(x^E, x^{Gz}) = x^{E \cup Gz}$.

Vamos a probar ahora que para cada $z \in E$ se tiene que $z \in G_z$, y lo hacemos con una nueva reducción al absurdo. Si existiera $z' \in E$ tal que $z' \notin G_{z'}$, entonces $G_{z'}$ sería una arista de $\mathcal{H} \setminus \{z'\}$. Pero en ese caso tendríamos que $x^{Lz'} = \text{mcm}(x^E, x^{G_{z'}}) = x^{E \cup G_{z'}}$ es un elemento de $(x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{z'\})$, en contra de la forma en la que habíamos elegido $x^{Lz'}$.

Así pues, se verifica que $\cup_{z \in E} G_z = (\cup_{z \in E} G_z) \cup E$. La contención del primer conjunto en el segundo es trivial. Para la otra contención, si tomamos $z' \in (\cup_{z \in E} G_z) \cup E$, tenemos dos opciones: que z' pertenezca a $\cup_{z \in E} G_z$, en cuyo caso ya tenemos que pertenece al primer conjunto, o que $z' \in E$. En este segundo caso, utilizamos que entonces $z' \in G_{z'} \subseteq \cup_{z \in E} G_z$.

Se tiene por tanto que

$$\begin{aligned} \text{mcm}(\psi(S)) &= \text{mcm}(\{x^{Gz} \mid z \in E\}) = x^{\cup_{z \in E} Gz} = x^{(\cup_{z \in E} Gz) \cup E} = x^{\cup_{z \in E} (Gz \cup E)} = \\ &= x^{\cup_{z \in E} Lz} = \text{mcm}(\{x^{Lz} \mid z \in E\}) = \text{mcm}(S), \end{aligned}$$

pero esto va en contra de que, por ser s una función de escisión, $\text{mcm}(\psi(S))$ debería dividir estrictamente a $\text{mcm}(S)$. En consecuencia, E no puede ser una arista de escisión y queda probada la primera implicación.

⇐ Para probar esta segunda implicación, supongamos que existe un vértice $z \in E$ tal que $J \cap K = (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E) \subseteq (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{z\})$, y veamos que entonces E es una arista de escisión.

Nuestra hipótesis implica que $\mathcal{G}(J \cap K) \subseteq \{x^{E \cup H} \mid H \in \mathcal{H} \setminus \{z\}\}$.

Vamos a construir ahora una función de escisión $s = (\phi, \psi) : \mathcal{G}(J \cap K) \rightarrow \mathcal{G}(J) \times \mathcal{G}(K)$, que nos permitirá concluir que E es una arista de escisión.

Para cada $x^L \in \mathcal{G}(J \cap K)$, definimos $\phi(x^L) = x^E \in \mathcal{G}(J) = \{x^E\}$. La definición de $\psi(x^L)$ será un poco más laboriosa.

En la situación que estamos considerando tenemos que $L \in \{E \cup H \mid H \in \mathcal{H} \setminus \{z\}\}$ y, en consecuencia, el conjunto $\mathbb{A} = \{H \in \mathcal{H} \setminus \{z\} \mid L = E \cup H\}$ es no vacío. Si consideramos el conjunto \mathcal{X} como un alfabeto (con un cierto orden entre sus elementos), es posible identificar cada elemento de \mathbb{A} con la palabra formada por sus vértices, escritos en orden creciente. Como \mathbb{A} es finito y el orden lexicográfico de las palabras es total, resulta que \mathbb{A} tiene un único elemento maximal con respecto a ese orden, llamémosle G_L . Ahora, definimos $\psi(x^L)$ como x^{G_L} .

Lo primero que tenemos que probar es que la aplicación s está bien definida; para ello, basta comprobar que efectivamente $\psi(x^L) = x^{G_L}$ pertenece a $\mathcal{G}(K)$, con $K = \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E)$. Del hecho de que $G_L \in \mathbb{A}$ se deduce que G_L es una arista de $\mathcal{H} \setminus \{z\}$. Como en $\mathcal{H} \setminus \{z\}$ se eliminan todas las aristas de \mathcal{H} a las que z pertenece (incluida E), tenemos que G_L es una arista de $\mathcal{H} \setminus E$ y, por tanto, $x^{G_L} \in \mathcal{G}(K)$.

Veamos ahora que se verifica la condición (a) de la Definición 2.1.2, y para ello utilizaremos que, como $G_L \in \mathbb{A}$, se verifica que $G_L \cup E = L$:

$$\text{mcm}(\phi(x^L), \psi(x^L)) = \text{mcm}(x^E, x^{G_L}) = x^{E \cup G_L} = x^L.$$

Para terminar, tenemos que probar que también se verifica la condición (b) de la Definición 2.1.2:

- Para cada $S \subseteq \mathcal{G}(J \cap K)$ se tiene que $\text{mcm}(\phi(S)) = x^E$, y x^E divide estrictamente a $\text{mcm}(S)$ porque $\mathcal{G}(J \cap K) \subseteq \{x^{E \cup H} \mid H \in \mathcal{H} \setminus E\}$ y \mathcal{H} tiene al menos dos aristas.
- Si consideramos el vértice z de E para el cual se verifica que $J \cap K = (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E) \subseteq (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{z\})$, es claro que z divide a x^E y, por tanto, divide a todos los elementos de cualquier subconjunto S de $\mathcal{G}(J \cap K)$. En consecuencia, z divide a $\text{mcm}(S)$.

Sin embargo, para todo $x^L \in \mathcal{G}(J \cap K)$ se tiene que z no divide a $\psi(x^L) = x^{G_L}$ ya que $G_L \in \mathcal{H} \setminus \{z\}$. En consecuencia, z no divide a $\text{mcm}(\psi(S))$ para ningún $S \subseteq \mathcal{G}(J \cap K)$ y ya podemos concluir que $\text{mcm}(\psi(S))$ divide estrictamente a $\text{mcm}(S)$.

La prueba de la doble implicación nos permite concluir la demostración del teorema. \square

Pasamos ahora a introducir dos tipos especiales de aristas de escisión: el primero de ellos es muy fácil de identificar y procede de la generalización del concepto de *hoja* de un grafo; el segundo es un poco más difícil de identificar, aunque está definido en términos puramente combinatorios, y procede de la generalización del concepto de *hoja* de un complejo simplicial que había sido introducido originalmente por Sara Faridi en [6].

Definición 3.2.6. Sea $\mathcal{H} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$ un hipergrafo simple.

- Una arista E es una *v-hoja* si contiene a un *vértice libre*, que es un vértice $v \in \mathcal{X}$ que no pertenece a ninguna otra arista de \mathcal{H} .
- Una arista E es una *f-hoja* si es la única arista de \mathcal{H} o si existe otra arista H en \mathcal{H} tal que $E \cap E' \subseteq E \cap H$ para todas las aristas E' de \mathcal{H} distintas de E .

Es posible ahora definir dos tipos de hiperárboles e hiperbosques a partir de los dos tipos distintos de hojas que acabamos de presentar.

\mathcal{H} es un *v-bosque* (respectivamente, un *f-bosque*) si todo subhipergrafo inducido de \mathcal{H} , incluido él mismo, contiene una *v-hoja* (respectivamente, una *f-hoja*). Si \mathcal{H} es conexo, lo llamaremos *v-árbol* (respectivamente, *f-árbol*).

Vamos a probar ahora un resultado sencillo que nos permitirá deducir más adelante que las *f-hojas* son aristas de escisión.

Lema 3.2.7. *Toda f-hoja es una v-hoja.*

Demostración. Para probar este resultado tenemos que demostrar que toda *f-hoja* E contiene un vértice libre; es decir, un vértice que no pertenece a ninguna otra arista de \mathcal{H} .

El resultado es trivialmente cierto cuando E es la única arista de \mathcal{H} . Por tanto, vamos a considerar el caso en el que existe una arista H distinta de E tal que $E \cap E' \subseteq E \cap H$ para toda arista E' de \mathcal{H} distinta de E .

Razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que E no tiene ningún vértice libre sino que todos sus vértices pertenecen también a otras aristas distintas de E .

Intersecando entonces E con aristas E' convenientes (que contengan a los distintos vértices de E), llegaríamos a que $E \subseteq E \cap H \subseteq H$. Pero como todos los hipergrafos con los que estamos trabajando son simples, esto implicaría que $E = H$, lo que supone una contradicción. \square

Otro resultado interesante es que, en el caso en que el hipergrafo \mathcal{H} es un grafo simple, los conceptos de *v-hoja* y *f-hoja* coinciden. Efectivamente, en el lema anterior acabamos

de probar que toda f -hoja es una v -hoja. Veamos que en este caso se verifica también el recíproco.

Consideramos una v -hoja $E = vw$ de un grafo simple, de manera que E contiene a un vértice de grado 1, por ejemplo v . Queremos probar que E es una f -hoja, lo cual sería trivial si E fuese la única arista del grafo. Vamos a considerar entonces el caso en que el grafo G con el que estamos trabajando tiene aristas distintas de E .

Si el vértice w tuviese grado estrictamente mayor que 1, podríamos tomar como la arista H de la definición de f -hoja cualquier arista distinta de E a la que w pertenezca. Efectivamente, en este caso tendríamos que $E \cap H = \{w\}$, mientras que la intersección de E con cualquier otra arista solo podría ser $\{w\}$ o \emptyset , ambos contenidos en $\{w\}$.

Si w tuviera grado 1, entonces E tendría intersección vacía con cualquiera otra arista de G y podríamos tomar como H cualquier arista de G distinta de E .

Aunque acabamos de probar que las nociones de f -hoja y v -hoja son equivalentes en el caso de grafos simples, esto no es cierto cuando \mathcal{H} es un hipergrafo general. Vamos a ilustrarlo mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.8. Consideramos el hipergrafo \mathcal{H} sobre el conjunto de vértices $\mathcal{X} = \{a, b, c, d, e, f\}$ con conjunto de aristas $\mathcal{E} = \{E_1 = abf, E_2 = bcd, E_3 = def\}$. Veamos que una v -hoja no es necesariamente una f -hoja.

La arista $E_1 = abf$ es una v -hoja porque contiene al vértice libre a , que no pertenece a ninguna otra arista. Sin embargo, no es una f -hoja ya que $E_1 \cap E_2 = \{b\} \not\subseteq \{f\} = E_1 \cap E_3$ y $E_1 \cap E_3 \not\subseteq E_1 \cap E_2$.

Dos primeros corolarios del Teorema 3.2.4 son los siguientes, en virtud de los cuales las v -hojas y las f -hojas son aristas de escisión:

Corolario 3.2.9. *Si E es una v -hoja de un hipergrafo \mathcal{H} , entonces E es una arista de escisión de \mathcal{H} .*

Demostración. Si denotamos por v a un vértice libre de E , entonces es claro que $\mathcal{H} \setminus E = \mathcal{H} \setminus \{v\}$. Basta recurrir ahora al Teorema 3.2.4, tomando como aquel vértice z que aparecía en el enunciado a nuestro vértice v . \square

Corolario 3.2.10. *Si E es una f -hoja de un hipergrafo \mathcal{H} , entonces E es una arista de escisión de \mathcal{H} .*

Demostración. Basta recordar que toda f -hoja es una v -hoja gracias al Lema 3.2.7 y que, en virtud del Corolario 3.2.9 que acabamos de probar, toda v -hoja es una arista de escisión. \square

Pasamos ahora a estudiar una familia de hipergrafos que nos va a permitir obtener fórmulas para los números de Betti graduados del ideal de aristas de un hipergrafo en términos de los números de Betti graduados de los ideales de aristas de ciertos subhipergrafos. Se trata de la familia de los hipergrafos *propriadamente conexos*.

Definición 3.2.11. Se dice que un hipergrafo d -uniforme $\mathcal{H} = (\mathcal{X}, \mathcal{E})$ es *propriadamente conexo* si para cada par de aristas E y E' de \mathcal{H} con la propiedad de que $E \cap E' \neq \emptyset$ se verifica que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, E') = d - |E \cap E'|$.

Nota 3.2.12. A partir de la definición anterior, es posible deducir que la distancia entre dos aristas con intersección no vacía en un hipergrafo propiamente conexo es finita. En consecuencia, en este tipo de hipergrafos siempre existe una cadena propia irredundante entre dos aristas con intersección no vacía.

Como vamos a utilizar mucho este concepto a partir de ahora, conviene presentar un ejemplo para ilustrar su manejo.

Ejemplo 3.2.13. Consideramos el hipergrafo 3-uniforme \mathcal{H}_1 con conjunto de aristas $\mathcal{E} = \{x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_5, x_2x_3x_4, x_2x_3x_5, x_3x_4x_5\}$.

Es posible observar que \mathcal{H}_1 es propiamente conexo sin más que comprobar que se verifica que $\text{dist}_{\mathcal{H}_1}(E, E') = 3 - |E \cap E'|$ para cada par de aristas E y E' del conjunto \mathcal{E} , y que cada par de aristas de \mathcal{E} tiene intersección no vacía.

Veamos ahora un ejemplo de un hipergrafo \mathcal{H}_2 4-uniforme que no es propiamente conexo. Para ello, sea $\mathcal{E} = \{x_1x_2x_3x_4, x_1x_2x_3x_7, x_1x_2x_6x_7, x_1x_5x_6x_7, x_1x_5x_6x_8\}$ su conjunto de aristas.

Si consideramos las aristas en el mismo orden en que las hemos escrito dentro del conjunto \mathcal{E} , tenemos una cadena propia irredundante entre $E = x_1x_2x_3x_4$ y $E' = x_1x_5x_6x_8$. Es fácil observar que la intersección entre un eslabón de la cadena y el siguiente tiene cardinal 3, y que no existe ninguna subsucesión estricta que dé lugar a una cadena propia entre E y E' . Sin embargo, E y E' tienen intersección no vacía, de donde se deduce que \mathcal{H}_2 no es propiamente conexo porque $\text{dist}_{\mathcal{H}_2}(E, E') = 4$ (la longitud de la cadena que hemos señalado) y este valor no coincide con $4 - |E \cap E'| = 3$.

Vamos a ver ahora que todo grafo simple G es propiamente conexo, lo que implica que, en este sentido, los hipergrafos propiamente conexos son una generalización de los grafos simples. Posteriormente veremos que, igual que ocurría para grafos simples, las nociones de f -hoja y v -hoja son equivalentes en este tipo de hipergrafos, y además las aristas de escisión se pueden caracterizar en términos puramente combinatorios dentro del hipergrafo con el que estemos trabajando.

La prueba de que todo grafo simple G es un hipergrafo propiamente conexo es muy sencilla. En primer lugar, ya habíamos comentado previamente que todo grafo es un hipergrafo 2-uniforme. Si tenemos dos aristas E y E' en G tales que $E \cap E' \neq \emptyset$, entonces o bien E y E' son la misma arista, o bien E y E' comparten exactamente un vértice. En el primer caso, $\text{dist}_G(E, E') = 0 = 2 - |E \cap E'|$, mientras que en el segundo caso $\text{dist}_G(E, E') = 1 = 2 - |E \cap E'|$.

Pasamos ahora a enunciar y demostrar la propiedad que anunciábamos antes de que en un hipergrafo propiamente conexo las nociones de f -hoja y v -hoja son equivalentes.

Teorema 3.2.14. *Sean \mathcal{H} un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo, y E una arista de \mathcal{H} . Se verifica que E es una v -hoja si y solo si es una f -hoja.*

Demostración. Para probar la equivalencia del enunciado, tenemos que probar la doble implicación. Sin embargo, en el Lema 3.2.7 ya habíamos demostrado que toda f -hoja es una v -hoja, de manera que solo nos falta probar el recíproco para hipergrafos propiamente conexos.

Sea E una v -hoja con vértice libre v . Si E fuese la única arista de \mathcal{H} , entonces ya tendríamos que E es una f -hoja. Por tanto, vamos a suponer que \mathcal{H} tiene al menos dos aristas.

Sea H una arista de \mathcal{H} que tenga intersección no vacía con E . Si no existe ninguna arista con esta propiedad, entonces E es claramente una f -hoja porque la intersección de E con cualquier arista sería vacía y se cumpliría la condición de la definición de f -hoja.

Supongamos entonces que sí que existe una arista H que tiene intersección no vacía con E . Como \mathcal{H} es propiamente conexo, existe una cadena propia $(E_0 = E, \dots, E_k = H)$ desde E hasta H .

Como \mathcal{H} es d -uniforme, se tiene que $|E| = |E_1| = d$. Además, como la cadena anterior es propia, se verifica que $|E \cap E_1| = |E_1| - 1 = d - 1$, y como v es un vértice libre de E tenemos también que $v \notin E_1$. De todas estas condiciones se deduce que $E \cap E_1 = E \setminus \{v\}$.

Así pues, si G es cualquier otra arista de \mathcal{H} , entonces $v \notin G$ (ya que v es un vértice libre de E) y por tanto $E \cap G \subseteq E \setminus \{v\} = E \cap E_1$, lo que prueba que E es una f -hoja. \square

Nuestro objetivo ahora es presentar una caracterización de las aristas de escisión de los hipergrafos propiamente conexos en términos exclusivamente combinatorios. Para ello, necesitaremos hacer uso de la siguiente definición:

Definición 3.2.15. Si E es una arista de un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo \mathcal{H} , entonces el *conjunto de vértices adyacentes a E* es el siguiente subconjunto de \mathcal{X} :

$$N(E) = \bigcup_{\{H \in \mathcal{H} \mid \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) = 1\}} H \setminus E .$$

En las condiciones de la definición anterior, notemos que si H es una arista de \mathcal{H} con $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) = 1$, entonces $|E \cap H| = d - 1$ y, por tanto, $|H \setminus E| = 1$, de manera que $H \setminus E = \{z\}$ para un cierto vértice z .

Teorema 3.2.16. *Sea E una arista de un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo \mathcal{H} , y supongamos que $N(E) = \{z_1, \dots, z_t\}$. Entonces E es una arista de escisión si y solo si existe un vértice $z \in E$ tal que $(E \setminus \{z\}) \cup \{z_i\} \in \mathcal{H}$ para cada $z_i \in N(E)$.*

Para demostrar este resultado, necesitaremos enunciar y demostrar previamente dos lemas. No obstante, antes de hacerlo conviene destacar la siguiente observación.

Nota 3.2.17. Si G es un grafo finito y simple y $E = uv$ es una arista de G , entonces es claro que $N(E) = (N(u) \cup N(v)) \setminus \{u, v\}$, donde seguimos denotando por $N(x)$ al conjunto de vértices adyacentes a un vértice x , tal y como hacíamos en el capítulo anterior.

En consecuencia, el Teorema 3.2.16 no es más que una generalización del Teorema 2.2.4. Veamos que, en efecto, si nos restringimos a considerar grafos, la condición que aparece en el enunciado del Teorema 3.2.16 es equivalente a la que aparecía en el men-

cionado teorema del capítulo anterior:

$$\begin{aligned}
& E = uv \text{ es una arista de escisión en el sentido de los hipergrafos} \\
& \Leftrightarrow \text{Existe } z \in E \mid (E \setminus \{z\}) \cup \{z_i\} \in E_G \quad \forall z_i \in (N(u) \cup N(v)) \setminus \{u, v\} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} (E \setminus \{u\}) \cup \{z_i\} = vz_i \in E_G & \forall z_i \in (N(u) \cup N(v)) \setminus \{u, v\}, \text{ o} \\ (E \setminus \{v\}) \cup \{z_i\} = uz_i \in E_G & \forall z_i \in (N(u) \cup N(v)) \setminus \{u, v\} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow (N(u) \cup N(v)) \setminus \{u, v\} \subseteq N(v) \quad \text{o} \quad (N(u) \cup N(v)) \setminus \{u, v\} \subseteq N(u) \\
& \quad \Leftrightarrow N(u) \subseteq N(v) \cup \{v\} \quad \text{o} \quad N(v) \subseteq N(u) \cup \{u\} \\
& \Leftrightarrow E = uv \text{ es una arista de escisión en el sentido de los grafos .}
\end{aligned}$$

Ahora sí, veamos los dos lemas que necesitamos para demostrar el Teorema 3.2.16:

Lema 3.2.18. *Sea \mathcal{H} un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo. Supongamos que $E = E_0 = \{x_1, \dots, x_d\}$ y E' son aristas de \mathcal{H} con $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, E') = t \leq d$. Entonces, tras renombrar los vértices convenientemente, existen aristas E_1, \dots, E_t tales que $E_i = \{y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_d\}$, $E_t = E'$, e $y_i \notin E_j$ para todo $j < i$.*

Demostración. Como $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, E') = t \leq d$, tiene que existir una cadena propia irredundante de aristas ($E_0 = E, E_1, \dots, E_t = E'$).

$|E_i \cap E_{i+1}| = |E_{i+1}| - 1 = d - 1$, de manera que E_i y E_{i+1} difieren exactamente en un vértice para todo i . En consecuencia, en el i -ésimo eslabón de la cadena vamos a tener un conjunto E_i que difiere de E en a lo sumo i vértices; dicho de otra forma, $|E \cap E_i| \geq d - i$.

Como (E_0, \dots, E_t) es una cadena propia irredundante y \mathcal{H} es d -uniforme y propiamente conexo, para todo $i < d$ tenemos que $i = \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, E_i) = d - |E \cap E_i|$. En consecuencia, $|E \cap E_i| = d - i > 0$ para todo $i < d$.

Además, si $i = d = t$, entonces $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E_0, E_i) = d$ y en consecuencia $E_0 \cap E_i = \emptyset$, ya que hemos tenido que cambiar los d vértices que formaban la arista E_0 . Por lo tanto, también en este caso se verifica que $|E_0 \cap E_i| = 0 = d - i$.

Vamos a probar ahora que los conjuntos E_i con los que estamos trabajando verifican, tras renombrar convenientemente los vértices, las condiciones del enunciado del lema. Lo vamos a hacer razonando por inducción sobre i .

- Si $i = 1$, queremos ver que el conjunto E_1 verifica las afirmaciones del enunciado. Tenemos que $E = E_0 = \{x_1, \dots, x_d\}$, donde renombramos los vértices de manera que x_1 no pertenezca a E_1 . $|E_0 \cap E_1| = d - 1$, luego $E_1 = \{y_1, x_2, \dots, x_d\}$, con $y_1 \notin E_0 = E$. Esto prueba el caso $i = 1$.
- Supongamos ahora que E_0, \dots, E_i satisfacen el enunciado del lema para un cierto $i > 1$; es decir, $E_i = \{y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_d\}$, con $y_i \notin E_j$ para todo $j < i$. $|E_i \cap E_{i+1}| = d - 1$, luego E_{i+1} se puede construir a partir de E_i sustituyendo un vértice de E_i por otro vértice al que vamos a llamar y_{i+1} que no pertenece a E_i . Esto implica en particular que y_{i+1} es distinto de $y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_d$.

En primer lugar, veamos que el vértice que eliminamos de E_i no es ninguno de los y_j , de manera que y_1, \dots, y_i pertenecen a E_{i+1} . Efectivamente, si reemplazáramos

alguno de los y_j (con $j \leq i$) por y_{i+1} tendríamos que $|E_0 \cap E_i| = |\{x_{i+1}, \dots, x_d\}| = d - i \leq |E_0 \cap E_{i+1}|$, pero esto es absurdo porque $|E_0 \cap E_{i+1}| = d - (i + 1) = d - i - 1$.

En consecuencia, y_{i+1} va a reemplazar a algún elemento del conjunto $\{x_{i+1}, \dots, x_d\}$ y, renombrando convenientemente los vértices, podemos suponer que y_{i+1} va a reemplazar a x_{i+1} ; es decir, $E_{i+1} = \{y_1, \dots, y_i, y_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_d\}$.

Lo último que nos falta demostrar es que y_{i+1} no pertenece a E_j para ningún $j \leq i$. Para ello vamos a razonar por reducción al absurdo, suponiendo que existe j menor o igual que i tal que $y_{i+1} = x_j$. Entonces $d - i = |E_0 \cap E_i| = |\{x_{i+1}, \dots, x_d\}| = |\{x_j, x_{i+2}, \dots, x_d\}| = |E_0 \cap E_{i+1}| = d - i - 1$, lo cual es absurdo. Deducimos por tanto que $y_{i+1} \neq x_j$ para todo $j \leq i$. Como también teníamos que y_{i+1} es distinto de $y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_d$, ya podemos concluir que $y_{i+1} \notin E_j$ para ningún $j \leq i$.

El razonamiento por inducción nos permite concluir la demostración del lema. \square

Lema 3.2.19. *Sea E una arista cualquiera de un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo \mathcal{H} . Entonces*

$$\begin{aligned} (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E) &= (\{\text{mcm}(x^E, x^H) \mid H \in \mathcal{H} \text{ y } \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) = 1\}) + \\ &+ (\{\text{mcm}(x^E, x^H) \mid H \in \mathcal{H} \text{ y } \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d + 1\}) . \end{aligned}$$

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} A &= (\{\text{mcm}(x^E, x^H) \mid H \in \mathcal{H} \setminus E \text{ y } \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \leq d\}) \quad \text{y} \\ B &= (\{\text{mcm}(x^E, x^H) \mid H \in \mathcal{H} \setminus E \text{ y } \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d + 1\}) = \\ &= (\{\text{mcm}(x^E, x^H) \mid H \in \mathcal{H} \text{ y } \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d + 1\}) , \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \neq 0$ implica que $E \neq H$.

Por definición, $(x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E) = A + B$. En consecuencia, si denotamos por C al ideal $(\{\text{mcm}(x^E, x^H) \mid H \in \mathcal{H} \text{ y } \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) = 1\})$, para demostrar el lema basta probar que $A = C$.

Como $d \geq 2$, tenemos que una arista H que está a distancia 1 de E es distinta de E y está a una distancia menor o igual que d de ella; por tanto, $C \subseteq A$. Veamos ahora que también se verifica la otra contención.

Sea $x^{E \cup H} = \text{mcm}(x^E, x^H)$ un elemento del conjunto de generadores de A que hemos descrito antes; es decir, suponemos que $H \in \mathcal{H} \setminus E$ y $t = \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \leq d$. Si t fuese igual a 1, entonces ya tendríamos que $x^{E \cup H} \in C$. Por tanto, podemos suponer que $2 \leq t \leq d$. En consecuencia, como \mathcal{H} es propiamente conexo, existe una cadena propia irredundante $(E = H_0, H_1, H_2, \dots, H_t = H)$ como en el Lema 3.2.18 y cuya longitud es minimal entre todas las cadenas propias irredundantes que van desde E hasta H .

En virtud del Lema 3.2.18, si $E = \{x_1, \dots, x_d\}$ y renombramos los vértices convenientemente, entonces $H_1 = \{y_1, x_2, \dots, x_d\}$, donde y_1 no es un elemento de E pero $y_1 \in H_i$ para todo $i \in \{2, \dots, t\}$.

A partir de esto, $\text{mcm}(x^E, x^{H_1}) = x^{E \cup H_1} = x^{E \cup \{y_1\}} = x^E y_1$. Como $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H_1) = 1$, tenemos entonces que $x^E y_1$ es un generador de C . Además, como $y_1 \in H_i$ para todo $i \in \{2, \dots, t\}$, tenemos que $\text{mcm}(x^E, x^{H_i}) = x^{E \cup H_i}$ es divisible por $x^E y_1$ para todo

$i \in \{2, \dots, t\}$ y, por tanto, pertenece a C . En particular, $x^{E \cup H_t} = x^{E \cup H} \in C$, tal y como queríamos probar. \square

Estamos ya en condiciones de demostrar el Teorema 3.2.16, para lo cual recordamos primero su enunciado:

Teorema. *Sea E una arista de un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo \mathcal{H} , y supongamos que $N(E) = \{z_1, \dots, z_t\}$. Entonces E es una arista de escisión si y solo si existe un vértice $z \in E$ tal que $(E \setminus \{z\}) \cup \{z_i\} \in \mathcal{H}$ para cada $z_i \in N(E)$.*

Demostración. Para probar la equivalencia del enunciado, vamos a demostrar por separado las dos implicaciones.

\Rightarrow Supongamos que E es una arista de escisión. En virtud del Teorema 3.2.4, existe un vértice $z \in E$ tal que $(x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E) \subseteq (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{z\})$. Si $z_i \in N(E)$, vamos a probar que $(E \setminus \{z\}) \cup \{z_i\}$ es una arista de $\mathcal{H} \setminus \{z\}$, lo que implicará que es una arista de \mathcal{H} .

Como $z_i \in N(E)$, existe una arista H de \mathcal{H} con $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) = 1$ tal que $H \setminus E = \{z_i\}$. En virtud del Lema 3.2.19, $x^{E \cup H}$ es un generador de $(x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E) \subseteq (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{z\})$.

Tenemos entonces que $x^{E \cup H} \in (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{z\})$, y por tanto existe una arista $H' \in \mathcal{H} \setminus \{z\}$ tal que $E \cup H = E \cup H'$.

En consecuencia, $|E| + |H| - |E \cap H| = |E \cup H| = |E \cup H'| = |E| + |H'| - |E \cap H'|$, y como $|H| = |H'| = d$ deducimos que $|E \cap H'| = |E \cap H| = d - 1$, de manera que E y H' (que tienen el mismo cardinal) difieren en un único vértice.

Más allá de esto, tenemos que z pertenece a E pero no a H' , y z_i pertenece a $H \setminus E$. Como $E \cup H = E \cup H'$, z_i tendrá que pertenecer también a H' . En consecuencia, $H' = (E \setminus \{z\}) \cup \{z_i\}$, y como H' es una arista de $\mathcal{H} \setminus \{z\}$ podemos concluir que $(E \setminus \{z\}) \cup \{z_i\}$ también lo es.

\Leftarrow Supongamos ahora que existe un vértice $z \in E$ tal que $(E \setminus \{z\}) \cup \{z_i\} \in \mathcal{H}$ para cada $z_i \in N(E)$, y veamos que entonces E es una arista de escisión.

Sea x^L uno de los generadores minimales de $(x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E)$. En virtud del Lema 3.2.19, se tiene que o bien $L = E \cup H$ con $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) = 1$, o bien $L = E \cup H$ con $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d + 1$.

Si $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d + 1$, entonces $z \notin H$ porque todas las aristas tienen cardinal d y por tanto $E \cap H = \emptyset$. En este caso, $H \in \mathcal{H} \setminus \{z\}$ y por tanto $x^L \in (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{z\})$.

Si $L = E \cup H$ con $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) = 1$, entonces existe $z_i \in N(E)$ tal que $H \setminus E = \{z_i\}$. Por tanto, $E \cup H = E \cup \{z_i\}$.

Por hipótesis, $E' = (E \setminus \{z\}) \cup \{z_i\}$ es una arista de \mathcal{H} . En particular, lo es de $\mathcal{H} \setminus \{z\}$. Además, $L = E \cup H = E \cup \{z_i\} = E \cup ((E \setminus \{z\}) \cup \{z_i\}) = E \cup E'$ y por tanto $x^L = x^{E \cup E'} \in (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{z\})$.

En definitiva, hemos probado que $(x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E) \subseteq (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{z\})$, y el Teorema 3.2.4 nos permite concluir que entonces E es una arista de escisión.

Queda probada la doble implicación y, por tanto, el teorema. \square

Si E es una arista de un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo \mathcal{H} , a partir de ahora denotaremos por \mathcal{H}' al subhipergrafo $\{H \in \mathcal{H} \mid \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d + 1\}$ de \mathcal{H} , con el objetivo de simplificar la notación. Presentamos a continuación un lema en virtud del cual \mathcal{H}' hereda de \mathcal{H} la propiedad de ser propiamente conexo.

Lema 3.2.20. *Si E es una arista de un hipergrafo \mathcal{H} d -uniforme y propiamente conexo, entonces el subhipergrafo \mathcal{H}' definido a partir de E también es un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo.*

Demostración. Es evidente que \mathcal{H}' es un hipergrafo d -uniforme, de manera que solo tenemos que probar que es propiamente conexo.

Para ello, tomamos dos aristas H y H' de \mathcal{H}' con la propiedad de que $H \cap H' \neq \emptyset$. Como H y H' también son aristas de \mathcal{H} y \mathcal{H} es propiamente conexo, tenemos que existe una cadena $(H = H_0, H_1, \dots, H_t = H')$ en \mathcal{H} como en el Lema 3.2.18 tal que $t = \text{dist}_{\mathcal{H}}(H, H') = d - |H \cap H'|$.

Si tuviéramos que todas las aristas H_i anteriores, con $i \in \{1, \dots, t - 1\}$, también pertenecen a \mathcal{H}' , entonces ya tendríamos que $\text{dist}_{\mathcal{H}'}(H, H') = t = d - |H \cap H'|$.

Supongamos entonces que existe $i \in \{1, \dots, t - 1\}$ tal que H_i no es una arista de $\mathcal{H}' = \{H \in \mathcal{H} \mid \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d + 1\}$. En consecuencia, $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H_i)$ (valor al que voy a denotar por s) es menor o igual que d .

Sea $(E = E_0, E_1, \dots, E_s = H_i)$ una cadena propia irredundante en \mathcal{H} entre E y H_i . Tenemos entonces que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E_1, H_i) = s - 1 < d$, y como $|E_1| = |H_i| = d$, lo anterior implica que $E_1 \cap H_i \neq \emptyset$.

Podemos tomar entonces un elemento x de $E_1 \cap H_i$. Como $x \in H_i$ y hemos elegido una cadena propia irredundante como en el Lema 3.2.18, tenemos que o bien x pertenece a H o bien pertenece a H' . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x \in H$.

Gracias a que \mathcal{H} es propiamente conexo, se tiene que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E_1, H) = d - |E_1 \cap H| \leq d - 1$, donde la última desigualdad se debe a que, por ser $H \cap E_1 \neq \emptyset$ (ya que $x \in H \cap E_1$), su cardinal ha de ser mayor o igual que uno.

Se tiene que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E_1, H) \leq d - 1$ y $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, E_1) = 1$, luego existe una cadena propia en \mathcal{H} de longitud a lo sumo d entre E y H , lo que contradice la suposición de que $H \in \mathcal{H}'$ y en consecuencia $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d + 1$.

Hemos alcanzado una contradicción, de donde deducimos que $H_i \in \mathcal{H}'$ para todo $i \in \{1, \dots, t - 1\}$. Por lo tanto, $\text{dist}_{\mathcal{H}'}(H, H') = d - |H \cap H'|$ para cualquier par de aristas H, H' de \mathcal{H}' con $H \cap H' \neq \emptyset$. Concluimos así que efectivamente \mathcal{H}' es propiamente conexo. \square

El siguiente resultado que vamos a presentar es una consecuencia del Lema 3.2.19 y nos permite obtener una descripción de $(x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E)$ que resultará útil más adelante.

Corolario 3.2.21. *Sea E una arista de un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo \mathcal{H} , y supongamos que $N(E) = \{z_1, \dots, z_t\}$. Entonces*

$$(x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E) = x^E((z_1, \dots, z_t) + \mathcal{I}(\mathcal{H}')) .$$

Demostración. En virtud del Lema 3.2.19,

$$\begin{aligned} (x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E) &= (\{\text{mcm}(x^E, x^H) \mid H \in \mathcal{H} \text{ y } \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) = 1\}) + \\ &+ (\{\text{mcm}(x^E, x^H) \mid H \in \mathcal{H} \text{ y } \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d + 1\}) . \end{aligned}$$

Si $H \in \mathcal{H}$ y $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) = 1$, entonces existe $i \in \{1, \dots, t\}$ tal que $H \setminus E = \{z_i\}$. Por lo tanto, $\text{mcm}(x^E, x^H) = x^{E \cup H} = x^{E \cup \{z_i\}} = x^E z_i$ y esto nos permite deducir que

$$(\{\text{mcm}(x^E, x^H) \mid H \in \mathcal{H} \text{ y } \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) = 1\}) = x^E(z_1, \dots, z_t) .$$

Si $H \in \mathcal{H}$ y $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d + 1$, entonces $E \cap H = \emptyset$ porque en caso contrario, como \mathcal{H} es propiamente conexo, tendríamos que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) = d - |E \cap H| \leq d - 1$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, en este caso $\text{mcm}(x^E, x^H) = x^{E \cup H} = x^E x^H$, con $H \in \mathcal{H}'$ y $E \cap H = \emptyset$. Esto nos permite deducir que

$$(\{\text{mcm}(x^E, x^H) \mid H \in \mathcal{H} \text{ y } \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d + 1\}) = x^E \mathcal{I}(\mathcal{H}') .$$

Aplicando ahora el Lema 3.2.19 tal y como señalábamos al principio de la demostración, se concluye la prueba de este corolario. \square

El corolario que acabamos de demostrar es una generalización del Lema 2.2.2 que veíamos en el capítulo anterior. Efectivamente, como ya hemos comentado en la Nota 3.2.17, cuando el hipergrafo \mathcal{H} con el que estamos trabajando es un grafo simple y consideramos la arista $E = uv$, se verifica que $N(E) = (N(u) \cup N(v)) \setminus \{u, v\}$. Además, en el caso de grafos simples, \mathcal{H}' , que está formado por las aristas cuya distancia a E es al menos 3, está formado entonces por las aristas que no contienen a ninguno de los vértices del conjunto $N(u) \cup N(v)$; es decir, $\mathcal{H}' = G \setminus (N(u) \cup N(v))$. Recuperamos entonces el Lema 2.2.2 sin más que restringirnos a grafos simples en el lema anterior.

Siguiendo la línea de generalizar los resultados estudiados en el capítulo anterior, el lema que presentamos a continuación constituye una generalización del Lema 2.2.8 sin más que prestar atención a los comentarios efectuados en el párrafo anterior, con la diferencia de que la arista que consideramos ahora en el enunciado es arbitraria y no necesariamente de escisión.

Lema 3.2.22. *Sea E una arista de un hipergrafo \mathcal{H} d -uniforme y propiamente conexo. Si $t = |N(E)|$, entonces*

$$\beta_{i-1,j}((x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E)) = \sum_{l=0}^i \binom{t}{l} \beta_{i-1-l,j-d-l}(\mathcal{I}(\mathcal{H}')) ,$$

donde seguimos considerando que $\beta_{-1,j}(\mathcal{I}(\mathcal{H}')) = 1$ si $j = 0$ y $\beta_{-1,j}(\mathcal{I}(\mathcal{H}')) = 0$ si $j \neq 0$.

Demostración. Si $N(E) = \{z_1, \dots, z_t\}$, entonces en virtud del Corolario 3.2.21 se tiene que

$$\begin{aligned} \beta_{i-1,j}((x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E)) &= \beta_{i-1,j}(x^E((z_1, \dots, z_t) + \mathcal{I}(\mathcal{H}'))) = \\ &= \beta_{i-1,j-d}((z_1, \dots, z_t) + \mathcal{I}(\mathcal{H}')) = \\ &= \beta_{i,j-d}(R/((z_1, \dots, z_t) + \mathcal{I}(\mathcal{H}'))) . \end{aligned}$$

Ninguno de los generadores de $\mathcal{I}(\mathcal{H}')$ es divisible por z_i para ningún $i \in \{1, \dots, t\}$. Para probarlo, supongamos que el generador $x^H \in \mathcal{I}(\mathcal{H}')$ es divisible por algún z_i , de manera que z_i es un vértice de la arista H de \mathcal{H}' . Como $z_i \in N(E)$, existe una arista H_i de \mathcal{H} tal que $z_i \in H_i$ y $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H_i) = 1$.

Tenemos entonces que $H \cap H_i \neq \emptyset$ porque $z_i \in H \cap H_i$. En consecuencia, como \mathcal{H} es propiamente conexo, se tiene que $p = \text{dist}_{\mathcal{H}}(H, H_i) = d - |H \cap H_i| < d$, de manera que existe una cadena propia irredundante $(H_i = H'_0, \dots, H'_p = H)$ desde H_i hasta H .

Así pues, $(E, H_i = H'_0, \dots, H'_p = H)$ es una cadena propia de longitud $p + 1 \leq d$ desde E hasta H . Pero esto implicaría que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \leq d$, lo que contradice que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d + 1$ por ser H una arista de \mathcal{H}' .

En definitiva, se tiene que ningún generador de $\mathcal{I}(\mathcal{H}')$ es divisible por ningún elemento de $N(E)$. Modificamos ahora nuestra notación y escribimos $R = k[z_1, \dots, z_t, y_1, \dots, y_s]$, donde $\{y_1, \dots, y_s\} = \mathcal{X} \setminus N(E)$. Haciendo uso del Lema 2.2.6 y la Nota 2.2.7 que habíamos introducido en el capítulo anterior, tenemos entonces que

$$\frac{R}{(z_1, \dots, z_t) + \mathcal{I}(\mathcal{H}')} \cong \frac{R_1}{(z_1, \dots, z_t)} \otimes_k \frac{R_2}{\mathcal{I}(\mathcal{H}')},$$

donde $R_1 = k[z_1, \dots, z_t]$ y $R_2 = k[y_1, \dots, y_s]$; y

$$\beta_{i,j-d} \left(\frac{R}{L} \right) = \sum_{l_1=0}^i \sum_{l_2=0}^{j-d} \beta_{l_1, l_2} \left(\frac{R_1}{(z_1, \dots, z_t)} \right) \beta_{i-l_1, j-d-l_2} \left(\frac{R_2}{\mathcal{I}(\mathcal{H}')} \right),$$

donde $L = (z_1, \dots, z_t) + \mathcal{I}(\mathcal{H}')$.

Sabemos además que

$$\beta_{l_1, l_2} \left(\frac{R_1}{(z_1, \dots, z_t)} \right) = \begin{cases} \binom{t}{l} & \text{si } l = l_1 = l_2 \\ 0 & \text{si } l_1 \neq l_2, \end{cases}$$

de manera que juntando todo lo anterior obtenemos que

$$\beta_{i,j-d} \left(\frac{R}{L} \right) = \sum_{l=0}^i \binom{t}{l} \beta_{i-l, j-d-l} \left(\frac{R_2}{\mathcal{I}(\mathcal{H}')} \right).$$

Ahora ya podemos concluir, sin más que observar que

$$\beta_{i-l, j-d-l}(R_2/\mathcal{I}(\mathcal{H}')) = \beta_{i-l, j-d-l}(R/\mathcal{I}(\mathcal{H}')) = \beta_{i-1-l, j-d-l}(\mathcal{I}(\mathcal{H}'))$$

para todo l (donde adoptamos el convenio de que $\beta_{-1, j}(\mathcal{I}(\mathcal{H}')) = 1$ si $j = 0$ y toma el valor 0 si $j \neq 0$). \square

Si utilizamos ahora el Lema 3.2.22, es posible obtener una generalización del Teorema 2.2.9 que nos va a proporcionar una fórmula para los números de Betti graduados del ideal de aristas de un hipergrafo en términos de los números de Betti graduados de los ideales de aristas de ciertos subhipergrafos.

Teorema 3.2.23. *Sea \mathcal{H} un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo y sea E una arista de escisión de \mathcal{H} . Sean también $\mathcal{H}' = \{H \in \mathcal{H} \mid \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d+1\}$ y $t = |N(E)|$. Entonces para todo $i \geq 1$ y todo $j \geq 0$ se tiene que*

$$\beta_{i,j}(\mathcal{I}(\mathcal{H})) = \beta_{i,j}(\mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E)) + \sum_{l=0}^i \binom{t}{l} \beta_{i-1-l,j-d-l}(\mathcal{I}(\mathcal{H}')) ,$$

donde seguimos considerando que $\beta_{-1,j}(\mathcal{I}(\mathcal{H}')) = 1$ si $j = 0$ y $\beta_{-1,j}(\mathcal{I}(\mathcal{H}')) = 0$ si $j \neq 0$.

Demostración. Como E es una arista de escisión, en virtud del Teorema 2.1.4 tenemos que

$$\beta_{i,j}(\mathcal{I}(\mathcal{H})) = \beta_{i,j}((x^E)) + \beta_{i,j}(\mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E)) + \beta_{i-1,j}((x^E) \cap \mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus E)) .$$

En consecuencia, basta señalar que $\beta_{i,j}((x^E)) = 0$ siempre que $i \geq 1$ y aplicar el Lema 3.2.22 para obtener la fórmula del enunciado del teorema. \square

Si \mathcal{H} es un hipergrafo propiamente conexo y E es una arista de escisión, los subhipergrafos $\mathcal{H} \setminus E$ y \mathcal{H}' no tienen por qué tener aristas de escisión; de hecho, es posible que $\mathcal{H} \setminus E$ ni siquiera sea propiamente conexo. Vamos a ilustrar esta última afirmación a través de un ejemplo:

Ejemplo 3.2.24. Consideramos el hipergrafo 3-uniforme y propiamente conexo \mathcal{H}_1 que habíamos definido en el ejemplo 3.2.13, el cual tiene como conjunto de aristas $\mathcal{E} = \{x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_5, x_2x_3x_4, x_2x_3x_5, x_3x_4x_5\}$.

Consideramos ahora la arista $E = x_1x_2x_3$. Utilizando el Teorema 3.2.16, vamos a probar que E es una arista de escisión: por una parte, como las aristas que están a distancia 1 de E son las que pertenecen al conjunto $\{x_1x_2x_4, x_1x_3x_5, x_2x_3x_4, x_2x_3x_5\}$, es claro que $N(E) = \{x_4, x_5\}$. Ahora bien, el hecho de que $(E \setminus \{x_1\}) \cup \{x_4\} = x_2x_3x_4$ y $(E \setminus \{x_1\}) \cup \{x_5\} = x_2x_3x_5$ son aristas de \mathcal{H}_1 ya nos permite deducir que E es una arista de escisión.

Sin embargo, $\mathcal{H}_1 \setminus E$ no es propiamente conexo porque las aristas $E_1 = x_1x_2x_4$ y $E_2 = x_1x_3x_5$ comparten el vértice x_1 y, sin embargo, no existe ninguna cadena propia en $\mathcal{H}_1 \setminus E$ desde E_1 hasta E_2 que tenga longitud $2 = 3 - |E_1 \cap E_2|$.

Lo anterior implica que, al igual que ocurría en el Teorema 2.2.9, la fórmula que proporciona el Teorema 3.2.23 no es recursiva en general.

En el capítulo previo habíamos visto que si el grafo G con el que trabajábamos era un bosque, entonces la fórmula que obteníamos en el Teorema 2.2.9 gracias a la técnica de escisión de ideales trabajando con aristas de escisión sí que era recursiva. En el caso de hipergrafos, aquellos para los cuales la fórmula obtenida en el Teorema 3.2.23 es recursiva son los llamados hipergrafos triangulados, que vamos a estudiar a continuación y que son una generalización de los grafos cordales. Para evitar que la extensión del trabajo sea excesiva, no nos centraremos en el estudio de la recursividad de la fórmula anterior, sino que estudiaremos los hipergrafos triangulados en relación con una posible generalización del Teorema de Fröberg 2.3.14 que estudiábamos en el capítulo previo y que se enunciaba en términos de grafos cordales.

3.2.3. Hipergrafos triangulados

Como acabamos de comentar, con los hipergrafos triangulados buscamos generalizar la noción de grafo cordal que habíamos estudiado en el capítulo anterior. Un grafo cordal se define como aquel que no tiene ciclos minimales. Sin embargo, para generalizar este concepto haremos uso de una caracterización de los grafos cordales que no demostramos aquí porque no se encuentra dentro de los objetivos del trabajo, pero que se puede encontrar (aunque utilizando una nomenclatura diferente) en [3]. Esta caracterización es la siguiente:

Teorema 3.2.25. *Un grafo G es cordal si y solo si todo subgrafo inducido de G contiene un vértice v tal que el conjunto $N(v)$ es un clique de G (es decir, es un subgrafo de G que es un grafo completo).*

Nota 3.2.26. En cuanto al enunciado del teorema anterior, notemos que, como v es adyacente a todo vértice de $N(v)$, tendríamos también que el subgrafo inducido de G sobre $N(v) \cup \{v\}$ es un clique de G .

A partir de la caracterización anterior de los grafos cordales, resulta natural que en nuestro camino hacia la generalización de este concepto introduzcamos primero una generalización de los grafos completos y de los vértices adyacentes a uno dado. A esto dedicamos las siguientes definiciones, que nos van a permitir introducir el concepto de hipergrafo triangulado.

Definición 3.2.27. El *hipergrafo d -completo de orden n* se denota por \mathcal{K}_n^d y se define como el hipergrafo cuyas aristas son todos los subconjuntos de d elementos del conjunto de vértices \mathcal{X} , con $|\mathcal{X}| = n$. Cuando $d = 2$, \mathcal{K}_n^2 es el grafo completo de n vértices, al que denotábamos en el capítulo anterior por \mathcal{K}_n . Si $n < d$, adoptamos el convenio de que \mathcal{K}_n^d es el hipergrafo formado por n vértices aislados. Por último, si $n = 0$, entonces \mathcal{K}_0^d es el grafo vacío, al que podemos ver como un hipergrafo d -completo de orden 0.

Definición 3.2.28. Dos vértices distintos $x, y \in \mathcal{X}$ son *adyacentes* si existe una arista $E \in \mathcal{H}$ tal que $x, y \in E$.

Dado un vértice $x \in \mathcal{X}$, vamos a denotar por $N(x)$ al *conjunto de vértices adyacentes a x* ; es decir, $N(x) = \{y \in \mathcal{X} \mid y \text{ es adyacente a } x\}$.

A partir de la definición anterior, es claro que si E es una arista de \mathcal{H} y $x \in E$, entonces $E \subseteq N(x) \cup \{x\}$.

Definición 3.2.29. Se dice que un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo \mathcal{H} es *triangulado* si para todo subconjunto no vacío \mathcal{Y} de \mathcal{X} se verifica que el subhipergrafo inducido de \mathcal{H} sobre \mathcal{Y} , $\mathcal{H}_\mathcal{Y}$, contiene un vértice $x \in \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ tal que el subhipergrafo inducido de $\mathcal{H}_\mathcal{Y}$ sobre $N(x) \cup \{x\}$ es un hipergrafo d -completo de orden $|N(x)| + 1$.

Gracias al Teorema 3.2.25 que habíamos enunciado antes, es claro que los hipergrafos triangulados constituyen una generalización de los grafos cordales.

Antes de intentar generalizar el teorema de Fröberg, vamos a introducir una definición y un par de resultados que necesitaremos.

Definición 3.2.30. Sea \mathcal{H} un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo. Dos aristas E y H de \mathcal{H} son t -disjuntas si $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq t$. Se dice que un conjunto de aristas $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ son t -disjuntas dos a dos si cada par de aristas de \mathcal{E}' son t -disjuntas.

Cuando \mathcal{H} es un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo, claramente se tiene que dos aristas E y H son d -disjuntas si y solo si $E \cap H = \emptyset$; es decir, si E y H son disjuntas en el sentido usual. Además, cuando el hipergrafo con el que trabajamos es un grafo simple G , la definición que dábamos en el capítulo anterior para aristas desconectadas es equivalente a decir que las aristas en cuestión son 3-disjuntas en G .

Presentamos ahora un teorema que utilizaremos más adelante, si bien no vamos a exponer su demostración porque utiliza ciertos conceptos de álgebra homológica que no forman parte del desarrollo principal del trabajo y su introducción en este punto supondría un alargamiento excesivo del mismo. En cualquier caso, esta demostración se puede encontrar en [17].

Teorema 3.2.31. *Sea \mathcal{H} un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo. Entonces el número de Betti graduado $\beta_{i-1, di}(\mathcal{I}(\mathcal{H}))$ es igual al número de conjuntos formados por i aristas $(d+1)$ -disjuntas dos a dos de \mathcal{H} .*

En particular, si c es el cardinal del mayor conjunto de aristas $(d+1)$ -disjuntas dos a dos de \mathcal{H} , entonces $\text{reg}(\mathcal{I}(\mathcal{H})) \geq (d-1)c + 1$.

Habíamos comentado antes que los hipergrafos triangulados permitían recuperar el carácter recursivo de la fórmula para los números de Betti graduados que nos proporciona la técnica de escisión de ideales en el Teorema 3.2.23, algo que en el caso de grafos simples habíamos obtenido para bosques. De una forma similar, los hipergrafos triangulados nos permiten generalizar un resultado que en el capítulo anterior habíamos enunciado y demostrado para grafos simples que eran bosques. Se trata del Corolario 2.2.15, que proporciona el valor de la regularidad del ideal de aristas de un bosque en términos del número de aristas desconectadas dos a dos en él y nos da la licencia de omitir la demostración del siguiente resultado por ser esta muy similar.

Corolario 3.2.32. *Sea \mathcal{H} un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo y triangulado. Si c es el cardinal del mayor conjunto de aristas $(d+1)$ -disjuntas dos a dos de \mathcal{H} , entonces $\text{reg}(\mathcal{I}(\mathcal{H})) = (d-1)c + 1$.*

Ahora sí, nos encontramos en condiciones de intentar generalizar el Teorema de Fröberg, en virtud del cual todo grafo G verifica que su ideal de aristas tiene una resolución lineal si y solo si G^c es un grafo cordal.

Ya habíamos visto que el concepto de hipergrafo triangulado es una generalización de la noción de grafo cordal, pero antes de seguir tenemos que generalizar el concepto de grafo complementario al caso de hipergrafos. Es esto a lo que dedicamos la siguiente definición:

Definición 3.2.33. Si \mathcal{H} es un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo, definimos el *complementario* de \mathcal{H} , y lo denotamos por \mathcal{H}^c , como el hipergrafo cuyo conjunto de aristas es $\{E \subseteq \mathcal{X} \mid |E| = d \text{ y } E \notin \mathcal{H}\}$.

Generalizando término a término el Teorema de Fröberg, cabría esperar que en el caso de un hipergrafo \mathcal{H} propiamente conexo se verificara que $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ tiene una resolución lineal si y solo si \mathcal{H}^c es un hipergrafo triangulado. Sin embargo, vamos a mostrar a continuación un ejemplo que ilustra que el resultado anterior no es cierto porque \mathcal{H}^c puede incluso no ser propiamente conexo.

Ejemplo 3.2.34. Consideramos el conjunto de vértices $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y el hipergrafo $\mathcal{H} = \mathcal{K}_5^3 \setminus \{x_1x_2x_3, x_3x_4x_5\}$; es decir, \mathcal{H} es el hipergrafo 3-completo de orden 5 al que le hemos quitado dos aristas.

En este caso se tiene que el hipergrafo \mathcal{H}^c , cuyo conjunto de aristas es precisamente $\{x_1x_2x_3, x_3x_4x_5\}$, no es propiamente conexo porque sus dos aristas comparten el vértice x_3 y sin embargo no existe ninguna cadena propia irredundante entre ellas de longitud $2 = 3 - 1$. El hecho de que \mathcal{H}^c no sea propiamente conexo hace que ni siquiera podamos plantearnos si es triangulado, concepto que se definía únicamente para hipergrafos propiamente conexos.

Sin embargo, utilizando por ejemplo *Macaulay2* de la forma en que se expone en el Apéndice A, es posible comprobar que la resolución de $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ es lineal.

Queda claro de esta manera que no es posible llevar a cabo una generalización término a término del Teorema de Fröberg, de manera que en lugar de caracterizar cuándo el ideal de aristas de un hipergrafo propiamente conexo tiene una resolución lineal vamos a intentar caracterizar cuándo dicho ideal tiene primeras sizigias lineales. Para ello, comenzamos introduciendo el siguiente concepto:

Definición 3.2.35. El *diámetro* de un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo \mathcal{H} se define como $\text{diam}(\mathcal{H}) = \max\{\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \mid E, H \in \mathcal{H}\}$, donde el diámetro es infinito si existen dos aristas que no estén conectadas por ninguna cadena propia.

El siguiente teorema nos va a proporcionar una caracterización de los ideales de aristas que tienen primeras sizigias lineales, y lo hará en términos del diámetro del hipergrafo asociado.

Teorema 3.2.36. *Sea \mathcal{H} un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo. Se verifica que $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ tiene primeras sizigias lineales si y solo si $\text{diam}(\mathcal{H}) \leq d$.*

Demostración. Para probar la equivalencia del enunciado, demostraremos por separado cada implicación.

\Leftarrow Supongamos en primer lugar que $\text{diam}(\mathcal{H}) \leq d$. Gracias a la resolución de Taylor, es conocido que el primer módulo de sizigias de $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ está generado por las sizigias $S(x^E, x^H)$, con E y H aristas de \mathcal{H} , que se obtienen a partir de los S -polinomios correspondientes.

Para probar esta implicación, bastará entonces con demostrar que $S(x^E, x^H)$ está generada por sizigias lineales.

Sea $t = \text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H)$. Como $\text{diam}(\mathcal{H}) \leq d$, tenemos también que $t \leq d$. Gracias al Lema 3.2.18, podemos considerar una cadena propia irredundante ($E =$

$E_0, \dots, E_t = H$) tal que, si $E = E_0 = \{z_1, \dots, z_d\}$, entonces $E_i = \{y_1, \dots, y_i, z_{i+1}, \dots, z_d\}$ para todo $i \in \{1, \dots, t\}$, donde $y_i \notin E_j$ para $j < i$.

Gracias a la forma de la cadena anterior, es claro que la sizigia $S(x^E, x^H)$ se obtiene a partir de la igualdad $y_1 \dots y_t x^{E_0} - z_1 \dots z_t x^{E_t} = 0$. Además, es fácil observar que la diferencia anterior se puede escribir como una suma telescópica de la forma

$$y_1 \dots y_t x^{E_0} - z_1 \dots z_t x^{E_t} = \sum_{k=0}^{t-1} \left(\prod_{i=1}^k z_i \prod_{j=k+2}^t y_j \right) (y_{k+1} x^{E_k} - z_{k+1} x^{E_{k+1}}),$$

donde en el miembro derecho de la igualdad aparecen expresiones correspondientes a sizigias lineales. Deducimos a partir de aquí que $S(x^E, x^H)$ está generada por sizigias lineales, lo que concluye la prueba de la primera implicación.

\Rightarrow Supongamos ahora que $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ tiene primeras sizigias lineales; es decir, $\beta_{1,j}(\mathcal{I}(\mathcal{H})) = 0$ si $j \neq d+1$.

Razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que $\text{diam}(\mathcal{H}) \geq d+1$. En ese caso, existirían al menos dos aristas E y H tales que $\text{dist}_{\mathcal{H}}(E, H) \geq d+1$. Por lo tanto, el conjunto $\{E, H\}$ sería un conjunto de dos aristas $(d+1)$ -disjuntas de \mathcal{H} y el Teorema 3.2.31 implicaría que $\beta_{1,2d}(\mathcal{I}(\mathcal{H})) \neq 0$, lo cual va en contra de la suposición de que $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ tiene primeras sizigias lineales porque $d \geq 2$ y por tanto $d+1 \neq 2d$.

Queda probada la doble implicación y, en consecuencia, el teorema. \square

La condición $\text{diam}(\mathcal{H}) \leq d$ que aparece en el teorema anterior solo garantiza la linealidad de las primeras sizigias, tal y como podemos observar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.37. Si consideramos el grafo $G = C_5$, el ciclo de 5 vértices, entonces es claro que $\text{diam}(G) = 2$. Sin embargo, es posible comprobar haciendo los cálculos oportunos que $\beta_{2,5}(\mathcal{I}(G)) = 1 \neq 0$, lo que implica que las segundas sizigias del ideal de aristas asociado a G no son lineales.

Para terminar este capítulo, vamos a ver que en el caso en el que \mathcal{H} es un hipergrafo triangulado, saber que las primeras sizigias del ideal de aristas asociado son lineales es suficiente para saber que la resolución completa del ideal es lineal. Así, podemos obtener en este caso una caracterización para los ideales de aristas con resolución lineal en términos de los hipergrafos asociados. Obtenemos de esta manera un resultado cuya idea es la misma que la idea subyacente en el Teorema de Fröberg: caracterizar los ideales de aristas con resolución lineal.

Corolario 3.2.38. *Sea \mathcal{H} un hipergrafo d -uniforme propiamente conexo y triangulado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ tiene una resolución lineal.
- (b) $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ tiene primeras sizigias lineales.

(c) $\text{diam}(\mathcal{H}) \leq d$.

Demostración. La implicación $(a) \Rightarrow (b)$ es trivial, y la implicación $(b) \Rightarrow (c)$ se deduce del Teorema 3.2.36. Por lo tanto, solo nos falta demostrar que $(c) \Rightarrow (a)$.

Para ello, supongamos que $\text{diam}(\mathcal{H}) \leq d$. Esto implica que no pueden existir en \mathcal{H} dos o más aristas $(d + 1)$ -disjuntas dos a dos, ya que en ese caso el diámetro de \mathcal{H} sería estrictamente mayor que d . En consecuencia, el cardinal del mayor conjunto de aristas $(d + 1)$ -disjuntas dos a dos en \mathcal{H} es 1 y del Corolario 3.2.32 deducimos que $\text{reg}(\mathcal{I}(\mathcal{H})) = d - 1 + 1 = d$. Como $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ está generado por elementos de grado d , un simple vistazo a su diagrama de Betti (en el que la regularidad corresponde al número que actúa como etiqueta de la última fila del diagrama) nos permite concluir que dicho diagrama va a tener una única fila y, por tanto, el ideal tiene una resolución lineal. \square

Si volvemos al caso de grafos simples, con cuyo estudio comenzábamos el desarrollo de este trabajo, el corolario anterior se traduce en el siguiente resultado, con el que concluimos el desarrollo teórico de este capítulo:

Corolario 3.2.39. *Sea G un grafo cordal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

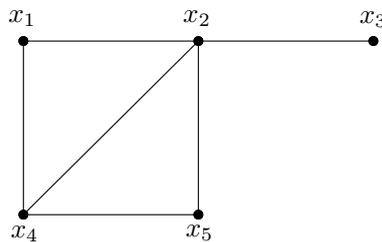
(a) $\mathcal{I}(G)$ tiene una resolución lineal.

(b) $\mathcal{I}(G)$ tiene primeras sizigias lineales.

(c) $\text{diam}(G) \leq 2$.

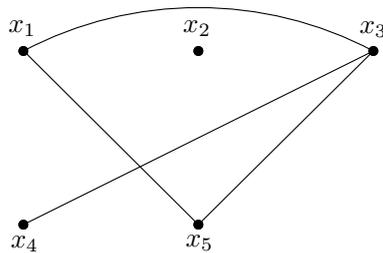
Supongamos ahora que tenemos un grafo cordal G tal que $\mathcal{I}(G)$ tiene una resolución lineal. Aplicando el Teorema de Fröberg que habíamos estudiado en el capítulo anterior, se tiene también que G^c es cordal. En consecuencia, en este caso tenemos que tanto G como G^c son grafos cordales; es decir, ninguno de los dos tiene ciclos minimales. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.2.40. Consideramos el grafo G siguiente:



Es claro que este grafo es cordal porque no tiene ciclos minimales: el único ciclo de longitud mayor o igual que 4 es $C = (x_1x_2x_5x_4x_1)$ y tiene una cuerda, que es la arista x_2x_4 . Además, si calculamos las distancias entre todas las aristas, es claro que el mayor de estos valores es 2, que corresponde por ejemplo a la distancia entre las aristas x_1x_4 y x_2x_3 . Por tanto, $\text{diam}(G) = 2$ y aplicando el Corolario 3.2.39 obtenemos que $\mathcal{I}(G)$ tiene una resolución lineal. En virtud del Teorema de Fröberg se tendrá entonces, tal y como hemos comentado en el párrafo previo a este ejemplo, que G^c también es cordal.

Concluimos este ejemplo representando G^c , que efectivamente no tiene ciclos minimales porque su único ciclo es $D = (x_1x_3x_5x_1)$ y tiene longitud 3.



Capítulo 4

Líneas de investigación relacionadas

Para terminar, vamos a dedicar el último capítulo a comentar brevemente algunas de las líneas de investigación relacionadas con el tema de este trabajo que se encuentran abiertas en la actualidad, dentro de las cuales existe además una gran actividad.

En primer lugar, en el Capítulo 2 hemos visto un resultado (el Corolario 2.3.11) que mejora el Teorema de Fröberg 2.3.14 en el sentido de que precisa en qué paso la resolución del ideal de aristas de un grafo G deja de ser lineal cuando G^c no es cordal. Óscar Fernández Ramos y Philippe Gimenez fueron más allá en un artículo publicado en 2009 ([9]), que figura también en la tesis del primer autor ([8]), y mejoraron este resultado, determinando cuál es el primer número no nulo fuera de la primera fila del diagrama de Betti de $\mathcal{I}(G)$ cuando este no tiene una resolución lineal. En particular, demostraron que este número corresponde a $\beta_{r-3,r}(\mathcal{I}(G))$ (donde r es la menor longitud de los ciclos minimales en G^c) y es igual al número de ciclos minimales en G^c de longitud r .

Antes de comentar otro resultado interesante introducido por los dos autores anteriores, necesitamos definir el *complementario bipartito* de un grafo bipartito G cuyo conjunto de vértices se divide en dos conjuntos disjuntos A y B y cuyas aristas están formadas exactamente por un elemento de A y otro de B . Así, su complementario bipartito G^{bc} es el grafo bipartito que tiene los mismos vértices que G y cuyas aristas son $\{xy \mid x \in A, y \in B, xy \notin E_G\}$.

Utilizando esta definición, Óscar Fernández Ramos y Philippe Gimenez caracterizaron en [10] los grafos bipartitos conexos cuyo ideal de aristas tiene regularidad 3 como aquellos tales que G^c tiene al menos un ciclo minimal (de longitud mayor o igual que 4) y G^{bc} no tiene ningún ciclo minimal de longitud mayor o igual que 6. Además, en el caso en que la regularidad de $\mathcal{I}(G)$ es mayor que 3 (y por tanto el diagrama de Betti de $\mathcal{I}(G)$ tiene más de dos filas), los autores determinaron que el primer número no nulo fuera de las dos primeras filas del diagrama de Betti corresponde a $\beta_{t-4,t}(\mathcal{I}(G))$ (donde t es la menor longitud de los ciclos minimales en G^{bc}) y es igual al número de ciclos minimales en G^{bc} de longitud t .

Aunque todos estos resultados han sido demostrados utilizando herramientas distintas de las que hemos presentado en este trabajo, cabe esperar que la técnica de escisión de ideales sea aplicable también a este estudio.

A pesar de que en este trabajo nos hemos centrado en el estudio de ideales monomiales, Giuseppe Favacchio, Johannes Hofscheier, Graham Keiper y Adam Van Tuyl publicaron en 2021 un artículo ([7]) en el que aplicaron la técnica de la escisión de ideales al estudio de los ideales tóricos, que son ideales binomiales (es decir, generados por binomios, que son diferencias de monomios) y primos.

Por otra parte, aunque en este trabajo hemos utilizado la escisión de ideales tal y como la definieron originalmente Shalom Eliahou y Michel Kervaire en [5], en ocasiones puede ser difícil construir una función de escisión o incluso determinar si tal función existe. En el mencionado artículo, los autores pusieron un ejemplo de un ideal que no es escindible pero para el cual existen varias formas de separar sus generadores minimales y formar ideales J y K más pequeños que verifican la fórmula del Teorema 2.1.4. Se trata del ideal $I = (x_1x_2x_3, x_1x_3x_5, x_1x_4x_5, x_2x_3x_4, x_2x_4x_5) \subseteq k[x_1, \dots, x_5]$, con k un cuerpo arbitrario.

Este ejemplo, junto con la relevancia que dicha fórmula ha demostrado tener en nuestro estudio, condujo a Christopher A. Francisco, Huy Tài Hà y Adam Van Tuyl a definir en [11] un tipo nuevo de escisión:

Definición. Sean I , J y K ideales monomiales tales que $\mathcal{G}(I)$ es la unión disjunta de $\mathcal{G}(J)$ y $\mathcal{G}(K)$. Entonces $I = J + K$ es una *escisión de Betti* de I si

$$\beta_{i,j}(I) = \beta_{i,j}(J) + \beta_{i,j}(K) + \beta_{i-1,j}(J \cap K)$$

para todos $i, j \geq 0$.

Este tipo de escisiones tienen una serie de propiedades que también han permitido obtener nuevos resultados sobre los ideales de aristas asociados a grafos.

Aunque lo que expongo en este capítulo se corresponde con las líneas de investigación que a mí personalmente me han parecido más interesantes y más cercanas al desarrollo de este trabajo, existen otras muchas que también están abiertas en la actualidad. Por ejemplo, el estudio de la dependencia de los números de Betti con respecto al cuerpo base sobre el que estemos trabajando; o la búsqueda de una forma adecuada para generalizar el concepto de vértice de escisión de un grafo al caso de un hipergrafo \mathcal{H} , donde se ha probado que un vértice v no aislado y tal que $\mathcal{I}(\mathcal{H} \setminus \{v\}) \neq (0)$ no proporciona necesariamente una escisión del ideal de aristas asociado al hipergrafo. Algunas de estas y otras líneas de investigación que permanecen activas en la actualidad se pueden encontrar en [15], donde Huy Tài Hà y Adam Van Tuyl las han recopilado.

Apéndice A

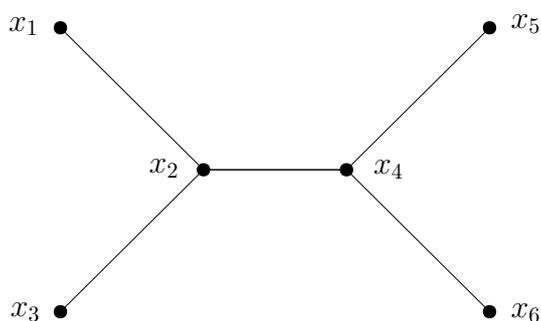
Implementación en *Macaulay2*

El objetivo de este apéndice consiste en ilustrar de forma elemental cómo *Macaulay2* ([14]), que es un sistema de software diseñado para contribuir a la investigación en geometría algebraica y álgebra conmutativa, puede resultar útil en nuestro estudio de los ideales de aristas asociados a grafos e hipergrafos. En particular, nos vamos a centrar en el estudio del paquete `EdgeIdeals` ([12]), que fue escrito por Christopher A. Francisco, Andrew Hoefel y Adam Van Tuyl, y que contiene una serie de funciones que permiten trabajar de forma cómoda con los ideales de aristas a los que hemos dedicado este trabajo. Una de las principales referencias para la redacción de este apéndice es [22].

El paquete `EdgeIdeals` permite trabajar con ideales de aristas asociados a hipergrafos. Sin embargo, para no extendernos demasiado, en este apéndice nos vamos a restringir a ilustrar el manejo de los ideales de aristas asociados a grafos mediante un ejemplo.

Después de instalar y cargar el paquete `EdgeIdeals` con el que vamos a trabajar, lo primero que tenemos que hacer es aprender a definir un grafo en *Macaulay2*. Existen dos posibles formas de hacer esto, y vamos a presentar las dos a continuación.

La primera forma consiste en definir un anillo de polinomios, cuyas variables serán tomadas como los vértices de nuestro grafo, y representar las aristas a través de una lista. Por ejemplo, vamos a considerar el mismo grafo que en el Ejemplo 2.2.5 del Capítulo 2:



El anillo de polinomios que vamos a definir en este caso es $R = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6]$, y el conjunto de aristas de nuestro grafo es $E = \{x_1x_2, x_2x_3, x_2x_4, x_4x_5, x_4x_6\}$. La forma de definir un grafo a partir de estos datos en *Macaulay2* se recoge en el siguiente recuadro y consiste en introducir los siguientes comandos:

```
R=QQ[x_1..x_6]
E={{x_1,x_2},{x_2,x_3},{x_2,x_4},{x_4,x_5},{x_4,x_6}}
G=graph(R,E)
```

A partir de esto, *Macaulay2* almacena el grafo que acabamos de definir, mostrando por pantalla lo siguiente:

```
Graph{edges => {{x_1,x_2},{x_2,x_3},{x_2,x_4},{x_4,x_5},{x_4,x_6}},
      ring => R,
      vertices => {x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6}}
```

Otra forma de definir el mismo grafo consiste en representar sus aristas como generadores de un ideal monomial cuadrático libre de cuadrados y utilizar este ideal para definir el grafo, que tendrá como vértices las distintas variables que aparezcan entre los generadores del ideal. Lo vemos en el siguiente recuadro:

```
e=monomialIdeal(x_1*x_2,x_2*x_3,x_2*x_4,x_4*x_5,x_4*x_6)
H=graph e
```

Para *Macaulay2*, los dos grafos G y H que acabamos de definir son el mismo: basta escribir $G==H$ en la línea de comandos y ver cómo el programa devuelve el valor `true`.

Ahora que ya sabemos definir grafos, podemos pedir a *Macaulay2* que nos devuelva el ideal de aristas asociado a un grafo. Esto se hace de la siguiente manera:

```
i=edgeIdeal G
```

El ideal que *Macaulay2* nos devuelve al ejecutar este comando es efectivamente el ideal de aristas de nuestro grafo G . Lo que nos muestra por pantalla es lo siguiente:

```
monomialIdeal(x_1*x_2,x_2*x_3,x_2*x_4,x_4*x_5,x_4*x_6)
```

Veamos ahora cómo calcular los diagramas de Betti que aparecían en el Ejemplo 2.2.11. Si empezamos con el ideal de aristas asociado al grafo de partida, el siguiente comando nos proporciona directamente su diagrama de Betti:

```
minimalBetti i
```

No obstante, el diagrama que *Macaulay2* nos proporciona no se ajusta exactamente a la forma en la que solemos representarlo, sino que en la i -ésima columna y en la j -ésima fila contiene al elemento $\beta_{i-1,i+j}(\mathcal{I}(G))$. Este diagrama es el siguiente:

$\mathcal{I}(G)$	0	1	2	3
0	1	-	-	-
1	-	5	6	2

A partir de este diagrama es posible calcular la dimensión proyectiva y la regularidad del ideal de aristas de nuestro grafo, aunque también existen comandos específicos para ello y son los siguientes: si i sigue siendo nuestro ideal de aristas, `regularity i` nos devuelve la regularidad de i y `pdim (module i)` nos devuelve su dimensión proyectiva, viendo i como un R -módulo.

En el Ejemplo 2.2.11, calculábamos también el diagrama de Betti del grafo $G \setminus e$, donde e era la arista x_2x_4 . El procedimiento para ello es el mismo que acabamos de presentar para G , pero en lugar de construir el grafo nuevamente desde el principio, ahora podemos utilizar una función que permite eliminar aristas de un grafo dado. Esta función, que se llama `deleteEdges`, toma como valores de entrada un grafo G y una lista E que consiste en el conjunto de aristas que deseamos eliminar, y devuelve el grafo que resulta de eliminar en G las aristas del conjunto E . Basta introducir lo siguiente en la línea de comandos para eliminar la arista e de nuestro grafo G original:

```
E={{x_2, x_4}}
deleteEdges(G,E)
```

Aunque el paquete `EdgeIdeals` tiene un gran número de funciones interesantes, muchas de ellas corresponden a conceptos que no han aparecido en este trabajo. Por este motivo, voy a terminar este apéndice comentando solamente dos funciones más.

La siguiente función que me gustaría presentar es `inducedGraph`, que toma como argumentos un grafo G y un subconjunto P del conjunto de vértices de G , y devuelve el subgrafo inducido de G sobre los vértices de P . Para conseguir esto, basta introducir `inducedGraph(G,P)` en la línea de comandos.

Por último, vamos a hablar de una función que es muy útil en la investigación porque permite formular conjeturas gracias a la posibilidad de comprobar un gran número de ejemplos de forma rápida. Se trata de la función `randomGraph`, que permite generar un grafo aleatorio con un número previamente fijado de vértices y de aristas. Esta función recibe como argumentos un anillo de polinomios y un número entero. Las variables del anillo de polinomios serán los vértices del grafo generado, mientras que el número entero indica el número de aristas que deseamos que tenga el grafo que se va a generar aleatoriamente.

Bibliografía

- [1] S. ASENSIO, *Sobre la conjetura de la sensibilidad y su resolución vía teoría de grafos*, Trabajo de fin de grado, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid, <https://uvadoc.uva.es/handle/10324/57957>, 2022.
- [2] S. ASENSIO, *La conjetura de la sensibilidad y su resolución vía teoría de grafos*, La Gaceta de la RSME **26** (1), pp. 131-148, 2023.
- [3] G. A. DIRAC, *On rigid circuit graphs*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **25**, pp. 71-76, 1961.
- [4] D. EISENBUD, M. GREEN, K. HULEK Y S. POPESCU, *Restricting linear syzygies: algebra and geometry*, Compositio Mathematica **141** (6), pp. 1460-1478, 2004.
- [5] S. ELIAHOU Y M. KERVAIRE, *Minimal resolutions of some monomial ideals*, Journal of Algebra **129**, pp. 1-25, 1990.
- [6] S. FARIDI, *The facet ideal of a simplicial complex*, Manuscripta Mathematica **109**, pp. 159-174, 2002.
- [7] G. FAVACCHIO, J. HOFSCHEIER, G. KEIPER Y A. VAN TUYL, *Splittings of toric ideals*, Journal of Algebra **574**, pp. 409-433, 2021.
- [8] Ó. FERNÁNDEZ-RAMOS, *Graded Betti numbers of edge ideals*, PhD thesis, Universidad de Valladolid, <https://uvadoc.uva.es/handle/10324/1769>, 2012.
- [9] Ó. FERNÁNDEZ-RAMOS Y P. GIMENEZ, *First nonlinear syzygies of ideals associated to graphs*, Communications in Algebra **37** (6), pp. 1921-1933, 2009.
- [10] Ó. FERNÁNDEZ-RAMOS Y P. GIMENEZ, *Regularity 3 in edge ideals associated to bipartite graphs*, Journal of Algebraic Combinatorics **39** (4), pp. 919-937, 2014.
- [11] C. A. FRANCISCO, H. T. HÀ Y A. VAN TUYL, *Splittings of monomial ideals*, Proceedings of the American Mathematical Society **137** (10), pp. 3271-3282, 2009.
- [12] C. A. FRANCISCO, A. HOEFEL Y A. VAN TUYL, *EdgeIdeals: A package for (hyper)graphs*, The Journal of Software for Algebra and Geometry **1**, pp. 1-4, 2009.
- [13] R. FRÖBERG, *On Stanley-Reisner rings*, Topics in Algebra, Banach Center Publications **26** (2), pp. 57-50, 1990.

- [14] D. R. GRAYSON Y M. E. STILLMAN, Macaulay2, un sistema de software para la investigación en geometría algebraica. Disponible en <https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/>.
- [15] H. T. HÀ Y A. VAN TUYL, *Resolutions of square-free monomial ideals via facet ideals: a survey*, Algebra, geometry and their interactions, Contemporary Mathematics **448**, pp.91-117, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2007.
- [16] H. T. HÀ Y A. VAN TUYL, *Splittable ideals and the resolutions of monomial ideals*, Journal of Algebra **309**, pp. 405-425, 2007.
- [17] H. T. HÀ Y A. VAN TUYL, *Monomial ideals, edge ideals of hypergraphs, and their graded Betti numbers*, Journal of Algebraic Combinatorics **27**, pp. 215-245, 2008.
- [18] S. JACQUES, *Betti numbers of graph ideals*, PhD thesis, University of Sheffield, <https://arxiv.org/abs/math/0410107>, 2004.
- [19] S. JACQUES Y M. KATZMAN, *The Betti numbers of forests*, <https://arxiv.org/abs/math/0501226>, 2005.
- [20] E. MILLER Y B. STURMFELS, *Combinatorial commutative algebra*, Graduate texts in Mathematics **227**, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [21] M. V. PINTO Y R. H. VILLARREAL, *Graph rings and ideals: Wolmer Vasconcelos contributions*, <https://arxiv.org/abs/2305.06270>, 2023.
- [22] A. VAN TUYL, *Edge Ideals Using Macaulay2*. En: Monomial ideals, computations and applications (A. Bigatti, P. Gimenez, E. Sáenz-de-Cabezón Eds.), Lecture Notes in Mathematics **2083**, pp. 95-105, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [23] R. H. VILLARREAL, *Cohen-Macaulay graphs*, Manuscripta Mathematica **66** (3), pp. 277-293, 1990.
- [24] A. SIMIS, W. V. VASCONCELOS Y R. H. VILLARREAL, *On the ideal theory of graphs*, Journal of Algebra **167** (2), pp. 389-416, 1994.
- [25] X. ZHENG, *Resolutions of facet ideals*, Communications in Algebra **32** (6), pp. 2301-2324, 2004.