Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Matemáticas

El problema de Riemann-Hilbert

Autor: Mario García Mayo
Tutor: Jorge Mozo Fernández
2023

Índice general

Introducción

En el año 1900, el matemático alemán D. Hilbert presentó en el Congreso Internacional de Matemáticos de París una lista con veintitrés de los problemas más importantes del siglo XX que aún estaban sin resolver, los llamados problemas de Hilbert.

Entre ellos, el problema número veintiuno era el siguiente: *demostrar que existe un sistema fuchsiano con singularidades y monodromía prefijadas.* El problema adquiriría el nombre de *problema de Riemann-Hilbert* cuando se vio que B. Riemann había investigado problemas similares anteriormente.

En 1908, J. Plemelj supuestamente resolvió este problema, obteniendo una respuesta afirmativa. Sin embargo, más de setenta años después se descubrió un fallo en su demostración. La solución que había obtenido Plemelj era al problema de encontrar un sistema *regular* con singularidades y monodromía prefijadas. Los sistemas regulares y los fuchsianos guardan cierta relación entre ellos, y de hecho los sistemas fuchsianos resultan ser también regulares, pero no son conceptos equivalentes.

Sería en 1989 cuando A. A. Bolibruch encontró una monodromía que no podía pertenecer a ningún sistema fuchsiano, obteniendo así una respuesta negativa para el problema.

El objetivo de este trabajo será estudiar el problema de Riemann-Hilbert y el contraejemplo de Bolibruch, haciendo previamente una introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias complejas y desarrollando toda la teoría necesaria para entenderlo. Esta, además de nociones de variable compleja y ecuaciones diferenciales, incluirá también conceptos propios de la topología algebraica, la teoría de grupos y la geometría diferencial.

Capítulo 1

Prolongación analítica

En este primer capítulo estudiaremos el problema de extender una función analítica a un dominio más amplio de su dominio de definición original y veremos como extender funciones definidas en un disco a través de curvas que no estén contenidas en él. El resultado principal que demostraremos, el teorema de monodromía, nos dará condiciones para ver cuándo las prolongaciones de funciones a través de distintas curvas coiniciden. La referencia principal de este capítulo será [12].

1.1. Prolongación a lo largo de curvas

Definición 1.1. Un *elemento de función* es un par ordenado (f, D) donde D es un disco abierto de $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en D. Dos elementos de función (f_0, D_0) y (f_1, D_1) se dice que son *prolongación analítica* uno del otro si $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ y $f_0(z) = f_1(z)$ para todo $z \in D_0 \cap D_1$. En este caso escribiremos $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$.

Definición 1.2. Una *cadena* es una sucesión finita de discos $\mathcal{C} = \{D_0, \ldots, D_n\}$ tal que $D_{i-1} \cap D_i \neq \emptyset$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Si dados una cadena $\mathcal{C} = \{D_0, \ldots, D_n\}$ y un elemento de función (f_0, D_0) existen elementos de función $(f_1, D_1), \ldots (f_n, D_n)$ tales que $(f_{i-1}, D_{i-1}) \sim (f_i, D_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$, se dice que (f_n, D_n) es *prolongación analítica de* (f_0, D_0) *a través de* $\mathcal{C}$.

Observación 1.3. De la definición anterior se pueden deducir fácilmente dos propiedades interesantes:

I) Dados $\mathcal{C} = \{D_0, \ldots, D_n\}$ y (f_0, D_0) existe a lo sumo una única prolongación analítica a través de $\mathcal{C}$: si tuviesemos $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$ y $(f_0, D_0) \sim (g_1, D_1)$, entonces

$$f_1(z) = f_0(z) = g_1(z) \ \ \forall z \in D_0 \cap D_1,$$

y al ser D_1 un conjunto conexo por el principio de identidad (B.1) se tiene que $f_1 = g_1$ en D_1. Aplicando el mismo razonamiento por inducción se llega a la unicidad de f_n.

II) Si $\mathcal{C} = \{D_0, \ldots, D_n\}$ es una cadena tal que $D_0 \cap D_n \neq \emptyset$ y (f_n, D_n) la prolongación analítica de (f_0, D_0) a través de $\mathcal{C}$, en general no es cierto que $(f_0, D_0) \sim (f_n, D_0)$. Por ejemplo, si D_0, D_1 y D_2 son los discos de radio 1 centrados en los puntos 1, ω y ω^2, donde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ $(\omega^3 = 1)$, y consideramos las funciones

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg(z)}{2}}, \quad \arg(z) \in [-\pi, \pi), \\ f_1(z) &= \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg(z)}{2}}, \quad \arg(z) \in \Big[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\Big), \\ f_2(z) &= \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg(z)}{2}}, \quad \arg(z) \in \Big[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\Big), \end{aligned}$$

analíticas en D_0, D_1 y D_2, se tiene que $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$, $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$ y $D_0 \cap D_2 \neq \emptyset$, pero $f_0 \neq f_2$ en $D_0 \cap D_2$: si $z \in D_0 \cap D_2$, al calcular $f_0(z)$ tomaremos $\arg(z)$ en $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}) \subset [-\pi, \pi)$ y al calcular $f_2(z)$ en $(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}) \subset [\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3})$, luego

$$f_2(z) = f_0(z)e^{i\pi} = -f_0(z).$$

Definición 1.4. Sean $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva continua y $\mathcal{C} = \{D_0, \ldots, D_n\}$ una cadena. Se dice que $\mathcal{C}$ *recubre* γ si existen números $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$ tales que $\gamma(0)$ es el centro de D_0, $\gamma(1)$ el centro de D_n y $\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset D_i$ para cada $i = 0, \ldots, n-1$. Si un elemento de función (f_0, D_0) puede ser prolongado a través de esta cadena $\mathcal{C}$ a (f_n, D_n), se dice que (f_n, D_n) es una *prolongación analítica de* (f_0, D_0) *a través de* γ.

La prolongación analítica de un elemento de función a través de una curva a priori no parece que tenga por qué ser única, ya que aunque sí que lo sea a través de cadenas podría haber más de una cadena que recubriese la curva. Probaremos a continuación que en verdad sí que lo es, haciendo uso de una especie de transitividad de $\sim$ bajo hipótesis más restrictivas.

Proposición 1.5. Sean (f_0, D_0), (f_1, D_1) y (f_2, D_2) tres elementos de función tales que $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$, $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$ y $D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Entonces $(f_0, D_0) \sim (f_2, D_2)$.

Demostración. Como $f_0 = f_1$ en $D_0 \cap D_1$ y $f_1 = f_2$ en $D_1 \cap D_2$ se tiene que $f_0 = f_2$ en $D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Al ser $D_0 \cap D_2$ un conjunto conexo, por el principio de identidad (B.1) se tiene que $f_0 = f_2$ en $D_0 \cap D_2$. $\square$

De aquí en adelante, cuando hablemos de curvas supondremos que son continuas, toman parámetros en el intervalo $[0, 1]$ y tienen llegada en $\mathbb{C}$ a no ser que se especifique lo contrario.

Teorema 1.6. Sean (f, D) un elemento de función y γ una curva tal que $\gamma(0)$ es el centro de D. Entonces existe una única prolongación analítica de (f, D) a través de γ.

Demostración. Sean $\mathcal{C}_1 = \{A_0, \ldots, A_m\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{B_0, \ldots, B_n\}$ dos cadenas que recubren γ y a través de las cuales se puede prolongar analíticamente (f, D). Por definición, existen números

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1,$$
$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_n = 1,$$

tales que

$$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i, \;\; \gamma([\sigma_j, \sigma_{j+1}]) \subset B_j \quad \forall i = 0, \ldots, m-1, j = 0, \ldots, n-1,$$

y elementos de función

$$(g_i, A_i) \sim (g_{i+1}, A_{i+1}), \;\; (h_j, B_j) \sim (h_{j+1}, B_{j+1}),$$

para cada $i = 0, \ldots, m-1$, $j = 0, \ldots, n-1$, donde $A_0 = B_0 = D$ y $g_0 = h_0 = f$. Vamos a ver que si $0 \leq i \leq m-1$ y $0 \leq j \leq n-1$, y si $[s_i, s_{i+1}]$ tiene intersección no vacía con $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, entonces $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$.
Supongamos que esto no es cierto, es decir, que existen pares (i, j) para los que la hipótesis no se cumple. Entre estos pares, escogemos el par que haga que $i + j$ sea minimal. Supongamos que $s_i \geq \sigma_j$ (en caso contrario se razonaría de forma similar). Entonces $i \geq 1$, y como $[s_i, s_{i+1}]$ corta a $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$ se tiene que

$$\gamma(s_i) \in A_{i-1} \cap A_i \cap B_j.$$

Al ser $i + j$ minimal se tiene que $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (h_j, B_j)$, y como $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (g_i, A_i)$ la proposición 1.5 implica que $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$, contradiciendo la suposición.
Como $1 \in [s_{m-1}, s_m] \cap [\sigma_{n-1}, \sigma_n]$, se tiene que $(g_{m-1}, A_{m-1}) \sim (h_{n-1}, B_{n-1})$. Además, $(g_{m-1}, A_{m-1}) \sim (g_m, A_m)$, $(h_{n-1}, B_{n-1}) \sim (h_n, B_n)$ y

$$\gamma(1) \in A_{m-1} \cap A_m \cap B_{n-1} \cap B_n.$$

Entonces, por la proposición 1.5 se tiene que $(g_m, A_m) \sim (h_n, B_n)$ y por tanto $g_m = h_n$ en $A_m \cap B_n$. Como ambos discos A_m y B_n están centrados en $\gamma(1)$, las expansiones en potencias de $z - \gamma(1)$ de g_m y de h_n tienen que ser las mismas y podemos concluir que $g_m = h_n$ en el disco más grande de los dos. □

Observación 1.7. La prolongación analítica de un elemento de función a través de dos curvas con los mismos extremos no tiene por qué ser la misma. Por ejemplo, consideramos las dos semicircunferencias de radio 1 que van de 1 a -1

$$\gamma_1(t) = \cos(\pi t) + i\sin(\pi t), \quad \gamma_2(t) = \cos(\pi t) - i\sin(\pi t),$$

y los discos $A_0 = B_0 = D$, A_1, B_1 y $A_2 = B_2$ que se muestran a continuación:

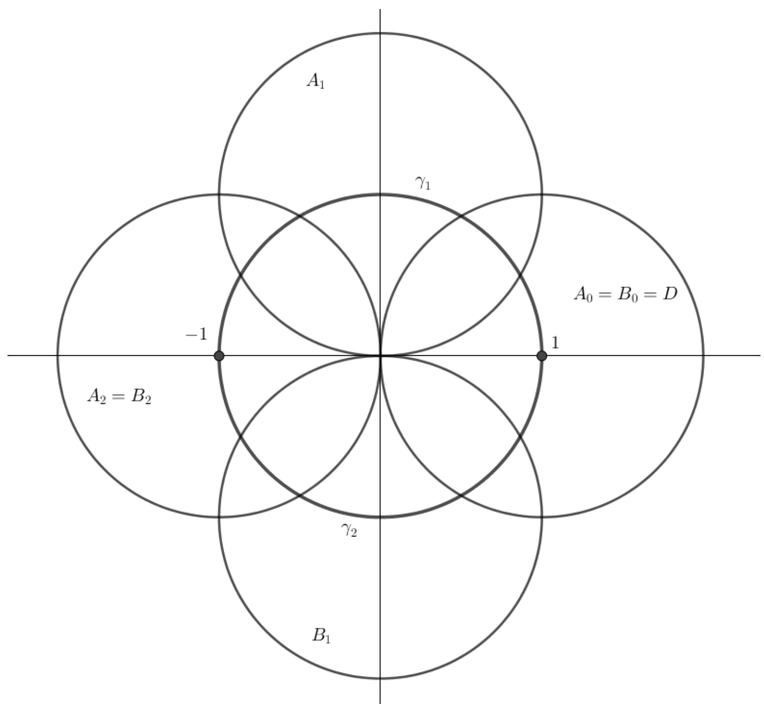

Figura 1.1: Curvas con extremos iguales que dan prolongaciones distintas.

Si definimos las funciones g_i en A_i y h_i en B_i $(i = 0, 1, 2)$ mediante

$$f(z) = g_0(z) = h_0(z) = \log(|z|) + i\arg(z), \quad \arg(z) \in [-\pi, \pi),$$
$$g_1(z) = g_2(z) = \log(|z|) + i\arg(z), \quad \arg(z) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}),$$
$$h_1(z) = h_2(z) = \log(|z|) + i\arg(z), \quad \arg(z) \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$$

entonces $\mathcal{C}_1 = \{A_0, A_1, A_2\}$ recubre γ_1, $\mathcal{C}_2 = \{B_0, B_1, B_2\}$ recubre γ_2 y $(g_i, A_i) \sim (g_{i+1}, A_{i+1})$, $(h_i, B_i) \sim (h_{i+1}, B_{i+1})$ para $i = 0, 1$, pero $g_2(z) \neq h_2(z)$ en $A_2 = B_2$.
De un modo similar, ultilizando distintas ramas del logaritmo y la circunferencia completa se puede ver que la prolongación analítica de una función a través de una curva cerrada no tiene por qué coincidir con la propia función (esto también se podía intuir tras ver la observación 1.3, II). Este hecho nos será de gran importancia más adelante.

1.2. El teorema de monodromía

Definición 1.8. Sean α, β puntos de $\mathbb{C}$, $I = [0, 1]$ y φ una aplicación continua de $I^2 = I \times I$ en $\mathbb{C}$ tal que $\varphi(0, t) = \alpha$ y $\varphi(1, t) = \beta$ para todo $t \in I$. Las curvas γ_t definidas por

$$\gamma_t(s) = \varphi(t, s) \quad t \in I, s \in I,$$

se dice que forman una *familia uniparamétrica de curvas* $\{\gamma_t\}_{t \in I}$ *de* α *a* β.

Vamos ahora con una propiedad de la prolongación analítica que será fundamental para demostrar el teorema de monodromía.

Proposición 1.9. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\{\gamma_t\}$ una familia uniparamétrica de curvas de α a β, D un disco centrado en α y (f, D) un elemento de función que admite prolongación analítica a través de cada curva γ_t a un elemento (g_t, D_t). Entonces, $g_0 = g_1$.

Demostración. Fijamos $t \in I$. Sea $\mathcal{C} = \{A_0, \ldots, A_n\}$ una cadena que recubre γ_t tal que $A_0 = D$. Existen números $0 = s_0 < \ldots < s_n = 1$ tales que

$$E_i = \gamma_t([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i \quad \forall i = 0, \ldots, n-1.$$

Como cada E_i es compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que la distancia entre E_i y el complementario de A_i es menor que ε para cada $i = 0, \ldots, n-1$. Sea $\varphi : I^2 \to \mathbb{C}$ la función que define la familia uniparamétrica de curvas $\{\gamma_t\}$. Al ser φ continua en el compacto I^2, se tiene que φ es uniformemente continua en I^2 y entonces existe un $\delta > 0$ tal que para cada $s, u \in I$ con $|(s, t) - (s, u)| = |t - u| < \delta$ se tiene que

$$|\varphi(s, t) - \varphi(s, u)| = |\gamma_t(s) - \gamma_u(s)| < \varepsilon$$

Tomamos $u \in I$ que satisfaga $|t - u| < \delta$. Por la elección de ε, se tiene que la cadena $\mathcal{C}$ también recubre γ_u. Entonces, por el teorema 1.6 se tiene que g_t y g_u se obtienen mediante

prolongación analítica a través de la misma cadena $\mathcal{C}$ y por tanto $g_t = g_u$.
Se tiene así que cada $t \in I$ es el centro de un segmento J_t de longitud 2δ tal que $g_t = g_u$ para todo $u \in I \cap J_t$. Como I es compacto, se puede recubrir por una cantidad finita de J_t, y como es conexo en un número finito de etapas se puede llegar a que $g_0 = g_1$. □

Introducimos a continuación las últimas definiciones que necesitaremos antes de llegar al resultado final del capítulo.

Definición 1.10. Sean α y β puntos de un dominio (abierto conexo y no vacío) Ω de $\mathbb{C}$ y Γ_0 y Γ_1 dos curvas en Ω de α a β. Se dice que Γ_0 y Γ_1 son $\Omega-$*homótopas* si existe una familia uniparamétrica de curvas $\{\gamma_t\}$ de α en β tal que cada γ_t es una curva en Ω, $\gamma_0 = \Gamma_0$ y $\gamma_1 = \Gamma_1$.

Definición 1.11. Sean Ω un dominio de $\mathbb{C}$, $D \subset \Omega$ un disco y (f, D) un elemento de función. Se dice que (f, D) admite *prolongación analítica sin restricciones* en Ω si (f, D) se puede prolongar analíticamente a través de cada curva en Ω que comience en el centro de D.

Teorema 1.12 (de monodromía)**.** Sean Ω un dominio de $\mathbb{C}$, $D \subset \Omega$ un disco y (f, D) un elemento de función que admite prolongación analítica sin restricciones en Ω. Entonces,

I) Si Γ_0 y Γ_1 son curvas Ω-homótopas de α a β, siendo α el centro de D, entonces la prolongación analítica de (f, D) a través de Γ_0 coincide con su prolongación analítica a través de Γ_1.

II) Si además Ω es simplemente conexo, existe una función g holomorfa en Ω tal que $g(z) = f(z)$ para todo $z \in D$.

Demostración. La primera parte se deduce trivialmente del teorema 1.9. Para probar II, observamos que al ser Ω simplemente conexo, por el teorema de representación conforme de Riemann (B.2) existe un homeomorfismo $h : \Omega \to U$, donde U es el disco unidad. Al ser U convexo, podemos definir

$$\gamma_t(s) = h^{-1}\big((1-t)h(\Gamma_0(s)) + th(\Gamma_1(s))\big), \quad \text{donde } 0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1.$$

La familia uniparamétrica de curvas $\{\gamma_t\}$ que obtenemos muestra que cualquier par de curvas Γ_0 y Γ_1 en Ω de α en β son Ω-homótopas. Entonces, por I se tiene que todas las prolongaciones analíticas de (f, D) a través de una curva en Ω que acaben en un punto

β llevan al mismo elemento de función (g_β, D_β), donde D_β es un disco centrado en β. Definimos

$$g(z) = g_\beta(z) \quad \forall\, z \in D_\beta.$$

Hay que ver que g está bien definida, es decir, que si existen $\beta_0, \beta_1 \in \Omega$ distintos tales que $z \in D_{\beta_0} \cap D_{\beta_1}$ entonces $g_{\beta_1}(z) = g_{\beta_2}(z)$. Pero si esto ocurre, podemos prolongar primero (f, D) hasta $(g_{\beta_0}, D_{\beta_0})$ a través de una curva que termine en β_0, y luego hasta $(g_{\beta_1}, D_{\beta_1})$ a través de la curva obtenida al pegar a la curva anterior el segmento que une β_0 y β_1. Entonces, g_{β_1} tiene que coincidir con g_{β_2} en $D_{\beta_0} \cap D_{\beta_1}$. $\square$

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales complejas

En este capítulo estudiaremos ecuaciones diferenciales complejas con coeficientes analíticos. Comenzaremos estudiando sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo

$$\mathbf{y}' = A(z)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{H}(S))$ es una matriz cuyos coeficientes son funciones holomorfas en un dominio $S \subset \overline{\mathbb{C}}$, y continuaremos con ecuaciones diferenciales lineales de orden n del tipo

$$y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(z)y = 0, \tag{2.2}$$

donde $a_i \in \mathcal{H}(S)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Veremos bajo que condiciones podemos garantizar la existencia e unicidad de las soluciones, la estructura de las mismas y como aplicar lo que hemos visto en el capítulo anterior para prolongar analíticamente estas soluciones a otros dominios. Finalmente, nos centraremos en el estudio de un tipo de ecuaciones y sistemas llamados *fuchsianos* (en honor al matemático L. Fuchs).

Los resultados de las tres primeras secciones del capítulo se pueden encontrar en textos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias como [4] o [11] (aunque hay que adaptarlos al caso complejo). Las dos últimas secciones del capítulo siguen principalmente el texto [2], aunque también se han utilizado [3], [6] y [9] para concretar alguna parte.

2.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

En esta sección y la siguiente, supondremos que el dominio S donde los coeficientes del sistema (2.1) (resp. de la ecuación (2.2)) son analíticos es un disco $D = D(z_0, \rho)$.

Si al sistema (2.1) le añadimos una serie de valores iniciales en el punto z_0, obtenemos lo que se llama un *problema de valores iniciales* o *problema de Cauchy*. Vamos a ver en primer lugar que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(z)\mathbf{y}, & \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T, \\ \mathbf{y}(z_0) = \mathbf{w}_0, & \mathbf{w}_0 \in \mathbb{C}^n, \end{cases} \tag{2.3}$$

admite una única solución $\mathbf{y} \in \mathcal{H}(D)^n$.

Teorema 2.1. El problema de Cauchy (2.3) tiene una única solución $\mathbf{y} \in \mathcal{H}(D)^n$ que solamente depende del valor inicial $\mathbf{w}_0 = (w_1, \ldots, w_n)$.

Demostración. Vamos a tratar de obtener las funciones y_i en sus desarrollos en series de potencias

$$y_i(z) = \sum_{k=0}^{n} c_i^{(k)} (z - z_0)^k, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Juntando (2.4) y las condiciones iniciales del problema obtenemos que $c_i^{(0)} = w_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Si $A(z) = (a_{ij}(z))_{1 \leq i,j \leq n}$ y cada a_{ij} tiene desarrollo en serie de potencias

$$a_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{ij}^{(k)} (z - z_0)^k, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.5}$$

al sustituir en las ecuaciones del sistema los desarrollos (2.4) y (2.5) e igualar los coeficientes correspondientes a cada potencia de $z - z_0$ obtenemos que

$$(k+1)c_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{k} a_{ij}^{(k-s)} c_j^{(s)} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Luego los coeficientes $c_i^{(k)}$ están determinados de forma única y solamente nos falta ver si sus series convergen. Sea z un punto tal que $|z - z_0| = r < \rho$ y sea $R = \frac{1}{2}(r + \rho) < \rho$. Las series (2.5) convergen absolutamente cuando $|z - z_0| \leq R$, luego existe un número positivo

$M > 0$ tal que

$$|a_{ij}^{(k)}|R^k < M \quad \forall k \in \mathbb{N},\, i, j = 1, \ldots, n.$$

Entonces, aplicando esta desigualdad en (2.6) se obtiene que

$$(k+1)|c_i^{(k+1)}| \leq MR^{-k} \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{k} R^s |c_j^{(s)}| \quad \forall k \in \mathbb{N},\, i = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Si tomamos $c^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} |c_j^{(s)}|$, de (2.7) se deduce que

$$(k+1)|c^{(k+1)}| \leq nMR^{-k} \sum_{s=0}^{k} R^s c^{(s)} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Definiendo los coeficientes $C^{(k)}$ mediante $C^{(0)} = c^{(0)}$ y

$$(k+1)|C^{(k+1)}| = nMR^{-k} \sum_{s=0}^{k} R^s C^{(s)} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.9}$$

se obtiene una serie $\sum_{k=0}^{\infty} C^{(k)}(z - z_0)^k$ que, por (2.8), domina a $\sum_{k=0}^{\infty} c^{(k)}(z - z_0)^k$ y por tanto a cada una de las series de (2.4). Además, de (2.9) se obtiene que

$$(k+1)C^{(k+1)} = R^{-1}nMR^{-(k-1)}(\sum_{s=0}^{k-1} R^s C^{(s)} + R^k C^{(k)}) = R^{-1}kC^{(k)} + nMC^{(k)},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y entonces

$$\lim_{k\to\infty} \frac{C^{(k+1)}}{C^{(k)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{R^{-1}k + nM}{k+1} = \frac{1}{R}.$$

Por tanto, si $|z - z_0| = r < R < \rho$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} C^{(k)}(z - z_0)^k$ es absolutamente convergente. Como esta serie domina a cada serie de (2.4) podemos concluir que todos estos desarrollos convergen si $|z - z_0| < \rho$. $\square$

Observación 2.2. La existencia y unicidad de las soluciones se puede probar adaptando alguno de los procedimientos clásicos del caso real como el método de aproximaciones sucesivas (o iterantes de Picard) al caso complejo. Sin embargo, al estar tratando con funciones holomorfas podemos aprovechar los desarrollos en series de potencias para obtener una demostración más sencilla y acorde con las técnicas de variable compleja.

Nos preguntamos ahora qué sucede si en vez de buscar las soluciones de un problema de Cauchy particular vamos variando las condiciones iniciales para un mismo sistema. Recordamos que el espacio de funciones holomorfas en D, $\mathcal{H}(D)$, es un espacio vectorial de dimensión infinita con las operaciones de suma y producto escalar definidas punto a punto, y entonces el producto $\mathcal{H}(D)^n$ con sus correspondientes operaciones también lo es. Vamos a ver que el conjunto de soluciones del sistema (2.1), $\mathcal{S}(D)$, forma un subespacio vectorial de $\mathcal{H}(D)^n$ de dimensión finita.

Teorema 2.3. El conjunto de soluciones de (2.1),

$$\mathcal{S}(D) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{H}(D)^n : \mathbf{y}' = A(z)\mathbf{y}\},$$

es un espacio vectorial de dimensión n. Además, $\{\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ es una base de $\mathcal{S}(D)$ si, y solo si, $\{\mathbf{y_1}(z_0), \ldots, \mathbf{y}_n(z_0)\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$.

Demostración. Para ver que $\mathcal{S}(D)$ tiene estructura de espacio vectorial, probaremos que es cerrado bajo las operaciones de suma y producto escalar en $\mathcal{H}(D)^n$. Si $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{S}(D)$,

$$\begin{aligned}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)' = \mathbf{y}_1' + \mathbf{y}_2' = A(z)\mathbf{y}_1 + A(z)\mathbf{y}_2 = A(z)(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2),\\ (c\mathbf{y}_1)' = c\mathbf{y}_1' = cA(z)\mathbf{y}_1 = A(z)(c\mathbf{y}_1).\end{aligned}$$

Luego $\mathcal{S}(D)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{H}(D)^n$. Para ver la dimensión de $\mathcal{S}(D)$, observamos que la aplicación

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(D) &\longrightarrow \mathbb{C}^n\\ \mathbf{y} &\longmapsto \mathbf{y}(z_0),\end{aligned}$$

es un isomorfismo por el teorema 2.1 (sobreyectiva por la existencia de soluciones e inyectiva por la unicidad, la linealidad es obvia). De aquí se deduce que $\dim \mathcal{S}(D) = n$ y la equivalencia entre las bases de $\mathcal{S}(D)$ y $\mathbb{C}^n$. □

La estructura de espacio vectorial de $\mathcal{S}(D)$ motiva las siguientes definiciones.

Definición 2.4. Sean $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, n soluciones del sistema (2.1). Diremos que la matriz

$$Y = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n),$$

cuyas columnas son las n soluciones anteriores es una *matriz solución* de (2.1). Si, además, las n soluciones son linealmente independientes, diremos que forman un *sistema fundamental de soluciones* y que la matriz Y es una *matriz fundamental* de (2.1).

En virtud de esta definición es trivial la siguiente proposición.

Proposición 2.5. Sea Y una matriz solución del sistema (2.1). Entonces Y es solución de la ecuación diferencial matricial

$$Y' = A(z)Y. \tag{2.10}$$

Introducir las matrices soluciones es de gran utilidad para estudiar la independencia lineal de un conjunto de n soluciones del sistema, ya que las soluciones serán linealmente independientes (es decir, formarán un sistema fundamental de soluciones) si, y solo si, su matriz solución asociada es invertible. Esto nos lleva a introducir la siguiente definición.

Definición 2.6. Sea $Y = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ una matriz solución de (2.1). A la aplicación $W(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$W(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)(z) \longmapsto \det(Y(z)) = \begin{vmatrix} y_{11}(z) & y_{12}(z) & \ldots & y_{1n}(z) \\ y_{21}(z) & y_{22}(z) & \ldots & y_{2n}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(z) & y_{n2}(z) & \ldots & y_{nn}(z) \end{vmatrix},$$

se la denomina *wronskiano* de Y.

Teorema 2.7. Sea $Y = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ una matriz solución de (2.1). Entonces, su wronskiano $W(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ es solución de la ecuación diferencial

$$y' = \operatorname{tr}(A(z))y, \tag{2.11}$$

y, por tanto,

$$W(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)(z) = W(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)(z_0) \exp\Big(\int_{[z_0,z]} \operatorname{tr}(A(u))du\Big) \tag{2.12}$$

para todo $z, z_0 \in D$, donde la integral que aparece es a través del segmento que une z y z_0.

Demostración. Derivando $\det(Y(z))$ por filas, se tiene que

$$\frac{d}{dz}\det(Y(z)) = \begin{vmatrix} y'_{11}(z) & y'_{12}(z) & \dots & y'_{1n}(z) \\ y_{21}(z) & y_{22}(z) & \dots & y_{2n}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(z) & y_{n2}(z) & \dots & y_{nn}(z) \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} y_{11}(z) & y_{12}(z) & \dots & y_{1n}(z) \\ y_{21}(z) & y_{22}(z) & \dots & y_{2n}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y'_{n1}(z) & y'_{n2}(z) & \dots & y'_{nn}(z) \end{vmatrix}$$

Como $Y'(z) = A(z)Y(z)$, se tiene que el primer sumando es

$$\begin{vmatrix} a_{11}y_{11} + \dots + a_{1n}y_{n1} & \dots & a_{11}y_{1n} + \dots + a_{1n}y_{nn} \\ y_{21} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(z)\det(Y(t)),$$

y de modo similar el resto son $a_{22}(z)\det(Y(t)), \dots, a_{nn}(z)\det(Y(t))$. Entonces, el wronskiano es solución de la ecuación diferencial (2.11). Al resolverla, obtenemos la expresión (2.12). □

Teorema 2.8. Un conjunto de soluciones $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \in \mathcal{S}(D)$ es un sistema fundamental de soluciones si, y solo si, existe $z_0 \in D$ tal que $W(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)(z_0) \neq 0$.

Demostración. Por el teorema 2.7, el wronskiano de la matriz asociada al conjunto de soluciones será identicamente nulo si, y solo si, se anula en algún punto, lo que nos da el resultado que buscabamos. □

El último resultado que comentaremos relacionado con la estructura de espacio vectorial de $\mathcal{S}(D)$ es el siguiente.

Proposición 2.9. Sea $Y(z)$ una matriz solución de (2.1). Si $X(z)$ es otra matriz tal que $X(z) = Y(z)C$ para alguna matriz C, entonces $Y(z)$ es otra matriz solución de (2.1). Además, si $Y(z)$ es una matriz fundamental del sistema, entonces $X(z)$ es otra matriz fundamental si, y solo si, $X(z) = Y(z)C$ para alguna matriz C regular.

Demostración. Si $X(z) = Y(z)C$, derivando y teniendo en cuenta que Y es una matriz solución es sencillo ver que

$$X'(z) = Y'(z)C = A(z)Y(z)C = A(z)X(z).$$

Esto también nos da la segunda implicación de la última parte de la proposición, ya que solo habría que añadir que al ser $X(z) = Y(z)C$ producto de matrices invertibles también sería invertible.

Para probar la primera implicación, en primer lugar observamos que al derivar la expresión $I = Y(z)Y^{-1}(z)$ se obtiene

$$0 = I' = (YY^{-1})' = -Y'Y^{-1} + Y(Y^{-1})',$$

y despejando

$$(Y^{-1})' = Y^{-1}Y'Y^{-1}.$$

Entonces, teniendo en cuenta que X e Y son soluciones del sistema

$$\begin{aligned}(Y^{-1}X)' =&(Y^{-1})'X + Y^{-1}X' = Y^{-1}Y'Y^{-1}X + Y^{-1}X' = \\ &= -Y^{-1}AYY^{-1}X + Y^{-1}AX = 0,\end{aligned}$$

y concluimos que $C = Y^{-1}(z)X(z)$ es la matriz regular que buscabamos. □

2.2. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Si tenemos una ecuación diferencial lineal de orden n como (2.2), podemos construir un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente del tipo (2.1). Basta considerar el sistema con matriz

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n(z) & -a_{n-1}(z) & -a_{n-2}(z) & \dots & -a_1(z) \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

y tomar $y = y_1$. Entonces, la existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy asociado a (2.2),

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(z)y = 0, \\ y(z_0) = w_0, \ldots, y^{(n-1)}(z_0) = w_{n-1}, \quad w_i \in \mathbb{C}, \end{cases} \tag{2.14}$$

se deduce fácilmente del teorema 2.1.

Teorema 2.10. El problema de Cauchy (2.14) tiene una única solución $y \in \mathcal{H}(D)$ que solamente depende de los valores iniciales $w_0, \ldots, w_{n-1}$.

Demostración. Si consideramos el problema de Cauchy (2.3) con la matriz $A(z)$ dada en (2.13) y $\mathbf{w}_0 = (w_0, \ldots, w_{n-1})$, por el teorema 2.1 se tiene que existe una única solución $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{H}(D)^n$ del problema. Entonces, la función $y = y_1 \in \mathcal{H}(D)$ será la única solución de (2.14). □

De un modo similar a como sucedía en el caso de los sistemas de primer orden, para las ecuaciones lineales de orden superior el conjunto de soluciones $\mathcal{S}(D)$ también tendrá estructura de espacio vectorial.

Teorema 2.11. El conjunto de soluciones de (2.2),

$$\mathcal{S}(D) = \{y \in \mathcal{H}(D) : y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(z)y = 0\},$$

es un espacio vectorial de dimensión n. Además, $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es una base de $\mathcal{S}(D)$ si, y solo si, $\{\mathbf{y_1}(z_0), \ldots, \mathbf{y}_n(z_0)\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$, donde $\mathbf{y}_i(z_0) = (y_i(z_0), \ldots, y_i^{(n-1)}(z_0))$.

Demostración. Es sencillo ver que, por la linealidad de la derivada, $\mathcal{S}(D)$ es cerrado por la suma y el producto escalar de $\mathcal{H}(D)$, luego forma un subespacio vectorial suyo. Para ver la dimensión de $\mathcal{S}(D)$, observamos que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(D) &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ y &\longmapsto \mathbf{y}(z_0) = (y(z_0), \ldots, y^{(n-1)}(z_0)), \end{aligned}$$

es un isomorfismo por el teorema 2.10. De aquí se deduce que $\dim \mathcal{S}(D) = n$ y la equivalencia entre las bases de $\mathcal{S}(D)$ y $\mathbb{C}^n$. □

Vamos ahora a estudiar cómo son las bases de $\mathcal{S}(D)$.

Definición 2.12. Sean $y_1, \ldots, y_n$, n soluciones de la ecuación (2.2). Si las n soluciones son linealmente independientes, es decir, forman una base de $\mathcal{S}(D)$, diremos que forman un *sistema fundamental de soluciones* de (2.2).

Definición 2.13. Sean $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{H}(D)$. La aplicación $W(y_1, \ldots, y_n) : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$W(y_1, \ldots, y_n)(z) = \begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) & \ldots & y_n(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) & \ldots & y_n'(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(z) & y_2^{(n-1)}(z) & \ldots & y_n^{(n-1)}(z) \end{vmatrix},$$

se denomina *wronskiano* de $y_1, \ldots, y_n$.

Observamos que, si $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{S}(D)$, esta definición de wronskiano se puede ver como un caso particular de la definición 2.6 al considerar el sistema con matriz (2.13) asociado a nuestra ecuación. Entonces, de los teoremas 2.7 y 2.8 se deducen inmediatamente los dos teoremas siguientes:

Teorema 2.14. Sea $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{S}(D)$ un conjunto de soluciones de (2.2). Entonces, su wronskiano $W(y_1, \ldots, y_n)$ es solución de la ecuación diferencial

$$y' = -a_{n-1}(z)y,$$

y, por tanto,

$$W(y_1, \ldots, y_n)(z) = W(y_1, \ldots, y_n)(z_0) \exp\left(\int_{[z_0,z]} -a_{n-1}(u)du\right)$$

para todo $z, z_0 \in D$.

Teorema 2.15. Un conjunto de soluciones $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{S}(D)$ es un sistema fundamental de soluciones si, y solo si, existe $z_0 \in D$ tal que $W(y_1, \ldots, y_n)(z_0) \neq 0$.

2.3. Prolongación analítica y grupo de monodromía

Consideramos ahora el sistema (2.1) en un dominio cualquiera S. Sabemos que en cualquier disco D contenido en S podemos encontrar soluciones al sistema. Si $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ es una solución en D, tiene sentido considerar los elementos de función (y_i, D) y preguntarnos si al prolongarlos analíticamente a otro disco contenido en S obtendremos una nueva solución del sistema en él.

Proposición 2.16. Sean $D_0 = D(z_0, r_0)$ y $D_1 = D(z_1, r_1)$ dos discos contenidos en S tales que $z_1 \in D_0$. Si $\mathbf{y} \in \mathcal{H}(D_0)^n$ es una solución de (2.1) en D_0, entonces existe $\mathbf{y}^* \in \mathcal{H}(D_1)^n$ tal que $\mathbf{y}^*$ es solución de (2.1) en D_1 y (y_i^*, D_1) es prolongación analítica de (y_i, D_0) para cada $i = 1, \dots, n$.

Demostración. Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A(z)\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(z_1) = \mathbf{y}(z_1). \end{cases}$$

Por el teorema 2.1, existe una única solución $\mathbf{y}^* \in \mathcal{H}(D_1)^n$ al problema en D_1. Para dicha solución se verifica que

$$y_i(z_1) = y_i^*(z_1) \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Como z_1 es un punto de acumulación del abierto conexo $D_0 \cap D_1$, por el principio de identidad B.1 se tiene que $y_i = y_i^*$ en $D_0 \cap D_1$ y por tanto $(y_i, D_0) \sim (y_i^*, D_1)$ para cada $i = 1, \dots, n$. □

Corolario 2.17. Sean $D_0 \subset S$ un disco, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ una solución de (2.1) en D_0 y γ una curva en S. Entonces, cada elemento de función (y_i, D_0) admite prolongación analítica (y_i^*, D_1) a través de γ, y además $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ es solución de (2.1) en D_1.

Demostración. Basta con construir una cadena contenida en S tal que el centro de cada disco esté en el disco anterior y que recubra γ, e ir aplicando la proposición anterior en cada par de discos consecutivos. □

Corolario 2.18. Si S es un dominio simplemente conexo e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ una solución de (2.1) definida en un disco $D \subset S$, entonces $\mathbf{y}$ se puede extender a una función $\mathbf{y}^* \in \mathcal{H}(S)$ que es solución de (2.1) en todo S.

Demostración. Se deduce inmediatamente del teorema de monodromía 1.12 viendo que cada (y_i, D) se puede prolongar a través de cualquier curva en S como en el corolario anterior. □

Si consideramos una curva cerrada γ con origen en z_0 y prolongamos una solución de (2.1) definida en un disco $D = D(z_0, r) \subset S$ a través de γ, obtendremos una nueva solución en ese disco que, a priori, no tiene por qué ser la misma. Además, por el teorema de monodromía 1.12 sabemos que las soluciones que obtengamos de este modo al prolongar por curvas homótopas serán las mismas. Entonces, para cada clase de equivalencia $[\gamma] \in \pi_1(S)$ podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma : \mathcal{S}(D) &\longrightarrow \mathcal{S}(D) \\ \mathbf{y} &\longmapsto \mathbf{y}_\gamma, \end{aligned}$$

que envía cada solución de (2.1) en D en la solución que obtenemos al prolongar a través de una curva homótopa a γ. Al prolongar analíticamente se respetan las combinaciones lineales de funciones (simplemente hay que observar que coinciden en las intersecciones de los discos), luego Φ_γ envía bases de $\mathcal{S}(D)$ en bases de $\mathcal{S}(D)$ y resulta ser un automorfismo del espacio vectorial $\mathcal{S}(D)$.

Proposición 2.19. Sean $D \subset U$ un disco y $\mathcal{S}(D)$ el espacio de soluciones de (2.1) en D. Con la notación anterior, la aplicación

$$\begin{aligned} \chi : \pi_1(S) &\longrightarrow Aut(\mathcal{S}(D)) \\ [\gamma] &\longmapsto \Phi_\gamma \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

Demostración. El producto de curvas $\cdot$ definido en $\pi_1(S)$ consiste en "pegar" curvas una detrás de otra (ver A.10), así que es obvio que si γ y η son dos representantes de clases de $\pi_1(S)$ las soluciones que obtendremos al prolongar a través de la curva $\gamma \cdot \eta$ serán las mismas que las que obtenemos al prolongar primero a través de γ y luego a través de η. $\square$

El resultado anterior nos permite introducir la siguiente definición.

Definición 2.20. Con la notación de la proposición 2.19, la imagen de $\pi_1(S)$ a través de χ es un subgrupo de $Aut(\mathcal{S}(D))$ que se denomina *grupo de monodromía* de (2.1) en D.

Observación 2.21. El espacio de soluciones $\mathcal{S}(D)$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ y $Aut(\mathbb{C}^n) \cong GL(n, \mathbb{C})$, luego χ se puede ver como un homomorfismo de grupos

$$\chi : \pi_1(S) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}),$$

es decir, χ es una representación de grupos. La llamaremos la *respresentación de monodromía.*

2.4. Soluciones en el recubrimiento universal

Para esta sección son necesarias algunas nociones sobre superficies de Riemann y topología algebraica que se introducen en el apéndice A. También pueden encontrarse con mayor detalle en [6].

Sea $p : \tilde{S} \longrightarrow S$ el recubrimiento universal del dominio S. Por definición de recubrimiento, para cada $z \in S$ existe un entorno $U \subset S$ de z tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} V_j$, donde los V_j son abiertos disjuntos de $\tilde{S}$ y las restricciones $p|_{V_j} : V_j \longrightarrow U$ son homeomorfismos para cada $j \in J$. Entonces, estas restricciones son cartas complejas de $\tilde{S}$ que forman un atlas complejo con el que podemos dotar al recubrimiento de estructura de superficie de Riemann. Además, si f es una función holomorfa en S, se tiene que

$$(f \circ p) \circ p|_{V_j}^{-1} : p(V_j) \longrightarrow \mathbb{C},$$

es la función $f|_{p(V_j)}$, holomorfa para cada V_j, luego $f \circ p$ es holomorfa en $\tilde{S}$. Además, si $\tilde{z} \in p^{-1}z \subset \tilde{S}$ se tiene que $(f \circ p)(\tilde{z}) = f(z)$, luego denotaremos también por f a la composición $f \circ p$. Entonces, si $\mathbf{y}$ es una solución de (2.1) en un disco $D \subset S$, $\mathbf{y}$ también será solución del sistema en $p^{-1}(D) \subset \tilde{S}$ y, al ser $\tilde{S}$ simplemente conexo, $\mathbf{y}$ será solución del sistema en todo $\tilde{S}$. De un modo similar, si Y es una matriz fundamental de soluciones del sistema en D lo será en todo $\tilde{S}$.

Además, si Δ es el grupo de transformaciones recubridoras de $p : \tilde{S} \longrightarrow S$ y $\sigma \in \Delta$, se tiene que $p \circ \sigma = p$ y entonces $\mathbf{y} \circ \sigma$ e $Y \circ \sigma$ serán de nuevo soluciones de (2.1) y (2.10) en $\tilde{S}$. Por tanto, existirá una matriz $\chi(\sigma) \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que

$$Y = (Y \circ \sigma)\chi(\sigma). \tag{2.15}$$

La aplicación $\chi : \Delta \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ resulta ser una representación de grupos: si τ es otro elemento de Δ,

$$Y \circ \tau = ((Y \circ \sigma)\chi(\sigma)) \circ \tau = (Y \circ \sigma \circ \tau)\chi(\sigma),$$

y entonces

$$Y = (Y \circ \tau)\chi(\tau) = (Y \circ \sigma \circ \tau)\chi(\sigma)\chi(\tau) = (Y \circ \sigma\tau)\chi(\sigma)\chi(\tau),$$

luego $\chi(\sigma\tau) = \chi(\sigma)\chi(\tau)$. Si en vez de partir de Y partimos de otra matriz fundamental de soluciones $\hat{Y}$ de (2.1), por la proposición 2.9 se tiene que

$$\hat{Y} = YC,$$

donde $C \in GL(n, \mathbb{C})$. En lugar de (2.15), obtenemos $\hat{Y} = (\hat{Y} \circ \sigma)\hat{\chi}(\sigma)$, donde $\hat{\chi}$ también es una representación de grupos $\hat{\chi} : \Delta \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$. Entonces,

$$(Y \circ \sigma)\chi(\sigma)C = YC = (YC \circ \sigma)\hat{\chi}(\sigma) = (Y \circ \sigma)C\hat{\chi}(\sigma),$$

y se tiene por tanto que

$$\hat{\chi}(\sigma) = C^{-1}\chi(\sigma)C,$$

donde C es la misma para cada $\sigma \in \Delta$. Diremos en este caso que las representaciones χ y $\hat{\chi}$ son conjugadas.

Definición 2.22. La clase de representaciones de grupos conjugadas $\Delta \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ correspondiente al sistema (2.1) se denomina la *monodromía* del sistema.

Observación 2.23. La monodromía de la definición anterior es, esencialmente, la representación de monodromía definida en la observación 2.21, en el sentido de que prolongar soluciones a través de lazos cerrados en S se traduce en aplicar la transformación recubridora correspondiente en $\tilde{S}$ (el grupo de transformaciones recubridoras Δ y el grupo fundamental $\pi_1(S)$ son isomorfos, ver teorema A.37).

Los contenidos de esta sección y la anterior se puede llevar al caso de ecuaciones diferenciales lineales (2.2) considerando el sistema asociado con matriz (2.13) a la ecuación, así que daremos por introducidos estos conceptos también en ese contexto.

2.5. Singularidades regulares y fuchsianas

Definición 2.24. Se dice que un punto $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ es un *punto singular* del sistema (2.1) (resp. de la ecuación (2.2)) si la matriz $A(z)$ (resp. alguno de los coeficientes $a_i(z)$) presenta una singularidad aislada en z_0.

Vamos a estudiar como se comporta el sistema (2.1) cerca de un punto singular z_0. Supongamos que $z_0 = 0$ y consideramos un disco $U^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \varepsilon\}$ tal que $A(z)$ es holomorfa en U^*. Si $p : \tilde{U}^* \longrightarrow U^*$ es el recubrimiento universal de U^*, las soluciones $\mathbf{y}$ e Y serán holomorfas en $\tilde{U}^*$.

El grupo fundamental $\pi_1(U^*)$ es un grupo cíclico isomorfo a $\mathbb{Z}$ generado por la clase de curvas homótopas que dan una vuelta al origen en sentido antihorario, luego Δ será un grupo cíclico generado por una transformación recubridora $\sigma \in \Delta$ que se corresponde con dicha clase de curvas homótopas. Entonces, la función logaritmo, que en U^* es una función multiforme con diversas ramas, en $\tilde{U}^*$ será una función holomorfa que verifica

$$\log(\sigma\tilde{z}) = \log\tilde{z} + 2\pi i.$$

Observación 2.25. En este caso, se puede construir explícitamente el recubrimiento universal de U^*. Se trata de la exponencial

$$\begin{aligned} p : \tilde{U}^* &\longrightarrow U^* \\ \tilde{z} &\longmapsto e^{\tilde{z}}, \end{aligned}$$

definida en $\tilde{U}^* = \{\tilde{z} \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\tilde{z} < \log\varepsilon\}$. Las transformaciones recubridoras son las traslaciones por $2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$, y el generador σ es la traslación por $2\pi i$. Se puede ver entonces que al llevar el logaritmo de U^* a $\tilde{U}^*$ lo que obtenemos es la aplicación constante (estamos componiendo exponencial y logaritmo), y entonces está claro que

$$\log(\sigma\tilde{z}) = \log(\tilde{z} + 2\pi i) = \tilde{z} + 2\pi i = \log\tilde{z} + 2\pi i.$$

Aún así, no es necesario usar la expresión explícita del recubrimiento universal. En general, el recubrimiento universal será notablemente más complicado de obtener explícitamente, si es que es posible hacerlo.

Sean $G = \chi(\sigma^{-1})$ y $E = \frac{1}{2\pi i}\log G$, donde $\log G$ es una matriz que verifica $e^{\log G} = G$ siendo

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

la exponencial matricial (por tanto, $e^{2\pi i E} = G$). Observamos que de (2.15) se deduce

$$Y \circ \sigma = Y\chi(\sigma)^{-1} = YG, \tag{2.16}$$

al ser χ un homomorfismo de grupos. A priori $\log G$ no es única, pero si λ_j son los autovalores de G entonces los autovalores de E tendrán que ser de la forma $\mu_j = \frac{1}{2\pi i}\log\lambda_j$, e imponiendo que

$$0 \leq \mathrm{Re}\mu_j < 1, \tag{2.17}$$

(es decir, tomando la rama con $0 \leq \arg z < 2\pi$ para los μ_j) conseguiremos la unicidad de $\log G$. Consideramos la función $\tilde{z}^E = e^{E \log \tilde{z}}$, holomorfa en $\tilde{U}^*$. Se tiene que

$$(\sigma \tilde{z})^E = e^{E(\log \tilde{z} + 2\pi i)} = e^{E \log \tilde{z}} e^{2\pi i E} = \tilde{z}^E G,$$

y, aplicando (2.16),

$$Y(\sigma \tilde{z})(\sigma \tilde{z})^{-E} = Y(\tilde{z}) G e^{-E(2\pi i + \log \tilde{z})} = Y(\tilde{z}) G G^{-1} \tilde{z}^E = Y(\tilde{z}) \tilde{z}^E.$$

Por tanto, la aplicación $Z(z) = Y(\tilde{z})\tilde{z}^E$ está bien definida y es holomorfa en U^*. Obtenemos así el siguiente resultado.

Teorema 2.26 (representación de Poincaré)**.** Para cualquier matriz fundamental de soluciones Y de (2.1) en $\tilde{U}^*$ existen una función Z holomorfa en U^* y una matriz constante $E \in CL(n, \mathbb{C})$ tales que

$$Y(\tilde{z}) = Z(z)\tilde{z}^E. \tag{2.18}$$

Corolario 2.27. La ecuación (2.2) admite una solución en $\tilde{U}^*$ de la forma $y(\tilde{z}) = h(z)\tilde{z}^\lambda$, donde $h(z)$ es una función holomorfa en U^*.

Este resultado nos servirá para estudiar qué sucede cerca de determinados tipos de puntos singulares que introduciremos a continuación.

Definición 2.28. Sea z_0 un punto singular del sistema (2.1). Se dice que z_0 es una *singularidad regular* o que (2.1) es *regular en* z_0 si cualquier solución $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ del sistema tiene a lo sumo crecimiento polinomial (crecimiento moderado) cuando $z \to z_0$, es decir, si existen $k \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tales que para cualquier sector

$$\Sigma = \{z = z_0 + re^{i\theta} : 0 < r < \varepsilon, a \leq \theta \leq b\},$$

se tenga que

$$|y_j(z)| < \frac{C}{|z - z_0|^k} \quad \forall\, z \in \Sigma,$$

para cada $j = 1, \ldots, n$. Si todos los puntos singulares del sistema son singularidades regulares, diremos que el sistema es *regular*.

Observación 2.29. Si en la definición de punto regular no imponemos que $z \longrightarrow z_0$ en un sector del tipo de Σ, podríamos hacer que funciones multiformes como el logaritmo creciesen tanto como quisieramos al acercarnos a z_0 haciendo tender $z \longrightarrow z_0$ a través de espirales que fuesen dando vueltas a z_0, ya que cada vuelta supondría un incremento constante al valor de la función.

Las funciones holomorfas en un disco agujereado con centro en z_0 que no tienen una singularidad esencial en z_0, los logaritmos o las potencias son ejemplos de funciones de crecimiento moderado.

Definición 2.30. Sea z_0 un punto singular del sistema (2.1). Se dice que z_0 es una *singularidad fuchsiana* o que (2.1) es *fuchsiano en* z_0 si $A(z)$ tiene a lo sumo un polo de orden uno en z_0. Si todos los puntos singulares del sistema son singularidades fuchsianas, diremos que el sistema es *fuchsiano*.

Veamos ahora que tipo de relación existe entre estos dos tipos de sistemas.

Teorema 2.31. Toda singularidad fuchsiana de (2.1) es una singularidad regular.

Demostración. Supongamos que $z_0 = 0$ es una singularidad fuchsiana del sistema. Sean

$$\Sigma = \{z = re^{i\theta} : 0 < |z| \leq \varepsilon, a \leq \theta \leq b\},$$

un sector e $\mathbf{y}$ una solución del sistema definida en Σ (la podemos definir en un disco y extender a todo Σ al ser simplemente conexo). Fijamos θ con $a \leq \theta \leq b$ y consideramos los puntos de la forma $z = re^{i\theta}$. Observamos que

$$\frac{d}{dr}(\mathbf{y}(re^{i\theta})) = \frac{d\mathbf{y}}{dr}(re^{i\theta})e^{i\theta} = e^{i\theta}A(re^{i\theta})\mathbf{y}(re^{i\theta}).$$

Entonces, si $||\mathbf{y}|| = (\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ se tiene que

$$||\frac{d\mathbf{y}}{dr}(re^{i\theta})|| = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{dy_j}{dr}(re^{i\theta}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} e^{i\theta} a_{jk}(re^{i\theta}) y_k(re^{i\theta}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{0<r\leq\varepsilon \\ 1\leq j,k\leq n}} |a_{jk}(re^{i\theta})| \sqrt{n}\, ||\mathbf{y}(re^{i\theta})||.$$

Al ser $z_0 = 0$ una singularidad fuchsiana, podemos escribir $A(z) = \frac{B(z)}{z}$ para cada $z \in \Sigma$, donde $B(z)$ es holomorfa en Σ. Entonces, si $C = \sup_{\substack{0<r\leq\varepsilon \\ 1\leq j,k\leq n}} |b_{jk}(re^{i\theta})| \sqrt{n}$ se tiene que

$$||\frac{d\mathbf{y}}{dr}(re^{i\theta})|| \leq \frac{C}{r} ||\mathbf{y}(re^{i\theta})||,$$

para cada r con $0 < r \leq r_0$. Por la regla de Barrow,

$$\mathbf{y}(re^{i\theta}) - \mathbf{y}(\varepsilon e^{i\theta}) = -\int_r^{\varepsilon} \frac{d\mathbf{y}}{ds}(se^{i\theta})ds.$$

Entonces, aplicando la desigualdad triangular y la cota anterior para la norma de la derivada se llega a que

$$||\mathbf{y}(re^{i\theta})|| \leq ||\mathbf{y}(\varepsilon e^{i\theta})|| + \int_r^{\varepsilon} \frac{C}{s}||\mathbf{y}(se^{i\theta})||ds.$$

Por la desigualdad de Gronwall (ver [4]), se tiene que

$$||\mathbf{y}(re^{i\theta})|| \leq ||\mathbf{y}(\varepsilon e^{i\theta})|| \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^C,$$

para cada $0 < r \leq \varepsilon$. Entonces,

$$||\mathbf{y}(re^{i\theta})|| \leq \sup_{a \leq \theta \leq b} ||\mathbf{y}(\varepsilon e^{i\theta})|| \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^C,$$

para cada $z = re^{i\theta} \in \Sigma$ y concluimos que $\mathbf{y}$ tiene crecimiento moderado en el origen, es decir, que $z_0 = 0$ es una singularidad regular del sistema. $\square$

Observación 2.32. El recíproco de este resultado, en general, no es cierto. Si por ejemplo consideramos la ecuación

$$y'' + \frac{1}{z}y' + \frac{1}{x^2}y = 0,$$

el sistema asociado a la ecuación con matriz

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{z^2} & -\frac{1}{z} \end{pmatrix},$$

es regular en $z_0 = 0$, pero no es fuchsiano en ese punto ya que presenta un polo de orden dos.

En el caso de las ecuaciones del tipo (2.2), la definición de singularidad regular es la misma que para los sistemas (punto en el que las soluciones tienen crecimiento regular), pero la definición de singularidad fuchsiana es algo distinta.

Definición 2.33. Sea z_0 un punto singular de la ecuación (2.2). Se dice que z_0 es una *singularidad fuchsiana* o que (2.2) es *fuchsiana* en z_0 si cada coeficiente a_i tiene, a lo sumo, un polo de orden i en z_0.

En este caso se puede ver que los conceptos de singularidad regular y fuchsiana resultan ser equivalentes.

Teorema 2.34. Una singularidad de (2.2) es fuchsiana si, y solo si, es regular.

Demostración. Comenzamos suponiendo que la ecuación (2.2) es fuchsiana en $z_0 = 0$. Si Σ es un sector e y es una solución de la ecuación en Σ, tomando

$$y_k = z^{k-1} y^{(k-1)},$$

para cada $k = 1, \dots, n$, se tiene que

$$\begin{aligned} y_k' &= (k-1)z^{k-2}y^{(k-1)} + z^{k-1}y^{(k)} = (k-1)z^{k-2}\frac{y_k}{z^{k-1}} + z^{k-1}\frac{y_{k+1}}{z^k} = \\ &= \frac{1}{z}((k-1)y_k + y_{k+1}) \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, n-1$, y

$$\begin{aligned} y_n' &= (n-1)\frac{y_n}{z} + z^{n-1}y^{(n)} = \frac{1}{z}\Big((n-1)y_n - z^n(a_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(z)y)\Big) = \\ &= \frac{1}{z}\Big((n-1)y_n - a_1(z)zy_n - \cdots - a_n(z)z^n y_1\Big). \end{aligned}$$

Es decir, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ es solución del sistema

$$\mathbf{y}' = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 2 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -a_n(z)z^n & -a_{n-1}(z)z^{n-1} & \dots & \dots & (n-1) - a_1(z)z. \end{pmatrix}\mathbf{y} = B(z)\mathbf{y} \qquad (2.19)$$

Las funciones $a_k(z)z^k$ son holomorfas en U por ser la ecuación fuchsiana en el origen, luego el sistema (2.19) es fuchsiano y, por el teorema 2.31, regular en 0. Entonces, cada función $y_k(z) = z^{k-1}y^{(k)}(z)$ tiene crecimiento moderado y podemos concluir que $y(z)$ también, quedando probada la primera implicación.

Para la segunda implicación, razonamos por inducción sobre el orden n de la ecuación.

Para $n = 1$, se tiene que la ecuación se reduce a

$$y' = a(z)y,$$

donde $a(z)$ debe tener a lo sumo un polo en $z_0 = 0$ por la hipótesis de ser el sistema regular. Entonces, existe un entero $N \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a(z) = \sum_{k \geq N} a_k z^k = \sum_{k=N}^{-2} a_k z^k + a_{-1} z^{-1} + s(z),$$

con s holomorfa en U, y la solución de la ecuación en cada sector Σ viene dada por

$$y(z) = \exp\bigg(\int a_N z^N + \cdots + a_{-2} z^{-2} dz\bigg) z^{a_{-1}} \exp\bigg(\int s(z) dz\bigg).$$

Para que y tenga crecimiento moderado, tiene que darse $a_N = \cdots = a_{-2} = 0$, luego a tiene un polo de orden uno en el origen y la ecuación es fuchsiana allí.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para $k < n$. Si Σ es un sector, por el corolario 2.27 existirá una solución de la ecuación de la forma $y_1(z) = z^\lambda s(z)$ en Σ con s holomorfa en U^*. Si y es otra solución en Σ, existirá una función w holomorfa en Σ tal que $y = y_1 w$. Entonces, derivando y se tiene que

$$y^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} y_1^{(m-k)}(z) w^{(k)}(z).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.2),

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_1^{(n-k)}(z) w^{(k)}(z) + a_1(z) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} y_1^{(n-1-k)}(z) w^{(k)}(z) \right) + \cdots +$$
$$+ a_{n-1}(z) \left(\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} y_1^{(1-k)}(z) w^{(k)}(z) \right) + a_n(z) y_1(z) w(z) = 0.$$

Agrupando los términos correspondientes a cada derivada $w^{(k)}$, la ecuación se transforma en

$$b_n(z) w^{(n)} + \cdots + b_0(z) w = 0,$$

donde

$$b_k(z) = \binom{n}{k} y_1^{(n-k)}(z) + a_1(z)\binom{n-1}{k} y_1^{(n-k-1)}(z) + \cdots + a_{n-k}(z)y_1(z).$$

En particular, observamos que

$$b_0(z) = y_1^{(n)}(z) + a_1(z)y_1^{(n-1)}(z) + \cdots + a_n(z)y_1(z) = 0,$$
$$b_n(z) = y_1(z),$$

luego

$$w^{(n)} + \frac{b_{n-1}(z)}{y_1(z)} w^{(n-1)} \cdots + \frac{b_1(z)}{y_1(z)} w' = 0.$$

Consideramos el cambio de variable $u = w'$ que transforma la ecuación anterior en la ecuación de orden $n-1$

$$u^{(n-1)} + c_1(z)u^{(n-2)} + \cdots + c_{n-1}(z)u = 0, \tag{2.20}$$

donde

$$c_k(z) = \frac{b_{n-k}(z)}{y_1(z)},$$

para cada $k = 1 \ldots, n-1$. Por ser la ecuación regular en 0, la función $w(z) = y(z)z^{-\lambda}s(z)^{-1}$ es de crecimiento moderado y su derivada u también. Luego la ecuación (2.20) también es regular y, por la hipótesis de inducción, fuchsiana en 0. Entonces, cada función $c_k(z)z^k$ es holomorfa y

$$c_k(z)z^k = \frac{\binom{n}{n-k} y_1^{(k)}(z) + \cdots + a_k(z)y_1(z)}{y_1(z)} z^k =$$
$$= \left(\binom{n}{k}\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1)\frac{1}{z^k} + \cdots + a_k(z)\right) z^k,$$

luego cada $a_k(z)z^k$ es holomorfa y podemos concluir que (2.2) es fuchsiana en 0. □

Capítulo 3

El problema de Riemann-Hilbert

Una vez llegado este punto, ya hemos introducido todos los conceptos necesarios para poder plantear el problema de Riemann-Hilbert. El enunciado del problema es el siguiente:

Problema de Riemann-Hilbert 3.1. *Encontrar un sistema fuchsiano con puntos singulares y monodromía prefijados.*

Como hemos comentado en la introducción, en 1989 Bolibruch dio una respuesta negativa al problema, construyendo un sistema regular cuya monodromía demostró que no podía tener ningún sistema fuchsiano. Vamos a ver cuál es este sistema y a estudiarlo en detalle para ver como llegar a la respuesta final, introduciendo para ello una nueva teoría desarrollada por Levelt en su tesis [7] que nos permitirá estudiar el comportamiento de los sistemas regulares cerca de sus puntos singulares. La referencia principal de este capítulo será el texto [2] del propio Bolibruch y Asonov, en particular el segundo capítulo del mismo. Tambén se ha utilizado [8] para completar algún detalle.

3.1. El contraejemplo de Bolibruch

Consideramos el sistema (2.1) con

$$A(z) = \frac{1}{z^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix} + \frac{1}{6(z+1)}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \tag{3.1}$$

$$+\frac{1}{2(z-1)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3(z-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema tiene singularidades en $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$ y $a_4 = \frac{1}{2}$ (tendríamos que comprobar también que no tiene una singularidad en ∞, lo deduciremos de la fórmula (3.30) que probaremos más adelante). Los puntos a_2, a_3 y a_4 son singularidades fuchsianas, pero en a_1 la matriz $A(z)$ presenta un polo de orden 2, luego el sistema no es fuchsiano en a_1.

Vamos a probar el siguiente resultado:

Teorema 3.2. Consideramos el sistema (2.1) con matriz (3.1). Sean $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ sus puntos singulares y χ su monodromía. Entonces, *no existe ningún sistema fuchsiano con dichos puntos singulares y dicha mondromía.* Como consecuencia, la respuesta al problema de Riemann-Hilbert 3.1 es negativa.

La forma de probar este resultado será algo peculiar. En primer lugar, observamos que la matriz del sistema se puede escribir de la forma

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}(z) & a_{13}(z) \\ 0 & & \\ & B(z) & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

donde

$$a_{12}(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-\frac{1}{2}}; \qquad a_{13}(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-\frac{1}{2}}, \tag{3.3}$$

y

$$\begin{aligned} B(z) = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6(z+1)}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2(z-1)}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3(z-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Entonces, si $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ es una solución del sistema, se tendrá que

$$y_1' = a_{12}(z)y_2 + a_{13}(z)y_3, \tag{3.5}$$

e (y_2, y_3) será solución del sistema con matriz (3.4),

$$\mathbf{y}' = B(z)\mathbf{y}. \tag{3.6}$$

Estudiaremos este sistema de forma independiente para ver que cualquier sistema con sus singularidades y monodromía tiene que cumplir cierta condición, y después veremos que si existe un sistema fuchsiano con las singularidades y monodromía de (3.1), podremos extraer un sistema de orden 2 con las singularidades y monodromía de (3.6) pero que no cumple la condición adicional que hemos comentado.

3.2. Bases de Levelt

Antes de estudiar el contraejemplo, necesitaremos introducir una nueva teoría local para sistemas regulares que presentaremos en esta sección. Esta teoría fue desarrollada por Levelt en [7].

Supongamos que y es una función holomorfa en U^* con crecimiento moderado en $z_0 = 0$. Si existen $k \in \mathbb{Z}$ y $C > 0$ tal que para cualquier sector Σ

$$|y(z)| \leq \frac{C}{|z|^k} \text{ cuando } z \longrightarrow 0, \ \ z \in \Sigma,$$

al considerar $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}^*$ tal que $p(\tilde{\Sigma}) = \Sigma$ se tendrá que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$y(\tilde{z})|z|^{-\lambda} \longrightarrow 0 \text{ cuando } z \longrightarrow 0, \ \ p\tilde{z} = z, \ \ \tilde{z} \in \tilde{\Sigma}. \tag{3.7}$$

Esta es la definición de punto regular que se da en algunos textos como [2], y aunque es equivalente a la anterior nos resultará más cómodo trabajar con ella de aquí en adelante.

Si y es una función holomorfa en $\tilde{U}^*$ con crecimiento moderado cuando $z \to 0$, definimos

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \left\lfloor \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \frac{y(\tilde{z})}{|z|^\lambda} \longrightarrow 0 \text{ cuando } z \longrightarrow 0 \right\} \right\rfloor = \\ &= \text{máx} \left\{ k \in \mathbb{Z} : \frac{y(\tilde{z})}{|z|^\lambda} \longrightarrow 0 \text{ cuando } z \longrightarrow 0 \ \forall \lambda < k \right\}, \\ \varphi(0) &= \infty, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde la convergencia se entiende como en (3.7). Si tenemos un vector de funciones holomorfas $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$, definimos

$$\varphi(\mathbf{y}) = \min_{1 \leq j \leq n} \varphi(y_j).$$

Observamos que si $\sigma \in \Delta$ es una transformación recubridora de $\tilde{U}^*$,

$$\frac{y(\tilde{z})}{|z|^\lambda} \longrightarrow 0 \text{ cuando } z \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{(y \circ \sigma)(\tilde{z})}{|z|^\lambda} \longrightarrow 0 \text{ cuando } z \longrightarrow 0,$$

luego se tiene que

$$\varphi(y \circ \sigma) = \varphi(y). \tag{3.9}$$

Definición 3.3. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una aplicación $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ es una *valoración* si para todo $x, y \in X$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ \varphi(ax) = \varphi(x), \\ \varphi(x + y) \geq \text{mín}\{\varphi(x), \varphi(y)\}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Observación 3.4. Las valoraciones tienen una definición más general en el álgebra (ver [13]), pero nosotros solo necesitaremos estas propiedades.

Proposición 3.5. Sean X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y φ una valoración. Si $x, y \in X$ y $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, entonces se da la igualdad

$$\varphi(x + y) = \text{mín}\{\varphi(x), \varphi(y)\}.$$

Demostración. Supongamos que $\varphi(x) < \varphi(y)$. Entonces,

$$\varphi(x + y) \geq \text{mín}\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \varphi(x).$$

Por otro lado,

$$\varphi(x) = \varphi((x + y) + (-y)) \geq \text{mín}\{\varphi(x + y), \varphi(y)\}.$$

Como $\varphi(x) < \varphi(y)$, el mínimo tiene que ser $\varphi(x + y)$ y tenemos la igualdad. $\square$

Proposición 3.6. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión $n < \infty$ y φ una valoración. Entonces, φ solo puede tomar una cantidad finita de valores

$$\infty = \psi_0 > \psi_1 > \ldots > \psi_h,$$

con $h \leq n$. Si para cada $j = 0, \dots, h$ definimos

$$X_j = \{x \in X : \varphi(x) \geq \psi_j\},$$

se tiene que cada X_j es un subespacio vectorial de X y

$$\{0\} = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_h = X.$$

Además, $\varphi(X_j \setminus X_{j-1}) = \psi_j$ para cada $j = 1, \dots, h$ y, si $k_j = \dim(X_j/X_{j-1})$, entonces

$$\sum_{j=1}^{h} k_j = n.$$

Demostración. Definimos para cada $k \in \mathbb{Z}$ el conjunto

$$Y_k = \{x \in X : \varphi(x) \geq k\}.$$

Es sencillo ver que cada Y_k es un subespacio vectorial de X: si $x, y \in Y_k$, $a \in \mathbb{C}$, entonces

$$\varphi(x+y) \geq \min\{\varphi(x), \varphi(y)\} \geq k,$$
$$\varphi(ax) = \begin{cases} \varphi(x) \geq k & \text{si } a \neq 0, \\ \infty > k & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Además, si $x \in Y_k$, se tiene que $\varphi(x) \geq k > k-1$ y entonces $Y_k \subset Y_{k-1}$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, luego tenemos una cadena infinita de subespacios contenidos en X. Como X tiene dimensión $n < \infty$, solo puede haber una cantidad finita $h \leq n$ de subespacios distintos. Es decir, φ solo puede tomar los valores

$$\infty = \psi_0 > \psi_1 > \ldots > \psi_h.$$

Sea $X_j = \{x \in X : \varphi(x) \geq \psi_j\}$ para cada $j = 0, \dots, h$. Entonces,

$$\{0\} = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_h = X.$$

Si $x \in X_j \setminus X_{j-1}$, se tiene que $\psi_j \leq \varphi(x) < \psi_{j-1}$, luego $\varphi(X_j \setminus X_{j-1}) = \psi_j$. Por último, si definimos $k_j = \dim(X_j/X_{j-1}) = \dim X_j - \dim X_{j-1}$ para cada $j = 1, \dots, h$, se tiene que

$$n = \dim X_h = \sum_{j=1}^{h} (\dim X_j - \dim X_{j-1}) + \dim X_0 = \sum_{j=1}^{h} k_j,$$

quedando así probado el último de los resultados. $\square$

Sea $\mathcal{S}$ el espacio vectorial de soluciones de (2.1) en $\tilde{U}^*$, y supongamos que el sistema es regular en 0. Si definimos φ como en (3.8), la restricción de φ a $\mathcal{S}$ será una valoración en un espacio vectorial de dimensión finita, luego dará lugar a una cadena de subespacios

$$\{0\} = \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{S}_h = \mathcal{S}. \tag{3.11}$$

Sean $\psi_j = \varphi(\mathcal{S}_j \setminus \mathcal{S}_{j-1})$ y $k_j = \dim(\mathcal{S}_j/\mathcal{S}_{j-1})$ para $j = 1, \dots, h$. Definimos los números $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ mediante

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = \cdots = \varphi_{k_1} = \psi_1, \\ &\quad \dots \\ &\varphi_{k_1+\cdots+k_{n-1}+1} = \cdots = \varphi_{k_1+\cdots+k_{n-1}+k_n} = \psi_h. \end{aligned}$$

Si tomamos k_1 vectores linealmente independientes de $\mathcal{S}_1$, k_2 representantes de vectores linealmente independientes de $\mathcal{S}_2/\mathcal{S}_1$, y así sucesivamente, obtenemos una base

$$\{\mathbf{y}_{11}, \dots, \mathbf{y}_{k_1 1}, \dots, \mathbf{y}_{1h}, \dots, \mathbf{y}_{k_h h}\}$$

de $\mathcal{S}$ tal que

$$\varphi(\mathbf{y}_{lm}) = \psi_m. \tag{3.12}$$

Vamos a ver como podemos "mejorar" esta base. Si $\sigma \in \Delta$ es una transformación recubridora en $\tilde{U}^*$ e $\mathbf{y}$ es una solución del sistema, $\mathbf{y} \circ \sigma$ seguirá siendo una solución del sistema. Tenemos entonces una aplicación lineal

$$\begin{aligned} \sigma^* : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S}, \\ \mathbf{y} &\longmapsto \mathbf{y} \circ \sigma. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por (3.9), σ^* conserva la cadena de subespacios (3.11). Además, σ^* induce una aplicación lineal σ_j^* en cada espacio cociente $\mathcal{S}_j/\mathcal{S}_{j-1}$. Sea $\{\bar{\mathbf{y}}_{1j}, \dots, \bar{\mathbf{y}}_{k_j j}\}$ una base de $\mathcal{S}_j/\mathcal{S}_{j-1}$ tal que la matriz de σ_j^* en esta base esté en su forma de Jordan (luego será triangular superior). Podemos entonces repetir el procedimiento mostrado en el párrafo anterior para obtener una base de $\mathcal{S}$ utilizando representantes de $\{\overline{\mathbf{y}}_{1j}, \ldots, \overline{\mathbf{y}}_{k_j j}\}$ en cada $\mathcal{S}_j/\mathcal{S}_{j-1}$.

Definición 3.7. Sea $\{\mathbf{y}_{11}, \ldots, \mathbf{y}_{k_1 1}, \ldots, \mathbf{y}_{1h}, \ldots, \mathbf{y}_{k_h h}\}$ una base de $\mathcal{S}$ obtenida mediante el procedimiento descrito en el párrafo anterior (teniendo en cuenta el orden de los elementos). Diremos que la base es una *base de Levelt* de $\mathcal{S}$ y que la matriz Y cuyas columnas son los vectores de la base es una *matriz de Levelt*.

Proposición 3.8. Sea $\{\mathbf{y}_{11}, \ldots, \mathbf{y}_{k_1 1}, \ldots, \mathbf{y}_{1h}, \ldots, \mathbf{y}_{k_h h}\}$ una base de Levelt de $\mathcal{S}$. Entonces, la matriz de la aplicación σ^* definida en (3.13) en esta base es triangular superior.

Demostración. Sea $\mathbf{y}_j = \mathbf{y}_{lm}$ con $1 \leq l \leq k_m$, $1 \leq m \leq h$, un elemento de la base de Levelt. En $\mathcal{S}_m/\mathcal{S}_{m-1}$, se tiene que la matriz de σ_m^* es triangular superior y entonces

$$\sigma_m^* \overline{\mathbf{y}}_{lm} \in \sum_{q=1}^{l} \mathbb{C}\overline{\mathbf{y}}_{qm}.$$

Por tanto, como $\{\mathbf{y}_{11}, \ldots, \mathbf{y}_{k_1 1}, \ldots, \mathbf{y}_{1,m-1}, \ldots, \mathbf{y}_{k_{m-1},m-1}\}$ es una base de $\mathcal{S}_{m-1}$ se tiene que

$$\sigma^* \mathbf{y}_j = \sigma^* \mathbf{y}_{lm} \in \sum_{q=1}^{l} \mathbb{C}\mathbf{y}_{qm} + \mathcal{S}_{m-1} = \sum_{q=1}^{l} \mathbb{C}\mathbf{y}_{qm} + \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{q_1}^{k_r} \mathbb{C}\mathbf{y}_{qr} = \sum_{s=1}^{j} \mathbb{C}\mathbf{y}_s,$$

y concluimos que la matriz de σ^* en la base de Levelt es triangular superior. □

Corolario 3.9. Sea $\{\mathbf{y}_{11}, \ldots, \mathbf{y}_{k_1 1}, \ldots, \mathbf{y}_{1h}, \ldots, \mathbf{y}_{k_h h}\}$ una base de Levelt de $\mathcal{S}$. Entonces la matriz $G = \chi(\sigma^{-1})$ asociada a $Y = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ según (2.16) es triangular superior.

Demostración. Basta con darnos cuenta de que la matriz G es precisamente la matriz de σ^* en esta base de Levelt. Para ello, consideramos un vector $\mathbf{y} \in \mathcal{S}$ con coordenadas $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}$ en la base de Levelt, es decir, $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{y}_j = Y\mathbf{c}$ (viendo $\mathbf{c}$ como un vector columna). Entonces,

$$\sigma^* \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j (\mathbf{y}_j \circ \sigma) = (Y \circ \sigma)\mathbf{c} = YG\mathbf{c}.$$

Es decir, $\sigma^* \mathbf{y}$ tiene coordenadas $G\mathbf{c}$ en la base de Levelt, luego G es la matriz de σ^* en esta base. □

Al ser G una matriz triangular superior, las matrices $E = \frac{1}{2\pi i}\log G$ y $\tilde{z}^E = e^{E\log\tilde{z}}$ también lo serán. Vamos a ver que esto nos permitirá mejorar la representación de Poincaré (2.18) cuando Y sea una matriz de Levelt.

En primer lugar, observamos que la matriz $X(t) = e^{tE}$ es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden dado por $\frac{dX}{dt} = EX$ que verifica $X(0) = I$. De aquí se deduce que si $X(t) = (x_{jk}(t))_{1\leq j,k\leq n}$, entonces $x_{jj}(t) = e^{\mu_j t}$ (μ_j son los autovalores de E), $x_{jk} = 0$ si $j > k$ y cada $x_{jk}(t)$ con $j < k$ es una suma de productos de polinomios en t y exponenciales del tipo $e^{\mu_l t}$. Por tanto, si $\tilde{z}^E = e^{\log\tilde{z}E} = (\alpha_{kj}(\tilde{z}))_{1\leq k,j\leq n}$ se tiene que

$$\alpha_{jj}(\tilde{z}) = \tilde{z}^{\mu_j}$$

y, por la condición (2.17) impuesta sobre la parte real de los autovalores,

$$\varphi(\alpha_{kj}) \geq 0. \tag{3.14}$$

Ahora, si $Z(z)$ es la matriz holomorfa en U^* obtenida en (2.18) y $\mathbf{z}_k$ son sus columnas, al ser $\tilde{z}^E$ triangular superior se tendrá que

$$\mathbf{y}_j(\tilde{z}) = \sum_{k=1}^{j}\alpha_{kj}(\tilde{z})\mathbf{z}_k(z) \tag{3.15}$$

y entonces cada $\mathbf{z}_k$ puede tener, a lo sumo, un polo en el origen. Entonces, podemos considerar $\varphi(\mathbf{z}_k)$ y escribir $\mathbf{z}_k(z) = z^{\varphi(\mathbf{z}_k)}\mathbf{w}_k(z)$, donde $\mathbf{w}_k(0) \neq \mathbf{0}$.

Una vez hecha esta introducción, vamos a probar dos lemas que nos permitirán obtener la representación de Poincaré mejorada que habíamos comentado.

Lema 3.10. Con la notación anterior, se tiene que $\varphi(\alpha_{kj}\mathbf{z}_k) \geq \varphi(\mathbf{z}_k)$ y, en particular, $\varphi(\alpha_{jj}\mathbf{z}_j) = \varphi(\mathbf{z}_j)$.

Demostración. Para ver la primera desigualdad, observamos que si $\lambda < \varphi(\mathbf{z}_k)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda + \varepsilon < \varphi(\mathbf{z}_k)$, luego

$$\frac{\alpha_{kj}\mathbf{z}_k}{|z|^\lambda} = (|z|^\varepsilon\alpha_{kj})\left(\frac{\mathbf{z}_k}{|z|^{\lambda+\varepsilon}}\right) \longrightarrow 0,$$

cuando $z \longrightarrow 0$ (el primer término tiende a cero porque $-\varepsilon < 0 \leq \varphi(\alpha_{kj})$ y el segundo porque $\lambda + \varepsilon < \varphi(\mathbf{z}_k))$ y entonces

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda < \varphi(\mathbf{z}_k)\} \subset \left\{\lambda \in \mathbb{R} : \frac{\alpha_{kj}\mathbf{z}_k}{|z|^\lambda} \longrightarrow 0 \text{ si } z \longrightarrow 0\right\},$$

lo que implica que $\varphi(\mathbf{z}_k) \leq \varphi(\alpha_{kj}\mathbf{z}_k)$.

Para ver la igualdad en el caso $j = k$, observamos que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene por (2.17) que $\operatorname{Re}\mu_j < 1 + \varepsilon$ y entonces

$$\frac{|\alpha_{jj}\mathbf{z}_j|}{|z|^{\varphi(\mathbf{z}_j)+1-\varepsilon}} = \frac{|\tilde{z}^{\mu_j}|}{|z|^{1-\varepsilon}}\left(\frac{|\mathbf{z}_j|}{|z|^{\varphi(\mathbf{z}_j)}}\right) \longrightarrow \infty,$$

cuando $z \longrightarrow 0$ (el primer término tiende a infinito por la elección de ε y el segundo a $|\mathbf{w}_j(0)| \neq 0$), luego

$$\sup\left\{\lambda \in \mathbb{R} : \frac{\alpha_{jj}\mathbf{z}_j}{|z|^\lambda} \longrightarrow 0 \text{ si } z \longrightarrow 0\right\} \leq \varphi(\mathbf{z}_j) + 1 - \varepsilon,$$

y entonces la parte entera de este superior, es decir, $\varphi(\alpha_{jj}\mathbf{z}_j)$, es menor que $\varphi(\mathbf{z}_j)$. $\square$

Lema 3.11. Con la notación anterior, se tiene que $\varphi(\mathbf{z}_j) \geq \varphi(\mathbf{y}_j) = \varphi_j$.

Demostración. Razonamos por inducción. Para $j = 1$, como $\mathbf{y}_1 = \alpha_{11}\mathbf{z}_1$ (ver (3.15)) se tiene por el lema anterior que $\varphi(\mathbf{z}_1) = \varphi(\mathbf{y}_1)$.

Supongamos que el resultado es cierto para cada $k < j$, es decir, que $\varphi(\mathbf{z}_k) \geq \varphi(\mathbf{y}_k)$ para cada $k < j$. Usando (3.15) de nuevo, obtenemos que

$$\mathbf{y}_j = \alpha_{jj}\mathbf{z}_j + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{kj}\mathbf{z}_k.$$

Supongamos que $\varphi(\mathbf{z}_k) < \varphi(\mathbf{y}_k)$. Si denotamos por Σ al sumatorio de la expresión anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi(\Sigma) &\geq \text{mín}\{\varphi(\alpha_{kj}\mathbf{z_j}) : k = 1\ldots, j-1\} \geq \text{mín}\{\varphi(\mathbf{z_j}) : k = 1\ldots, j-1\} \geq \\ &\geq \text{mín}\{\varphi(\mathbf{y_j}) : k = 1\ldots, j-1\} = \varphi(\mathbf{y}_{j-1}) \geq \varphi(\mathbf{y}_j) > \varphi(\mathbf{z}_j) = \varphi(\alpha_{jj}\mathbf{z}_j),\end{aligned}$$

donde hemos usado las propiedades (3.10) y (3.12) de la valoración φ, el lema anterior y la hipótesis de inducción. Entonces, por la proposición 3.5 se tiene que

$$\varphi(\mathbf{y}_j) = \varphi(\alpha_{jj}\mathbf{z}_j) = \varphi(\mathbf{z}_j),$$

lo que nos lleva a una contradicción. Tiene que darse entonces $\varphi(\mathbf{z}_j) \geq \varphi(\mathbf{y}_j)$. $\square$

Teorema 3.12. Si Y es una matriz de Levelt de un sistema (2.1) regular en 0, existen una función V holomorfa en U, una matriz diagonal Φ de números enteros y una matriz $E \in GL(n, \mathbb{C})$ triangular superior tales que

$$Y(\tilde{z}) = V(z) z^{\Phi} \tilde{z}^{E}. \tag{3.16}$$

Demostración. Si $\mathbf{z}_j$ son las columnas de la función $Z(z)$ en (2.27), por el lema 3.11 se tiene que $\varphi(\mathbf{z}_j) \geq \varphi(\mathbf{y}_j)$. Entonces, podemos escribir

$$\mathbf{z}_j(z) = z^{\varphi(\mathbf{y}_j)} \mathbf{v}_j(z),$$

con $\mathbf{v}_j$ holomorfa en U, y entonces

$$Z(z) = (\mathbf{z}_1(z), \ldots, \mathbf{z}_n(z)) = (\mathbf{v}_1(z), \ldots, \mathbf{v}_n(z)) z^{\Phi} = V(z) z^{\Phi},$$

donde Φ es la matriz diagonal dada por $\Phi_{jj} = \varphi(\mathbf{y}_j) = \varphi_j$. $\square$

Consideramos ahora la función

$$L(z) = \Phi + z^{\Phi} E z^{-\Phi}. \tag{3.17}$$

Claramente, L es holomorfa en U^*. Vamos a ver que sucede en 0. Si $E = (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, se tiene que el sumando de la derecha viene dado por $z^{\Phi} E z^{-\Phi} = (z^{\varphi_i} e_{ij} z^{-\varphi_j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Entonces, haciendo tender $z \longrightarrow 0$ se tiene que

$$\lim_{z \to 0} z^{\varphi_i} e_{ij} z^{-\varphi_j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i > j, \\ e_{ij}, & \text{si } i \leq j, \ \ \varphi_i = \varphi_j, \\ 0, & \text{si } i < j, \ \ \varphi_i > \varphi_j. \end{cases}$$

Luego el límite existe y L es holomorfa en todo U. Además, por lo que acabamos de ver $L(0)$ es una matriz diagonal por bloques (triangulares superiores) donde cada bloque procede de los k_j elementos de la base de Levelt en los que φ tiene el mismo valor ψ_j, y es sencillo ver que

$$\operatorname{tr} L(0) = \operatorname{tr} \Phi + \operatorname{tr} E.$$

Teorema 3.13. Un sistema (2.1) regular en 0 es fuchsiano en 0 si y solo si $V(0)$ es invertible, donde V es la matriz que aparece en (3.16).

Demostración. Comenzamos con la segunda implicación. Si Y es una matriz de Levelt del sistema, por ser solución de este se tiene que $A(z) = Y'Y^{-1}$. Teniendo en cuenta que

$$(z^{\Phi})' = \Phi z^{\Phi - I} = \frac{1}{z}\Phi z^{\Phi},$$

(y similar para $\tilde{z}^E$), al derivar (3.16) se obtiene

$$Y' = V'z^{\Phi}\tilde{z}^E + \frac{1}{z}V\Phi z^{\Phi}\tilde{z}^E + \frac{1}{z}Vz^{\Phi}E\tilde{z}^E = \frac{1}{z}(zV' + VL)z^{\Phi}\tilde{z}^E.$$

Como $Y^{-1} = (\tilde{z}^E)^{-1}(z^{\Phi})^{-1}V^{-1}$, se tiene que

$$A = Y'Y^{-1} = \frac{1}{z}(zV' + VL)V^{-1}.$$

Por hipótesis $V(0)$ es invertible, luego todas las matrices del lado derecho son holomorfas en U y entonces A tiene a lo sumo un polo de orden uno en 0, luego el sistema es fuchsiano en 0.

Vamos ahora con la primera implicación. Supongamos que el sistema es fuchsiano en 0, es decir,

$$A(z) = \frac{1}{z}C(z), \tag{3.18}$$

con C holomorfa en U. Entonces,

$$\frac{1}{z}CVz^{\Phi}\tilde{z}^E = \frac{1}{z}CY = AY = Y' = \frac{1}{z}(zV' + VL)z^{\Phi}\tilde{z}^E,$$

luego

$$CV = zV' + VL. \tag{3.19}$$

Haciendo tender $z \longrightarrow 0$ en esta expresión, se obtiene

$$C(0)V(0) = V(0)L(0). \tag{3.20}$$

Para ver que $V(0)$ es invertible, probaremos que $\ker V(0) = \{\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n : V(0)\mathbf{c} = 0\} = \{\mathbf{0}\}$.

En primer lugar, observamos que (3.20) implica que si $\mathbf{c} \in \ker V(0)$ entonces

$$V(0)(L(0)\mathbf{c}) = C(0)V(0)\mathbf{c} = C(0)\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

luego $L(0)\ker V(0) \subset \ker V(0)$. Entonces, $L(0)^k \ker V(0) \subset \ker V(0)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\tilde{z}^{L(0)} \ker V(0) \subset \ker V(0)$. Supongamos ahora que $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ y consideramos la solución $\mathbf{y} = Y(\tilde{z})\mathbf{c}$ del sistema. Si

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m, 0, \ldots, 0), \tag{3.21}$$

donde $\mathbf{c}_j \in \mathbb{C}^{k_j}$ y $\mathbf{c}_m \neq 0$, se tiene que $\varphi(\mathbf{y}) = \psi_m$. Vamos a probar que $\varphi(\mathbf{y}) > \psi_m$ para llegar a un absurdo y concluir que $\ker V(0) = \{\mathbf{0}\}$. Observamos que

$$\mathbf{y} = Y(\tilde{z})\mathbf{c} = V(z)z^{\Phi}\tilde{z}^{E}\mathbf{c} = V(z)\tilde{z}^{L(0)}\mathbf{c} + V(z)(z^{\Phi}\tilde{z}^{E} - \tilde{z}^{L(0)})\mathbf{c}.$$

Entonces, nos basta con probar

$$\varphi(V(z)\tilde{z}^{L(0)}\mathbf{c}) > \psi_m, \tag{3.22}$$

y

$$\varphi(V(z)(z^{\Phi}\tilde{z}^{E} - \tilde{z}^{L(0)})\mathbf{c}) > \psi_m. \tag{3.23}$$

Como $\tilde{z}^{L(0)} \ker V(0) \subset \ker V(0)$, se tiene que $V(0)\tilde{z}^{L(0)}\mathbf{c} = 0$. Entonces, al ser V holomorfa podemos desarrollar sus coeficientes en series de Taylor en torno a 0 y se obtiene

$$V(z)\tilde{z}^{L(0)}\mathbf{c} = (V(0) + O(z))\tilde{z}^{L(0)}\mathbf{c} = O(z)\tilde{z}^{L(0)}\mathbf{c}. \tag{3.24}$$

La matriz $L(0)$ es una matriz diagonal por bloques triangulares superiores de tamaño k_j y de la forma $\psi_j I_j + E_{jj}$ (I_j aquí es la identidad de tamaño k_j), luego $\tilde{z}^{L(0)}$ también sera diagonal por bloques y sus bloques serán de la forma

$$\tilde{z}^{\psi_j I_j + E_{jj}} = z^{\psi_j}\tilde{z}^{E_{jj}}.$$

Entonces, teniendo en cuenta (3.21) se llega a que

$$\tilde{z}^{L(0)}\mathbf{c} = (z^{\psi_1}\tilde{z}^{E_{11}}\mathbf{c}_1, \ldots, z^{\psi_m}\tilde{z}^{E_{mm}}\mathbf{c}_m, 0 \ldots, 0).$$

Por (3.14), se tiene que $\varphi(\tilde{z}^{L(0)}\mathbf{c}) \geq \psi_m$ y entonces, usando (3.24), obtenemos finalmente la primera desigualdad (3.22).

Vamos ahora con la segunda. Como V es holomorfa en U,

$$\varphi(V(z)(z^{\Phi}\tilde{z}^{E} - z^{L(0)})\mathbf{c}) \geq \varphi((z^{\Phi}\tilde{z}^{E} - z^{L(0)})\mathbf{c}),$$

y entonces nos basta con probar

$$\varphi((z^{\Phi}\tilde{z}^{E} - \tilde{z}^{L(0)})\mathbf{c}) > \psi_m. \tag{3.25}$$

La matriz $z^{\Phi}\tilde{z}^{E}$ es triangular superior por bloques, de la forma

$$z^{\Phi}\tilde{z}^{E} = \begin{pmatrix} z^{\psi_1}(\tilde{z}^{E})_{11} & z^{\psi_1}(\tilde{z}^{E})_{12} & \dots & z^{\psi_1}(\tilde{z}^{E})_{1h} \\ 0 & z^{\psi_2}(\tilde{z}^{E})_{22} & \dots & z^{\psi_2}(\tilde{z}^{E})_{2h} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^{\psi_h}(\tilde{z}^{E})_{hh} \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Los bloques de la diagonal, $z^{\psi_j}(\tilde{z}^{E})_{jj}$, son precisamente los bloques $z^{\psi_j}\tilde{z}^{E_{jj}}$ que aparecían en la matriz $\tilde{z}^{L(0)}$, luego la diferencia $z^{\Phi}\tilde{z}^{E} - \tilde{z}^{L(0)}$ será una matriz como (3.26) pero sólo con los bloques por encima de la diagonal. Entonces, al multiplicar por $\mathbf{c}$ obtenemos un vector $(z^{\Phi}\tilde{z}^{E} - \tilde{z}^{L(0)})\mathbf{c} = \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}, 0, \dots, 0)$ donde

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=i+1}^{m} z^{\psi_j}(\tilde{z}^{E})_{ij}\mathbf{c}_j.$$

Por tanto, si $m = 1$ se tiene que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $\varphi(\mathbf{x}) = \infty$, y si $m > 1$ solamente aparecen potencias $z^{\psi_1}, \dots, z^{\psi_{m-1}}$ y aplicando de nuevo (3.14) se tiene que $\varphi(\mathbf{x}) \geq \psi_{m-1} > \psi_m$. En cualquiera de los dos casos, queda probado (3.25) y hemos terminado. $\square$

Definición 3.14. Sea Y una matriz de Levelt del sistema (2.1) regular en 0. Los números

$$\beta_k = \varphi_k + \mu_k,$$

donde μ_k son los autovalores de la matriz E considerada en (2.27) se denominan *exponentes del sistema* en el punto 0.

Observación 3.15. Los exponentes que acabamos de definir están determinados de forma única salvo reordenaciones, ya que podemos cambiar el orden en el que aparecen los μ_k

siempre y cuando se correspondan con los autovalores de σ_i^* en $\mathcal{S}_j/\mathcal{S}_{j-1}$, pero a cada uno de estos autovalores le sumaremos siempre el mismo $\psi_j = \varphi_k$.

Consideramos ahora un sistema fuchsiano en 0 de la forma (3.18). Por el teorema 3.13, si tomamos una matriz de Levelt Y y la representamos de la forma (3.16) entonces $V(0)$ será invertible, luego de (3.20) se deduce que

$$C(0) = V(0)L(0)V(0)^{-1},$$

es decir, las matrices $C(0)$ y $L(0)$ son semejantes. Por la estructura de $L(0)$, los exponentes β_j resultan ser los autovalores de $L(0)$ y, al ser las matrices semejantes, los de $C(0)$. Entonces, podemos obtener estos exponentes directamente de la matriz del sistema y usarlos para calcular $\varphi_j = \lfloor \mathrm{Re}\beta_j \rfloor$ (recordemos (2.17)), $\mu_j = \beta_j - \varphi_j$ y $\rho_j = \mathrm{Re}\mu_j$. Además, tanto $L(0)$ como $C(0)$ y $\Phi + E$ tendrán la misma forma canónica de Jordan y

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j = \mathrm{tr}(\Phi + E) = \mathrm{tr}L(0) = \mathrm{tr}C(0). \tag{3.27}$$

Para finalizar este capítulo, vamos a ver cómo llevar estos conceptos al caso global cuando tengamos un sistema con coeficientes analíticos en un dominio $S = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

En primer lugar, vamos a hacer una consideración sobre el estudio local del sistema en puntos singulares distintos de 0. Sean $a_i \neq 0$ un punto singular del sistema, U_i un disco pequeño centrado en a_i que no contenga ningún otro punto singular del sistema, U_i^* el disco agujereado $U_i \setminus \{a_i\}$ y $p_i : \tilde{U}_i^* \longrightarrow U_i^*$ su recubrimiento universal. Lo primero que se puede pensar es en hacer una traslación al origen introduciendo la variable $z - a_i$, pero hay que tener cuidado con qué significaría esta traslación en $\tilde{U}_i^*$: no tiene sentido hablar de $\tilde{z} - a_i$ sin dar explicaciones ya que $\tilde{z}$ es un elemento de $\tilde{U}_i^*$ con el que, a priori, no tenemos definidas operaciones como la suma con un número complejo. En vez de considerar esta traslación, nos moveremos de 0 a a_i. La composición

$$\begin{aligned} \tilde{U}^* &\longrightarrow U^* \longrightarrow U_i^*, \\ \tilde{z} &\longmapsto z \longmapsto z + a_i, \end{aligned} \tag{3.28}$$

(U^* es un disco agujereado centrado en 0 y $\tilde{U}^*$ su recubrimiento universal) nos permite ver $\tilde{U}^*$ como un recubrimiento universal sobre U_i^* (aunque no define un isomorfismo entre $\tilde{U}^*$ y $\tilde{U}_i^*$ de forma única, ya que podríamos meter transformaciones recubridoras de por medio). Entonces, veremos $\tilde{U}_i^*$ como $\tilde{U}^*$ teniendo en cuenta (3.28), denotando $\tilde{z} + a_i \in \tilde{U}_i^*$ y $\tilde{z} \in \tilde{U}^*$

el mismo punto pero sobre $z + a_i \in U_i^*$ o sobre $z \in U^*$ (y algo similar con $\tilde{z} - a_i \in \tilde{U}^*$ y $\tilde{z} \in \tilde{U}_i^*$). En este contexto, tiene sentido hablar de $\log(\tilde{z} - a_i)$ o $(\tilde{z} - a_i)^{E_i}$, y entonces podemos escribir de forma análoga a (3.16) la expresión

$$Y(\tilde{z}) = V_i(z)(z - a_i)^{\Phi_i}(\tilde{z} - a_i)^{E_i}, \quad \tilde{z} \in \tilde{U}_i^*, z = p\tilde{z} \in U_i^*, \tag{3.29}$$

donde V_i es holomorfa en U_i, y las matrices Φ_i y E_i juegan el mismo papel que las matrices Φ y E en el caso de que el punto singular fuese el origen.

Continuamos hablando sobre singularidades en el infinito. En particular, nos interesará estudiar cómo debe ser un sistema fuchsiano para no presentar una singularidad en ∞. Si (2.1) es fuchsiano, la matriz $A(z)$ deberá ser de la forma

$$A(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - a_i} B_i + B(z),$$

donde B es holomorfa en $\mathbb{C}$. Reescribimos el sistema en términos de $t = \frac{1}{z}$, obteniendo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = (D_1(t) - D_2(t))\mathbf{y}, \quad D_1(t) = -\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{1 - a_i t}, \quad B_2(t) = \frac{1}{t^2} B\left(\frac{1}{t}\right).$$

El sistema será fuchsiano en $t = 0$ si y solo si $\frac{1}{t^2} B(\frac{1}{t})$ tiene a lo sumo un polo de orden uno allí. Esto implica que $B(\infty) = 0$, y como B es holomorfa en $\mathbb{C}$ del teorema de Liouville B.4 se deduce que $B = 0$. Entonces, los sistemas fuchsianos en $\overline{\mathbb{C}}$ tienen matriz $A(z)$ de la forma

$$A(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - a_i} B_i.$$

Estos sistemas no presentarán una singularidad en ∞ si y solo si el residuo de D_1 en $t = 0$ es zero, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} B_i = 0. \tag{3.30}$$

Con las consideraciones que acabamos de hacer, toda la teoría local desarrollada por Levelt se puede llevar a puntos singulares distintos de cero, obteniendo así parámetros

$$\Phi_i, E_i, L_i(0), \mu_i^j, \rho_i^j, \varphi_i^j, \beta_i^j, \tag{3.31}$$

en cada punto singular a_i. Para esto aún no necesitamos hacer nada a nivel global, basta con considerar parámetros locales $z - a_i$ o $\frac{1}{z}$ si $a_i = \infty$ como acabamos de comentar. Podemos ahora introducir el último teorema que necesitaremos para estudiar el contraejemplo.

Teorema 3.16. Para cualquier sistema regular, $\sum_{i,j} \beta_i^j \leq 0$. La igualdad se da si y solo si el sistema es Fuchsiano.

Demostración. Sean Y_i matrices de soluciones de Levelt en cada punto a_i. Usando coordenadas locales, podemos escribir

$$Y_i(\tilde{z}) = V_i(z)(z - a_i)^{\Phi_i}(\tilde{z} - a_i)^{E_i}, \quad \tilde{z} \in \tilde{U}_i^*, z = p\tilde{z} \in U_i^*,$$

como en (3.29). Es sencillo comprobar que el determinante de la exponencial de una matriz es la exponencial de su traza, luego al aplicar esto en las expresiones anteriores se obtiene que

$$\det Y_i(\tilde{z}) = \det V_i(z)(\tilde{z} - a_i)^{\mathrm{tr}\Phi_i + \mathrm{tr}E_i}. \tag{3.32}$$

La función $\det V_i(z)$ es holomorfa en U_i, luego podemos escribir

$$\det V_i(z) = (z - a_i)^{b_i} h_i(z), \tag{3.33}$$

donde $b_i \in \mathbb{N}$ y h_i es holomorfa en U_i con $h_i(a_i) \neq 0$. Por (3.27), se tiene que

$$s_i = \mathrm{tr}\Phi_i + \mathrm{tr}E_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_i^j. \tag{3.34}$$

Entonces, sustituyendo (3.33) y (3.34) en (3.32) obtenemos que

$$\det Y_i(\tilde{z}) = h_i(z)(\tilde{z} - a_i)^{b_i + s_i}.$$

Como $Y_i' = AY_i$, por el teorema 2.7 se tiene que $\det Y_i$ es solución de la ecuación diferencial escalar $y' = \mathrm{tr}A\, y$ y entonces

$$\mathrm{tr}A(z) = \frac{(\det Y_i(\tilde{z}))'}{\det Y_i(\tilde{z})} = \frac{b_i + s_i}{z - a_i} + \frac{h_i'(z)}{h_i(z)},$$

en cada a_i. Si tomamos $R > 0$ suficientemente grande como para que todos los puntos singulares (excepto el infinito, si es que fuese uno de ellos) estén dentro de la circunferencia

Γ_R de radio R, por el teorema de los residuos B.5 se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \mathrm{tr}A(z)dz = \sum_{\substack{i=1\\ a_i\neq\infty}}^{n} \mathrm{Res}(\mathrm{tr}A, a_i) = -\mathrm{Res}(\mathrm{tr}A, \infty).$$

Entonces, independientemente de si algún $a_i = \infty$ (si no lo es entonces $\mathrm{tr}A$ es holomorfa en ∞ y el residuo allí vale 0) se tiene que la suma de todos los residuos es 0. Pero estos residuos son precisamente

$$\lim_{z\to a_i}(z-a_i)\left(\frac{b_i+s_i}{z-a_i}+\frac{h_i'(z)}{h_i(z)}\right) = b_i + s_i,$$

luego

$$\sum_{i,j}\beta_i^j = \sum_{i=1}^{n} s_i = -\sum_{i=1}^{n} b_i \leq 0$$

y obtenemos la desigualdad para sistemas regulares. Además, la igualdad se da si y solamente si todos los b_i son 0, es decir, si $\det V_i(z) \neq 0$ para cada i. Por el teorema 3.13 concluimos que esto solo ocurre si el sistema es fuchsiano. □

Hacemos ahora unos últimos comentarios ya sobre el carácter global del sistema que necesitaremos más adelante. Si $p : \tilde{S} \longrightarrow S$ es el recubrimiento universal de S y $p_i : \tilde{U}_i^* \longrightarrow U_i^*$ el recubrimiento universal de U_i^*, se tiene que $p^{-1}U_i^*$ es más grande que $\tilde{U}_i^*$, ya que $p^{-1}U_i^*$ incluye puntos obtenidos al prolongar analíticamente Y a través de curvas que rodeen otras singularidades del sistema y no estén contenidas en U_i^*. Resulta entonces que $p^{-1}U_i^*$ es un conjunto que no es conexo y cuyas componentes conexas son isomorfas a $\tilde{U}_i^*$ como espacios recubridores de U_i^*, luego podemos identificar una de estas componentes con U_i^*. Además, cualquier otra componente conexa de $p^{-1}U_i^*$ se puede obtener aplicando una transformación recubridora $\tau \in \Delta$ (de $\tilde{S}$) a U_i^*, es decir, estas componentes conexas tienen la forma $\tau\tilde{U}_i^*$. Entonces, si Y es una solución global del sistema en $\tilde{S}$ tal que $Y|_{\tilde{U}_i^*}$ es una base de Levelt en $\tilde{U}_i^*$, por (3.16) y lo que acabamos de comentar se tendrá que

$$Y(\tilde{z}) = Y(\tau^{-1}\tilde{z})\chi(\tau^{-1}) = V(z)(z-a_i)^{\Phi_i}(\tau^{-1}\tilde{z}-a_i)^{E_i}\chi(\tau^{-1}), \tag{3.35}$$

si $\tilde{z}$ es un punto de otra componente conexa $\tau\tilde{U}_i^*$ de $p^{-1}\tilde{U}_i^*$.

3.3. El sistema de segundo orden

Vamos a estudiar el sistema (3.6) con matriz (3.4). Los puntos singulares del sistema son $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$ y $a_4 = \frac{1}{2}$, y todas ellas son singularidades fuchsianas (para ver que no hay singularidad en ∞ se puede comprobar fácilmente que el sistema verifica la condición (3.30)). Si escribimos el sistema en la forma

$$\mathbf{y}' = \frac{1}{z - a_i} C_i(z)\mathbf{y},$$

de forma similar a como hicimos en (3.18), obtenemos que las matrices $C_i(0)$ son

$$C_1(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C_2(0) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; C_3(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; C_4(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recordamos que el polinomio característico de una matriz M, $\det(M - \lambda I) = 0$, resulta ser $\lambda^2 - \lambda \mathrm{tr} M + \det M = 0$ cuando la matriz es de tamaño 2×2. Entonces, los autovalores de cada una de las matrices, que son los exponentes β_j^i, vienen dados por $\beta_1^1 = 1$, $\beta_1^2 = -1$ y $\beta_i^j = 0$ para $j = 1, 2$, $i = 2, 3, 4$. Entonces, para $i = 2, 3, 4$ se tiene que

$$\varphi_i^j = \beta_i^j = \mu_i^j = 0, \quad j = 1, 2,$$

y $\Phi_i = 0$, luego los factores z^{Φ_i} no aparecen en las representaciones (3.35) cerca de los puntos a_2, a_3 y a_4, las cadenas de subespacios (3.11) son triviales ($\{0\} = \mathcal{S}_i^0 \subset \mathcal{S}_i^1 = \mathcal{S}_i$) y la única condición que tenemos para tener una base de Levelt es que la matriz E_i en esta base sea de la de la forma $E_i = \begin{pmatrix} 0 & e_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (triangular superior con los autovalores $\mu_i^j = 0$ en la diagonal). Por tanto, para cualquier matriz fundamental de soluciones Y del sistema (que no tiene por qué ser de Levelt en a_i) se tendrá que

$$Y(\tilde{z}) = V_i(z)(\tilde{z} - a_i)^{E_i}, \;\; \tilde{z} \in \tilde{U}_i^*, \tag{3.36}$$

con V_i holomorfa en U_i, E_i triangular superior con ceros en la diagonal y $V_i(0)$ es invertible: si Y es dicha matriz fundamental, se tiene que $Y = Y_i C$ con Y_i matriz de Levelt en a_i y $C \in GL(2, \mathbb{C})$, luego

$$Y = Y_i C = V_i(\tilde{z} - a_i)^{E_i} C = (V_i C)(C^{-1}(\tilde{z} - a_i)^{E_i} C) = (V_i C)(\tilde{z} - a_i)^{C^{-1} E_i C},$$

y las matrices V_iC y $C^{-1}E_iC$ verifican las condiciones deseadas. Además, por (3.35) en $p^{-1}U_i^* \setminus \tilde{U}_i^*$ se tiene que

$$Y(\tilde{z}) = V_i(z)(\tau^{-1}\tilde{z} - a_i)^{E_i}\chi(\tau^{-1}), \tag{3.37}$$

donde τ es la transformación recubridora de $\tilde{S}$ tal que el punto $\tilde{z} \in p^{-1}U_i^* \setminus \tilde{U}_i^*$ está en la componente conexa $\tau\tilde{U}_i^*$.

En el punto $a_1 = 0$, la situación es algo más complicada. Se tiene que

$$\varphi_1^1 = \beta_1^1 = 1, \varphi_1^2 = \beta_1^2 = -1, \mu_1^j = 0, \quad j = 1, 2,$$

La matriz E_1 tendrá la forma $E = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (es triangular superior y $\mu_1^j = 0$), pero a priori e es desconocido. Para hallarlo, vamos a considerar los términos de orden menor o igual que 2 en $C_1(z) = zB(z)$ y $V_1(z)$. La matriz (3.4) se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} B(z) = &\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6(z+1)} - \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{3(z-\frac{1}{2})}\right)\Phi + \\ &+ \left(\frac{1}{6(z+1)} - \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{3(z-\frac{1}{2})}\right)\Psi, \end{aligned}$$

donde $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Desarrollando en serie de potencias en torno a $z = 0$, obtenemos que

$$C_1(z) = (1 + z + 2z^2)\Phi - z^2\Psi + \dots \tag{3.38}$$

Es sencillo ver que

$$\left[\Phi, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \Phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.39}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} E_1 \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\beta^{-1}e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha\beta^{-1}E_1. \tag{3.40}$$

Tomando $\alpha = z$, $\beta = z^{-1}$, se observa también que

$$z^{\Phi} E_1 z^{-\Phi} = z^2 E_1. \tag{3.41}$$

Entonces, de (3.41) se deduce que $L_1(z) = \Phi + z^2 E_1$. Al ser V_1 holomorfa en U_1, se tiene que

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n W_n. \tag{3.42}$$

Sustituyendo las expresiones que acabamos de obtener para C_1, V_1 y L_1 en $zV' = CV - VL$ (recordemos (3.19)) e igualando los términos en potencias de z de orden menor o igual que 2, obtenemos

$$0 = [\Phi, W_0], \tag{3.43}$$

$$W_1 = [\Phi, W_1] + \Phi W_0, \tag{3.44}$$

$$2W_2 = [\Phi, W_2] + \Phi W_{-1} + (2\Phi - \Psi) W_0 - W_0 E_1. \tag{3.45}$$

Si $W_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, por (3.39) y (3.43) se tiene que $b = c = 0$. Además, si $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ es una base de Levelt, al multiplicar por constantes no nulas $(c_1\mathbf{y}_1, c_2\mathbf{y}_2)$ seguirá siendo una base de Levelt ($\varphi(c_i\mathbf{y}_i) = \varphi(\mathbf{y}_i)$ y la forma triangular de σ^* se conserva), luego podemos reemplazar $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ por $(a^{-1}\mathbf{y}_1, d^{-1}\mathbf{y}_2)$. Entonces, $Y\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}$ es una nueva solución de (3.6) y, como Y verifica (3.16), se tiene que

$$Y\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} = V_1 z^{\Phi} \tilde{z}^{E_1} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= V_1 \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} z^{\Phi} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \tilde{z}^{E_1} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \right)$$

Por (3.40), se tiene que

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} z^{\Phi} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} = z^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Phi \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}} = z^{\Phi},$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \tilde{z}^{E_1} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} = \tilde{z}^{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} E_1 \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}},$$

donde en el caso de Φ también hemos tenido en cuenta la forma diagonal de esta. Entonces, para la nueva matriz de Levelt (la denotaremos Y de nuevo, al igual que con el resto de matrices de las que hablaremos a continuación), tenemos que V_1 se reemplaza por $V_1 \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}$, E_1 por $ad^{-1}E_1$ y Φ sigue igual. Entonces, la nueva V_1 verificará que $W_0 = V_1(0) = I$.

En esta nueva base de Levelt con $V_1(0) = I$, (3.44) pasa a ser

$$W_1 = [\Phi, W_1] + \Phi. \tag{3.46}$$

Si $W_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la igualdad anterior junto con (3.39) implecan que $b = 2b$ y $c = -2c$, luego $b = c = 0$. Entonces, $[\Phi, W_1] = 0$ y (3.46) se reduce a $W_1 = \Phi$. Sustituyendo $W_0 = I$ y $W_1 = \Phi$ en (3.45), se tiene que

$$2W_2 = [\Phi, W_2] + \Phi^2 + 2\Phi - \Psi - E_1.$$

Si $W_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, al igualar el elemento de la esquina superior derecha en ambos lados (usando de nuevo (3.39)) se obtiene que

$$2b = 2b - 1 - e,$$

luego $e = -1 \neq 0$. Además, como en W_1 y W_2 $b = c = 0$ se tiene que $V_1(z)$ es de la forma

$$V_1(z) = \begin{pmatrix} 1 + \dots & \alpha z^2 \\ \beta z^2 & 1 + \dots \end{pmatrix}.$$

Observando que $E_1^k = 0$ para $k \geq 2$ (es decir, E_1 es nilpotente de orden dos), vemos que

$$\tilde{z}^{E_1} = e^{\log \tilde{z}\, E_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log \tilde{z}\, E_1)^k}{k!} = I + \log \tilde{z}\, E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\log \tilde{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego sustituyendo en (3.16) obtenemos que los primeros términos de $Y(\tilde{z})$ para $\tilde{z} \in \tilde{U}_1^*$ son

$$Y(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} 1+\dots & \alpha z^2 \\ \beta z^2 & 1+\dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\log \tilde{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+\dots & -z\log \tilde{z} + \alpha z + \dots \\ \beta z^3 + \dots & \frac{1}{z} + \dots \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

Utilizaremos esta expresión más adelante. Ahora, vamos a introducir una nueva definición que usaremos para obtener la condición que habíamos comentado al principio del capítulo que tiene que cumplir un sistema con las singularidades y monodromía de (3.6).

Definición 3.17. Si (3.6) es un sistema fuchsiano de orden 2 con puntos singulares $a_1, \dots, a_n$, se define el *peso fuchsiano* del sistema como

$$\gamma_{(B)} = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i^1 - \varphi_i^2).$$

En el caso (3.4) que hemos estudiado, de los valores de φ_i^j se obtiene que $\gamma_{(B)} = 2$. A partir de estos pesos fuchsianos de un sistema dado, podemos definir otros pesos asociados a todos los sistemas que compartan una misma mondromía.

Definición 3.18. Sean $\{a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto de puntos singulares y $\{C^{-1}\chi C\}$ una clase de monodromía (χ es una representación $\Delta \longrightarrow GL(2, \mathbb{C})$). Se define el *peso fuchsiano* de χ como el mínimo de todos los pesos fuchsianos de los sistemas $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$ con singularidades a_i y monodromía $\{C^{-1}\chi C\}$. Lo denotaremos por $\gamma_\chi = \min \gamma_{(D)}$.

Vamos ahora con la condición que comentamos en la introducción.

Lema 3.19. Si a_i y χ son las singularidades y monodromía del sistema (3.4) con matriz (3.6), entonces $\gamma_\chi = 2$.

Demostración. Supongamos que existe un sistema $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$ con estas singularidades y monodromía tal que $\gamma_{(D)} < 2$. Para este sistema, denotamos los parámetros mencionados en (3.31) por $\varphi_i^j(D)$, $\beta_i^j(D)$, $\mu_i^j(D)$, $\rho_i^j(D)$. Para la monodromía χ, las matrices $E_i = \frac{1}{2\pi i} \log G_i$ (donde $G_i = \chi(\sigma^{-1})$, luego estas matrices realmente dependen de χ) hemos visto que son triangulares superiores con ceros en la diagonal y tienen autovalores $\mu_i^j(D) = 0$, luego $\rho_i^j(D) = 0$ y $\varphi_i^j(D) = \beta_i^j(D)$. Sean $k = \sum_{i=1}^4 \varphi_i^1(D)$ y $l = \sum_{i=1}^4 \varphi_i^2(D)$. Se tiene entonces que $\gamma_{(D)} = k - l$ y $k \geq l$ (recordemos que $\varphi_i^1(D) \geq \varphi_i^2(D)$), luego por el teorema 3.16 se tiene que

$$k + l = \sum_{i,j} \varphi_i^j = \sum_{i,j} \beta_i^j = 0.$$

Entonces, $k = -l$, $\gamma_{(D)} = 2k$ y si $0 \leq \gamma_{(D)} < 2$ se tiene que $k = l = \gamma_{(D)} = 0$, luego $\varphi_i^1(D) = \varphi_i^2(D)$ para cada i. Esto quiere decir que en un mismo punto regular a_i todas las soluciones del sistema tienen un crecimiento similar (ignorando potencias fraccionarias y logaritmos), pero para diferentes puntos a_i el crecimiento puede variar. Vamos a modificar el sistema para que esto no ocurra manteniendo las singularidades y monodromía.

Sea $m_i = \varphi_i^1(D) = \varphi_i^2(D)$. Consideramos el cambio de variable $\mathbf{z} = f\mathbf{y}$, donde

$$f = \prod_{i=1}^{4} (z - a_i)^{-m_i}.$$

Derivando,

$$\mathbf{z}' = f\mathbf{y}' + f'\mathbf{y} = (D + \frac{f'}{f} I) f\mathbf{y} = F\mathbf{z}, \tag{3.48}$$

donde $F = D + (\log f)' I = D - \sum_{i=1}^4 \frac{m_i}{z-a_i} I$. Entonces, si $D = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{z-a_i} D_i$ se tiene que $F = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{z-a_i} F_i$ con $F_i = D_i - m_i I$, luego el nuevo sistema no tiene ninguna singularidad adicional en ∞ ($\sum_{i=1}^4 D_i = 0$ por ser $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$ fuchsiano y $\sum_{i=1}^4 m_i = k = 0$). Entonces, el nuevo sistema tiene las mismas singularidades y monodromía y para cualquier solución $\mathbf{z}$ suya se tiene $\varphi_i(\mathbf{z}) = \varphi_i(\mathbf{y}) - m_i = 0$. Por tanto, para cualquier matriz solución Z con $Z' = FZ$ se tiene que

$$Z(\tilde{z}) = W_i(z)(\tau^{-1}\tilde{z} - a_i)^{E_i} \chi(\tau^{-1}), \;\; \tilde{z} \in \tau \tilde{U}_i^*. \tag{3.49}$$

Consideramos ahora una matriz de Levelt Y del sistema con matriz (3.6) tal que $V_1(0) = I$. Sea χ su representación de monodromía (definida según (3.5)) y Z una solución de $Z' = FZ$ con la misma representación de monodromía. En $p^{-1}U_i^*$ con $i = 2, 3, 4$ se verifica (3.37), mientras que en $p^{-1}U_1^*$ se tiene que

$$Y(\tilde{z}) = V_1(z) z^{\Phi} (\tau^{-1}\tilde{z})^{E_1} \chi(\tau^{-1}), \;\; \tilde{z} \in \tau \tilde{U}_1^*.$$

Entonces, al hacer el producto YZ^{-1} se cancelan factores y se tienen las siguientes propiedades:

$$YZ^{-1} = V_1(z)z^{\Phi}W_1(z)^{-1}, \ \ \tilde{z} \in p^{-1}U_1^*, \tag{3.50}$$

$$YZ^{-1} = V_i(z)W_i(z)^{-1}, \ \ \tilde{z} \in p^{-1}U_i^*, \ \ i = 2, 3, 4, \tag{3.51}$$

$$YZ^{-1} \text{ es holomorfa en } \tilde{S}, \tag{3.52}$$

$$YZ^{-1} \circ \sigma = (Y \circ \sigma)(Z \circ \sigma)^{-1} = Y\chi^{-1}(\sigma)\chi(\sigma)Z^{-1} = YZ^{-1}. \tag{3.53}$$

Las propiedades (3.52) y (3.53) implican que YZ^{-1} es holomorfa en S, y (3.51) junto con el teorema 3.13 (que implica $W_i(0) \neq 0$) nos dice que YZ^{-1} también es holomorfa en $U_2 \cup U_3 \cup U_4$. En U_1, recordando la expresión de Y que obtuvimos en (3.47) se tiene que

$$YZ^{-1} = V_1(z)z^{\Phi}W_1^{-1}(z) = \begin{pmatrix} O(1) & O(z^2) \\ O(z) & O(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} (\text{matriz hol.}) = \begin{pmatrix} O(z) & O(z) \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Se tiene entonces que la primera fila de YZ^{-1} es holomorfa en U_1, luego es holomorfa en todo $\mathbf{C}$ y, por tanto, constante. Al ser $O(z)$ en U_1, tiene que ser idénticamente nula, pero esto contradice el hecho de que YZ^{-1} sea invertible. □

3.4. El sistema de tercer orden

Finalmente, vamos a estudiar el sistema (2.1) con matriz (3.1). Como habíamos comentado, este sistema es equivalente al sistema de orden 2 (3.6) con matriz (3.4) junto con la ecuación (3.5). En primer lugar, vamos a ver que el sistema no tiene singularidad en ∞. Para el sistema (3.6) ya lo habíamos comprobado en la sección anterior, luego solo basta con reescribir la ecuación (3.5) en términos de la variable $t = \frac{1}{z}$ y comprobar que no hay polos en $t = 0$. Con el cambio de variable la ecuación tiene la forma

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t^2}\left(a_{12}\left(\frac{1}{t}\right)y^2 + a_{13}\left(\frac{1}{t}\right)y^3\right).$$

Teniendo en cuenta (3.3), se ve fácilmente que $\frac{1}{t^2}a_{12}\left(\frac{1}{t}\right)$ y $\frac{1}{t^2}a_{13}\left(\frac{1}{t}\right)$ no tienen polos en $t = 0$.

Los puntos $a_2 = -1$, $a_3 = 1$ y $a_4 = \frac{1}{2}$ son claramente fuchsianos. Entonces, escribiendo

$$\mathbf{y}' = \frac{1}{z - a_i} C_i(z)\mathbf{y},$$

como en (3.18) obtenemos que

$$C_2(0) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ C_3(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C_4(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando los autovalores de estas matrices, se obtiene que $\beta_i^j = 0$ para $i = 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3$, luego

$$\varphi_i^j = \beta_i^j = \mu_i^j = 0,\ \ i = 2, 3, 4\ \ j = 1, 2, 3.$$

Por tanto, $\Phi_i = 0$, y $E_i = L_i(0)$. Observamos que $\mathbf{y} \mapsto C_i^2(0)\mathbf{y}$ anula las dos últimas componentes de cada vector $\mathbf{y}$ (lo vimos en la sección anterior al estudiar el sistema de orden 2), y entonces $C_i^3(0)\mathbf{y} = \mathbf{0}$ al ser la primera componente de $C_i^3(0)$ una combinación lineal de las dos últimas. Entonces, las matrices $E_i = L_i(0)$ son nilpotentes de orden tres ($E_i^k = 0$ si $k \geq 3$) y tienen rango 2 al ser semejantes a $C_i(0)$.

Vamos ahora con el punto singular $a_1 = 0$. Si $\mathbf{y}$ es una solución del sistema, al ser (3.6) fuchsiano (y por tanto regular) las componentes y_2 e y_3 tendrán crecimiento moderado, y entonces al satisfacerse la ecuación (3.5) la primera componente y_1 también lo tendrá. Por tanto el sistema es regular en $a_1 = 0$ (aunque no es fuchsiano, ya que un coeficiente de la matriz presenta un polo de orden 2).

Vamos a ver como obtener una base de Levelt del sistema en el punto 0. Sean

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{\mathbf{y}}_2 = \begin{pmatrix} y_2^2 \\ y_2^3 \end{pmatrix},\ \overline{\mathbf{y}}_3 = \begin{pmatrix} y_3^2 \\ y_3^3 \end{pmatrix},$$

donde $(\overline{\mathbf{y}}_2, \overline{\mathbf{y}}_3)$ es una base de Levelt para el sistema de orden 2 (3.6) tal que $V(0) = I$ (vimos en la sección anterior que se podía construir una base de esta forma). Añadimos a los vectores de esta base las componentes

$$y_2^1 = \int (a_{12}y_2^2 + a_{13}y_2^3)dz,$$
$$y_3^1 = \int (a_{12}y_3^2 + a_{13}y_3^3)dz,$$

de modo que los vectores $\mathbf{y}_2$ e $\mathbf{y}_3$ satisfacen la ecuación (3.5) (la constante de integración no es relevante, podemos tomar 0 mismamente). Entonces, de las expresiones de a_{12} y a_{13} de (3.3) y la expresión de Y de (3.47) obtenemos que

$$a_{12}y_2^2 + a_{13}y_2^3 = \frac{1}{z^2}(z + \dots) + (\text{hol.})(z + \dots) + (\text{hol.})(\beta z^3 + \dots) = \frac{1}{z} + \text{hol.},$$

donde hol. denota una expresión holomorfa en 0 y los puntos suspensivos términos de orden superior. Por tanto,

$$y_2^1 = \log \tilde{z} + f, \tag{3.54}$$

donde f es holomorfa en U_1 y $\varphi(f) > 0$. Por tanto,

$$\lambda \mathbf{y}_1 + \mu \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \log \tilde{z} + \text{hol.} \\ \text{hol.} \\ \text{hol.} \end{pmatrix},$$

y entonces si $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ se tiene que

$$\varphi(\lambda y_1^1 + \mu y_2^1) = \varphi(\lambda + \mu \log \tilde{z} + f) = 0,$$

y para el resto de coordenadas al aplicar φ obtenemos un número mayor que 0 por ser holomorfas. Entonces, $\mathcal{S}_1^1 = \mathbb{C}\mathbf{y}_1 \bigoplus \mathbb{C}\mathbf{y}_2$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}_1$ (el espacio de soluciones del sistema en $\tilde{U}_1^*$) para el que se verifica $\varphi(\mathcal{S}_1^1 \setminus \{0\}) = 0$.

Veamos que sucede con $\mathbf{y}_3$. Teniendo en cuenta (3.3) y (3.47) de nuevo, obtenemos que

$$\begin{aligned} a_{12}y_3^2 + a_{13}y_3^3 = \left(\frac{1}{z^2} + \text{hol.}\right)(-z \log \tilde{z} + \alpha z + \dots) + \left(-\frac{1}{2} + \dots\right)\left(\frac{1}{z} + \dots\right) = \\ = -\frac{\log \tilde{z}}{z} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{z} + \dots, \end{aligned}$$

luego

$$y_3^1 = -\frac{1}{2}\log^2 \tilde{z} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\log \tilde{z} + \dots$$

Entonces, $\varphi(y_3^1) = \varphi(y_3^2) = 0$ y $\varphi(y_3^3) = -1$, luego el mínimo es $\varphi(\mathbf{y}_3) = -1$. Por tanto, $\varphi(\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_1^1) = \varphi(\mathbb{C}\mathbf{y}_3 \setminus \{0\}) = -1$ y hemos obtenido así la cadena de subespacios (3.11)

$$\{0\} = \mathcal{S}_1^0 \subset \mathcal{S}_1^1 \subset \mathcal{S}_1^2 = \mathcal{S}_1,$$

donde $\varphi_1^1 = \varphi_1^2 = 0$ y $\varphi_1^3 = -1$.

Nos queda ver cómo es E_1. Como $\mathbf{y}_1$ es holomorfa (constante), $\sigma_1^*\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1 \circ \sigma_1 = \mathbf{y}_1$. Además, como $\log \circ \sigma_1 = \log + 2\pi i$ se deduce de (3.54) que $\sigma_1^*\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2 \circ \sigma_1 = \mathbf{y}_2 + 2\pi i \mathbf{y}_1$ (σ_1 sólo modifica la primera componente del vector porque lleva un logaritmo, el resto son holomorfas). Entonces, si $G_1 = \chi(\sigma_1^{-1})$ donde χ es la monodromía asociada a Y se tiene que

$$YG_1 = \begin{pmatrix} 1 & y_2^1 & y_3^1 \\ 0 & y_2^2 & y_3^2 \\ 0 & y_2^3 & y_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_2^1 + 2\pi i & y_3^1 \\ 0 & y_2^2 & y_3^2 \\ 0 & y_2^3 & y_3^3 \end{pmatrix} = Y \circ \sigma_1.$$

Podemos despejar fácilmente $a = d = 1$ y $b = 2\pi i$. Además,

$$(\overline{\mathbf{y}}_2, \overline{\mathbf{y}}_3) \circ \sigma_1 = (\overline{\mathbf{y}}_2, \overline{\mathbf{y}}_3) \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = (\overline{\mathbf{y}}_2, \overline{\mathbf{y}}_3)\overline{G}_1,$$

donde $\overline{G}_1 = \overline{\chi}(\sigma_1^{-1})$ es la matriz de la representación $\overline{\chi}$ obtenida al considerar el sistema fundamental de soluciones $(\overline{\mathbf{y}}_2, \overline{\mathbf{y}}_3)$ del sistema (3.6) que estudiamos en la sección anterior (recordemos que se trata de una base de Levelt con $V_1(0) = I$). Tal y como vimos en esa sección, la matriz $\overline{E}_1$ correspondiente viene dada por $\overline{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y entonces

$$\overline{G}_1 = I + 2\pi i \overline{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i & * \\ 0 & 1 & -2\pi i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación 3.20. Razonando de un modo similar para una transformación recubridora cualquiera $\sigma \in \Delta$ (no necesariamente σ_1), se obtiene que $\log \circ \sigma = \log + \chi_1(\sigma^{-1})$ donde χ_1 es una representación $\Delta \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z}$ y

$$\chi(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & \chi_1(\sigma) & * \\ 0 & \overline{\chi}(\sigma) & \\ 0 & & \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

Para obtener E_1 nos bastará con usar $G_1 = \chi(\sigma_1^{-1})$, pero más adelante usaremos esta expresión más general.

Los autovalores de G_1 son $\lambda_1^j = 1$ para $j = 1, 2, 3$, luego los de E_1 serán $\mu_j = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda_1^j = 0$. Además, al ser E_1 triangular superior estos autovalores aparecerán en la diagonal principal y entonces

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1^k = 0 \text{ si } k \geq 3.$$

Por tanto, se tiene que

$$G_1 = I + 2\pi i E_1 - 2\pi^2 E_i^2,$$

y de aquí se deduce que

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego E_1 tiene rango 2 y es nilpotente de orden 3, igual que el resto de E_i, $i = 2, 3, 4$.

Antes de probar finalmente el teorema 3.2, hacemos una última observación. Hemos visto que las aplicaciones σ_i^* $(i = 1, 2, 3, 4)$ tienen matrices $G_i = e^{2\pi i E_i}$ en alguna base, siendo cada E_i de rango 2 y nilpotente de orden 3, luego la dimensión de los autoespacios de cada

G_i (asociados a sus únicos autovalores $\lambda_i = 1$) serán

$$\dim(\ker(G_i - I)) = 3 - \mathrm{rg}(G_i - I) = 1.$$

Como $\mathbf{y}_1 = (1,0,0)^T$ verifica $\sigma_i^* \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1$ para cada $i = 1,2,3,4$, estos autoespacios resultan ser

$$\mathbb{C}\mathbf{y}_1 = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Finalmente, estamos en condiciones de demostrar el teorema 3.2 y dar así una respuesta al problema de Riemann-Hilbert 3.1.

Demostración del teorema 3.2. Supongamos que $\mathbf{z}' = C\mathbf{z}$ es un sistema fuchsiano con las singularidades y monodromía del sistema (2.1) con matriz (3.1) y denotamos por $\hat{\mathcal{S}}$ su espacio de soluciones. Sea $Y = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$ una matriz fundamental de soluciones del sistema y χ su representación de monodromía. El sistema $\mathbf{z}' = C\mathbf{z}$ tendrá entonces una matriz fundamental de soluciones $Z = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3)$ con la misma representación de monodromía. Consideramos el isomorfismo

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{S} &\longrightarrow \hat{\mathcal{S}}, \\ \mathbf{y}_i &\longmapsto \mathbf{z}_i. \end{aligned}$$

Se tiene que θ verifica $\theta(\mathbf{y} \circ \sigma) = (\theta\mathbf{y}) \circ \sigma$ para cualquier $\sigma \in \Delta$: si $\mathbf{y} = Y\eta \in \mathcal{S}$, donde $\eta \in \mathbb{C}$, y $\mathbf{z} = \theta\mathbf{y}$, entonces $\mathbf{z} = Z\eta$ y

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{y} \circ \sigma) &= \theta(Y\eta \circ \sigma) = \theta((Y \circ \sigma)\eta) = \theta(Y\chi^{-1}(\sigma)\eta) = \\ &= Z\chi^{-1}(\sigma)\eta = (Z \circ \sigma)\eta = Z\eta \circ \sigma = \mathbf{z} \circ \eta. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{z}_0 = \theta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \theta\mathbf{y}_0,$$

verifica que $\sigma_i^* \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0 \circ \sigma_i = \theta(\mathbf{y}_0 \circ \sigma_i) = \theta\mathbf{y}_0 = \mathbf{z}_0$ para cada $i = 1,2,3,4$, luego se puede ver como un vector de funciones holomorfas en S. Al tener $\mathbf{z}_0$ crecimiento moderado en cada a_i por ser el sistema regular, se tiene que $\mathbf{z}_0$ es meromorfo en $\overline{\mathbb{C}}$. Entonces, al menos una de sus componentes z_0^k tendrá que verificar $\sum_{i=1}^4 \varphi_i(z_0^k) \leq 0$: la valoración φ_p en cada punto $p \in \overline{\mathbb{C}}$ nos dará el orden del polo (resp. del cero) si p es un polo (resp. cero) de z_0^k o 0 si p no es ni un orden ni un polo, luego $\sum_{p\in\overline{\mathbb{C}}} \varphi_p(z_0^k) = 0$ (la suma de los órdenes de los polos es igual a la suma de los órdenes de los polos por ser z_0^k meromorfa en $\overline{\mathbb{C}}$) y entonces si $\sum_{i=1}^4 \varphi_i(z_0^k) > 0$ se tendría que $\varphi_p(z_0^k) < 0$ para algún $p \neq a_i$, pero esto no puede ser ya que los a_i son los únicos posibles polos de z_0^k. Entonces,

$$\sum_{i=1}^4 \varphi_i(\mathbf{z}_0) = \sum_{i=1}^4 \text{mín}\{\varphi_i(z_0^j), j = 1, 2, 3\} \leq \sum_{i=1}^4 \varphi(z_0^k) \leq 0. \tag{3.56}$$

De $\sigma_i^* \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0$ se deduce que $\mathbf{z}_0$ es el primer vector de alguna base de Levelt del sistema $\mathbf{z}' = C\mathbf{z}$ en cada a_i, luego $\varphi_i^1(C) = \varphi_i(\mathbf{z}_0)$ es el máximo valor que toma φ_i. Sean

$$k = \sum_{i=1}^4 \varphi_i^1(C), \quad l = \sum_{i=1}^4 \varphi_i^2(C), \quad m = \sum_{i=1}^4 \varphi_i^3(C).$$

Por (3.56) se tiene que $k \leq 0$. Además, como $\varphi_i^1(C) \geq \varphi_i^2(C) \geq \varphi_i^3(C)$ se tiene que $0 \geq k \geq l \geq m$, y como $\mu_i^j(C) = \mu_i^j(A) = 0$ (estos valores solo dependen de la monodromía del sistema) se tiene que

$$k + l + m = \sum_{i,j} \beta_i^j(C) = 0,$$

por ser $\mathbf{z}' = C\mathbf{z}$ fuchsiano (teorema 3.16). Entonces, $k = l = m = 0$ y $\varphi_i^1(C) = \varphi_i^2(C) = \varphi_i^3(C)$.

Ahora, de modo similar a como hicimos en la sección anterior, consideramos el cambio de variable $\mathbf{w} = f\mathbf{z}$ con $f = \prod_{i=1}^4 (z - a_i)^{-n_i}$, donde $n_i = \varphi_i^1(C)$. Obtenemos así un sistema $\mathbf{w}' = D\mathbf{w}$ que sigue siendo fuchsiano, mantiene las mismas singularidades y monodromía y verifica $\varphi_i^j(D) = 0$. Además, $\mathbf{w}_0 = f\mathbf{z}_0$ es un vector de funciones holomorfas en $\overline{\mathbb{C}}$ y, por tanto, es constante. Por tanto, existirá una matriz $M \in GL(3, \mathbb{C})$ tal que $\mathbf{w}_0 = M\mathbf{y}_0$. Si consideramos la nueva variable $\mathbf{u} = M^{-1}\mathbf{w}$, tenemos que

$$\mathbf{u}' = M^{-1}DM\mathbf{u}, \tag{3.57}$$

es un sistema fuchsiano que conserva las mismas singularidades y monodromía: si $W\chi(\sigma^{-1}) =$

$W \circ \sigma$, entonces

$$MU\chi(\sigma^{-1}) = MU \circ \sigma = M(U \circ \sigma),$$

luego $U\chi(\sigma^{-1} = U \circ \sigma$. Además, $\varphi_i^j(M^{-1}DM) = \varphi_i^j(D) = 0$ (al multiplicar D por matrices constantes no se altera el crecimiento de las soluciones del sistema), es decir, $\varphi(\mathbf{u}) = 0$ para cualquier solución $\mathbf{u} \neq 0$ de (3.57). El vector $\mathbf{u}_0 = M^{-1}\mathbf{w}_0 = (1,0,0)^T$ es solución de (3.57), luego la primera columna de la matriz $M^{-1}DM$ tiene que ser nula y entonces

$$M^{-1}DM = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & & F \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

para alguna matriz $F(z)$ de tamaño 2×2. Consideramos el sistema reducido

$$\mathbf{v}' = F\mathbf{v}. \tag{3.58}$$

Este sistema es fuchsiano por serlo (3.57) y tiene las mismas singularidades. Además,

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \circ \sigma = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)\chi(\sigma^{-1}),$$

donde $\chi(\sigma^{-1})$ será como en (3.55), luego si escribimos

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_2^1 \\ \overline{\mathbf{u}_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} u_3^1 \\ \overline{\mathbf{u}_3} \end{pmatrix},$$

se tiene que $(\overline{\mathbf{u}_2}, \overline{\mathbf{u}_3})$ es un sistema fundamental de soluciones de (3.58) que verifica

$$(\overline{\mathbf{u}_2}, \overline{\mathbf{u}_3}) \circ \sigma = (\overline{\mathbf{u}_2}, \overline{\mathbf{u}_3})\overline{\chi}(\sigma^{-1}),$$

luego tiene la misma monodromía que el sistema de orden dos con matriz (3.6) que estudiamos en la sección anterior. Vamos a ver que

$$\gamma_{(F)} = 0 < 2 = \gamma_{\overline{\chi}},$$

lo que nos llevará a una contradicción con el lema 3.19 y nos permitirá concluir la demostración. Para ello, observamos que si $\mathbf{v}$ es una solución de (3.58) entonces existirá alguna solución $\mathbf{u}$ de (3.57) de la forma $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$, luego denotando $\mathbf{v} = (u_2, u_3)$ se tiene que

$$\varphi_i(\mathbf{v}) = \text{mín}\{\varphi_i(u_2), \varphi_i(u_3)\} \geq \text{mín}\{\varphi_i(u_j), j = 1, 2, 3\} = \varphi_i(\mathbf{u}) = 0.$$

Entonces, como los $\varphi_i^j(F)$ son $\varphi_i(\mathbf{v})$ para alguna solución $\mathbf{v}$ se tiene que

$$\varphi_i^j(F) \geq 0 \quad \forall i, j, \tag{3.59}$$

y como (3.58) tiene la misma monodromía $\overline{\chi}$ que (3.6) se tiene que $\mu_i^j(F) = 0$ para cada i, j. Entonces, $\beta_i^j(F) = \varphi_i^j(F) \geq 0$ y, al ser (3.58) fuchsiano, por el teorema 3.16 se tiene que

$$\sum_{i,j} \beta_i^j(F) = 0.$$

Por tanto, teniendo en cuenta (3.59) se llega a que $\varphi_i^j(F) = \beta_i^j(F) = 0$ y, finalmente,

$$\gamma_{(F)} = \sum_{i=1}^{4} (\varphi_i^1(F) - \varphi_i^2(F)) = 0.$$

□

3.5. Algunas variantes del problema con solución positiva

Para finalizar el trabajo, vamos a comentar (sin entrar en detalles) algunas variantes del problema de Riemann-Hilbert en las que, al añadir alguna hipótesis adicional, se obtiene una solución positiva.

La primera de ellas ya la hemos comentado en la introducción: se trata del resultado probado por Plemelj que se tomó como respuesta afirmativa al problema durante más de setenta años. Si en vez de buscar sistemas fuchsianos buscamos sistemas regulares, podremos encontrar un sistema regular con singularidades y monodromía prefijadas. La demostración de este resultado es algo complicada, ya que requiere del uso de fibrados vectoriales holomorfos y no entraremos en estos temas. Pero resumiendo brevemente, gracias a un resultado (teorema de Birkhoff-Grothendieck) que describe la forma de los fibrados vectoriales sobre $\overline{\mathbb{C}}$ se puede construir un sistema con singularidades y monodromía prefijadas que sea fuchsiano en todas las singularidades excepto en, a lo sumo, una de ellas, donde el sistema será regular. Para más detalle sobre este resultado, se pueden consultar el tercer capítulo de [2] o [8].

Por último, enunciamos un par de casos más en los que, añadiendo hipótesis no muy complicadas de entender, se puede obtener una solución positiva:

- Sean $b \in S$ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ una serie de lazos cerrados con inicio y fin en b que únicamente rodean una singularidad a_i del sistema. Si al menos una de las matrices $\chi(\sigma_i)$ es diagonalizable (χ es la monodromía del sistema y cada σ_i es la transformación recubridora correspondiente a γ_i), entonces el problema de Riemann-Hilbert tiene respuesta positiva. La demostración se puede encontrar en [10].

- En el caso de que el sistema tenga orden 2, la respuesta es positiva (independientemente del número n de puntos singulares). La demostración se puede encontrar en [5].

Apéndice A

Superficies de Riemann y topología algebraica

En este apéndice daremos una breve introducción a las superficies de Riemann y a algunos conceptos de topología algebraica. El apéndice está basado completamente en las cinco primeras secciones del primer capítulo de [6]. Omitiremos las demostraciones de los resultados que enunciemos, pero todas ellas se pueden encontrar en el texto mencionado.

A.1. Superficies de Riemann

Definición A.1. Sea X una variedad dos-dimensional (es decir, un espacio topológico Hausdorff tal que todo punto $a \in X$ tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$). Una *carta compleja* en X es un homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow V$ de un abierto $U \subset X$ en un abierto $V \subset \mathbb{C}$. Dos cartas complejas $\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i$, $i = 1, 2$, son *holomórficamente compatibles* si la aplicación

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

es biholomorfa.

Definición A.2. Sea X una variedad dos-dimensional. Un *atlas complejo* en X es un sistema $\mathcal{U} = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i, i \in I\}$ de cartas complejas que son holomórficamente compatibles y recubren X, es decir, $\cup_{i\in I} U_i = X$. Dos atlas complejos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ son *analíticamente equivalentes* si cada carta de $\mathcal{U}$ es holomórficamente compatible con cada carta de $\mathcal{U}'$.

Observamos que la noción de equivalencia analítica de atlas complejos es una relación de equivalencia.

Definición A.3. Sea X una variedad dos-dimensional. Una *estructura compleja* en X es una clase de equivalencia de atlas analíticamente equivalentes en X.

Definición A.4. Una *superficie de Riemann* es un par (X, Σ) donde X es una variedad dos-diferenciable conexa y Σ una estructura compleja en X. A no ser que haya ambigüedad, escribiremos tan solo X para referirnos a una superficie de Riemann.

Definición A.5. Sea X una superficie de Riemann y $Y \subset X$ un abierto. Una función $f : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ es *holomorfa* si para cada carta $\psi : U \longrightarrow V$ en X la función

$$f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap Y) \longrightarrow \mathbb{C},$$

es holomorfa en el sentido usual en el abierto $\psi(U \cap Y) \subset \mathbb{C}$. Denotaremos por $\mathcal{H}(Y)$ al conjunto de funciones holomorfas en Y, que resulta ser una $\mathbb{C}$-álgebra.

Definición A.6. Sean X e Y superficies de Riemann. Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ es *holomorfa* si para cada par de cartas $\psi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ en X y $\psi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$ en Y con $f(U_1) \subset U_2$, la aplicación

$$\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2,$$

es holomorfa en el sentido usual. Si además f es biyectiva y $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ también es holomorfa, se dice que f es *biholomorfa*. Dos superficies de Riemann X e Y son *isomorfas* si existe una aplicación biholomorfa $f : X \longrightarrow Y$.

Muchos de los teoremas de la variable compleja se pueden llevar al caso de superficies de Riemann, ya que cuentan con una estructura similar a $\mathbb{C}$. Por ejemplo,

Teorema A.7 (principio de identidad)**.** Sean X e Y dos superficies de Riemann y $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ dos aplicaciones holomorfas que coinciden en un conjunto $A \subset X$ que contiene a un punto de acumulación a de X. Entonces $f_1 = f_2$.

A.2. Homotopía de curvas

Recordamos que una curva en un espacio topológico X es una aplicación $u : I \longrightarrow X$, donde $I = [0, 1]$. Los puntos $a = u(0)$ y $b = u(1)$ son los puntos inicial y final, y se dice que u es una curva de a a b. Un espacio topológico es arcoconexo si para cada par de puntos $a, b \in X$ existe una curva de a a b.

Definición A.8. Sean X un espacio topológico y $a, b \in X$. Dos curvas $u, v : I \longrightarrow X$ de a a b son *homótopas* si existe una aplicación continua $A : I \times I \longrightarrow X$ tal que $A(t, 0) = u(t)$ y $A(t, 1) = v(t)$ para todo $t \in I$ y $A(0, s) = a$ y $A(1, s) = b$ para todo $s \in I$.

Teorema A.9. Sean X un espacio topológico y $a, b \in X$. La noción de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de curvas de a a b, cuyas clases denotaremos por $[u]$.

Definición A.10. Sean X un espacio topológico, $a, b, c \in X$, $u : I \longrightarrow X$ una curva de a a b y $v : I \longrightarrow X$ una curva de b a c.

- Se define la *curva producto* $u \cdot v : I \longrightarrow X$ de a a c por

$$(u \cdot v)(t) = \begin{cases} u(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ v(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

- Se define la *curva inversa* $u^- : I \longrightarrow X$ de b a a por

$$u^-(t) = u(1-t) \;\; \forall\, t \in I.$$

Definición A.11. Sean X un espacio topológico y $a \in X$. Se define la curva constante en a como la aplicación constante $u_0 : I \to X$ dada por $u_0(t) = a$ para todo $t \in I$.

Definición A.12. Sean X un espacio topológico y $u : I \longrightarrow X$ una curva. Se dice que u es una curva *cerrada* si $u(0) = u(1)$. Una curva cerrada $u : I \longrightarrow X$ con punto inicial y final a se dice que es *homótopanula* si es homótopa a la curva constante en a.

Teorema A.13. Sean X un espacio topológico y $a \in X$. El conjunto $\pi_1(X, a)$ de clases de homotopía de curvas cerradas en X con punto inicial y final a tiene estructura de grupo con el producto de curvas definido en A.10.

Definición A.14. En las condiciones del teorema anterior, al grupo $\pi_1(X, a)$ se le denomina *grupo fundamental de X con punto base a*.

Teorema A.15. Sean X un espacio topológico y $a, b \in X$ puntos unidos por una curva w. Entonces, la aplicación

$$\begin{aligned} f\colon \pi_1(X, a) &\longrightarrow \pi_1(X, a) \\ [u] &\longmapsto [w^- \cdot u \cdot w] \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos. Como consecuencia directa, si X es un espacio arcoconexo entonces el grupo fundamental de X no depende del punto base (escribiremos $\pi_1(X)$).

Definición A.16. Un espacio topológico arcoconexo X se dice que es *simplemente conexo* si $\pi_1(X) = 0$ (es decir, el grupo fundamental solo contiene al elemento unidad).

Teorema A.17. Sea X un espacio topológico simplemente conexo y $a, b \in X$. Entonces, para cualquier par de curvas $u, v : I \longrightarrow X$ de a a b se tiene que u y v son homótopas.

A.3. Recubrimientos

Definición A.18. Sean X e Y espacios topológicos y $p : Y \longrightarrow X$ una aplicación continua. Para cada $x \in X$, el conjunto $p^{-1}(x) \subset Y$ se denomina *fibra* de p sobre x.

Definición A.19. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Se dice que A es *discreto* si para cada $a \in A$ existe un entorno V tal que $V \cap A = \{a\}$. Una aplicación $p : Y \longrightarrow X$ entre espacios topológicos es *discreta* si la fibra de p sobre cada punto de X es un subconjunto discreto de Y.

Teorema A.20. Sean X e Y superficies de Riemann y $p : Y \longrightarrow X$ una aplicación holomorfa y no constante. Entonces p es abierta y discreta.

Definición A.21. Sean X e Y superficies de Riemann y $p : Y \longrightarrow X$ una aplicación holomorfa y no constante. Un punto $y \in Y$ es un *punto de ramificación* si no existe ningún entorno V de y tal que $p|_V$ sea inyectiva.

Teorema A.22. Sean X e Y superficies de Riemann. Una aplicación holomorfa no constante $p : Y \longrightarrow X$ no tiene puntos de ramificación si, y solo si, p es un homeomorfismo local, es decir, para cada punto $y \in Y$ existe un entorno abierto V de y tal que $p|_V$ es un homeomorfismo sobre un abierto U de X.

Definición A.23. Sean X, Y y Z espacios topológicos y $p : Y \longrightarrow X$, $f : Z \longrightarrow X$ aplicaciones continuas. Un *levantamiento* de f respecto a p es una aplicación continua $g : Z \longrightarrow Y$ tal que $f = p \circ g$.

Teorema A.24. Sean X e Y espacios topológicos de Hausdorff y $p : Y \longrightarrow X$ un homeomorfismo local. Sea Z un espacio topológico conexo y $f : Z \longrightarrow X$ una aplicación continua. Si $g_1, g_2 : Z \longrightarrow Y$ son dos levantamientos de f y $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ para algún punto $z_0 \in Z$ entonces $g_1 = g_2$.

En particular, es interesante aplicar el concepto de levantamiento a curvas. Si X e Y son espacios de Hausdorff, $p : Y \longrightarrow X$ un homeomorfismo local y $u : I \longrightarrow X$ una curva en X, si existe un levantamiento $\hat{u} : I \longrightarrow Y$ de u, quedará determinado de forma única al fijar su punto inicial.

Teorema A.25. Sean X e Y dos espacios de Hausdorff, $p : Y \longrightarrow X$ un homeomorfismo local, $a, b \in X$ y $\hat{a} \in Y$ tal que $p(\hat{a}) = a$. Además, supongamos que $A : I \times I \longrightarrow X$ es una aplicación continua tal que $A(0, s) = a$ y $A(1, s) = b$ para cada $s \in I$. Sea $u_s(t) = A(t, s)$. Si cada curva u_s se puede levantar a una curva $\hat{u}_s$ con punto inicial $\hat{a}$, entonces $\hat{u}_0$ y $\hat{u}_1$ tienen el mismo punto final y son curvas homótopas.

Buscar una condición que nos permita levantar curvas siempre nos lleva a la siguiente definición.

Definición A.26. Sean X e Y espacios topológicos. Se dice que una apliación $p : Y \longrightarrow X$ es una *aplicación recubridora* o *recubrimiento* si cada punto $x \in X$ tiene un entorno abierto U tal que su preimagen $p^{-1}(U)$ se puede escribir como

$$p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} V_j,$$

donde los V_j, $j \in J$, son abiertos disjuntos de Y y las restricciones $p|_{V_j} : V_j \longrightarrow U$ son homeomorfismos (es decir, p es un homeomorfismo local).

Definición A.27. Una aplicación continua $p : Y \longrightarrow X$ tiene la *propiedad de levantamiento de curvas* si para cada curva $u : I \longrightarrow X$ y cada punto $y_0 \in Y$ con $p(y_0) = u(0)$ existe un levantamiento $\hat{u} : I \longrightarrow Y$ tal que $\hat{u}(0) = y_0$.

Teorema A.28. Todo recubrimiento $p : Y \longrightarrow X$ entre espacios topológicos X e Y tiene la propiedad de levantamiento de curvas.

Teorema A.29. Sean X e Y espacios de Hausdorff con X arcoconexo y sea $p : Y \longrightarrow X$ un recubrimiento. Entonces, para cada par de puntos $x_0, x_1 \in X$ las fibras $p^{-1}(x_0)$ y $p^{-1}(x_1)$ tienen el mismo cardinal. En particular, si Y no es vacío se tiene que p es sobreyectiva.

Teorema A.30. Sea X una variedad, Y un espacio de Hausdorff y $p : Y \longrightarrow X$ un homeomorfismo local con la propiedad de levantamiento de curvas. Entonces p es un recubrimiento.

De todos los recubrimientos de un espacio topológico, nos interesa ver si hay alguno que podría considerarse el más ”grande”.

Definición A.31. Sean X e Y espacios topológicos conexos y $p : Y \longrightarrow X$ un recubrimiento. Se dice que p es el *recubrimiento universal* de X si satisface la siguiente propiedad universal: para cada recubrimiento $q : Z \longrightarrow Y$ con Z conexo, y cada par de puntos $y_0 \in Y$ y $z_0 \in Z$ con $p(y_0) = q(z_0)$, existe exactamente una aplicación continua que conserva las fibras $f : Y \longrightarrow Z$ tal que $f(y_0) = z_0$.

Teorema A.32. Un espacio topológico conexo X tiene a lo sumo, salvo isomorfismo, un único recubrimiento universal.

Teorema A.33. Sean X e Y variedades conexas con Y simplemente conexa y sea $p : Y \longrightarrow X$ un recubrimiento. Entonces p es el recubrimiento universal de X.

Teorema A.34. Sea X una variedad conexa. Entonces existen una variedad simplemente conexa $\tilde{X}$ y un recubrimiento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ (por el teorema anterior, p es el recubrimiento universal de X).

Vamos ahora con los últimos conceptos del apéndice y con un resultado que será fundamental en el trabajo.

Definición A.35. Sean X e Y espacios topológicos y $p : Y \longrightarrow X$ un recubrimiento. Diremos que una aplicación $f : Y \longrightarrow Y$ es una *transformación recubridora* si f es un homeomorfismo que conserva las fibras de p. Con la composición de aplicaciones, el conjunto de transformaciones recubridoras de $p : Y \longrightarrow X$ forma un grupo al que denotaremos $\mathrm{Deck}(Y/X)$.

Definición A.36. Sean X e Y espacios de Hausdorff conexos y $p : Y \longrightarrow X$ un recubrimiento. Se dice que el recubrimiento es *normal* si para cada par de puntos $y_0, y_1 \in Y$ con $p(y_0) = p(y_1)$ existe una transfomación recubridora $f : Y \longrightarrow Y$ tal que $f(y_0) = y_1$.

Teorema A.37. Sea X una variedad conexa y $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ su recubrimiento universal. Entonces p es normal y además $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$ es isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(X)$.

Apéndice B

Algunos teoremas clásicos del análisis complejo

En este apéndice se recogen los enunciados de los teoremas clásicos del análisis complejo que emplearemos a lo largo del trabajo. Las demostraciones de todos los resultados se pueden encontrar en [1].

Teorema B.1 (principio de identidad)**.** Sean f y g funciones holomorfas en un abierto conexo Ω. Si el conjunto

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\},$$

tiene algún punto de acumulación de Ω, entonces $f \equiv g$.

Teorema B.2 (de representación conforme de Riemann)**.** Sea Ω un abierto simplemente conexo no vacío de $\mathbb{C}$ que no sea todo el plano complejo. Entonces existe una aplicación biholomorfa de Ω en el disco abierto unidad D.

Teorema B.3 (fórmula integral de Cauchy)**.** Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, D un disco cerrado contenido en Ω y f una función holomorfa en Ω. Si Γ es la circunferencia que forma la frontera de D (recorrida en sentido antihorario) y z un punto del interior de D, se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Teorema B.4 (de Liouville)**.** Si f es una función entera (holomorfa en todo $\mathbb{C}$) acotada, entonces f es constante.

Teorema B.5 (de los residuos)**.** Sean Ω un abierto simplemente conexo, S un subconjunto de Ω sin puntos de acumulación y f una función holomorfa en $\Omega \setminus S$. Si γ es una curva cerrada en $\Omega \setminus S$ tal que $n(\gamma, z) = 0$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ ($n(\gamma, z)$ denota el índice de la curva γ en el punto z), se tiene que

$$\int_\gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{w \in S} n(\gamma, w)\mathrm{Res}(f, w).$$

Bibliografía

[1] R.B. Ash y W.P. Novinger. *Complex Variables: Second Edition.* Dover Publications, 2007.

[2] D.V. Asonov y A.A. Bolibruch. *The Riemann-Hilbert Problem.* Springer Vieweg, 1994.

[3] A. Borel. *Algebraic D-Modules.* Academic Press, 1987.

[4] M. de Guzmán. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Teoría de Estabilidad y Control.* Alhambra Universidad, 1975.

[5] W. Dekkers. The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on $P^1(\mathbb{C})$. En *Lecture Notes in Mathematics, 712.* Springer, 1979.

[6] O. Forster. *Lectures on Riemann Surfaces.* Springer, 1981.

[7] A.H.M. Levelt. *Hypergeometric Functions.*

[8] C. Mitschi y D. Sauzin. *Divergent Series, Summability and Resurgence I.* Springer, 2016.

[9] J. Mozo. *Topics on Holomorphic Differential Equations.* 2022.

[10] J. Plemelj. *Problems in the sense of Riemann and Klein.* 1964.

[11] E.G.C. Poole. *Introduction to the Theory of Linear Differential Equations.* Clarendon Press, 1936.

[12] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1974.

[13] O. Zariski y P. Samuel. *Commutative Algebra: Volume II.* Springer, 2013.