



## TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Física

**El problema de valores propios para el oscilador de Darboux III con  
parámetro de curvatura negativo**

*Autor: Andrés González Lorente*

*Tutor/es:*

*Luis Miguel Nieto Calzada*

*Iván Gutiérrez Sagredo*

*Curso 2022-2023*

## Resumen

En este trabajo se estudia el oscilador de Darboux III, cuyo hamiltoniano es:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m(1 + \lambda q^2)} + \frac{m \omega^2 q^2}{2(1 + \lambda q^2)},$$

con el parámetro  $\lambda < 0$ , que es un caso no estudiado en la bibliografía especializada. El problema se aborda primero desde el punto de vista de la mecánica clásica, luego se realiza una primera cuantización semiclásica, y por último se resuelve la ecuación de Schrödinger con dos condiciones de contorno distintas. También se analizan las entropías de la información de Shannon de los estados propios de ambas resoluciones de la ecuación de Schrödinger.

## Abstract

In this project is studied the Darboux III oscillator, whose Hamiltonian is:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m(1 + \lambda q^2)} + \frac{m \omega^2 q^2}{2(1 + \lambda q^2)},$$

with the parameter  $\lambda < 0$ , which has not been studied in the literature. The problem is first approached from the point of view of classical mechanics, then a first semiclassical quantization is carried out, and finally the Schrödinger equation is solved with two different boundary conditions. The Shannon information entropies of both resolutions of the Schrödinger equation are also analyzed.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. El problema clásico</b>	<b>5</b>
<b>3. Cuantización de Bohr-Sommerfeld</b>	<b>10</b>
<b>4. La ecuación de Schrödinger en subintervalos</b>	<b>11</b>
4.1. Resolución en el intervalo $[-\frac{1}{\kappa}, \frac{1}{\kappa}]$ . . . . .	12
4.2. Resolución en el intervalo $[\frac{1}{\kappa}, \infty)$ . . . . .	17
<b>5. Entropías de la información de Shannon en los subintervalos</b>	<b>20</b>
<b>6. La ecuación de Schrödinger en toda la recta</b>	<b>21</b>
<b>7. Entropías de la información de Shannon en toda la recta</b>	<b>26</b>
<b>8. Comentarios, conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>27</b>
<b>A. Funciones cilíndrico parabólico</b>	<b>30</b>
A.1. La función hipergeométrica confluyente de Kummer . . . . .	30
A.1.1. Polinomios de Hermite . . . . .	31
A.2. La ecuación diferencial $y''(z) - (\frac{1}{4}z^2 + a)y(z) = 0$ . . . . .	31
A.3. La ecuación diferencial $y''(z) + (\frac{1}{4}z^2 - a)y(z) = 0$ . . . . .	32

# 1. Introducción

El oscilador de Darboux III en una dimensión espacial es el sistema dinámico regido por el hamiltoniano:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m(1 + \lambda q^2)} + \frac{m \omega^2 q^2}{2(1 + \lambda q^2)}, \quad (1.1)$$

donde  $p, q \in \mathbb{R}$  son las variables canónicas conjugadas de posición y momento respectivamente,  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un parámetro del problema y  $\omega$  es la frecuencia del oscilador. Se trata de un sistema máximalmente superintegrable que ha sido estudiado en [1, 2, 3, 4]. Sin embargo, todos estos resultados solamente consideran el caso  $\lambda \geq 0$ . Este sistema responde a una partícula con energía cinética:

$$T(q, p) = \frac{p^2}{2m(1 + \lambda q^2)}, \quad (1.2)$$

sometida al potencial:

$$V(q) = \frac{m \omega^2 q^2}{2(1 + \lambda q^2)}. \quad (1.3)$$

Observemos que, en todas las expresiones anteriores, en el límite  $\lambda \rightarrow 0$  se recupera el oscilador armónico clásico de frecuencia  $\omega$ . Una posible interpretación de este sistema es como un oscilador en la recta real con masa dependiente de la posición  $m(q) \propto 1 + \lambda q^2$ .

En este trabajo vamos a abordar el problema anterior, pero con parámetro de curvatura negativo, así que vamos a llamar  $\lambda = -\kappa^2 < 0$ , con  $\kappa > 0$ . Este sistema no ha sido suficientemente analizado en la literatura especializada, que, como se ha mencionado antes, siempre se ha centrado en el caso  $\lambda \geq 0$ , de modo que en lo sucesivo podemos reescribir el hamiltoniano (1.1) así:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m(1 - \kappa^2 q^2)} + \frac{m \omega^2 q^2}{2(1 - \kappa^2 q^2)}. \quad (1.4)$$

El potencial:

$$V(q) = \frac{m \omega^2 q^2}{2(1 - \kappa^2 q^2)}, \quad (1.5)$$

tiene singularidades en  $q = \pm \frac{1}{\kappa}$  y asíntotas horizontales en  $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} V(q) = -\frac{m \omega^2}{2\kappa^2}$ . En la Figura 1 se muestra la representación del potencial para varios valores de  $\kappa$ .

En [1, 2, 3] se estudia el problema en  $N$  dimensiones con el parámetro  $\lambda > 0$ . En  $N$  dimensiones la energía cinética (1.2) del problema puede interpretarse también como la de una partícula de masa constante en un espacio de curvatura no constante. Para esta energía cinética, con la elección del potencial (1.3), se trata del único

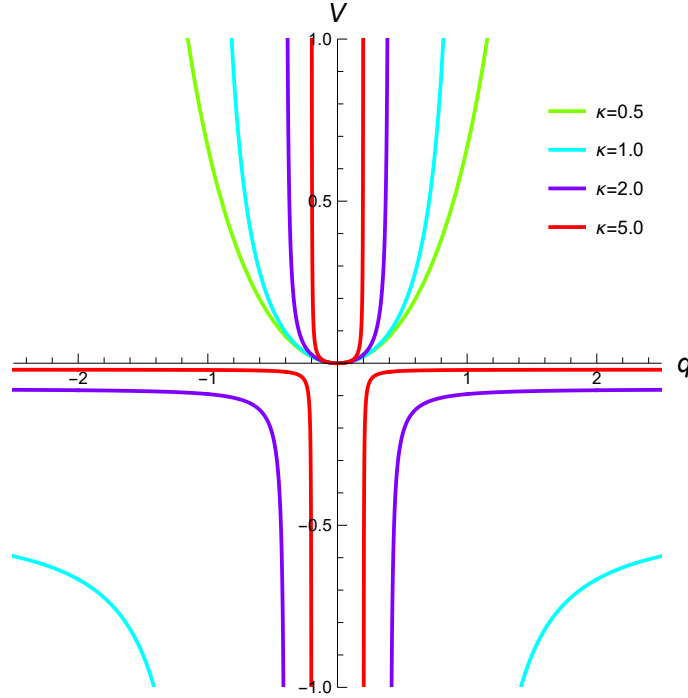


Figura 1: Potencial del problema para distintos valores de  $\kappa$ . Se han tomado los valores numéricos  $m = 1$ ,  $\omega = 1$ .

ejemplo conocido de sistema máximamente superintegrable en un espacio de curvatura no constante. Se recuerda que la condición de superintegrabilidad maximal para un sistema Hamiltoniano requiere que exista una familia de aplicaciones definidas en el espacio de fases  $\{f_j : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=1}^{2N-1}$  funcionalmente independientes, siendo  $f_1 = H$ , que restringidas a una solución de las ecuaciones del movimiento sean constantes, y además que en esta familia existan dos subfamilias de  $N$  funciones conmutativas con respecto a la estructura de Poisson canónica, cada una de ellas conteniendo al Hamiltoniano. En [2] se estudia la superintegrabilidad del sistema clásico y de distintas cuantizaciones, que resultan tener el mismo espectro. En [4] se estudia para este sistema y valores  $\lambda \geq 0$  el concepto de *entropía de la información de Shannon* [5], que para una función de densidad de probabilidad continua  $\rho$  se define por:

$$S_\rho := - \int \rho(z) \ln \rho(z) dz, \quad (1.6)$$

y se calcula para los distintos estados propios, tanto en el espacio de posiciones como en el espacio de momentos, para estudiar su relación con la curvatura, algo que, tal como han revisado los autores de este artículo, no se ha podido encontrar en la literatura hasta el momento.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 realizamos el estudio del problema desde un punto de vista de la mecánica clásica, en la sección 3 se hace el estudio semiclásico usando la cuantización de Bohr-Sommerfeld, en las secciones 4 y 6 resolvemos la correspondiente ecuación de Schrödinger de dos maneras diferentes, y en las secciones 5 y 7 analizamos las entropías de la información de Shannon de las respectivas familias de estados propios obtenidas. El trabajo finaliza con unas conclusiones y contiene también un apéndice con detalles matemáticos.

## 2. El problema clásico

En esta sección vamos a estudiar el problema asociado al hamiltoniano (1.4) desde el punto de vista de la mecánica clásica, usando el formalismo hamiltoniano. Por lo tanto, a partir de (1.4), planteamos las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m(1 - \kappa^2 q^2)}, \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{(\kappa^2 p^2 + m^2 \omega^2)q}{m(1 - \kappa^2 q^2)^2}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Un hamiltoniano genérico es una aplicación:

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{R}^{2n+1} \xrightarrow{H} \mathbb{R} \\ (t, q, p) &\longmapsto H(t, q, p) \end{aligned} \quad (2.2)$$

A lo largo de una trayectoria solución de las ecuaciones de Hamilton (2.1):

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \\ t &\longmapsto (t, q(t), p(t)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

podemos escribir la composición:

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \xrightarrow{H} \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (t, q(t), p(t)) \longmapsto H(t, q(t), p(t)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde hemos cometido el abuso de notación de utilizar la misma letra  $H$  tanto para el hamiltoniano como para la composición, y de llamar  $\frac{\partial H}{\partial t}$  a la derivada parcial de  $H(t, q, p)$  respecto del tiempo y  $\frac{dH}{dt}$  a la derivada de  $H(t, q(t), p(t))$  respecto del tiempo. En nuestro problema concreto, el hamiltoniano (1.4) no depende explícitamente del tiempo, por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= 0, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

en virtud de las ecuaciones de Hamilton (2.1). Entonces, nuestro hamiltoniano  $H$  es una cantidad que se conserva, así que podemos plantear para resolver las ecuaciones del movimiento la siguiente integral primera:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m(1 - \kappa^2 q^2)} + \frac{m\omega^2 q^2}{2(1 - \kappa^2 q^2)} = E, \quad (2.6)$$

que podemos reescribir:

$$\left(1 + \frac{2E\kappa^2}{m\omega^2}\right)\kappa^2 q^2 + \frac{\kappa^2}{m^2\omega^2} p^2 = \frac{2E\kappa^2}{m\omega^2}. \quad (2.7)$$

A continuación hacemos el siguiente cambio de escala:

$$\begin{cases} x = \kappa q, \\ y = \frac{\kappa p}{m\omega}, \\ \varepsilon = \frac{2E\kappa^2}{m\omega^2}, \end{cases} \quad (2.8)$$

y la ecuación (2.7) nos queda:

$$(1 + \varepsilon)x^2 + y^2 = \varepsilon, \quad (2.9)$$

que es la ecuación de una cónica en el plano, que será de un tipo u otro en función del parámetro  $\varepsilon$ . También vamos a escribir las ecuaciones de Hamilton (2.1) con las nuevas variables, aplicando el cambio de escala (2.8) a (2.1):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega \frac{y}{(1 - x^2)}, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega \frac{(1 + y^2)x}{(1 - x^2)^2}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ahora vamos a analizar la cónica (2.9) en función del parámetro  $\varepsilon$ . Tenemos distintas posibilidades:

- (i) Si  $\varepsilon > 0$ , los coeficientes de  $x$  e  $y$ , y el término independiente son todos positivos, luego se trata de una elipse centrada en el origen que podemos reescribir:

$$\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2 = 1, \quad (2.11)$$

y que podemos parametrizar en términos de una nueva variable  $z$  de la forma:

$$(x, y) = \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \cos z, \sqrt{\varepsilon} \sin z \right). \quad (2.12)$$

Esto es algo puramente geométrico. Teniendo en cuenta la dinámica del sistema, este parámetro será una función del tiempo  $z(t)$  a determinar. Se tiene que el recorrido de las variables  $x, y$  es finito:

$$x \in \left[ -\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \right], \quad y \in [-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}]. \quad (2.13)$$

Escribimos  $y$  en función de  $x$  a partir de (2.9)

$$y = \pm \sqrt{\varepsilon - (1+\varepsilon)x^2}, \quad (2.14)$$

donde los signos  $+$  y  $-$  corresponden respectivamente a los subconjuntos de la trayectoria contenidos en el semiplano superior y en el semiplano inferior. A partir de la primera ecuación de Hamilton (2.10),

$$x'(t) = \omega \frac{y(x(t))}{1-x(t)^2}, \quad (2.15)$$

para calcular el periodo  $T$  del movimiento, reescribimos la ecuación anterior:

$$1 = \frac{1-x(t)^2}{\omega y(x(t))} x'(t), \quad (2.16)$$

y la integramos. Para ello, nos aprovechamos de la simetría de las trayectorias, primero, integrando dos veces en la parte contenida en el semiplano superior y segundo integrando dos veces desde la posición  $x = 0$  hasta el primer punto de retorno  $x = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ :

$$\int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{1-x(t)^2}{y(x(t))} x'(t) dt, \quad (2.17)$$

es decir:

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}} \frac{1-x^2}{y(x)} dx = \frac{1}{\omega} \int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}} \frac{1-x^2}{\sqrt{\varepsilon - (1+\varepsilon)x^2}} dx. \quad (2.18)$$

Hacemos un primer cambio de variable  $x^2 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} u^2$  en la integral anterior y resulta

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^1 \frac{1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} u^2}{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon u^2}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} du = \frac{4}{\omega(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 \frac{1+\varepsilon + \varepsilon u^2}{\sqrt{1-u^2}} du, \quad (2.19)$$



y a continuación otro cambio de variable  $u = \text{sen } s$ , con lo cual

$$T = \frac{4}{\omega(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \varepsilon + \varepsilon \text{sen}^2 s) ds = \frac{\pi(2+\varepsilon)}{\omega(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.20)$$

Y deshaciendo el cambio (2.8):

$$T = \pi \frac{(2\omega^2 + \frac{2E\kappa^2}{m})}{(\omega^2 + \frac{2E\kappa^2}{m})^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.21)$$

que depende de la energía. Notemos que por un lado, si  $\kappa = 0$ , recuperamos el periodo del oscilador armónico:

$$T_{OA} = \pi \frac{2\omega^2}{\omega^3} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (2.22)$$

y que haciendo el límite  $\omega \rightarrow 0$ :

$$T_0 = \pi \left( \frac{m}{2E\kappa^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.23)$$

que es el período de una partícula clásica que se mueve confinada en un pozo infinito de potencial.

Para intentar resolver las ecuaciones del movimiento, sustituimos la parametrización (2.12) en la primera de las ecuaciones de Hamilton (2.10):

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \text{sen}(z(t)) z'(t) = \omega \frac{\sqrt{\varepsilon} \text{sen}(z(t))}{1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cos^2(z(t))}, \quad (2.24)$$

$$\omega(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}} + \left(1 + \varepsilon - \varepsilon \cos^2(z(t))\right) z'(t) = 0. \quad (2.25)$$

Podemos integrar esta expresión para obtener una solución implícita de  $z(t)$ :

$$0 = \omega(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}} t + \int (1 + \varepsilon - \varepsilon \cos^2 z) z' dt, \quad (2.26)$$

$$\omega(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}} t + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) z - \frac{\varepsilon}{4} \text{sen } 2z + C = 0, \quad (2.27)$$

donde la constante  $C$  se toma en función de las condiciones iniciales. La expresión (2.27) nos da la forma implícita de las trayectorias, ya que de ahí  $z(t)$  nos muestra cómo se recorren en el tiempo las elipses (2.9).

- (ii) Si  $\varepsilon = 0$ , la cónica (2.9) se transforma en  $x^2 + y^2 = 0$ , luego ha de ser  $x = y = 0$ . No hay movimiento en este caso.

- (iii) Si  $-1 < \varepsilon < 0$ , es decir,  $-\frac{m\omega^2}{2\kappa^2} < E < 0$ , los coeficientes de  $x$  e  $y$  en (2.9) son positivos, pero el término independiente es negativo. Luego la ecuación de la cónica no tiene soluciones reales. Nótese que este intervalo de valores de energía es el comprendido entre 0 y la asíntota horizontal del potencial.
- (iv) Si  $\varepsilon = -1$ ;  $E = -\frac{m\omega^2}{2\kappa^2}$ , la ecuación (2.9) se transforma en  $y^2 = -1$ , que no tiene soluciones reales.
- (v) Si  $\varepsilon < -1$ , es decir,  $E < -\frac{m\omega^2}{2\kappa^2}$ , los coeficientes de  $x$  e  $y$  en (2.9) tienen signos opuestos,  $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$ ,  $\varepsilon < 0$ , luego la cónica se trata de un hipérbola, que podemos parametrizar mediante  $v$ :

$$(x, y) = \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \cosh v, \sqrt{-\varepsilon} \sinh v \right), \quad (2.28)$$

que si se tiene en cuenta la dinámica del sistema, el parámetro  $v$  será una función  $v(t)$  a determinar. Esto se hace de manera similar a cómo hemos hallado la función  $z(t)$  en el apartado (i).

La Figura 2 muestra las trayectorias que describe la partícula del sistema en función del parámetro  $\varepsilon$  para los casos que tienen solución real no trivial, que son (i) y (v).

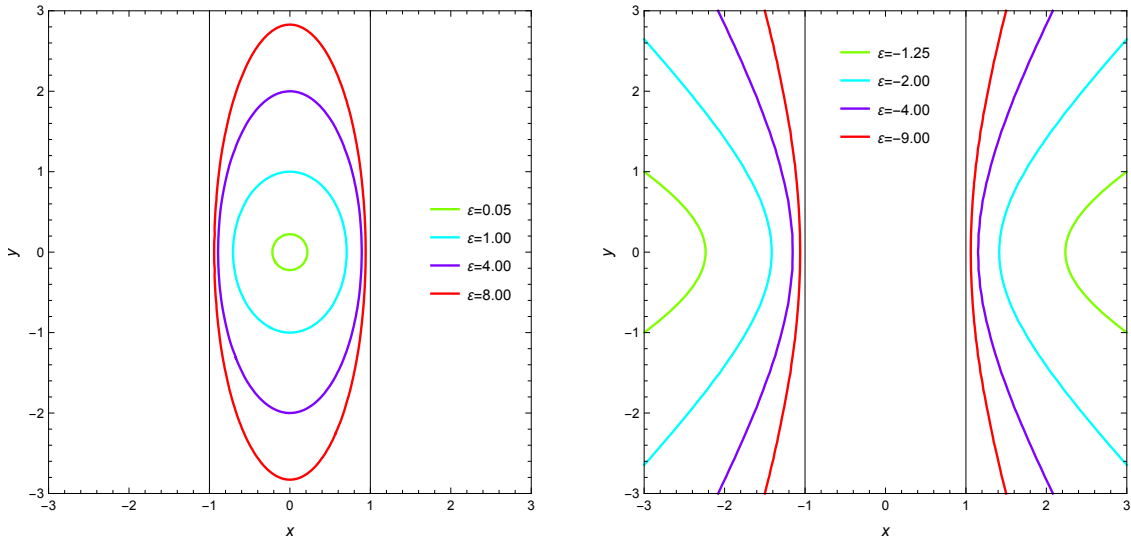


Figura 2: Trayectorias del sistema hamiltoniano en función del parámetro de energía adimensional  $\varepsilon$ . A la izquierda, elipses, para  $\varepsilon > 0$ ; a la derecha, hipérbolas, para  $\varepsilon < -1$ . Las rectas verticales son  $x = \pm 1$ , que son el límite de las soluciones cuando  $\varepsilon \rightarrow \pm\infty$ . Se ha tomado para las gráficas  $m = \omega = 1$ .

### 3. Cuantización de Bohr-Sommerfeld

En esta sección vamos a analizar el oscilador de Darboux III desde el punto de vista de lo que se suele llamar *teoría cuántica antigua*. Vamos a tratar solamente el caso  $E > 0$ , en que, como hemos visto en el apartado anterior, clásicamente la partícula se mueve en trayectorias acotadas. Para efectuar este análisis semiclásico, lo que debemos hacer es imponer la *condición de cuantización de Bohr-Sommerfeld* a las variables  $(q, p)$  del hamiltoniano en las curvas cerradas (órbitas clásicas) de función hamiltoniana constante, es decir:

$$\oint_{H(q,p)=E} p dq = 2\pi n\hbar, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Volviendo a hacer el cambio de escala (2.8), podemos resolver fácilmente esta integral:

$$\frac{m\omega}{\kappa^2} \oint_{(1+\epsilon)x^2+y^2=\epsilon} y dx = 2\pi n\hbar \quad (3.2)$$

Resolvemos la integral empleando de nuevo la simetría en el espacio de fases de las soluciones:

$$\oint_{(1+\epsilon)x^2+y^2=\epsilon} y dx = 4 \int_0^{\sqrt{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}} \sqrt{\epsilon - (1+\epsilon)x^2} dx = \frac{\pi \epsilon}{\sqrt{1+\epsilon}} \quad (3.3)$$

Sustituyendo (3.3) en (3.2) se obtiene:

$$\frac{m\omega}{\kappa^2} \frac{\epsilon}{\sqrt{1+\epsilon}} = 2n\hbar, \quad (3.4)$$

lo que permite calcular  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \frac{2n^2\hbar^2\kappa^4}{m^2\omega^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{m^2\omega^2}{n^2\hbar^2\kappa^4}} \right). \quad (3.5)$$

Como estamos analizando las soluciones del problema con  $\epsilon > 0$ , debemos tomar la raíz positiva en la expresión anterior, de modo que las posibles energías del sistema, según esta cuantización, serían:

$$\epsilon_n = \frac{2n^2\hbar^2\kappa^4}{m^2\omega^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{m^2\omega^2}{n^2\hbar^2\kappa^4}} \right). \quad (3.6)$$

Deshaciendo el cambio (2.8) se llega a:

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2\kappa^2}{m} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{m^2\omega^2}{n^2\hbar^2\kappa^4}} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Es interesante calcular aquí dos límites. En primer lugar, si  $\kappa \rightarrow 0$  se tiene

$$E_n^{OA} = n\omega\hbar, \quad (3.8)$$

que coincide con la energía de un oscilador armónico según la cuantización de Bohr-Sommerfeld. Por otro lado, si  $\omega = 0$  se tiene

$$E_n^0 = \frac{2n^2\hbar^2\kappa^2}{m}, \quad (3.9)$$

que sería el resultado de la cuantización de Bohr-Sommerfeld de una partícula en un pozo infinito de anchura  $2/\kappa$ .

## 4. La ecuación de Schrödinger en subintervalos

Ahora vamos a resolver el problema cuántico que surge cuando se considera el operador hamiltoniano asociado a la función hamiltoniana (1.4):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m(1 - \kappa^2 q^2)} \partial^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2(1 - \kappa^2 q^2)}. \quad (4.1)$$

Planteamos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para los valores propios y las funciones propias:

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi(q) &= E\psi(q), \\ -\frac{\hbar^2}{2m(1 - \kappa^2 q^2)} \psi''(q) + \frac{m\omega^2 q^2}{2(1 - \kappa^2 q^2)} \psi(q) &= E\psi(q), \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde la ' indica derivada respecto de la variable  $q$ . Vamos a modificar un poco la ecuación anterior, que operando se puede expresar así:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \frac{m\omega^2 + 2\kappa^2 E}{2} q^2 \psi = E\psi. \quad (4.3)$$

Recordemos que el potencial (1.5) tiene singularidades en  $q = \pm\frac{1}{\kappa}$ ; pueden intuirse las asíntotas verticales en la Figura 1. Esto sugiere que la partícula podría estar confinada en los subintervalos de la recta delimitados por las singularidades mencionadas al principio de este párrafo. En esta sección analizaremos la ecuación de Schrödinger teniendo en cuenta el confinamiento de la partícula, que podría estar en principio tanto confinada en  $[-\frac{1}{\kappa}, \frac{1}{\kappa}]$  como fuera de dicho intervalo. En la Sección 6 resolveremos la ecuación de Schrödinger asumiendo que la partícula no está confinada, y por tanto puede encontrarse por toda la recta.

#### 4.1. Resolución en el intervalo $\left[-\frac{1}{\kappa}, \frac{1}{\kappa}\right]$

Notemos que en este intervalo el potencial es mayor que cero, luego todos los estados que sean solución han de ser con  $E \geq 0$ ;  $m\omega^2 + 2\kappa^2 E > 0$ . Llamamos:

$$\Omega^2 = m\omega^2 + 2\kappa^2 E, \quad (4.4)$$

de modo que la ecuación (4.3) se puede escribir así:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(q) + \frac{\Omega^2}{2} q^2 \psi(q) = E \psi(q). \quad (4.5)$$

Ahora vamos a hacer el cambio de variable:

$$q = \frac{x}{\kappa}, \quad \varphi(x) = \psi(q), \quad (4.6)$$

en la ecuación (4.5) para reducir el intervalo a  $[-1, 1]$ :

$$-\varphi''(x) + \frac{m\Omega^2}{\kappa^4 \hbar^2} x^2 \varphi(x) = \frac{2mE}{\kappa^2 \hbar^2} \varphi(x). \quad (4.7)$$

Llamemos:

$$\gamma^2 = \frac{m\Omega^2}{\kappa^4 \hbar^2}, \quad \epsilon = \frac{2mE}{\kappa^2 \hbar^2}, \quad (4.8)$$

donde  $\epsilon > 0$ . La ecuación nos queda:

$$-\varphi''(x) + \gamma^2 x^2 \varphi(x) = \epsilon \varphi(x). \quad (4.9)$$

La reescribimos:

$$\varphi''(x) - (\gamma^2 x^2 - \epsilon) \varphi(x) = 0. \quad (4.10)$$

Si suponemos que la partícula está confinada en este intervalo, lo apropiado sería imponerle a la función de onda condiciones frontera de Dirichlet homogéneas:

$$\begin{cases} \varphi''(x) - (\gamma^2 x^2 - \epsilon) \varphi(x) = 0, & x \in (-1, 1), \\ \varphi(1) = \varphi(-1) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Hacemos un nuevo cambio de variable para transformar la ecuación en una de la forma presentada en el Apéndice A.2:

$$x = \frac{z}{\sqrt{2\gamma}}, \quad y(z) = \varphi(x). \quad (4.12)$$

Con ello, la ecuación (4.9) se convierte en:

$$y''(z) - \left(\frac{1}{4} z^2 - \frac{\epsilon}{2\gamma}\right) y(z) = 0, \quad (4.13)$$

Transformando la ecuación (4.10) en (4.13), vamos a expresar la solución general como combinación lineal de las dos funciones que aparecen en (A.7), ver apéndice A.2:

$$y(z) = A e^{-\frac{z^2}{4}} M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) + B z e^{-\frac{z^2}{4}} M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right), \quad (4.14)$$

siendo  $A$  y  $B$  constantes arbitrarias y  $M(a, b; z)$  la función hipergeométrica confluyente de Kummer. Deshaciendo el cambio (4.12) se obtiene:

$$\varphi(x) = A e^{-\frac{\gamma x^2}{2}} M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{1}{2}; \gamma x^2\right) + B x e^{-\frac{\gamma x^2}{2}} M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{3}{2}; \gamma x^2\right). \quad (4.15)$$

Si imponemos las condiciones frontera de (4.11) a la solución general (4.15) obtenemos:

$$\begin{cases} 0 = \varphi(1) = A e^{-\frac{\gamma}{2}} M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{1}{2}; \gamma\right) + B e^{-\frac{\gamma}{2}} M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{3}{2}; \gamma\right), \\ 0 = \varphi(-1) = A e^{-\frac{\gamma}{2}} M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{1}{2}; \gamma\right) - B e^{-\frac{\gamma}{2}} M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{3}{2}; \gamma\right), \end{cases}$$

o lo que es equivalente:

$$\begin{cases} 0 = A M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{1}{2}; \gamma\right) + B M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{3}{2}; \gamma\right), \\ 0 = A M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{1}{2}; \gamma\right) - B M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{3}{2}; \gamma\right). \end{cases} \quad (4.16)$$

Tenemos un sistema con matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{1}{2}; \gamma\right) & M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{3}{2}; \gamma\right) \\ M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{1}{2}; \gamma\right) & -M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{3}{2}; \gamma\right) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

y vector de términos independientes:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Para que el problema de Sturm-Liouville tenga soluciones no triviales, es necesario que el sistema sea compatible indeterminado, lo cual ocurre si:

$$M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{1}{2}; \gamma\right) = 0, \quad (4.19)$$

o:

$$M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{3}{2}; \gamma\right) = 0. \quad (4.20)$$

Recordemos de la definición de los parámetros (4.8) la incógnita en este problema, que es  $E$ , que está presente tanto en  $\epsilon$  como en  $\gamma$ :

$$\gamma = \sqrt{\frac{m(m\omega^2 + 2\kappa^2 E)}{\kappa^4 \hbar^2}} = \sqrt{\frac{m^2 \omega^2}{\kappa^4 \hbar^2} + \epsilon}. \quad (4.21)$$

Sea:

$$\mu = \frac{m^2 \omega^2}{\kappa^4 \hbar^2} \Rightarrow \gamma = \sqrt{\mu + \epsilon}. \quad (4.22)$$

La solución general (4.15) en términos de  $\mu$  y  $\epsilon$  queda:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & A e^{-\frac{\sqrt{\mu+\epsilon} x^2}{2}} M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\sqrt{\mu+\epsilon}}, \frac{1}{2}; \sqrt{\mu+\epsilon} x^2\right) \\ & + B x e^{-\frac{\sqrt{\mu+\epsilon} x^2}{2}} M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\sqrt{\mu+\epsilon}}, \frac{1}{2}; \sqrt{\mu+\epsilon} x^2\right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

debiendo cumplirse que:

$$M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\sqrt{\mu+\epsilon}}, \frac{1}{2}; \sqrt{\mu+\epsilon} x^2\right) = 0, \quad (4.24)$$

o:

$$M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\sqrt{\mu+\epsilon}}, \frac{3}{2}; \sqrt{\mu+\epsilon} x^2\right) = 0. \quad (4.25)$$

Mostramos la representación gráfica de las ecuaciones implícitas (4.24) y (4.25) en la Figura 3, donde se observa que para un  $\mu$  dado, las soluciones de las dos ecuaciones anteriores van alternándose.

De las ecuaciones (4.24) y (4.25) obtenemos sendas sucesiones de valores propios,  $(\epsilon_{2n})_{n=0}^{\infty}$  y  $(\epsilon_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$  respectivamente. Las funciones propias son las pares:

$$\begin{aligned} \varphi_{2n}(x) = & A_{2n} e^{-\frac{\sqrt{\mu+\epsilon_{2n}} x^2}{2}} M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon_{2n}}{4\sqrt{\mu+\epsilon_{2n}}}, \frac{1}{2}; \sqrt{\mu+\epsilon_{2n}} x^2\right) \\ & + B_{2n} x e^{-\frac{\sqrt{\mu+\epsilon_{2n}} x^2}{2}} M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon_{2n}}{4\sqrt{\mu+\epsilon_{2n}}}, \frac{1}{2}; \sqrt{\mu+\epsilon_{2n}} x^2\right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

y las impares:

$$\begin{aligned} \varphi_{2n+1}(x) = & A_{2n+1} e^{-\frac{\sqrt{\mu+\epsilon_{2n+1}} x^2}{2}} M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon_{2n+1}}{4\sqrt{\mu+\epsilon_{2n+1}}}, \frac{1}{2}; \sqrt{\mu+\epsilon_{2n+1}} x^2\right) \\ & + B_{2n+1} x e^{-\frac{\sqrt{\mu+\epsilon_{2n+1}} x^2}{2}} M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon_{2n+1}}{4\sqrt{\mu+\epsilon_{2n+1}}}, \frac{3}{2}; \sqrt{\mu+\epsilon_{2n+1}} x^2\right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

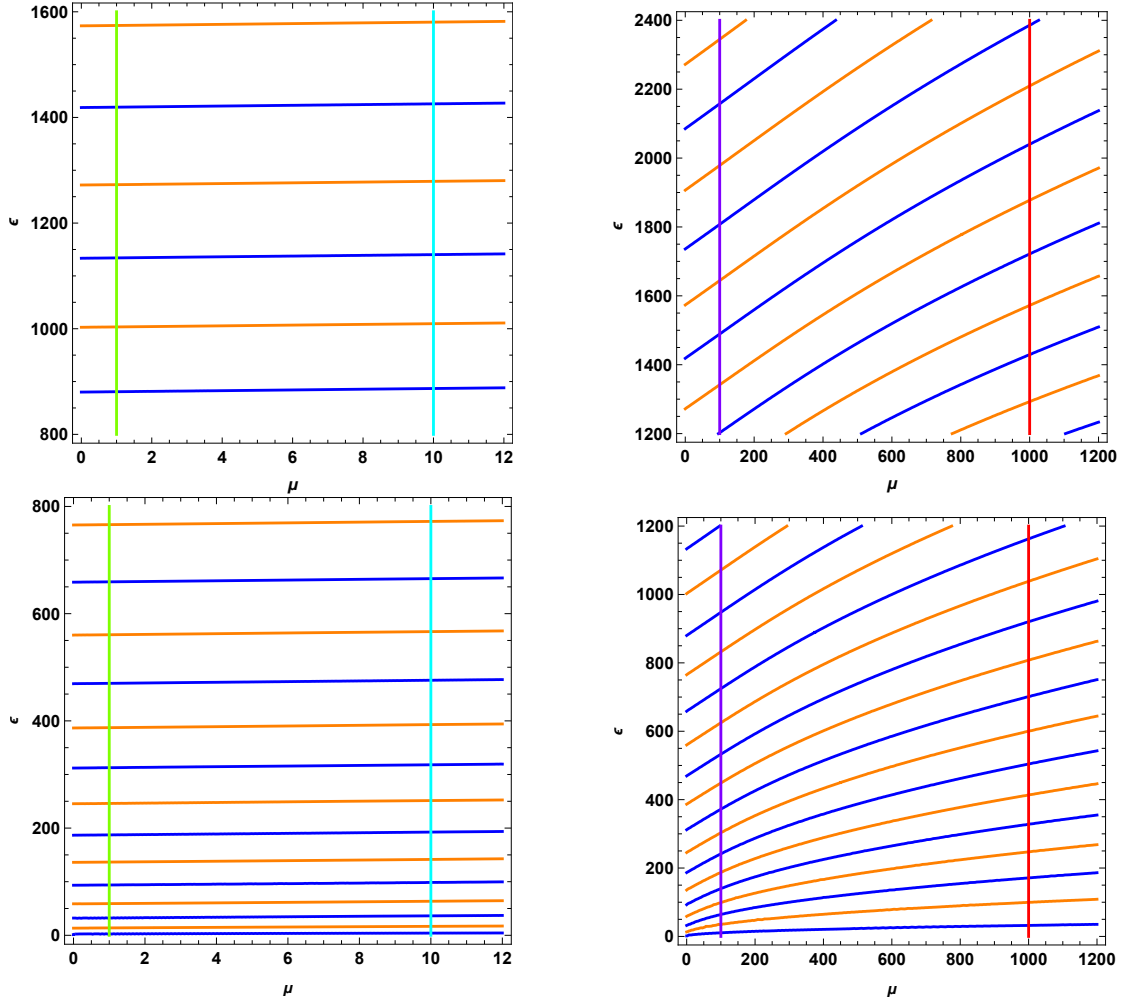


Figura 3: Representación de las ecuaciones (4.24) (curvas azules) y (4.25) (curvas naranjas), y su intersección con las rectas  $\mu = 1$  (verde),  $\mu = 10$  (cian),  $\mu = 100$  (morado) y  $\mu = 1000$  (rojo). Obsérvese que los valores de  $\epsilon$  que, para  $\mu$  fijo, cumplen (4.24) no cumplen (4.25) y viceversa.

a las cuales si imponemos las condiciones frontera:

$$0 = B_{2n} e^{-\frac{\sqrt{\mu+\epsilon_{2n}}}{2}} M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon_{2n}}{4\sqrt{\mu+\epsilon_{2n}}}, \frac{3}{2}; \sqrt{\mu+\epsilon_{2n}}\right), \quad (4.28)$$

$$0 = A_{2n+1} e^{-\frac{\sqrt{\mu+\epsilon_{2n+1}}}{2}} M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon_{2n+1}}{4\sqrt{\mu+\epsilon_{2n+1}}}, \frac{1}{2}; \sqrt{\mu+\epsilon_{2n+1}}\right). \quad (4.29)$$

Para que se verifiquen, ha de ser también  $B_{2n} = A_{2n+1} = 0$ , de modo que las



$n$	$\epsilon_n$			
	$\mu = 1$	$\mu = 10$	$\mu = 100$	$\mu = 1000$
0	2.9681	4.1062	10.5146	32.1267
1	13.8241	16.6722	34.8540	99.4740
2	32.5766	36.3288	64.1210	171.1072
3	59.2955	63.5988	98.9134	247.2111
4	93.9985	98.6785	139.7798	327.9722
5	136.6926	141.6511	187.1911	413.5726
6	187.3809	192.5568	241.5255	504.1907
7	246.0654	251.4176	303.0707	600.0000
8	312.7470	318.2464	372.0380	701.1689
9	387.4265	393.0516	448.5791	807.8598
10	470.1044	475.8385	532.8019	920.2288
11	560.7809	566.6110	624.7833	1038.4255
12	659.4564	665.3719	724.5786	1162.5926
13	766.1311	772.1233	832.2280	1292.8658
14	880.8049	886.8668	947.7611	1429.3738
15	1003.4782	1009.6036	1071.2000	1572.2384
16	1134.1509	1140.3346	1202.5614	1721.5745
17	1272.8232	1279.0606	1341.8584	1877.4904
18	1419.4951	1425.7823	1489.1010	2040.0880
19	1574.1666	1580.5002	1644.2972	2209.4610

Cuadro 1: Tabla con los valores propios para el problema en el intervalo  $[-1, 1]$ .

soluciones de la ecuación de Schrödinger con las condiciones de contorno dadas son:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{2n}(x) &= A_{2n} e^{-\frac{\sqrt{\mu+\epsilon_{2n}} x^2}{2}} M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon_{2n}}{4\sqrt{\mu+\epsilon_{2n}}}, \frac{1}{2}; \sqrt{\mu+\epsilon_{2n}} x^2\right) \\ \varphi_{2n+1}(x) &= B_{2n+1} x e^{-\frac{\sqrt{\mu+\epsilon_{2n+1}} x^2}{2}} M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon_{2n+1}}{4\sqrt{\mu+\epsilon_{2n+1}}}, \frac{3}{2}; \sqrt{\mu+\epsilon_{2n+1}} x^2\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

donde  $(A_{2n})_{n=0}^{\infty}$  y  $(B_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$  son las constantes de normalización. En el Cuadro [1](#) se muestran los valores propios  $\epsilon_n$  para algunos valores del parámetro  $\mu$ , y se representan gráficamente en la Figura [4](#).

En cuanto a las constantes de normalización, se calculan también numéricamente para así representar las funciones propias ya normalizadas, que pueden verse en las Figuras [5](#) y [6](#).

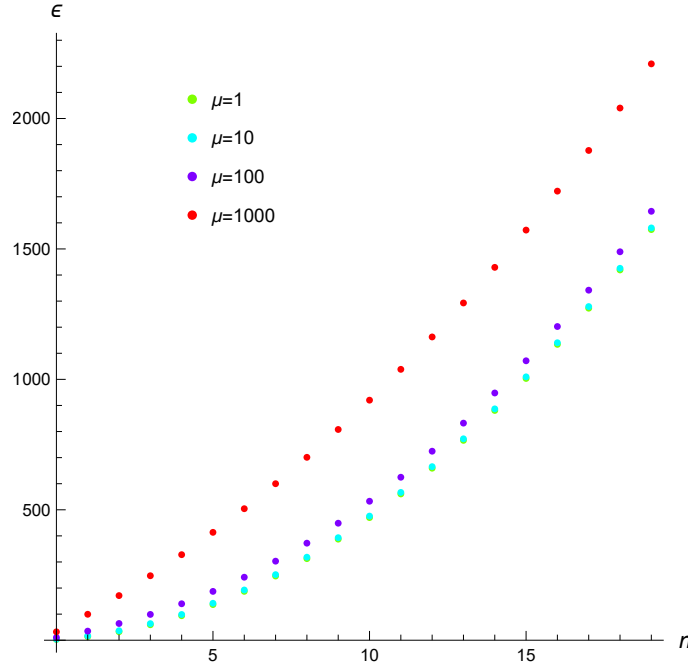


Figura 4: Representación gráfica de los primeros 20 valores propios para distintos valores del parámetro  $\mu$ . Para  $\mu = 1$  y  $\mu = 10$  los valores propios están prácticamente solapados, puede observarse la diferencia entre ambos en el Cuadro [I](#).

## 4.2. Resolución en el intervalo $[\frac{1}{\kappa}, \infty)$

En este intervalo el potencial está acotado por la asíntota horizontal  $V = -\frac{m\omega^2}{2\kappa^2}$ . Luego todos los posibles estados que sean solución de la ecuación de Schrödinger lo han de ser con  $E < -\frac{m\omega^2}{2\kappa^2}$ ;  $-2\kappa^2 E > m\omega^2$ ;  $m\omega^2 + 2\kappa^2 E < 0$ . Por ello, definamos ahora:

$$\Omega^2 = -(m\omega^2 + 2\kappa^2 E), \quad (4.31)$$

con lo que la ecuación [\(4.3\)](#) se transforma en:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' - \frac{\Omega^2}{2} q^2 \psi = E \psi. \quad (4.32)$$

Si hacemos el cambio de variable [\(4.6\)](#), para convertir el intervalo en  $[1, \infty)$ , obtenemos la ecuación:

$$-\varphi'' - \frac{m\Omega^2}{\kappa^4 \hbar^2} x^2 \varphi = \frac{2mE}{\kappa^2 \hbar^2} \varphi. \quad (4.33)$$

Sean de nuevo los parámetros  $\gamma$ ,  $\epsilon$  definidos en [\(4.8\)](#), con la diferencia de que ahora  $\epsilon = \frac{2mE}{\kappa^2 \hbar^2} < -\frac{m^2 \omega^2}{\kappa^4 \hbar^2} < 0$ . La ecuación nos queda:

$$-\varphi'' - \gamma^2 x^2 \varphi = \epsilon \varphi, \quad (4.34)$$

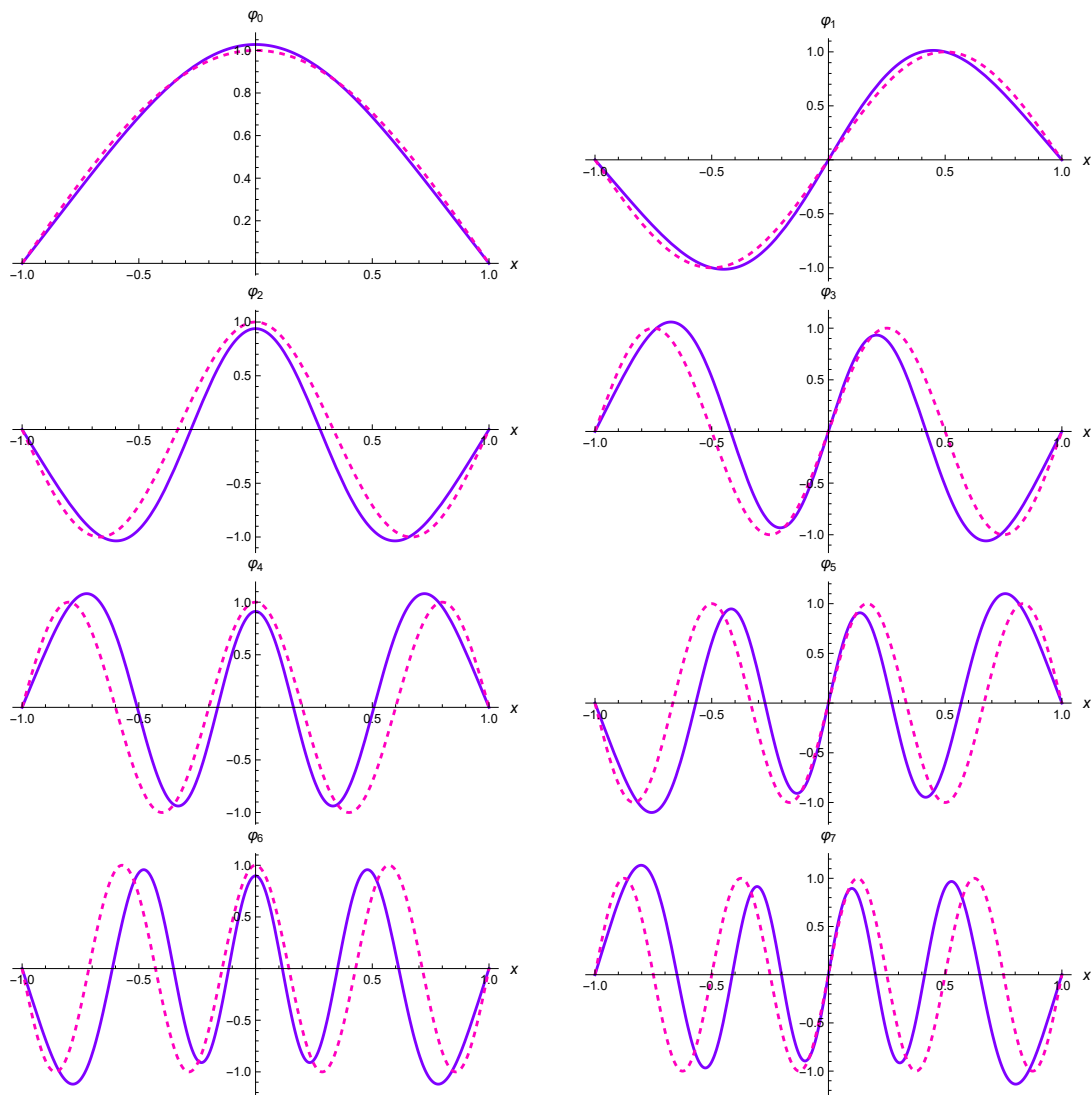


Figura 5: Representación gráfica de las primeras funciones propias  $\varphi_n(x)$  (líneas continuas) para  $\mu = 1$ , comparadas con las funciones propias del pozo infinito (líneas discontinuas). Se observa que las primeras son bastante parecidas mientras a medida que  $n$  crece la diferencia entre las curvas continuas y discontinuas se hace más notable.

que reescribimos así:

$$\varphi''(x) + (\gamma^2 x^2 + \epsilon) \varphi(x) = 0. \quad (4.35)$$

Para que la solución sea una función de  $L^2([1, +\infty))$ , es necesario que tenga límite 0 en  $+\infty$ . Por otra parte, si consideramos la barrera de potencial impenetrable, la otra condición frontera apropiada sería la anulación también en  $x = 1$ . El problema

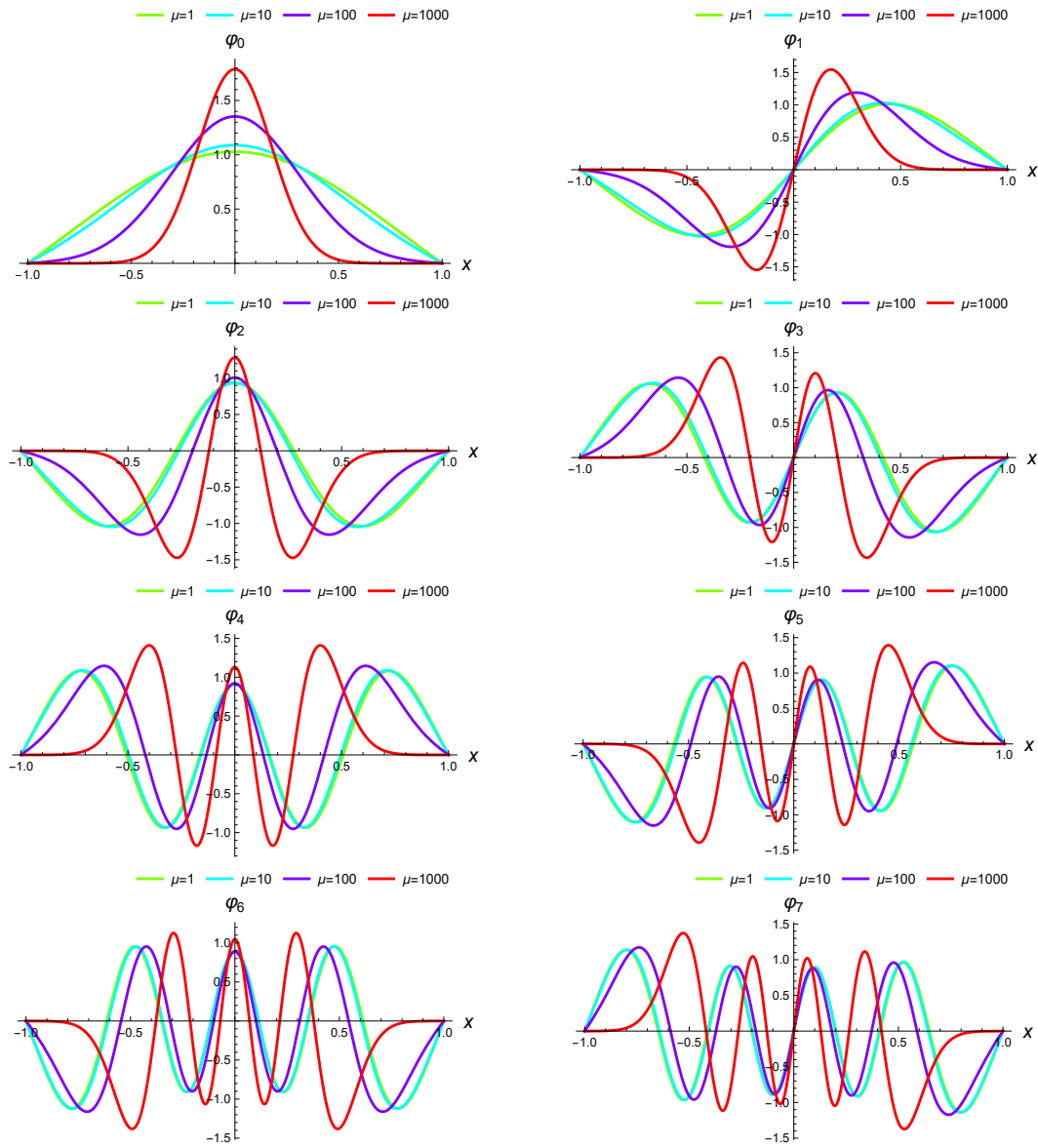


Figura 6: Representación gráfica de las primeras funciones propias  $\varphi_n$  comparando distintos valores de  $\mu$ . El parecido entre las funciones propias para  $\mu = 1$  y  $\mu = 10$  es notable, al igual que sucede con los valores propios, y de hecho parece aumentar a medida que se incrementa  $n$ .

planteado es entonces:

$$\begin{cases} \varphi''(x) + (\gamma^2 x^2 + \epsilon) \varphi(x) = 0, & x \in (1, +\infty), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \varphi(1) = 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Ahora hacemos el cambio de variable (4.12) para transformar la ecuación en una de la forma presentada en el Apéndice A.3. Se obtiene:

$$y''(z) + \left(\frac{1}{4}z^2 + \frac{\epsilon}{2\gamma}\right)y(z) = 0. \quad (4.37)$$

Transformamos la ecuación (4.35) en (4.37) y esta vez expresamos la solución general en términos de (A.11). Como se ha escrito en el Apéndice A.3, las funciones  $W(a; \pm z)$ , que forman una base del espacio de soluciones, se comportan asintóticamente como una función que no es de cuadrado integrable. Luego el problema de Sturm-Liouville no tiene soluciones de  $L^2([1, +\infty))$ .

## 5. Entropías de la información de Shannon en los subintervalos

En la introducción se presenta la definición de entropías de la información de Shannon para una función de densidad de probabilidad, que en nuestro caso serán los cuadrados de los módulos de las funciones propias  $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$  soluciones de la ecuación de Schrodinger:

$$S_n = - \int_{-1}^1 |\varphi_n(x)|^2 \ln |\varphi_n(x)|^2 dx. \quad (5.1)$$

En el Cuadro 2 se muestran estos valores para los 20 primeros estados propios para distintos valores del parámetro  $\mu$ , y se representan también en una gráfica en la Figura 7.

Las entropías de la información de Shannon del pozo infinito son todas iguales, ya que la integral (5.1) para los estados propios es siempre el mismo valor, que se menciona en [6]:

$$\int_{-1}^1 \cos^2 \frac{n\pi x}{2} \ln \cos^2 \frac{n\pi x}{2} dx = \int_{-1}^1 \sin^2 \frac{n\pi x}{2} \ln \sin^2 \frac{n\pi x}{2} dx = 1 - \ln 4 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (5.2)$$

En la Figura 5, que compara las funciones propias de los primeros estados para  $\mu = 1$  con las del pozo infinito, se puede comprobar, además de la divergencia entre los dos casos a medida que crece  $n$ , que cada vez las funciones propias están menos dispersas. Por ello es lógico que, como se aprecia en el Cuadro 2 y la Figura 7, las entropías alcancen un máximo que se aproxime a la del pozo infinito para uno de los primeros estados y a partir de aquel vayan decreciendo. Por otra parte, como se puede ver en la Figura 6, a medida que aumenta  $\mu$  las funciones propias son menos dispersas, lo cual también se ve reflejado en los valores del Cuadro 2 y las gráficas de la Figura 7.

$n$	$S_n$			
	$\mu = 0.5$	$\mu = 1$	$\mu = 5$	$\mu = 10$
0	0.3597	0.3553	0.3209	0.2803
1	0.3722	0.3712	0.3626	0.3502
2	0.3728	0.3723	0.3683	0.3627
3	0.3711	0.3708	0.3682	0.3649
4	0.3687	0.3685	0.3667	0.3643
5	0.3663	0.3661	0.3646	0.3628
6	0.3639	0.3637	0.3625	0.3610
7	0.3615	0.3614	0.3604	0.3591
8	0.3594	0.3592	0.3583	0.3572
9	0.3573	0.3572	0.3564	0.3554
10	0.3553	0.3552	0.3545	0.3536
11	0.3535	0.3534	0.3527	0.3519
12	0.3517	0.3516	0.3510	0.3503
13	0.3500	0.3410	0.3494	0.3487
14	0.3485	0.3484	0.3479	0.3472
15	0.3410	0.3469	0.3464	0.3458
16	0.3455	0.3455	0.3450	0.3445
17	0.3442	0.3441	0.3439	0.3432
18	0.3429	0.3428	0.3424	0.3419
19	0.3416	0.3416	0.3412	0.3407

Cuadro 2: Tabla con las entropías de la información de Shannon para el problema en el intervalo  $[-1, 1]$ .

## 6. La ecuación de Schrödinger en toda la recta

En esta sección vamos a resolver la ecuación de Schrödinger (4.2) pasando por alto las singularidades, ya que conforman un conjunto de medida nula:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(q) + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \psi(q) = (1 - \kappa^2 q^2) E \psi(q), \quad (6.1)$$

de donde:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(q) + \frac{m\omega^2 + 2\kappa^2 E}{2} q^2 \psi(q) = E \psi(q). \quad (6.2)$$

Vamos a estudiar por separado si existen valores propios positivos y negativos:

- Si  $m\omega^2 + 2\kappa^2 E > 0$ :

Este caso es el de valores propios  $E > -\frac{m\omega^2}{2\kappa^2}$ . Sea  $\Omega^2 = m\omega^2 + 2\kappa^2 E > 0$ . Nos

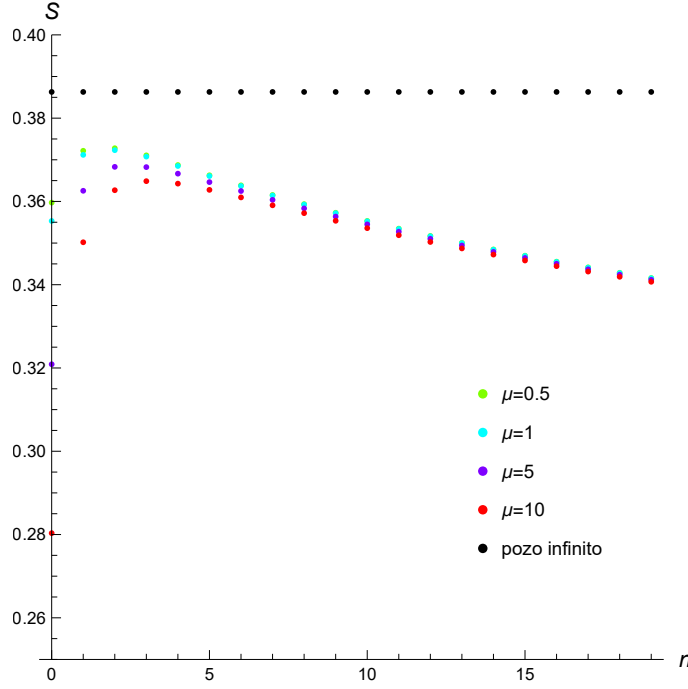


Figura 7: Representación gráfica de las entropías de la información de Shannon para los primeros 20 estados propios para distintos valores del parámetro  $\mu$ .

queda la ecuación:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(q) + \frac{\Omega^2}{2} q^2 \psi(q) = E \psi(q). \quad (6.3)$$

Sean de nuevo los parámetros  $\gamma$  y  $\epsilon$  de (4.8) y hagamos los cambios de variable (4.6) y (4.12). Obtenemos la ecuación:

$$y''(z) - \left( \frac{1}{4} z^2 - \frac{\epsilon}{2\gamma} \right) y(z) = 0. \quad (6.4)$$

Establecemos como condición frontera el límite 0 en  $\pm\infty$ , para que la solución sea una función de  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{cases} y''(z) - \left( \frac{1}{4} z^2 - \frac{\epsilon}{2\gamma} \right) y(z) = 0, & z \in \mathbb{R}, \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} y(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} y(z) = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Expresamos en este caso la solución general como combinación lineal de las funciones dadas en (A.8)–(A.9):

$$y(z) = A U\left(-\frac{\epsilon}{2\gamma}; z\right) + B V\left(-\frac{\epsilon}{2\gamma}; z\right), \quad (6.6)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes arbitrarias. Como la función  $V(-\frac{\epsilon}{2\gamma}; z)$  tiene límite  $\infty$  cuando  $z \rightarrow \infty$ , para que esta solución general verifique las condiciones frontera ha de ocurrir que  $B = 0$ , y por lo tanto:

$$y(z) = A\sqrt{\pi} \left( \frac{e^{-\frac{z^2}{4}} M\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right)}{2^{\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}} \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}\right)} - \frac{z e^{-\frac{z^2}{4}} M\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right)}{2^{-\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}} \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}\right)} \right), \quad (6.7)$$

donde hemos tenido en cuenta (A.7). El potencial es par, luego las soluciones del problema de Sturm-Liouville han de ser pares o impares. Como la solución (6.7) está expresada como combinación lineal de las funciones (A.7), que son una par y la otra impar, las soluciones válidas del problema de Sturm-Liouville serán aquellas en que se anule el coeficiente de una o de la otra, es decir, cuando:

$$\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}\right) = \infty, \quad (6.8)$$

o:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4\gamma}\right) = \infty, \quad (6.9)$$

lo cual ocurre cuando los argumentos de la función gamma toman el valor 0 o enteros negativos. De (6.8) se obtienen las soluciones impares:

$$\frac{3}{4} - \frac{\epsilon_{2n+1}}{4\gamma} = -n \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{2n+1} = \gamma(4n+3) = \gamma(2(2n+1)+1), \quad n \geq 0,$$

mientras que (6.9) da lugar a las soluciones pares:

$$\frac{1}{4} - \frac{\epsilon_{2n}}{4\gamma} = -n \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{2n} = \gamma(4n+1), \quad n \geq 0.$$

Combinando las dos tenemos la sucesión de valores propios  $(\epsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ :

$$\epsilon_n = \gamma(2n+1), \quad (6.10)$$

y la sucesión de funciones propias  $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ :

$$\left. \begin{aligned} y_{2n}(z) &= A_{2n} 2^n \sqrt{\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} M\left(-n, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \\ y_{2n+1}(z) &= A_{2n+1} 2^{n+1} \sqrt{\pi} z e^{-\frac{z^2}{4}} M\left(-n, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

donde los coeficientes  $(A_n)_{n=0}^{\infty}$  son constantes de normalización. Deshacemos los cambios de escala en (6.10) para obtener los valores de la energía:

$$\frac{2mE}{\kappa^2 \hbar^2} = \frac{\sqrt{m}\Omega}{\kappa^2 \hbar} (2n+1) = \frac{\sqrt{m}\sqrt{m\omega^2 + 2\kappa^2 E}}{\kappa^2 \hbar} (2n+1),$$



y operando:

$$4m^2 E_n^2 - 2m \hbar^2 \kappa^2 (2n+1)^2 E_n - m^2 \hbar^2 \omega^2 (2n+1)^2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado nos queda:

$$E = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{m} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pm \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\omega^2 + \frac{\hbar^2 \kappa^4}{m^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Como estamos en el caso de energías positivas, descartamos la solución negativa:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{m} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\omega^2 + \frac{\hbar^2 \kappa^4}{m^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad (6.12)$$

donde  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , que formalmente es el mismo resultado que para el caso del parámetro de curvatura positivo, como puede consultarse en [2, 3, 4]. Recordamos en el Apéndice A.1 que las funciones  $M(-n, b; z)$  son polinomios en  $z$ . En nuestro caso, reescribimos las soluciones en términos de los polinomios de Hermite:

$$\left. \begin{aligned} y_{2n}(z) &= (-1)^n C_{2n} e^{-\frac{z^2}{4}} H_{2n} \left( \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \\ y_{2n+1}(z) &= (-1)^n C_{2n+1} e^{-\frac{z^2}{4}} H_{2n+1} \left( \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \right\}$$

es decir:

$$y_n(z) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n e^{-\frac{z^2}{4}} H_n \left( \frac{z}{\sqrt{2}} \right). \quad (6.13)$$

donde  $(C_n)_{n=0}^{\infty}$  son constantes de normalización, que se calculan sabiendo que:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| e^{-\frac{z^2}{4}} H_n \left( \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 dz = 2^n \sqrt{2\pi} n!,$$

por la relación de ortogonalidad (A.6).

Deshacemos los cambios de variable (4.12) y (4.6) para expresar las funciones propias en términos de las variables y parámetros originales:

$$\psi_n(q) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n e^{-\frac{\kappa^2 \gamma}{2} q^2} H_n(\kappa \sqrt{\gamma} q),$$

o de forma más explícita,

$$\psi_n(q) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n e^{-\frac{\sqrt{m^2 \omega^2 + 2\kappa^2 m E_n}}{2\hbar} q^2} H_n \left( \sqrt{\frac{\sqrt{m^2 \omega^2 + 2\kappa^2 m E_n}}{\hbar}} q \right). \quad (6.14)$$

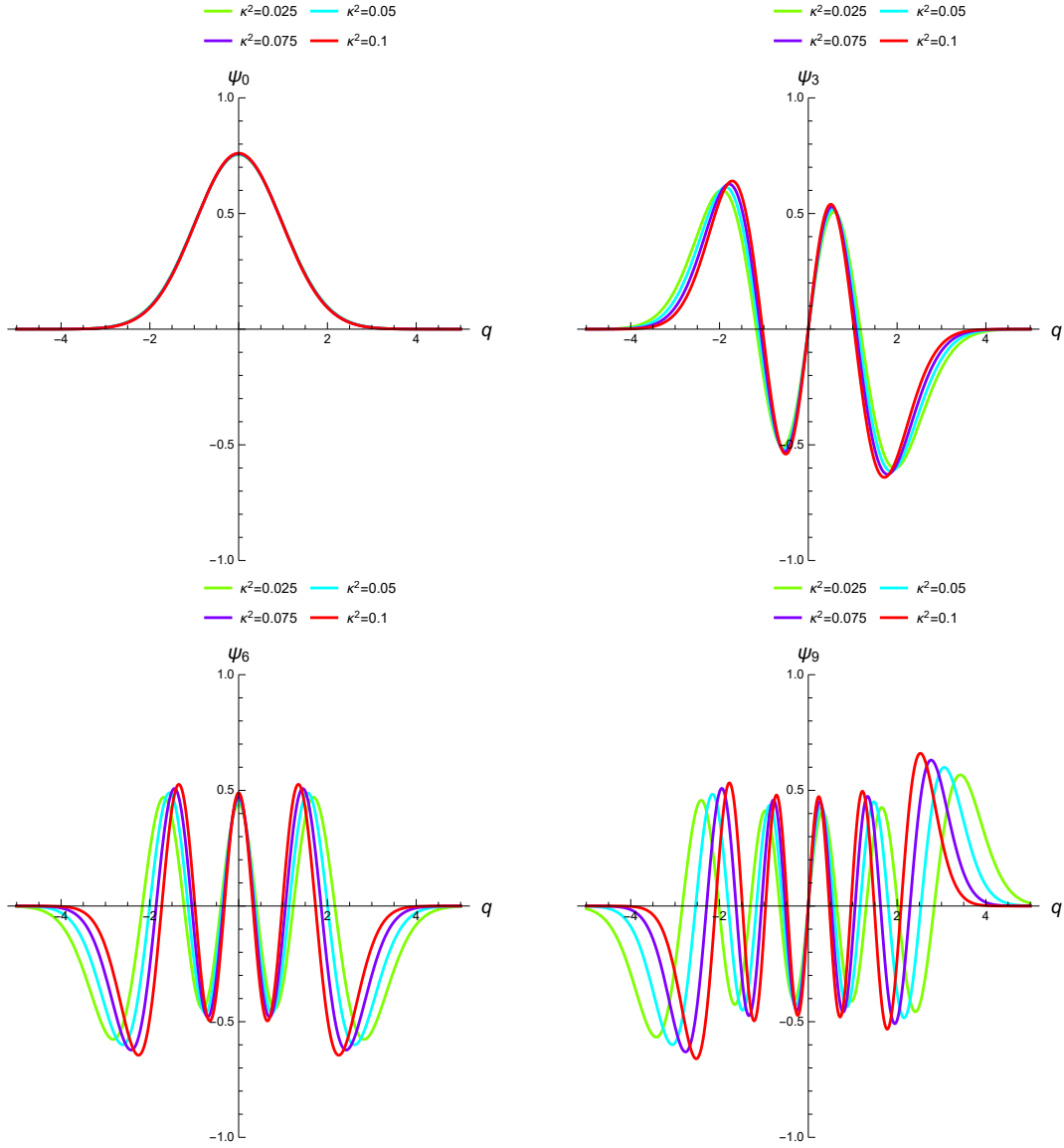


Figura 8: Representación gráfica de algunas funciones propias  $\psi_n(q)$  para los estados  $n = 0, 3, 6, 9$  comparando distintos valores de  $\kappa$ . Hemos asumido  $\hbar = 1$  y hemos tomado los valores  $m = \omega = 1$ .

En la Figura 8 vamos a mostrar algunos estados propios para distintos valores del parámetro  $\kappa$ .

- Si  $m\omega^2 + 2\kappa^2 E < 0$ :  
Este caso es el de valores propios  $E < -\frac{m\omega^2}{2\kappa^2}$ . Sea  $\Omega^2 = -(m\omega^2 + 2\kappa^2 E > 0)$ ,

entonces:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' - \frac{\Omega^2}{2} q^2 \psi = E \psi. \quad (6.15)$$

Sean de nuevo los parámetros  $\gamma$  y  $\epsilon$  de (4.8) y hagamos los cambios de variable (4.6) y (4.12). Obtenemos la ecuación:

$$y''(z) + \left( \frac{1}{4} z^2 + \frac{\epsilon}{2\gamma} \right) y(z) = 0. \quad (6.16)$$

Igual que antes, la condición frontera ha de ser el límite 0 en  $\pm\infty$ , para que la solución sea una función de  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{cases} y''(z) + \left( \frac{1}{4} z^2 + \frac{\epsilon}{2\gamma} \right) y(z) = 0, & z \in \mathbb{R}, \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \varphi(z) = 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Las soluciones de esta ecuación se pueden expresar en términos de (A.11), Apéndice A.3. No obstante, como ahí se señala, estas dos soluciones no son de cuadrado integrable. Luego podemos concluir que no existen soluciones del problema en toda la recta del espacio  $L^2(\mathbb{R})$  para  $E < -\frac{m\omega^2}{2\kappa^2}$ .

## 7. Entropías de la información de Shannon en toda la recta

Para finalizar este trabajo, en esta sección calcularemos y representaremos las entropías de la información de Shannon de los estados propios de la sección anterior. Recordemos que para estas funciones propias, las entropías serán

$$S_n^{\mathbb{R}} = - \int_{\mathbb{R}} |\psi_n(q)|^2 \ln |\psi_n(q)|^2 dq. \quad (7.1)$$

Vamos a comparar los resultados con los obtenidos en [4], por ello vamos a mostrar las gráficas y tablas correspondientes a las del citado artículo, pero con el signo del parámetro cambiado. Comenzamos con las funciones de densidad de probabilidad asociadas a las funciones propias en la Figura 9. En el Cuadro 3 mostramos las entropías de la información de Shannon para los 20 primeros estados propios y distintos valores de  $\kappa$ . Por último, en la Figura 10 se representan las entropías de la información de Shannon para los primeros 20 estados propios para distintos valores del parámetro  $\mu$ , comparadas con las entropías del caso  $\kappa = 0$ . Se observa que se sigue la misma tendencia que la observada en [4]: cuanto menor es  $\lambda$  (en este trabajo  $\lambda = -\kappa^2$ ) menores son las entropías de la información de Shannon. Lo que también ocurre es que, si nos fijamos en el Cuadro 3, las entropías de la información de Shannon para  $\kappa^2 = 0.075$  las entropías de la información de Shannon presentan un máximo para  $n = 18$ , para  $\kappa^2 = 0.1$  presentan un máximo para  $n = 12$ .

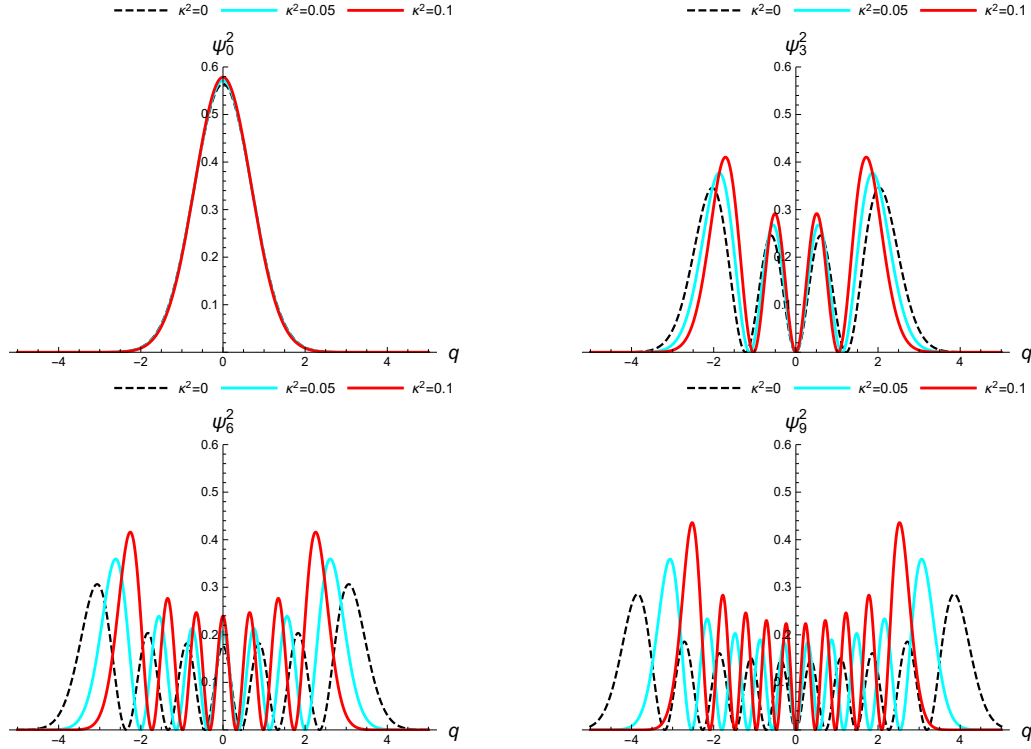


Figura 9: Representación de las funciones de densidad de probabilidad  $|\psi_n|^2$  para los estados  $n = 0, 3, 6, 9$  y distintos valores de  $\kappa$  comparados con las funciones de densidad de probabilidad del oscilador armónico, en línea discontinua. Hemos asumido  $\hbar = 1$  y hemos tomado los valores  $m = \omega = 1$ .

## 8. Comentarios, conclusiones y trabajo futuro

Vamos a finalizar el trabajo con algunos comentarios sobre los resultados obtenidos y las conclusiones extraídas sobre los mismos, así como indicar posibles líneas por las que continuar la investigación sobre este sistema.

Para resolver la ecuación de Schrödinger en los dos casos, se considera la posibilidad de que haya valores propios tanto positivos como negativos. No obstante, en ambos casos solo existen soluciones del problema de valores propios de cuadrado integrable para energías positivas, es decir, no hay estados ligados con energía negativa. Compárese con la resolución del problema desde el punto de vista clásico en la sección 2, en que solamente hay trayectorias acotadas para el caso de energías positivas, mientras que en el otro caso en que existen soluciones, es decir, con energías por debajo se la asíntota horizontal del potencial (1.5), estas son trayectorias no acotadas.

Las entropías de la información de Shannon (ver por ejemplo [11] para su cálculo analítico para el oscilador harmónico y el átomo de hidrógeno) analizadas en la

$n$	$S_n^{\text{IR}}$			
	$\kappa^2 = 0.025$	$\kappa^2 = 0.05$	$\kappa^2 = 0.075$	$\kappa^2 = 0.1$
0	1.0661	1.0599	1.0536	1.0473
1	1.3240	1.3053	1.2866	1.2680
2	1.4674	1.4363	1.4054	1.3749
3	1.5660	1.5227	1.4799	1.4381
4	1.6404	1.5850	1.5309	1.4785
5	1.6995	1.6322	1.5673	1.5053
6	1.7481	1.6692	1.5940	1.5234
7	1.7889	1.6987	1.6139	1.5355
8	1.8238	1.7227	1.6289	1.5436
9	1.8540	1.7423	1.6402	1.5488
10	1.8804	1.7585	1.6487	1.5520
11	1.9037	1.7719	1.6552	1.5538
12	1.9244	1.7831	1.6600	1.5544
13	1.9429	1.7925	1.6635	1.5543
14	1.9595	1.8005	1.6660	1.5536
15	1.9744	1.8071	1.6677	1.5525
16	1.9879	1.8126	1.6688	1.5511
17	2.0001	1.8173	1.6694	1.5495
18	2.0112	1.8213	1.6696	1.5477
19	2.0213	1.8245	1.6694	1.5458

Cuadro 3: Tabla con las entropías de la información de Shannon para el problema en toda la recta.

sección 7, para soluciones en toda la recta, siguen la tendencia estudiada en 4, en el sentido de que a mayor valor del parámetro  $\lambda$  ( $\lambda > 0$  en el mencionado artículo,  $\lambda = -\kappa^2 < 0$  en el presente trabajo) mayores son las entropías. Tanto en 4 como en el presente trabajo, en el límite  $\lambda \rightarrow 0$  se recuperan los resultados obtenidos en 11. En la sección 5, para soluciones confinadas entre las asíntotas verticales del potencial, la tendencia de las entropías es a mayor valor del parámetro  $\mu$  menores entropías. Como  $\mu$  es inversamente proporcional a  $\kappa^4$  (ecuación (4.22)), la tendencia es la opuesta a la de la sección 7: a mayor valor del parámetro  $\lambda = -\kappa^2$  menores entropías. En la sección 5 se observa que el máximo de entropías se alcanza en un estado propio que no es el primero, así como se observa en dos de los casos de la sección 7. A medida que aumentan los valores de los respectivos parámetros en las dos secciones, la tendencia continúa pero se obtienen algunos valores de las entropías de la información de Shannon negativos. Hay que tener en cuenta que la entropía de la información de Shannon se define para una distribución de probabilidad discreta

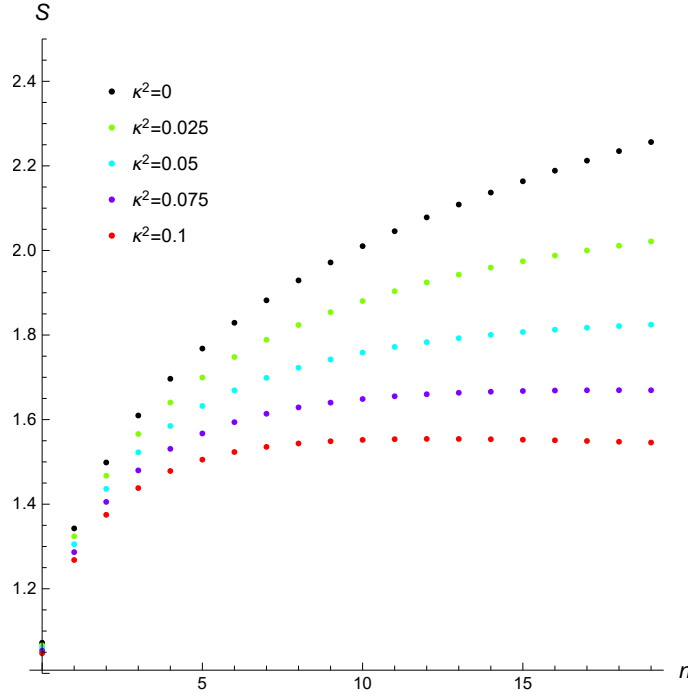


Figura 10: Representación gráfica de las entropías de la información de Shannon para los primeros 20 estados propios para distintos valores del parámetro  $\mu$ , comparadas con las entropías del caso  $\kappa = 0$ .

con función masa  $p : A \rightarrow [0, 1]$  como:

$$S_p := - \sum_{a \in A} p(a) \ln(p(a)). \quad (8.1)$$

La definición (1.6) es la adaptación natural de (8.1) a una distribución de probabilidad continua. Por la forma de la función masa  $p$ , el sumatorio de (8.1) siempre será negativo, cambiado de signo, positivo, mientras que eso no tiene necesariamente por qué ocurrir en la integral de (1.6). Por lo tanto, una posible línea de investigación futura consiste en estudiar modificaciones de la entropía de Shannon que se adapten mejor a este sistema y que aporten buenas medidas de la dispersión de las funciones de onda.

En [2, 3, 4], además de estudiarse este sistema en dimensión 1, se estudia en dimensión  $N$  reduciéndolo al caso unidimensional haciendo el cambio a coordenadas esféricas generalizadas. Queda como posible continuación del estudio de este sistema con parámetro negativo la reducción al caso unidimensional del caso  $N$ -dimensional. Especialmente interesante es que en el caso  $N$ -dimensional, este sistema puede interpretarse como un oscilador en sobre una variedad riemanniana conformemente plana con curvatura no constante.

También en los artículos [2, 4] se utilizan otras cuantizaciones. Esto viene motivado porque el operador hamiltoniano

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m(1 + \lambda q^2)} \partial^2 + \frac{m \omega^2 q^2}{2(1 + \lambda q^2)} \quad (8.2)$$

es un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert  $L^2$  con la función peso  $1 + \lambda q^2$ , que es el denominador tanto de la energía cinética como de la energía potencial. En [2] se demuestra que hay varias cuantizaciones que tienen el mismo espectro de energías, aunque diferentes estados propios. Para una de ellas, la llamada *Transformed-Position-Dependent-Mass* (TPDM), que se ha usado ampliamente en materia condensada, el operador hamiltoniano correspondiente

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m(1 + \lambda q^2)} \partial^2 + \frac{m \omega^2 q^2}{2(1 + \lambda q^2)} + \frac{\lambda \hbar^2 q}{2m(1 + \lambda q^2)^2} \partial + \frac{\lambda \hbar^2 (1 - 2\lambda q^2)}{2m(1 + \lambda q^2)^3} \quad (8.3)$$

es autoadjunto en el espacio de Hilbert  $L^2$  con función peso unidad, con lo cual se puede aplicar la transformada de Fourier para calcular las funciones de onda y sus entropías de la información de Shannon en el espacio de momentos, que es lo que se hace en [4].

## A. Funciones cilíndrico parabólico

Las funciones cilindro parabólico son funciones que se van a necesitar para estudiar las soluciones de las ecuaciones diferenciales que nos ocupan. Pueden consultarse más detalles en [7].

### A.1. La función hipergeométrica confluyente de Kummer

La *función hipergeométrica confluyente* de Kummer (consultar [7], capítulo 13) se define:

$$M(a, b; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (A.1)$$

donde los símbolos de Pochhammer son:

$$(c)_k := \prod_{j=0}^{k-1} (c + j), \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

### A.1.1. Polinomios de Hermite

Notemos además que si el primer parámetro  $a = -n$  es un entero negativo o 0, la función hipergeométrica confluyente de Kummer es un polinomio:

$$M(-n, b; z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (\text{A.2})$$

Para  $b = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ , estos polinomios se expresan en términos de los *polinomios de Hermite*:

$$\left. \begin{aligned} H_{2n}(z) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} M\left(-n, \frac{1}{2}; z^2\right) \\ H_{2n+1}(z) &= (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} 2z M\left(-n, \frac{3}{2}; z^2\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

que se definen por:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}, \quad (\text{A.4})$$

y para  $n \geq 2$  pueden calcularse por la relación de recurrencia:

$$H_{n+1}(z) = 2z H_n(z) - 2n H_{n-1}(z). \quad (\text{A.5})$$

Se puede comprobar que los dos primeros polinomios de Hermite son  $H_0(z) \equiv 1$ , par, y  $H_1(z) = 2z$ , impar, y que por la relación de recurrencia los polinomios  $(H_{2n})_{n=0}^{\infty}$  son pares y los polinomios  $(H_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$  son impares.

Los polinomios de Hermite verifican además la relación de ortogonalidad:

$$\int_{\mathbb{R}} H_m(z) H_n(z) e^{-z^2} dz = 2^n \sqrt{\pi} n! \delta_{mn}. \quad (\text{A.6})$$

## A.2. La ecuación diferencial $y''(z) - \left(\frac{1}{4} z^2 + a\right) y(z) = 0$

La solución general de esta ecuación diferencial viene dada en términos de la función hipergeométrica confluyente de Kummer. Las funciones:

$$\left. \begin{aligned} y_1(a; z) &= e^{-\frac{z^2}{4}} M\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \\ y_2(a; z) &= z e^{-\frac{z^2}{4}} M\left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.7})$$



forman una base del espacio de soluciones de la ecuación. Otra base muy útil del espacio de soluciones viene dado por las funciones:

$$U(a; z) = \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{2^{\frac{1}{4} + \frac{a}{2}} \Gamma(\frac{3}{4} + \frac{a}{2})} y_1(a; z) - \frac{1}{2^{-\frac{1}{4} + \frac{a}{2}} \Gamma(\frac{1}{4} + \frac{a}{2})} y_2(a; z) \right), \quad (\text{A.8})$$

$$V(a; z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2} - a)} \left( \frac{\text{tg} \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{a}{2} \right) \pi \right]}{2^{\frac{1}{4} + \frac{a}{2}} \Gamma(\frac{3}{4} + \frac{a}{2})} y_1(a; z) - \frac{\text{cotg} \left[ \left( \frac{1}{4} + \frac{a}{2} \right) \pi \right]}{2^{-\frac{1}{4} + \frac{a}{2}} \Gamma(\frac{1}{4} + \frac{a}{2})} y_2(a; z) \right). \quad (\text{A.9})$$

Estas dos últimas funciones tienen la ventaja de que su comportamiento asintótico está estudiado y es muy sencillo:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{U(a; z)}{e^{-\frac{z^2}{2}} z^{-a-\frac{1}{2}}} = 1, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{V(a; z)}{e^{\frac{z^2}{2}} z^{a-\frac{1}{2}}} = 1,$$

de donde se deduce que:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} |U(a; z)| = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} |V(a; z)| = \infty.$$

### A.3. La ecuación diferencial $y''(z) + \left(\frac{1}{4}z^2 - a\right)y(z) = 0$

Las funciones:

$$\left. \begin{aligned} y_1(a; z) &= e^{-\frac{iz^2}{4}} M\left(\frac{1}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{1}{2}, \frac{iz^2}{2}\right) \\ y_2(a; z) &= iz e^{-\frac{iz^2}{4}} M\left(\frac{3}{4} - \frac{ia}{2}, \frac{3}{2}, \frac{iz^2}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.10})$$

forman una base del espacio de soluciones de la ecuación. Otra base del espacio de soluciones viene dado por las funciones:

$$W(a; \pm z) = 2^{-\frac{3}{4}} \left( \left| \frac{\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2})} \right|^{\frac{1}{2}} y_1(a; z) \mp \left| \frac{2\Gamma(\frac{3}{4} + \frac{ia}{2})}{\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{ia}{2})} \right|^{\frac{1}{2}} y_2(a; z) \right) \quad (\text{A.11})$$

Sea:

$$s(a; z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-i)^l}{2^l l!} \frac{\Gamma(2l + \frac{1}{2} + ia)}{\Gamma(\frac{1}{2} + ia)} \frac{1}{z^{2l}} = s_1(a; z) + is_2(a; z).$$

Definimos además los parámetros adicionales:

$$k = \sqrt{1 + e^{2\pi a}} - e^{\pi a}; \quad \frac{1}{k} = \sqrt{1 + e^{2\pi a}} + e^{\pi a},$$

$$\phi_2 = \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + ia\right).$$

Entonces, el comportamiento asintótico de estas funciones es:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{2k}{z}} \left[ s_1(a; z) \cos \left( \frac{z^2}{4} - a \ln z + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) - s_2(a; z) \operatorname{sen} \left( \frac{z^2}{4} - a \ln z + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) \right]}{W(a; z)} = 1,$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{kz}} \left[ s_1(a; z) \operatorname{sen} \left( \frac{z^2}{4} - a \ln z + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) + s_2(a; z) \cos \left( \frac{z^2}{4} - a \ln z + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) \right]}{W(a; -z)} = 1.$$

Por la forma de  $s(a; z)$ :

$$s(a; z) = 1 - \frac{i}{2} \frac{\Gamma \left( 2 + \frac{1}{2} + ia \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{2} + ia \right)} \frac{1}{z^2} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-i)^l}{2^l l!} \frac{\Gamma \left( 2l + \frac{1}{2} + ia \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{2} + ia \right)} \frac{1}{z^{2l}},$$

de modo que los comportamientos asintóticos relevantes son:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{2k}{z}} \cos \left( \frac{z^2}{4} - a \ln z + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right)}{W(a; z)} = 1,$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{kz}} \operatorname{sen} \left( \frac{z^2}{4} - a \ln z + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right)}{W(a; -z)} = 1.$$

Esto quiere decir que, en esencia,  $W(a; \pm x)$  se comporta asintóticamente como  $\frac{1}{\sqrt{z}}$ .

## Referencias

- [1] A. Ballesteros, A. Enciso, F.J. Herranz, O. Ragnisco (2008). *A maximally super-integrable system on an n-dimensional space of nonconstant curvature*. Physica D: Nonlinear Phenomena, **237**, 505–509.
- [2] A. Ballesteros, A. Enciso, F.J. Herranz, O. Ragnisco, D. Riglioni (2011). *Quantum mechanics on spaces of nonconstant curvature: The oscillator problem and superintegrability*. Annals of Physics **326**, 2053–2073.
- [3] A. Ballesteros, A. Enciso, F.J. Herranz, O. Ragnisco, D. Riglioni (2011). *A new exactly solvable quantum model in N dimensions*. Physics Letters A **375**, 1431–1435.
- [4] A. Ballesteros, I. Gutiérrez-Sagredo (2023). *Shannon information entropy for a quantum nonlinear oscillator on a space of non-constant curvature*. Physica D: Nonlinear Phenomena **445**, 133618.

- [5] C. E. Shannon (1948). *A mathematical theory of communication*. The Bell System Technical Journal, **27**, 379–423.
- [6] J. Sánchez-Ruiz (1997). *Asymptotic formula for the quantum entropy of position in energy eigenstates*. Physics Letters A **226**, 7–13.
- [7] M. Abramowitz, I.A. Stegun (2013). *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series.
- [8] M.R. Spiegel (1981). *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*. McGraw-Hill.
- [9] B.C. Hall (1964). *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer.
- [10] A. Galindo, P. Pascual (1990). *Quantum Mechanics I*. Springer-Verlag.
- [11] R.J. Yáñez, W.V. Assche, J.S. Dehesa (1994). *Position and momentum information entropies of the  $d$ -dimensional harmonic oscillator and hydrogen atom* Phys. Rev. A **50**, 3065–3079.