



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Matemáticas

Ideales tóricos asociados a grafos

Autor: Sergio Matilla Mayo

Tutor/es: Phillipe Gimenez

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares algebraicos	3
1.1. Conceptos básicos sobre resoluciones libres graduadas	3
1.2. Mapping cone	8
2. Ideales tóricos	15
2.1. Definición y primeros resultados generales	15
2.2. Ideales tóricos asociados a grafos	22
3. Escisión de ideales tóricos	45
3.1. Primeros resultados generales	45
3.2. Aplicación a ideales tóricos asociados a grafos	56
Bibliografía	67

Introducción

El objeto de estudio de este trabajo son los ideales tóricos, que, como se verá a lo largo del trabajo, hablar de ellos es equivalente a hablar de ideales binomiales primos. No solo se estudiarán algunas de las propiedades principales de ellos, sino que también se verá cómo se puede asociar un ideal tórico a un grafo. Esto nos permitirá estudiar propiedades del grafo en función de propiedades del ideal y viceversa.

También, se pretende estudiar algunos casos en los que se puede expresar un ideal tórico como suma de otros ideales tóricos. El objetivo de hacer esta descomposición es poder estudiar propiedades del ideal tórico como, por ejemplo, los números de Betti, en función de los ideales que forman la descomposición, con la esperanza de que estos últimos sean más sencillos que el original. Además, esto permitirá, en ciertos casos, estudiar propiedades de ideales tóricos de manera recursiva.

De manera general, los contenidos que incluye cada capítulo del trabajo son los siguientes.

En el capítulo 1 se introducirán algunos conceptos básicos sobre resoluciones libres graduadas y se introducirá el concepto del *mapping cone*. Ambos conceptos serán necesarios para los siguientes capítulos del trabajo. A mayores, en estos capítulos se introducirá la notación que se seguirá a lo largo de todo el trabajo.

En el capítulo 2 se dará la definición de ideal tórico y se demostrarán los primeros resultados generales sobre ellos. También se verá como se puede asociar un ideal tórico a un grafo. Este capítulo finalizará con el teorema 2.2.31 que nos relacionará propiedades del grafo con propiedades del ideal tórico asociado.

En la primera parte del capítulo 3 se darán algunos casos particulares en los que podremos expresar un ideal tórico como suma de otros ideales

tóricos. En la segunda parte de este capítulo se verá a qué situación sobre grafos corresponden los resultados vistos en la primera parte del capítulo, permitiendo hablar de escisión y fusión de grafos. Además, a lo largo de este capítulo se irán dando resultados que muestran que los números de Betti de los ideales tóricos están muy relacionados con los números de Betti de los ideales tóricos que forman su escisión.

Capítulo 1

Preliminares algebraicos

En este capítulo se introducirán algunos conceptos que se usarán en el resto del trabajo. En la sección 1.1 se darán definiciones y resultados vistos en la asignatura de *Álgebra combinatoria* del Máster de Matemáticas, necesarios para la teoría del trabajo. En la sección 1.2 se dará la construcción del *mapping cone*, que se usará en alguno de los resultados de este trabajo.

1.1. Conceptos básicos sobre resoluciones libres graduadas

El objetivo de esta sección, como se ha comentado previamente, es definir alguno de los conceptos vistos en la asignatura de *Álgebra combinatoria* del Máster de Matemáticas ya que se consideran básicos para este trabajo. Además, otro objetivo que se persigue es introducir una notación que se seguirá a lo largo de todo el trabajo.

Definición 1.1.1. Sea A un anillo y $(M_i)_{i \in I}$ una familia de A -módulos, no necesariamente finita. Sean $(\phi_i)_{i \in I}$ una familia de homomorfismos de A -módulos, $\phi_i : M_i \rightarrow M_{i-1}$. Se considera la siguiente sucesión:

$$\dots \xrightarrow{\phi_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} M_i \xrightarrow{\phi_i} M_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} \dots$$

1. Diremos que la sucesión es **exacta en M_i** si $\text{Im}(\phi_{i+1}) = \ker(\phi_i)$.
2. Diremos que la sucesión es **exacta** si lo es para cada M_i que no esté al principio o al final de la sucesión.

Sea A un anillo, M un A -módulo finitamente generado y $\{f_1, \dots, f_t\}$ un sistema de generadores de M . Esta información es equivalente a tener un

homomorfismo sobreyectivo $\phi: A^t \rightarrow M$, dado por, si $\{e_i, \dots, e_t\}$ es la base estándar en A^t , entonces $\phi(e_i) = f_i$. Esto es equivalente a tener una sucesión exacta

$$A^t \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0,$$

donde el último homomorfismo es la aplicación nula.

Definición 1.1.2. En esta situación, llamaremos **primer módulo de sizigias** de $\{f_1, \dots, f_t\}$ al núcleo de la aplicación ϕ . Lo denotaremos por $\text{Syz}(f_1, \dots, f_t)$.

Supongamos que el anillo A es noetheriano, entonces $\text{Syz}(f_1, \dots, f_t) \subseteq A^t$ es un A -módulo finitamente generado y supongamos que tenemos un sistema de generadores formado por s elementos. Siguiendo el procedimiento previo a la definición, esto es equivalente a tener un homomorfismo sobreyectivo $\psi: A^s \rightarrow \text{Syz}(f_1, \dots, f_t) = \ker(\phi)$. Es decir, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$A^s \xrightarrow{\psi} A^t \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0.$$

De la misma manera que antes, nos podemos preguntar por el primer módulo de sizigias de $\text{Syz}(f_1, \dots, f_t)$, es decir, $\ker(\psi)$. A este módulo lo llamaremos el **segundo módulo de sizigias** de $\{f_1, \dots, f_t\}$. Hacer esta consideración nos permite extender, sin perder la exactitud, la sucesión exacta anterior a la siguiente sucesión:

$$A^r \xrightarrow{\alpha} A^s \xrightarrow{\psi} A^t \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0.$$

Definición 1.1.3. Sea M un A -módulo. Una **resolución libre** de M es una sucesión exacta de la forma

$$\dots \xrightarrow{\phi_3} F_2 \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0,$$

donde cada $F_i \simeq A^{\beta_i}$ es un módulo libre de rango β_i .

Si existe r tal que $F_r \neq 0$ y $F_l = 0$ para $l > r$, entonces diremos que la resolución es **finita** de longitud r y la escribiremos como

$$0 \rightarrow F_r \xrightarrow{\phi_r} \dots F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0,$$

donde el primer homomorfismo es el que envía el 0 en el 0 de F_r .

Notación 1.1.4. Los homomorfismos ϕ_i reciben el nombre de **diferenciales**.

Que el anillo A sea noetheriano no basta para asegurar que dado un A -módulo M podemos encontrar una resolución libre finita. El siguiente resultado es el que nos va a permitir, en un caso concreto, asegurar esto.

Teorema 1.1.5 (Teorema de las sizigias de Hilbert). *Sea $A = K[x_1, \dots, x_n]$ con K un cuerpo. Entonces, todo A -módulo finitamente generado admite una resolución libre de longitud a lo sumo n .*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [4, Th. 2.1].

Calculando los sucesivos módulos de sizigias del A -módulo M podemos construir una resolución libre de M . Sin embargo, esta resolución no es única y depende del sistema de generadores que hayamos fijado tanto en M como en cada módulo de sizigias. Para intentar solucionar esto, se considera M un A -módulo graduado y se introduce lo que se llama una resolución libre minimal graduada. Veamos primero lo que es una resolución libre graduada.

Definición 1.1.6. Sean A un anillo graduado y M, N dos A -módulos graduados,

$$A = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} A_t, \quad M = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t, \quad N = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} N_t,$$

y $\varphi: M \rightarrow N$ un homomorfismo. Diremos que φ es un **homomorfismo graduado de grado d** si,

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(M_t) \subseteq N_{t+d}.$$

Diremos que φ es **graduado** si es graduado de grado 0.

Definición 1.1.7. Sea M un A -módulo graduado, $M = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t$ y sea $d \in \mathbb{Z}$. Denotaremos por $M(d)$ al A -módulo M con la graduación

$$M(d) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} (M(d))_t,$$

donde definimos $(M(d))_t := M_{d+t}$.

También, aunque la teoría es más general, a partir de ahora nos centraremos en el caso en el que $A = K[x_1, \dots, x_n]$.

Volviendo al hilo de las resoluciones libres graduadas, supongamos que M es un A -módulo finitamente generado y $\{f_1, \dots, f_m\}$ es un sistema de generadores de M con cada f_i homogéneo de grado d_i . Si pensamos en el homomorfismo $\phi: A^m \rightarrow M$ dado por $\phi(e_i) = f_i$, si a cada e_i le damos el peso $d_i := \deg f_i$, entonces

$$\phi: A(-d_1) \oplus \dots \oplus A(-d_m) \rightarrow M,$$

es un homomorfismo graduado.

Definición 1.1.8. Si M es un A -módulo graduado, una **resolución libre graduada** es una resolución libre de la forma

$$\cdots \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0,$$

donde $F_j = A(-d_{j,1}) \oplus \cdots \oplus A(-d_{j,m_j})$ es un A -módulo graduado y ϕ_j es un homomorfismo graduado.

Definición 1.1.9. Si M es un A -módulo graduado, una resolución libre graduada de la forma

$$\cdots \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0,$$

se dice que es **minimal** si, para todo i , $\ker(\phi_i) \subset \langle x_1, \dots, x_n \rangle F_i$

Lo que nos dice esta definición, y puede ser un buen criterio para comprobar cuando una resolución es minimal, es que las matrices que dan los homomorfismos ϕ_i no tienen entradas constantes no nulas.

Para las resoluciones libres minimales graduadas se sigue verificando el teorema de las sizigias de Hilbert, se puede encontrar en [4, Th. 3.8].

Definición 1.1.10. Dos resoluciones graduadas

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0, \\ \cdots \xrightarrow{\varphi_1} G_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0, \end{aligned}$$

se dice que son **isomorfos** si existen homomorfismos graduados $\alpha_j: F_j \rightarrow G_j$ tales que $\varphi_0 \alpha_0 = \phi_0$ y $\alpha_{j-1} \phi_j = \varphi_j \alpha_j$.

Aunque vamos a seguir sin tener la unicidad, el hecho de que una resolución libre graduada sea minimal hace que sea única salvo isomorfismo.

Teorema 1.1.11. *Dado un A -módulo graduado M , dos resoluciones minimales graduadas de M son isomorfos.*

La demostración se puede encontrar en [4, Th. 3.13].

Definición 1.1.12. Si $A = K[x_1, \dots, x_n]$ y M es un A -módulo graduado, se definen los **números de Betti graduados**, β_{ij} como el número minimal de generadores en el i -ésimo módulo de sizigias (equivalentemente, en el paso i -ésimo de la resolución libre minimal graduada) de grado j .

Los **números de Betti** son

$$\beta_i = \sum_j \beta_{ij},$$

Definición 1.1.13. El anillo $A = K[x_1, \dots, x_n]$ admite también una graduación sobre \mathbb{N}^n , a la que llamaremos **multigraduación**:

$$A = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} A_\alpha,$$

donde A_α es el conjunto de los polinomios de multigrado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, es decir, polinomios de la forma $P = \sum \lambda_j x^\alpha$.

Ahora, si $A = \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} A_t$ es la graduación estándar, se tiene que

$$A_t = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n / |\alpha|=t} A_\alpha. \quad (1.1)$$

De la misma manera que se ha hecho para la graduación estándar, se puede hablar de A -módulos multigraduados (\mathbb{N}^n graduados), homomorfismo multigraduados y de resoluciones multigraduadas.

Definición 1.1.14. Dado $i \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$, se definen **los números de Betti multigraduados**, $\beta_{i\alpha}$, como *el número minimal de generadores del i -ésimo módulo de sizigias de multigrado α .*

Además, teniendo en cuenta (1.1), se tiene la relación

$$\beta_{ij} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n / |\alpha|=j} \beta_{i\alpha}.$$

Terminamos esta sección dando la definición de anillo Koszul y dos resultados que necesitaremos más adelante en este trabajo.

Sea K un cuerpo y denotamos $S = K[x_1, \dots, x_n]$. Sea I un ideal graduado en S .

Definición 1.1.15. Diremos que $R = S/I$ es **Koszul** si la resolución libre minimal graduada de K sobre R es lineal, es decir, si las entradas de las matrices de las diferenciales son formas lineales.

Ejemplo 1.1.16. $R = K[x]/x^2$ es Koszul ya que K tiene la siguiente resolución libre lineal

$$\cdots \xrightarrow{x} R(-n) \xrightarrow{x} \cdots \xrightarrow{x} R(-1) \xrightarrow{x} R \rightarrow K \rightarrow 0.$$

Donde x es la aplicación multiplicación por x

Proposición 1.1.17. *Sea $R = S/I$ Koszul y tal que $I \subseteq \langle x_1, \dots, x_n \rangle^2$. Entonces I está generado por polinomios de grado 2.*

La demostración se puede encontrar en [7, Sec.2.4, Prop.2.23].

Teorema 1.1.18. *Sea $I \subseteq S$ un ideal graduado y supongamos que existe un orden monomial $<$ en S tal que $\text{in}(I)_<$ está generado por monomios de grado 2. Entonces $R = S/I$ es Koszul.*

La demostración se puede encontrar en [7, Sec.2.4, Th.2.28].

1.2. Mapping cone

El objetivo de esta sección es introducir el *mapping cone*, un concepto que se necesitará más adelante en este trabajo. Empezaremos dando unas definiciones previas.

Definición 1.2.1. Sea R un anillo. Un **complejo de cadenas** de R -módulos es una sucesión $(S, \delta) = \{\delta_q: S_q \rightarrow S_{q-1}\}_{q \in \mathbb{Z}}$, donde para todo $q \in \mathbb{Z}$ se tiene que S_q es un R -módulo, δ_q es un homomorfismo de R -módulos y $\delta_{q-1} \circ \delta_q = 0$. Lo escribiremos como

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{q+2}} S_{q+1} \xrightarrow{\delta_{q+1}} S_q \xrightarrow{\delta_q} S_{q-1} \xrightarrow{\delta_{q-1}} \cdots$$

Nota 1.2.2. De la definición se sigue que $\text{Im}(\delta_q) \subseteq \ker(\delta_{q-1}) \subseteq S_{q-1}$, para todo $q \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.2.3. Sea R un anillo y $(S, \delta) = \{\delta_q: S_q \rightarrow S_{q-1}\}_{q \in \mathbb{Z}}$ un complejo de cadenas de R -módulos. LLamaremos **q-ésimo módulo de homología del complejo de cadenas** al R -módulo

$$H_q(S) = \frac{\ker(\delta_q)}{\text{Im}(\delta_{q+1})}.$$

Definición 1.2.4. Sean (F, d) , (F', d') y (F'', d'') complejos, diremos que **la sucesión de complejos**

$$0 \rightarrow (F, d) \xrightarrow{\varphi} (F', d') \xrightarrow{\psi} (F'', d'') \rightarrow 0$$

es **exacta** si la sucesión

$$0 \rightarrow F_i \xrightarrow{\varphi_i} F'_i \xrightarrow{\psi_i} F''_i \rightarrow 0$$

es exacta para todo i .

Definamos ahora lo que llamaremos el **homomorfismo conector** de una sucesión exacta de complejos

$$\tau = \{\tau_i: H_i(F'') \rightarrow H_{i-1}(F)\}.$$

Sea $\alpha \in H_i(F'')$ y sea $x \in F_i''$ un representante de α . Dado que $x \in \ker(d_i'')$, se tiene que $d_i''(x) = 0$. Como ψ_i es sobreyectiva, existe $y \in F_i'$ tal que $\psi_i(y) = x$. Además, $d_i'(y) \in \ker(\psi_{i-1}) = \text{Im}(\varphi_{i-1})$ ya que

$$\psi_{i-1}(d_i'(y)) = d_i''(\psi_i(y)) = d_i''(x) = 0.$$

Por tanto, existe $z \in F_{i-1}$ tal que $\varphi_{i-1}(z) = d_i'(y)$. Se tiene que

$$\varphi_{i-2}(d_{i-1}(z)) = d_{i-1}'(\varphi_{i-1}(z)) = d_{i-1}'(d_i'(y)) = 0.$$

Luego $d_{i-1}(z) \in \ker(\varphi_{i-2}) = \{0\}$ por ser inyectiva. Definimos $\tau_i(\alpha) = \beta$, donde β es la clase de z en $H_{i-1}(F)$. Con el objetivo de aclarar la construcción, en el siguiente diagrama se muestran los pasos seguidos en la construcción de τ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & & F_i & \xrightarrow{\varphi_i} & & y \in F_i' & \xrightarrow{\psi_i} & x \in F_i'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow & & z \in F_{i-1} & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & & d_i'(y) \in F_{i-1}' & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & F_{i-1}'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow & & d_{i-1}(z) \in F_{i-2} & \xrightarrow{\varphi_{i-2}} & & F_{i-2}' & \xrightarrow{\psi_{i-2}} & F_{i-2}'' \rightarrow 0. \end{array}$$

Veamos ahora que τ está bien definida. Sean x y x' dos representantes de la clase de homología α . Sean y, z, y', z' los elementos construidos en los pasos anteriores para x y para x' respectivamente. Para ver que τ está bien definida necesitamos ver que z y z' tienen la misma clase de homología en $H_{i-1}(F)$, es decir, $z - z' \in \text{Im}(d_i)$. Por definición de clase de equivalencia, $x - x' \in \text{Im}(d_{i+1}'')$, es decir, existe \bar{x} tal que $x - x' = d_{i+1}''(\bar{x})$. Como ψ_{i+1} es sobreyectiva, existe $\bar{y} \in F_{i+1}'$ tal que $\psi_{i+1}(\bar{y}) = \bar{x}$. Se tiene que

$$\psi_i(d_{i+1}'(\bar{y})) = d_{i+1}''(\psi_{i+1}(\bar{y})) = x - x' = \psi_i(y - y').$$

Por tanto, $y - y' - d_{i+1}'(\bar{y}) \in \ker(\psi_i) = \text{Im}(\varphi_i)$, es decir, existe $\bar{z} \in F_i$ tal que $\varphi_i(\bar{z}) = y - y' - d_{i+1}'(\bar{y})$. Tenemos que

$$\varphi_{i-1}(d_i(\bar{z})) = d_i'(\varphi_i(\bar{z})) = d_i'(y - y' - d_{i+1}'(\bar{y})) = d_i'(y) - d_i'(y').$$

Además, $\varphi_{i-1}(z - z') = d_i'(y) - d_i'(y')$ por la construcción que hemos hecho. Como φ_{i-1} es inyectiva, $z - z' = d_i(\bar{z})$, probando que τ está bien definida. Con

el objetivo de aclarar la demostración, en el siguiente diagrama se muestran los pasos que se han seguido para demostrar que τ está bien definida:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow & & F_{i+1} & \xrightarrow{\varphi_{i+1}} & & \bar{y} \in F'_{i+1} & \xrightarrow{\psi_{i+1}} & \bar{x} \in F''_{i+1} & \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \rightarrow & & \bar{z} \in F_i & \xrightarrow{\varphi_i} & y - y' - d'_{i+1}(\bar{y}) \in F'_i & \xrightarrow{\psi_i} & x - x' \in F''_i & \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \rightarrow & z - z' \in F_{i-1} & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & d'_i(y) - d'_i(y') \in F'_{i-1} & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & & F''_{i-1} & \rightarrow 0.
\end{array}$$

Para concluir los preliminares tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.5. *Una sucesión exacta de complejos*

$$0 \rightarrow (F, d) \xrightarrow{\varphi} (F', d') \xrightarrow{\psi} (F'', d'') \rightarrow 0$$

genera una sucesión exacta entre los módulos de homología:

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(F'') \xrightarrow{\tau_{i+1}} H_i(F) \xrightarrow{\varphi} H_i(F') \xrightarrow{\psi} H_i(F'') \xrightarrow{\tau_i} \dots,$$

donde τ es el homomorfismo conector de la sucesión exacta de complejos.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [11, Sec.4.6, Th.5].

Ya estamos en condiciones de poder introducir lo que es el mapping cone.

Definición 1.2.6. Sean (U, d) y (U', d') dos complejos y $\varphi: (U, d) \rightarrow (U', d')$ una aplicación entre los complejos. Se define el **mapping cone de φ** como el complejo (W, ∂) , donde $W_i = U_{i-1} \oplus U'_i$ y dado $(x, y) \in W_i$,

$$\partial_i(x, y) = (-d_{i-1}(x), d'_i(y) + \varphi_{i-1}(x)). \quad (1.2)$$

Para que la definición sea correcta necesitamos ver que W es un complejo. Dado $(x, y) \in W_i$ necesitamos ver que $\partial_{i-1}(\partial_i(x, y)) = (0, 0)$. Efectivamente,

$$\begin{aligned}
\partial_{i-1}(\partial_i(x, y)) &= \\
&= (-d_{i-2}(-d_{i-1}(x)), d'_{i-1}(d'_i(y)) + d'_{i-1}(\varphi_{i-1}(x)) + \varphi_{i-2}(-d_{i-1}(x))) = (0, 0).
\end{aligned}$$

Denotamos por $U[-1]$ al complejo U desplazado una posición, es decir, $U[-1]_i = U_{i-1}$. Consideramos la sucesión de complejos

$$0 \rightarrow U' \xrightarrow{\psi} W \xrightarrow{\phi} U[-1] \rightarrow 0,$$

donde ψ es la proyección sobre el segundo miembro y ϕ es la proyección sobre el primero. Es una sucesión exacta ya que

$$0 \rightarrow U'_i \xrightarrow{\psi_i} W_i = U_{i-1} \oplus U'_i \xrightarrow{\phi_i} U_{i-1} \rightarrow 0$$

es exacta: ψ_i es inyectiva y ϕ_i es sobreyectiva y, además,

$$\text{Im}(\psi_i) = \{(0, x), x \in U'_i\} = \ker(\phi_i).$$

Gracias al teorema 1.2.5 tenemos que la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_i(U') \xrightarrow{\psi} H_i(W) \xrightarrow{\phi} H_i(U[-1]) \rightarrow H_{i-1}(U') \rightarrow \cdots,$$

es exacta.

Teniendo en cuenta que $H_i(U[-1]) = H_{i-1}(U)$ podemos reescribir la sucesión como

$$\cdots \rightarrow H_i(U') \xrightarrow{\psi} H_i(W) \xrightarrow{\phi} H_{i-1}(U) \rightarrow H_{i-1}(U') \rightarrow \cdots. \quad (1.3)$$

Veamos que el homomorfismo conector entre $H_{i-1}(U) \rightarrow H_{i-1}(U')$ es la aplicación inducida por φ :

Siguiendo los pasos en la construcción del homomorfismo conector, sea $x \in U_{i-1}$ un representante de una clase de homología α y $(x, 0)$ su preimagen en W_i , entonces

$$\partial_i(x, 0) = (-d_{i-1}(x), \varphi_{i-1}(x)) = (0, \varphi_{i-1}(x)).$$

Es decir, el z que se obtiene en la construcción del homomorfismo conector es $\varphi_{i-1}(x)$.

Supongamos ahora que tenemos dos resoluciones libres U, U' de dos módulos finitamente generados V y V' y $\varphi: V \rightarrow V'$ un homomorfismo de módulos inyectivo. Este homomorfismo se puede extender a un homomorfismo entre complejos $\varphi: U \rightarrow U'$ de manera inductiva, para $i = 0$:

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{d_0} & V \rightarrow 0 \\ \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi \\ U'_0 & \xrightarrow{d'_0} & V' \rightarrow 0. \end{array} \quad (1.4)$$

Como d'_0 es sobreyectiva, dado $x \in U_0$ existe $y \in U'_0$ tal que $d'_0(y) = \varphi(d_0(x))$. Definimos $\varphi_0(x) = y$.

Supongamos ahora que tenemos definidas $\varphi_0, \dots, \varphi_{i-1}$ y definamos φ_i :

$$\begin{array}{ccc} U_i \xrightarrow{d_i} & U_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} & U_{i-2} \\ \downarrow \varphi_i & \downarrow \varphi_{i-1} & \\ U'_i \xrightarrow{d'_i} & U'_{i-1} \xrightarrow{d'_{i-1}} & U'_{i-2}. \end{array} \quad (1.5)$$

Dado $x \in U_i$, $\varphi_i(x)$ debe cumplir que $d'_i(\varphi_i(x)) = \varphi_{i-1}(d_i(x))$, por tanto, debemos definir $\varphi_i(x)$ como la preimagen de $\varphi_{i-1}(d_i(x))$ por d'_i . Esto es posible ya que

$$d'_{i-1}(\varphi_{i-1}(d_i(x))) = \varphi_{i-2}(d_{i-1}(d_i(x))) = 0,$$

luego $\varphi_{i-1}(d_i(x)) \in \ker(d'_{i-1}) = \text{Im}(d'_i)$.

En esta situación, la construcción del mapping cone de φ nos da una sucesión exacta entre los módulos de homología. Además, como U y U' son resoluciones libres (entonces $H_i(U) = H_i(U') = 0$ para todo $i \geq 1$), se tiene que $H_i(W) = 0$ para todo $i \geq 2$. Por tanto, la ecuación (1.3) se simplifica en la sucesión exacta

$$0 \rightarrow H_1(W) \rightarrow H_0(U) = V \xrightarrow{\varphi} H_0(U') = V' \rightarrow H_0(W) \rightarrow 0.$$

Como φ es inyectiva se tiene que $H_1(W) = 0$. Además, $H_0(W) \simeq V'/\varphi(V)$ gracias al teorema de isomorfía. Es decir, el mapping cone de $\varphi: V \rightarrow V'$ nos da una resolución libre de $V'/\varphi(V)$. De hecho, si además suponemos que φ es un homomorfismo graduado (graduado de grado 0) y las resoluciones son gradudas, tenemos que el mapping cone de φ nos da una resolución libre graduada sin más que ver (1.2).

Ejemplo 1.2.7. Sea $A = K[x, y]$ para algún cuerpo K . Y sean U y U' los módulos $U = A/(x, y^2)$ y $U' = A/(x^2, y^3)$. Consideramos φ la aplicación multiplicación por xy .

Además, para que φ sea un homomorfismo graduado vamos a desplazar $U = A/(x, y^2)$ por el multigrado $(1, 1)$, luego $U = \frac{A}{(x, y^2)}(-1, 1)$. Se tiene que la resolución libre minimal multigrada de U es

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow A(-2, 3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 \\ -x \end{pmatrix}} A(-2, 1) \oplus A(-1, 3) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y^2 \end{pmatrix}} A(-1, 1) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{A}{(x, y^2)}(-1, 1) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

La resolución libre minimal multigraduada de U' es

$$0 \rightarrow A(-(2, 3)) \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^3 \\ -x^2 \end{pmatrix}} A(-(2, 0)) \oplus A(-(0, 3)) \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & y^3 \end{pmatrix}} A \rightarrow \frac{A}{(x^2, y^3)} \rightarrow 0.$$

Extendamos ahora el homomorfismo φ a un homomorfismo entre complejos siguiendo los pasos introducidos en (1.4). En primer lugar, necesitamos definir $\varphi_0: A(-(1, 1)) \rightarrow A$. Teniendo en cuenta que los últimos homomorfismos de las resoluciones son los homomorfismos de paso al cociente, se define φ_0 como la aplicación multiplicación por xy .

Para definir $\varphi_1: A(-(2, 1)) \oplus A(-(1, 3)) \rightarrow A(-(2, 0)) \oplus A(-(0, 3))$ seguimos los pasos introducidos en (1.5). Si escribimos $\varphi_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces debe cumplirse que dados $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A(-(2, 1)) \oplus A(-(1, 3))$,

$$xy \cdot \begin{pmatrix} x & y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & y^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$fx^2y + gxy^3 = afx^2 + bgx^2 + cfy^3 + dgy^3.$$

Por tanto, necesariamente $b = c = 0$, $a = y$, $d = x$, luego $\varphi_1 = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

Siguiendo este mismo razonamiento se define $\varphi_2: A(-(2, 3)) \rightarrow A(-(2, 3))$ como la aplicación identidad.

El mapping cone de φ es el complejo (W, ∂) , donde

$$\begin{aligned} W_0 &= U'_0 = A, \\ W_1 &= U_0 \oplus U'_1 = A(-(1, 1)) \oplus A(-(2, 0)) \oplus A(-(0, 3)), \\ W_2 &= U_1 \oplus U'_2 = A(-(2, 1)) \oplus A(-(1, 3)) \oplus A(-(2, 3)), \\ W_3 &= U_2 = A(-(2, 3)). \end{aligned}$$

Veamos ahora como son los homomorfismos del complejo. En primer lugar, dado $f \in U_0$ y $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in U'_1$,

$$\partial_1 \left(\begin{pmatrix} f \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) = d'_1 \left(\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) + \varphi_0(f) = \begin{pmatrix} x^2 & y^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} + xyf = x^2g_1 + y^3g_2 + xyf.$$

Es decir, ∂_1 es la matriz $(xy \ x^2 \ y^3)$. Para ∂_2 , dado $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in U_1$ y $f \in U'_2$,

$$\begin{aligned} \partial_2 \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -d_1 \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \\ d'_2(f) + \varphi_1 \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x \ y^2) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y^3 \\ -x^2 \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -xg_1 - y^2g_2 \\ y^3f + xg_1 \\ -x^2f + xg_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, ∂_2 es la matriz $\begin{pmatrix} -x & -y^2 & 0 \\ x & 0 & y^3 \\ 0 & x & -x^2 \end{pmatrix}$. Por último, si repetimos este proceso obtenemos que ∂_3 es la matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ -y^2 \\ x \end{pmatrix}$.

Capítulo 2

Ideales tóricos

En la sección 2.1 de este capítulo se dará la definición de ideal tórico y alguna de sus propiedades principales. En la sección 2.2 veremos como se pueden aplicar las definiciones y conceptos de la sección 2.1 al caso de grafos simples finitos.

2.1. Definición y primeros resultados generales

Denotaremos por $\mathfrak{M}_{d \times n}(\mathbb{Z})$ al conjunto de las matrices de tamaño $d \times n$ con coeficientes enteros. Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{d \times n}(\mathbb{Z})$, para $1 \leq j \leq n$ denotaremos por \mathbf{a}_j la columna j -ésima de la matriz A , es decir,

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{dj} \end{pmatrix}.$$

Definición 2.1.1. Como de costumbre, para dos vectores $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_d)$ se define el **producto escalar** de \mathbf{a} y \mathbf{b} como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^d a_i b_i.$$

Definición 2.1.2. Dada una matriz $A \in \mathfrak{M}_{d \times n}(\mathbb{Z})$, diremos que es una **matriz de configuración** si existe $\mathbf{c} \in \mathbb{Q}^d$ tal que

$$\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} = 1, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Ejemplo 2.1.3. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz de configuración ya que si tomamos $\mathbf{c} = (1, -1)^t \in \mathbb{Q}^2$ cumple la condición de la definición.

Ejemplo 2.1.4. También se tiene que $(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{M}_{1 \times n}(\mathbb{Z})$ es una matriz de configuración si y solo si $a_1 = \dots = a_n \neq 0$. La implicación de derecha a izquierda es clara y, recíprocamente, si es de configuración, existe $c \in \mathbb{Q}$ con $a_i c = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, lo que implica que ningún a_i es nulo. Despejando en la primera igualdad, $c = 1/a_1$ y, llevando esta información a las demás igualdades, se tiene que todos los a_i son iguales.

Sea K un cuerpo y denotaremos por $K[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ al anillo de polinomios de Laurent sobre K . Sea $A \in \mathfrak{M}_{d \times n}(\mathbb{Z})$ (no necesariamente de configuración) y definimos el homomorfismo de K -álgebras

$$\pi: K[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow K[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}], \quad (2.1)$$

dado por $\pi(x_j) = \underline{t}^{\mathbf{a}_j} = t_1^{a_{1j}} \dots t_d^{a_{dj}}$.

Definición 2.1.5. A la imagen de π la llamaremos el **anillo tórico** de A y la denotaremos por $K[A]$. Al núcleo de la aplicación π lo llamaremos el **ideal tórico** de A y lo denotaremos por I_A .

Nota 2.1.6. Notar que $K[A]$ es la subálgebra $K[\underline{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \underline{t}^{\mathbf{a}_n}]$ de $K[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$.

Nota 2.1.7. I_A es un ideal primo ya que $K[A]$ es un dominio de integridad y, por el teorema de isomorfía, $K[x_1, \dots, x_n]/I_A$ es isomorfo a $K[A]$.

Ejemplo 2.1.8. Volviendo al ejemplo anterior, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces π es la aplicación

$$\pi: K[x_1, x_2, x_3] \longrightarrow K[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}],$$

definida por $\pi(x_1) = t_1$, $\pi(x_2) = t_1^3 t_2^2$ y $\pi(x_3) = t_1^2 t_2$. Por tanto, $I_A = \ker(\pi) = (x_1 x_2 - x_3^2)$.

Proposición 2.1.9. Sea $A \in \mathfrak{M}_{d \times n}(\mathbb{Z})$. Entonces, $\dim K[A] = \text{rang } A$.

Demostración. Sea $K(A)$ el cuerpo de fracciones de $K[A]$. Gracias al teorema [3, Th. A.16], se tiene que la dimensión de Krull de $K[A]$ es igual al grado de trascendencia de $K(A)$ sobre K .

Denotamos por $G \subseteq \mathbb{Z}^d$ el subgrupo de \mathbb{Z}^d generado por \mathbf{a}_j para $1 \leq j \leq n$. G es un grupo abeliano libre con rango igual a $r = \text{rang}(A)$ y sean $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r$ una base de G . Por tanto, $K(A) = K(\underline{t}^{\mathbf{g}_1}, \dots, \underline{t}^{\mathbf{g}_r})$. Si vemos que

los elementos $\underline{t}^{\mathbf{g}_1}, \dots, \underline{t}^{\mathbf{g}_r}$ son algebraicamente independientes sobre K , tendremos que el grado de trascendencia de $K(A)$ sobre K es $r = \text{rang}(A)$, probando la proposición.

Sea $F \in K[y_1, \dots, y_r]$ un polinomio con $F(\underline{t}^{\mathbf{g}_1}, \dots, \underline{t}^{\mathbf{g}_r}) = 0$. Si $F = \sum_j \lambda_j y_1^{\alpha_1} \cdots y_r^{\alpha_r}$, entonces

$$\sum_j \lambda_j \underline{t}^{\alpha_1 \mathbf{g}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{g}_r} = 0.$$

Como los \mathbf{g}_i son linealmente independientes, los términos $\alpha_1 \mathbf{g}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{g}_r$ son diferentes dos a dos, por tanto, no hay cancelación y se tiene que $\lambda_j = 0$ para todo j , es decir, $F = 0$, probando que $\underline{t}^{\mathbf{g}_1}, \dots, \underline{t}^{\mathbf{g}_r}$ son algebraicamente independientes sobre K . \square

Definición 2.1.10. Un **binomio** de $K[x_1, \dots, x_n]$ es un polinomio f en $K[x_1, \dots, x_n]$ de la forma $f = u - v$, con u y v monomios de $K[x_1, \dots, x_n]$.

Vamos a introducir una notación que usaremos de manera frecuente a lo largo de este trabajo. Dado un vector columna

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

con $b_i \in \mathbb{Z}$ para todo $1 \leq i \leq n$, definimos el binomio $f_{\mathbf{b}} \in K[x_1, \dots, x_n]$ como

$$f_{\mathbf{b}} = \prod_{b_i > 0} x_i^{b_i} - \prod_{b_j < 0} x_j^{-b_j}.$$

Notación 2.1.11. Cada vector $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ lo podemos escribir como $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^-$, donde \mathbf{b}^+ y \mathbf{b}^- son vectores en \mathbb{N}^n cuyos elementos son

$$b_i^+ = \begin{cases} b_i & \text{si } b_i \geq 0, \\ 0 & \text{si } b_i < 0, \end{cases}$$

$$b_i^- = \begin{cases} -b_i & \text{si } b_i \leq 0, \\ 0 & \text{si } b_i > 0. \end{cases}$$

Con esta notación, $f_{\mathbf{b}} = \underline{x}^{\mathbf{b}^+} - \underline{x}^{\mathbf{b}^-}$.

Nota 2.1.12. Para cada binomio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ existe un único monomio g y un único vector $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ con $f = g f_{\mathbf{b}}$. Para ver esto, supongamos que $f = u - v$, con u y v monomios en $K[x_1, \dots, x_n]$. Si u y v no comparten

variables, es decir, el soporte de u y v es disjunto, el comentario es claro. En cambio, si comparten variables, por facilitar la notación supongamos que comparten x_1, \dots, x_j con $j \leq n$, y si escribimos

$$\begin{aligned} u &= x_1^{\alpha_1} \cdots x_j^{\alpha_j} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\ v &= x_1^{\lambda_1} \cdots x_j^{\lambda_j} \cdots x_n^{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$f = u - v = \left(\prod_{i=1}^j x_i^{\min(\alpha_i, \lambda_i)} \right) (x_1^{\mu_1} \cdots x_j^{\mu_j} \cdots x_n^{\alpha_n} - x_1^{\delta_1} \cdots x_j^{\delta_j} \cdots x_n^{\lambda_n}),$$

donde $\mu_k = \alpha_k - \min(\alpha_k, \lambda_k)$ y $\delta_k = \lambda_k - \min(\alpha_k, \lambda_k)$ para $1 \leq k \leq j$. Ya estamos en el caso favorable, tenemos un monomio multiplicando a otros dos que no comparten variables.

Teorema 2.1.13. *Todo ideal tórico es un ideal binomial. Más aún, dada una matriz $A \in \mathfrak{M}_{d \times n}(\mathbb{Z})$, I_A está generado por los bimonios $f_{\mathbf{b}}$ con $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ tal que $A\mathbf{b} = 0$, es decir, $\mathbf{b} \in \ker(A)$.*

Demostración. Veamos primero que I_A es un ideal binomial. Dado $f \in I_A$ no nulo, si $f = \sum_j \lambda_j u_j$, con u_j monomios en $K[x_1, \dots, x_n]$ y $\lambda_j \in K$ y recordamos que $I_A = \ker(\pi)$, entonces

$$0 = \pi(f) = \sum_j \lambda_j \pi(u_j) = \sum_{\mathbf{c}} \left(\sum_{j/\pi(u_j)=\underline{t}^{\mathbf{c}}} \lambda_j \right) \underline{t}^{\mathbf{c}}.$$

Por tanto, $\sum_{j/\pi(u_j)=\underline{t}^{\mathbf{c}}} \lambda_j = 0$, para todo \mathbf{c} que aparezca en la expresión de arriba.

Veamos que podemos escribir f como una combinación lineal de binomios. Si definimos el polinomio $f^{(\mathbf{c})}$ como

$$f^{(\mathbf{c})} = \sum_{j/\pi(u_j)=\underline{t}^{\mathbf{c}}} \lambda_j u_j,$$

podemos reordenar los monomios de f y escribir f como $f = \sum_{\mathbf{c}} f^{(\mathbf{c})}$.

Ahora, para cada \mathbf{c} con $f^{(\mathbf{c})} \neq 0$ y dado u un monomio en el soporte de $f^{(\mathbf{c})}$, como $0 = \sum_{j/\pi(u_j)=\underline{t}^{\mathbf{c}}} \lambda_j$, se tiene que

$$f^{(\mathbf{c})} = \sum_{j/\pi(u_j)=\underline{t}^{\mathbf{c}}} \lambda_j u_j - \left(\sum_{j/\pi(u_j)=\underline{t}^{\mathbf{c}}} \lambda_j \right) u = \sum_{j/\pi(u_j)=\underline{t}^{\mathbf{c}}} \lambda_j (u_j - u),$$

probando que f se puede poner como combinación de binomios, es decir, I_A es un ideal binomial.

Por la nota previa al teorema, todos los binomios son de la forma $gf_{\mathbf{b}}$ para algún $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ y para algún monomio g , luego solo queda probar que $f_{\mathbf{b}} \in I_A$ si y solo si $A\mathbf{b} = 0$.

Como $I_A = \ker(\pi)$, $f_{\mathbf{b}} \in I_A$ si y solo si $0 = \pi(f_{\mathbf{b}}) = \pi(\underline{x}^{\mathbf{b}^+}) - \pi(\underline{x}^{\mathbf{b}^-}) = \underline{t}^{A\mathbf{b}^+} - \underline{t}^{A\mathbf{b}^-}$. Es decir, si y solo si $A\mathbf{b}^+ = A\mathbf{b}^-$. Lo que, teniendo en cuenta que $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^-$, ocurre si y solo si $A\mathbf{b} = 0$. \square

Ejemplo 2.1.14. Siguiendo el ejemplo 2.1.8 con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene que $\ker(A) = \{(t, t, -2t), t \in \mathbb{Z}\}$. Por tanto, I_A está generado por los binomios de la forma $x_1^t x_2^t - x_3^{2t}$, es decir, $I_A = (x_1 x_2 - x_3^2)$, como vimos en el ejemplo 2.1.8.

Ya hemos visto que todo ideal tórico es un ideal binomial primo, el siguiente teorema nos da la afirmación recíproca.

Teorema 2.1.15. *Sea $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal binomial primo. Entonces, I es un ideal tórico.*

Demostración. Veamos primero que si definimos $L = \{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n / f_{\mathbf{b}} \in I\}$, entonces L es un subgrupo de \mathbb{Z}^n . Para ello, si tenemos dos binomios $f_{\mathbf{b}}$ y $f_{\mathbf{c}}$, entonces

$$f_{\mathbf{b}} f_{\mathbf{c}} = u f_{\mathbf{b}+\mathbf{c}} - \underline{x}^{\mathbf{b}^-} f_{\mathbf{c}} - \underline{x}^{\mathbf{c}^-} f_{\mathbf{b}},$$

para algún monomio u . Ahora, como I es un ideal primo, si $f_{\mathbf{b}}$ y $f_{\mathbf{c}}$ pertenecen a I , entonces $f_{\mathbf{b}+\mathbf{c}} \in I$. Por último, $f_{-\mathbf{b}} = -f_{\mathbf{b}} \in I$, probando que L es un subgrupo de \mathbb{Z}^n .

Si vemos que \mathbb{Z}^n/L es libre de torsión, entonces existe una inmersión f , de \mathbb{Z}^n/L en \mathbb{Z}^d para algún d . Sean $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ la base canónica de \mathbb{Z}^n y sean $\mathbf{a}_i \in \mathbb{Z}^d$ la imagen de cada $\mathbf{e}_i + L$. Se tiene que $\sum_{i=1}^n b_i \mathbf{a}_i = 0$ si y solo si $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^t \in L$. Esto es cierto ya que

$$\sum_{i=1}^n b_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n b_i f(\mathbf{e}_i + L) = \sum_{i=1}^n f(b_i \mathbf{e}_i + L) = f\left(\sum_{i=1}^n (b_i \mathbf{e}_i + L)\right) = f(\mathbf{b} + L).$$

Por tanto, si definimos la matriz A como la matriz cuyas columnas son \mathbf{a}_i , entonces $\mathbf{b} \in L$ si y solo si $\mathbf{b} \in \ker(A)$. Por tanto, I es el ideal tórico I_A y se termina la prueba.

Veamos que \mathbb{Z}^n/L es libre de torsión: tenemos que ver que dado $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$, si existe $m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$ con $m\mathbf{b} \in L$, entonces $\mathbf{b} \in L$. Primero, como $m\mathbf{b} \in L$, entonces $f_{m\mathbf{b}} \in I$. Diferenciamos dos casos:

1. Si $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$, descomponemos $f_{m\mathbf{b}} = f_{\mathbf{b}}g$, donde

$$g = \underline{x}^{(m-1)\mathbf{b}^+} + \underline{x}^{(m-2)\mathbf{b}^+} \underline{x}^{\mathbf{b}^-} + \cdots + \underline{x}^{\mathbf{b}^+} \underline{x}^{(m-2)\mathbf{b}^-} + \underline{x}^{(m-1)\mathbf{b}^-}.$$

Si sustituimos cada x_i por 1, g no es nulo con esta sustitución. En cambio, haciendo esta sustitución cualquier binomio se anula, luego es imposible que $g \in I$. Para terminar, como I es un ideal primo y $f_{m\mathbf{b}} \in I$, necesariamente $f_{\mathbf{b}} \in I$, luego $\mathbf{b} \in L$.

2. Si $\text{char}(\mathbb{K}) = p > 0$, escribimos $m = p^e m'$, con $e \geq 0$, $m' \geq 1$ enteros tales que p no divide a m' . Descomponemos $f_{m\mathbf{b}} = f_{\mathbf{b}}^{p^e} g'$, donde

$$g' = \underline{x}^{(m'-1)p^e \mathbf{b}^+} + \cdots + \underline{x}^{p^e \mathbf{b}^+} + \underline{x}^{p^e \mathbf{b}^-} + \cdots + \underline{x}^{(m'-1)p^e \mathbf{b}^-}.$$

De nuevo, si sustituimos cada x_i por 1, g' no se anula y, por tanto, $g' \notin I$. Como I es primo y $f_{m\mathbf{b}} \in I$, necesariamente $f_{\mathbf{b}}^{p^e} \in I$ que, como I es primo, implica que $f_{\mathbf{b}} \in I$.

□

La siguiente proposición nos proporcionará un criterio para determinar cuando un ideal tórico es homogéneo.

Proposición 2.1.16. *Sea $A \in \mathfrak{M}_{d \times n}(\mathbb{Z})$, son equivalentes:*

1. A es una matriz de configuración.
2. Para todo $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^t \in \mathbb{Z}^n$ con $A\mathbf{b} = 0$, se tiene que $\sum_{i=1}^n b_i = 0$.
3. I_A es un ideal homogéneo.

Demostración. (1 \Rightarrow 2) Como A es una matriz de configuración, existe $\mathbf{c} \in \mathbb{Q}^d$ tal que $\mathbf{c}A = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^n$. Sea $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^t \in \mathbb{Z}^n$ con $A\mathbf{b} = 0$. Entonces,

$$0 = \mathbf{c}(A\mathbf{b}) = (\mathbf{c}A)\mathbf{b} = (1, \dots, 1)(b_1, \dots, b_n)^t = \sum_{i=1}^n b_i,$$

cumpléndose la condición 2.

(2 \Rightarrow 1) Sea $U \subseteq \mathbb{Q}^n$ el subespacio generado por las filas de la matriz A . Sea $V \subseteq \mathbb{Q}^n$ el subespacio generado por las filas de la matriz A y el vector $(1, \dots, 1) \in \mathbb{Q}^n$. Como $U \subseteq V$, se tiene que $V^\perp \subset U^\perp$, donde

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{\mathbf{w} \in \mathbb{Q}^n / \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0, \forall \mathbf{u} \in U\}, \\ V^\perp &= \{\mathbf{w} \in \mathbb{Q}^n / \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0, \forall \mathbf{v} \in V\}. \end{aligned}$$

Además, si $\mathbf{w} \in U^\perp$, entonces $A\mathbf{w}^t = 0$, lo que, gracias a la condición 2, implica que $0 = \sum_{i=1}^n w_i = \mathbf{w} \cdot (1, \dots, 1)$, es decir, $\mathbf{w} \in V^\perp$. Por tanto, $U^\perp = V^\perp$ y, entonces,

$$U = (U^\perp)^\perp = (V^\perp)^\perp = V.$$

Para concluir, como U y V son finitamente generados, $(1, \dots, 1)$ es una combinación lineal de las filas de A . Si denotamos por $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_d$ las filas de A , existen $c_1, \dots, c_d \in \mathbb{Q}$ tales que

$$c_1 \mathbf{A}_1 + \dots + c_d \mathbf{A}_d = (1, \dots, 1).$$

Para $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_d)$ tenemos la condición de que A sea una matriz de configuración.

(2 \Leftrightarrow 3) Gracias al teorema 2.1.13, los monomios $f_{\mathbf{b}}$ con $A\mathbf{b} = 0$ generan I_A . Por definición, I_A es un ideal homogéneo si y solo si sus generadores, $f_{\mathbf{b}}$, son homogéneos. Por último, es claro que esto ocurre si y solo si 2. \square

Para concluir la sección daremos un resultado que nos indicará cómo se puede calcular el ideal tórico de una matriz $A \in \mathfrak{M}_{d \times n}(\mathbb{Z})$ usando eliminación de variables. Ver [10]. Definimos

$$S[\underline{t}^\pm] = K[x_1, \dots, x_n, \underline{t}_1^\pm, \dots, \underline{t}_d^\pm].$$

Si A tiene como columnas $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, definimos el ideal $J_A \subseteq S[\underline{t}^\pm]$ como

$$J_A = \langle x_1 - \underline{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, x_n - \underline{t}^{\mathbf{a}_n} \rangle.$$

Antes de la proposición, probaremos el siguiente lema que nos será de utilidad.

Lema 2.1.17. *Si C es un anillo conmutativo y $c_1, \dots, c_t, c'_1, \dots, c'_t \in C$, entonces*

$$c_1 \cdots c_t - c'_1 \cdots c'_t \in \langle c_1 - c'_1, \dots, c_t - c'_t \rangle.$$

Demostración. Haremos inducción sobre t . Si $t = 1$ el resultado es claro. Suponemos el resultado cierto para $t > 1$ y veámoslo para $t + 1$. Escribimos

$$\begin{aligned} c_1 \cdots c_{t+1} - c'_1 \cdots c'_{t+1} &= c_1 \cdots c_{t+1} - c_1 \cdots c_t c'_{t+1} + c_1 \cdots c_t c'_{t+1} - c'_1 \cdots c'_{t+1} = \\ &= c_1 \cdots c_t (c_{t+1} - c'_{t+1}) + c'_{t+1} (c_1 \cdots c_t - c'_1 \cdots c'_t). \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $c_1 \cdots c_t - c'_1 \cdots c'_t \in \langle c_1 - c'_1, \dots, c_t - c'_t \rangle$ y se prueba el resultado. \square

Proposición 2.1.18. *Dada una matriz A , se tiene que*

$$I_A = J_A \cap K[x_1, \dots, x_n].$$

Demostración. Dado un polinomio $P(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$ tal que $P \in I_A$, entonces

$$0 = \pi(P) = P(\underline{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \underline{t}^{\mathbf{a}_n})$$

donde π es la aplicación definida en (2.1). Si escribimos $P = \sum a_\alpha \underline{x}^\alpha$ y $P(\underline{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \underline{t}^{\mathbf{a}_n}) = \sum a_\alpha \underline{t}^\alpha$, entonces

$$P = P - P(\underline{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \underline{t}^{\mathbf{a}_n}) = \sum a_\alpha (\underline{x}^\alpha - \underline{t}^\alpha) \in \langle x_1 - \underline{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, x_n - \underline{t}^{\mathbf{a}_n} \rangle = J_A,$$

gracias al lema anterior. Además, como $P \in K[x_1, \dots, x_n]$, se tiene que $P \in J_A \cap K[x_1, \dots, x_n]$.

Recíprocamente, si tenemos $P \in S[\underline{t}^\pm]$ con $P \in J_A \cap K[x_1, \dots, x_n]$, entonces existen $g_1, \dots, g_n \in S[\underline{t}^\pm]$ con

$$P(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1 - \underline{t}^{\mathbf{a}_1}) + \cdots + g_n(x_n - \underline{t}^{\mathbf{a}_n}).$$

Luego $\pi(P) = P(\underline{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \underline{t}^{\mathbf{a}_n}) = 0$ y, por tanto, $P \in I_A$. \square

Este método sirve, en general, para calcular el núcleo de una aplicación polinomial. Para el cálculo de los generadores de un ideal tórico existen otros algoritmos específicos. Por ejemplo, los algoritmos de Bigatti-La Scala-Robbiano [2] o de Di Biase-Urbanke [1].

2.2. Ideales tóricos asociados a grafos

En esta sección veremos cómo se puede asociar un ideal tórico a un grafo y daremos algunos resultados sobre ellos. Concluiremos la sección con el teorema 2.2.31, que nos dará una equivalencia entre una propiedad del grafo y propiedades tanto del ideal como del anillo tórico asociado al grafo.

Definición 2.2.1. Un **grafo simple finito** es un grafo con un número finito de vértices, sin bucles (aristas que empiezan y acaban en el mismo vértice) y sin aristas múltiples (dos aristas o más conectando los mismos dos vértices). Se denotará por $G = \{V(G), E(G)\}$, donde $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ son los vértices del grafo y $E(G) = \{e_1, \dots, e_q\}$ son las aristas del grafo, donde cada e_i es un subconjunto de dos elementos de $V(G)$.

Definición 2.2.2. Dado un grafo $G = \{V(G), E(G)\}$, la **matriz de incidencia del grafo** es una matriz $A = (a_{ij})$, de tamaño $|V(G)| \times |E(G)|$, donde $a_{ij} = 1$ si $x_i \in e_j$ y 0 en otro caso.

Ejemplo 2.2.3. Un triángulo $G = \{V(G), E(G)\}$ es un grafo simple finito con $V(G) = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $E(G) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_1\}\}$.

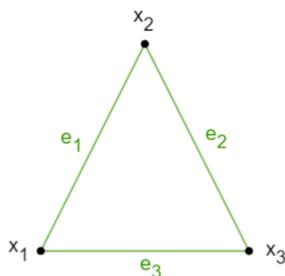


Figura 2.1: Triángulo

Su matriz de incidencia es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota 2.2.4. La matriz de incidencia de un grafo es una matriz de configuración, ya que, cada columna de la matriz tiene todas sus entradas nulas excepto dos unos. Por tanto, eligiendo $\mathbf{c} = (1/2, \dots, 1/2)$, tenemos que es matriz de configuración. Además, como los elementos de cada columna suman 2, especializando la expresión (3.1) que veremos más adelante, tenemos la siguiente relación entre los números de Betti para la graduación estándar y para la multigraduación inducida por la matriz de incidencia:

$$\beta_{ij} = \sum_{|\alpha|=2 \cdot j} \beta_{i\alpha}. \quad (2.2)$$

De la misma manera que hicimos en (2.1), dado un grafo simple finito $G = \{V(G), E(G)\}$, denotamos por $R = K[E(G)] = K[e_1, \dots, e_q]$ y $S = K[V(G)] = K[x_1, \dots, x_n]$. Definimos el homomorfismo de K -álgebras, $\pi: R \rightarrow S$ como

$$\begin{aligned} \pi: R &\longrightarrow S \\ e_i &\rightarrow x_{i,1}x_{i,2}, \end{aligned}$$

si $e_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}\}$.

Definición 2.2.5. Dado un grafo G , definimos el **ideal tórico** de G como el núcleo de la aplicación π . Lo denotaremos por $I_G = \ker(\pi)$.

De hecho, si volvemos a la definición 2.1.5, vemos que el ideal tórico de un grafo es el ideal tórico de su matriz de incidencia. Además, como es una matriz de configuración, gracias a la proposición 2.1.16 tenemos que I_G es un ideal homogéneo.

Las siguientes definiciones nos serán de utilidad en las secciones posteriores, ya que este tipo particular de grafos jugará un papel importante.

Definición 2.2.6. Dado un grafo $G = \{V(G), E(G)\}$, decimos que es **bipartito** si existe una partición de los vértices, $V(G) = V_1 \cup V_2$, con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ tal que para todo $e \in E(G)$ se tiene que $e \cap V_1 \neq \emptyset$ y $e \cap V_2 \neq \emptyset$.

Ejemplo 2.2.7. Un triángulo no es un grafo bipartito ya que cualquier partición de los vértices será de la forma $V_1 = \{x_i\}$ y $V_2 = \{x_j, x_k\}$ con $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j \neq k$, por tanto, la arista que une x_j con x_k nunca cumplirá esta propiedad. En cambio, un cuadrado sí que es un grafo bipartito eligiendo en cada V_i los puntos opuestos diagonalmente.

Definición 2.2.8. Dado un grafo $G = \{V(G), E(G)\}$, decimos que es **conexo** si para cada par de vértices distintos $x, y \in V(G)$, existe una secuencia de aristas $\omega = (e_1, \dots, e_t)$ en $E(G)$ con $x \in e_1$, $y \in e_t$ y $e_i \cap e_{i+1} \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq t - 1$.

De la misma manera que en la proposición 2.1.9, podemos decir cuál es la dimensión del anillo tórico asociado a un grafo.

Teorema 2.2.9. *Dado un grafo G finito simple y conexo con n vértices, se tiene que la dimensión del anillo tórico de G (el de su matriz de incidencia), R/I_G es*

$$\dim(R/I_G) = \begin{cases} n & \text{si } G \text{ no es bipartito,} \\ n - 1 & \text{si } G \text{ es bipartito.} \end{cases}$$

La demostración se puede encontrar en [13, Cor.10.1.21].

Definición 2.2.10. Sea G un grafo simple finito. Un **camino** es una secuencia de aristas $\omega = (e_1, \dots, e_t)$ tal que $e_i \cap e_{i+1} \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq t-1$. Esto es equivalente a tener una secuencia de vértices de G , (x_1, \dots, x_{t+1}) , tal que existe una arista en G de la forma $e_i = (x_i, x_{i+1})$ para $1 \leq i \leq t$. Se dice que el camino es par si t es par. Se dice que un **camino es cerrado** si tiene una secuencia de vértices (x_1, \dots, x_t) tal que $x_1 = x_t$.

Definición 2.2.11. Dado un grafo simple finito G , un **ciclo** es un camino cerrado tal que si (x_1, \dots, x_t) son los vértices del camino, entonces $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$, excepto el primero y el último. Diremos que el ciclo es par (impar) si es un camino cerrado par (impar).

El siguiente resultado da una caracterización de los grafos bipartitos en función de los ciclos pares. Su demostración se puede encontrar en [13, Prop.7.1.2].

Proposición 2.2.12. *Un grafo G es bipartito si y solo si todos los ciclos de G son pares.*

Veamos que los caminos cerrados pares de un grafo G corresponden a elementos de I_G . Si $\omega = (e_{j_1}, \dots, e_{j_{2t}})$ es un camino cerrado par y su secuencia de vértices es $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2t+1}})$, con $x_{j_{2t+1}} = x_1$, definimos el siguiente binomio:

$$f_\omega = \prod_{i \text{ impar}} e_{j_i} - \prod_{i \text{ par}} e_{j_i}. \quad (2.3)$$

Veamos que $f_\omega \in I_G$, es decir, $f_\omega \in \ker(\pi)$:

$$\pi(f_\omega) = \prod_{i \text{ impar}} \pi(e_{j_i}) - \prod_{i \text{ par}} \pi(e_{j_i}) = \prod_{i=1}^{2t+1} x_{j_i} - \prod_{i=1}^{2t+1} x_{j_i} = 0.$$

Notación 2.2.13. Dado f_ω como en (2.3), denotaremos

$$f_\omega^+ = \prod_{i \text{ impar}} e_{j_i},$$

$$f_\omega^- = \prod_{i \text{ par}} e_{j_i}.$$

Vamos a definir ahora un tipo particular de camino que nos permitirá definir de manera más precisa los generadores del ideal tórico asociado a un grafo.

Definición 2.2.14. Dado un grafo G , un camino cerrado par ω es **primitivo** si no existe otro camino cerrado par ω' en G con $f_\omega \neq f_{\omega'}$ tal que $f_{\omega'}$ divida a f_ω y $f_{\omega'}$ divida a f_ω .

Definición 2.2.15. Sea I un ideal tórico, diremos que un binomio $f_b = \underline{x}^{b^+} - \underline{x}^{b^-} \in I$ es primitivo si no existe otro binomio $f_a = \underline{x}^{a^+} - \underline{x}^{a^-} \in I$ tal que \underline{x}^{a^+} divida a \underline{x}^{b^+} y \underline{x}^{a^-} divida a \underline{x}^{b^-} .

Ejemplo 2.2.16. Sea G el grafo de la siguiente figura.

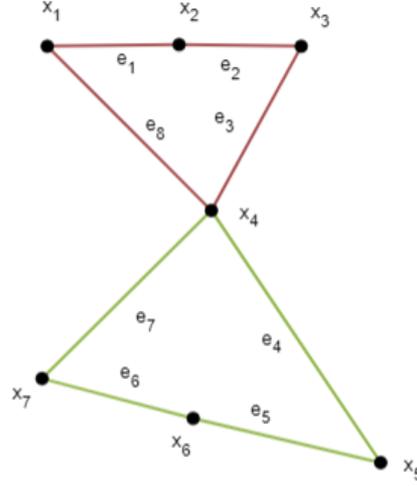


Figura 2.2: Ejemplo de caminos primitivos y caminos que no lo son.

Los caminos cerrados pares $\omega_1 = (e_1, e_2, e_3, e_8)$ (rojo) y $\omega_2 = (e_4, e_5, e_6, e_7)$ (verde) son dos caminos cerrados pares primitivos de G . En cambio, si consideramos el camino cerrado par $\omega = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$ no es primitivo. Para comprobarlo, tenemos que

$$\begin{aligned} f_{\omega_1} &= e_1 e_3 - e_2 e_8, \\ f_{\omega_2} &= e_4 e_6 - e_5 e_7, \\ f_\omega &= e_1 e_3 e_5 e_7 - e_2 e_4 e_6 e_8. \end{aligned}$$

Por tanto, $f_{\omega_1}^+$ divide a f_ω^+ y $f_{\omega_1}^-$ divide a f_ω^- .

Teorema 2.2.17. Sea G un grafo simple finito. Entonces, I_G está generado por binomios correspondientes a caminos cerrados pares que también son primitivos.

Demostración. Ya sabemos que I_G está generado por binomios, veamos en primer lugar que I_G está generado por binomios correspondientes a caminos cerrados pares. Sea $f = \prod_{k=1}^q e_{j_k} - \prod_{k=1}^q e_{i_k}$ un binomio en I_G y tal que $j_k \neq i_k$ para todo $1 \leq k \leq q$. Notar que si f no cumple la segunda condición se puede sacar factor común a los elementos iguales y quedarnos con un binomio que cumpla esta condición. Como $f \in I_G = \ker(\pi)$, se tiene que

$$\prod_{k=1}^q \pi(e_{j_k}) = \prod_{k=1}^q \pi(e_{i_k}). \quad (2.4)$$

Por simplificar notación, supongamos que $\pi(e_{j_1}) = x_1 x_2$. Necesariamente, tiene que existir $1 \leq m \leq q$ tal que $\pi(e_{i_m}) = x_2 x_r$, para cierto $r \neq 1$. De nuevo, para simplificar notación, supongamos $m = 1$ y $r = 3$, es decir, $\pi(e_{i_1}) = x_2 x_3$. Esto fuerza a que exista $2 \leq l \leq q$ tal que $\pi(e_{j_l}) = x_3 x_s$ con $s \neq 2$. Repitiendo este proceso y, quizá, reordenando los subíndices j_k e i_k , podemos construir un camino cerrado par $\omega = (e_{j_1}, e_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}, e_{i_p})$ para algún $2 \leq p \leq q$. Ya hemos visto que los caminos cerrados pares dan lugar a binomios que pertenecen a I_G , es decir, $f_\omega = \prod_{k=1}^p e_{j_k} - \prod_{k=1}^p e_{i_k} \in I_G$. Por tanto,

$$\pi\left(\prod_{k=1}^p e_{j_k}\right) = \pi\left(\prod_{k=1}^p e_{i_k}\right).$$

Teniendo en cuenta (2.4) se tiene que

$$\pi\left(\prod_{k=p+1}^q e_{j_k}\right) = \pi\left(\prod_{k=p+1}^q e_{i_k}\right).$$

Es decir, $f' = \prod_{k=p+1}^q e_{j_k} - \prod_{k=p+1}^q e_{i_k} \in I_G$.

Denotaremos por I'_G al ideal binomial generado por binomios f_α , con α un camino cerrado par. Probaremos por inducción sobre $q \geq 2$ que $f \in I'_G$, lo que implica que $I_G = I'_G$. Si $q = 2$ necesariamente $p = 2$ y se tiene que $f = f_\omega$, probando que $f \in I'_G$. Si suponemos cierto el resultado para $q - 1$ y $f = \prod_{k=1}^q e_{j_k} - \prod_{k=1}^q e_{i_k}$, repitiendo el proceso de arriba podemos construir $f' \in I_G$ y f' tiene $q - p - 1 < q$ elementos en el producto. Por hipótesis de inducción, $f' \in I'_G$. Ahora,

$$\begin{aligned} f &= \prod_{k=p+1}^q e_{i_k} \left(\prod_{k=1}^p e_{j_k} - \prod_{k=1}^p e_{i_k} \right) + \prod_{k=1}^p e_{j_k} \left(\prod_{k=p+1}^q e_{j_k} - \prod_{k=p+1}^q e_{i_k} \right) = \\ &= f_\omega \prod_{k=p+1}^q e_{i_k} + f' \prod_{k=1}^p e_{j_k} \in I'_G. \end{aligned}$$

Veamos ahora que está generado por caminos cerrados pares primitivos. Sea ω un camino cerrado par que no es primitivo y sea $2q$ la longitud de ω . Como no es primitivo, existe otro camino cerrado par ω' , de longitud menor que $2q$ y tal que si escribimos $f_\omega = f_\omega^+ - f_\omega^-$, entonces $f_{\omega'}^+$ divide a f_ω^+ y $f_{\omega'}^-$ divide a f_ω^- . El binomio $g = f_\omega^+/f_{\omega'}^+ - f_\omega^-/f_{\omega'}^-$ pertenece a I_G ya que corresponde a un camino cerrado par. Podemos descomponer

$$f_\omega = g f_{\omega'}^+ + f_{\omega'}^- \frac{f_\omega^-}{f_{\omega'}^-} = f_\omega^+ - \frac{f_{\omega'}^+ f_\omega^-}{f_{\omega'}^-} + \frac{f_{\omega'}^+ f_\omega^-}{f_{\omega'}^-} - f_\omega^- = f_\omega^+ - f_\omega^- = f_\omega.$$

Ahora, tanto g como $f_{\omega'}$ corresponden a caminos cerrados pares que, o son primitivos, o están formados por una cantidad menor de aristas que ω . Repitiendo este proceso, podemos expresar f_ω como una combinación lineal de binomios que corresponden a caminos cerrados pares primitivos. \square

Vamos a dar unos resultados previos que son necesarios para poder demostrar el teorema 2.2.31. Más concretamente, estos resultados nos permitirán demostrar el corolario 2.2.30, que es una de las implicaciones del teorema.

El siguiente lema nos dirá cómo son los caminos cerrados pares primitivos en un grafo.

Lema 2.2.18. *Sea G un grafo simple finito. Un camino par cerrado primitivo ω de G es de uno de los siguientes tipos:*

1. ω es un ciclo par de G .
2. ω es una concatenación de dos ciclos impares. Es decir, $\omega = (C_1, C_2)$ donde C_1 y C_2 son ciclos impares con exactamente un vértice en común.
3. (Ver figura 2.3) $\omega = (C_1, \omega_1, C_2, \omega_2)$, donde C_1 y C_2 son ciclos impares de G tal que $V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$ y donde ω_1 y ω_2 son caminos de G de la forma $\omega_1 = (e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$, $\omega_2 = (e'_{i_1}, \dots, e'_{i_{r'}})$ cumpliendo que si x_1 es el único vértice de $e_{i_1} \cap e'_{i_{r'}} \cap V(C_1)$ y x_2 el único vértice de $e_{i_r} \cap e'_{i_1} \cap V(C_2)$, entonces

$$\begin{aligned} (V(C_1) \cup V(C_2)) \cap (e_{i_1} \setminus \{x_1\}) &= \emptyset, \\ (V(C_1) \cup V(C_2)) \cap e_{i_j} &= \emptyset, \text{ para } 2 \leq j \leq r-1, \\ (V(C_1) \cup V(C_2)) \cap (e_{i_r} \setminus \{x_2\}) &= \emptyset, \\ (V(C_1) \cup V(C_2)) \cap (e'_{i_1} \setminus \{x_2\}) &= \emptyset, \\ (V(C_1) \cup V(C_2)) \cap e'_{i_{j'}} &= \emptyset, \text{ para } 2 \leq j' \leq r'-1, \\ (V(C_1) \cup V(C_2)) \cap (e'_{i_{r'}} \setminus \{x_1\}) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\omega = (e_{i_1}, \dots, e_{i_{2q}}) = (\{x_{j_0}, x_{j_1}\}, \{x_{j_1}, x_{j_2}\}, \dots, \{x_{j_{2q-1}}, x_{j_0}\})$ un camino cerrado par primitivo de G . Si $j_k \neq j_l$ si $k \neq l$, entonces ω es un ciclo par de G , teniéndose 1.

Si ω no es un ciclo, sea $0 \leq r \leq 2q - 1$ tal que $j_k \neq j_{k'}$ para todos $0 \leq k < k' < r \leq 2q - 1$. Sea $0 \leq k'' < r$ tal que $j_{k''} = j_r$. Entonces, $\omega = (C_1, \omega')$ donde C_1 es el siguiente ciclo de G

$$C_1 = (\{x_{j_{k''}}, x_{j_{k''+1}}\}, \{x_{j_{k''+1}}, x_{j_{k''+2}}\}, \dots, \{x_{j_{r-1}}, x_{j_r}\}),$$

y ω' es el siguiente camino cerrado de G

$$\omega' = (\{x_{j_r}, x_{j_{r+1}}\}, \dots, \{x_{j_{2q-1}}, x_{j_0}\}, \{x_{j_0}, x_{j_1}\}, \dots, \{x_{j_{k''-1}}, x_{j_{k''}}\}).$$

Como ω es primitivo, necesariamente tanto C_1 como ω' deben tener longitud impar. Para simplificar la notación escribiremos

$$\begin{aligned} C_1 &= (\{x_{j_0}, x_{j_1}\}, \{x_{j_1}, x_{j_2}\}, \dots, \{x_{j_{r-1}}, x_{j_0}\}), \\ \omega' &= (\{x_{j_0}, x_{j_{r+1}}\}, \{x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}\}, \dots, \{x_{j_{2q-1}}, x_{j_0}\}). \end{aligned}$$

Veamos ahora que C_1 y ω' solo tienen x_{j_0} como vértice en común. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $1 \leq j_a \leq r - 1$, $j_a \neq j_0$ con $x_{j_a} \in V(C_1) \cap V(\omega')$. Además, como $x_{j_a} \in \omega'$, existe $r + 1 \leq j_b \leq 2q - 1$ con $x_{j_a} = x_{j_b}$. Sean ω_1 y ω_2 los caminos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (\{x_{j_0}, x_{j_1}\}, \{x_{j_1}, x_{j_2}\}, \dots, \{x_{j_{a-1}}, x_{j_a}\}), \\ \omega_2 &= (\{x_{j_a}, x_{j_{a+1}}\}, \{x_{j_{a+1}}, x_{j_{a+2}}\}, \dots, \{x_{j_{r-1}}, x_{j_0}\}). \end{aligned}$$

Como C_1 tiene longitud impar y $C_1 = (\omega_1, \omega_2)$, necesariamente uno (y solo uno) de los dos caminos tiene longitud impar. De la misma manera, sean ω_3 y ω_4 los siguientes caminos

$$\begin{aligned} \omega_3 &= (\{x_{j_0}, x_{j_{r+1}}\}, \{x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}\}, \dots, \{x_{j_{b-1}}, x_{j_b}\}), \\ \omega_4 &= (\{x_{j_b}, x_{j_{b+1}}\}, \{x_{j_{b+1}}, x_{j_{b+2}}\}, \dots, \{x_{j_{2q-1}}, x_{j_0}\}). \end{aligned}$$

Como ω' tiene longitud impar y $\omega' = (\omega_3, \omega_4)$, necesariamente uno (y solo uno) de los dos caminos tiene longitud impar.

Esto implica que si consideramos los caminos cerrados (ω_1, ω_3) , (ω_1, ω_4) , (ω_2, ω_3) o (ω_2, ω_4) , alguno de ellos tiene longitud par. Esto es una contradicción con que ω sea un camino primitivo. Es decir, acabamos de probar que $V(C_1) \cap V(\omega') = \{x_{j_0}\}$. Si ω' es un ciclo de G , entonces estamos en la condición 2 del enunciado.

Supongamos que ω' no es un ciclo y veamos que para todo $r + 2 \leq c \leq 2q - 2$ se tiene que $j_0 \neq j_c$. Por reducción al absurdo supongamos que existe $r + 2 \leq c \leq 2q - 2$ con $j_0 = j_c$. Sean ω_5 y ω_6 los siguientes caminos

$$\begin{aligned}\omega_5 &= (\{x_{j_0}, x_{j_{r+1}}\}, \{x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}\}, \dots, \{x_{j_{c-1}}, x_{j_c}\}), \\ \omega_6 &= (\{x_{j_c}, x_{j_{c+1}}\}, \{x_{j_{c+1}}, x_{j_{c+2}}\}, \dots, \{x_{j_{2q-1}}, x_{j_0}\}).\end{aligned}$$

Como ω' tiene longitud impar y $\omega' = (\omega_5, \omega_6)$, necesariamente uno (y solo uno) de los dos caminos tiene longitud impar. Por tanto, como C_1 también tiene longitud impar, uno de los caminos cerrados (C_1, ω_5) o (C_1, ω_6) tiene longitud par, contradiciendo que ω sea primitivo. Por tanto, para todo $r + 2 \leq c \leq 2q - 2$ se tiene que $j_0 \neq j_c$.

Teniendo en cuenta que ω' no es un ciclo y que acabamos de probar que no se repite el primer vértice de ω' , necesariamente $\omega' = (\omega_7, \omega_8, \omega_9)$ donde ω_7 es un camino de G con $x_{j_0} \in \omega_7$, ω_8 es un camino cerrado de G y ω_9 es un camino de G con $x_{j_0} \in \omega_9$. Como ω es primitivo necesariamente ω_8 tiene longitud impar. Si ω_8 es un ciclo de G estamos en la condición 3 del enunciado. Si no, repitiendo este proceso con ω_8 y teniendo en cuenta que la concatenación de caminos es un camino, llegaremos a la situación $\omega' = (\alpha, \beta, \gamma)$, con α y γ dos caminos de G con $x_{j_0} \in \alpha$, $x_{j_0} \in \gamma$ y β un ciclo de longitud impar de G , es decir, la situación 3 del enunciado. \square

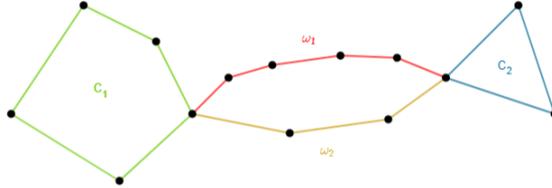


Figura 2.3: Ejemplo de la construcción del paso 3 del lema 2.2.18

Nota 2.2.19. Los caminos ω_1 y ω_2 de la construcción del paso 3 del lema anterior pueden ser el mismo camino pero recorridos en sentido contrario. Además, notar que la paridad de los caminos ω_1 y ω_2 debe de ser la misma para que se cumpla que el camino ω es par.

Corolario 2.2.20. *Si G es un grafo bipartito entonces todos los caminos cerrados pares primitivos son ciclos pares. En particular, I_G está generado por binomios f_C , donde C es un ciclo par de G .*

Demostración. Gracias a la proposición 2.2.12, en un grafo bipartito no puede haber ciclos impares. Por tanto, todos los caminos cerrados pares primitivos son ciclos pares gracias al lema anterior. Gracias al teorema 2.2.17 se tiene la segunda parte del enunciado. \square

Definición 2.2.21. Diremos que un camino cerrado par ω de G es **fundamental** si para todo camino cerrado par ω' con $V(\omega') \subseteq V(\omega)$ con $f_{\omega'} \neq 0$ se cumple que $f_{\omega} = f_{\omega'}$ o $f_{\omega} = -f_{\omega'}$.

Nota 2.2.22. Notar que si un camino cerrado par es fundamental entonces también es primitivo.

Lema 2.2.23. Sea ω un camino cerrado par fundamental de G y supongamos que el ideal I_G está generado por $\{f_{\omega_1}, \dots, f_{\omega_s}\}$, donde cada f_{ω_i} es un camino cerrado par de G . Entonces, existe un $1 \leq i \leq s$ con $f_{\omega} = f_{\omega_i}$ o $f_{\omega} = -f_{\omega_i}$.

Demostración. Como $f_{\omega} \in I_G$ existe $1 \leq i \leq s$ tal que $f_{\omega_i}^+$ divide a f_{ω}^+ o a f_{ω}^- . Por tanto, $V(\omega_i) \subseteq V(\omega)$ y se cumple el resultado. \square

Definición 2.2.24. Sean C y C' dos ciclos de G tales que $V(C) \cap V(C') = \emptyset$. Un **punto** entre C y C' es una arista $e = \{x_i, x_j\}$ tal que $x_i \in V(C)$ y $x_j \in V(C')$.

Definición 2.2.25. Sea C un ciclo de G . Una **cuerda** de C es una arista $e = \{x_i, x_j\} \in E(G)$ tal que e no forma parte del ciclo pero x_i y x_j forman parte del ciclo. Diremos que un ciclo es **minimal** (o inducido) si no tiene ninguna cuerda.

Definición 2.2.26. Sea $C = (\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{2q-1}, x_1\})$ un ciclo par de G y $e = \{x_i, x_j\}$ con $1 \leq i < j \leq 2q - 1$ una cuerda de C . Diremos que e es una **cuerda par** si $j - i$ es impar y diremos que es una **cuerda impar** si $j - i$ es par.

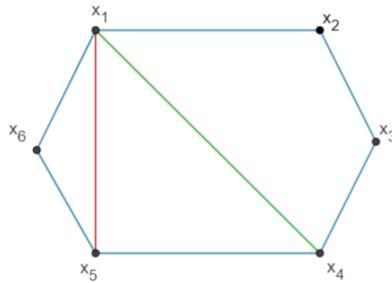


Figura 2.4: Ejemplo de una cuerda impar (rojo) y una cuerda par (verde).

Nota 2.2.27. Dicho de otra forma, una cuerda es par cuando divide al ciclo en dos ciclos pares y es impar cuando divide al ciclo en dos ciclos impares.

Definición 2.2.28. Sea $C = (\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_q, x_1\})$ un ciclo (no necesariamente par) de G y sean $e = \{x_i, x_j\}$ y $e' = \{x_{i'}, x_{j'}\}$ dos cuerdas de C con $1 \leq i < j \leq q - 1$ y $1 \leq i' < j' \leq q - 1$. Diremos que e y e' **se cortan** en C si se cumple que $i' = i + 1$ y $j' = j + 1$ o si se cumple que $i' = j + 1$ y $j' = i + 1$ (teniendo en cuenta que $x_{q+1} = x_1$).

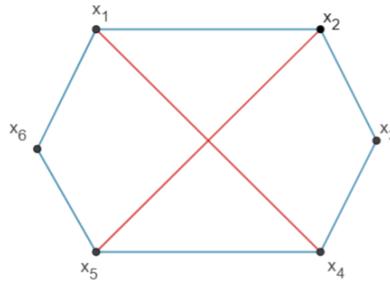


Figura 2.5: Ejemplo de cuerdas que se cortan.

El siguiente teorema dará un criterio basado en propiedades del grafo para decidir cuando el ideal I_G está generado por binomios cuadráticos.

Teorema 2.2.29. *Sea G un grafo simple conexo. Entonces, el ideal tórico I_G está generado por binomios cuadráticos si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Si C es un ciclo par de G de longitud mayor o igual que 6, entonces C tiene una cuerda par o tiene tres cuerdas impares tales que al menos dos de ellas se cortan.*

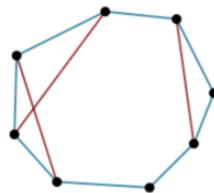


Figura 2.6: Representación del caso de tres cuerdas impares tales que al menos dos de ellas se cortan.

2. Si C_1 y C_2 son dos ciclos impares minimales con exactamente un vértice en común, entonces existe una arista $\{x_i, x_j\} \notin E(C_1) \cup E(C_2)$ con $x_i \in V(C_1)$ y $x_j \in V(C_2)$.

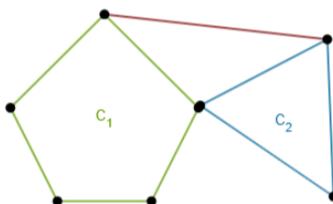


Figura 2.7: Representación de la condición 2.

3. Si C_1 y C_2 son dos ciclos impares minimales con $V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$, entonces existen al menos dos puentes entre C_1 y C_2 .

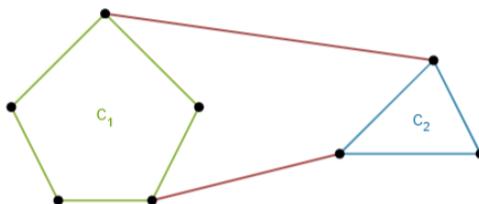


Figura 2.8: Representación de la condición 3.

Demostración. Supongamos en primer lugar que I_G está generado por binomios cuadráticos. Como I_G está generado por binomios asociados a caminos cerrados pares primitivos y gracias al lema 2.2.18, necesariamente I_G está generado por binomios asociados a ciclos pares de longitud 4. Veamos que se cumplen las tres condiciones del enunciado.

1. Sea C un ciclo par de G de longitud mayor o igual que 6. Como $f_C \in I_G$, existen dos binomios cuadráticos f_{C_1} y f_{C_2} en I_G con C_1 y C_2 ciclos de longitud 4 tales que $f_{C_1}^+$ divide a f_C^+ y $f_{C_2}^-$ divide a f_C^- . Entonces, tanto C_1 como C_2 dan lugar a una o dos cuerdas pares cada uno y, por tanto, se cumple el resultado o cada uno da lugar a dos cuerdas impares que se cortan. Veamos esto para C_1 , siendo de manera similar para C_2 :

Si $C_1 = \{e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, e_{i_4}\}$ donde $e_{i_j} = \{x_{i_j}, x_{i_{j+1}}\}$ para $j = i_1$ y $j = i_3$. Se tiene que e_{i_1} y e_{i_3} son aristas de C . Además, e_{i_1} y e_{i_3} son aristas de C con índice impar. Si $e_{i_2} \in E(C)$, necesariamente $e_{i_4} \notin E(C)$ y es una arista que une x_{i_1} con x_{i_4} . Por tanto, es una cuerda par ya que $i_4 = i_3 + 1$ es par y i_1 es impar. Si $e_{i_2} \notin E(C)$, entonces tanto e_{i_2} como e_{i_4} son cuerdas de C . Además, se tiene que e_{i_2} es alguna de las siguientes aristas: $\{x_{i_1}, x_{i_3}\}$, $\{x_{i_1}, x_{i_4}\}$, $\{x_{i_2}, x_{i_3}\}$ o $\{x_{i_2}, x_{i_4}\}$. Una vez fijado e_{i_2} , e_{i_4} es una cuerda que une los vértices que faltan, obteniéndose dos cuerdas pares o dos cuerdas impares que se cortan. Por ejemplo, si $e_{i_2} = \{x_{i_1}, x_{i_3}\}$ una cuerda impar, entonces $e_{i_4} = \{x_{i_2}, x_{i_4}\}$ es otra cuerda impar que se corta con e_{i_2} .

Supongamos por tanto que C_1 y C_2 producen dos cuerdas impares cada uno. Denotamos por e, e' las dos cuerdas que se obtienen de C_1 y por e'', e''' las dos cuerdas que se obtienen de C_2 . Como $C_1 \neq C_2$ entonces o $e'' \notin \{e, e'\}$ o $e''' \notin \{e, e'\}$. Por tanto, C tiene al menos tres cuerdas impares tales que al menos dos de ellas se cortan.

2. Sean C_1 y C_2 dos ciclos impares minimales de G con exactamente un vértice en común. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que no existe ninguna arista $\{x_i, x_j\} \notin E(C_1) \cup E(C_2)$ con $x_i \in V(C_1)$ y $x_j \in V(C_2)$. El camino cerrado $\omega = (C_1, C_2)$ tiene longitud mayor o igual que 6 y es fundamental ya que el único camino cerrado par contenido en ω es él mismo. Llegamos a contradicción aplicando el lema 2.2.23 ya que f_ω no es un binomio cuadrático.
3. Sean C_1 y C_2 dos ciclos impares minimales con $V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$ y supongamos que no existe ningún puente entre ellos. Como G es conexo existe un camino $\omega_1 = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_t}\}$ con $t \geq 2$ que une un vértice de C_1 con otro de C_2 . Para ahorrar notación denotamos $\omega_1 = \{e_1, \dots, e_t\}$ y $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$. Además, supongamos que t es la longitud mínima que tienen los caminos que unen un vértice de C_1 con un vértice de C_2 . Consideramos el camino cerrado par $\omega = (C_1, \omega_1, C_2, -\omega_1)$, donde $-\omega_1 = \{-e_t, \dots, -e_1\}$, siendo $-e_i = \{x_{i+1}, x_i\}$. Si el grafo inducido por $V(\omega)$ en G (las aristas de G con vértices en $V(\omega)$) es igual a ω , entonces ω es fundamental de longitud mayor que $2t + 6$ (por tanto f_ω tiene grado mayor que $t + 3$), lo que por el lema 2.2.23 no puede ser. Por tanto, el grafo inducido por $V(\omega)$ es distinto de ω , es decir, existe $e \in E(G)$ con $e \notin E(\omega)$ y tal que si $e = \{a, b\}$, entonces $a, b \in V(\omega)$.

Como C_1 y C_2 son ciclos impares minimales, estamos suponiendo que

no hay ningún puente entre ellos y t es la longitud mínima que tienen los caminos que unen C_1 con C_2 , necesariamente $e = \{a, x_2\}$ con $a \in V(C_1)$ o $e = \{x_t, b\}$ con $b \in V(C_2)$. Supongamos que estamos en el primer caso, el otro se demuestra de manera similar. Se puede construir un ciclo impar C_3 distinto de C_1 con $E(C_3) \subseteq E(C_1) \cup \{e, e_1\}$. Sea C_4 un ciclo impar minimal con $V(C_4) \subseteq V(C_3)$. Un ejemplo de esto podría ser la siguiente imagen, donde el ciclo $C_3 = C_4 = (e, e_1, \{a_5, a_4\})$.

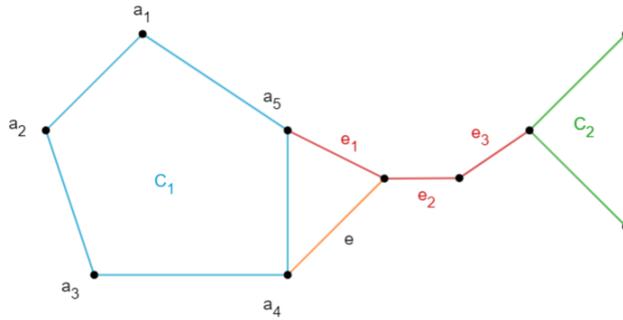


Figura 2.9: Ejemplo para la demostración.

Como C_1 es minimal necesariamente $x_1 \in V(C_4)$. Sea ω' el camino cerrado par $\omega' = (C_4, \omega_2, C_2, -\omega_2)$, donde $\omega_2 = \{e_2, \dots, e_t\}$. Razonando de la misma manera que antes, como ω' tiene longitud mayor que $2t + 4$ y aplicando el lema 2.2.23, el grafo inducido por $V(\omega')$ es distinto de ω' , es decir, existe $e' = \{c, d\} \in E(G)$ con $e' \notin E(\omega')$ y tal que $c, d \in V(\omega')$. De la misma manera que antes, necesariamente $e' = \{x_t, b\}$ con $b \in V(C_2)$. Repitiendo el proceso, se puede construir un ciclo impar C_5 distinto de C_2 con $E(C_5) \subseteq E(C_2) \cup \{e', e_t\}$ y se puede elegir un ciclo impar minimal C_6 con $V(C_6) \subseteq V(C_5)$. Como C_2 es minimal, necesariamente $x_t \in C_6$. Sea ω'' el camino cerrado par $\omega'' = (C_4, \omega_3, C_6, -\omega_3)$, donde $\omega_3 = (e_2, \dots, e_{t-1})$ (si $t = 2$, entonces $\omega_3 = \emptyset$). Ahora, el grafo inducido por $V(\omega'')$ sí que es igual a ω'' (si no lo fuera, existiría una arista uniendo un vértice de ω_3 con un vértice de C_4 o C_6 , contradiciendo que t es la longitud mínima) luego ω'' es fundamental. Además, ω'' tiene longitud mayor que $2t + 2$, lo que aplicando el lema 2.2.23 es una contradicción. Por tanto, sí que existe algún puente entre C_1 y C_2 .

Veamos que al menos existen dos puentes. Por reducción al absurdo, supongamos que solo existe un puente $b \in E(G)$ entre C_1 y C_2 . El

camino cerrado par $\alpha = (C_1, b, C_2, b)$ es fundamental ya que su grafo inducido coincide con él (si hubiese otra arista uniendo un vértice de C_1 con otro de C_2 sería otro puente). Como α tiene longitud mayor o igual que 8, aplicando otra vez el lema 2.2.23 llegamos a contradicción, por tanto, al menos hay dos puentes entre C_1 y C_2 .

Para la implicación contraria, gracias al teorema 2.2.17 tenemos que probar que dado un camino primitivo par ω de G de longitud $2q \geq 6$, entonces el binomio $f_\omega \in (I_G)_{<q}$, donde $(I_G)_{<q}$ es el ideal generado por los binomios de grado estrictamente menor de q que pertenecen a I_G , es decir, por binomios asociados a caminos cerrados pares primitivos de longitud estrictamente menor de $2q$. De esta manera, por recursividad se prueba que I_G está generado por los caminos cerrados pares primitivos de longitud 4, es decir, está generado por binomios cuadráticos. Probaremos esto para cada uno de los tres tipos que nos proporciona el lema 2.2.18:

1. Sea ω un ciclo par de G de longitud $2q \geq 6$. Denotamos $\omega = \{e_1, \dots, e_{2q}\}$ con $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ y $e_{2q} = \{x_{2q}, x_1\}$. Por hipótesis del teorema, ω tiene una cuerda par o tres cuerdas impares tales que dos de ellas se cortan.

Si ω tiene una cuerda par $e = \{x_i, x_j\}$, es decir, $j - i$ impar. Reordenando las aristas de ω podemos suponer que $e = \{x_1, x_{2t}\}$ con $2 \leq t < q$. Sea C_1 el ciclo par

$$C_1 = (e, e_{2t}, \dots, e_{2q}).$$

Sea C_2 el ciclo par

$$C_2 = (e, e_{2t-1}, \dots, e_1).$$

Entonces, $f_\omega = gf_{C_1} - hf_{C_2} \in (I_G)_{<q}$, donde $g = f_{C_2}^-/e$ y $h = f_{C_1}^-/e$. Notar que las aristas que están en $f_{C_1}^+$ son e y las aristas impares de ω cuyo índice es mayor o igual que $2t$. Las aristas que están en $f_{C_1}^-$ son las aristas pares de ω con índice mayor o igual que $2t$. De manera similar para f_{C_2} .

Si ω no tiene una cuerda par entonces tiene tres cuerdas impares e, e' y e'' tal que e y e' se cortan en ω . Reordenando las aristas de ω podemos suponer que $e = \{x_1, x_t\}$ y $e' = \{x_2, x_{t+1}\}$ con $3 \leq t \leq 2q - 1$ y t impar. Sea γ el camino par

$$\gamma = (e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_2).$$

Sea γ' el camino par

$$\gamma' = (e_{t+1}, e_{t+2}, \dots, e_{2q}).$$

Sean $C_1 = (e, \gamma, e', \gamma')$ y $C_2 = (e, e_t, e', e_1)$ dos ciclos pares. Como $f_{C_2}^+ = ee'$, $f_{C_2}^- = e_t e_1$, $f_{C_1}^+ = f_{\omega}^+ \frac{ee'}{e_t e_1}$ y $f_{C_1}^- = f_{\omega}^-$, entonces, $f_{\omega} = f_{C_1} - h f_{C_2}$, con $h = f_{C_1}^+ / ee'$. El binomio f_{C_2} es cuadrático y el binomio f_{C_1} tiene grado q . Veamos que $f_{C_1} \in (I_G)_{<q}$. Si $e'' = \{x_i, x_j\}$ consideramos los conjuntos

$$S = \{x_1, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{2q}\},$$

$$T = \{x_2, x_3, \dots, x_t\}.$$

Si suponemos que $x_i \in S$ y $x_j \in T$, como e'' es una cuerda impar de ω entonces e'' es una cuerda par de C_1 , por tanto, $f_{C_1} \in (I_G)_{<q}$ ya que hemos probado que esto es cierto para ciclos pares que tienen una cuerda par.

Supongamos ahora que $x_i, x_j \in T$ con $2 \leq i < j \leq t$. Sea C_3 un ciclo impar minimal con $V(C_3) \subseteq S \cup \{x_t\}$ y C_4 un ciclo impar minimal con $V(C_4) \subseteq S \cup \{x_2\}$. Supongamos que ω no tiene ninguna cuerda $\{x_{i'}, x_{j'}\}$ con $2 \leq i' < j' \leq t$ y tal que $i' = 2$ o $j' = t$. Notar que el caso $i' = 2$ y $j' = t$ daría lugar a una cuerda par de ω , lo que no es posible porque estamos suponiendo que ω no tiene cuerdas pares. Sea C_5 un ciclo minimal impar con $V(C_5) \subseteq \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_j\}$. Como C_3 y C_5 son dos ciclos impares minimales y $V(C_3) \cap V(C_5) = \emptyset$, por hipótesis existe un puente $b = \{x_k, x_l\}$ que une C_3 con C_5 . Como ω no tiene cuerdas pares, necesariamente b es una cuerda impar de ω con $x_k \in S$ y $x_l \in T$, por tanto, en este caso queda probado que $f_{C_1} \in (I_G)_{<q}$.

Si no ocurre esto último, es decir, supongamos que ω tiene una cuerda $\{x_{i'}, x_{j'}\}$ con $2 \leq i' < j' \leq t$ y tal que $i' = 2$ o $j' = t$. Supongamos que la cuerda es de la forma $\{x_2, x_{j'}\}$ con $2 < j' < t$, el otro caso es similar. Además, elegimos j' de forma que ω no tenga ninguna otra cuerda de la forma $\{x_2, x_{j''}\}$ con $2 < j'' < j' < t$. Sea C_6 un ciclo impar minimal con $V(C_6) \subseteq \{x_2, x_3, \dots, x_{j'}\}$. Si $V(C_4) \cap V(C_6) = \{x_2\}$, por hipótesis existe un puente $b = \{x_{k'}, x_{l'}\}$ con $x_{k'} \in V(C_4)$ y $x_{l'} \in V(C_6)$. Por el mismo razonamiento que antes, b es una cuerda impar de ω con $x_{k'} \in S$ y $x_{l'} \in T$, por tanto, $f_{C_1} \in (I_G)_{<q}$. Si por el contrario $V(C_4) \cap V(C_6) = \emptyset$, por hipótesis existen al menos dos puentes entre C_4 y C_6 . Además, al menos uno de ellos (el que no tenga el vértice x_2 , si es que hay alguno que lo tiene) es de la forma $b = \{x_k, x_l\}$ con $x_k \in S$ y $x_l \in T$. Por tanto, queda probado en todos los casos que $f_{C_1} \in (I_G)_{<q}$.

2. Supongamos ahora que ω es una concatenación de dos ciclos impares, es decir, $\omega = (C_1, C_2)$ donde C_1 y C_2 tienen exactamente un vértice en

común. Los denotamos como

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2s}, x_0\}\}, \\ C_2 &= \{\{x_0, x'_1\}, \{x'_1, x'_2\}, \dots, \{x'_{2t}, x_0\}\}. \end{aligned}$$

Supongamos en primer lugar que existe una arista en G de la forma $e = \{x_i, x'_j\}$ con $1 \leq i \leq 2s$ y $1 \leq j \leq 2t$. Supongamos que tanto i como j son pares, los otros casos son similares. Sea ω_1 el camino cerrado

$$\omega_1 = \{\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{i-1}, x_i\}, e, \{x'_j, x'_{j+1}\}, \dots, \{x'_{2t}, x_0\}\},$$

que es par ya que tiene longitud $i + 2t - j + 2$. Sea ω_2 el camino cerrado

$$\omega_2 = \{\{x_0, x'_1\}, \{x'_1, x'_2\}, \dots, \{x'_{j-1}, x'_j\}, e, \{x_i, x'_{i+1}\}, \dots, \{x_{2s}, x_0\}\},$$

que es par ya que tiene longitud $j + 2s - i + 2$. Se tiene que $f_\omega = gf_{\omega_1} - hf_{\omega_2} \in (I_G)_{<q}$, donde $g = f_{\omega_2}^+/e$ y $h = f_{\omega_1}^+/e$. Notar que en $f_{\omega_1}^+$ están las aristas con índice impar de ω además de e y en $f_{\omega_1}^-$ están las aristas con índice par de ω . En f_{ω_2} es al contrario que en f_{ω_1} .

Supongamos ahora que ninguna arista de la forma $\{x_i, x'_j\}$ con $1 \leq i \leq 2s$ y $1 \leq j \leq 2t$ pertenece a $E(G)$ pero una arista de la forma $\{x_i, x_0\}$ o $\{x'_j, x_0\}$ con $1 < i < 2s$ o $1 < j < 2t$ sí pertenece a $E(G)$. Supongamos que $e = \{x_i, x_0\}$ pertenece a $E(G)$ con i par, los otros casos son similares. Sea ω_1 el camino cerrado par

$$\omega_1 = (\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{i-1}, x_i\}, e, C_2).$$

Sea ω_2 el camino cerrado par

$$\omega_2 = (e, \{x_i, x_{i+1}\}, \{x_{i+1}, x_{i+2}\}, \dots, \{x_{2s}, x_0\}).$$

Entonces, $f_\omega = gf_{\omega_1} - hf_{\omega_2} \in (I_G)_{<q}$, donde $g = f_{\omega_2}^+/e$ y $h = f_{\omega_1}^+/e$.

Por último, supongamos que ninguna arista de la forma $\{x_i, x'_j\}$ con $1 \leq i \leq 2s$ y $1 \leq j \leq 2t$ ni $\{x_i, x_0\}$ o $\{x'_j, x_0\}$ con $1 < i < 2s$ y $1 < j < 2t$ pertenece a $E(G)$. Por hipótesis, alguno de los dos ciclos no es minimal, digamos C_1 . Como C_1 no es minimal, existe una cuerda $e = \{x_i, x_j\}$ con $1 \leq i < j \leq 2s$. Sea C_3 el ciclo impar de G con $e \in E(C_3) \subseteq E(C_1) \cup \{e\}$ y C_4 el ciclo par de G con $e \in E(C_4) \subseteq E(C_1) \cup \{e\}$. Veamos que $x_0 \in V(C_3)$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $x_0 \notin V(C_3)$, por tanto, $V(C_2) \cap V(C_3) = \emptyset$. Si no son ciclos minimales, podemos hacer divisiones sucesivas mediante

las cuerdas de los ciclos, quedándonos en cada paso con ciclos impares de longitudes más pequeñas y manteniéndose la condición de que no tienen vértices en común. Se llegaría al caso en el que tendríamos dos ciclos impares minimales (contenidos en C_2 y C_3 respectivamente) sin vértices en común y, por hipótesis, existirían al menos dos puentes entre ellos, es decir, existen al menos dos puentes entre C_2 y C_3 . Además, como ninguna de las aristas de la forma $\{x_i, x'_j\}$ con $1 \leq i \leq 2s$ y $1 \leq j \leq 2t$ pertenecen a $E(G)$ necesariamente los puentes son de la forma $\{x_i, x_0\}$, llegando a contradicción. Por tanto, $x_0 \in V(C_3)$. Sea ω_1 el camino cerrado par $\omega_1 = (C_2, C_3)$. Supongamos que e divide a $f_{\omega_1}^+$ y a $f_{C_4}^+$, los otros casos se resuelven de manera similar. Entonces, $f_\omega = gf_{C_4} - hf_{\omega_1}$ o $f_\omega = hf_{\omega_1} - gf_{C_4}$, donde $g = f_{\omega_1}^+/e$ y $h = f_{C_4}^+/e$. En ambos casos $f_\omega \in (I_G)_{<q}$.

3. Sea $\omega = (C_1, \omega_1, C_2, \omega_2)$ de la forma 3 del lema 2.2.18. Denotamos

$$\begin{aligned} C_1 &= (\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{2s}, x_{2s+1}\}, \{x_{2s+1}, x_1\}), \\ C_2 &= (\{x'_1, x'_2\}, \{x'_2, x'_3\}, \dots, \{x'_{2t}, x'_{2t+1}\}, \{x'_{2t+1}, x'_1\}). \end{aligned}$$

Recordar del lema 2.2.18 que C_1 y C_2 son ciclos impares tales que $V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$ y que ω_1 y ω_2 son dos caminos uniendo x_1 con x'_1 . Por hipótesis, existen al menos dos puentes entre C_1 y C_2 . Al menos uno de los puentes es de la forma $e = \{x_i, x'_j\}$ con $j \neq 1$. Además, como ω es par y tanto C_1 como C_2 son impares, la suma de las longitudes de ω_1 y ω_2 debe ser par. Si tanto la longitud de ω_1 como la longitud de ω_2 son impares vamos a suponer que tanto i como j son impares. En cambio, si las longitudes de ω_1 y ω_2 son pares, vamos a suponer que i es impar y que j es par. Los demás casos se resuelven de manera similar. Sea ω_3 el camino cerrado par

$$\omega_3 = (e, \{x'_j, x'_{j-1}\}, \dots, \{x'_2, x'_1\}, \omega_1, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{i-1}, x_i\}).$$

Sea ω_4 el camino cerrado par

$$\omega_4 = (e, \{x'_j, x'_{j+1}\}, \dots, \{x'_{2t+1}, x'_1\}, \omega_2, \{x_1, x_{2s+1}\}, \dots, \{x_{i+1}, x_i\}).$$

Entonces, $f_\omega = gf_{\omega_3} - hf_{\omega_4} \in (I_G)_{<q}$, donde $g = f_{\omega_3}^+/e$ y $h = f_{\omega_4}^+/e$.

□

El siguiente corolario es inmediato teniendo en cuenta que un grafo bipartito no puede tener ciclos impares.

Corolario 2.2.30. *Sea G un grafo simple, conexo y bipartito. Entonces, I_G está generado por binomios cuadráticos si y solo si todo ciclo de G de longitud mayor o igual que 6 tiene una cuerda.*

Terminamos esta sección caracterizando los anillos tóricos asociados a grafos bipartitos que son Koszul.

Teorema 2.2.31. *Sea G un grafo simple finito conexo y bipartito. Son equivalentes*

1. *Todo ciclo de longitud mayor o igual que 6 tiene una cuerda.*
2. *El ideal I_G posee una base de Gröbner formada por binomios cuadráticos.*
3. *El anillo $K[G] = R/I_G$ es Koszul, donde $R = K[E(G)]$.*
4. *El ideal I_G está generado por binomios cuadráticos.*

Demostración. Gracias al teorema 1.1.18 se tiene la implicación $2 \Rightarrow 3$ y gracias a la proposición 1.1.17 se tiene la implicación $3 \Rightarrow 4$. Además, gracias al corolario 2.2.30 se tiene la equivalencia $4 \Leftrightarrow 1$. Por tanto, solo queda probar la implicación $1 \Rightarrow 2$.

Como G es bipartito existe una partición $V_1 = \{u_1, \dots, u_s\} \subseteq V(G)$ y $V_2 = \{v_1, \dots, v_t\} \subseteq V(G)$ tal que $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y para todo $e \in E(G)$ se tiene que $e \cap V_1 \neq \emptyset$ y $e \cap V_2 \neq \emptyset$. Definimos la matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t}$ como $a_{ij} = 1$ si $\{u_i, v_j\} \in E(G)$ y $a_{ij} = 0$ si $\{u_i, v_j\} \notin E(G)$ y denotamos por $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ las filas de A . Dados dos vectores de enteros $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_t)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$ definimos el orden siguiente: $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ si la última entrada no nula del vector $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ es negativa. Sea $\delta_A = (\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_{s+t})$, donde $\delta_k = \sum_{i+j=k} a_{ij}$.

Si existen índices $i_1 < i_2$ y tal que $\mathbf{a}_{i_2} < \mathbf{a}_{i_1}$, denotamos por A' la matriz que se obtiene a partir de A permutando las filas \mathbf{a}_{i_1} y \mathbf{a}_{i_2} . Entonces, se tiene que $\delta_A < \delta_{A'}$. Para ver esto y con el objetivo de ahorrar notación supongamos que $i_1 = 1$, $i_2 = 2$. En δ_A los elementos de \mathbf{a}_1 están involucrados en $\delta_2, \dots, \delta_{t+1}$ y los elementos de \mathbf{a}_2 en $\delta_3, \dots, \delta_{t+2}$. Si denotamos $\delta_{A'} = (\delta'_2, \delta'_3, \dots, \delta'_{s+t})$, entonces los elementos de \mathbf{a}_1 están involucrados en $\delta'_3, \dots, \delta'_{t+2}$ y los elementos de \mathbf{a}_2 están involucrados en $\delta'_2, \dots, \delta'_{t+1}$. A partir del índice $t+2$ δ_A es igual a $\delta_{A'}$. Además, si $q \leq t$ es el índice tal que $a_{2q} - a_{1q} < 0$, se tiene que δ_A es igual a $\delta_{A'}$ hasta el índice $q+2$ y $\delta_{q+2} - \delta'_{q+2} < 0$. Haciendo permutaciones sucesivas podemos encontrar una matriz A'' tal que $\delta_{A''}$ sea máximo. Además, permutando las columnas de A'' si es necesario podemos suponer que tanto

las filas como las columnas de A'' están ordenadas mediante el orden $<$. Por ahorrar notación, seguiremos denotando a la matriz A'' como A , notar que la única diferencia es el orden elegido en la partición de $V(G)$.

Veamos que A no puede tener una submatriz de la forma

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{pmatrix},$$

con $i_1 < i_2$ y $j_1 < j_2$. Razonamos por reducción al absurdo y suponemos que sí existe dicha submatriz. Como $\mathbf{a}_{i_1} < \mathbf{a}_{i_2}$ (notar que no pueden ser iguales ya que $a_{i_1 j_2} = 1$ y $a_{i_2 j_2} = 0$), existe un índice $j_3 > j_2$ tal que $a_{i_1 j_3} = 0$, $a_{i_2 j_3} = 1$ y $a_{i_1 k} = a_{i_2 k}$ para todo $k > j_3$. De la misma manera con las columnas, existe un índice $i_3 > i_2$ tal que $a_{i_3 j_1} = 0$, $a_{i_3 j_2} = 1$ y $a_{l j_1} = a_{l j_2}$ para todo $l > i_3$. Si $a_{i_3 j_3} = 1$ entonces A tiene la submatriz

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta submatriz representa un ciclo de G de longitud 6 que no tiene ninguna cuerda, lo que contradice la hipótesis del teorema. Si $a_{i_3 j_3} = 0$ entonces A tiene la submatriz

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Repetiendo el mismo razonamiento que antes, como $\mathbf{a}_{i_2} < \mathbf{a}_{i_3}$, existe un índice $j_4 > j_3$ tal que $a_{i_2 j_4} = 0$, $a_{i_3 j_4} = 1$ y $a_{i_2 k} = a_{i_3 k}$ para todo $k > j_4$. De la misma manera para las columnas, existe un índice $i_4 > i_3$ tal que $a_{i_4 j_2} = 0$, $a_{i_4 j_3} = 1$ y $a_{l j_2} = a_{l j_3}$ para todo $l > i_4$. Si $a_{i_4 j_4} = 1$ entonces A tiene la submatriz

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} & a_{i_1 j_4} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} & a_{i_2 j_4} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} & a_{i_3 j_4} \\ a_{i_4 j_1} & a_{i_4 j_2} & a_{i_4 j_3} & a_{i_4 j_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta submatriz representa un ciclo de G de longitud 8 que no tiene ninguna cuerda, lo que contradice la hipótesis del teorema y, por tanto, $a_{i_4 j_4} = 0$. Repitiendo este proceso hasta que no se pueda extender alguna columna o alguna fila, es decir, se haya llegado al último índice, necesariamente el elemento en la última fila y columna deberá ser cero y se llegará a contradicción

con que tanto las filas como las columnas de A están ordenadas. Por tanto, B no puede ser una submatriz de A .

Daremos a $K[E(G)]$ el orden lexicográfico inverso $<_{rev}$ con respecto al orden dado por $\{u_i, v_j\} < \{u_{i'}, v_{j'}\}$ si $i < i'$ o si $i = i'$ y $j < j'$. Notar que un ciclo de longitud 4 aparece en A como la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y cuyo término inicial con respecto a este orden es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde esto representa el producto de dos aristas en $K[E(G)]$.

Sean C_1, \dots, C_m los ciclos de longitud 4 de G . Como se tiene la equivalencia entre 4 y 1 en el teorema, I_G está generado por los binomios f_{C_1}, \dots, f_{C_m} . Veamos que $\{f_{C_1}, \dots, f_{C_m}\}$ es una base de Gröbner de I_G con respecto al orden $<_{rev}$ aplicando el criterio de Buchberger. Sea $S(f_{C_i}, f_{C_j})$ el S-polinomio de f_{C_i} y f_{C_j} , es decir, el polinomio

$$S(f_{C_i}, f_{C_j}) = \text{lt}(f_{C_j}) \frac{\text{mcm}(\text{in}(f_{C_i}), \text{in}(f_{C_j}))}{\text{in}(f_{C_i})} f_{C_i} - \text{lt}(f_{C_i}) \frac{\text{mcm}(\text{in}(f_{C_i}), \text{in}(f_{C_j}))}{\text{in}(f_{C_j})} f_{C_j},$$

donde $\text{in}(f_{C_i})$ denota el monomio de mayor grado de f_{C_i} respecto al orden $<_{rev}$ y $\text{lt}(f_{C_i})$ es la constante que acompaña a $\text{in}(f_{C_i})$.

Si $\text{in}(f_{C_i})$ e $\text{in}(f_{C_j})$ son primos entre si entonces $S(f_{C_i}, f_{C_j})$ se reduce a 0 por $\{f_{C_1}, \dots, f_{C_m}\}$ (ver [7, Sec 1.4, Lema 1.27]). Supongamos ahora que no son primos entre si y distinguiamos dos casos:

1. $|E(C_i) \cap E(C_j)| = 2$. Denotamos $C_i = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ y $C_j = (e_1, e_2, e_5, e_6)$ siendo e_4 y e_6 las aristas más grandes en cada ciclo con respecto al orden establecido. Entonces,

$$S(f_{C_i}, f_{C_j}) = -e_6(e_1e_3 - e_2e_4) + e_4(e_1e_5 - e_2e_6) = -e_1e_3e_6 + e_1e_4e_5 = e_1f_C,$$

donde C es el ciclo $C = (e_4, e_3, e_5, e_6)$ de G de longitud 4, por tanto, $S(f_{C_i}, f_{C_j})$ se reduce a cero.

2. $|E(C_i) \cap E(C_j)| = 1$. Denotamos $C_i = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ y $C_j = (e_5, e_2, e_6, e_7)$ siendo e_4 y e_7 las aristas más grandes en cada ciclo con respecto al orden establecido. Entonces,

$$S(f_{C_i}, f_{C_j}) = -e_7(e_1e_3 - e_2e_4) + e_4(e_5e_6 - e_2e_7) = -e_7e_1e_3 + e_4e_5e_6 = f_\omega,$$

donde ω es el ciclo de G $\omega = (e_4, e_7, e_5, e_1, e_6, e_3)$ de longitud 6. Un ciclo de longitud 6 aparece en A como alguna de las siguientes submatrices

$$\begin{pmatrix} * & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & * & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{1} & * & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & * & \mathbf{1} \\ * & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & * & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \\ * & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & * \\ * & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & * \\ \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \\ * & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Todas estas matrices continen a la matriz $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$. Como hemos visto que la matriz $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no puede ser una submatriz de A , necesariamente $a = 1$ y F representa un ciclo de longitud 4 de G , digamos C' . Entonces, $\text{in}(f_{C'})$ divide a $\text{in}(f_\omega)$ y

$$f_\omega - \frac{\text{in}(f_\omega)}{\text{in}(f_{C'})} = e f_{C''},$$

donde $e \in E(\omega)$ y C'' es un ciclo de longitud 4 con $E(C'') \subseteq E(\omega)$. Por tanto, $S(f_{C_i}, f_{C_j})$ se reduce a 0.

□

Capítulo 3

Escisión de ideales tóricos

En este capítulo se seguirá el artículo [6], cuyo propósito es estudiar cuando podemos dividir un ideal tórico en suma de varios ideales tóricos. El objetivo de hacer esta escisión es poder estudiar propiedades del ideal tórico original (como, por ejemplo, los números de Betti) en función de los ideales tóricos de la descomposición, siendo estos más ‘sencillos’ que el original.

En la sección 3.1 daremos unos casos particulares en los que podemos dividir un ideal tórico en suma de otros ideales tóricos. También veremos un resultado que nos permitirá calcular los números de Betti del ideal original en función de los números de Betti de los ideales de la descomposición.

En la sección 3.2 veremos una construcción en grafos que representa la situación de los resultados vistos en la sección 3.1, obteniendo un caso en el que podemos dividir el ideal tórico asociado a un grafo. Por último, introduciremos el concepto de escisión y fusión de grafos, lo que nos dará otro caso en el que podemos dividir el ideal tórico asociado a un grafo.

3.1. Primeros resultados generales

Empezamos la sección con un resultado que posteriormente generalizaremos, siendo su generalización la que corresponderá a una determinada construcción sobre grafos.

Lema 3.1.1. *Sean A_1, \dots, A_k matrices con coeficientes enteros y de tamaños $n_i \times s_i$ para $i = 1, \dots, k$ y sea $R = K[x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}, \dots, x_{k,1}, \dots, x_{k,s_k}]$. Sea*

A la matriz definida por bloques

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$I_A = I_{A_1} + \cdots + I_{A_k} \subseteq R,$$

donde I_{A_i} es el ideal tórico de A_i pero visto como ideal en R .

Demostración. Para cada $1 \leq i \leq k$, definimos $R_i = K[x_{i,1}, \dots, x_{i,s_i}]$. Recordamos que, dado $\mathbf{b} \in \ker(A_i) = I_{A_i}$, entonces los binomios $f_{\mathbf{b}} = \underline{x}^{\mathbf{b}^+} - \underline{x}^{\mathbf{b}^-} \in R_i$ generan I_{A_i} . Entonces, si definimos $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{s_1 + \dots + s_k}$ como

$$\mathbf{a} = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_{s_i}, 0, \dots, 0),$$

se tiene que $\mathbf{a} \in \ker(A)$ y, además, $f_{\mathbf{b}} = f_{\mathbf{a}} \in I_A$, vistos como binomios en R . Por tanto, $I_{A_i} \subseteq I_A$ para cada $1 \leq i \leq k$, visto como ideal en R . Lo que implica que $I_{A_1} + \cdots + I_{A_k} \subseteq I_A$.

Recíprocamente, haremos inducción sobre k . Para $k = 2$, dado $\mathbf{a} \in \ker(A) \subseteq \mathbb{Z}^{s_1 + s_2}$, lo separamos en $\mathbf{a} = (\mathbf{b}, \mathbf{c})$ con $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{s_1}$ y $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{s_2}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{a}} &= \underline{x}^{\mathbf{a}^+} - \underline{x}^{\mathbf{a}^-} = \underline{x}^{\mathbf{b}^+} \underline{x}^{\mathbf{c}^+} - \underline{x}^{\mathbf{b}^-} \underline{x}^{\mathbf{c}^-} = \underline{x}^{\mathbf{c}^+} (\underline{x}^{\mathbf{b}^+} - \underline{x}^{\mathbf{b}^-}) + \underline{x}^{\mathbf{b}^-} (\underline{x}^{\mathbf{c}^+} - \underline{x}^{\mathbf{c}^-}) = \\ &= \underline{x}^{\mathbf{c}^+} (f_{\mathbf{b}}) + \underline{x}^{\mathbf{b}^-} (f_{\mathbf{c}}). \end{aligned}$$

Por tanto, como $\mathbf{b} \in \ker A_1$ y $\mathbf{c} \in \ker A_2$, se tiene que $f_{\mathbf{b}} \in I_{A_1}$ y $f_{\mathbf{c}} \in I_{A_2}$, luego $f_{\mathbf{a}} \in I_{A_1} + I_{A_2}$. Lo que implica que $I_A \subseteq I_{A_1} + I_{A_2}$.

Ahora, supongamos $k > 2$ y que el resultado es cierto para $k - 1$. Dado $\mathbf{a} \in \ker(A) \subseteq \mathbb{Z}^{s_1 + \dots + s_k}$, lo separamos en $\mathbf{a} = (\mathbf{b}, \mathbf{c})$ con $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{s_1 + \dots + s_{k-1}}$ y $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{s_k}$. De la misma forma que antes, se tiene que

$$f_{\mathbf{a}} = \underline{x}^{\mathbf{c}^+} (f_{\mathbf{b}}) + \underline{x}^{\mathbf{b}^-} (f_{\mathbf{c}}).$$

Por inducción, $f_{\mathbf{b}} \in I_{A_1} + \cdots + I_{A_{k-1}}$ y $f_{\mathbf{c}} \in I_{A_k}$, lo que implica que $I_A \subseteq I_{A_1} + \cdots + I_{A_k}$. \square

Si tenemos una matriz A de tamaño $d \times n$ con entradas en \mathbb{N} (que será el caso con el que trabajaremos en las siguientes secciones), podemos inducir en I_A una multigraduación haciendo $\deg x_i = \mathbf{a}_i$, para $1 \leq i \leq n$, donde \mathbf{a}_i es la columna i -ésima de la matriz A .

Por tanto, tenemos una resolución libre minimal multigraduada de I_A ,

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R(-\alpha)^{\beta_{i,\alpha}} \xrightarrow{\varphi^i} \dots \xrightarrow{\varphi^1} \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R(-\alpha)^{\beta_{0,\alpha}} \xrightarrow{\varphi^0} I_A \rightarrow 0.$$

Además, si suponemos que $|\mathbf{a}_i| = t$ para todas las columnas de la matriz A , tenemos una relación entre esta graduación con pesos y la graduación estándar, un monomio de grado s para la graduación estándar, es un monomio de grado $t \cdot s$ para esta nueva graduación. Por tanto, se tiene la siguiente relación entre los números de Betti,

$$\beta_{ij} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n / |\alpha| = t \cdot j} \beta_{i\alpha}. \quad (3.1)$$

Veamos ahora cómo están relacionados los números de Betti de R/I_A con los de números de Betti de R_i/I_{A_i} . El siguiente lema nos será de utilidad para poder demostrar el teorema 3.1.3.

Lema 3.1.2. Sean $R = K[x_1, \dots, x_m]$, $S = K[y_1, \dots, y_n]$ y sean $I \subseteq R$, $J \subseteq S$ dos ideales homogéneos. Sea $T = R \otimes_K S$ y suponemos que C y D son resoluciones libres minimales graduadas de R/I y S/J respectivamente. Entonces, la resolución $(C \otimes_R T) \otimes_T (D \otimes_S T)$ es una resolución libre graduada de $T/(IT + JT)$.

La demostración de este lema se puede encontrar en [8, Lema 2.1]. Además, este resultado se puede extender al caso multigraduado y, por inducción, al caso en el que tengamos k ideales en k anillos de polinomios en diferentes variables.

Teorema 3.1.3. Con las notación del lema 3.1.1, si también suponemos que la matriz A induce una multigraduación ($\mathbb{N}^{n_1 + \dots + n_k}$ - graduación) (haciendo $\deg x_i = \mathbf{a}_i$, donde \mathbf{a}_i es la columna i -ésima de la matriz A) sobre R/I_A . Entonces para todo $i \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{N}^{n_1 + \dots + n_k}$,

$$\beta_{i\alpha}(R/I_A) = \sum_{i_1 + \dots + i_k = i} \beta_{i_1, \alpha_1}(R/I_{A_1}) \cdots \beta_{i_k, \alpha_k}(R/I_{A_k}),$$

donde cada α_i es

$$\alpha_i = (0, \dots, 0, \alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n_i}, 0, \dots, 0),$$

si $\alpha = (\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,n_1}, \dots, \alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,n_k})$ y donde los primeros ceros están en las primeras $n_1 + \dots + n_{i-1}$ coordenadas y los últimos en las $n_{i+1} + \dots + n_k$ coordenadas.

Demostración. Como en la demostración del lema 3.1.1, denotamos $R = K[x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}, \dots, x_{k,1}, \dots, x_{k,s_k}]$ y $R_i = K[x_{i,1}, \dots, x_{i,s_i}]$. Daremos una $\mathbb{N}^{n_1 + \dots + n_k}$ -graduación a R_i usando la matriz A_i , pero viéndola como una matriz de tamaño $(n_1 + \dots + n_k) \times s_i$, en lugar de una matriz de tamaño $n_i \times s_i$, haciendo que las primeras $n_1 + \dots + n_{i-1}$ y las últimas $n_{i+1} + \dots + n_k$ filas sean nulas. Como consecuencia, si $\beta_{k,\delta}(R_i/I_{A_i}) \neq 0$, entonces $\text{supp}(\delta) \subseteq \{n_1 + \dots + n_{i-1} + 1, n_1 + \dots + n_{i-1} + 2, \dots, n_1 + \dots + n_i\}$.

Aplicando el lema 3.1.2 se tiene que la resolución libre minimal multigradaada de $R/I_A = R/(I_{A_1} + \dots + I_{A_k})$ es el producto tensorial de las resoluciones libres minimales multigradaadas de R_i/I_{A_i} . Por tanto, gracias a la fórmula de Künneth ([9, Ch.5, Th.10.1]), se tiene que

$$\beta_{i\alpha}(R/I_A) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = i \\ i_j \in \mathbb{N}}} \sum_{\substack{\gamma_1 + \dots + \gamma_k = \alpha \\ \gamma_j \in \mathbb{N}^{n_1 + \dots + n_k}}} \beta_{i_1, \gamma_1}(R_1/I_{A_1}) \cdots \beta_{i_k, \gamma_k}(R_k/I_{A_k}).$$

Además, por el comentario de antes, podemos suponer que cada γ_i tiene soporte contenido en $\{n_1 + \dots + n_{i-1} + 1, n_1 + \dots + n_{i-1} + 2, \dots, n_1 + \dots + n_i\}$, ya que si no, su correspondiente número de Betti será nulo. Ahora bien, la única forma de que $\gamma_i + \dots + \gamma_k = \alpha$ es que cada $\gamma_i = \alpha_i$, donde α_i es el que se ha definido en el enunciado del teorema.

Para concluir, notar que los números de Betti multigradaados (con la multigraduación que hemos inducido) de R_i/I_{A_i} coinciden con los números de Betti de R/I_A para cada $i = 1, \dots, k$ ya que cada ideal I_{A_i} solo tiene las variables $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,s_i}\}$. \square

Antes de poder dar una generalización del lema 3.1.1 veamos dos lemas que necesitaremos.

Lema 3.1.4. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^s$ dos vectores linealmente independientes con al menos un elemento positivo y otro negativo y tal que $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ también tenga al menos un elemento positivo y otro negativo. Entonces, ni $f_{\mathbf{a}}$ ni $f_{\mathbf{b}}$ dividen a $f_{\mathbf{c}}$.

Demostración. Veamos que $f_{\mathbf{a}}$ no divide a $f_{\mathbf{c}}$, para $f_{\mathbf{b}}$ se hace de la misma manera gracias a que el papel de \mathbf{a} y \mathbf{b} es simétrico. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f_{\mathbf{a}}$ sí divide a $f_{\mathbf{c}}$, es decir, existe $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ con $f_{\mathbf{c}} = f \cdot f_{\mathbf{a}}$. Si denotamos por $f = f_1 + \dots + f_k$ el desarrollo de f siendo los f_i los términos de f para $1 \leq i \leq k$, entonces

$$f \cdot f_{\mathbf{a}} = f_1 \underline{x}^{\mathbf{a}^+} + \dots + f_k \underline{x}^{\mathbf{a}^+} - f_1 \underline{x}^{\mathbf{a}^-} - \dots - f_k \underline{x}^{\mathbf{a}^-}. \quad (3.2)$$

Si f fuese un solo término, digamos $f = f_1$, tendríamos que

$$f_{\mathbf{c}} = \underline{x}^{\mathbf{c}^+} - \underline{x}^{\mathbf{c}^-} = f_1 \underline{x}^{\mathbf{a}^+} - f_1 \underline{x}^{\mathbf{a}^-}.$$

Si suponemos que f_1 es de la forma $\lambda \underline{x}_1^\alpha$ con $\lambda \in K$ positivo, igualando los términos positivos y negativos a ambos lados, se tiene que $f_1 = \underline{x}^{\mathbf{c}^+ - \mathbf{a}^+}$ y que $f_1 = \underline{x}^{\mathbf{c}^- - \mathbf{a}^-}$. Es decir, se tiene que

$$\mathbf{c}^+ - \mathbf{a}^+ = \mathbf{c}^- - \mathbf{a}^- \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^- = \mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^- = \mathbf{a},$$

y como $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, tendríamos que $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, lo que no puede ser ya que por hipótesis debe tener al menos un elemento positivo y otro negativo.

Si en cambio $\lambda < 0$, repitiendo este proceso se tiene que $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$ y como $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, tendríamos que $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}$, lo que contradice que \mathbf{a} y \mathbf{b} sean linealmente independientes. En ambos casos llegamos a contradicción y, por tanto, f no es un solo término.

Veamos que $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$ es uno de los términos $f_i \underline{x}^{\mathbf{a}^\pm}$ en la expresión (3.2). Razonando por reducción al absurdo, si existiesen i, j con $\underline{x}^{\mathbf{c}^+} = f_i \underline{x}^{\mathbf{a}^+} - f_j \underline{x}^{\mathbf{a}^-}$, entonces tanto el soporte de \mathbf{a}^+ como el soporte de \mathbf{a}^- estarían contenidos en el soporte de \mathbf{c}^+ . Ahora, cada término en (3.2), contiene al soporte de \mathbf{a}^+ o al soporte de \mathbf{a}^- y, como el soporte de \mathbf{c}^- y el soporte de \mathbf{c}^+ son disjuntos, ocurriría que el término $\underline{x}^{\mathbf{c}^-}$ no podría estar en la expresión (3.2), lo que es absurdo. Podría ocurrir que $\underline{x}^{\mathbf{c}^+} = f_i \underline{x}^{\mathbf{a}^+} + f_j \underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ (o $\underline{x}^{\mathbf{c}^+} = f_i \underline{x}^{\mathbf{a}^-} - f_j \underline{x}^{\mathbf{a}^-}$) para algún i, j , pero esto implicaría que el soporte de f_i fuese igual al soporte de f_j , lo que es absurdo (son términos diferentes del polinomio). Razonando de la misma manera, se demuestra que también $\underline{x}^{\mathbf{c}^-}$ es uno de los términos $f_i \underline{x}^{\mathbf{a}^\pm}$ en (3.2).

Sin perder generalidad y por ahorrar notación, suponemos que $\underline{x}^{\mathbf{c}^+} = f_1 \underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ y que $\underline{x}^{\mathbf{c}^-} = f_k \underline{x}^{\mathbf{a}^-}$ (podría ocurrir que $\underline{x}^{\mathbf{c}^+} = f_1 \underline{x}^{\mathbf{a}^-}$ y que $\underline{x}^{\mathbf{c}^-} = f_k \underline{x}^{\mathbf{a}^+}$, pero el razonamiento es el mismo). En particular, se tiene que $f_1 = \underline{x}^{\mathbf{c}^+ - \mathbf{a}^+}$ y que $f_k = \underline{x}^{\mathbf{c}^- - \mathbf{a}^-}$.

Por tanto, todos los términos en la expresión (3.2), excepto el primero y el último, deben cancelarse entre ellos. Luego existe algún término que cancele a $f_1 \underline{x}^{\mathbf{a}^-} = \underline{x}^{\mathbf{c}^+ - \mathbf{a}^+ + \mathbf{a}^-}$, además, el término que cancele a este debe de ser de la forma $f_i \underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ ya que los signos deben de ser diferentes para que haya cancelación. Tras reordenar, podemos suponer que el término que cancela a $f_1 \underline{x}^{\mathbf{a}^-}$ es $f_2 \underline{x}^{\mathbf{a}^+}$. Es decir, que $f_2 = \underline{x}^{\mathbf{c}^+ + \mathbf{a}^- - 2\mathbf{a}^+}$.

Repitiendo esto, debe existir algún término de la forma $f_i \underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ que cancele

a $f_2 \underline{x}^{\mathbf{a}^-}$, reordenamos y suponemos que es $f_3 \underline{x}^{\mathbf{a}^+}$, lo que nos lleva a que $f_3 = \underline{x}^{\mathbf{c}^+ + 2\mathbf{a}^- - 3\mathbf{a}^+}$. Es decir, que para $1 \leq i \leq k$, tenemos que $f_i = \underline{x}^{\mathbf{c}^+ + (i-1)\mathbf{a}^- - i\mathbf{a}^+}$.

Llevando esta información a f_k , tenemos que $\underline{x}^{\mathbf{c}^- - \mathbf{a}^-} = \underline{x}^{\mathbf{c}^+ + (k-1)\mathbf{a}^- - k\mathbf{a}^+}$, es decir,

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^- = k\mathbf{a}^+ - k\mathbf{a}^- = k\mathbf{a}.$$

Ahora, como teníamos que $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, significa que $\mathbf{b} = (k-1)\mathbf{a}$, lo que contradice que fuesen linealmente independientes, llegando a un absurdo y probando el lema. \square

El siguiente lema nos dará un criterio para determinar cuando un binomio pertenece a un ideal binomial generado por dos elementos.

Lema 3.1.5. *Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^s$ dos vectores linealmente independientes con al menos un elemento positivo y otro negativo y tal que $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ también tenga al menos un elemento positivo y otro negativo. Entonces, $f_{\mathbf{c}} \in \langle f_{\mathbf{a}}, f_{\mathbf{b}} \rangle$ si y solo si $\text{supp}(\mathbf{a}^+) \cap \text{supp}(\mathbf{b}^-) = \emptyset$ o $\text{supp}(\mathbf{a}^-) \cap \text{supp}(\mathbf{b}^+) = \emptyset$.*

Demostración. Suponemos primero que $f_{\mathbf{c}} \in \langle f_{\mathbf{a}}, f_{\mathbf{b}} \rangle$ y razonamos por reducción al absurdo, es decir, suponemos que $\text{supp}(\mathbf{a}^+) \cap \text{supp}(\mathbf{b}^-) \neq \emptyset$ y que $\text{supp}(\mathbf{a}^-) \cap \text{supp}(\mathbf{b}^+) \neq \emptyset$.

Como $f_{\mathbf{c}} \in \langle f_{\mathbf{a}}, f_{\mathbf{b}} \rangle$ y gracias al lema anterior, existen dos polinomios no nulos f y g en $K[x_1, \dots, x_s]$ tales que

$$f_{\mathbf{c}} = \underline{x}^{\mathbf{c}^+} - \underline{x}^{\mathbf{c}^-} = f \cdot f_{\mathbf{a}} + g \cdot f_{\mathbf{b}} = f(\underline{x}^{\mathbf{a}^+} - \underline{x}^{\mathbf{a}^-}) + g(\underline{x}^{\mathbf{b}^+} - \underline{x}^{\mathbf{b}^-}). \quad (3.3)$$

Además, se tiene que alguno de los monomios $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}, \underline{x}^{\mathbf{a}^-}, \underline{x}^{\mathbf{b}^+}$ o $\underline{x}^{\mathbf{b}^-}$ divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$ y, de la misma manera, a $\underline{x}^{\mathbf{c}^-}$. Para ver esto, lo primero es que alguno de esos monomios debe de tener su soporte contenido en el soporte de $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$ ya que si no, no puede ocurrir que el término $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$ aparezca en la expresión de la derecha. Ahora, de los monomios que tenga su soporte contenido en el de $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$, alguno de ellos debe tener cada variable con un exponente menor que el que tenga en $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$, si no también es imposible que dicho término aparezca en la expresión de la derecha.

Veamos ahora que ni $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ ni $\underline{x}^{\mathbf{b}^+}$ dividen a $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$. Para ver esto, sea $j \in \text{supp}(\mathbf{a}^+) \cap \text{supp}(\mathbf{b}^-)$, es decir, la coordenada j -ésima de \mathbf{a} es $d \neq 0$, con $d > 0$. De la misma manera, la coordenada j -ésima de \mathbf{b} es $-e \neq 0$, con $e > 0$. Por tanto, como $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, la coordenada j -ésima de \mathbf{c} es $d - e$.

Si $d - e \geq 1$, entonces x_j^{d-e} aparece en el monomio $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$ y, por tanto, $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ ya no lo puede dividir.

Si $d - e \leq 0$, entonces la variable x_j no aparece en $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$, luego $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ tampoco lo divide.

Empezando con $j \in \text{supp}(\mathbf{a}^-) \cap \text{supp}(\mathbf{b}^+)$ y razonando de la misma manera se llega a que $\underline{x}^{\mathbf{b}^+}$ tampoco divide a $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}$.

Como teníamos que alguno de los monomios $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}, \underline{x}^{\mathbf{a}^-}, \underline{x}^{\mathbf{b}^+}$ o $\underline{x}^{\mathbf{b}^-}$ divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$ y no es ni $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ ni $\underline{x}^{\mathbf{b}^+}$, debe de ser $\underline{x}^{\mathbf{a}^-}$ o $\underline{x}^{\mathbf{b}^-}$. Vamos a suponer que es $\underline{x}^{\mathbf{b}^-}$, si no, el razonamiento es idéntico.

Como $\underline{x}^{\mathbf{b}^-}$ divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$, se tiene que

$$\text{supp}(\mathbf{b}^-) \subseteq \text{supp}(\mathbf{c}^+) \subseteq \text{supp}(\mathbf{a}^+) \cup \text{supp}(\mathbf{b}^+),$$

donde la última contención es debida a que $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Además, como $\text{supp}(\mathbf{b}^-)$ y $\text{supp}(\mathbf{b}^+)$ son disjuntos, se tiene que $\text{supp}(\mathbf{b}^-) \subseteq \text{supp}(\mathbf{a}^+)$.

Como $\text{supp}(\mathbf{c}^-) \subseteq \text{supp}(\mathbf{a}^-) \cup \text{supp}(\mathbf{b}^-)$, $\text{supp}(\mathbf{b}^-) \subseteq \text{supp}(\mathbf{c}^+)$ y $\text{supp}(\mathbf{c}^+) \cap \text{supp}(\mathbf{c}^-) = \emptyset$, además se tiene que $\text{supp}(\mathbf{c}^-) \subseteq \text{supp}(\mathbf{a}^-)$.

De la misma manera que hemos hecho esto, se puede ver que ni $\underline{x}^{\mathbf{a}^-}$ ni $\underline{x}^{\mathbf{b}^-}$ dividen a $\underline{x}^{\mathbf{c}^-}$. Acabamos de ver que $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ tampoco lo divide ya que $\text{supp}(\mathbf{c}^-) \subseteq \text{supp}(\mathbf{a}^-)$, por tanto, debe de ser $\underline{x}^{\mathbf{b}^+}$ el que divida a $\underline{x}^{\mathbf{c}^-}$, es decir, también tenemos que $\text{supp}(\mathbf{b}^+) \subseteq \text{supp}(\mathbf{c}^-)$.

Veamos ahora que $\mathbf{c}^+ = \mathbf{a}^+ - \mathbf{b}^-$ y que $\mathbf{c}^- = \mathbf{a}^- - \mathbf{b}^+$. Para probar la primera igualdad, vamos a estudiar las posibilidades de que \mathbf{c} tenga un elemento positivo en la posición j -ésima:

1. Las coordenadas j -ésimas de \mathbf{a} y \mathbf{b} son ambas mayores o iguales que cero y, al menos una de ellas mayor que 0.
2. La coordenada j -ésima de \mathbf{a} , a_j , es positiva y la coordenada j -ésima de \mathbf{b} , b_j es negativa pero $a_j + b_j > 0$.
3. La coordenada j -ésima de \mathbf{a} , a_j , es negativa y la coordenada j -ésima de \mathbf{b} , b_j es positiva pero $a_j + b_j > 0$.

Como $\text{supp}(\mathbf{b}^+) \subseteq \text{supp}(\mathbf{c}^-)$, se tiene que $\text{supp}(\mathbf{b}^+) \cap \text{supp}(\mathbf{c}^+) = \emptyset$, luego el caso 1 solo se puede dar si la coordenada j -ésima de \mathbf{b} es nula y el caso 3 no se puede dar nunca. Por tanto, la única forma de que \mathbf{c} tenga un elemento positivo en la coordenada j -ésima es que la coordenada j -ésima de \mathbf{a} sea positiva, la coordenada j -ésima de \mathbf{b} sea menor o igual que cero y su suma

sea positiva, es decir, $\mathbf{c}^+ = \mathbf{a}^+ - \mathbf{b}^-$. De manera similar se prueba que $\mathbf{c}^- = \mathbf{a}^- - \mathbf{b}^+$.

Como $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ no divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$ y $\underline{x}^{\mathbf{a}^-}$ no divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^-}$ y $\underline{x}^{\mathbf{b}^-}$ divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^+}$ y $\underline{x}^{\mathbf{b}^+}$ divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^-}$, volviendo a la expresión (3.3), necesariamente debe de ocurrir que exista $g' \in K[x_1, \dots, x_s]$ con

$$g = g' - \underline{x}^{\mathbf{c}^+ - \mathbf{b}^-} - \underline{x}^{\mathbf{c}^- - \mathbf{b}^+},$$

para que haya cancelación del término $\underline{x}^{\mathbf{c}^+} - \underline{x}^{\mathbf{c}^-}$ en la expresión (3.3). Además, g' es tal que

$$-f(\underline{x}^{\mathbf{a}^+} - \underline{x}^{\mathbf{a}^-}) = g'(\underline{x}^{\mathbf{b}^+} - \underline{x}^{\mathbf{b}^-}) - \underline{x}^{\mathbf{c}^+ - \mathbf{b}^- + \mathbf{b}^+} - \underline{x}^{\mathbf{c}^- - \mathbf{b}^+ + \mathbf{b}^-}. \quad (3.4)$$

Como hemos visto que $\mathbf{a}^- = \mathbf{c}^- + \mathbf{b}^+$ y los soportes de \mathbf{b}^+ y \mathbf{b}^- son disjuntos, se tiene que $\underline{x}^{\mathbf{a}^-}$ no divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^- - \mathbf{b}^+ + \mathbf{b}^-}$. Si $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ tampoco divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^- - \mathbf{b}^+ + \mathbf{b}^-}$, entonces el término $\underline{x}^{\mathbf{c}^- - \mathbf{b}^+ + \mathbf{b}^-}$ en (3.4) debe cancelarse con los términos resultantes del producto $g'\underline{x}^{\mathbf{b}^+}$, es decir, existe $g'' \in K[x_1, \dots, x_s]$ con

$$g' = g'' - \underline{x}^{\mathbf{c}^- - 2\mathbf{b}^+ + \mathbf{b}^-}.$$

Llevando esto a la ecuación (3.4) tenemos que

$$-f(\underline{x}^{\mathbf{a}^+} - \underline{x}^{\mathbf{a}^-}) = g''(\underline{x}^{\mathbf{b}^+} - \underline{x}^{\mathbf{b}^-}) + \underline{x}^{\mathbf{c}^- - 2\mathbf{b}^+ + 2\mathbf{b}^-} - \underline{x}^{\mathbf{c}^+ - \mathbf{b}^- + \mathbf{b}^+}.$$

Por la misma razón que antes se tiene que $\underline{x}^{\mathbf{a}^-}$ no divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^- - 2\mathbf{b}^+ + 2\mathbf{b}^-}$, si $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ tampoco lo divide, podemos repetir el mismo proceso.

Este proceso debe terminar, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^- - k\mathbf{b}^+ + k\mathbf{b}^-}$. Si escribimos

$$\underline{x}^{\mathbf{c}^- - k\mathbf{b}^+ + k\mathbf{b}^-} = \frac{\underline{x}^{\mathbf{c}^-} \cdot \underline{x}^{k\mathbf{b}^-}}{\underline{x}^{k\mathbf{b}^+}},$$

como el soporte de \mathbf{b}^+ y \mathbf{b}^- son disjuntos, necesariamente $\underline{x}^{k\mathbf{b}^+}$ divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^-}$, es decir, se tiene que $k\mathbf{b}^+ \leq \mathbf{c}^- = \mathbf{a}^- - \mathbf{b}^+$, donde \leq representa la desigualdad coordenada a coordenada. Además, ya habíamos visto que $\underline{x}^{\mathbf{a}^+}$ no divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^-}$, luego necesariamente debe dividir a $\underline{x}^{k\mathbf{b}^-}$, por tanto, $\mathbf{a}^+ \leq k\mathbf{b}^-$.

Volviendo a la ecuación (3.4) y repitiendo este proceso pero con el monomio $\underline{x}^{\mathbf{c}^+ - \mathbf{b}^- + \mathbf{b}^+}$, se llega a que existe un $l \in \mathbb{N}$ tal que $\underline{x}^{\mathbf{a}^-}$ divide a $\underline{x}^{\mathbf{c}^+ - l\mathbf{b}^- + l\mathbf{b}^+}$ y se tienen las desigualdades $l\mathbf{b}^- \leq \mathbf{c}^+ = \mathbf{a}^+ - \mathbf{b}^-$ y $\mathbf{a}^- \leq l\mathbf{b}^+$. Juntando las desigualdes obtenidas se tiene que

$$\begin{aligned} (k+1)\mathbf{b}^+ &\leq \mathbf{a}^- \leq l\mathbf{b}^+, \\ (l+1)\mathbf{b}^- &\leq \mathbf{a}^+ \leq k\mathbf{b}^-. \end{aligned}$$

Esto implica que $k + 1 \leq l$ y que $l + 1 \leq k$, lo que es absurdo.

Para la implicación contraria, supongamos que $\text{supp}(\mathbf{a}^+) \cap \text{supp}(\mathbf{b}^-) = \emptyset$, el otro caso es similar. Sea $\mathbf{d} = \mathbf{b}^+ - \mathbf{a}^- \in \mathbb{Z}^s$, entonces

$$\underline{x}^{\mathbf{a}^+ + \mathbf{d}^+} - \underline{x}^{\mathbf{b}^- + \mathbf{d}^-} = \underline{x}^{\mathbf{d}^+}(\underline{x}^{\mathbf{a}^+} - \underline{x}^{\mathbf{a}^-}) + \underline{x}^{\mathbf{d}^-}(\underline{x}^{\mathbf{b}^+} - \underline{x}^{\mathbf{b}^-}) \in \langle f_{\mathbf{a}}, f_{\mathbf{b}} \rangle,$$

donde la primera igualdad es gracias a que $\mathbf{d} = \mathbf{d}^+ - \mathbf{d}^- = \mathbf{b}^+ - \mathbf{a}^-$ y, entonces, $\mathbf{d}^+ + \mathbf{a}^- = \mathbf{b}^+ + \mathbf{d}^-$.

Para concluir, veamos que $\underline{x}^{\mathbf{a}^+ + \mathbf{d}^+} - \underline{x}^{\mathbf{b}^- + \mathbf{d}^-} = \underline{x}^{\mathbf{c}^+} - \underline{x}^{\mathbf{c}^-} = f_{\mathbf{c}}$. Lo primero, se tiene que $\text{supp}(\mathbf{a}^+ + \mathbf{d}^+) \subseteq \text{supp}(\mathbf{a}^+) \cup \text{supp}(\mathbf{b}^+)$. Efectivamente, si $j \in \text{supp}(\mathbf{a}^+ + \mathbf{d}^+)$, si $a_j^+ \neq 0$, entonces $j \in \text{supp}(\mathbf{a}^+)$. Si $a_j^+ = 0$, entonces debe ocurrir que $d_j^+ \neq 0$ y como $\mathbf{d} = \mathbf{b}^+ - \mathbf{a}^-$, entonces $d_j^+ = b_j^+ - a_j^- \neq 0$, luego $j \in \text{supp}(\mathbf{b}^+)$. De la misma manera se prueba que $\text{supp}(\mathbf{b}^- + \mathbf{d}^-) \subseteq \text{supp}(\mathbf{b}^-) \cup \text{supp}(\mathbf{a}^-)$.

Como por hipótesis $\text{supp}(\mathbf{a}^+) \cap \text{supp}(\mathbf{b}^-) = \emptyset$, entonces $\text{supp}(\mathbf{a}^+)$ es disjunto a $\text{supp}(\mathbf{b}^-) \cup \text{supp}(\mathbf{d}^-)$. Si se tuviese que $j \in \text{supp}(\mathbf{a}^+) \cap \text{supp}(\mathbf{d}^-)$, entonces $a_j^+ \neq 0$ y $d_j^- \neq 0$. Lo segundo implica que $b_j^+ - a_j^- < 0$, es decir, $b_j^+ < a_j^- = 0$ porque $a_j^+ \neq 0$, lo que es absurdo.

Veamos que $\text{supp}(\mathbf{a}^+ + \mathbf{d}^+)$ y $\text{supp}(\mathbf{b}^- + \mathbf{d}^-)$ son disjuntos. Por reducción al absurdo, sea $j \in \text{supp}(\mathbf{a}^+ + \mathbf{d}^+) \cap \text{supp}(\mathbf{b}^- + \mathbf{d}^-) \subseteq \text{supp}(\mathbf{a}^+) \cup \text{supp}(\mathbf{b}^+)$. Si $j \in \text{supp}(\mathbf{a}^+)$, entonces $j \notin \text{supp}(\mathbf{b}^-) \cup \text{supp}(\mathbf{a}^-)$, no puede ser. Necesariamente debe ocurrir que $j \in \text{supp}(\mathbf{b}^+)$. Para que j pertenezca a $\text{supp}(\mathbf{b}^- + \mathbf{d}^-)$ debe ocurrir que $b_j^- + d_j^- \neq 0$. Hay dos posibilidades: $b_j^- \neq 0$, lo que no puede ser por hipótesis, o $d_j^- \neq 0$, que acabamos de probar que tampoco puede ser.

Para concluir, basta darse cuenta que $\mathbf{a}^+ + \mathbf{d}^+ - (\mathbf{b}^- + \mathbf{d}^-) = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$. \square

Para terminar la sección damos el siguiente lema, que es una generalización del lema 3.1.1.

Lema 3.1.6. Sean A_1, \dots, A_k matrices de dimensiones $n_i \times s_i$, $1 \leq i \leq k$, con coeficientes enteros y sean $c_1, \dots, c_l \in \mathbb{Z}^N$, donde $N \geq n_1 + \dots + n_k$. Sea la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 & c_{11} & \cdots & c_{l1} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & A_k & \vdots & & \vdots \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & c_{1N} & \cdots & c_{lN} \end{pmatrix}.$$

Sea U_i el conjunto de índices de las columnas de la matriz A en las que hemos colocado la matriz A_i . Supongamos además que existe $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{s_1 + \dots + s_k + l}$ tal que

$$\ker(A) = \ker(A_1) \oplus \dots \oplus \ker(A_k) \oplus \langle \mathbf{a} \rangle, \quad (3.5)$$

donde se entiende que $\ker(A_i) \subseteq \mathbb{Z}^N$ y tiene ceros en todos los índices que no estén en U_i .

Si para todo $1 \leq i \leq k$ se tiene que $U_i \cap \text{supp}(\mathbf{a}^+) = \emptyset$ o $U_i \cap \text{supp}(\mathbf{a}^-) = \emptyset$, entonces

$$I_A = I_{A_1} + \dots + I_{A_k} + \langle f_{\mathbf{a}} \rangle.$$

Demostración. La implicación $I_A \supseteq I_{A_1} + \dots + I_{A_k} + \langle f_{\mathbf{a}} \rangle$ es clara teniendo en cuenta que $I_A = \langle f_{\mathbf{b}}, \mathbf{b} \in \ker(A) \rangle$ y la hipótesis (3.5).

Para la implicación contraria hacemos inducción sobre k . Para $k = 0$ el resultado es claro teniendo en cuenta (3.5). Supongamos $k > 0$ y que el resultado es cierto para $k - 1$ y sea $\mathbf{c} = \mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{b}_k + \mathbf{c}\mathbf{a} \in \ker(A)$, donde $\mathbf{b}_i \in \ker(A_i)$ y $c \in \mathbb{Z}$. Definimos $\mathbf{d} = \mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{b}_{k-1} + \mathbf{c}\mathbf{a}$.

Veamos que el soporte de \mathbf{d}^+ o el soporte de \mathbf{d}^- es disjunto del soporte de \mathbf{b}_k . Por reducción al absurdo, si suponemos que $\text{supp}(\mathbf{d}^+) \cap \text{supp}(\mathbf{b}_k) \neq \emptyset$ y que $\text{supp}(\mathbf{d}^-) \cap \text{supp}(\mathbf{b}_k) \neq \emptyset$, entonces existen j con $d_j^+ \neq 0$ y $b_{k_j} \neq 0$ e i con $d_i^- \neq 0$ y $b_{k_i} \neq 0$. Por tanto, $d_j = ca_j > 0$ y $d_i = ca_i < 0$, esto contradice la hipótesis que dice que $U_k \cap \text{supp}(\mathbf{a}^+) = \emptyset$ o $U_k \cap \text{supp}(\mathbf{a}^-) = \emptyset$.

Aplicando el lema 3.1.5 tenemos que $f_{\mathbf{c}} \in \langle f_{\mathbf{d}}, f_{\mathbf{b}_k} \rangle$. Por hipótesis de inducción $f_{\mathbf{d}} \in I_{A_1} + \dots + I_{A_{k-1}} + \langle f_{\mathbf{a}} \rangle$ y $f_{\mathbf{b}_k} \in I_{A_k}$ por definición, completándose la prueba. \square

El resultado anterior permite obtener información sobre los números de Betti de R/I_A en función de los números de Betti de R/J , donde $J = I_{A_1} + \dots + I_{A_k}$.

Teorema 3.1.7. *En la situación del lema 3.1.6 suponemos además que la matriz A induce una multigraduación (\mathbb{N}^N -graduación) sobre R/I_A , es decir, haciendo $\deg x_i = \mathbf{a}_i$, donde \mathbf{a}_i es la columna i -ésima de la matriz de A . Entonces, para todo $i \geq 0$ y todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$,*

$$\beta_{i,\alpha}(R/I_A) = \beta_{i,\alpha}(R/J) + \beta_{i-1,\alpha-\mu}(R/J),$$

$$\mu = \deg(f_{\mathbf{a}}) \in \mathbb{N}^N.$$

Demostración. Por el lema 3.1.6 se tiene que $I_A = J + \langle f_{\mathbf{a}} \rangle$. Consideramos la sucesión multigradaada (multigradaación inducida por la matriz A)

$$0 \rightarrow (R/(J: \langle f_{\mathbf{a}} \rangle))(-\mu) \xrightarrow{\cdot f_{\mathbf{a}}} R/J \xrightarrow{\varphi} R/(J + \langle f_{\mathbf{a}} \rangle) = R/I_A \rightarrow 0,$$

donde la aplicación $\cdot f_{\mathbf{a}}$ significa multiplicar por $f_{\mathbf{a}}$ y la aplicación φ está definida como $\varphi(r + J) = r + J + \langle f_{\mathbf{a}} \rangle$. Veamos que es una sucesión exacta:

La aplicación multiplicación por $f_{\mathbf{a}}$ es inyectiva ya que $f_{\mathbf{a}}(J: \langle f_{\mathbf{a}} \rangle) \subseteq J$, luego dado $r + (J: \langle f_{\mathbf{a}} \rangle) \in R/(J: \langle f_{\mathbf{a}} \rangle)$, la única forma de que su imagen sea nula es que $r \in J: \langle f_{\mathbf{a}} \rangle$, es decir, el cero del cociente. Además, su imagen es $\{r f_{\mathbf{a}} + J, r \in R\}$. Por último, es claro que φ es sobreyectiva y que su núcleo es $\{r f_{\mathbf{a}} + J, r \in R\}$.

Por el lema 3.1.1 se tiene que J es un ideal tórico y, como consecuencia, es un ideal primo. Además, $f_{\mathbf{a}} \notin J$ ya que $\text{supp}(f_{\mathbf{a}}) \cap \text{supp}(f_{\mathbf{c}}) = \emptyset$ para todo $f_{\mathbf{c}} \in I_{A_l}$, $1 \leq l \leq k$ gracias a las condiciones del lema 3.1.6. Por tanto, $J: \langle f_{\mathbf{a}} \rangle = J$ y podemos reescribir la sucesión exacta de arriba como

$$0 \rightarrow (R/J)(-\mu) \xrightarrow{\cdot f_{\mathbf{a}}} R/J \xrightarrow{\varphi} R/I_A \rightarrow 0.$$

Si denotamos por (H, d) la resolución libre multigradaada de R/J y por (G, d') la resolución libre multigradaada de $(R/J)(-\mu)$, tenemos que son la misma salvo que los R -módulos que aparecen en H , aparecen en G pero desplazados por $-\mu$. Por tanto, podemos extender la aplicación multiplicación por $f_{\mathbf{a}}$ a una aplicación entre complejos $\phi: (G, d') \rightarrow (H, d)$, donde cada $\phi_i: G_i \rightarrow H_i$ es la aplicación que envía a cada elemento del sistema generador de G_i en su multiplicación por $f_{\mathbf{a}}$, que es graduada (de grado 0).

Aplicando la construcción del *mapping cone* en esta situación, nos da una resolución libre multigradaada de R/I_A que, además, es minimal ya que las matrices de los homomorfismos de esta resolución no tienen entradas constantes no nulas. Esto último se debe a que estamos partiendo de resoluciones minimales, luego sus matrices no tienen entradas constantes no nulas y los elementos no nulos de cada ϕ_i son $f_{\mathbf{a}}$.

Para terminar, la igualdad con los números de Betti se debe a que los módulos que da la construcción del *mapping cone* son $G_{i-1} \oplus H_i$. \square

Gracias al teorema 3.1.3 podemos calcular los números de Betti multigradaados de R/J y vemos que los números de Betti multigradaados de R/I_A solo dependen de los números de Betti multigradaados de los ideales tóricos en los que lo hemos dividido.

3.2. Aplicación a ideales tóricos asociados a grafos

En el siguiente resultado veremos que el lema 3.1.6 representa la situación en la que construimos un grafo mediante la unión de varios grafos a través de un ciclo par (ver ejemplo 3.2.2).

Teorema 3.2.1. *Sean G_1, \dots, G_k grafos simples finitos conexos tal que, como mucho, uno de ellos no es bipartito. Sea C un ciclo par con al menos k aristas. Para cada $1 \leq i \leq k$, identificamos una arista de G_i con una arista distinta de C . Entonces, el ideal tórico I_G del grafo resultante, G , está dado por*

$$I_G = I_{G_1} + \dots + I_{G_k} + \langle f \rangle,$$

donde para cada $1 \leq i \leq k$, I_{G_i} es el ideal tórico de G_i y f es el binomio correspondiente al ciclo C .

Demostración. Para cada $1 \leq i \leq k$, denotamos por A_i la matriz de incidencia de G_i . Cada matriz A_i tiene tamaño $n_i \times s_i$, donde $n_i = |V(G_i)|$ y $s_i = |E(G_i)|$. Además, gracias al teorema 2.2.9 y a la proposición 2.1.9, tenemos que $\text{rang}(A_i) \in \{n_i, n_i - 1\}$ y, como mucho, solamente para un i es n_i (correspondiendo al grafo G_i que no es bipartito).

Sea l el número de aristas adicionales que hemos añadido al construir el grafo G , es decir, G tiene $n_1 \dots + n_k + l - k$ aristas. Sea B la matriz de incidencia del grafo G , que tiene tamaño $(n_1 \dots + n_k + l - k) \times (s_1 + \dots + s_k + l)$. Además, la matriz B tiene la forma de la matriz del lema 3.1.6, donde las matrices A_i son las matrices de incidencia de los grafos G_i y las últimas l columnas son los valores de incidencia asociados a las aristas adicionales que hemos añadido para construir G .

Si $E(G) = \{e_1, \dots, e_{s_1 + \dots + s_k + l}\}$ y $C = \{e_{j_1}, \dots, e_{j_{l+k}}\}$, al ser C un camino cerrado par recordamos que f es de la forma

$$f = \prod_{i \text{ impar}} e_{j_i} - \prod_{i \text{ par}} e_{j_i}. \quad (3.6)$$

Eligiendo $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{s_1 + \dots + s_k + l}) \in \mathbb{Z}^{(s_1 + \dots + s_k + l)}$ con

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin \{j_1, \dots, j_{l+k}\}, \\ 1 & \text{si } i = j_t \in \{j_1, \dots, j_{l+k}\} \text{ y } t \text{ impar}, \\ -1 & \text{si } i = j_t \in \{j_1, \dots, j_{l+k}\} \text{ y } t \text{ par}. \end{cases}$$

Se tiene que $f = f_{\mathbf{a}}$ con $\mathbf{a} \in \ker(B)$. Con la notación del lema 3.1.6, si U_i es el conjunto de índices de las columnas de la matriz B en las que se ha colocado la matriz A_i , se tiene que $U_i \cap \text{supp}(\mathbf{a}^+) = \emptyset$ o $U_i \cap \text{supp}(\mathbf{a}^-) = \emptyset$ debido a que la intersección $U_i \cap \text{supp}(\mathbf{a})$ solamente tiene un elemento. Además, como $\mathbf{a} \in \ker(B)$ se tiene la contención

$$\ker(A_1) \oplus \cdots \oplus \ker(A_k) \oplus \langle \mathbf{a} \rangle \subseteq \ker(B).$$

Para poder aplicar el lema 3.1.6 necesitamos tener la igualdad. Para ello, primero calculemos el rango de $\ker(B)$. Si alguno de los grafos G_i no es bipartito, digamos G_1 entonces G tampoco lo es, luego gracias al teorema 2.2.9,

$$\begin{aligned} \text{rang}(\ker(B)) &= s_1 + \cdots + s_k + l - (n_1 + \cdots + n_k + l - k) = \\ &= (s_1 - n_1) + (s_2 - (n_2 - 1)) + \cdots + (s_k - (n_k - 1)) + 1. \end{aligned}$$

Si todos ellos son bipartitos entonces G también lo es y por el teorema 2.2.9,

$$\begin{aligned} \text{rang}(\ker(B)) &= s_1 + \cdots + s_k + l - (n_1 + \cdots + n_k + l - k - 1) = \\ &= (s_1 - n_1 - 1) + (s_2 - (n_2 - 1)) + \cdots + (s_k - (n_k - 1)) + 1. \end{aligned}$$

En ambos casos, $\text{rang}(\ker(B)) = \text{rang}(\ker(A_1)) + \cdots + \text{rang}(\ker(A_k)) + 1$.

Para concluir, veamos que $L := \ker(I_{A_1}) \oplus \cdots \oplus \ker(I_{A_k}) \oplus \langle \mathbf{a} \rangle$ es saturado en $\ker(B)$, es decir, tenemos que ver que dado $\mathbf{b} \in \ker(B)$, si se cumple que existe $q \in \mathbb{Z}$ con $q\mathbf{b} \in L$, entonces $\mathbf{b} \in L$. Si $q\mathbf{b} \in L$, entonces es de la forma $q\mathbf{b} = \mathbf{c} + t\mathbf{a}$, con $\mathbf{c} \in L' := \ker(I_{A_1}) \oplus \cdots \oplus \ker(I_{A_k})$ y $t \in \mathbb{Z}$. Como $L' \subseteq \mathbb{Z}^{s_1 + \cdots + s_k} \times \{0\}^l$, es decir, \mathbf{c} tiene cero en sus últimas l coordenadas y \mathbf{a} solo tiene como elementos 1 o -1 , necesariamente q divide a t . Por tanto, existe $t' \in \mathbb{Z}$ con $t = qt'$ y despejando, $\mathbf{c} = q(\mathbf{b} - t'\mathbf{a})$. Además, como L' es el núcleo de la matriz que se obtiene a partir de la matriz B reemplazando sus últimas l columnas por ceros, L' es saturado en $\mathbb{Z}^{s_1 + \cdots + s_k + l}$, luego $\mathbf{c}' = \mathbf{b} - t'\mathbf{a} \in L'$. Esto implica que $\mathbf{b} = \mathbf{c}' + t'\mathbf{a} \in L' \oplus \langle \mathbf{a} \rangle = L$. Se cumplen todas las hipótesis del lema 3.1.6 y podemos concluir. \square

Ejemplo 3.2.2. La siguiente figura muestra un ejemplo de la construcción que hemos hecho en el teorema 3.2.1.

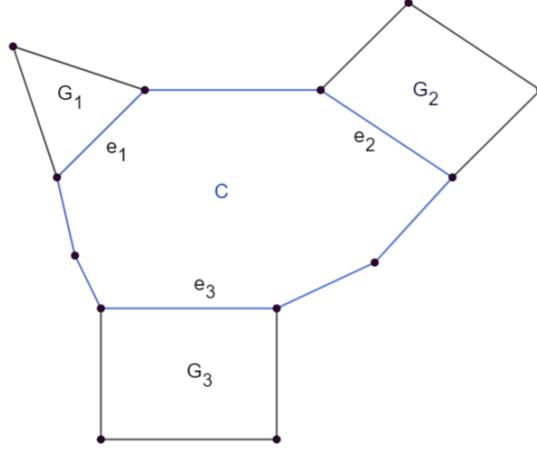


Figura 3.1: Ejemplo de construcción de un grafo G .

En este ejemplo hemos construido un grafo G a partir de tres grafos, donde solo uno de ellos no es bipartito y hemos identificado una arista de cada uno de ellos con una arista del ciclo par C (azul).

En esta situación tenemos el siguiente resultado, análogo al teorema 3.1.7.

Teorema 3.2.3. *Sean G_1, \dots, G_k grafos finitos simples conexos tal que, como mucho, uno de ellos no es bipartito. Sea G el grafo construido como en el teorema 3.2.1. Si el ciclo par C tiene tamaño $2d$, con $d \in \mathbb{N}$, entonces, para todos $i, j \geq 0$ se tiene que*

$$\beta_{i,j}(R/I_G) = \beta_{i,j}(R/J) + \beta_{i-1,j-d}(R/J),$$

donde $J = I_{G_1} + \dots + I_{G_k}$ viendo cada I_{G_i} como ideales de R .

Demostración. Aplicando el teorema 3.1.7, tenemos que para todo $i \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{N}^N$

$$\beta_{i,\alpha}(R/I_G) = \beta_{i,\alpha}(R/J) + \beta_{i-1,\alpha-\mu}(R/J),$$

donde $\mu = \deg f$ y f es el del teorema 3.2.1. Además, como C tiene tamaño $2d$, si vemos la expresión de f en (3.6), entonces $\mu = d$. Ahora, recordando la relación (2.2) entre números de Betti para la graduación estándar y la multigraduación inducida por la matriz de incidencia, tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_{i,j}(R/I_G) &= \sum_{|\alpha|=2j} \beta_{i,\alpha}(I/G) = \sum_{|\alpha|=2j} (\beta_{i,\alpha}(R/J) + \beta_{i-1,\alpha-d}(R/J)) = \\ &= \beta_{i,j}(R/J) + \beta_{i-1,j-d}(R/J). \end{aligned}$$

□

Aplicando el teorema 3.1.3 y la relación (2.2) tenemos una fórmula para calcular los números de Betti de R/J

$$\beta_{i,j}(R/J) = \sum_{i_1+\dots+i_k=i} \left(\sum_{j_1+\dots+j_k=j} \beta_{i_1,j_1}(R/I_{G_1}) \cdots \beta_{i_k,j_k}(R/I_{G_k}) \right).$$

Corolario 3.2.4. *Sea G un grafo simple finito y sea e una arista de G . Si conectamos un ciclo par de longitud $2d \geq 4$ a través de e (identificando una arista del ciclo con e) y H es el grafo resultante, entonces para todo $i, j \geq 0$*

$$\beta_{i,j}(R/I_H) = \beta_{i,j}(R/I_G) + \beta_{i-1,j-d}(R/I_G).$$

Este corolario es consecuencia directa del teorema 3.2.3. Lo único que tenemos que observar es que la condición de que el ciclo par tenga longitud mayor o igual que 4 es para que el grafo resultante, H , sea un grafo simple. Si la longitud fuese 2, en H habría dos aristas diferentes conectando los mismos dos vértices, e y la arista del ciclo que no hayamos identificado con e .

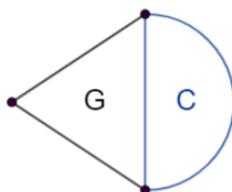


Figura 3.2: Ejemplo de unir un grafo con un ciclo de longitud 2.

Ejemplo 3.2.5. Sea G un cuadrado, es decir, $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $E(G) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_1\}\}$. Ahora, fijamos una de las aristas del cuadrado y conectamos otro cuadrado (que es un ciclo par de longitud 4). Sea H el grafo resultante.

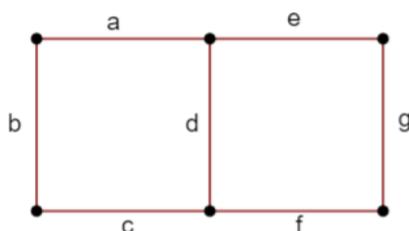


Figura 3.3: Representación del grafo H .

Si suponemos que G es el cuadrado izquierdo y dado que I_G está generado por los caminos cerrados pares primitivos se tiene que $I_G = \langle ac - bd \rangle$. De la misma manera, $I_H = \langle ac - bd, dg - ef, bef - gca \rangle$. El siguiente fragmento de código muestra como usar Singular [5] para calcular los números de Betti de R/I_G y de R/I_H .

```
> ring A = 0, (a,b,c,d,e,f,g),Dp;
> ideal G = ac-bd;
> list resG = mres(G,0);
> print(betti(resG), "betti");
      0      1
-----
0:      1      -
1:      -      1
-----
total:      1      1
> ideal H = ac-bd,dg-ef,bef-gca;
> list resH = mres(H,0);
> print(betti(resH), "betti");
      0      1      2
-----
0:      1      -      -
1:      -      2      -
2:      -      -      1
-----
total:      1      2      1
```

Por tanto, los números de Betti para R/I_G son

$$\begin{aligned}\beta_{0,0}(R/I_G) &= 1, & \beta_{0,1}(R/I_G) &= 0, \\ \beta_{1,1}(R/I_G) &= 0, & \beta_{1,2}(R/I_G) &= 1.\end{aligned}$$

Los números de Betti para R/I_H son

$$\begin{aligned}\beta_{0,0}(R/I_H) &= 1, & \beta_{0,1}(R/I_H) &= 0, & \beta_{0,2}(R/I_H) &= 0, \\ \beta_{1,1}(R/I_H) &= 0, & \beta_{1,2}(R/I_H) &= 2, & \beta_{1,3}(R/I_H) &= 0, \\ \beta_{2,2}(R/I_H) &= 0, & \beta_{2,3}(R/I_H) &= 0, & \beta_{2,4}(R/I_H) &= 1.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el ciclo tiene longitud 4, entonces $d = 2$, donde d es el definido en el corolario anterior, se comprueba fácilmente que la fórmula del corolario se cumple.

Teniendo presente la construcción que hemos hecho, vamos a dar una definición que representa el hecho de ‘pegar’ un grafo con otro (en la construcción previa, un grafo con un ciclo par), a lo que llamaremos el grafo fusión. Además, daremos una definición inversa a la de fusión, a la que llamaremos escisión de un grafo.

Definición 3.2.6. Dado un grafo $G = \{V(G), E(G)\}$ y dado $W \subseteq V(G)$, el **grafo inducido** de G en W es el grafo H que tiene como vértices $V(H) = W$ y como aristas $E(H) = \{e \in E(G) : e \subseteq W\}$.

Definición 3.2.7. Dados dos grafos G_1 y G_2 , un **isomorfismo de grafos** es una aplicación biyectiva $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que si u, v son dos vértices adyacentes en G_1 , entonces $f(u)$ y $f(v)$ son dos vértices adyacentes en G_2 . Diremos que G_1 y G_2 son **dos grafos isomorfos con respecto a f** y lo denotaremos por $G_1 \simeq_f G_2$ o solamente $G_1 \simeq G_2$.

Definición 3.2.8. Sean G_1, G_2 dos grafos y $H_1 \subseteq G_1$ y $H_2 \subseteq G_2$ dos grafos inducidos isomorfos con respecto a una aplicación $f: V(H_1) \rightarrow V(H_2)$. Definimos el **grafo fusión** de G_1 y G_2 a través de f , al que denotaremos por $G_1 \cup_f G_2$, como la unión disjunta de G_1 y G_2 en la que asociamos los vértices y las aristas mediante la aplicación f .

Ejemplo 3.2.9. Sean G_1 y G_2 los grafos azules y rojos respectivamente en la siguiente figura.

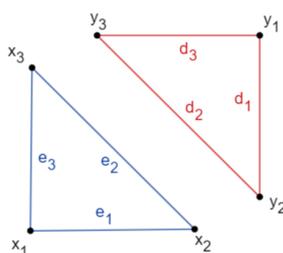


Figura 3.4: Grafos G_1 y G_2 .

Si H_1 es la hipotenusa de G_1 , es decir, el grafo inducido por $\{x_2, x_3\} \subseteq V(G_1)$ y H_2 es la hipotenusa de G_2 , podemos definir la aplicación f como $f(x_3) = y_3$ y $f(x_2) = y_2$. Luego el grafo fusión de G_1 y G_2 es

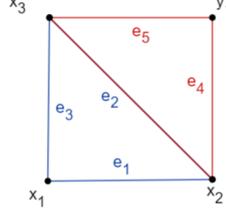


Figura 3.5: Grafo fusión de G_1 y G_2 .

Definición 3.2.10. Sea $G = \{V(G), E(G)\}$ un grafo simple finito. Suponemos que existen dos subconjuntos $W_1, W_2 \subseteq V(G)$ tal que $W_1 \cup W_2 = V(G)$. Denotamos por G_1 y G_2 los grafos inducidos que tienen como vértices W_1 y W_2 respectivamente. Sea $Y = W_1 \cap W_2$ y H el grafo inducido que tiene como vértices Y . Diremos que G_1 y G_2 forman una **escisión** de G a través de H si el grafo que se obtiene al eliminar los vértices Y de G tiene dos componentes no conexas.

Ejemplo 3.2.11. En el ejemplo 3.2.9, si consideramos el grafo G de la figura 3.5 y los conjuntos $W_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $W_2 = \{e_2, e_3, e_4\}$, los grafos inducidos G_1 y G_2 son los grafos de la figura 3.4 y forman una escisión de G a través de H , donde H es el grafo con $V(H) = \{x_2, x_3\}$ y $E(H) = \{e_2\}$. En este caso particular diremos que G_1 y G_2 forman una **escisión de G a través de una arista**.

Como se ha dejado intuir en el ejemplo anterior, las operaciones de fusión y escisión que acabamos de definir son inversas la una de la otra en el sentido siguiente: si G es el grafo fusión de G_1 y G_2 a través de f , entonces G_1 y G_2 forman una escisión de G a través de H , donde H es el grafo inducido de G en $H_1 \simeq H_2$. Recíprocamente, si G es un grafo simple finito y G_1, G_2 forman una escisión de G a través de un grafo inducido $H \subseteq G_1, H \subseteq G_2$, entonces G es el grafo fusión de G_1 y G_2 a través de la aplicación identidad $\text{id}: V(H) \rightarrow V(H)$.

Definición 3.2.12. Diremos que un grafo $G = \{V(G), E(G)\}$ es de **tipo camino** si $V(G) = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ y $E(G) = \{\{x_1, x_2\}, \dots, \{x_n, x_{n+1}\}\}$. A los grafos de tipo camino los denotaremos por P_n , donde el subíndice indica el número de aristas del grafo.

Teorema 3.2.13. Sean G_1 y G_2 una escisión de un grafo G a través de H . Suponemos que $H \simeq P_l$, donde P_l es un grafo de tipo camino. También

suponemos que todo vértice distinto de los vértices inicial y final de H tiene grado 2 visto como vértice en G . Si G_1 es un grafo bipartito, entonces

$$I_G = (I_{G_1} + I_{G_2}): f^\infty = \{g \in R: \exists n \in \mathbb{N} \text{ con } f^n g \in (I_{G_1} + I_{G_2})\},$$

donde f denota el monomio libre de cuadrados correspondiente a las aristas de H con índice par.

Demostración. Para la contención hacia la izquierda, como I_{G_1} e I_{G_2} están contenidos en I_G (ver la definición 2.2.5 de ideal tórico asociado a un grafo), entonces $(I_{G_1} + I_{G_2}): f^\infty \subseteq I_G: f^\infty$. Ahora, como I_G es un ideal primo por ser tórico y $f \notin I_G$, se tiene que $I_G: f^\infty = I_G$.

Recíprocamente, por el teorema 2.2.17 tenemos que I_G está generado por binomios asociados a caminos cerrados primitivos pares $\omega \in G$.

Veamos que ω no puede contener un subcamino en G_1 que empiece y acabe en el punto final o inicial de H . Por reducción al absurdo, si este subcamino existe, como G_1 es bipartito y el subcamino empieza y acaba en el mismo punto, necesariamente el subcamino debe ser par, si no, la última arista del subcamino tendría ambos vértices en una de las particiones de G_1 , yendo en contradicción con que G_1 es bipartito. Entonces, como ω es par, es una concatenación de caminos pares, lo que contradice que sea primitivo.

Denotaremos las aristas en H por h_1, \dots, h_l ; las aristas de G_2 que no están contenidas en H por h_{l+1}, \dots, h_n ; por último, las aristas de G_1 que no están contenidas en H por e_1, \dots, e_m . Con esta notación, podemos escribir cada camino cerrado primitivo par, ω , como

$$\omega = (p_1, h_{j_{1,1}}, \dots, h_{j_{1,s_1}}, p_2, h_{j_{2,1}}, \dots, h_{j_{2,s_2}}, \dots, p_u, h_{j_{u,1}}, \dots, h_{j_{u,s_u}}), \quad (3.7)$$

donde para cada $1 \leq k \leq u$, p_k es de la forma $(e_{i_{1,1}}, \dots, e_{i_{1,r_i}})$ y es un subcamino cuyas aristas están solo en G_1 y empieza en el punto final de H y acaba en el punto inicial de H , o viceversa.

Para probar la contención hacemos inducción sobre u . Si $u = 0$, entonces ω es un camino que está contenido en G_1 o en G_2 , ya que u es “la cantidad de veces que el camino ω pasa de G_1 a G_2 ”. Por tanto, f_ω está en I_{G_1} o en I_{G_2} , luego se da la contención.

Suponemos ahora $u > 0$ y que el resultado es cierto para $u - 1$. Sea ω como en (3.7). Para simplificar notaciones escribimos $p_1 = (e_1, \dots, e_r)$ y escribimos ω como $\omega = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{2m})$, donde

$$(e_{r+1}, \dots, e_{2m}) = (h_{j_{1,1}}, \dots, h_{j_{1,s_1}}, p_2, h_{j_{2,1}}, \dots, h_{j_{2,s_2}}, \dots, p_u, h_{j_{u,1}}, \dots, h_{j_{u,s_u}}).$$

Denotamos por (h_1, \dots, h_l) las aristas de H ordenadas de forma que h_1 comparta un punto con e_r (y, por tanto, h_l comparte un punto con e_1). Vamos a intentar descomponer el bimonomio f_ω como combinación lineal de los binomios f_α y $f_{\omega'}$, correspondientes a los caminos cerrados $\alpha = (e_1, \dots, e_r, h_1, \dots, h_l)$ y $\omega' = (e_{r+1}, \dots, e_{2m}, h_l, \dots, h_1)$. Notar que α es par ya que G_1 es bipartito y, por tanto, también lo será ω' . Definimos

$$\begin{aligned} E_1 &= \prod_{1 \leq k \leq r, k \text{ par}} e_k, & E_2 &= \prod_{r+1 \leq k \leq 2m, k \text{ par}} e_k, \\ O_1 &= \prod_{1 \leq k \leq r, k \text{ impar}} e_k, & O_2 &= \prod_{r+1 \leq k \leq 2m, k \text{ impar}} e_k, \\ F_1 &= \prod_{k \text{ impar}} h_k, & F_2 &= \prod_{k \text{ par}} h_k. \end{aligned}$$

Si recordamos la fórmula (2.3), tenemos que $f_\omega = O_1 O_2 - E_1 E_2$.

Si l es par (entonces r también lo es), se tiene que $f_\alpha = O_1 F_1 - E_1 F_2 \in I_{G_1}$ y que $f_{\omega'} = O_2 F_2 - E_2 F_1$. También, como l es par, entonces $f = F_1$ o $f = F_2$, dependiendo de como se hayan ordenado para que coincidan con p_1 . Si suponemos que $f = F_1$, escribimos

$$f \cdot f_\omega = F_1 \cdot f_\omega = O_2 f_\alpha + E_1 f_{\omega'}.$$

Si en cambio $f = F_2$, escribimos

$$f \cdot f_\omega = F_2 \cdot f_\omega = E_2 f_\alpha + O_1 f_{\omega'}.$$

Si l es impar (entonces r también lo es), se tiene que $f_\alpha = O_1 F_2 - E_1 F_1 \in I_{G_1}$ y $f_{\omega'} = E_2 F_2 - O_2 F_1$. Además, $f = F_2$ da igual la ordenación que hayamos elegido. Por tanto, podemos escribir

$$f \cdot f_\omega = F_2 \cdot f_\omega = O_2 f_\alpha - E_2 f_{\omega'}.$$

Ahora, ω' es un camino cerrado par que admite una expresión como (3.7) pero con $u - 1$ subcaminos p'_1, \dots, p'_{u-1} (de hecho, son p_2, \dots, p_u). Por hipótesis de inducción, $f_{\omega'} \in (I_{G_1} + I_{G_2}) : f^\infty$ y en todos los casos $f_\alpha \in I_{G_1}$, luego acabamos de probar que $f_\omega \in (I_{G_1} + I_{G_2}) : f^\infty$. \square

Veamos un ejemplo en el que si eliminamos la condición de que al menos un grafo sea bipartito, el resultado no es cierto.

Ejemplo 3.2.14. Si tenemos un triángulo como en el ejemplo 2.2.3, recordamos que su matriz de indicencia es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $\ker(A) = \{0\}$ y, por tanto, I_G es el ideal nulo. Ahora, supongamos que fusionamos dos triángulos a lo largo de uno de sus lados como hicimos en el ejemplo 3.2.9. Esto nos permite encontrar un camino par cerrado en el grafo fusión, lo que nos da un generador no nulo del grafo fusión de dos triángulos. Por tanto, el ideal tórico asociado no es nulo, no cumpliéndose la fórmula del teorema 3.2.13.

Como caso particular del teorema 3.2.13 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.15. Sea G un grafo y suponemos que G_1 y G_2 forman una escisión de G a través de una arista. Si G_1 es bipartito, entonces $I_G = I_{G_1} + I_{G_2}$.

Veamos un ejemplo en el que si eliminamos la condición de que formen una escisión a través de una sola arista, el corolario no es cierto.

Ejemplo 3.2.16. Sea G el grafo siguiente

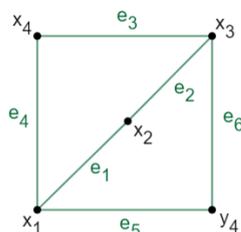


Figura 3.6: Grafo para el ejemplo.

Los subconjuntos $W_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y $W_2 = \{x_1, x_2, x_3, y_4\}$ de $V(G)$ inducen unos grafos G_1, G_2 que forman una escisión de G a través de la diagonal $H \simeq P_2$. Como I_G, I_{G_1} e I_{G_2} están generados por caminos pares cerrados primitivos, se tiene que

$$\begin{aligned} I_G &= \langle e_1e_3 - e_2e_4, e_1e_6 - e_2e_5, e_5e_3 - e_6e_4 \rangle, \\ I_{G_1} &= \langle e_1e_3 - e_2e_4 \rangle, \\ I_{G_2} &= \langle e_1e_6 - e_2e_5 \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, $I_G \neq I_{G_1} + I_{G_2}$ y no se cumple el corolario. En cambio, si se cumple el teorema 3.2.13. La única arista de H con índice par es e_2 y $I_G = (I_{G_1} + I_{G_2}) : e_2^\infty$ ya que

$$e_2(e_5e_3 - e_6e_4) = e_6(e_1e_3 - e_2e_4) - e_3(e_1e_6 - e_2e_5).$$

Teorema 3.2.17. *Sea G un grafo y suponemos que G_1 y G_2 forman una escisión de G a través de una arista e . Si G_1 es bipartito, entonces para todos $i, j \geq 0$,*

$$\beta_{i,j}(K[E_G]/I_G) = \sum_{\substack{i_1+i_2=i \\ j_1+j_2=j}} \beta_{i_1,j_1}(K[E(G_1)]/I_{G_1})\beta_{i_2,j_2}(K[E(G_2)]/I_{G_2}).$$

Demostración. Ya hemos visto que las operaciones de fusión y escisión de grafos son operaciones inversas. Es decir, G se puede obtener como la unión disjunta de G_1 y G_2 y después identificando la arista correspondiente de G_1 con la de G_2 . Siendo más precisos, para $i = 1, 2$ sea $G'_i = (V(G'_i), E(G'_i))$ un grafo isomorfo a G_i y tal que $V(G'_1) \cap V(G'_2) = \emptyset$. Sea G' el grafo con vértices $V(G'_1) \cup V(G'_2)$ y aristas $E(G'_1) \cup E(G'_2)$. Sean $e'_i \in E(G'_i)$ las aristas que vamos a pegar.

Si consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} K[E(G')] &\rightarrow K[E(G)] \\ e' &\rightarrow e, \end{aligned}$$

donde, si e' es una arista de G' , es decir, es una arista de G'_1 o G'_2 , entonces e es la arista que da el isomorfismo de grafos entre G'_i y G_i ($i = 1$ o $i = 2$ en función de si e' es una arista de G'_1 o de G'_2).

El núcleo de esta aplicación es $(e'_1 - e'_2)$, lo que nos da el isomorfismo $K[E(G')]/(e'_1 - e'_2) \simeq K[E(G)]$, es decir, algebraicamente, el proceso de pegado de e'_1 con e'_2 corresponde con el cociente $K[E(G')]/(e'_1 - e'_2)$.

Ahora, si consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} K[E(G')] &\rightarrow K[E(G)]/I_G \\ e' &\rightarrow e + I_G, \end{aligned}$$

donde e' y e tienen el mismo significado que antes, se tiene que, gracias al corolario 3.2.15, su núcleo es $I_{G'} + (e'_1 - e'_2)$. Por tanto, también tenemos el isomorfismo $K[E(G')]/(I_{G'} + (e'_1 - e'_2)) \simeq K[E(G)]/I_G$.

Como $I_{G'}$ es un ideal primo por ser tórico, se tiene que $K[E(G')]/I_{G'}$ es un dominio y, por tanto, todos sus elementos son regulares. Como consecuencia de [12, Chap. 1, Coro. 20.4] se tiene que los números de Betti de $K[E(G')]/I_{G'}$ y de $K[E(G')]/(I_{G'} + (e'_1 - e'_2))$ son iguales.

Ahora, como $I_{G'} = I_{G'_1} + I_{G'_2}$ y razonando de la misma manera que en el teorema 3.1.3 y aplicando el lema 3.1.2, tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_{i,j}(K[E_G]/I_G) &= \beta_{i,j}(K[E(G')]/(I_{G'} + (e'_1 - e'_2))) = \beta_{i,j}(K[E(G')]/I_{G'}) = \\ &= \sum_{\substack{i_1+i_2=i \\ j_1+j_2=j}} \beta_{i_1,j_1}(K[E(G'_1)]/I_{G'_1})\beta_{i_2,j_2}(K[E(G'_2)]/I_{G'_2}) = \\ &= \sum_{\substack{i_1+i_2=i \\ j_1+j_2=j}} \beta_{i_1,j_1}(K[E(G_1)]/I_{G_1})\beta_{i_2,j_2}(K[E(G_2)]/I_{G_2}). \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se debe a que $K[E(G'_i)]/I_{G'_i} \simeq K[E(G_i)]/I_{G_i}$. \square

Bibliografía

- [1] BIASE, F. D., AND URBANKE, R. An algorithm to calculate the kernel of certain polynomial ring homomorphisms. *Experimental Mathematics* 4, 3 (1995), 227–234.
- [2] BIGATTI, A., LA SCALA, R., AND ROBBIANO, L. Computing toric ideals. *Journal of Symbolic Computation* 27, 4 (1999), 351–365.
- [3] BRUNS, WINFRIED, HERZOG, AND JÜRGEN, H. *Cohen-Macaulay Rings*, 2 ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1998.
- [4] COX, D. A., LITTLE, J., AND O’SHEA, D. *Using Algebraic Geometry*, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, 185. Springer New York, 2005.
- [5] DECKER, W., GREUEL, G.-M., PFISTER, G., AND SCHÖNEMANN, H. SINGULAR 4-2-1 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de>, 2021.
- [6] FAVACCHIO, G., HOFSCHEIER, J., KEIPER, G., AND TUYL, A. V. Splittings of toric ideals. *Journal of Algebra* 574 (may 2021), 409–433.
- [7] HERZOG, J., HIBI, T., AND OHSUGI, H. *Binomial Ideals*. Springer International Publishing, 2018.
- [8] JACQUES, S., AND KATZMAN, M. The betti numbers of forests, 2005.
- [9] MAC LANE, S. *Homology*, 1st ed. 1995. ed. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [10] MATILLA MAYO, S. *Resultantes y teoría de la eliminación*. Univesidad de Valladolid, 2021.
- [11] NORTHCOTT. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge University Press, 1960.

- [12] PEEVA, I. *Graded syzygies*. Algebra and applications; 14. Springer, London, 2011.
- [13] VILLARREAL, R. H. *Monomial algebras*. Monographs And Research Notes In Mathematics. 2015.