



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Matemáticas

**LA EXPRESIÓN EXPONENCIAL DE LAS FUNCIONES GENERATRICES Y SU
COMBINATORIA.**

Autora: Raquel Melgar Fernández

Tutor: Antonio Campillo López

Año: 2022-2023

Índice general

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introducción | 5 |
| 1. Definiciones y resultados previos. | 7 |
| 1.1. Poliedros, conos y polaridad. | 7 |
| 1.2. Resultados sobre descomposición de poliedros. | 11 |
| 2. Dos evaluaciones para poliedros. Presentación del cambio exponencial. | 13 |
| 2.1. Una evaluación para contar los puntos reticulares de un poliedro. | 13 |
| 2.2. Una evaluación para obtener el volumen (generalizado) de un poliedro. | 17 |
| 2.3. El cambio exponencial en la evaluación Ψ | 21 |
| 3. Una fórmula para calcular el número de puntos reticulares en un politopo. | 29 |
| 3.1. Una evaluación para conos racionales. | 30 |
| 3.2. La fórmula de Berline-Vergne. | 41 |
| 4. El cambio exponencial para semigrupos numéricos. | 45 |
| 4.1. Funciones generatrices de semigrupos numéricos. | 45 |
| 4.2. El cambio exponencial en funciones generatrices de semigrupos numéricos. | 50 |
| 4.3. Series de Poincaré de semigrupos numéricos. | 53 |
| 4.4. Perspectivas y conclusiones. | 56 |
| A. Función en SageMath para calcular el polinomio de huecos de un semigrupo con 3 generadores. | 59 |
| Bibliografía | 62 |

Introducción

Las funciones generatrices se estudian habitualmente como series formales de potencias cuyos coeficientes codifican una cierta información discreta: una cierta sucesión, los elementos de un semigrupo, los números con coordenadas enteras contenidos en un poliedro...

En palabras de Herbert S. Wilf [12]: “Una función generatriz es una cuerda de la ropa en la que tendemos una sucesión de números para exhibirla”. En este trabajo se estudiará una expresión exponencial para ciertas funciones generatrices que resulta de utilidad en los cálculos.

El presente trabajo surge a raíz de mi Trabajo Fin de Grado [10] en el que, siguiendo el trabajo de M.Brion [6] y A.Barvinok [1], se estudian a fondo dos célebres evaluaciones de poliedros: una evaluación para calcular el número de puntos reticulares de un poliedro reticular y una evaluación para calcular el volumen generalizado de un poliedro.

En la primera de estas evaluaciones surge de manera natural la idea de hacer el cambio de variables $x \mapsto e^y$ para facilitar el cálculo del número de puntos reticulares contenidos en un poliedro. Uno de los objetivos de este trabajo es analizar este cambio de variable y observar qué sucede al realizarlo en la función generatriz de un semigrupo.

El primer capítulo introduce las definiciones y resultados sobre teoría de poliedros que serán necesarios en los siguientes capítulos.

El segundo capítulo presenta las dos evaluaciones antes mencionadas y estudia las propiedades del cambio exponencial $x \mapsto e^y$ en la primera de ellas. Se aportan varios ejemplos explícitos de cálculo tras dicho cambio. Estos cálculos están relacionados con los Polinomios de Todd.

El tercer capítulo presenta un resultado reciente de gran relevancia en la teoría de poliedros: la fórmula de Berline-Vergne. Estas dos matemáticas francesas proporcionan una nueva fórmula para expresar

$$\sum_{x \in P \cap \mathbb{Z}^d} h(x)$$

donde P es un politopo racional de dimensión d y $h(x)$ un polinomio, como la suma extendida a las caras F de P de el volumen de F por una cierta evaluación relacionada con F . Se explicitará esta nueva evaluación y se demostrará la fórmula para el caso $h(x) = 1$. También se verá como esta fórmula generaliza a dimensión superior la conocida fórmula de Pick.

El cuarto y último capítulo aborda otro problema combinatorio como es el de determinar los huecos de un semigrupo numérico. Se plantea cómo aprovechar el cambio exponencial que ya

se ha planteado para la función generatriz de un semigrupo numérico. Se obtiene una solución concluyente para esta cuestión a través de las sumas de Newton y se implementa una función en SageMath para el caso de semigrupos generados por tres elementos.

Capítulo 1

Definiciones y resultados previos.

En este capítulo se introducen las definiciones y resultados relativos a la teoría de poliedros que serán necesarios en los capítulos 2 y 3. En [10] y [1] aparecen las definiciones expuestas con más detalle y aparecen demostrados los resultados que en este capítulo solo se enuncian.

Se considerará el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^d$ con $d \geq 0$.

1.1. Poliedros, conos y polaridad.

Definición 1.1. Un *poliedro* $P \subset V$ es un conjunto definido por una cantidad finita de inecuaciones lineales:

$$P := \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i, i \in I\} \quad (1.1)$$

Para un conjunto I finito, donde $\ell_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones lineales y α_i son números reales.

Es decir, un poliedro es un subconjunto que se puede escribir como la intersección de un conjunto finito de semiespacios cerrados. Diremos que un poliedro es *racional* si en la expresión 1.1, se pueden escoger α_i y los coeficientes de ℓ_i racionales. Si un poliedro es racional entonces en los hiperplanos que delimitan P hay puntos de \mathbb{Z}^d .

Observamos que un poliedro es un conjunto convexo y cerrado por definición. Si un poliedro es acotado diremos que es un *politopo*.

La dimensión de un poliedro P es la dimensión del menor subespacio afín que lo contiene.

Definición 1.2. Sea $P \subset V$ un poliedro y sea $v \in P$. Decimos que v es un *vértice* de P si cuando se tienen $v_1, v_2 \in P$ tales que $v = \frac{v_1+v_2}{2}$ entonces necesariamente $v_1 = v_2 = v$. Es decir, v es un vértice si no existen v_1 y v_2 puntos distintos de P tales que v sea su punto medio.

Definición 1.3. Sea $F \subset P$ decimos que F es una *cara* de P si existe $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función lineal y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\ell(x) \leq \alpha$ para todo $x \in P$ y

$$F = \{x \in P : \ell(x) = \alpha\}.$$

En particular dado un poliedro P , el propio P es una cara de P y los vértices de P son caras de P .

Definición 1.4. Sea $A \subset V$ un conjunto. Entonces la *función característica de A* , $\mathbb{1}_A$ es la función $\mathbb{1}_A : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \quad (1.2)$$

Denotaremos $\mathcal{P}(V)$, el espacio vectorial sobre \mathbb{R} generado por las funciones características de los poliedros de V , $P \subset V$. Esto es, es el mínimo espacio vectorial que contiene las funciones características de los poliedros $P \subset V$. Entonces los elementos de $\mathcal{P}(V)$ son las combinaciones lineales finitas con coeficientes en \mathbb{R} de funciones características de poliedros. Es decir, si $f \in \mathcal{P}(V)$, entonces f es de la forma:

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{P_i}$$

donde $P_i \subset V$ son una cantidad finita de poliedros y α_i son números reales.

Análogamente se define $\mathcal{P}_b(V)$ el espacio vectorial sobre \mathbb{R} de las funciones características de politopos.

Definición 1.5. Una *evaluación* de $\mathcal{P}(V)$ o $\mathcal{P}_b(V)$ es una transformación lineal

$$T : \mathcal{P}(V), \mathcal{P}_b(V) \rightarrow W$$

donde W es un espacio vectorial.

Hay otras evaluaciones, definidas de la misma forma, con salida en otros espacios vectoriales. En la memoria se considerará alguna de estas también.

Una característica fundamental de las evaluaciones es la siguiente: la evaluación de (la función característica de) la unión de dos poliedros es la suma de las evaluaciones de (las funciones características de) de dos poliedros menos la evaluación de (la función característica de) la intersección. Es decir, si P y Q son poliedros y T es una evaluación se tiene:

$$T(\mathbb{1}_{P \cup Q}) = T(\mathbb{1}_P) + T(\mathbb{1}_Q) - T(\mathbb{1}_{P \cap Q}).$$

Resultado 1.1. *Un poliedro no vacío contiene un vértice si y solo si no contiene ninguna recta.*

A continuación se define un caso particular de poliedro que será de gran importancia en el trabajo.

Definición 1.6. Un poliedro $K \subset V$ es un *cono* si $0 \in K$ y para cada $x \in K$ y cada $\lambda \geq 0$ se tiene que $\lambda x \in K$.

El único posible vértice de un cono es 0. Por el resultado 1.1 se tiene que 0 es un vértice del cono si y solo si el cono no contiene rectas. Un cono que no contiene rectas recibe el nombre de *cono punteado*.

Definición 1.7. Un punto $v \in V$ se dice que es *combinación cónica* de los puntos $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ si

$$v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \quad \text{donde } \lambda_i \geq 0.$$

El conjunto de combinaciones cónicas de un conjunto dado $A \subset V$ recibe el nombre de *combinación cónica* de A y se denota $co(A)$ y es el mínimo cono que contiene a los puntos de A .

Decimos que un cono $K \subset V$ es *simplicial* si puede ser escrito como $K = co(u_1, u_2, \dots, u_d)$ donde $\{u_1, u_2, \dots, u_d\}$ es una base de V . Para $d = 2$ todos los conos son simpliciales.

Definición 1.8. Sean $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{Z}^d$ vectores linealmente independientes y sea

$$K = co(u_1, \dots, u_k)$$

el mínimo cono que los contiene. Decimos que el cono K es *regular* si el paralelepípedo semiabierto

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i : 0 \leq \alpha_i < 1 \text{ para } i = 1, \dots, k \right\}$$

no contiene puntos reticulares que no sean el origen. Este paralelepípedo recibe el nombre de paralelepípedo fundamental de K .

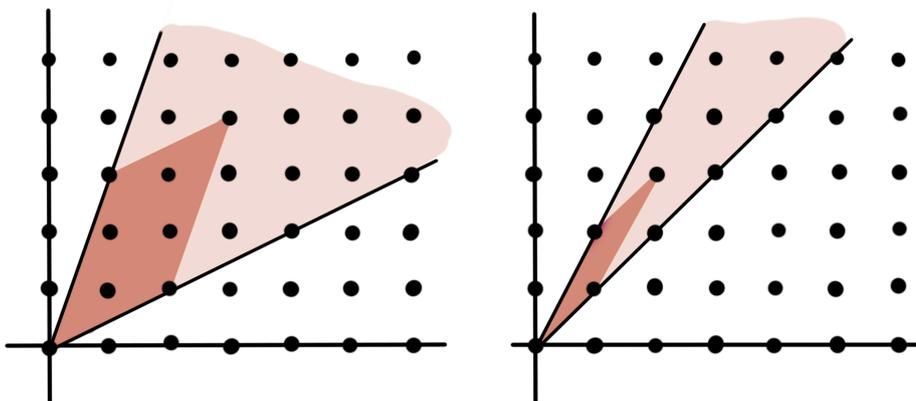


Figura 1.1: Conos y sus paralelepípedos fundamentales.

Dado un poliedro $P \subset \mathbb{R}^d$ definimos a continuación varios conos asociados a P .

Definición 1.9. Sea $P \subset V$ un poliedro no vacío que no contiene ninguna recta. Definimos $K = K_P$ como:

$$K_P := \{u \in V : x + u\tau \in P \text{ para algún } x \in P \text{ y para todo } \tau \geq 0\}.$$

Es decir, el cono formado por las direcciones de las semirrectas contenidas en P . $K \subset P$ recibe el nombre de cono de recesión de P .

Definición 1.10. Sea $P \subset V$ un poliedro no vacío y sea $v \in P$ un punto del poliedro. Definimos el *cono tangente* de P en v como:

$$t\text{cono}(P, v) := \{v + y : v + \epsilon y \in P \text{ para algún } \epsilon > 0\}.$$

Definimos el *cono de direcciones factibles* en v como

$$f\text{cono}(P, v) := \{y \in V : v + \epsilon y \in P \text{ para algún } \epsilon > 0\}.$$

Entonces se tiene que $t\text{cono}(P, v) = v + f\text{cono}(P, v)$.

Observación 1.1. El cono tangente, al no contener a 0, no es un cono como los que hemos definido. Sin embargo, es el trasladado del cono de direcciones factibles, que sí es un cono tal y como lo hemos definido.

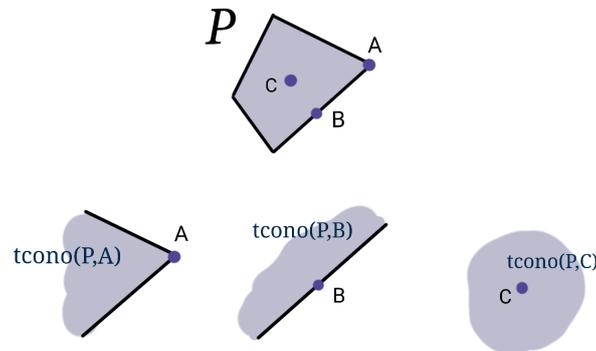


Figura 1.2: Poliedro y sus conos tangentes en los vértices

Consideramos en $V = \mathbb{R}^d$ el producto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 1.11. Sea $A \subset V$ un conjunto no vacío. Definimos el *conjunto polar* A° de A como:

$$A^\circ := \{x \in V : \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ para todo } y \in A\}.$$

Si K es un cono, entonces se tiene que

$$K^\circ = \{x \in V : \langle x, y \rangle \leq 0 \text{ para todo } y \in K\}$$

que también es un cono.

Sea $\mathcal{C}(V)$ el espacio vectorial engendrado por las funciones características de los conjuntos cerrados y convexos.

Resultado 1.2. *Existe una única transformación lineal $\mathcal{D} : \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathcal{C}(V)$, que por tanto es una evaluación, de manera que $\mathcal{D}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{A^\circ}$ para todo conjunto cerrado convexo y no vacío A . Denotamos a esta evaluación la evaluación polar.*

Resultado 1.3. *Y se tiene que si $P \subset V$ es un poliedro, entonces $P^\circ \subset V$ es también un poliedro y se tiene que si P contiene alguna recta, entonces P° está contenido en un hiperplano de V y viceversa, si P está contenido en un hiperplano, entonces P° contiene alguna recta.*

1.2. Resultados sobre descomposición de poliedros.

Resultado 1.4. *Sea $P \in V$ un poliedro y sea $Vert(P)$ su conjunto de vértices. Entonces:*

$$\mathbb{1}_P \equiv \sum_{v \in Vert(P)} \mathbb{1}_{t_{cono}(P,v)} \text{ módulo poliedros que contienen rectas.}$$

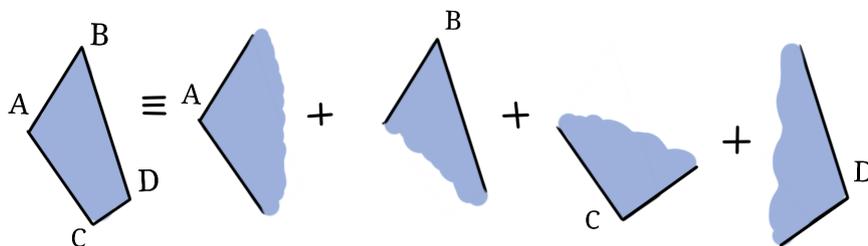


Figura 1.3: Descomposición de un poliedro como suma de sus conos tangentes en los vértices.

Resultado 1.5. *Sea $P \subset V$ un politopo no vacío y sea $Vert(P)$ su conjunto de vértices. Entonces:*

$$\sum_{v \in Vert(P)} \mathbb{1}_{f_{cono}(P,v)} \equiv \mathbb{1}_0 \text{ módulo poliedros que contienen rectas.} \quad (1.3)$$

Resultado 1.6. *Todo cono K puede ser escrito como*

$$\mathbb{1}_K = \sum_{i \in I} \pm \mathbb{1}_{K_i}$$

donde K_i es un cono simplicial para cada i en el conjunto finito I .

Resultado 1.7. *Todo cono K puede ser escrito como*

$$\mathbb{1}_K = \sum_{i \in I} \pm \mathbb{1}_{K_i}$$

donde K_i es un cono regular para cada i en el conjunto finito I .

Resultado 1.8. *Sea K un cono d -dimensional racional, entonces K se puede escribir como suma de conos simpliciales racionales de dimensión d .*

Demostración. Consideramos el cono polar K° . Utilizando la descomposición del resultado anterior, se tiene

$$\mathbb{1}_{K^\circ} = \sum_{i \in I} \pm \mathbb{1}_{K_i}$$

donde los conos K_i son regulares. En esta descomposición hay conos de dimensiones menores que d y entonces escribimos

$$\mathbb{1}_{K^\circ} = \sum_{i \in J} \pm \mathbb{1}_{K_i} \quad \text{módulo conos de dimensión menor que } d$$

donde K_i es regular racional y de dimensión d para todo $i \in J$. Si a esta relación le aplicamos la evaluación polar del resultado ?? se obtiene la relación

$$\mathbb{1}_K = \sum_{i \in J} \pm \mathbb{1}_{K_i^\circ} \quad \text{módulo conos que contienen rectas}$$

y como se tiene que si K_i es un cono racional regular entonces K_i° es un cono racional regular, hemos conseguido la descomposición deseada. \square

Capítulo 2

Dos evaluaciones para poliedros. Presentación del cambio exponencial.

En este capítulo se presentarán dos evaluaciones importantes en la teoría de poliedros. La primera de ellas da lugar a la fórmula de Brion para obtener la lista de puntos reticulares contenidos en un poliedro $P \subset \mathbb{R}^d$. La segunda evaluación es una generalización del volumen de un poliedro; a cada poliedro $P \subset \mathbb{R}^d$ le asocia una función meromorfa Φ_P de manera que, si P es acotado, es decir, es un politopo, $\Phi_P(0)$ coincide con el volumen usual de P .

Los teoremas que presentan estas dos evaluaciones están demostrados en [1] y [10]. El primero de ellos; la fórmula de Brion, se ha estudiado y demostrado en el Grado de Matemáticas. En este trabajo es necesario partir de estos dos resultados para llegar a los dos objetos centrales en el trabajo: la sustitución exponencial y la fórmula de Berline-Vergne.

A continuación se presentará la sustitución exponencial en la primera de las evaluaciones y cómo puede utilizarse para obtener el número de puntos reticulares contenidos en P .

2.1. Una evaluación para contar los puntos reticulares de un poliedro.

Dado un poliedro racional $P \subset \mathbb{R}^d$, podemos considerar

$$S_P(x) = \sum_{m \in P \cap \mathbb{Z}^d} x^m \quad (2.1)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $m = (m_1, m_2, \dots, m_d)$ y x^m representa $x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_d^{m_d}$.

Esta serie formal que contiene la información de los puntos de \mathbb{Z}^d que están contenidos en el poliedro P , la llamaremos *serie indicatriz reticular de P* . Si P es un politopo, esta serie será un polinomio que llamaremos *polinomio indicador reticular de P* . Sin embargo, también puede suceder que P no esté acotado y que en 2.1 haya infinitos sumandos. En cualquier caso,

el siguiente teorema afirma que vamos a poder escribir esta expresión de forma más compacta como una función racional. De hecho, esta función racional, estará en el espacio vectorial sobre \mathbb{Q} engendrado por las funciones del tipo

$$\frac{x^v}{(1 - x^{u_1}) \cdots (1 - x^{u_d})}$$

donde $v \in \mathbb{Z}^d$ y $u_i \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ para $i = 1, 2, \dots, d$. Denotaremos como $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^d)$ a este espacio vectorial y denotaremos $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^d)$ el espacio vectorial sobre \mathbb{Q} engendrado por las funciones características de los poliedros racionales $P \subset \mathbb{R}^d$ cuyos vértices son puntos reticulares. $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^d)$ es un subespacio vectorial del cuerpo de funciones racionales $\mathbb{Q}(x) = \mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_d)$ y $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^d)$ es un subespacio vectorial del espacio de aplicaciones $\mathbb{Q}^d \rightarrow \mathbb{Q}$. Consideraremos todos estos espacios vectoriales sobre \mathbb{Q} .

Teorema 2.1. [1] *Existe una evaluación*

$$\Psi : \mathcal{P}(\mathbb{Q}^d) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathbb{Q}^d)$$

que a la función característica de cada poliedro racional $P \subset \mathbb{R}^d$ con vértices reticulares le asocia una función $\Psi(\mathbb{1}_P, \cdot) \in \mathcal{R}(\mathbb{Q}^d)$ que usualmente denotaremos por $\Psi_P(x)$ que verifica las siguientes propiedades:

1.

$$\Psi_P(x) = \sum_{m \in P \cap \mathbb{Z}^d} x^m$$

para cada $x \in \mathbb{R}^d$ para el que la serie converge absolutamente.

Esto es, si la serie indicatriz reticular converge absolutamente para algún $x \in \mathbb{R}^d$, lo hace hacia la función $\Psi_P(x)$.

2. Si $m + P$ es una traslación de P por un vector $m \in \mathbb{Z}^d$, entonces se tiene que

$$\Psi_{m+P}(x) = x^m \Psi_P(x).$$

3. Si P contiene alguna recta, entonces $\Psi_P(x) \equiv 0$.

Nota 2.1. Este teorema también se puede probar sin necesidad de considerar la convergencia de series, sino simplemente tratando con series formales. Para ello se considera el módulo $SL = \mathbb{Q}[[x, x^{-1}]]$ de series de Laurent sobre el anillo de polinomios de Laurent $PL = \mathbb{Q}[x, x^{-1}]$

con $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$. Se tienen las operaciones de suma de elementos de SL (y en particular de PL) y la operación de producto de un elemento de PL por uno de SL . No se tiene la operación de producto de dos elementos de SL . Con estas operaciones, SL es un módulo sobre el anillo conmutativo y con unidad PL .

El cuerpo de funciones racionales $\mathbb{Q}(x)$, que es en particular un \mathbb{Q} -espacio vectorial, es también un módulo sobre PL ya que PL se puede ver como un subanillo de $\mathbb{Q}(x)$. Para escribir el teorema en términos de series formales se considera el submódulo $RL \subset SL$ de series de Laurent racionales. Estas son las series de Laurent s para las que existen dos polinomios $p, q \in \mathbb{Q}[x]$ con $q \neq 0$ de forma que $q \cdot s = p$.

Está bien definida entonces la aplicación $\mathcal{F} : RL \rightarrow \mathbb{Q}(x)$ definida por $\mathcal{F}(s) = \frac{p}{q}$ y es un homomorfismo de PL -módulos.

Formulado en estos términos, el teorema 2.1 afirma que las series indicatrices reticulares $S_P(x) \in SL$ son elementos de RL y entonces para cada poliedro P ,

$$\mathcal{F}(S_P(x)) = \Psi_P(x).$$

Además, si P contiene alguna recta, entonces S_P está en el núcleo de \mathcal{F} . Naturalmente, las funciones racionales $\mathcal{F}(S_P)$ pertenecen al subespacio $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^d) \subset \mathbb{Q}(x)$.

Dado un poliedro P , tiene la relación (resultado 1.4):

$$\mathbb{1}_P \equiv \sum_{v \in \text{Vert}(P)} \mathbb{1}_{\text{tcono}(P,v)} \quad \text{módulo poliedros que contienen rectas.} \quad (2.2)$$

Si a esta expresión le aplicamos la evaluación Ψ , teniendo en cuenta que es lineal y que envía a 0 los poliedros que contienen rectas se obtiene la siguiente expresión:

$$\Psi_P(x) = \sum_{v \in \text{Vert}(P)} \Psi_{\text{tcono}(P,v)}(x) \stackrel{(2)}{=} \sum_{v \in \text{Vert}(P)} x^v \cdot \Psi_{\text{fcono}(P,v)}(x).$$

Es decir, podemos obtener la serie indicatriz reticular de un poliedro racional P sumando las funciones racionales asociadas a los conos tangentes en los vértices de P . En particular, cuando P sea un politopo, podremos obtener su polinomio indicador reticular como suma de las funciones racionales asociadas a los conos tangentes en los vértices de P .

En [4] se explicita cómo se obtienen estas funciones racionales para los conos tangentes en los vértices. La idea es que cada uno de estos conos se puede descomponer como suma de conos simpliciales (resultado 1.6), esto es, conos tales que su dimensión coincida con su número de aristas. Para un cono simplicial $K = \text{co}(u_1, u_2, \dots, u_d)$, la función racional queda

$$\sum_{m \in K \cap \mathbb{Z}^d} x^m = \frac{p(x)}{(1 - x^{u_1}) \cdots (1 - x^{u_d})} \quad (2.3)$$

donde $p(x)$ es el polinomio indicador reticular del paralelepípedo fundamental D de K . Es decir, polinomio indicador reticular de la región:

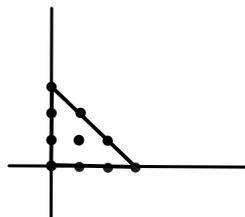
$$D = \left\{ \sum_{i=1}^d \alpha_i u_i : 0 \leq \alpha_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, d \right\}$$

Frecuentemente denotaremos $h_v(x) := \Psi_{f_{\text{cono}(P,v)}}(x)$.

Un ejemplo 2-dimensional de esta curiosa simplificación es el siguiente.

Ejemplo 2.1. Se considera en \mathbb{R}^2 el triángulo T que tiene como vértices $(0,0)$, $(3,0)$ y $(0,3)$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{m \in T \cap \mathbb{Z}^2} x^m &= h_{(0,0)}(x_1, x_2) + x_1^3 h_{(3,0)}(x_1, x_2) + x_2^3 h_{(0,3)}(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} + \frac{x_1^3}{(1-x_1^{-1})(1-x_1^{-1}x_2)} + \frac{x_2^3}{(1-x_2^{-1})(1-x_1x_2^{-1})} \\ &= 1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3 + x_2(1 + x_1 + x_1^2) + x_2^2(1 + x_1) + x_2^3 \end{aligned} \tag{2.4}$$



La suma de funciones racionales se simplifica en un polinomio en el que los exponentes son los puntos reticulares contenidos en T .

Observación 2.1. En particular se tiene que si P es un politopo, entonces $\Phi_P(y)$ es un polinomio y que

$$\#P \cap \mathbb{Z}^d = \Psi_P(1).$$

En el ejemplo que acabamos de ver se ha obtenido que $\#P \cap \mathbb{Z}^d = 10$.

2.2. Una evaluación para obtener el volumen (generalizado) de un poliedro.

Se considera en \mathbb{R}^d el producto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dado un poliedro $P \subset \mathbb{R}^d$, usualmente se define la medida de Lebesgue de P como

$$\int_V \mathbb{1}_P(\xi) d\xi = \int_P d\xi.$$

De aquí en adelante nos referiremos a la medida de Lebesgue de un poliedro como “volumen” independientemente de cual sea el valor de d . A priori, solo tiene sentido definir así el volumen en el caso de que P sea un politopo y en ese caso se puede extender esta noción de volumen a $\mathcal{P}_b(\mathbb{R}^d)$ por linealidad. El siguiente teorema generaliza esta idea de volumen para un poliedro P no necesariamente acotado.

Denotaremos por $\mathcal{RM}(\mathbb{R}^d)$ el espacio vectorial sobre \mathbb{R} engendrado por las funciones del tipo

$$f(y) = e^{\langle y, v \rangle} \prod_{i=1}^d \frac{1}{\langle -y, x_i \rangle} \text{ con } y \in \mathbb{R}^d$$

donde $v \in \mathbb{R}^d$ y u_1, u_2, \dots, u_d es una base de \mathbb{R}^d . El espacio vectorial $\mathcal{RM}(\mathbb{R}^d)$ es un subespacio del cuerpo de funciones meromorfas reales $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{M}(x_1, x_2, \dots, x_d)$ visto como espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Teorema 2.2. [10]

Existe una evaluación

$$\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{RM}(\mathbb{R}^d)$$

que verifica lo siguiente:

1. *Sea $P \subset \mathbb{R}^d$ un poliedro no vacío que no contiene rectas y sea $K \subset \mathbb{R}^d$ su cono de recesión. Entonces, para cada $y \in \text{int}K^\circ$, la integral*

$$\int_P e^{\langle \xi, y \rangle} d\xi$$

converge absolutamente y uniformemente en los conjuntos compactos de $\text{int}K^\circ$ hacia la función

$$\Phi(\mathbb{1}_P, \cdot) \in \mathcal{RM}(\mathbb{R}^d)$$

que usualmente denotaremos por $\Phi_P(y)$.

2. Si P contiene alguna recta, entonces $\Phi(\mathbb{1}_P) \equiv 0$.

Entonces, en el caso de que P sea un politopo, se tendrá

$$\Phi_P(y) = \int_P e^{\langle \xi, y \rangle} d\xi$$

y en particular

$$\Phi_P(0) = \int_P 1 d\xi,$$

que es el volumen usual de P .

Nota 2.2. También en este caso se puede enunciar y demostrar el teorema en términos de series formales sin tener en cuenta la convergencia. Para ello consideramos el anillo \mathcal{H} de funciones enteras reales, por SC el anillo de series de potencias convergentes en el origen y por $SP = \mathbb{R}[[y]]$ el anillo de series de potencias formales en las variables y_1, y_2, \dots, y_d con coeficientes reales. Todos ellos son módulos sobre el anillo de polinomios $\mathbb{R}[y]$ y tras identificar cada función entera con su desarrollo en serie de Taylor en el origen se tiene la siguiente cadena de inclusiones:

$$\mathbb{R}[y] \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow SC \rightarrow SP$$

En [10] se demuestra que los elementos de SC y de \mathcal{H} se identifican con las series

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^d} a_m y^m$$

con $a_m \in \mathbb{R}$ que verifican que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sum_{|m|=k} |a_k|)^{1/k}$ no es $+\infty$ o es 0 respectivamente. Podemos localizar la cadena de inclusiones anterior en los conjuntos multiplicativamente cerrados $S_0 = \mathbb{R}[y] \setminus \{0\}$ y $S_1 = \{\text{productos finitos de polinomios lineales homogéneos}\}$ para obtener las cadenas de inclusiones:

$$\mathbb{R}(y) \rightarrow \mathcal{H}_{(0)} \rightarrow SC_{(0)} \rightarrow SP_{(0)}$$

$$\mathbb{R}[y]_{(1)} \rightarrow \mathcal{H}_{(1)} \rightarrow SC_{(1)} \rightarrow SP_{(1)}$$

También se tienen las inclusiones $\mathbb{R}[y]_{(1)} \subset \mathbb{R}(y)$, $\mathcal{H}_{(1)} \subset \mathcal{H}_{(0)}$, $SC_{(1)} \subset SC_{(0)}$ y $SP_{(1)} \subset SP_{(0)}$

Así, para escribir el teorema 2.2 en términos formales, se construye la evaluación

$$\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}_{(0)}$$

que asigna a la función característica de un poliedro el cociente $\frac{h}{q}$ donde q es un producto de formas lineales y h es una función entera que se obtiene por extensión analítica (y por tanto

necesariamente única) de la función $\int qe^{\langle y, \xi \rangle} d\xi$ que a priori solo converge en el conjunto $\text{int}P^\circ$. Además como $\text{int}P^\circ = \emptyset$ si y solo si P contiene alguna recta (resultado 1.3), se obtiene el apartado 2 del teorema: $\Phi_P(y) = 0$ cuando P contiene alguna recta. Se tiene $\Phi_P(y) \in \mathcal{H}_{(1)} \subset \mathcal{H}_{(0)}$.

Igual que antes, aplicando esta evaluación Φ a la relación 2.2 se obtiene la relación:

$$\Phi_P(y) = \sum_{v \in \text{Vert}(P)} \Phi_{t\text{cono}(P,v)}(y)$$

De hecho, haciendo un cambio de variable en la integral que define $\Phi_{t\text{cono}(P,v)}$ se puede escribir

$$\Phi_{t\text{cono}(P,v)}(y) = e^{\langle y, v \rangle} \Phi_{f\text{cono}(P,v)}(y).$$

Normalmente denotaremos $\Phi_{f\text{cono}(P,v)}(y) = f_v(y)$.

Es decir, dado un poliedro cualquiera $P \subset \mathbb{R}^d$, podemos asociarle una función meromorfa $\Phi_P(y)$ (a la que llamaremos *volumen generalizado de P*) que verifique que si P es acotado, $\Phi_P(y)$ está bien definida en 0 y $\Phi_P(0)$ coincide con el volumen usual de P . Además, la función volumen generalizado de un poliedro P se obtiene como la suma de los volúmenes generalizados de los conos tangentes en los vértices de P .

La construcción de esta evaluación para los conos tangentes se explicita en [10]. Pero como antes, nos basaremos en la descomposición de cualquier cono en conos simpliciales. Si $K = \text{co}(u_1, u_2, \dots, u_d)$ es un cono simplicial, entonces

$$\Phi_K(y) = \int_K e^{\langle y, \xi \rangle} d\xi = |u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_d| \prod_{i=1}^d \frac{1}{\langle -y, u_i \rangle}$$

donde $|u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_d|$ es el volumen del paralelepípedo generado por u_1, u_2, \dots, u_d , es decir

$$|u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_d| = \text{vol} \left\{ \sum_{i=1}^d u_i \alpha_i : 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ para } i = 1, \dots, d \right\}$$

Veamos dos ejemplos de esta curiosa simplificación para $d = 2$.

Ejemplo 2.2. Supongamos que $T \subset \mathbb{R}^2$ es de nuevo el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, 0)$ y sea $y = (y_1, y_2)$ (ver figura 2.1). Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_T e^{\langle y, \xi \rangle} d\xi &= \sum_{v \in \text{Vert}T} \Phi(\mathbb{1}_{t\text{cono}(P,v)}) = \sum_{v \in \text{Vert}T} e^{\langle y, v \rangle} f_v(y) \\ &= \frac{1}{(-y_1)(-y_2)} + \frac{e^{3y_1}}{y_2(y_2 - y_1)} + \frac{e^{3y_2}}{y_1(y_1 - y_2)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

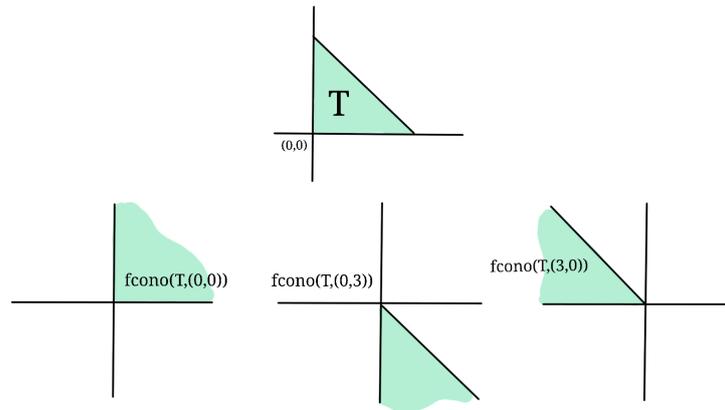


Figura 2.1: Triángulo T con sus conos de direcciones factibles

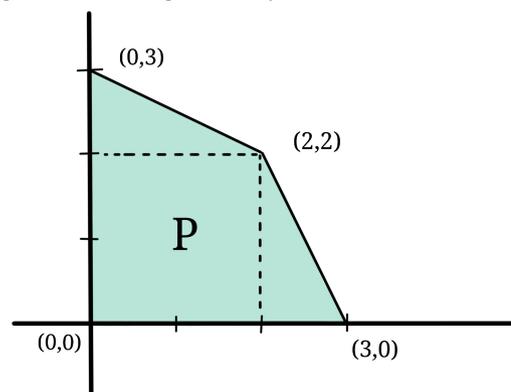
Como el numerador de las funciones es siempre una función entera, consideramos su desarrollo de Taylor en el origen para obtener:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(-y_1)(-y_2)} + \frac{e^{3y_1}}{y_2(y_2 - y_1)} + \frac{e^{3y_2}}{y_1(y_1 - y_2)} = \\ & \frac{(y_1 - y_2) + y_2(1 + 3y_1 + \frac{9y_1^2}{2!} + \dots) - y_1(1 + 3y_2 + \frac{9y_2^2}{2!} + \dots)}{y_1y_2(y_1 - y_2)} = \quad (2.6) \\ & \frac{9}{2} + \frac{9}{2}(y_1 + y_2) + \frac{27}{8}(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) + \dots \end{aligned}$$

Esto es, al evaluar en 0 la función obtenida, se tiene $\Phi_T(0) = 9/2$, el volumen usual del triángulo T .

Ejemplo 2.3. Consideramos el cuadrilátero P con conjunto de vértices $\{(0, 0), (0, 3), (2, 2)$ y $(3, 0)\}$, que tiene área 6 (ver figura 2.2).

Figura 2.2: Segundo ejemplo cálculo de volumen



Entonces:

$$\phi(P, y) = \sum_{v \in \text{Vert}P} e^{\langle v, y \rangle} f_v(y) = \frac{1}{y_1 y_2} + \frac{2e^{3y_1}}{(y_1 - 2y_2)y_1} + \frac{3e^{3y_2}}{(y_2 - 2y_1)y_2} + \frac{2e^{2y_1+2y_2}}{(2y_2 - y_1)(2y_1 - y_2)} = \frac{h}{q}.$$

Con

$$q = y_1 y_2 (y_1 - 2y_2)(y_2 - 2y_1)$$

$$h = (y_1 - 2y_2)(y_2 - 2y_1) + 2e^{3y_1} y_2 (y_2 - 2y_1) + 2e^{3y_2} y_1 (y_1 - 2y_2) + 3y_1 y_2 e^{2(y_1+y_2)}.$$

Ahora, tras desarrollar h en serie de Taylor vemos qué sucede en cada uno de sus términos.

- No hay término independiente ni término lineal.
- El término cuadrático: $5y_1 y_2 - 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1 y_2 + 2y_1^2 - 4y_1 y_2 + 3y_1 y_2 = 0$
- El término cúbico: $6y_1(y_2^2 - 2y_1 y_2) + 6y_2(y_1^2 - 2y_1 y_2) + 6(y_1 + y_2)y_1 y_2 = 0$
- El término cuártico: $2y_2(y_2 - 2y_1) \frac{9y_1^2}{2!} + 2y_1(y_1 - 2y_2) \frac{9y_2^2}{2!} + 3y_1 y_2 \frac{4(y_1 + y_2)^2}{2!} = 30y_1^2 y_2^2 - 12y_1 y_2^3 - 12y_2^3 y_1 = 6q.$

Los términos de grado ≥ 5 de h son también polinomios homogéneos múltiplos de q . En efecto, el término de grado k -ésimo para $k \geq 5$ es:

$$2y_2(y_2 - 2y_1) \frac{(3y_1)^{k-2}}{(k-2)!} + 2y_1(y_1 - 2y_2) \frac{(3y_2)^{k-2}}{(k-2)!} + 3y_1 y_2 \frac{2^{k-2}(y_1 + y_2)^{k-2}}{(k-2)!}$$

y por la regla de Ruffini, es múltiplo de q pues se anula para las sustituciones $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_1 = 2y_2$ y $y_2 = 2y_1$.

Así, deducimos que:

$$\phi(P, 0) = 6.$$

Observación 2.2. En los ejemplos, los términos con exponente negativo en el desarrollo de Laurent de $\Phi_P(y)$ se cancelan y se obtiene una función entera. En [10] se demuestra que en el caso de que P sea un politopo, $\Phi_P(y)$ es siempre una función entera.

2.3. El cambio exponencial en la evaluación Ψ .

Se presenta a continuación una idea principal en este trabajo. Nos preguntamos qué sucede si en expresiones del tipo 2.1 consideramos el cambio de variable $x \mapsto e^y$. Se obtendría la siguiente expresión:

$$\sum_{m \in P \cap \mathbb{Z}^d} e^{\langle m, y \rangle}. \quad (2.7)$$

Sin embargo, $e^{\langle m, y \rangle} = 1 + \langle m, y \rangle + \langle m, y \rangle^2/2 + \dots$ es una unidad en $\mathbb{Q}[[y]]$ pues tiene término independiente no nulo y a priori no está bien definido el término independiente de la serie que se obtiene tras hacer la sustitución en 2.1. Sin embargo, por el teorema 2.1 ya sabemos que si P es un poliedro racional, entonces 2.1 se puede expresar como una función racional que vive en $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^d)$, es decir, es combinación lineal finita de expresiones del tipo

$$\frac{x^v}{(1 - x^{u_1}) \cdots (1 - x^{u_d})}$$

donde el cambio exponencial está bien definido. En otras palabras, aunque S_P tenga infinitos términos, la función racional $\mathcal{F}(S_P)$ es una función racional para la cual el cambio exponencial está bien definido.

En efecto, tendríamos:

$$\frac{e^{\langle y, v \rangle}}{(1 - e^{\langle y, u_1 \rangle}) \cdots (1 - e^{\langle y, u_d \rangle})} = \frac{e^{\langle y, v \rangle}}{(-1)^d \prod_{i=1}^d \langle y, u_i \rangle (1 + \frac{\langle y, u_i \rangle}{2!} + \frac{\langle y, u_i \rangle^2}{3!} + \cdots)}.$$

Denotamos $U_i = 1 + \frac{\langle y, u_i \rangle}{2!} + \frac{\langle y, u_i \rangle^2}{3!} + \dots$. Al tener término independiente no nulo, esta serie de potencias es invertible. Si denotamos por U_i^{-1} a su inversa, entonces se obtiene

$$(-1)^d e^{\langle y, v \rangle} \prod_{i=1}^d \frac{U_i^{-1}}{\langle y, u_i \rangle} = (-1)^d e^{\langle y, v \rangle} U^{-1} \prod_{i=1}^d \frac{1}{\langle y, u_i \rangle}$$

donde $U^{-1} = \prod_{i=1}^d U_i^{-1}$ es una unidad en $\mathbb{R}[[y]]$ con término independiente 1.

De aquí en adelante, denotaremos Γ a la evaluación que se obtiene tras hacer el cambio de variable $x \mapsto e^y$ en la evaluación Ψ . Es decir

$$\Gamma(\mathbb{1}_P, y) = \Psi(\mathbb{1}_P, e^y)$$

Recapitulando, se tiene que para un poliedro racional P de dimensión d

$$\Phi_P(y) = \sum_{v \in \text{Vert}P} \Phi_{t\text{cono}(P,v)}(y) = \sum_{v \in \text{Vert}P} e^{\langle y, v \rangle} \Phi_{f\text{cono}(P,v)}(y) = \sum_{v \in \text{Vert}P} e^{\langle y, v \rangle} f_v(y)$$

$$\Gamma_P(y) = \sum_{v \in \text{Vert}P} \Gamma_{t\text{cono}(P,v)}(y) = \sum_{v \in \text{Vert}P} e^{\langle y, v \rangle} \Gamma_{f\text{cono}(P,v)}(y) = \sum_{v \in \text{Vert}P} e^{\langle y, v \rangle} g_v(y)$$

donde $f_v(y)$ es una función racional cociente de dos polinomios homogéneos y de grado $-d$ y $g_v(y)$ es cociente de una función entera entre un producto de formas lineales.

Podemos escribir

$$e^{\langle y, v \rangle} g_v(y) = g_{v,0}(y) + g_{v,1}(y) + \cdots + g_{v,k}(y) + \cdots$$

donde $g_{v,k}$ es un cociente de polinomios homogéneos de grado $k - d$ y análogamente

$$e^{\langle y, v \rangle} f_v(y) = f_{v,0}(y) + f_{v,1}(y) + \cdots + f_{v,k}(y) + \cdots$$

siendo $f_{v,k}(y) = \frac{\langle y, v \rangle^k}{k!} f_v(y)$ la expresión explícita para $f_{v,k}(y)$.

Proposición 2.1. *Con las notaciones anteriores, se tiene que*

$$g_{v,0}(y) = f_{v,0}(y) = f_v(y)$$

Demostración. La segunda igualdad es clara. Para demostrar la primera veamos primero el caso de conos simpliciales. Sea v un vértice tal que $f_{\text{cono}}(P, v) = \text{co}(u_1, u_2, \dots, u_d)$ es un cono simplicial. Entonces f_v y g_v se escriben:

$$f_v(y) = \int_K e^{\langle y, \xi \rangle} d\xi = |u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_d| \prod_{i=1}^d \frac{1}{\langle -y, u_i \rangle}$$

$$g_v = \frac{p(e^y)U^{-1}(y)}{\prod_{i=1}^d \langle -y, u_i \rangle}$$

donde $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$ es el polinomio indicador reticular del paralelepípedo fundamental D de $f_{\text{cono}}(P, v)$. Los términos homogéneos de grado $-d$ en estas expresiones son

$$|u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_d| \prod_{i=1}^d \frac{1}{\langle -y, u_i \rangle}$$

y

$$\frac{\#D \cap \mathbb{Z}^d}{\prod_{i=1}^d \langle -y, u_i \rangle}$$

respectivamente.

Como se tiene la igualdad $|u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_d| = \#D \cap \mathbb{Z}^d$, ya está probado el resultado para conos simpliciales.

Veamos que también se da la igualdad en conos arbitrarios. Ya sabemos (resultado 1.6) que todo cono K puede ser escrito como suma finita de conos simpliciales

$$\mathbb{1}_K = \sum_{i \in I} \pm \mathbb{1}_{K_i}.$$

Alguno de estos conos K_i tendrán dimensión $< d$, pero para ellos la aportación al volumen es nula. Además en la expresión de $g_v(y)$, los conos de dimensión $d' < d$, tienen términos de grado $-d'$ como mucho. Así $g_{v,0}(y)$ no queda afectado por estos conos, solo afectan los conos K_j de dimensión d .

De modo que también se tiene $g_{v,0} = f_v(y)$ para el caso no simplicial. □

Denotamos $g_{P,k}$ y $f_{P,k}$ las partes homogéneas de grado $k - d$ en el desarrollo de Laurent de $\Gamma_P(y)$ y $\Phi_P(y)$ respectivamente. Cuando P es un politopo, se tiene que $\Phi_P(y)$ y $\Gamma_P(y)$ son funciones enteras. Así, si $k < d$ entonces $g_{P,k} = f_{P,k} = 0$. Si $k \geq d$ entonces $g_{P,k}$ y $f_{P,k}$ son polinomios homogéneos de grado k .

En particular:

1. $g_{P,k}(y) = f_{P,k}(y) = 0$ para $k < d$.
2. $g_{P,0}$ y $f_{P,0}$ son constantes y además

$$g_{P,0} = \#P \cap \mathbb{Z}^d$$

y $f_{P,0}$ es el volumen usual de P .

Veamos un ejemplo de esto, volviendo a considerar el caso en que $T \subset \mathbb{R}^2$ es el triángulo de vértices $\{(0, 0), (3, 0), (0, 3)\}$.

Ejemplo 2.4. *Habíamos visto que*

$$\Psi_T(x_1, x_2) = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} + \frac{x_1^3}{(1-x_1^{-1})(1-x_1^{-1}x_2)} + \frac{x_2^3}{(1-x_2^{-1})(1-x_1x_2^{-1})}$$

entonces

$$\Gamma_P(y_1, y_2) = \frac{1}{(1-e^{y_1})(1-e^{y_2})} + \frac{e^{3y_1}}{(1-e^{-y_1})(1-e^{y_2-y_1})} + \frac{e^{3y_2}}{(1-e^{-y_2})(1-e^{y_1-y_2})}.$$

Si, como ya hemos hecho antes denotamos

$$U(y) = 1 + \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^3}{4!} + \dots$$

entonces

$$U^{-1}(y) = 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{12} + \dots$$

y la expresión de $\Gamma_P(y_1, y_2)$ queda

$$\Gamma_P(y_1, y_2) = \frac{U^{-1}(y_1)U^{-1}(y_2)}{y_1y_2} + \frac{(1 + 3y_1 + \frac{(3y_1)^2}{2} + \dots)U^{-1}(-y_1)U^{-1}(y_2 - y_1)}{y_1(y_2 - y_1)} + \frac{(1 + 3y_2 + \dots)U^{-1}(-y_2)}{y_2(y_1 - y_2)} \quad (2.8)$$

Haciendo los cálculos se obtiene que los términos homogéneos de grados -1 y -2 de cada

uno de los sumandos se cancelan entre si. Para obtener el valor de la función suma en 0, calculamos la aportación al término homogéneo de grado 0 de cada uno de los sumandos.

- Primer sumando:

$$\frac{1/12y_1^2 + 1/12y_2^2 + 1/4y_1y_2}{y_1(y_1 - y_2)} = \frac{y_1^2 + y_2^2 + 3y_1y_2}{12y_1y_2(y_1 - y_2)}.$$

- Numerador del segundo sumando:

$$\frac{9}{2}y_1^2 + \frac{1}{12}y_1^2 + \frac{(y_2 - y_1)^2}{12} - \frac{3}{2}y_1^2 + \frac{3}{2}(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}y_1(y_2 - y_1)$$

y la aportación del segundo sumando es

$$\frac{95y_2^2 - 23y_1y_2 + y_1^2}{12y_2(y_1 - y_2)}$$

- Tercer sumando:

$$\frac{95y_1^2 - 23y_1y_2 + y_2^2}{-12y_1(y_1 - y_2)}.$$

Sumando todos y operando se obtiene

$$\frac{120y_1y_2(y_1 - y_2)}{12y_1y_2(y_1 - y_2)} = 10.$$

Es decir el término independiente del desarrollo de Taylor de la función $\Gamma_T(y)$ es el número de puntos reticulares contenidos en T .

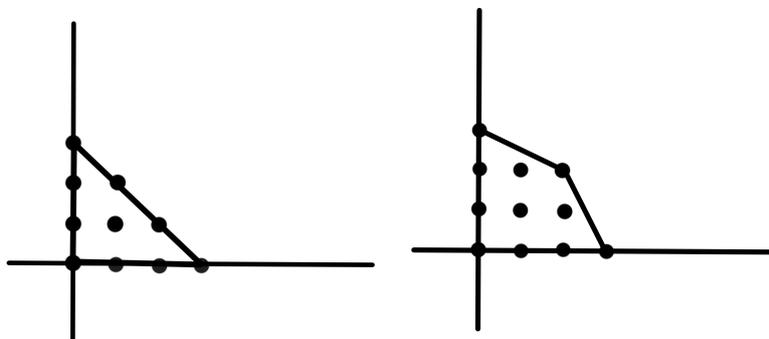


Figura 2.3: Poliedros que aparecen en los ejemplos.

Ejemplo 2.5. Veamos un nuevo ejemplo de este tipo de cálculo para el número de puntos reticulares. Consideremos el cuadrilátero P de vértices $\{(0, 0), (0, 3), (3, 0), (2, 2)\}$.

Se tiene que

$$\Gamma(\mathbb{1}_P)(y_1, y_2) = \frac{1}{(1-e^{y_1})(1-e^{y_2})} + \frac{e^{3y_1+e^{2y_1+y_2}}}{(1-e^{-y_1})(1-e^{-y_1+2y_2})} + \frac{e^{3y_2+e^{2y_2+y_1}}}{(1-e^{-y_2})(1-e^{-y_2+2y_1})} + \frac{e^{2y_1+2y_2} + e^{2y_1+y_2} + e^{y_1+2y_2}}{(1-e^{y_1-2y_2})(1-e^{-2y_1+y_2})} \quad (2.9)$$

Para cada uno de los sumandos estudiamos su aportación al término de grado 0.

1. $\frac{1}{(1-e^{y_1})(1-e^{y_2})} = \frac{1}{y_1 y_2} (1 - \frac{y_1}{2} + \frac{y_1^2}{12} + \dots)(1 - \frac{y_2}{2} + \frac{y_2^2}{12} + \dots)$, y la aportación al término de grado cero en este sumando es

$$T_0 = \frac{(y_1^2 + y_2^2 + \frac{y_1 y_2}{4})}{y_1 y_2} = \frac{y_1^2 + y_2^2 + 3y_1 y_2}{12y_1 y_2}$$

2. Si denotamos $V_1 = 1 + \frac{y_1}{2} + \frac{y_1^2}{12} + \dots$ y $V_2 = 1 + \frac{y_1-2y_2}{2} + \frac{(y_1-2y_2)^2}{12} + \dots$.

$$\frac{e^{3y_1+e^{2y_1+y_2}}}{(1-e^{-y_1})(1-e^{-y_1+2y_2})} = \frac{(2 + (5y_1 + y_2) + (\frac{13}{2}y_1^2 + 2y_1 y_2 + \frac{y_2^2}{2}))V_1 V_2}{y_1(y_1 - 2y_2)}$$

y tras operar, la aportación al término de grado 0 queda

$$T_1 = \frac{148y_1^2 - 44y_1 y_2 + 2y_2^2}{12y_1(y_1 - 2y_2)}$$

3. Con operaciones análogas, para el tercer término, la aportación de grado 0 queda

$$T_2 = \frac{148y_2^2 - 44y_2 y_1 + 2y_1^2}{12y_2(y_2 - 2y_1)}$$

4. Con operaciones similares se obtiene que para el último sumando la aportación es

$$T_3 = \frac{(81y_1^2 + 177y_1 y_2 + 81y_2^2)}{12(y_1 - 2y_2)(y_2 - 2y_1)}$$

Sumando las aportaciones de cada uno de los sumandos se obtiene

$$T_0 + T_1 + T_2 + T_3 = \frac{-22y_1^3 y_2 - 22y_1 y_2^3 + 55y_1 y_2}{-2y_1^3 y_2 - 2y_1 y_2^3 + 5y_1 y_2^3} = 11$$

La suma de los términos homogéneos se simplifica y al evaluar en $y = 0$ se obtiene el número de puntos reticulares contenidos en el politopo.

Es interesante observar (como ya hemos visto en la teoría) que los términos de grado -1 y -2 se cancelan y $\Gamma(\mathbb{1}_P, y)$ es una función entera.

En efecto, las aportaciones al término de grado -1 son

$$\frac{-(y_1 + y_2)}{2y_1y_2} + \frac{7y_1 - y_2}{y_1(y_1 - 2y_2)} + \frac{7y_2 - y_1}{y_2(y_2 - 2y_1)} + \frac{13(y_1 + y_2)}{2(y_1 - 2y_2)(y_2 - 2y_1)} = 0$$

y las aportaciones al término de grado 2

$$\frac{1}{y_1y_2} + \frac{2}{y_1(y_1 - 2y_2)} + \frac{2}{y_2(y_2 - 2y_1)} - \frac{3}{(y_1 - 2y_2)(y_2 - 2y_1)} = 0.$$

Nota 2.3. Para el problema clásico del conteo de puntos reticulares en un politopo $P \subset \mathbb{R}^2$ con vértices reticulares se tiene la fórmula de Pick. Esta fórmula relaciona los valores $\Gamma_P(0)$ y $\Phi_P(0)$ para un politopo $P \subset \mathbb{R}^2$. La fórmula afirma que el número de puntos de \mathbb{Z}^2 contenidos en el politopo P se puede calcular como el área P más la mitad de los puntos contenidos en la frontera ∂P más uno. Es decir

$$\#P \cap \mathbb{Z}^2 = \text{vol}P + \frac{1}{2}\#(\partial P \cap \mathbb{Z}^2) + 1.$$

Por ejemplo, en el caso del ejemplo del triángulo T con vértices $\{(0, 0), (0, 3), (3, 0)\}$ la igualdad queda

$$10 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}9 + 1$$

y para el caso del cuadrilátero

$$11 = 6 + \frac{1}{2}8 + 1.$$

Nota 2.4. Los cálculos que se han llevado a cabo en este capítulo (y que también tendrán valor en el capítulo siguiente) involucran a la serie

$$U(y) = 1 + \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^3}{4!} + \dots$$

y a su inversa

$$U^{-1}(y) = 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{12} + \dots$$

. Los coeficientes de U^{-1} se relacionan con los coeficientes de los polinomios de Todd.

Definición 2.1 (Polinomios de Todd). Consideramos la función

$$F(\tau, \xi_1, \dots, \xi_d) = \prod_{i=1}^d \frac{\tau \xi_i}{1 - e^{-\tau \xi_i}}.$$

F es una función analítica en un entorno de $\tau = \xi_1 = \dots = \xi_d = 0$ y por lo tanto admite una

expresión

$$F = (\tau, \xi_1, \dots, \xi_d) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k td_k(\xi_1, \dots, \xi_d).$$

Entonces $td_k(\xi_1, \dots, \xi_d)$ es un polinomio homogéneo simétrico con coeficientes racionales. En particular:

$$td_0(\xi_1, \dots, \xi_d) = 1, \quad td_1(\xi_1, \dots, \xi_d) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \xi_i \quad y \quad td_2(\xi_1, \dots, \xi_d) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^d \xi_i^2 + \frac{1}{4} \sum_{i<j} \xi_i \xi_j$$

Los coeficientes de estos polinomios son justamente los coeficientes que aparecen en el numerador de nuestros cálculos cuando invertimos la serie $U(y)$. En efecto:

$$\prod_{i=1}^d \frac{\tau \xi_i}{1 - e^{-\tau \xi_i}} = \prod_{i=1}^d \frac{\tau \xi_i}{1 - (1 - \tau \xi_i + \frac{\tau^2 \xi_i^2}{2!} + \dots)} = \prod_{i=1}^d \frac{1}{U(-\tau \xi_i)} = \prod_{i=1}^d U^{-1}(-\tau \xi_i).$$

Capítulo 3

Una fórmula para calcular el número de puntos reticulares en un politopo.

El objetivo de este capítulo es presentar un resultado central de este trabajo, la fórmula de Berline-Vergne. En la fórmula que lleva su nombre, estas dos matemáticas francesas relacionan las evaluaciones $\Phi(y)$ y $\Gamma_P(y)$ presentadas en el capítulo anterior para obtener el valor $\#P \cap \mathbb{Z}^d$ donde P es un politopo racional. La fórmula expresa el valor $\#P \cap \mathbb{Z}^d$ como la suma de los volúmenes de las caras de P multiplicados por el valor de una cierta evaluación en los conos tangentes a estas caras.

Este resultado aparece por primera vez en [5]. De hecho, en dicho artículo, se obtiene una fórmula más general que proporciona una expresión para

$$\sum_{m \in P \cap \mathbb{Z}^d} h(x)$$

donde $h(x) \in \mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_d]$. Este resultado es una generalización para dimensión arbitraria de la fórmula de Euler-Maclaurin, en la que $d = 1$. Es decir, la fórmula de Euler-Maclaurin proporciona una expresión para calcular

$$\sum_{m \in [a, b] \cap \mathbb{Z}} h(x).$$

En este trabajo nos restringiremos al caso particular de que $h(x) = 1$. Para trabajar con esta fórmula, es necesario considerar retículos Λ más generales que \mathbb{Z}^d , en la primera parte del capítulo se aclararán las notaciones y técnicas que se van a utilizar. A continuación se presentará una nueva evaluación Ω de conos racionales y finalmente se presentará la fórmula de Berline-Vergne y se verá como esta generaliza la fórmula de Pick.

3.1. Una evaluación para conos racionales.

Se considera $V = \mathbb{R}^d$ con el producto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 3.1. Decimos que un subconjunto $\Lambda \subset V$ es un *retículo* si

- Λ es un subgrupo aditivo de V .
- Λ es discreto. Es decir, para cada conjunto acotado $B \subset V$, la intersección $\Lambda \cap B$ es finita.
- Λ genera V como espacio vectorial.

En este capítulo se va a trabajar con un retículo general Λ en vez de con el retículo ya conocido \mathbb{Z}^d . Los siguientes párrafos aclaran la notación y definiciones que utilizaremos a lo largo del capítulo.

Llamaremos puntos reticulares a los puntos del retículo Λ y diremos que $v \in V$ es *racional* si existe $q \in \mathbb{Z}$ no nulo tal que tal que $vq \in \Lambda$.

Si un retículo $\Lambda \subset V$ tiene a u_1, u_2, \dots, u_m como base, denotaremos como $\det(\Lambda)$ a $|\det(u_1, u_2, \dots, u_d)| = |u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m|$. Se puede demostrar que este valor es independiente de la base escogida.

Diremos que un subespacio vectorial $L \subset V$ es reticular si está generado por elementos de Λ . En ese caso $L \cap \Lambda$ será un retículo de L y consideraremos en L la medida de Lebesgue normalizada de manera que $\det(L \cap \Lambda) = 1$, denotaremos a esta medida en L como $d\xi_L$. Así, en el espacio reticular L , consideramos la evaluación Φ_L como la extensión de la función que a cada poliedro racional $P \subset L$ le asocia la integral

$$\Phi_L(\mathbb{1}_P, y) = \int_P e^{\langle y, \xi \rangle} d\xi_L.$$

Se trata de la evaluación del volumen de poliedros en L con respecto de la medida $d\xi_L$.

Observación 3.1. Como a partir de aquí es importante tener claro en qué espacio vectorial V se están considerando los poliedros, utilizaremos la notación $\Phi_V(\mathbb{1}_P, y)$ especificando en el subíndice el espacio vectorial, en vez de $\Phi_P(y)$ como se ha hecho en el capítulo anterior donde el espacio era siempre V .

Dado un punto racional $v \in V$, al considerar una traslación racional de un espacio reticular $v + L$. Denotaremos la evaluación definida en $v + L$ también como Φ_L .

Definición 3.2. Dado $v \in V$ un punto racional, definimos $\mathcal{A}_v(V)$ como el espacio vectorial sobre \mathbb{R} engendrado por las funciones características de traslaciones por v de conos racionales K , es decir de los conjuntos $A = v + K$ donde $K \subset V$ es un cono racional.

El objetivo de este capítulo es definir una evaluación cuyo espacio de salida sea $\mathcal{A}_v(V)$. Para ello, primero vamos a definir una aplicación que, dado un espacio vectorial V con un retículo Λ , fijado un punto racional $v \in V$, a cada cono racional A con vértice en v le asocie una función que denotaremos

$$\omega(A, V, \Lambda, y)$$

. Cuando por el contexto se sobreentienda el espacio vectorial y el retículo que en él se considera, escribiremos simplemente $\omega(A, y)$.

Luego extenderemos esta aplicación para construir una evaluación sobre $\mathcal{A}_v(V)$.

Si L^\perp es el complemento ortogonal de L (que denotaremos también por V/L), denotamos por Λ/L la proyección ortogonal de Λ en V/L . Entonces Λ/L es un retículo en V/L .

Además, si $A \subset V$ es la traslación racional de un cono racional. Entonces se tiene que su proyección en V/L (que denotaremos por A/L) es también la traslación racional (respecto a Λ/L) de un cono racional en V/L . Entonces para $y \in V/L$ definiremos la aplicación

$$\omega(A/L, V/L, \Lambda/L, y)$$

Extendemos esta aplicación a $y \in V$ tomando clases, es decir, definiendo para $y \in V$:

$$\omega(A/L, V/L, \Lambda/L, y) = \omega(A/L, V/L, \Lambda/L, y/L).$$

También utilizaremos la evaluación Γ definida en el capítulo anterior. Recordamos que es la aplicación que se obtiene tras realizar el cambio exponencial ($x \mapsto e^y$) en la evaluación Ψ . Si A es un cono que no contiene rectas entonces:

$$\Gamma(\mathbb{1}_A, y) = \sum_{m \in A \cap \Lambda} e^{\langle y, m \rangle}.$$

Veamos entonces como definir esta aplicación ω .

Lo haremos de forma recursiva sobre la dimensión del cono A . Si $A = K + v$ busquemos definir $\omega(A, y)$ de manera que se satisfaga la siguiente identidad:

$$\Gamma(\mathbb{1}_A, y) = \sum_{L \subset V \text{ reticular}} \omega(A/L, y) \Phi_L(\mathbb{1}_{A \cap (L+v)}, y) \tag{3.1}$$

donde el sumatorio recorre todos los subespacios reticulares $L \subset V$. En particular, cuando K es un cono que no contiene rectas, la igualdad se lee como

$$\sum_{m \in A \cap \Lambda} e^{\langle y, m \rangle} = \sum_{L \subset V \text{ reticular}} \omega(A/L, y) \int_{A \cap (L+v)} e^{\langle y, \xi \rangle} d\xi_L. \tag{3.2}$$

El sumatorio que aparece en la expresión recorre una cantidad infinita de subespacios. Pero

más adelante vamos a ver que los únicos términos no nulos son una cantidad finita; los que corresponden a los subespacios paralelos a las caras de K .

Como en el sumatorio solo hay un subespacio L de dimensión 0 que es el vértice, podemos escribir.

$$\Gamma(\mathbb{1}_A, y) = \omega(A, y)e^{\langle y, v \rangle} + \sum_{L: \dim L > 0} \omega(A/L, y)\Phi_L(\mathbb{1}_{A \cap (L+v)}, y)$$

y podemos definir $\omega(A, y)$ de manera recursiva. Si $\dim A = 0$ entonces $\omega(A, y) = 1$, si no

$$\omega(A, y) = e^{-\langle y, v \rangle} \Gamma(\mathbb{1}_A, y) - e^{-\langle y, v \rangle} \sum_{L: \dim L > 0} \omega(A/L, y)\Phi_L(\mathbb{1}_{A \cap (L+v)}, y) \quad (3.3)$$

Veamos a continuación algunos ejemplos de cálculo explícito de esta función y de el valor que toma en 0.

Ejemplo 3.1 (Conos unidimensionales.). *En este ejemplo consideramos $V = \mathbb{R}$ con el producto escalar estándar, $\Lambda = \mathbb{Z}$, $A = [\alpha, \infty)$ con $\alpha \in \mathbb{Q}$. Entonces en el sumatorio de 3.3 solo existe un subespacio de dimensión > 0 , que es $L = V$.*

$$\Gamma(\mathbb{1}_A, y) = \sum_{m \in A \cap \mathbb{Z}} e^{my} = \sum_{m = \lceil \alpha \rceil}^{\infty} e^{my} = \frac{e^{\lceil \alpha \rceil y}}{1 - e^y}$$

Por otro lado

$$\Phi_L(\mathbb{1}_A, y) = \int_{[\alpha, \infty)} e^{y\xi} d\xi = \frac{-e^{\alpha y}}{y}.$$

Así que finalmente se obtiene:

$$\omega(A, y) = e^{-\alpha y} \left(\frac{e^{\lceil \alpha \rceil y}}{1 - e^y} + \frac{e^{\alpha y}}{y} \right) \quad (3.4)$$

y si denotamos $\beta = \lceil \alpha \rceil - \alpha$ se tiene la siguiente expresión

$$\omega(A, y) = \frac{e^{\beta y}}{1 - e^y} + \frac{1}{y} \quad (3.5)$$

Esta función es analítica en un entorno de 0. Veamos que valor toma en 0 tomando el desarrollo de Taylor en el origen

$$\frac{e^{\beta y}}{1 - e^y} + \frac{1}{y} = \frac{y((1 + y\beta + \frac{(\beta y)^2}{2} + \dots) - (1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{3!} + \dots))}{-y^2(1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{3!} + \dots)} = \frac{1}{2} - \beta + \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{12} \right) y + \dots$$

de modo que $\omega(A, 0) = \frac{1}{2} - \beta$

Ejemplo 3.2 (Cono bidimensional regular con vértice en el origen.). *Supongamos que K es un cono punteado con vértice en el origen. Sean u_1 y u_2 sus vectores primitivos que verifican*

$|u_1 \wedge u_2| = 1$. Vamos que forma tienen los elementos de la expresión 3.3. Por un lado

$$\Gamma(\mathbb{1}_K, y) = \frac{1}{(1 - e^{\langle y, u_1 \rangle})(1 - e^{\langle y, u_2 \rangle})},$$

y como subespacios de dimensión positiva en el sumatorio deben aparecer

$$V, \text{span}(u_1) \text{ y } \text{span}(u_2).$$

- Para $L = \text{span}(u_1)$, $V/L = L^\perp$ es la recta perpendicular a u_1 y una base del retículo \mathbb{Z}^2/L es la proyección de u_2 sobre L^\perp , dada por

$$w_1 = u_2 - \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

Calculamos $\omega(K/L, y)$, por un lado

$$\Gamma(\mathbb{1}_{K/L}, y) = \sum_{K/L \cap \mathbb{Z}^2/L} e^{\langle m, y \rangle} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\langle kw_1, y \rangle} = \frac{1}{1 - e^{\langle w_1, y \rangle}}$$

$$\Phi_L(\mathbb{1}_{K \cap L}, y) = \frac{1}{\langle w_1, y \rangle}$$

de modo que

$$\omega(K/L, y) = \frac{1}{1 - e^{\langle w_1, y \rangle}} + \frac{1}{\langle w_1, y \rangle}$$

- Para $L = \text{span}(u_2)$ se procede igual.
- Para $L = V$ se tiene $\omega(K/L, y) = 1$ y $\Phi_L(\mathbb{1}_{K \cap L}, y) = \frac{1}{\langle y, u_1 \rangle \langle y, u_2 \rangle}$.

Uniendo todas las expresiones y denotando $\alpha = \langle y, w_1 \rangle$ y $\beta = \langle y, w_2 \rangle$ se obtiene

$$\begin{aligned} \omega(K, y) &= \frac{1}{(1 - e^{\langle y, u_1 \rangle})(1 - e^{\langle y, u_2 \rangle})} \\ &+ \left(\frac{1}{1 - e^\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{1}{\langle y, u_1 \rangle} + \left(\frac{1}{1 - e^\beta} + \frac{1}{\beta} \right) \frac{1}{\langle y, u_2 \rangle} \\ &- \frac{1}{\langle y, u_1 \rangle \langle y, u_2 \rangle}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Y haciendo los cálculos con los desarrollos de Taylor de forma similar al ejemplo anterior se obtiene

$$\omega(K, 0) = \frac{1}{4} + \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{12} \left(\frac{1}{\langle v_1, v_1 \rangle} + \frac{1}{\langle v_2, v_2 \rangle} \right).$$

Ya hemos visto cómo se define $\omega(A, y)$ cuando A es la traslación racional de un cono racional. Sin embargo, queremos ver que ω puede ser extendida a una evaluación con espacio de salida en $\mathcal{A}_v(V)$.

Es decir, queremos ver que ω respeta las relaciones lineales entre funciones características de traslaciones racionales de conos racionales. Es decir, que si fijado $v \in V$ racional, A_1, A_2, \dots, A_m son traslaciones de conos racionales por v y se tiene una relación del tipo:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} = 0$$

entonces se tiene que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \omega(A_i, y) = 0.$$

Para demostrar esto, utilizaremos un lema que nos dice que basta probar un caso particular mucho más simple.

Lema 3.1. *Sean $v \in V$ racional, W un espacio vectorial y θ una aplicación que a cada traslación $A = v + K$ donde K es un cono racional, le asigna un elemento $\theta(A) \in W$.*

Sea H un hiperplano afín racional tal que $v \in H$ y sean H^+ y H^- los correspondientes semiespacios cerrados que H delimita.

Sean

$$A^+ = A \cap H^+ \quad \text{y} \quad A^- = A \cap H^-$$

Supongamos que para cada cono racional K y cada hiperplano racional H con $v \in H$ se tiene la igualdad :

$$\theta(A) = \theta(A^+) + \theta(A^-) - \theta(A \cap H).$$

Entonces la aplicación θ se puede extender a una evaluación (transformación lineal):

$$\Theta : \mathcal{A}_v \longrightarrow W$$

de manera que $\Theta(\mathbb{1}_A) = \theta(A)$ para todo cono A que sea una traslación $A = K + v$ de un cono racional.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, consideraremos el problema trasladado al origen, es decir $v = 0$. Sean $K_1, K_2, \dots, K_m \subset V$ un conjunto de conos racionales y sea

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{K_i} = 0$$

una relación lineal entre sus funciones características. Nuestro objetivo será probar que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \theta(K_i) = 0$$

lo cual implicaría que la aplicación θ se extiende a una evaluación Θ .

Si nombramos $\{H_{i,j} : j \in J_i\}$ a los hiperplanos que delimitan las caras de cono K_i , y definimos $\mathcal{H} = \{H_{i,j} : i = 1, 2, \dots, m, j \in J_i\}$. Entonces los hiperplanos de \mathcal{H} dividen el espacio V en una cantidad finita de conos racionales de dimensión máxima tales que la intersección de dos de ellos siempre tiene dimensión menor.

Sea $\{C_j : j \in J\}$ el conjunto de todos estos conos junto con todas sus caras no vacías (que también serán conos de dimensión menor). Equivalentemente, este conjunto se puede definir como el de los conjuntos que son intersección de semiespacios definidos por elementos de \mathcal{H} y tales que al intersecarlos con cualquier otro semiespacio definido por un elemento de \mathcal{H} , su dimensión disminuye.

Nos interesa probar que las funciones $\mathbb{1}_{C_j}$ son linealmente independientes; supongamos que tenemos una relación lineal

$$\sum_{j \in J} \gamma_j \mathbb{1}_{C_j} = 0.$$

Nos fijamos en los C_j de dimensión máxima, sabemos que cada par de estos interseca en otro C_i de dimensión estrictamente menor. Así para cada j tal que C_j tiene dimensión máxima se verifica que $\gamma_j = 0$. Si repetimos el argumento fijándonos en los C_j de dimensión $\dim(V) - 1$ también se obtiene que para ellos $\gamma_j = 0$. Se repite el argumento reduciendo la dimensión hasta llegar a la cara de menor dimensión que también deberá tener coeficiente nulo.

Ahora observamos que para cada $i = 1, 2, \dots, m$ podemos escribir

$$\mathbb{1}_{K_i} = \sum_{j \in J} \beta_{ij} \mathbb{1}_{C_j},$$

para ciertos β_{ij} y aplicando la hipótesis de forma recursiva podemos deducir que

$$\theta(K_i) = \sum_{j \in J} \beta_{ij} \theta(C_j).$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j \in J} \alpha_i \beta_{ij} \mathbb{1}_{C_j} = 0$$

y por ser linealmente independientes los $\mathbb{1}_{C_j}$ se tiene que $\sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_{ij} = 0$ para cada $j \in J$ de

donde se deduce que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \theta(K_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j \in J} \alpha_i \beta_{ij} \theta(K_i) = 0$$

como queríamos demostrar. \square

Una vez presentado este lema estamos en condiciones de demostrar que la aplicación $\omega(A, y)$ que hemos definido, se extiende a una evaluación y que verifica ciertas propiedades que nos interesan.

Recordamos que $\mathcal{M}(V)$ es el espacio de funciones meromorfas en V .

Teorema 3.1. *Sean V un espacio euclídeo, Λ un retículo en V y $v \in V$ un punto racional, entonces podemos considerar una evaluación (aplicación lineal)*

$$\Omega : \mathcal{A}_v(V) \longrightarrow \mathcal{M}(V)$$

verificando las siguientes propiedades:

1. *Sea $K \subset V$ un cono racional. Sea $A = K + v$ su traslación racional y sea $L \subset V$ un espacio reticular. Entonces la proyección $A/L \subset V/L$ es la traslación racional (respecto del retículo Λ/L) de un cono racional $K/L \subset V/L$ de manera que las funciones $\Omega(\mathbb{1}_{A/L}), \Omega(\mathbb{1}_A) \in \mathcal{M}(V)$ están bien definidas y se verifica la identidad*

$$\Gamma(\mathbb{1}_A) = \sum_L \Omega(\mathbb{1}_{A/L}) \Phi_L(\mathbb{1}_{A \cap (L+v)})$$

donde el sumatorio recorre todos los subespacios $L \subset V$ paralelos a las caras de A .

2. *Si $A = K + v$ es una traslación racional de un cono racional $K \subset V$ que contiene alguna recta, entonces $\Omega(\mathbb{1}_A) = 0$.*
3. *Si $A = K + v$ es una traslación racional de un cono racional $K \subset V$, entonces la función $\Omega(\mathbb{1}_A) \in \mathcal{M}(V)$ es analítica en $y = 0$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre $\dim(V) = d$. Si $d = 0$, entonces $\Omega(f) = f(0)$ para toda $f \in \mathcal{A}_v(V)$ y se verifica cada punto del teorema. Para $d \geq 1$, como ya se ha desarrollado antes, si queremos que se verifique (1), vamos a definir recursivamente

$$\Omega(\mathbb{1}_A, y) = e^{-\langle y, v \rangle} \Gamma(\mathbb{1}_A, y) - e^{-\langle y, v \rangle} \sum_{L: \dim L > 0} \Omega(\mathbb{1}_{A/L}) \Phi_L(\mathbb{1}_{A \cap (L+v)}, y) \quad (3.7)$$

para $A = K + v$ la traslación por v de un cono racional K y donde el sumatorio recorre los subespacios de dimensión positiva paralelos a las caras de A .

Para ver (2), supongamos que K contiene una recta. Entonces es inmediato que $\Gamma(\mathbb{1}_A) = 0$. También toda cara $A \cap (L + v)$ de dimensión positiva, contiene una recta de modo que $\Phi_L(\mathbb{1}_{A \cap (L+v)}) = 0$, de modo que se tiene $\Omega(\mathbb{1}_A) = 0$. Se concluye $\Omega(\mathbb{1}_A) = 0$.

También hay que probar que la suma se puede extender a todos los subespacios reticulares de dimensión positiva, ya que solo los paralelos a las caras de A tienen un aporte no nulo. Es decir, queremos ver que si no hay una cara F que genere L , entonces $\Omega(\mathbb{1}_{A/L})\Phi_L(A \cap (L+v)) = 0$.

Supongamos que $L \subset \text{span}(K)$ con $\dim(F) > \dim(L)$, entonces A/L es una traslación de un cono K/L que contiene una recta y en consecuencia $\Omega(\mathbb{1}_{A/L}) = 0$.

Por otro lado, si se tiene que $\dim(L \cap K) < \dim(L)$.

Ahora hay que demostrar que, así definida, podemos extender Ω a una evaluación en $\mathcal{A}_v(V)$. Ya sabemos que para ello basta con probar el caso particular del lema anterior. Manteniendo las notaciones de dicho lema hay que probar que

$$\Omega(\mathbb{1}_A) = \Omega(\mathbb{1}_{A^+}) + \Omega(\mathbb{1}_{A^-}) - \Omega(\mathbb{1}_{A \cap H}).$$

Como Γ y Φ_L son evaluaciones, tenemos que

$$\Gamma(\mathbb{1}_A) = \Gamma(\mathbb{1}_{A^+}) + \Gamma(\mathbb{1}_{A^-}) - \Gamma(\mathbb{1}_{A \cap H}).$$

y que

$$\Phi_L(\mathbb{1}_{A \cap (L+v)}) = \Phi_L(\mathbb{1}_{A^+ \cap (L+v)}) + \Phi_L(\mathbb{1}_{A^- \cap (L+v)}) - \Phi_L(\mathbb{1}_{A \cap H \cap (L+v)}).$$

Además, las proyecciones preservan las relaciones lineales entre funciones características de poliedros, entonces

$$\mathbb{1}_{A/L} = \mathbb{1}_{A^+/L} + \mathbb{1}_{A^-/L} - \mathbb{1}_{A \cap H/L}$$

y por hipótesis de inducción

$$\Omega(\mathbb{1}_{A/L}) = \Omega(\mathbb{1}_{A^+/L}) + \Omega(\mathbb{1}_{A^-/L}) - \Omega(\mathbb{1}_{A \cap H/L}).$$

Si definimos

$$\Pi(A, L) := \Omega(\mathbb{1}_{A/L})\Phi_L(\mathbb{1}_{A \cap (L+v)})$$

entonces observando la expresión de $\Omega(\mathbb{1}_A)$, basta probar que se verifica

$$\Pi(A, L) = \Pi(A^+, L) + \Pi(A^-, L) - \Pi(A \cap H, L). \quad (3.8)$$

Sea F una cara no vacía de A , consideremos los posibles casos que podrían darse y veamos que se verifica la igualdad en cada uno de ellos.

- (a) $F \subset H$
- (b) F está en contenida en H^+ .
- (c) F está contenida en H^- .
- (d) H pasa por un punto del interior de F de forma transversal.
- (e) L es un subespacio paralelo a una cara $G = F \cap H$ de $A \cap H$ donde F es una cara de A , H pasa por un punto interior de F y lo interseca de manera transversal.

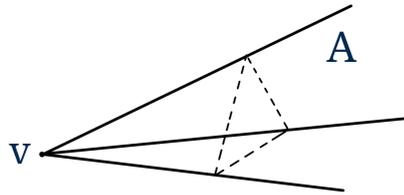
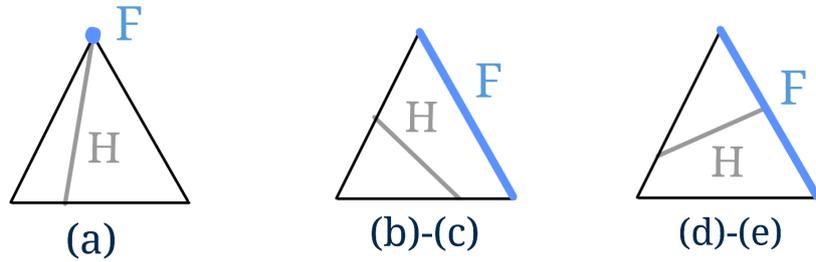


Figura 3.1: Cono A de dimensión 3 y las posibles posiciones de un hiperplano H , una cara F de A y una cara G de $A \cap H$.

Supongamos que estamos en el caso (a), entonces se tiene que

$$A \cap (L + v) = A^+ \cap (L + v) = A^- \cap (L + v) = A \cap H \cap (L + v).$$

Entonces, como hemos visto que se tiene $\Omega(\mathbb{1}_{A/L}) = \Omega(\mathbb{1}_{A^+/L}) + \Omega(\mathbb{1}_{A^-/L}) - \Omega(\mathbb{1}_{A \cap H/L})$, se verifica 3.8.

Supongamos ahora que se tiene (b), $F \subset H^+$. Entonces se tiene que $A/L = A^+/L$ y entonces $\dim(A^- \cap (L + v)) < \dim(L)$ y $\dim(A^+ \cap (L + v)) < \dim(L)$. Así se tiene que

$$\Pi(A, L) = \Pi(A^+, L)$$

y que

$$\Pi(A^-, L) = \Pi(A \cap H, L) = 0$$

y se tiene la igualdad pedida.

Para el caso (c) se razona de forma análoga.

Supongamos que L es paralelo a una cara F de A de forma que H pasa por un punto interior de F y lo corta transversalmente. Entonces

$$A/L = A^+/L = A^-/L, \quad \Phi_L(\mathbb{1}_{A \cap H \cap (L+v)}) = 0$$

y como Φ es una evaluación se tiene la condición pedida.

Finalmente, si se tiene el caso (e) entonces

$$A \cap (L + v) = A^+ \cap (L + v) = A^- \cap (L + v) = A \cap H \cap (L + v)$$

y se verifica la condición ya que $\Omega(\mathbb{1}_{A/L}) = \Omega(\mathbb{1}_{A^+/L}) + \Omega(\mathbb{1}_{A^-/L}) - \Omega(\mathbb{1}_{A \cap H/L})$.

Observamos que cada cara de A^+ (respectivamente de A^-) es, o bien la intersección de una cara de A con H^+ (respectivamente de A^+) o bien la intersección de una cara de A con H . También, cada cara de $A \cap H$ es la intersección de una cara de A con H . De modo que, restringirnos a los subespacios del tipo (a)-(e) basta para concluir que

$$\Omega(\mathbb{1}_A) = \Omega(\mathbb{1}_{A^+}) + \Omega(\mathbb{1}_{A^-}) - \Omega(\mathbb{1}_{A \cap H}).$$

Para acabar de demostrar el teorema necesitamos demostrar que $\Omega(\mathbb{1}_A, y)$ es una función analítica en $y = 0$, para ello vamos a proceder por inducción sobre $d = \dim(V)$.

Supongamos que $A = K + v$ es la traslación de un cono racional K que no contiene rectas y es de dimensión máxima. Sino fuese de dimensión máxima, lo podríamos considerar como un cono de $\text{span}(K)$ y habríamos terminado.

Ahora vamos a utilizar que todo cono K racional que no contiene rectas de dimensión máxima, puede ser escrito como combinación lineal de conos regulares racionales de dimensión máxima módulo conos racionales que no contienen rectas (resultado 1.8). Como ya hemos visto que Ω es una evaluación basta probar que

$$\Omega(\mathbb{1}_A) = \omega(K + v)$$

es una función analítica en $y = 0$ siendo $K = \text{co}(u_1, u_2, \dots, u_d)$ y $\{u_1, u_2, \dots, u_d\}$ una base de Λ .

Antes de ver cómo queda la fórmula es necesario tener en cuenta lo siguiente. En el teorema 2.1 habíamos visto la evaluación Ψ para poliedros con vértices en puntos reticulares. En este caso nos interesa poder considerar la evaluación en el caso de que los vértices sean puntos racionales del retículo Λ . Es decir, puntos v tales que existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $qv \in \Lambda$. En particular, nos interesa que esta evaluación exista para los conos regulares con vértice en un punto racional.

En este caso concreto, no es difícil construir esta extensión. La idea es que si

$$A = v + K = v + \text{co}(u_1, u_2, \dots, u_d)$$

siendo $\{u_1, u_2, \dots, u_d\}$ una base de Λ buscamos un punto $w \in \Lambda$ que verifique que

$$\Lambda \cap (w + \text{co}(u_1, \dots, u_d)) = \Lambda \cap (v + \text{co}(u_1, \dots, u_d)).$$

Este $w \in \Lambda$ lo denotaremos por $w = [v]_K$ y se construye de la siguiente forma. Si expresamos v en la base $\{u_1, u_2, \dots, u_d\}$:

$$v = \sum_{i=1}^d \alpha_i u_i \quad \text{entonces} \quad [v]_K = \sum_{i=1}^d [\alpha_i] u_i.$$

Una vez visto esto,

$$\Gamma(\mathbb{1}_A) = \Gamma(\mathbb{1}_{K+v}) = e^{\langle y, w \rangle} \Gamma(\mathbb{1}_K) = e^{\langle y, w \rangle} \prod_{i=1}^d \frac{1}{1 - e^{\langle y, u_i \rangle}}.$$

Además, ya hemos visto que los subespacios L que aparecen en la expresión de $\Omega(\mathbb{1}_A)$ son aquellos paralelos a las caras de A . Es decir son subespacios de la forma

$$L = L_I = \text{span}(u_i : i \in I \subset \{1, 2, \dots, d\}).$$

Entonces

$$\Phi_L(\mathbb{1}_{A \cap (L+v)}) = e^{\langle y, v \rangle} \prod_{i \in I} \frac{1}{\langle -y, u_i \rangle}.$$

Por hipótesis de inducción se tiene que $\Omega(\mathbb{1}_{A/L})$ es una función analítica en $y = 0$. Entonces observando la expresión de $\Omega(\mathbb{1}_A)$ (3.7) tenemos

$$\Omega(\mathbb{1}_A, y) = e^{-\langle y, v \rangle} e^{\langle y, w \rangle} \prod_{i=1}^d \frac{1}{1 - e^{\langle y, u_i \rangle}} - e^{-\langle y, v \rangle} \sum_{L: \dim L > 0} e^{\langle y, v \rangle} \prod_{i \in I} \frac{1}{\langle -y, u_i \rangle} \quad (3.9)$$

Es decir, que $\Omega(\mathbb{1}_A)$ es una función meromorfa y sus posibles polos en un entorno de $y = 0$ se encontrarían en los hiperplanos $\langle y, u_i \rangle = 0$. Para demostrar que en efecto es analítica en $y = 0$ basta demostrar que

$$\Omega(\mathbb{1}_A, y) \langle y, u_i \rangle$$

es idénticamente nula en el hiperplano $\langle y, u_i \rangle = 0$. Probémoslo sin pérdida de generalidad para $i = 1$.

Primero, observemos que

$$\frac{\langle y, u_1 \rangle}{1 - e^{\langle y, u_1 \rangle}} = -U^{-1}(\langle y, u_1 \rangle)$$

vale -1 en los puntos del hiperplano $\langle y, u_1 \rangle = 0$. De modo que al multiplicar por $\langle y, u_1 \rangle$ la expresión 3.9 se obtiene:

$$\Omega(\mathbb{1}_A, y) \langle y, u_1 \rangle = -e^{\langle y, w-v \rangle} \prod_{i=2}^d \frac{1}{1 - e^{\langle y, u_i \rangle}} + \sum_{I \subset \{1, \dots, d\}: 1 \in I} \Omega(\mathbb{1}_{A/L_I}) \prod_{i \in I \setminus \{1\}} \frac{1}{\langle y, u_i \rangle}. \quad (3.10)$$

Consideremos ahora la proyección sobre el complemento ortogonal de $\text{span}(u_1)$. Así, denotamos $A' = A/\text{span}(u_1)$, $u'_i = u_i/\text{span}(u_1)$, $K' = \text{co}(u'_1, u'_2, \dots, u'_d)$ y Λ' el retículo generado por los vectores u'_2, \dots, u'_d .

Entonces K' es un cono $(d-1)$ -dimensional regular con respecto al retículo Λ' . Como y es ortogonal a u_1 , entonces se tiene $\langle c, u_i \rangle = \langle c, u'_i \rangle$ para $i = 2, \dots, d$ y podemos reescribir la expresión 3.10 como

$$\Omega(\mathbb{1}_{A'}) - e^{\langle y, w'-v' \rangle} \prod_{i=2}^d \frac{1}{1 - e^{\langle y, u'_i \rangle}} + \sum_{I \subset \{2, \dots, d\}: I \neq \emptyset} \Omega(\mathbb{1}_{A'/L_I}) \prod_{i \in I} \frac{1}{\langle -y, u'_i \rangle}$$

Y podemos reescribir esta expresión como

$$\Omega(\mathbb{1}_{A'}) - e^{-\langle y, v' \rangle} \Gamma(\mathbb{1}_{A'}) + e^{-\langle y, v' \rangle} \sum_{L: \dim L > 0} \Omega(\mathbb{1}_{A'/L}) \Phi_L(\mathbb{1}_{(A'+(L+v))})$$

y por la expresión 3.7 se tiene que esta expresión vale 0 y hemos finalizado la demostración. \square

3.2. La fórmula de Berline-Vergne.

Ahora vamos a ver como se puede utilizar esta evaluación Ω y el hecho de que sea analítica en $y = 0$ para construir una nueva expresión para el número de puntos reticulares de un politopo. Para ello se presenta el siguiente teorema que es central en este trabajo.

Teorema 3.2. *Sea V un espacio vectorial con un retículo Λ y sea $P \subset V$ un politopo racional. Para cada cara F de P , definimos los valores $\text{vol}(F)$ y $\alpha(P, F)$ de la siguiente forma: sea $L = L_F \subset V$ el subespacio vectorial paralelo a F . En L normalizamos la medida de Lebesgue de manera que $\det(\Lambda \cap L) = 1$ denotamos $\text{vol}(F)$ la medida de Lebesgue de F tras realiza dicha normalización. Sea $t\text{cono}(P, F)$ el cono tangente de P en un punto interior de F y sea $A = A_F = t\text{cono}(P, F)/L$ la proyección ortogonal de $t\text{cono}(P, F)$ sobre L^\perp . Entonces, definimos*

$\alpha(P, F) = \omega(A, 0)$. Entonces se tiene

$$\#P \cap \Lambda = \sum_F \text{vol}(F) \alpha(P, F)$$

donde el sumatorio recorre todas las caras no vacías de P incluyendo al propio P .

Demostración. Sea $v \in \text{Vert}(P)$ denotamos $A_v = t\text{cono}(P, v)$ el cono tangente de P en v . Entonces, por el teorema 2.1 se tiene

$$\sum_{v \in \text{Vert}(P)} \Gamma(\mathbb{1}_{A_v}) = \Gamma(\mathbb{1}_P) = \sum_{m \in \Lambda \cap P} e^{\langle y, m \rangle}.$$

También, por el punto (1) del teorema anterior se tiene que

$$\Gamma(\mathbb{1}_{A_v}) = \sum_L \Omega(\mathbb{1}_{A_v/L}) \Phi_V(\mathbb{1}_{A_v \cap (L+v)})$$

donde el sumatorio recorre los espacios paralelos a las caras de A_v .

Juntando estas dos expresiones

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \Lambda \cap P} e^{\langle y, m \rangle} &= \sum_{v \in \text{Vert}V} \sum_L \Omega(\mathbb{1}_{A_v/L}) \Phi_V(\mathbb{1}_{A_v \cap (L+v)}) \\ &= \sum_{v \in \text{Vert}V} \sum_L \Omega(\mathbb{1}_{t\text{cono}(P,v)/L}) \Phi_V(\mathbb{1}_{t\text{cono}(P,v) \cap (L+v)}) \\ &= \sum_F \Omega(\mathbb{1}_{t\text{cono}(P,F)/L_F}) \sum_{v \in \text{Vert}(F)} \Phi_{L_F}(\mathbb{1}_{t\text{cono}(F,v)}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como por el teorema 2.2 se tiene

$$\sum_{v \in \text{Vert}(F)} \Phi_{L_F}(\mathbb{1}_{t\text{cono}(F,v)}) = \int_F e^{y, \xi} d\xi_L.$$

Así se llega a la expresión

$$\sum_{m \in \Lambda \cap P} e^{\langle y, m \rangle} = \sum_F \Omega(\mathbb{1}_{t\text{cono}(P,F)/L_F}) \int_F e^{\langle y, \xi \rangle} d\xi_L$$

donde la suma se extiende a todas las caras no vacías de P incluido el propio P . Si esta expresión la evaluamos en $y = 0$ se obtiene

$$\#P \cap \Lambda = \sum_F w(t\text{cono}(P, F)/L_F, 0) \int_F 1 d\xi_L$$

que es lo que queríamos demostrar.

□

Es interesante observar cómo esta fórmula es una generalización de la fórmula de Pick que se ha presentado en la nota 2.3. Esta fórmula afirma que para el caso $d = 2$, si P es un politopo cuyos vértices son puntos reticulares, se tiene

$$\#P \cap \mathbb{Z}^2 = \text{vol}P + \#(\partial P \cap \mathbb{Z}^2) + 1.$$

Para politopos bidimensionales, la fórmula de Berline y Vergne afirma que

$$\#P \cap \Lambda = \text{vol}(P)\alpha(P, P) + \sum_{E \text{ arista}} \text{vol}(E)\alpha(P, E) + \sum_{v \in \text{Vert}P} \text{vol}(v)\alpha(P, v) \quad (3.12)$$

En el primer sumando, $\text{vol}(P)$ es el área usual de politopo. Y

$$\alpha(P, P) = \Omega(\mathbb{1}_{t\text{cono}(P,P)/V,0}) = 1.$$

En el segundo sumando, $\alpha(P, E) = \Omega(\mathbb{1}_{t\text{cono}(P,E)/L}, 0)$ como $t\text{cono}(P, E)/L$ es un cono unidimensional, podemos aplicar lo visto en el ejemplo 3.2 para concluir que $\alpha(P, E) = \frac{1}{2}$ si E es una arista de P . Dado que los vértices de P son puntos reticulares y, en L_E se considera la medida de Lebesgue de manera que el retículo $L_E \cap \Lambda$ tenga paralelepípedo fundamental con medida 1., se puede concluir que el número de puntos reticulares que se encuentran sobre aristas de P coincide con $\sum_{E \text{ arista}} \text{vol}(E)$.

Finalmente, si v es un vértice de P , se tiene $\text{vol}(v) = 1$. Para finalizar basta con demostrar que

$$\sum_{v \in \text{Vert}P} \alpha(P, v) = 1.$$

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \text{Vert}(P)} \alpha(P, v) &= \sum_{v \in \text{Vert}P} \Omega(\mathbb{1}_{t\text{cono}(P,v)}, 0) \\ &= \sum_{v \in \text{Vert}P} \Omega(\mathbb{1}_{f\text{cono}(P,v)}, 0) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como para todo politopo P se tiene la igualdad (resultado 1.5)

$$\sum_{v \in \text{Vert}P} \mathbb{1}_{f\text{cono}(P,v)} = \mathbb{1}_{\{0\}} \quad \text{módulo poliedros que contienen rectas,}$$

al aplicar la evaluación Ω y evaluar en 0 se obtiene la igualdad que queríamos. Acabamos de probar que para $d = 2$ la fórmula de Berline-Vergne coincide con la fórmula de Pick.

Ejemplo 3.3. Consideremos una vez más el politopo dado por el triángulo T de vértices

$\{(0, 0), (0, 3), (3, 0)\}$. Para ello, tenemos que calcular las aportaciones de cada uno de las caras de T . Estas caras son: $v_1, v_2, v_3, E_1, E_2, E_3$ y T .

Para las aportaciones de los vértices: se tiene que $\text{vol}(v) = 1$ y

$$\alpha(P, v) = \Omega(\mathbb{1}_{\text{tcono}(P, v, 0)}).$$

Ya se vio en el ejemplo 3.2 que si K es un cono racional regular $K = \text{co}(u_1, u_2)$, entonces se tiene que

$$\omega(K, 0) = \frac{1}{4} + \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{12} \left(\frac{1}{\langle v_1, v_1 \rangle} + \frac{1}{\langle v_2, v_2 \rangle} \right).$$

Para el vértice $(0, 0)$, se tiene $u_1 = (1, 0)$ y $u_2 = (0, 1)$ y entonces $\alpha(T, v_1) = \frac{1}{4}$. Para el vértice $v_2 = (3, 0)$, $u_1 = (-1, 1)$ y $u_2 = (-1, 0)$ de modo que $\alpha(T, v_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{8}$. De forma análoga, para $v_3 = (0, 3)$ también se obtiene $\alpha(P, v_3) = \frac{3}{8}$. Las aportaciones de todos los vértices suman 1.

Calculemos las aportaciones de las aristas. Teniendo en cuenta que se está considerando el área normalizada, no es difícil ver que $\text{vol}(E_i) = 3$ para $i = 1, 2, 3$. En el ejemplo 3.1 se ha calculado ya que para un cono racional unidimensional A se tiene

$$\omega(A, 0) = \frac{1}{2} - \beta.$$

En todos los casos se obtiene que $\alpha(T, E) = \frac{1}{2}$.

Finalmente hay que considerar la cara T . $\alpha(T, T) = 1$ y $\text{vol}T = \frac{9}{2}$.

De modo que la fórmula de Berline-Vergne queda:

$$\#P \cap \Lambda = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 10.$$

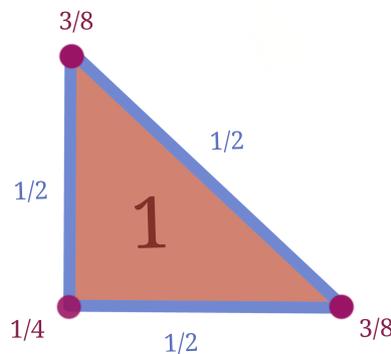


Figura 3.2: Valores de $\alpha(T, \cdot)$ para las distintas caras del triángulo T .

Capítulo 4

El cambio exponencial para semigrupos numéricos.

En el último capítulo de este trabajo se aborda el cambio exponencial para otro problema combinatorio como es el de determinar los huecos de un semigrupo numérico. Se plantea qué sucede al hacer el cambio de variable que ya se ha presentado, en la función generatriz de un semigrupo; si este cambio es viable y cómo nos puede ayudar a determinar los huecos del semigrupo. Se presenta un algoritmo original para resolver esta cuestión, este algoritmo se ha implementado para el caso de un semigrupo con 3 generadores en SageMath.

Finalmente se presenta una forma diferente de escribir la función generatriz de un semigrupo y se expone la conjetura de Wilf que es un problema abierto de gran relevancia en la teoría de semigrupos.

4.1. Funciones generatrices de semigrupos numéricos.

Un subconjunto $S \subset \mathbb{N}$ es un semigrupo si verifica

- $0 \in S$
- si $x, y \in S$ entonces $x + y \in S$.

A los elementos $h \in \mathbb{N}$ que no están en el semigrupo S los llamaremos huecos o lagunas de S . Denotaremos por H_S el conjunto de huecos del semigrupo S . Diremos que el semigrupo es numérico si tiene una cantidad finita de huecos. En este caso, denotaremos por g o género del semigrupo al número de huecos del semigrupo. Si el número de huecos es finito, existe un elemento $c \in S$ tal que para todo $x \geq c$ se tiene $x \in S$, es decir, existe un natural a partir del cual todos los siguientes pertenecen al semigrupo, el menor de estos elementos recibe el nombre de conductor y lo denotamos por c .

Dada una cantidad finita de naturales no nulos $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, el semigrupo que generan viene dado por sus combinaciones lineales finitas con coeficientes naturales, es decir:

$$S(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{a_1m_1 + a_2m_2 + \dots + a_nm_n : m_i \in \mathbb{N}\}$$

Proposición 4.1. *El semigrupo $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es numérico si y solo si $\text{mcd}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$.*

Demostración. Primero, supondremos que los elementos a_1, a_2, \dots, a_n son coprimos, para llegar a que el conjunto de huecos del semigrupo es finito o, equivalentemente, que a partir de un cierto natural n_0 , todos los naturales están en el semigrupo.

Por la identidad de Bézout se tiene que existen $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a_1b_1 + \dots + a_nb_n = 1,$$

y tomando $M = \max_i |b_i|$ y $s = Ma_1 + \dots + Ma_n \in S$, el elemento

$$s + 1 = (M + b_1)a_1 + \dots + (M + b_n)a_n$$

está en el semigrupo.

Es decir, tenemos dos elementos consecutivos $s, s + 1$ que están en el semigrupo, veamos que a partir de ellos podemos encontrar s elementos consecutivos dentro del semigrupo. En efecto,

$$(s + 1)s + 0(s + 1) = s^2 + s \in S$$

$$(s)s + 1(s + 1) = s^2 + s + 1 \in S$$

$$(s - 1)s + 2(s + 1) = s^2 + s + 2 \in S$$

$$(s - 2)s + 3(s + 1) = s^2 + s + 3 \in S$$

...

$$(s + (s - 2))s + (s - 1)(s + 1) = s^2 + s + (s - 1) \in S.$$

Y una vez que tenemos que $s \in S$ y que hay s elementos consecutivos

$$s^2 + s, s^2 + s + 2, \dots, s^2 + s + s - 1$$

en S , es fácil ver que todo natural mayor que $s^2 + s$ está en el semigrupo, ya que ese entero será la suma de uno de los s elementos anteriores con s .

Recíprocamente, si se tiene que $\text{mcd}(a_1, \dots, a_n) = d > 1$, entonces todos los elementos del semigrupo son necesariamente múltiplos de d y hay infinitos huecos del semigrupo. \square

Dados los generadores a_1, \dots, a_n de un semigrupo numérico, se conoce como problema de Frobenius o problema de las monedas, a determinar el mayor entero que no se encuentra en el semigrupo. Es decir, determinar el natural $c - 1$, que recibe el nombre de *número de Frobenius* del semigrupo.

Ejemplo 4.1. Si consideramos el semigrupo numérico

$$S(3, 4) = \{3n_1 + 4n_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$$

entonces los huecos son $H_S = \{1, 2, 5\}$, el conductor es 6 y el número de Frobenius es 5.

Dado un semigrupo S , le asociamos su función generatriz:

$$\ell_S(x) = \sum_{m \in S} x^m$$

Nos gustaría poder realizar el cambio exponencial, $x \mapsto e^y$, en esta función generatriz. Sin embargo, la sustitución en la función

$$\ell_S(e^y) = \sum_{m \in S} e^{my}$$

no está bien definida ya que $e^{my} = 1 + my + \frac{(my)^2}{2} + \dots$ es una unidad del anillo $\mathbb{C}[[y]]$ y no está bien definido el término independiente en la expresión $\ell_S(e^y)$.

Sin embargo, si c es el conductor del semigrupo S , podemos escribir

$$\ell_S(x) = \sum_{m \in S} x^m = q(x) + \sum_{m \geq c} x^m = q(x) + \frac{x^c}{1-x} \quad (4.1)$$

donde $q(x)$ es el polinomio que recoge en sus exponentes los elementos del semigrupo menores que c . Así podemos escribir

$$\ell_S(x) = \frac{q(x)(1-x) + x^c}{1-x}.$$

Es decir, la función generatriz de un semigrupo es una función racional en la que es posible hacer el cambio exponencial.

De hecho, es interesante observar que, dado que $(1 - x^{a_i})$ es un múltiplo de $(1 - x)$ para cada i , vamos a poder escribir la función racional como

$$\ell_S(x) = \prod_{i=1}^n \frac{p(x)}{1 - x^{a_i}}. \quad (4.2)$$

Nos va a interesar también conocer la forma de este polinomio $p(x)$.

Veamos ahora qué es lo que se sabe sobre la obtención de estas funciones racionales a partir de los generadores a_1, a_2, \dots, a_n del semigrupo S .

Proposición 4.2. *Sea S el semigrupo generado por a y b con $\text{mcd}(a, b) = 1$, entonces la función generatriz del semigrupo $\ell_S(x)$ se puede expresar como:*

$$\ell_S(x) = \frac{1 - x^{ab}}{(1 - x^a)(1 - x^b)}$$

Demostración. El semigrupo S es

$$S = \{\alpha a + \beta b : (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Representamos todos los elementos (algunos repetidos) del semigrupo en la siguiente tabla.

| | | | | | | |
|------------|----------------|-----------------|-----|-----------------|-----------------|---------------|
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $ab + b$ | $b + ba + a$ | $b + ba + 2a$ | ... | ... | ... | ... |
| ab | $ab + a$ | $ab + 2a$ | ... | ... | $2ab$ | ... |
| $(a - 1)b$ | $(a - 1)b + a$ | $(a - 1)b + 2a$ | ... | ... | $(a - 1)b + ba$ | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $2b$ | $2b + a$ | $2b + 2a$ | ... | $2b + (b - 1)a$ | $2b + ba$ | $2b + ba + a$ |
| b | $b + a$ | $b + 2a$ | ... | $b + (b - 1)a$ | $b + ba$ | $b + ba + a$ |
| 0 | a | $2a$ | ... | $(b - 1)a$ | ba | $ba + a$ |

Cuadro 4.1: Representación de los elementos del semigrupo S

Observamos que en la región encuadrada, que llamaremos R , están representados de forma única cada uno de los elementos del semigrupo. En efecto, los elementos de esta región son

$$R = \{\alpha a + \beta b : 0 \leq \beta \leq (a - 1), \alpha \in \mathbb{N}\}$$

Si $s = \alpha' a + \beta' b \in S$ entonces:

- Si $\beta' \leq a - 1$ entonces $s \in R$
- Si $\beta' \geq a$ entonces puedo escribir $\beta' = ak + r$ con $r \leq a - 1$ para obtener $s = a(\alpha' + k) + r\beta$ y entonces $s \in R$.

Además los elementos del semigrupo aparecen una única vez en R ; si tenemos

$$s = \alpha' a + \beta' b = \alpha a + \beta b$$

con $\beta, \beta' < a$ entonces, al ser a y b coprimos se tiene que $\beta b \equiv \beta' b \pmod{a} \Rightarrow \beta' = \beta$ y en consecuencia $\alpha' = \alpha$.

Ahora, teniendo en cuenta que $\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$ y que $\sum_{m=0}^k x^m = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$, al sumar los elementos de la banda se obtiene:

$$\begin{aligned} \ell_s(x) &= \sum_{\beta=0}^{a-1} \sum_{\alpha=0}^{\infty} x^{\alpha a + \beta b} = \frac{1}{1-x^a} \sum_{\beta=0}^{a-1} (x^b)^{\beta} = \frac{1}{1-x^a} \cdot \frac{1-(x^b)^{a-1+1}}{1-x^b} = \\ &= \frac{1-x^{ab}}{(1-x^a)(1-x^b)}. \end{aligned}$$

□

El problema de obtener esta función racional se vuelve notablemente más complicado al aumentar el número n de generadores del semigrupo S .

Para $n = 3$, en [8] se demuestra que la función generatriz de $S(a_1, a_2, a_3)$, se puede escribir como

$$\sum_{m \in S} x^m = \frac{1 - x^{p_1} - x^{p_2} - x^{p_3} + x^{p_4} + x^{p_5}}{(1 - x^{a_1})(1 - x^{a_2})(1 - x^{a_3})}$$

donde los exponentes p_i son enteros no necesariamente distintos que dependen de los generadores a_1 , a_2 y a_3 .

Para $n = 4$, en [11] se demuestra que para un semigrupo $S = S(a_1, a_2, a_3, a_4)$ se tiene que

$$\sum_{m \in S} x^m = \frac{p(x)}{(1 - x^{a_1})(1 - x^{a_2})(1 - x^{a_3})(1 - x^{a_4})}$$

donde $p(x)$ es un polinomio cuyo número de monomios con coeficiente no nulo puede ser arbitrariamente grande dependiendo de los generadores a_i .

Es decir, el carácter sencillo de la función racional asociada al semigrupo desaparece al aumentar el número de generadores. Sin embargo A.Barvinok y K.Woods demuestran en [3] que, fijado el número de generadores n , la función generatriz del semigrupo generado por a_1, a_2, \dots, a_n que habíamos visto que tiene la forma

$$\ell_S(x) = \prod_{i=1}^n \frac{p(x)}{1 - x^{a_i}}$$

puede ser calculada en tiempo polinómico. No obstante, existen expresiones explícitas precisas para el polinomio $p(x)$ que se estudiarán en un trabajo posterior.

4.2. El cambio exponencial en funciones generatrices de semigrupos numéricos.

Vamos ahora cómo podemos aprovechar el cambio de variable que hemos presentado para obtener información sobre los huecos de un semigrupo.

Sea H el conjunto de huecos de un semigrupo S , entonces se tiene que $S = \mathbb{N} \setminus H$ y en consecuencia se tiene la expresión:

$$\ell_S(x) = \sum_{m \in S} x^m = \sum_{m \in \mathbb{N}} x^m - \sum_{h \in H} x^h = \frac{1}{1-x} - \sum_{h \in H} x^h.$$

Es aquí donde vamos a hacer el cambio de variable y definimos $\bar{\ell}_S(y)$

$$\bar{\ell}_S(y) = \ell_S(e^y) = \frac{1}{1-e^y} - \sum_{h \in H} e^{yh}.$$

Para el primer sumando, consideramos el desarrollo de Taylor de la función exponencial:

$$\frac{1}{1-e^y} = \frac{1}{-y \cdot (1 + y/2 + y^2/3! + \dots)} = \frac{-1}{y \cdot U} = \frac{-U^{-1}}{y}$$

con

$$U^{-1} = 1 - 1/2y + 1/12y^2 - 1/720y^4 + \dots .$$

Denotamos por f_j al coeficiente j -ésimo de esta serie, ya hemos visto que estos dependen de los coeficientes de los Polinomios de Todd.

Para el segundo sumando

$$\sum_{h \in H} e^{yh} = \sum_{h \in H} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(hy)^j}{j!} = |H| + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h \in H} \frac{(hy)^j}{j!}$$

Entonces hemos obtenido que:

$$\ell_S(e^y) = \frac{-1}{y} \sum_{j=0}^{\infty} f_j y^j - |H| - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(hy)^j}{j!} = \sum_{j=-1}^{\infty} a_j y^j.$$

Es decir, los coeficientes de la serie de Laurent asociada a la función del semigrupo tras el cambio exponencial nos proporciona información acerca de los huecos del semigrupo.

Estos coeficientes son

$$\begin{cases} a_{-1} = -1 \\ a_j = f_{j+1} - \frac{1}{j!} \sum_{h \in H} h^j = f_{j+1} - \frac{1}{j!} N_j \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.3)$$

Es decir, del coeficiente $a_0 = \frac{1}{2} - |H|$ se deduce $|H| = g$ el número de huecos del semigrupo, al que denotaremos g , del coeficiente a_1 se deduce la suma N_1 de los huecos del semigrupo, del coeficiente a_2 la suma N_2 de los cuadrados de los huecos... y así sucesivamente. Ahora, nos interesa saber cuántos de estos términos N_i es necesario conocer para determinar los huecos del semigrupo h_1, h_2, \dots, h_g .

Es decir, tenemos un sistema de la forma:

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + \dots + h_g = N_1 \\ h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_g^2 = N_2 \\ \dots \\ h_1^i + h_2^i + \dots + h_g^i = N_i \\ \dots \end{cases} \quad (4.4)$$

y queremos saber cuántas ecuaciones necesitamos para determinar h_1, h_2, \dots, h_g .

Observamos que para un semigrupo distinto de \mathbb{N} , el primer hueco es siempre $h_1 = 1$. De modo que el sistema que nos interesa es:

$$\begin{cases} h_2 + \dots + h_g = N_1 - 1 \\ h_2^2 + \dots + h_g^2 = N_2 - 1 \\ \dots \\ h_2^i + \dots + h_g^i = N_i - 1 \\ \dots \end{cases} \quad (4.5)$$

Estos términos $N_i - 1$ son las *sumas de Newton* del polinomio mónico P_S que tiene a h_2, \dots, h_g como raíces. Utilizando las identidades de Newton es posible, a partir de estos términos N_1, N_2, \dots, N_{g-1} , obtener los coeficientes del polinomio P_S , que llamaremos *polinomio de huecos*.

Los coeficientes b_k se obtienen recursivamente a partir de los N_k como:

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = -N_1 \\ b_2 = \frac{1}{2}(-N_2b_0 - N_1b_1) \\ b_3 = \frac{1}{3}(-N_3b_0 - N_2b_1 - N_1b_2) \\ \dots \\ b_{g-1} = \frac{1}{g-1}(-N_{g-1}b_0 - N_{g-2}b_1 - \dots - N_1b_{g-2}) \end{cases} \quad (4.6)$$

Observación 4.1. Al hacer el desarrollo de Laurent de la función $\ell_S(e^y)$, y con todo lo anterior se obtiene una serie

$$\bar{\ell}_S(y) = \ell_S(e^y) = -y^{-1} + a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_ky^k + \dots .$$

Las relaciones entre los coeficientes a_j de $\bar{\ell}_S(y)$, los coeficientes b_k del polinomio de huecos y las sumas de Newton N_i son las expresadas anteriormente.

Hemos visto que basta con observar hasta el término a_{g-1} para determinar el semigrupo S a partir de sus huecos h_1, h_2, \dots, h_g . No sucede así al hacer el desarrollo en Taylor de la serie $\ell_S(x)$. En efecto, para los semigrupos

$$S = S(5, 6, 9) = \{5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, c = 14, \dots\} \quad \text{con } g = 7$$

$$S' = S(5, 6, 9, 13) = \{5, 6, c = 9, \dots\} \quad \text{con } g' = 6$$

se tiene que los desarrollos de Taylor de $\ell_S(x)$ y $\ell_{S'}(x)$ coinciden hasta el término 12. Mientras que tras hacer el cambio exponencial basta con desarrollar hasta el término 5 y 6 respectivamente.

Veamos un ejemplo sencillo en el que realizar estos cálculos.

Ejemplo 4.2. Consideramos el semigrupo generado por 3 y 4

$$S(3, 4) = \{\alpha 3 + \beta 4 : (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2\}$$

Por inspección, se tiene que su conjunto de huecos es $H_S = \{1, 2, 5\}$. Por la proposición 4.2 sabemos que

$$\ell_S(x) = \frac{1 - x^{12}}{(1 - x^3)(1 - x^4)}.$$

Y entonces

$$\ell_S(e^y) = \frac{1 - e^{12y}}{(1 - e^{3y})(1 - e^{4y})} = \frac{-(1 + \frac{12y}{2} + \frac{(12y)^2}{3!} + \dots)(1 - \frac{3y}{2} + \frac{(3y)^2}{12} + \dots)(1 - \frac{4y}{2} + \frac{(4y)^2}{12} + \dots)}{y}$$

y podemos ir obteniendo los términos a_{-1}, a_0, a_1, \dots

$$a_{-1} = -1, a_0 = \frac{-5}{2}, a_1 = \frac{-97}{12}, a_2 = -15$$

de donde se deduce que

$$g = 3, N_1 = 8, N_2 = 30.$$

Y sabemos que los huecos ordenados h_1, h_2, h_3 verifican

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 = 8 \\ h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 30 \end{cases} \quad (4.7)$$

Como además el primero de los huecos ha de ser 1, tenemos el sistema

$$\begin{cases} h_2 + h_3 = 7 \\ h_2^2 + h_3^2 = 29 \end{cases} \quad (4.8)$$

y utilizando las identidades de Newton se obtiene el polinomio

$$P(t) = t^2 - 7t + 10$$

que tiene como raíces a los huecos distintos de uno del semigrupo.

En el apéndice A se describe el código de una función que dada la función generatriz de un semigrupo $S(m_1, m_2, m_3)$, devuelve su polinomio de huecos. Con dicha función se han calculado los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.3. Para el semigrupo $S(4, 6, 13)$ con $g = 8$ y $c = 16$, se tiene

$$P_S(t) = t^7 - 52t^6 + 1095t^5 - 12050t^4 + 74399t^3 - 255888t^2 + 450585t - 311850.$$

Ejemplo 4.4. Para el semigrupo $S(5, 6, 9)$ con $g = 7$ y $c = 14$ se tiene

$$P_S(t) = t^6 - 37t^5 + 529t^4 - 3739t^3 + 13750t^2 - 24952t + 17472.$$

4.3. Series de Poincaré de semigrupos numéricos.

En esta sección estudiaremos una nueva forma de escribir la función generatriz de un semigrupo numérico $S \subset \mathbb{N}$. Para ello consideraremos el semigrupo como un subconjunto de \mathbb{Z} de modo que el conjunto de huecos será

$$H = \mathbb{Z} \setminus S = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup (\mathbb{N} \setminus S)$$

y g será el número de huecos positivos: $g = \#(\mathbb{N} \setminus S) < \infty$. Entonces el conjunto H contiene a todos los enteros negativos y a los huecos positivos.

Se tienen las series indicatrices

$$\ell_S(t) = \sum_{m \in S} t^m, \quad \ell_H(t) = \sum_{h \in H} t^h. \quad (4.9)$$

Ambas son series de Laurent con coeficientes enteros que verifican

$$\ell_S + \ell_H = \dots + t^{-2} + t^{-1} + 1 + t + t^2 + \dots$$

y por lo tanto

$$(t - 1)(\ell_S + \ell_H) = 0$$

y si definimos los conjuntos

$$I = \{s \in S : s - 1 \in H\}, \quad J = \{h \in H : h - 1 \in S\}. \quad (4.10)$$

Es decir, el conjunto de elementos del semigrupo tal que el anterior elemento no está en el semigrupo y el conjunto huecos tales que el elemento anterior está en el semigrupo. Es claro que estos dos conjuntos son finitos y que se tiene la relación

$$(t - 1)\ell_S = -(t - 1)\ell_H = \sum_{r \in J} t^r - \sum_{s \in I} t^s.$$

Así, $(t - 1)\ell_S$ y $-(t - 1)\ell_H$ son polinomios y en consecuencia ℓ_S y ℓ_H son series de Laurent racionales.

Como ya definimos en el capítulo 2, las series de Laurent racionales (RL) son aquellas series de Laurent s para las que existen dos polinomios $p, q \in \mathbb{Q}[x]$ con $q \neq 0$ de forma que $q \cdot s = p$. Para ellas, está bien definida la aplicación $\mathcal{F} : RL \rightarrow \mathbb{Q}(x)$ definida por $\mathcal{F}(s) = \frac{p}{q}$ y es un homomorfismo de PL -módulos.

Entonces definimos la serie de Poincaré de S \mathcal{P}_S y la serie de Poincaré de H \mathcal{P}_H como:

$$\mathcal{P}_S = \mathcal{F}(\ell_S) = \frac{\sum_{s \in I} t^s - \sum_{r \in J} t^r}{1 - t}, \quad \mathcal{P}_H = \mathcal{F}(\ell_H) = \frac{\sum_{r \in J} t^r - \sum_{s \in I} t^s}{1 - t}$$

y verifican $\mathcal{P}_S + \mathcal{P}_H = 0$.

Se definen también el polinomio de Poincaré de S \mathcal{Q}_S y el polinomio de Poincaré de H \mathcal{Q}_H como

$$\mathcal{Q}_S = \sum_{s \in I} t^s - \sum_{r \in J} t^r, \quad \mathcal{Q}_H = \sum_{r \in J} t^r - \sum_{s \in I} t^s = -\mathcal{Q}_S.$$

Ejemplo 4.5. Para el semigrupo $S = S(5, 6, 9) = \{0, 5, 6, 9, 10, 11, 12, c = 14, \dots\}$ se tiene $I = \{0, 5, 9, 14\}$, $J = \{1, 7, 13\}$.

$$\mathcal{Q}_S = 1 - t + t^5 - t^7 + t^9 - t^{13} + t^{14} = -\mathcal{Q}_H.$$

Proposición 4.3. Los coeficientes de los polinomios \mathcal{Q}_S y \mathcal{Q}_H son 1 y -1 alternándose según crecen los exponentes de $I \cup J$. Además, cualquiera de ellos determina el semigrupo S .

Demostración. El mínimo de $I \cup J$ es $0 \in I$, el mínimo de J es 1. Después de 1, los siguientes enteros son huecos hasta llegar al segundo elemento de I , desde este elemento hasta el segundo elemento de J son enteros que pertenecen a S , luego siguen huecos consecutivos y se sigue razonando igual alternando los signos. Observando los bloques de huecos y elementos del semigrupo queda determinado el semigrupo S . \square

El número de Frobenius f es el máximo elemento de H ya que a partir del conductor $c = f + 1$ no hay más huecos.

Definimos el siguiente conjunto

$$H' := \{h \in H : f - h \notin H\} \subset H.$$

Definición 4.1. Diremos que un semigrupo S es *simétrico* si $H = H'$.

Es decir, un semigrupo es simétrico si siempre que restamos un hueco h al número de Frobenius f obtenemos un elemento del semigrupo.

Por ejemplo $S_1 = S(5, 6, 9)$ es un semigrupo simétrico, pero $S_2 = S(5, 6, 7, 8, 9)$ no lo es. Los huecos de S_2 son $H = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{1, 2, 3, 4\}$ y $H'_2 = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{4\}$. Es decir, hay 3 elementos en $H \setminus H'$.

Cuando S es simétrico f es impar, c es par y $g = \frac{c}{2}$ ya que en $[0, f] \cap \mathbb{Z}$ la mitad son elementos de S y otra mitad son huecos.

Definición 4.2. Decimos que un elemento $m \in S$ es irreducible si no existen $m_1, m_2 \in S \setminus \{0\}$ tales que

$$m = m_1 + m_2.$$

Denotaremos por e al número de elementos irreducibles de un semigrupo S .

Proposición 4.4. (a) f es el máximo de H' .

(b) Si $h_1, h_2 \in H$ entonces $h_1 + h_2 - f \in H'$.

(c) $H' = \{f - m : m \in S\}$

(d) $e = \{h \in H' : f + h \neq h_1 + h_2 \quad \forall h_1, h_2 \in H' \setminus \{f\}\}$

Demostración. Para demostrar (a) basta darse cuenta de que $f \in H'$ ya que $f - f = 0 \notin H$.

(b) $h_1, h_2 \in H'$ entonces $f - h_1, f - h_2 \in S$ y $f - (h_1 + h_2 - f) \in S$ de modo que $h_1 + h_2 \in H'$.

(c) Si $h \in H'$ entonces $f - h \notin H$ y entonces $m = f - h \in S$ de modo que $h = f - m$.

Recíprocamente, si $h = m - f$ con $m \in S$ entonces $f - h \in S$ y $h \in H'$.

(d) $h \in H'$, $h = f - m$ con $m \in S$, dicho m es irreducible si y solo si $m = f - h \neq n_1 + n_2$ con $n_1, n_2 \in S \setminus \{0\}$. De modo que $f - h \neq (f - h_1) + (f - h_2)$ con $h_1, h_2 \in H' \setminus \{f\}$ si y solo si $f + h \neq h_1 + h_2$, $h_1, h_2 \in H' \setminus \{f\}$. \square

Se presenta ahora un problema abierto para semigrupos numéricos que es la conjetura de Wilf.

Conjetura 4.1 (Wilf, 1978). *Para todo semigrupo numérico S se tiene la siguiente desigualdad:*

$$e(c - g) \geq c$$

Ejemplo 4.6. Para el semigrupo $S_1 = S(5, 6, 9)$, $f = 13$

$$H' = H = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 13\}$$

$e = 3$ porque 5, 6 y 9 son los irreducibles (o, utilizando (d) porque solo $f + 8 = 21$, $f + 7 = 20$ y $f + 4 = 17$ no son suma de elementos de $H' \setminus \{13\}$). La conjetura de Wilf afirma:

$$3(14 - 7) \geq 14$$

Ejemplo 4.7. Para el semigrupo $S_2 = S(5, 6, 7, 8, 9)$, $f = 4$

$$H' = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{4\}$$

$e = 5$ porque 5, 6, 7, 8 y 9 son los irreducibles de S_2 (o porque $f = 4$, $f - 1 = 3$, $f - 2 = 2$, $f - 4 = 0$ y $f - 5 = -1$ no son suma de elementos de $H' \setminus \{4\} = \{\dots, -3, -2, -1\}$) y la conjetura de Wilf afirma

$$5(5 - 4) \geq 5.$$

Hay varios casos para los que ya se ha probado que la conjetura de Wilf se verifica:

- Si $e \leq 4$.
- Si S es un semigrupo irreducible (i.e. no se puede escribir como intersección de semigrupos).
- Si S es un semigrupo simétrico.
- Si S tiene un sistema de generadores que es una progresión aritmética
- Si $c \leq \frac{4}{c-g}$
- Si S es un semigrupo con $g \leq 60$.

En [7] se recopila la información que se tiene hasta hoy acerca de este problema combinatorio y se exponen muchos más casos para los que la conjetura es cierta.

4.4. Perspectivas y conclusiones.

Para finalizar este trabajo vamos a recapitular los diferentes escenarios que hemos repasado. La situación general es que tenemos una cierta información, en los casos estudiados se trata de la lista de puntos reticulares de un poliedro, los elementos de un semigrupo numérico y el volumen de un politopo, que está expresada en una función generatriz(en los casos mencionados se trata

de una serie de Laurent, una serie de potencias y una función racional respectivamente). Para los dos primeros, tenemos la información expresada en una serie de potencias en las variables x y hemos realizado el cambio de variables $x \mapsto e^y$ obteniendo así una expresión de esta serie en las variables y . Para el caso del volumen la información viene dada directamente en las variables y y está vinculada no a una serie sino a una integral que depende de los parámetros y . Para que el cambio exponencial sea viable, se requiere frecuentemente sustituir la información disponible por la de su imagen a través de una evaluación apropiada.

En los tres casos anteriores se tiene la siguiente situación: al multiplicar las expresiones en y por un cierto polinomio $q(y)$, que es producto de formas lineales, se obtiene una serie de potencias $s \in SP$. Por lo tanto, el cociente $\frac{s}{q}$ es un elemento de $SP_{(1)}$ y por lo tanto también de $SP_{(0)}$. De hecho en algunos casos, esta serie s será convergente y entonces estará en $SC_{(1)}$ o incluso definirá una función entera y estará en $\mathcal{H}_{(1)}$. Este último es el escenario que se tiene en los tres casos antes mencionados. No sucede así por ejemplo con la evaluación Ω del capítulo 3, en la que solo se tiene que s es convergente. Otro caso relevante, no considerado en la memoria es el de las series de Poincaré asociadas a filtraciones por multiíndices, para las cuales s puede ser una serie de potencias no convergente en general.

Cuando se realiza el cambio exponencial, la mencionada situación se detecta antes de realizar el cambio si la información viene dada por una serie (en general de Laurent) cuyo producto con un producto de polinomios del tipo $(x^m - 1)$ es una serie de potencias que define una función analítica para la que el cambio exponencial es viable.

Al cociente $\frac{s}{q}$ lo llamaremos *expresión exponencial de la función generatriz correspondiente*. Si consideramos la expresión como serie de potencias de s

$$s = s_0 + s_1 + s_2 + \dots$$

se tiene que

$$\frac{s}{q} = \frac{s_0}{q} + \frac{s_1}{q} + \frac{s_2}{q} + \dots$$

de modo que si d es el grado de q , entonces la componente homogénea de grado $k - d$ es la función racional homogénea $\frac{s_k}{q}$.

La definición de expresión exponencial de una cierta función generatriz genera de forma natural otros problemas interesantes. Uno de ellos podría ser: ¿cuántos términos $\frac{s_k}{q}$ del desarrollo son necesarios para recuperar la información que teníamos antes de hacer el cambio?. Naturalmente, los infinitos términos de la expresión determinan la información; la pregunta es qué cantidad finita de términos es suficiente.

Para el caso de semigrupos numéricos ya se ha demostrado que el número de huecos g es el término independiente del desarrollo de dicha serie y que basta con calcular $g - 1$ términos para determinar quiénes son estos huecos. Es decir, para recuperar toda la información hay que

mirar menos términos que en la función generatriz original.

¿Qué sucede para el caso de los puntos reticulares contenidos en un politopo P ? Si

$$\Psi_P(x) = \sum_{m \in P \cap \mathbb{Z}^d} x^m$$

ya hemos visto que el término independiente de la serie que se obtiene al desarrollar $\Psi_P(e^y)$ es el número g de puntos reticulares contenidos en P . Ahora nos preguntamos cuántos de los términos de dicho desarrollo son necesarios para determinar cuáles son estos puntos, que era la información que teníamos en $\Psi_P(x)$.

Utilizando técnicas como las de el caso de los semigrupos y el teorema de las funciones simétricas se puede concluir que basta con observar g términos en el desarrollo para recuperar toda la información.

Apéndice A: Función que calcula el polinomio de huecos de un semigrupo con 3 generadores.

El código (en SageMath 9.3) de la función `PoliDeHuecos`($poli, m_1, m_2, m_3$) que dado un semigrupo con función generatriz $\frac{poli(x)}{(1-m_1)(1-m_2)(1-m_3)}$ calcula el polinomio de huecos del semigrupo. Es decir el polinomio mónico tal que sus raíces son los huecos distintos de 1 del semigrupo.

```
[19]: R.<y>=PowerSeriesRing(QQ, default_prec=100)

def serieU(ar, trun):
    s=1
    for i in [1..trun]:
        s=s+y^i/factorial(i+1);
    return R(s)

def PoliDeHuecos(poli,m1,m2,m3):
    MiSerie=serieU(y,10)
    MiSerieInversa=(1/MiSerie).truncate(10)

    #para saber el número de huecos necesito conocer a_0, y para ello necesito
    ↪ el termino de grado 4
    #de poli(e^y)u^-1(m1*y)u^-1(m2*y)u^-1(m3*y)
    expo=y.exp(10)
    ↪
    ↪ numerador=poli(expo)*MiSerieInversa(m1*y)*MiSerieInversa(m2*y)*MiSerieInversa(m3*y)
    a0=-numerador.list()[3]/(m1*m2*m3)
    #y el número de huecos queda
    g=1/2-a0

    #Y una vez que conozco el número de huecos, sé cuantos términos del
    ↪ desarrollo de l_S(e^y) necesito
    #repito el proceso pero truncando en g+3

    MiSerieInversa=(1/MiSerie).truncate(g+5)
    efes=MiSerieInversa.list()

    expo_d=y.exp(g+4)
```

```

↳
↳numerador_d=poli(expo_d)*MiSerieInversa(m1*y)*MiSerieInversa(m2*y)*MiSerieInversa(m3*y)
  coefs_numerador_d=numerador_d.list()
  aes=[-p/(m1*m2*m3) for p in coefs_numerador_d]

  aes=aes[3:12]

  #Ahora podemos calcular las sumas de Newton N_1,N_2,...,N_{g-1}
  #depejar los N_j, necesito N1,N2,...,N_{g-1}
  enes=[(-aes[k]-efes[k+1])*factorial(k) for k in [1..g-1]]

  #por lo argumentado en la teoria considero las sumas de newton N_{k-1}
  enes=[n-1 for n in enes]
  bes=[1 for i in [1..g]]

  #El polinomio del huecos tendrá la forma p(x)=b_0*y^{g-1}+b_1*y^{g-2}+...
  ↳+b_{g-2}*x+b_{g-1}
  #Calculo los coeficientes b_0,b_1,...,b_{g-1}

  for k in [1..g-1]:
    sum=0
    for i in [0..k-1]:
      sum=sum+enes[i]*bes[k-1-i]

    bes[k]=-sum/k

  PoliDeHuecos=0
  for k in [0..g-1]:
    PoliDeHuecos=PoliDeHuecos+bes[k]*y^{g-1-k}

  return PoliDeHuecos

```

[20]: PoliDeHuecos(1-y¹²-y²⁶+y³⁸,4,6,13)

[20]: -311850 + 450585*y - 255888*y² + 74399*y³ - 12050*y⁴ + 1095*y⁵ - 52*y⁶ + y⁷

[21]: PoliDeHuecos(1-y¹⁵-y¹⁸+y³³,5,6,9)

[21]: 17472 - 24952*y + 13750*y² - 3739*y³ + 529*y⁴ - 37*y⁵ + y⁶

[]:

Bibliografía

- [1] A. Barvinok. *Integer Points in Polyhedra*. Contemporary mathematics. European Mathematical Society, 2008. ISBN 9783037190524. URL <https://books.google.com.mx/books?id=RDUQoR2MI9YC>.
- [2] Alexander Barvinok y James E Pommersheim. An algorithmic theory of lattice points in polyhedra. *New perspectives in algebraic combinatorics*, 38:91–147, 1999.
- [3] Alexander Barvinok y Kevin Woods. Short rational generating functions for lattice point problems. *Journal of the American Mathematical Society*, 16(4):957–979, 2003.
- [4] Matthias Beck, Christian Haase, y Frank Sottile. Formulas of Brion, Lawrence, and Varchenko on rational generating functions for cones. *Math. Intelligencer*, 31(1):9–17, 2009.
- [5] Nicole Berline y Michele Vergne. Local euler-maclaurin formula for polytopes. *Mosc. Math. J.*, págs. 355–386, 2007.
- [6] Michel Brion. Points entiers dans les polyèdres convexes. En *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, tomo 21, págs. 653–663. 1988.
- [7] Manuel Delgado. Conjecture of Wilf: a survey. *Numerical Semigroups: IMNS 2018*, págs. 39–62, 2020.
- [8] Graham Denham. Short generating functions for some semigroup algebras. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 10(1):R36, 2003.
- [9] Branko Grünbaum, Victor Klee, Micha A Perles, y Geoffrey Colin Shephard. *Convex polytopes*, tomo 16. Springer, 1967.
- [10] Raquel Melgar Fernández. Poliedros y conjuntos convexos. Una generalización del volumen. 2022. URL <https://uvadoc.uva.es/handle/10324/58231>.
- [11] László A Székely y Nicholas C Wormald. Generating functions for the Frobenius problem with 2 and 3 generators. *Math. Chronicle*, 15(49-57):34, 1986.
- [12] Herbert S Wilf. *generatingfunctionology*. CRC press, 2005.