UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento de Matemática Aplicada

CATÁLOGO DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE PARA TRABAJAR EL NÚMERO ÁUREO Y LA SUCESIÓN DE FIBONACCI EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Martín Bermejo Jiménez

Tutores: Víctor Gatón Bustillo

Ignacio Miguel Cantero

Valladolid, junio de 2023

[ÍNDICE]

[1] Introducción y Declaración de Intenciones

El presente Trabajo Fin de Máster surge con la intención de generar un breve catálogo de propuestas educativas para trabajar conceptos no incluidos en el currículo de Matemáticas, como el número de oro o la sucesión de Fibonacci, pero que se encuentran estrechamente vinculados con contenidos propios de la materia. De este modo, se da a conocer al alumnado de Educación Secundaria Obligatoria algunos aspectos amables de las matemáticas y su conexión con elementos su vida cotidiana, para así promover su interés y motivación por el estudio de las matemáticas.

El TFM se incluye en el Módulo Practicum del Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria de la Universidad de Valladolid. El Módulo Practicum es un módulo de desarrollo profesional que consta de dos asignaturas: por un lado, las prácticas en un centro de Enseñanza Secundaria Obligatoria (10 ECTS) y, por otro lado, el presente Trabajo Fin de Máster (6ECTS).

En cuanto a la estructura del trabajo, una vez establecidos las intenciones u objetivos tanto generales y específicos del TFM, se procede a la descripción del marco legal, didáctico-pedagógico y los contenidos a trabajar que sirven de fundamentación para el desarrollo de las propuestas educativas. Por tanto, el presente documento se estructura en cuatro bloques principales:

- *Marco legal:* En primer lugar, se contextualizan las propuestas educativas dentro de la legislación educativa vigente, tanto a nivel estatal como autonómico, atendiendo a las especificaciones que marca la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE).
- *Marco didáctico-pedagógico:* Se abordan dos estudios. El primero sobre la implementación de una unidad didáctica sobre el número de oro en el que se muestra un incremento de la motivación e interés de los estudiantes por la asignatura de Matemáticas tras su puesta en práctica. Y en el segundo se realiza una revisión de la situación actual de la investigación en didáctica de las matemáticas.
- *Contenidos a trabajar:* Se ha realizado una recopilación de información desde una perspectiva matemática, teórica y práctica sobre el número de oro, la sucesión de Fibonacci y sus aplicaciones en la naturaleza, arte, cuerpo humano y vida cotidiana.
- *Catálogo de situaciones de aprendizaje:* Por último, se presentan tres situaciones de aprendizaje elaboradas siguiendo la estructura general que marca el Boletín Oficial de Castilla y León, y especialmente diseñadas para llevarlas a cabo en los tres primeros cursos de la Educación Secundaria.

En resumen, el propósito de este trabajo es la elaboración de un catálogo de situaciones de aprendizaje para distintos cursos de Educación Secundaria dentro de un marco legal, pedagógico y teórico en el que se pretende poner en práctica los contenidos adquiridos en el Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato durante las clases teóricas y durante el período de prácticas docentes en un centro de secundaria.

[1.1] Objetivos

A continuación, se exponen los objetivos que se pretenden conseguir con la elaboración de este Trabajo Fin de Máster, estrechamente vinculados con la formación adquirida para ser profesor de Educación Secundaria y Bachillerato.

Estos objetivos se relacionan con algunas de las competencias y objetivos de la guía docente del Trabajo Fin de Máster y con las competencias del Apartado 3 del Anexo de la Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. Los objetivos los podemos clasificar en generales y específicos.

OBJETIVOS GENERALES

Los objetivos generales son los siguientes:

- Conocer los contenidos teóricos y didácticos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje mediante procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias específicas.
- Buscar, obtener, procesar y comunicar información desde distintos medios, transformarla en conocimiento y aplicarla en procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas.
- Desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.
- Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover la capacidad de aprender por sí mismos.
- Diseñar y realizar actividades que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura.
- Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza.
- Conocer la historia de la materia de matemáticas y adquirir la formación necesaria para poder transmitir una visión dinámica de la misma.
- Adquirir las habilidades y destrezas necesarias para seguir aprendiendo de un modo autónomo.
- Adquirir experiencia en la planificación, docencia y la evaluación de las materias correspondientes.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos que se pretenden conseguir con la puesta en práctica de las situaciones de aprendizaje sobre el número de oro son los siguientes:

- Estudiar, analizar y comprender la importancia del número de oro dando a conocer la presencia de dicho concepto en la realidad que rodea al estudiante.

- Poner en práctica metodología innovadoras activas.
- Incrementar el interés y motivación del alumnado por el estudio de las matemáticas conectando el número oro con diversos contenidos incluido en el currículo de secundaria.

[2] Marco Legal

Para la redacción de la propuesta didáctica es necesario apoyarse en la legislación en materia de educación puesto que, desde las distintas instituciones públicas, se establecen una serie de referencias a cumplir a la hora de planificar la acción docente. El presente curso escolar 2022/2023 es un año de transición entre dos leyes de educación lo que implica una situación de incertidumbre para los docentes respecto a qué normativa aplicar. Por un lado, en los cursos pares (2º y 4º de la ESO y 2º de Bachillerato) todavía están en aplicación los currículos de la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), mientras que en los cursos impares (1º y 3º de la ESO y 1º de Bachillerato) ya se aplican los currículos de la nueva la Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE).

Teniendo en cuenta la peculiar situación del presente curso escolar, se opta en este TFM por la elaboración de *situaciones de aprendizaje* según las indicaciones establecidas por la LOMLOE.

[2.1] Estructura curricular

De acuerdo con el Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, el currículo de la Educación Secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León se estructura, entre otros, en los siguientes elementos (Consejería de Educación, 2022):

- ***Objetivos de etapa en Educación Secundaria***

Los objetivos de la Educación Secundaria obligatoria quedan establecidos en el artículo 23 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo y en el artículo 7 del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, y podrán ser ampliados en los boletines oficiales de cada comunidad autónoma. Según ambos artículos, la Educación Secundaria obligatoria contribuirá a desarrollar en los estudiantes capacidades que les permitan (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022):

> *a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a las demás personas, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.*
>
> *b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.*

c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.

d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con las demás personas, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Desarrollar las competencias tecnológicas básicas y avanzar en una reflexión ética sobre su funcionamiento y utilización.

f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la comunidad autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de las demás personas, así como el patrimonio artístico y cultural.

k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado, la empatía y el respeto hacia los seres vivos, especialmente los animales, y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

- ***Competencias Clave***

Las *competencias clave* están vinculadas a los objetivos de etapa de modo que se entiende que el dominio de cada una de ellas contribuye al logro de los objetivos y viceversa. Conforme a lo establecido en el artículo 11.1 del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, las competencias clave son las siguientes:

  - Competencia en comunicación lingüística.
  - Competencia plurilingüe.
  - Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería.
  - Competencia digital.
  - Competencia personal, social y de aprender a aprender.
  - Competencia ciudadana.
  - Competencia emprendedora.
  - Competencia en conciencia y expresión culturales.

- ***Perfil de salida del alumnado al término de la enseñanza básica***

El *Perfil de salida* se desarrolla a través de una serie de *descriptores operativos* que concretan y contextualizan la adquisición de cada una de las *competencias clave*. En el *Mapa de relaciones competenciales* se representa la vinculación de los *descriptores operativos* del *Perfil de salida* con las *competencias específicas* de cada materia y, además, permite determinar la contribución de cada materia al desarrollo competencial del alumnado.

- ***Competencias Específicas***

Para cada una de las materias, las *competencias específicas* plasman la concreción de los *descriptores operativos* del *Perfil de salida*.

- ***Criterios de Evaluación***

Los *criterios de evaluación* establecen, en cada materia, las referencias para valorar el aprendizaje del alumnado y el grado de adquisición de cada *competencia específica*. La vinculación de los *descriptores operativos* del *Perfil de salida* con los *criterios de evaluación* de cada *competencia específica* para cada curso se representa en el *Mapa de relaciones criteriales.*

- ***Contenidos de materia***

En los *contenidos* se muestran los aprendizajes que se necesitan trabajar con el alumnado en cada materia con el objetivo de que adquieran *las competencias específicas* e integrar conocimientos, destrezas y actitudes.

[2.2] ***Principios metodológicos***

Los principios metodológicos comunes a toda la etapa se establecen en el Anexo II.A del Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. Los principios metodológicos deben promover en el alumnado un desempeño activo y participativo que desarrolle la capacidad reflexiva, de aprender por sí mismos, de búsqueda selectiva y el tratamiento de la información obtenida a través de diversos soportes para conseguir que sean capaces de crear, organizar y comunicar su propio conocimiento.

Se destacan los siguientes principios metodológicos:

- El *docente* desempeña el papel de mediador o facilitador el aprendizaje mediante el diseño de situaciones de aprendizaje en las que el alumno aplique sus conocimientos de manera interdisciplinar y potencie su autonomía.
- Trabajo en equipo del profesorado.
- Se fomenta el empleo de procedimientos como el trabajo por proyectos, los centros de interés, el estudio de casos, o el aprendizaje basado en problemas o retos.
- Adaptación a los distintos ritmos de aprendizaje, a las necesidades educativas especiales, altas capacidades intelectuales, casos de integración tardía o dificultades específicas de aprendizaje.
- Uso de *metodologías activas* en las que se promueva el trabajo autónomo del alumnado y el trabajo en equipo. Empleo de técnicas como la argumentación, el estudio biográfico, del diálogo, la exposición, la discusión o debate, la experimentación, la investigación, la interacción o el descubrimiento.
- Los centros tienen libertad a la hora de seleccionar sus *materiales y recursos didácticos*, caracterizándose dichos materiales por su variedad, polivalencia y capacidad de motivación o estímulo de manera que potencien la manipulación, la observación, la investigación y la elaboración creativa. Se empleará materiales tanto innovadores como tradicionales en diferentes soportes (impresos, audiovisuales e informáticos).
- Es de gran importancia el uso de las *Tecnologías de la Información y Comunicación* (TIC) en lo referente al equipamiento, herramientas y programas.
- La organización en el aula debe favorecer procesos dialógicos, alternancia entre actividades individuales con el trabajo en equipos heterogéneos de manera cooperativa y colaborativa para dar a conocer a los alumnos las estrategias utilizadas por sus iguales y puedan aplicarlas a situaciones parecidas.
- Espacios flexibles que permitan diversidad de agrupamientos.
- Diversidad en la estructura de las sesiones: clases magistrales de abordaje de los aspectos teóricos, sesiones de trabajo colaborativo, clase invertida, exposición de conclusiones, trabajo individual, actividades fuera del aula…

[2.3] Situaciones de Aprendizaje

El concepto de *situación de aprendizaje* queda definido en el Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, según el cual:

"… se entiende por situación de aprendizaje el conjunto de momentos, circunstancias, disposiciones y escenarios alineados con las competencias clave y con las competencias específicas a ellas vinculadas, que requieren por parte del alumnado la resolución de actividades y tareas secuenciadas a través de la movilización de contenidos, y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las competencias."

Las orientaciones para el diseño y desarrollo de situaciones de aprendizaje se determinan en el Anexo II.C del mencionado decreto. De cualquier manera, estas deben (Consejería de Educación, 2022):

a) Ser *globalizadas*; es decir, deberán incluir contenidos pertenecientes a varios bloques. Diseñar situaciones de aprendizaje interdisciplinares, que activen conocimientos, destrezas y actitudes de diferentes materias con el objetivo de que el alumnado establezca conexiones entre diferentes materias.

b) Ser *estimulantes*; es decir, deberán tener interés para el alumnado. Deberán resultar motivadoras para el alumnado, implicar producción, interacción oral e incluir el empleo de recursos en diversos soportes y formatos.

c) Ser *significativas*; es decir, deberán partir de los conocimientos previos del alumnado en relación con contextos cotidianos de los ámbitos personal, social, educativo y/o profesional.

d) Ser *inclusivas*; es decir, deberán garantizar el acceso a las mismas de todo el alumnado, adecuándolas a sus características evolutivas y a sus ritmos y estilos de aprendizaje.

Las situaciones de aprendizaje se presentan en formato de situación problema en un contexto determinado y están compuestas por tareas o ejercicios de creciente complejidad para la construcción de nuevos aprendizajes. A la hora de seleccionar, diseñar o planificar una situación de aprendizaje se toma como referencia los criterios de evaluación ya que en ellos se formulan los niveles de desempeño de los distintos elementos recogidos en las competencias específicas de cada asignatura y las competencias claves vinculadas a ellas. El modelo metodológico de las situaciones de aprendizaje responde a los principios de la DUA (Diseño Universal para el Aprendizaje) en la medida que se presenta la información y los contenidos en varios soportes y formatos, permite al alumnado múltiples opciones de acción y expresión y, en último lugar, potencia diferentes modelos de implicación y participación.

En Educación Secundaria obligatoria se consideran cuatro *ámbitos de desarrollo* de las situaciones de aprendizaje (personal, social, profesional y educativo), favoreciéndose la realización de aquellas situaciones de aprendizaje en las que se trabajen varios ámbitos. Se identifican un conjunto de contextos relevantes de cada ámbito:

- *Ámbito personal*: Regulación de las emociones, salud, alimentación, actividad física, resiliencia, autonomía, autoconocimiento, autoestima, la seguridad en el uso de entornos virtuales…
- *Ámbito social*: Diversidad lingüística, cultural y artística, convivencia social, impacto medioambiental, desigualdades sociales, servicios públicos, participación ciudadana…
- *Ámbito profesional*: Desarrollo del liderazgo, trabajo en equipo, gestión del tiempo, motivación extrínseca, profesiones, búsqueda de empleo…
- *Ámbito educativo*: Convivencia escolar, actividades del centro, autorregulación del aprendizaje, hábitos de estudio, colaboración, cuidado del centro…

La puesta en práctica de una situación de aprendizaje contempla una secuencia de fases:

- *Fase de motivación (¿qué sabemos?):* En esta primera fase se hace uso de distintos elementos atractivos para el alumnado para la activación de conocimientos previos, la realización de hipótesis…
- *Fase de desarrollo (¿qué queremos saber?):* Realización de actividades de observación, investigación, experimentación y exploración que fomenten la resolución de los retos planteados. Es importante la conexión de los contenidos con la realidad con el objetivo de generar curiosidad e interés por adquirirlos y así construir aprendizajes significativos.
- *Fase del producto final y su difusión o comunicación (¿qué hemos aprendido?):* Reflexión sobre el propio aprendizaje, valoración del proceso llevado a cabo, y difusión a la comunidad educativa mediante diversos soportes y medios de difusión.

La evaluación es continua a lo largo de la secuencia siendo posible adaptarla a las necesidades, capacidades e intereses del alumnado. Se entenderá como un procedimiento colaborativo en el que evalúa el docente (heteroevaluación) y se inicia al alumnado en la autoevaluación, coevaluación y en la competencia aprender a aprender.

[3] Marco Didáctico-pedagógico

Para realizar este marco se han abordado varios estudios sobre el número áureo en Educación Secundaria y sobre aspectos de la docencia de las matemáticas en general. Entre ellos, destacamos dos estudios: *El número áureo como elemento motivador hacia el estudio de las matemáticas* (Mota Villegas & Valles Pereira, 2020) *y La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría* (Gutiérrez Rodríguez, 2006). A continuación, desarrollamos los aspectos principales de dichos estudios.

[3.1] El número áureo como elemento motivador hacia el estudio de las matemáticas

Consiste en un estudio de la Universidad Católica de Ecuador llevado a cabo por Ricardo Enrique Valles Pereira y Dorenis Josefina Mota Villegas y publicado en la Innova Research Journal. En dicho estudio registran la implementación de un proyecto pedagógico, dirigido a estudiantes del primer semestre de universidad, basado en el origen, evolución, desarrollo y aplicación del número de oro en la realidad que les rodea con la finalidad de despertar en el alumnado el interés por las matemáticas.

Los investigadores detectaron que los estudiantes perciben las matemáticas como algo tedioso y de poco interés debido principalmente a que no consiguen establecer vínculos entre los contenidos aprendido en matemáticas y la vida real. Es decir, se indica como causa de la desmotivación y apatía del alumnado la descontextualización de las matemáticas, que se presentan al alumnado de manera formal y con nula conexión con la cotidianidad o realidad. Por esta razón, se selecciona el número áureo como elemento atractivo y temática del proyecto pedagógico, por sus múltiples conexiones directas con elementos de la realidad (naturaleza, arte, música arquitectura, diseño).

METODOLOGÍA

El estudio se corresponde con una experiencia de aula aplicada a 31 estudiantes de la asignatura de matemáticas del primer año de Arquitectura y Diseño de la Universidad Católica de Ecuador durante 2018. Se realizó un estudio de campo, en el que se diseñó los contenidos impartidos, se recopiló información fiel a cómo sucedieron los acontecimientos y teniendo como base material bibliográfico creado y actualizado a tal cometido.

Los investigadores, a la hora de realizar el estudio, se apoyaron en la Teoría socio-epistemológica de la Matemática Educativa (TSME), que consiste en una teoría sobre la Didáctica de la Matemática (Cantoral, 1990) que pretende democratizar el aprendizaje de las matemáticas.

NÚMERO ÁUREO Y SU DIDÁCTICA

Se destaca la importancia del número de oro para la finalidad de democratizar el aprendizaje de las matemáticas y sus relaciones, por un lado, con otros conceptos matemáticos como la sucesión de Fibonacci y, por otro lado, con diferentes ramas del saber. En el caso particular de la puesta en práctica del proyecto pedagógico en el aula, a pesar de que el número de oro no forma parte del temario de la asignatura, está estrechamente relacionado con diferentes contenidos del propio temario (números irracionales, ecuaciones de 2º grado, sucesiones, geometría básica, proporciones…). Al mismo tiempo, se intentó conectar al alumnado con la materia haciendo uso de las relaciones del número de oro con los aspectos reales de su entorno inmediato, lo que sirvió de punto de apoyo para la presentación de muchos de los conceptos estudiados.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

En este apartado se mencionan los contenidos abordados sobre el número áureo y la distribución de las actividades para el trabajo de cada contenido. El primer cometido de los alumnos fue realizar una búsqueda de información sobre el número de oro, sus generalidades y sus aplicaciones. A su vez se les propuso la visualización de un breve pero preciso vídeo de Youtube (Ventura, 2016) que, junto con la información recopilada, facilitarían el desarrollo de las siguientes actividades:

- *ACTIVIDAD 1: Mesa de discusión.* Se realizó un debate en grupos en el aula en el que se pidió que hicieran una reconstrucción histórica y epistemológica del número áureo de acuerdo con la información recopilada previamente.

- *ACTIVIDAD 2: Demostración del número áureo y construcciones geométricas.* En esta actividad el docente cobra el protagonismo y mediante una exposición participativa demuestra el valor del número de oro a partir de la definición de proporción áurea. Además, se realiza la construcción geométrica del rectángulo áureo para posteriormente dibujar los sucesivos rectángulos áureos que sirven de soporte para trazar la espiral de Durero.

- *ACTIVIDAD 3: Mapa mental.* En esta sesión los estudiantes realizaron mapas mentales de la información recopilada, incluyendo la relación del número áureo con diferentes elementos de la naturaleza.

- *ACTIVIDAD 4: El número de oro en diseño, construcción y arquitectura.* A continuación, los alumnos llevaron a cabo una búsqueda de información sobre la presencia del número de oro en las construcciones a lo largo de la historia.

- *ACTIVIDAD 5: Realización de maqueta.* La última sesión se destinó a la elaboración de una maqueta de alguna obra arquitectónica, conocida o creada por los alumnos, en cuyo diseño estuviera presente el número de oro.

CUESTIONARIOS FINALES

Al finalizar las actividades se efectuó una encuesta sobre las actividades con las siguientes cuestiones:

- *Pregunta 1:* ¿Consideras que mediante el estudio del número áureo pudiste comprender algunos conceptos de matemática básica? El 71% respondió afirmativamente.
- *Pregunta 2:* ¿Consideras que fueron de utilidad, como motivación positiva, las actividades realizadas sobre el número áureo para el estudio de la matemática básica? El 93% respondió afirmativamente
- *Pregunta 3:* ¿Consideras que la matemática básica estudiada puede ser de beneficio o se relaciona con tu Carrera? El 80% respondió afirmativamente.
- *Pregunta 4:* ¿Consideras que la matemática básica estudiada (apoyada en el número áureo), permitirá valorar a la Ciencia en el ámbito profesional a futuro? El 68% respondió afirmativamente.
- *Pregunta 5:* ¿Consideras que la matemática básica estudiada (apoyada en el número áureo) puede servir de sustento en las asignaturas prácticas de tu carrera? El 84% respondió afirmativamente.
- *Pregunta 6:* ¿Consideras que el estudio de las asignaturas de matemática superior, deberían ser abordadas con la metodología implementada en el curso de matemática básica, fundamentada en los tópicos del número áureo? El 94% respondió afirmativamente.

CONCLUSIONES

En este estudio, tomado como referencia para la elaboración de las distintas situaciones de aprendizaje, los investigadores dejan constancia de que la realización de actividades motivadoras entorno al número de oro sirvieron para producir un cambio de conducta en el interés y las actitudes del alumnado respecto al estudio de las matemáticas, cambiando el clima de aprendizaje en el aula. En el estudio se muestra cómo romper el esquema tradicional de una clase genera en el estudiante una expectativa distinta y favorable en comparación a la que mostrarían ante una clase de matemáticas rutinaria, cuyo contenido no trascenderá más allá del aula.

c

Como conclusión, los investigadores matizan que con la realización de estas actividades no se ha encontrado la manera de conseguir que todos los estudiantes quieran aprender matemáticas, pero ha supuesto un paso importante para sacar las matemáticas fuera del aula y brindarle al alumnado un nuevo camino de aprendizaje.

[3.2] La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría

En enero de 2006 se publica el libro titulado *Geometría para el siglo XXI* en el que se incluye el capítulo *La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría* de Ángel Gutiérrez. En este capítulo se revisa la situación actual de la investigación en didáctica de las matemáticas relativa al aprendizaje y enseñanza de la geometría. A continuación, se desarrollan las secciones de dicho capítulo que más interés tienen para este trabajo.

MODELO DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

En esta sección se describen las características principales del *modelo de razonamiento matemático de Van Hiele*, el marco teórico más empleado actualmente para organizar la enseñanza de la geometría y cuya aplicación está dando mejores resultados. El matrimonio holandés Pierre Marie y Dina van Hiele formulan las ideas básicas de un modelo que establece cuatro niveles de razonamiento secuenciales. Estos niveles abarcan desde las formas más básicas propias de estudiantes de preescolar hasta las formas más sofisticadas de los matemáticos profesionales. Los rasgos principales de estos niveles son:

- *Nivel 1:* Los estudiantes del nivel 1 dan un significado más físico que matemático a los elementos geométrico y perciben la posición de las figuras como una propiedad fundamental para clasificarlas.
- Nivel 2: Los estudiantes reconocen los elementos y propiedades matemáticos de los que están dotadas las figuras geométricas, pero las perciben como independientes unas de otras. Además, la demostración de la veracidad de una conjetura se hace verificándola en casos particulares. En los últimos cursos de Primaria los estudiantes deberían iniciar el paso al segundo nivel
- *Nivel 3:* Los estudiantes son capaces de realizar clasificaciones inclusivas como exclusivas de familias basadas en el análisis de éstas, sus demostraciones consisten en argumentos deductivos abstractos no formales y son capaces de comprender demostraciones formales sencillas explicadas por el docente. Al terminar la ESO los estudiantes deberían haber comenzado la transición al nivel 3.
- *Nivel 4:* Los estudiantes son capaces de utilizar el razonamiento matemático formal y, así, elaborar y comprender demostraciones formales de autónomamente.

Cada nivel tiene un lenguaje propio, por este motivo, surgen problemas de comunicación entre el profesor (nivel 4) y los alumnos. Además, el modelo de Van Hiele propone organizar las actividades de los estudiantes en cinco fases de aprendizaje que, junto con los niveles, conforman un marco de referencia para la organización de las lecciones. Estas fases son las siguientes:

- *Fase 1. Información:* Toma de contacto con el nuevo tema y activación de conocimientos previos.
- *Fase 2. Orientación dirigida*: Los estudiantes resuelven actividades y problemas para aprender los contenidos básicos. El profesor ayuda y dirige el trabajo.
- *Fase 3. Explicación:* Los estudiantes expresan sus ideas y sus maneras de resolver problemas.
- *Fase 4. Orientación libre:* Resolución de actividades y problemas que requieran la combinación de conocimientos de formas nuevas, evitando la simple aplicación de una fórmula o algoritmo.
- *Fase 5. Integración:* Repaso global de todo lo aprendido.

En el año 2000, la asociación de profesores de matemáticas de EE.UU., la NTCM, ajustó los principios y estándares curriculares de la geometría ajustándolo en torno a los niveles de Van Hiele y fomentando el progreso de los estudiantes por los tres primeros niveles durante la Primaria y Secundaria:

- En los cursos equivalente a 1º y 2º de la ESO, los estudiantes pueden formular argumentos deductivos sobre conjeturas y utilizar software de geometría dinámica para comprobarlas. Comunicar con claridad y precisión sus razonamientos los prepara para comprender demostraciones más formales en los cursos siguientes.
- En los cursos de 3º de la ESO a 2º de Bachillerato, los estudiantes deben, progresivamente, ser capaces de usar razonamiento deductivo para establecer o rechazar conjeturas.

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN MICROMUNDOS INFORMÁTICOS

Los programas de geometría espacial de la actualidad son un excelente complemento en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, pero en ningún caso, un sustituto de los materiales manipulativos tradicionales.

PRUEBAS, JUSTIFICACIONES, DEMOSTRACIONES, …

La demostración es uno de los pilares de apoyo de las matemáticas actuales. En el contexto de la enseñanza no universitaria, es necesario dar un significado amplio a la palabra *demostración* que integre diferentes tipos de justificaciones. A la hora de organizar las clases de matemáticas se debe tener en cuenta las tres siguientes facetas:

- *Las funciones de las demostraciones:* Explicar la veracidad de los resultados, descubrir nuevos teoremas por sí mismos, convencer de una afirmación, suponen un reto intelectual, establecer relaciones deductivas y comunicarse matemáticamente.
- *Las concepciones usuales de los estudiantes:* Para que los estudiantes comprendan la necesidad de las demostraciones deductivas.
- *Los tipos de demostraciones:* Demostraciones empíricas (comprobación en uno o varios ejemplos) y deductivas (justificación de una conjetura mediante argumentos deductivos basados en las propiedades anteriormente verificadas).

[4] Contenidos a Trabajar

[4.1] Número de oro

A lo largo de la historia el número de oro ha despertado el interés del ser humano, quien lo ha asociado con el ideal de belleza y le ha otorgado una importancia mística. El número de oro representa una proporción entre dos cuantías y con el paso del tiempo ha recibido múltiples nombres entre los que destacan: razón media y extrema, razón áurea, media áurea, razón dorada, número de oro, proporción áurea, número de Dios y divina proporción.

Aunque en la antigüedad el número áureo se representaba con las letras griegas tau (τ) o alfa (α), actualmente es más común representarlo con la letra griega phi, tanto en mayúscula (Φ) como en minúscula (ϕ ó φ) (Luque Ordóñez, 2022).

[4.1.1] Números Irracionales

Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como cociente de dos números enteros, es decir, tienen infinitas cifras decimales y no son periódicos. Podemos destacar tres números irracionales debido a su gran importancia en las matemáticas: π, *e* y el número áureo Φ .

- El número π es la relación entre la longitud de una circunferencia (L) y su diámetro (2R) en geometría euclidiana:

$$L = 2\pi \cdot R \Rightarrow \pi = \frac{L}{2R} = \frac{longitud}{diámetro} = 3{,}14159 \ldots$$

- El número *e*, también conocido como número de Euler o constante de Napier, es el valor límite de la sucesión $\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\}_{n=1}^{\infty}$:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 2{,}718 \ldots$$

- Y, por último, el número que nos ocupa, el número de oro. El número áureo se representa con la letra Φ (phi) en honor al escultor griego Fidias y su valor numérico es:

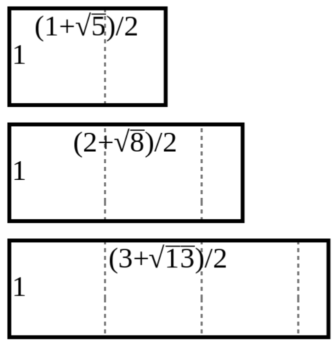
$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033 \ldots$$

La diferencia más destacada de Φ con los dos primeros números es que tanto π como el número *e* son *números trascendentes*, lo que quiere decir que no pueden ser obtenidos como solución de una ecuación algebraica con coeficientes enteros no todos nulos. Sin embargo, el número de oro sí que lo es, es solución de la *ecuación áurea* (Bragado Rodríguez, 2018).

[4.1.2] NÚMEROS METÁLICOS

Los números metálicos son un conjunto infinito de números irracionales cuadráticos positivos que reciben nombres especiales relacionados con diferentes metales. Esta familia de números fue sistematizada, estudiada y divulgada por la matemática argentina Vera de Spinadel, dándose a conocer en 1994. Los números metálicos ($\sigma_{p,q}$) son las soluciones positivas de las ecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 - px - q = 0,\ \ p, q \in N$, y están vinculados con las sucesiones de Fibonacci generalizadas $G_{n+2} = pG_{n+1} + qG_n$.

Figura 1. *Número de oro, plata y bronce. Obtenido de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Gold,_silver,_and_bronze_rectangles.svg. Dominio público*



En la siguiente tabla se muestran algunos nombres y propiedades de los números metálicos:

Figura 2. *Números metálicos. Elaboración propia.*

Nombre del número	***Ecuación***	***p***	***q***	***Solución positiva***	***Valor aproximado***
Número de oro ($\sigma_{1,1}$)	$x^2 - x - 1 = 0$	1	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1,618
Número de plata ($\sigma_{2,1}$)	$x^2 - 2x - 1 = 0$	2	1	$1 + \sqrt{2}$	2,414
Número de bronce ($\sigma_{3,1}$)	$x^2 - 3x - 1 = 0$	3	1	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	3,303
Número de cobre ($\sigma_{1,2}$)	$x^2 - x - 2 = 0$	1	2	2	2
Número de níquel ($\sigma_{1,3}$)	$x^2 - x - 3 = 0$	1	3	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	2,303
Número de platino ($\sigma_{2,2}$)	$x^2 - 2x - 2 = 0$	2	2	$1 + \sqrt{3}$	2,732

El número de oro se enmarca dentro de esta clasificación y corresponde a la ecuación con coeficientes p=1 y q=1, de la cual es solución, como se adelantaba en el apartado anterior.

[4.1.3] DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

El número áureo es un número irracional que pertenece a la familia de los números metálicos y que representa una proporción concreta entre dos cantidades. Concretamente, Φ es la solución positiva de la *ecuación áurea:* $x^2 - x - 1 = 0$, y siendo su valor:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

[DEFINICIÓN]

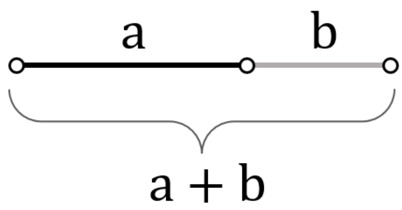
El número áureo es el valor numérico de la proporción que guardan entre sí dos segmentos de recta a y b (siendo a más largo que b), de tal manera que la longitud total (la suma de los dos segmentos a y b) es al segmento mayor a como el segmento a es al segmento menor b. Dicho de otra manera, el total es a la parte mayor como la parte mayor es a la parte pequeña (Luque Ordóñez, 2022).

El cociente entre ambas longitudes, independientemente de la dimensión de la recta inicial da lugar al número áureo, que define una proporción, *la proporción áurea*.

Dicha proporción se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{a+b}{a}\ (la\ longitud\ total\ es\ al\ segmento\ mayor) = \frac{a}{b}\ (el\ segmento\ mayor\ es\ al\ segmento\ menor) = \Phi$$

Figura 3. *Media y extrema razón. Elaboración propia.*



Si se desarrolla la ecuación anterior ($\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$), se obtiene que:

$$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

Si se denomina Φ al cociente $\frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi + 1 = \Phi^2 \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$

Al aplicar la fórmula de resolución de una ecuación de segundo grado del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, que es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, obtenemos para los valores $a = 1, b = -1, c = -1$, las siguientes soluciones:

$$\Phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

De este modo, se obtiene en la solución positiva el número áureo que comúnmente se representa con la letra griega Φ. A la solución negativa se le suele denominar con la letra Ψ o con Φ', la cual comparte muchas propiedades con el número áureo (Luque Ordóñez, 2022). Así pues:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339\ldots \quad ; \quad \Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}6180339\ldots$$

En definitiva, para que dos medidas a y b se encuentren en proporción áurea, se debe cumplir que:

$$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

[REPRESENTACIÓN MEDIANTE FRACCIONES CONTINUAS]

El número de oro también puede ser expresado por medio de fracciones continuas:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}$$

De esta manera el número áureo es la fracción continua periódica pura con la convergencia más lenta posible. De la previa expresión recursiva, se desprende que en el cálculo de su límite se obtiene el número áureo.

$$L = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}} = 1 + \frac{1}{L} \Rightarrow L^2 = L + 1 \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \Phi$$

[PROPIEDADES]

<u>*PROPIEDADES INMEDIATAS*</u>

Si denominamos por Φ a la solución positiva de la ecuación áurea y por Φ' a la solución negativa de dicha ecuación se confirman las siguientes propiedades inmediatas a partir de las fórmulas de Cardano Vieta (Reyes Iglesias & Fernández Benito, 2015):

$I)$ $\Phi^2 = \Phi + 1$ (al ser Φ solución se la ecuación áurea)

$II)\ \Phi + \Phi' = 1$ (suma de las raices de una ecuación de segundo grado)

$III)\ \Phi \cdot \Phi' = -1$ (producto de las raíces de la ecuaicón de segundo grado)

EXPRESIÓN DE LAS POTENCIAS DE Φ EN FUNCIÓN DE Φ

A continuación, si se realiza el producto de Φ por la igualdad I) e iteramos dicho proceso en cada una de las igualdades que obtenemos, logramos expresar las potencias de Φ del siguiente modo:

$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$; Al ser $\Phi^2 = \Phi + 1 \Rightarrow \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$.

$\Phi^4 = \Phi^3 \cdot \Phi = (2\Phi + 1)\Phi = 2\Phi^2 + \Phi = 2(\Phi + 1) + \Phi = 3\Phi + 2.$

$\Phi^5 = \Phi^4 \cdot \Phi = 3\Phi^2 + 2\Phi = 5\Phi^3 + 3.$

$\Phi^6 = 8\Phi + 5$ y, generalizando, obtenemos:

$\Phi^n = a_n\Phi + a_{n-1}, \forall\, n \geq 2$, donde a_n es el término *n*-ésimo de la *sucesión de Fibonacci* (1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89…), cuya ecuación de recurrencia es $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \forall n \geq 2, a_1 = 1, a_2 = 1$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA DE RAZÓN Φ

La progresión geométrica de razón Φ, con los siguientes términos: 1, Φ, Φ^2, Φ^3, … , Φ^{n}, ... es una sucesión de Fibonacci puesto que de la igualdad I) y de los productos sucesivos por Φ se obtiene que:

$$\Phi^2 = \Phi + 1;\ \Phi^3 = \Phi^2 + \Phi;\ \Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2; \dots;\ \Phi^{\mathrm{n}} = \Phi^{\mathrm{n}-1} + \Phi^{\mathrm{n}-2}, \forall n \geq 2$$

Por tanto, cada término de dicha progresión geométrica es la suma de los dos términos anteriores.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA DE RAZÓN $1/\Phi$

Si se divide entre Φ la igualdad I) y se itera este procedimiento obtenemos las siguientes relaciones:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}\ ;\ 1 = \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2}\ ;\ \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3}\ ; \dots ;\ \frac{1}{\Phi^n} = \frac{1}{\Phi^{n+1}} + \frac{1}{\Phi^{n+2}}\ ;\ n \geq 0$$

Es decir, cada término de la progresión geométrica: $1, \frac{1}{\Phi}, \frac{1}{\Phi^2}, \frac{1}{\Phi^3}, \dots, \frac{1}{\Phi^n}, \dots$ es suma de los dos siguientes.

OTRO MODO DE EXPRESAR LA PROPIEDAD INMEDIATA

La igualdad $\Phi^2 = \Phi + 1$ puede también escribirse de la siguiente forma:

$\Phi^2 - \Phi = 1 \Leftrightarrow \Phi(\Phi - 1) = 1$; o bien $\Phi - 1 = \dfrac{1}{\Phi} = \Phi^{-1}$

Se verifica que $\Phi^{-1} = \Phi - 1$

DIVISIÓN $\Phi^n - 1$ ENTRE $\Phi - 1$

El cociente de $\Phi^n - 1$, entre $\Phi - 1$, permite factorizar el primer polinomio del siguiente modo:

$$\Phi^n - 1 = (\Phi - 1)(1 + \Phi + \Phi^2 + \cdots + \Phi^{n-1}), n \geq 1.$$

Se obtiene que:

$$\frac{\Phi^n - 1}{\Phi - 1} = 1 + \Phi + \cdots + \Phi^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^i.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{\Phi-1} = \Phi$, resulta definitivamente:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Phi^i = \Phi(\Phi^n - 1).$$

PROPIEDAD

Se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi^n} = \Phi.$$

Al sumar la serie geométrica de razón $\frac{1}{\Phi} < 1$, se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi^n} = \frac{\frac{1}{\Phi}}{1 - \frac{1}{\Phi}} = \frac{1}{\Phi - 1} = \Phi.$$

De lo que se deduce que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Phi^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi^n} = 1 + \Phi = \Phi^2.$$

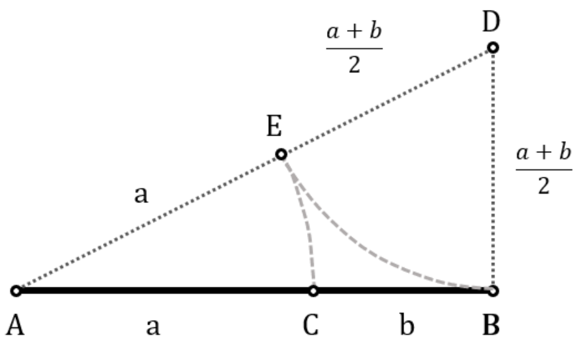
[4.1.4] CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA

A continuación, se muestra la construcción geométrica de la sección áurea. Prácticamente existen dos maneras de dibujar la proporción áurea: proporción áurea por división del segmento y proporción áurea por extensión del segmento.

PROPORCIÓN ÁUREA POR DIVISIÓN DEL SEGMENTO

Partiendo de un segmento inicial AB, al cual se pretende aplicarle la sección áurea con el fin de que quede dividido por un punto C en dos segmentos cuyas dimensiones guarden entre sí la proporción áurea. Para ello, primero se levanta una perpendicular al segmento AB desde el punto B que mida exactamente la mitad del segmento inicial y se une el extremo superior D del nuevo segmento con el punto A. De este modo, se obtiene un triángulo rectángulo ABD cuyos catetos se encuentran en proporción 2:1. A continuación, si se lleva la distancia del cateto menor a la hipotenusa, ésta queda dividida en dos segmentos por el punto E: uno de dimensión igual al cateto menor y el otro igual a la hipotenusa menos el cateto menor. Por último, si este segundo segmento se traslada al segmento AB inicial se obtiene el punto C que divide AB en dos segmentos que guardan entre sí proporción áurea, al igual que la mayor AC con la parte total AB (Bragado Rodríguez, 2018).

Figura 4. *División del segmento en proporción áurea. Elaboración propia.*



$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot AB$$

Si se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABD se tiene (Reyes Iglesias & Fernández Benito, 2015):

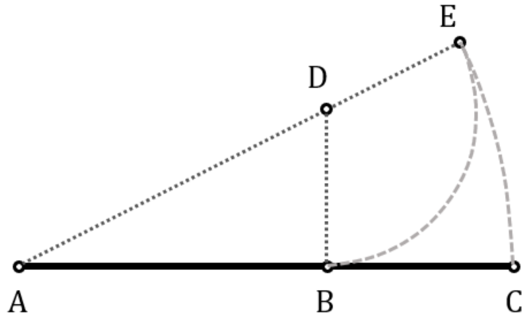
$$\left(a + \frac{a+b}{2}\right)^2 = (a+b)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 - ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0\,, b \neq 0$$

Siendo la solución positiva el número de oro, es decir, $\frac{a}{b} = \Phi$.

PROPORCIÓN ÁUREA POR EXTENSIÓN DEL SEGMENTO

Ahora se muestra la operación inversa, es decir, conseguir la medida superior de la que es sección áurea el segmento AB. Se construye el mismo triángulo rectángulo ABD que en el apartado anterior, pero en lugar de restar el cateto menor a la hipotenusa, se le suma para obtener el punto E y se traslada dicha distancia AE sobre la prolongación del segmento AB consiguiendo el punto C de modo que $\frac{AC}{AB} = \phi$.

Figura 5. *Proporción áurea por extensión de un segmento. Elaboración propia.*



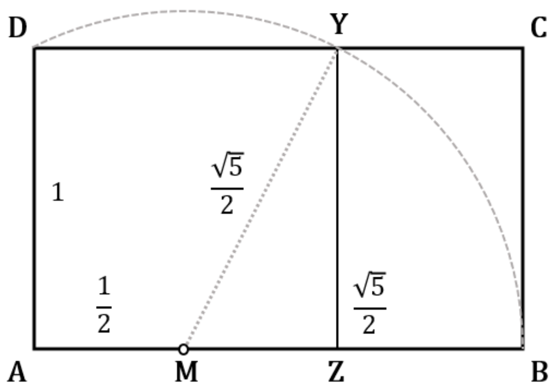
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot AC$$

[4.1.5] RECTÁNGULO ÁUREO

El rectángulo cuyos lados están en proporción áurea se llama rectángulo áureo ($\frac{lado\ mayor}{lado\ menor} = \Phi$).

Una manera frecuente de construirlo geométricamente usando regla y compás se realiza partiendo de un cuadrado. Dado el cuadrado AZYD de lado 1, se traza un arco de circunferencia con centro en el punto medio del lado $\overline{AZ}$ (M) con radio $\overline{MY}$ de manera que corte a la prolongación del lado $\overline{AZ}$ en el punto B como se muestra en la Figura 6 (Reyes Iglesias & Fernández Benito, 2015).

Figura 6. *Construcción rectángulo áureo. Elaboración propia.*

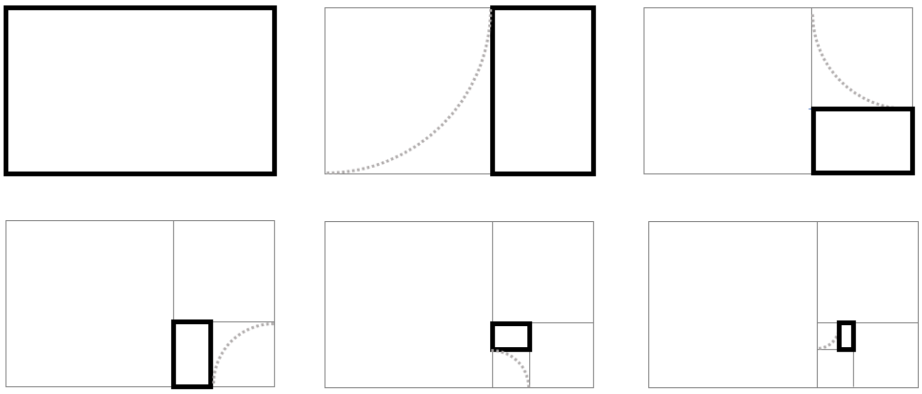


El rectángulo obtenido de lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ es un rectángulo áureo y, en consecuencia, el lado $\overline{AB}$ mide:

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

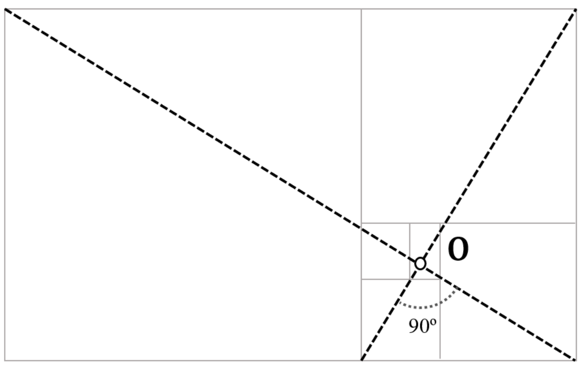
El gnomon de un rectángulo áureo, es decir, la figura yuxtapuesta para conseguir otro rectángulo áureo semejante, es un cuadrado. De este modo, si se descarta del interior de un rectángulo áureo un cuadrado de lado igual al segmento menor, se obtiene otro rectángulo áureo. De igual manera, si se añade al rectángulo áureo un cuadrado de lado el segmento mayor, se logra un nuevo rectángulo áureo semejante de mayor tamaño. Esta recursividad y autosimilitud se mantiene infinitamente, tanto hacia dentro como hacia afuera (Luque Ordóñez, 2022).

Figura 7. *Sucesión de rectángulos áureos. Elaboración propia.*



Las diagonales de la sucesión de rectángulos áureos se cortan siempre en ángulo recto y exactamente en el mismo punto de convergencia que comúnmente se denomina *ojo de Dios* (O).

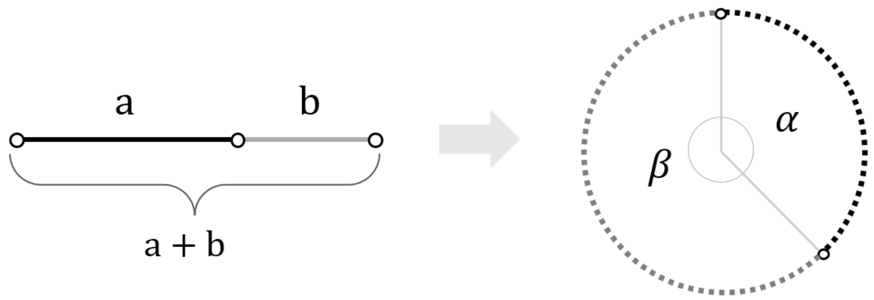
Figura 8. *Ojo de Dios. Elaboración propia.*



[4.1.6] ÁNGULO ÁUREO

El ángulo áureo es el aquel que se obtiene al dividir una circunferencia en proporción áurea.

Figura 9. *Ángulo áureo. Elaboración propia.*



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha} = \Phi, \alpha + \beta = 360° \ (2\pi \text{ rad}) \Rightarrow \frac{360°}{\beta} = \Phi$$

$$\frac{\beta+\alpha}{\alpha} = \Phi \Rightarrow \frac{360°}{\beta} = \Phi \Rightarrow \beta = \frac{360°}{\Phi} = \frac{720°}{1+\sqrt{5}} \approx 222{,}5°$$

$$\alpha = 360° - \beta \approx 137{,}5°$$

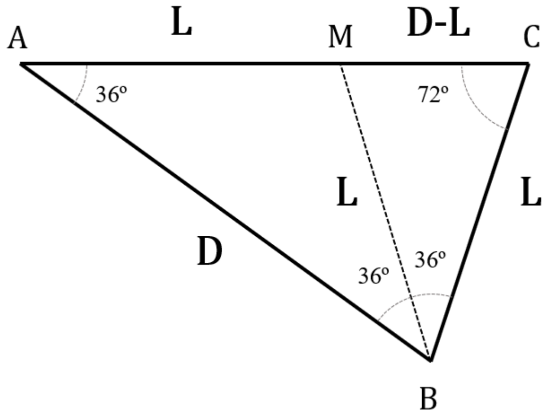
Se considera como ángulo áureo $\alpha \approx 137{,}5°$, aunque el ángulo β recorre el mismo arco en sentido contrario. El ángulo áureo no se puede construir con regla y compás puesto que su seno y coseno son número trascendentes.

Como veremos más adelante, este ángulo de oro es significativo en la filotaxis de las plantas debido a su estrecha relación con el mecanismo que utilizan las plantas para aprovechar al máximo la exposición solar de las hojas y el empaquetamiento de las semillas.

[4.1.7] EL TRIÁNGULO SUBLIME

El triángulo sublime es el triángulo isósceles de ángulos 36º, 72º y 72º, como el triángulo ABC que se muestra en la Figura 10. Al tratarse de un triángulo sublime, la bisectriz del ángulo en el vértice B interseca al lado $\overline{AC}$ en un punto M, generando un nuevo triángulo MBC semejante al original puesto que sus ángulos miden 36º, 72º y 72º (Reyes Iglesias & Fernández Benito, 2015).

Figura 10. *Triángulo sublime. Elaboración propia.*



Por consiguiente, se tiene que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MC}}$. Al tratarse el triángulo BMA a su vez de un triángulo isósceles, puesto que cuenta con dos ángulos iguales que miden 36º, se verifica que $\overline{BM} = \overline{MA}$. Si el segmento $\overline{BC}$ mide L, y los segmentos $\overline{AC} = \overline{AC}$ miden D. Entonces, se llega a que las medidas $\overline{BM}$ y $\overline{MA}$ miden también L y, por tanto, la longitud de $\overline{MC}$ es $D - L$, verificándose la siguiente proporción:

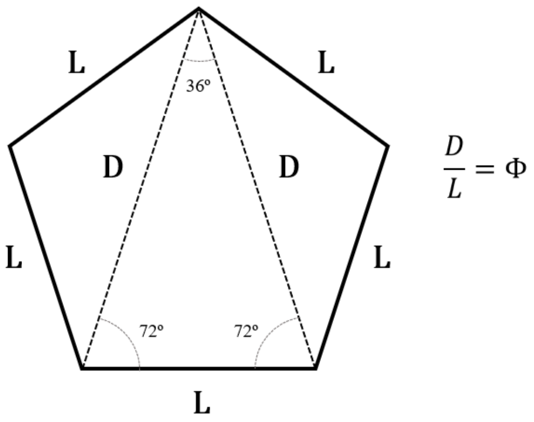
$$\frac{D}{L} = \frac{L}{D-L} \Rightarrow D^2 - DL - L^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{D}{L}\right)^2 - \frac{D}{L} - 1 = 0$$

Se obtiene que su solución positiva es Φ, lo que significa que la razón entre los lados desiguales de un triángulo sublime es el número de oro. Por este motivo, el triángulo sublime también es conocido como *triángulo de oro agudo*. El triángulo BMA se llama *triángulo de oro obtuso* puesto que sus lados D, L y L cumplen también la misma razón $\frac{D}{L} = \Phi$.

TRIÁNGULO SUBLIME EN PENTÁGONO REGULAR

Si se trazan en un pentágono regular de lado L dos diagonales desde el mismo vértice, forman con el lado del pentágono un triángulo sublime como se muestra en la Figura 11. Se tiene un *triángulo sublime* cuyos lados miden D, D y L y, puesto que $\frac{D}{L} = \Phi$, se deduce que la razón entre la longitud de las diagonales de un pentágono regular y cualquiera de sus lados es el número de oro. Por otra parte, se determinan dos triángulos congruentes, yuxtapuestos al sublime que se son triángulos de oro obtusos, cuyos lados miden L, L y D.

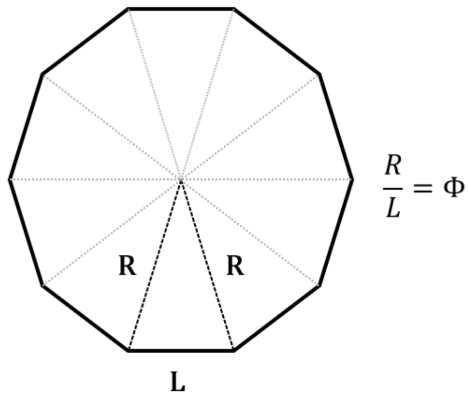
Figura 11. *Triángulo sublime en pentágono regular. Elaboración propia.*



TRIÁNGULO SUBLIME EN DECÁGONO REGULAR

Si conectan los vértices del decágono regular con su centro obtenemos diez triángulos isósceles con ángulos 72º, 72º y 36º como vemos en la Figura 12. Por tanto, el decágono regular se compone de diez triángulos sublimes en los que la razón entre sus lados mayores (radios del decágono) y sus menores (lados del decágono) es el número de oro.

Figura 12. *Triángulo sublime en decágono regular. Elaboración propia.*



[4.1.8] Razón Áurea en el Pentágono Regular

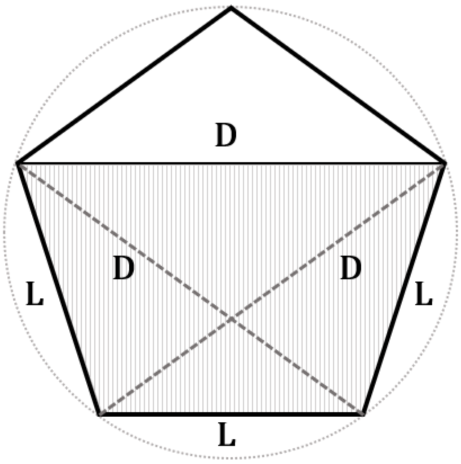
RAZÓN ENTRE LA DIAGONAL Y EL LADO DE UN PENTÁGONO REGULAR

Como se muestra en la Figura 11, la razón entre la diagonal D y el lado L de un pentágono regular es el número áureo. Otro modo de demostrar la presencia de la razón áurea es por medio del *teorema de Ptolomeo*:

"En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales"

Si aplicamos este teorema al cuadrilátero de lados L, L, L y D, con diagonales D y D, conseguimos la ecuación áurea cuya solución positiva es el número de oro.

Figura 13. *Razón entre diagonal y lado del pentágono regular. Elaboración propia.*

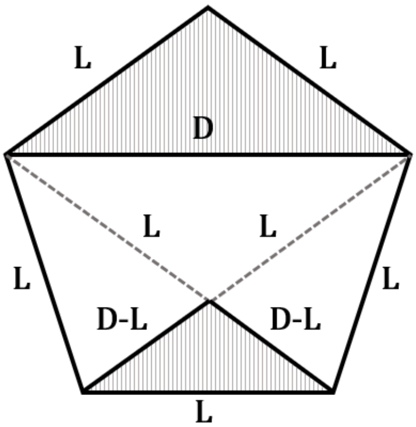


$$\text{Teorema de Ptolomeo:} \quad D \cdot L + L^2 = D^2$$

$$\left(\frac{D}{L}\right)^2 - \frac{D}{L} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{D}{L} = \Phi$$

El cuadrilátero de lados L, L, L y D es un trapecio que queda dividido por sus diagonales en cuatro triángulos isósceles, uno de los cuales tiene de lados D-L, D-L y L como podemos ver en la Figura 14. La razón entre los lados de este triángulo isósceles es el número de oro.

Figura 14. *Razón entre la diagonal y el lado de un pentágono regular II. Elaboración propia.*



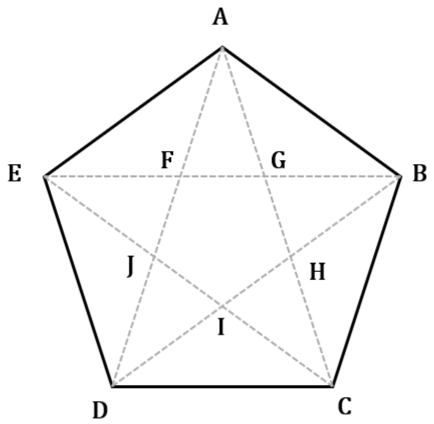
$$\frac{L}{D-L} = \frac{\frac{L}{L}}{\frac{D-L}{L}} = \frac{1}{\Phi - 1} = \Phi$$

Se concluye que este triángulo es semejante al triángulo isósceles de lados L, L y D puesto que ambos son triángulos sublimes obtusos (Reyes Iglesias & Fernández Benito, 2015).

RAZÓN ÁUREA EN PENTÁGONO REGULAR ESTRELLADO

El pentagrama o estrella pentagonal (también denominada pentáculo, pentalfa, pentángulo o estrella pitagórica) está compuesta por 10 triángulos isósceles: 5 sublimes y 5 sublimes obtusos. Hacia el exterior y hacia el interior del pentagrama se puede trazar nuevos pentagramas de manera recursiva hasta el infinito, con la presencia en todos ellos de la proporción áurea (Luque Ordóñez, 2022).

Figura 15. *Estrella pentagonal. Elaboración propia.*



La estrella pentagonal de la Figura 15 solamente tiene cuatro longitudes distintas de segmentos AC, AB, AG y FG, que verifican (Barrios Calmaestra, 2021):

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{FG}} = \Phi$$

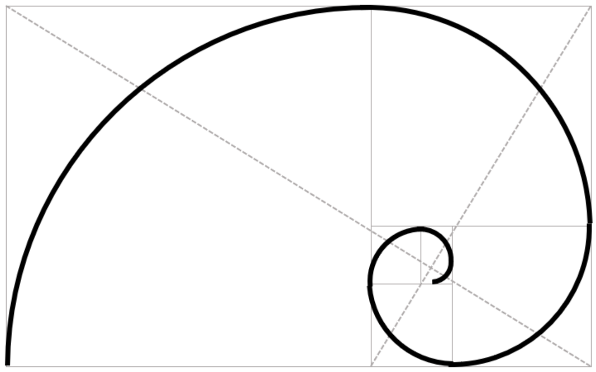
[4.1.9] La Espiral Áurea

Es posible construir una espiral en un crecimiento homotético y gnomónico de rectángulos por triángulos áureos. Esta espiral recibe el nombre de espiral áurea y cuenta con propiedades de autosimilitud y crecimiento infinito hacia dentro y hacia afuera. En ambos casos, espiral basada en rectángulos o triángulos áureo, el factor de crecimiento de la espiral es el número de oro.

[ESPIRAL ÁUREA BASADA EN RECTÁNGULOS ÁUREOS]

También denominada espiral de Durero, se obtiene por crecimiento homotético o gnomónico de rectángulos áureos que converge en un punto, el previamente mencionado *ojo de Dios* obtenido intersecando diagonales. La espiral se construye uniendo sucesivos arcos de circunferencia de 90º que conectan dos puntos opuestos de los cuadrados gnomónicos y con centro en uno de los vértices coincidentes entre el rectángulo áureo y su gnomon.

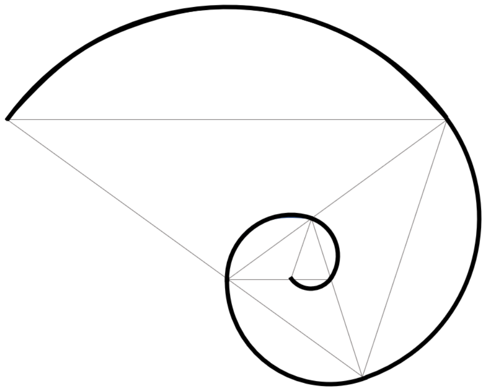
Figura 16. *Espiral áurea en rectángulos áureos. Elaboración propia.*



[ESPIRAL ÁUREA BASADA EN TRIÁNGULOS SUBLIMES]

Por otro lado, la espiral áurea obtenida por crecimiento de triángulos sublimes converge a su vez en un punto, de manera similar al *ojo de Dios*. La espiral se obtiene conectando arcos de circunferencia de 108º con centro (correspondiente al ángulo mayor de los gnómones, triángulos sublimes obtusos), con centro en los vértices consecutivos de estos triángulos semejantes y radio la longitud del lado menor.

Figura 17. *Espiral áurea basada en triángulos sublimes. Elaboración propia.*



[4.1.10] NÚMERO DE ORO EN LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS

El número de oro está relacionado especialmente con el dodecaedro, al estar formado por pentágonos, y el icosaedro, poliedro dual del dodecaedro. En ambos casos, tres rectángulos áureos se solapan ortogonalmente en sus centros, los 12 vértices de estos rectángulos coinciden con los 12 vértices de un icosaedro, mientras que en el caso del dodecaedro coinciden con los centros de sus 12 caras. El punto en el que intersecan los rectángulos coincide con el centro de ambos poliedros.

Como consecuencia, los 20 vértices de un dodecaedro con aristas de longitud 2 pueden expresarse en coordenadas cartesianas en función de Φ, de igual manera que los 12 vértices de un icosaedro (Luque Ordóñez, 2022).

Figura 18. *Rectángulos áureos inscritos en dodecaedro. Editado de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Dodecaedro_rectangulos_aureos.png GNU 1.2.*

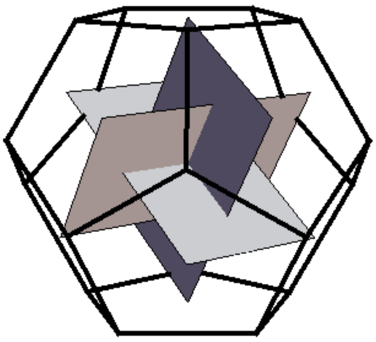
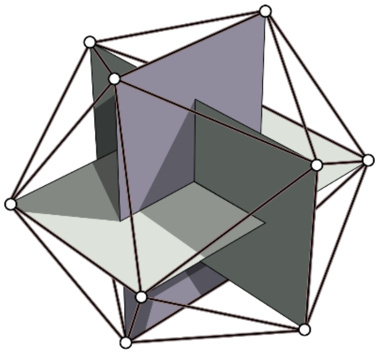


Figura 19. *Rectángulos áureos inscritos en icosaedro. Editado de Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Icosahedron-golden-rectangles.svg Dominio público.*



[4.1.11] HISTORIA DEL NÚMERO ÁUREO

[ANTIGÜEDAD]

No se sabe exactamente cuándo se descubrió el número áureo o se empezó a utilizar por la humanidad. Seguramente se ha ido descubriendo y redescubriendo en sus múltiples formas a lo largo de la historia, lo cual explica su gran variedad de nomenclaturas (La Proporicón Áurea, s.f.).

En la antigüedad, la proporción áurea no se descubrió como una expresión aritmética sino como un concepto geométrico. A lo largo de la historia el número áureo ha recibido numerosas denominaciones que ya hemos mencionado, las cuales hacen referencian a su origen geométrico (razón, proporción), a su vínculo con los cánones de belleza clásica (áureo, dorado) y a su relación que se le ha otorgado con la divinidad (divino, de Dios).

Se ha estudiado la presencia de la proporción áurea en varias estelas de Asiria y Babilonia que datan entorno al año 2.000 a.C.. Sin embargo, no se cuenta con documentación histórica que certifique la utilización consciente del número áureo en la elaboración de las estelas. Por tanto, no contamos con la certeza de que la presencia de dicho número en la medición de las proporciones de dichas estelas fue intencionada o casual.

[GRECIA Y ROMA]

Pero en es Grecia donde comienza propiamente la historia del número áureo. En la época de Platón sus propiedades como sección implícita en el pentágono no estrellado, así como el hecho de ser un número irracional, despertaron el interés, la admiración y la veneración de los pitagóricos. Desde entonces, si no viene de antes, surge una leyenda que atribuye a la sección áurea un valor místico y un interés estético.

Hay que remontarse alrededor del 300 a.C. para encontrar la primera fuente documental importante sobre la sección áurea del que se tiene constancia. Este documento es el tratado *Los Elementos* de Euclides, matemático griego conocido como el padre de la geometría. Es en este tratado donde se define por primera vez y de manera precisa lo que posteriormente se conoció como Proporción áurea. Concretamente nos referimos a la Proposición 30 del Libro Sexto de dicho tratado, en el que Euclides definió la proporción áurea del siguiente modo: "*Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor.*"

Figura 20. *Los Elementos de Euclides, portada del libro I. Rodrigo Zamorano. Obtenido de Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Los_Elementos_de_Euclides_(1576)_-_Libro_I.pdf Dominio público.*

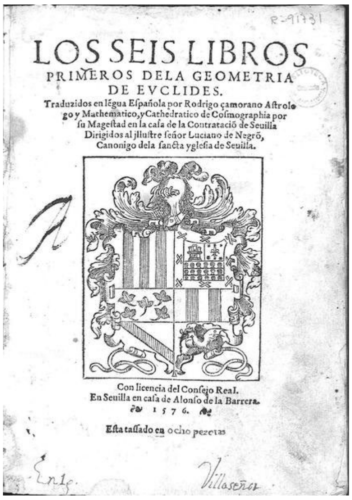
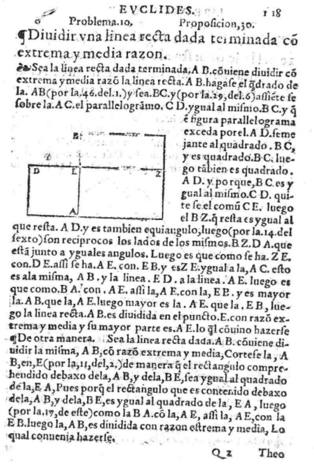


Figura 21. *Los Elementos de Euclides, proposición 30 del libro VI. Rodrigo Zamorano. Obtenido de Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File%3ALos_Elementos_de_Euclides_(1576)_-_Libro_VI.pdf&page=45 Dominio público*



EVCLIDES. 118
Problema.10. Proposicion,30.
¶Diuidir vna linea recta dada terminada cõ extrema y media razon.

Sea la linea recta dada terminada, A B. cõuiene diuidir cõ extrema y media razõ la linea recta. A B. hagase el q̃drado de la. AB (por la.46.del.1.) y sea. BC. y (por la.29, del.6) assiẽte se sobre la. A C. el parallelogrãmo. C D. ygual al mismo. B C. y q̃ é figura parallelograma exceda por el. A D. semejante al quadrado. B C, y es quadrado. B C. luego tãbien es quadrado. A D. y porque, B C. es ygual al mismo. C D. quite se el comũ C E. luego el B Z. q̃ resta es ygual al que resta. A D. y es tambien equiangulo, luego (por la.14.del sexto) son reciprocos los lados de los mismos. B Z. D A. que estã junto a yguales angulos. Luego es que como se ha. Z E. con. D E. assi se ha. A E. con. E B. y es Z E. ygual a la, A C. esto es ala misma, A B. y la linea. E D. a la linea. A E. luego es que como. B A. con. A E. assi la, A E. con la, E B. y es mayor la. A B. que la, A E. luego mayor es la. A E. que la. E B, luego la linea recta. A B. es diuidida en el puncto. E. con razõ extrema y media y su mayor parte es. A E. lo q̃l cõuino hazerse
¶De otra manera. Sea la linea recta dada. A B. cõuiene diuidir la misma, A B, cõ razõ extrema y media, Cortese la, A B, en, E (por la, 11, del, 2.) de manera q̃ el rectangulo comprehendido debaxo dela, A B, y dela, B E, sea ygual al quadrado de la, E A, Pues porq̃ el rectangulo que es contenido debaxo dela, A B, y dela, B E, es ygual al quadrado de la, E A, luego (por la, 17, de este) como la B A. cõ la, A E, assi la, A E, con la E B. luego la, A B, es diuidida con razon estrema y media, Lo qual conuenia hazerse.

Q 2 Theo

Los Elementos se convierte en la obra en la que toda la matemática empírica comprendida en las observaciones de babilonios y egipcios logra un carácter teórico y especulativo. Euclides dedicó una veintena de proposiciones al estudio de la sección áurea construyéndola mediante dos métodos distintos, la emplea en la construcción del triángulo sublime y del pentágono regular y enuncia y demuestra diversas propiedades del número áureo y los sólidos regulares inscribibles en una esfera. A su vez Euclides dejó demostrado que este número no puede ser expresado o descrito como la razón de dos números enteros, es decir, que se trataba de un número irracional (Bonell, 1999).

Durante la época romana podemos destacar la figura de Vitrubio, arquitecto, escritor e ingeniero romano que trata nuevamente la sección áurea. Vitrubio mencionada que se debía "*dar proporción a todo edificio a semejanza de todo el cuerpo que está bien proporcionado con respecto a sus miembros*".

[EDAD MEDIA]

Fue a partir de las traducciones de los *Elementos* llevadas a cabo por los árabes cuando se alcanzó una amplia difusión. Durante la Edad Media se puede destacar la figura de Abu Kamil, quién empleando el número áureo realizó cálculos geométricos en pentágonos y decágonos.

En el siglo XII destaca la figura de Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, quien empleó los estudios realizados por Abu Kamil para resolver problemas geométricos. Leonardo de Pisa fue autor de un importante tratado, el *Liber Abaci*, en el que entre otros problemas teóricos y prácticos aparece una serie numérica, la sucesión de Fibonacci, en la que cada término es igual a la suma de los dos anteriores, propiedad aditiva que comparte con la serie Φ, con que se encuentra estrechamente vinculada puesto que la razón entre dos de sus términos consecutivos tiende hacia un límite que es precisamente Φ.

En el siglo XIV surge el primer traductor latino y comentador de Euclides, Johannes Campanus de Novara, quien realiza sus traducciones a partir de una versión árabe. A partir de la obra de Campanus de Novara, se multiplican las ediciones de los *Elementos* en latín a lo largo de dicho siglo, surgiendo en el siguiente siglo ya las ediciones vulgares.

[RENACIMIENTO]

En el Renacimiento el número áureo pasa a denominarse *divina proporción* al atribuírsele una intervención divina en el libro titulado *De Divina Proportione* del matemático y teólogo italiano Luca Pacioli. En dicho libro Pacioli expone cinco razones por las que el número áureo debía considerarse divino:

a) La unicidad del número, que lo asemeja a Dios.
b) El hecho de que se encuentre definido por tres segmentos, lo cual lo asemeja a la Trinidad.
c) La inconmensurabilidad del número, inconmensurable igual que Dios.
d) El número es omnipresente e invariable, como Dios.
e) Dios concedió ser al universo a través de la quinta esencia, representada por un dodecaedro, y el número áureo dio ser al dodecaedro.

Figura 22. *Portada de Divina Proportione. Luca Pacioli. Editado de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:De_divina_proportione_title_page.png Image courtesy History of Science Collections, University of Oklahoma Libraries; copyright the Board of Regents of the University of Oklahoma.*

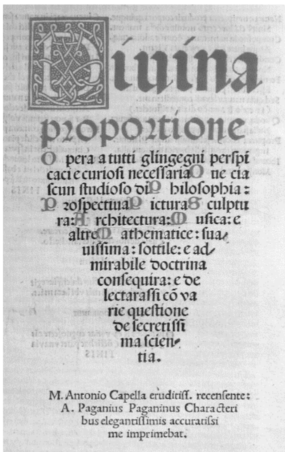
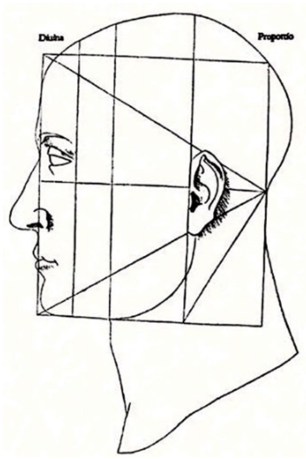


Figura 23. *Grabado en madera que ilustra las proporciones del rostro humano. Luca Pacioli. Obtenido de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Divina_proportione.png Dominio público*



Uno de los aspectos a destacar de la obra de Pacioli es el haber atribuido a la proporción aquel significado más general y filosófico que Platón recogió de los pitagóricos y divulgó en algunos de sus *Diálogos*.

Años más tarde, Alberto Durero publicó el libro *"Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas sólidas"*, en el cual indica el proceso para trazar la espiral áurea o espiral de Durero, basada en la proporción áurea.

[EDAD MODERNA]

En el año 1595, Johannes Kepler escribe el tratado sobre astronomía titulado *"El misterio cósmico"*, libro sobre la concepción de un modelo platónico del Sistema Solar. En dicho tratado Kepler incorpora la siguiente frase respecto al número áureo: *"La geometría tiene dos grandes tesoros: uno, el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea entre el extremo y su proporcional. El primero lo podemos comparar a una medida de plata; el segundo lo debemos denominar una joya preciosa".*

La primera aproximación decimal del número áureo llega en el año 1597 de la mano de Michael Maestlin, obteniendo un valor de 0,6180340, que es el valor inverso de lo que hoy conocemos como número áureo $(\frac{1}{\Phi})$.

En el siglo XVIII, matemáticos como Abraham de Moivre, Daniel Bernoulli y Leonhard Euler hicieron uso de una fórmula que relacionaba la secuencia de Fibonacci con el número áureo, posteriormente redescubierta y publicada en 1843 por Jacques Binet, del cual recibe el nombre la fórmula.

[EDAD CONTEMPORÁNEA]

Prácticamente desde Kepler la proporción divina cayó en desuso hasta el siglo XIX cuando fue redescubierta y puesta en valor como principio morfológico directriz por el psicólogo alemán Adolf Zeising. Zeising afirma en su *Ästhetische Forschungen* (1855): *"Para que un todo, dividido en partes desiguales, parezca hermoso, desde el punto de vista de la forma, debe haber entre la parte menor y la mayor, la misma razón que entre la mayor y el todo"* (Zeising, 1855). A su vez Zeising comprueba mediante el uso de la estadística que el cuerpo humano queda dividido por el ombligo según la razón áurea.

En el año 1876, Gustav Fechner, uno de los padres de la psicofísica y figura destacada de la estética experimental llevó a cabo un ensayo que consistió en hacer escoger a un grupo de personas el rectángulo que más les gustase de un catálogo de rectángulos con distintas esbelteces. El rectángulo que resultó ser el más escogido fue aquel cuyos lados se relacionaban entre sí como 34/21, razón muy próxima al número de oro, porque lo que quedó demostrado el efecto directo de su impresión estética (Bonell, 1999).

Finalmente, en el año 1910, el matemático Mark Barr adjudicó al número áureo la letra phi (Φ, ϕ, φ) en honor al escultor griego Phidias, por el gran valor estético que se atribuía a sus esculturas al emplear dicha proporción en sus obras (Luque Ordóñez, 2022).

[4.2] Sucesión de Fibonacci

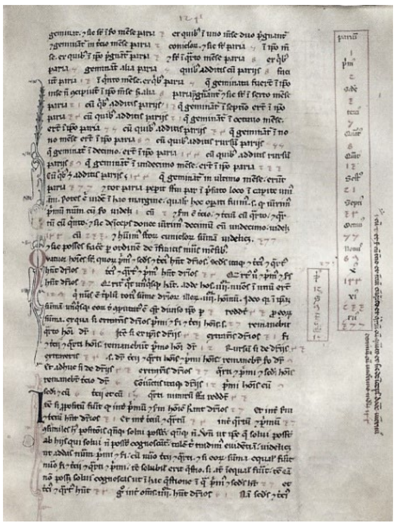
[4.2.1] HISTORIA DE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

La sucesión de Fibonacci, mucho antes de conocerse en occidente ya se encontraba descrita en la matemática de la India vinculada a la *prosodia sanscrita* (entonación, acento y ritmo en la poesía del idioma sánscrito), la cual fue desarrollada por el matemático indio Pingala en una fecha no determinada entre el año 700 a.C. y el 100 d.C. Años más tarde en occidente, el matemático italiano Fibonacci fue el primer europeo en describir la famosa sucesión que unos siglos después pasaría a llevar su nombre. Johannes Kepler también estudió los números de Fibonacci y el geómetra escocés Robert Simson descubrió en 1753 la estrecha relación que guardan entre sí la sucesión de Fibonacci con el número áureo que desarrollaremos en apartados más adelante. Y, por último, en el siglo XIX el matemático francés Edouard Lucas descubrió muchas de las propiedades de esta sucesión a la cual le concedió el nombre de *sucesión de Fibonacci* en honor a su divulgador en occidente siglos antes.

[4.2.2] LEONARDO DE PISA

Leonardo de Pisa (1170-1240), más conocido como Fibonacci, fue un matemático italiano nacido en la ciudad de Pisa. Fibonacci fue educado en el norte de África y es allí donde recibe su primera formación matemática de maestros musulmanes que le ilustraron sobre las grandes ventajas de los sistemas matemáticos usados en esos países (Vargas Contreras, 2003). La principal obra de Leonardo de Pisa fue *Liber Abaci* (1202), obra en la que trata de recopilar todo el conocimiento aritmético y algebraico de la época. Fibonacci también escribió sobre problemas prácticos de matemáticas comerciales y geodésicas, problemas relacionados con el algebra y sobre matemáticas recreativas. Leonardo defiende en su *Liber Abaci* el empleo de los números arábigos, sistema de numeración que utilizamos hoy en día, y explica como sumar, restar, multiplicar y dividir con ellos.

Figura 24. *Página del Liber Abaci en la que aparece la sucesión de Fibonacci. Editado de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg Dominio público.*



[4.2.3] EL PROBLEMA DE LOS CONEJOS

En *Liber Abaci*, Fibonacci plantea la resolución de numerosos problemas sobre álgebra y geometría, uno de los cuales trataba sobre la cría de conejos y decía así:

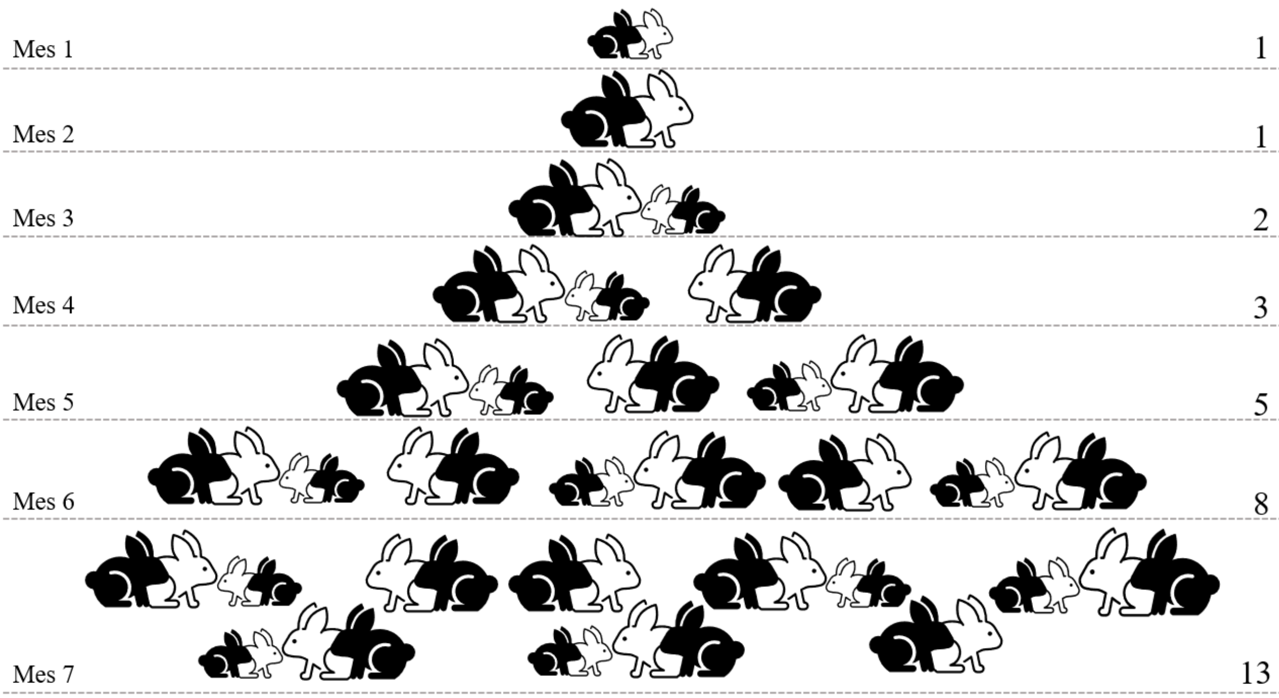
"En un corral, se coloca una pareja de conejos, recién nacidos, para ver cuántos descendientes produce en el curso de un año, y suponiendo que cada mes a partir del segundo mes de su vida, cada pareja de conejos da origen a una nueva pareja"

Para solucionar este problema y saber la cantidad de conejos que habrá en el corral al cabo del año, Fibonacci utilizó las siguientes premisas:

- Un conejo recién nacido necesita que pase un mes para llegar a su madurez reproductiva y estar preparado para procrear.
- Una pareja (macho y hembra) de conejos maduros dan a luz una nueva pareja de conejos tras un mes de gestación.
- Durante dicho año no muere ningún conejo.

Con estas suposiciones de partida se resuelve el problema del siguiente modo:

Figura 25. *Problema de los conejos. Elaboración propia.*



Como se puede observar en la figura, la primera pareja el primer mes está recién nacida y no está preparada para procrear, por tanto, al término del primer mes continuamos teniendo la misma pareja. Al comienzo del segundo mes la pareja ya ha alcanzado la madurez reproductiva por lo que al finalizar el mes se genera una nueva pareja. De las dos parejas solamente la primera tiene descendencia al final del tercer mes puesto que la segunda está recién nacida. Por tanto, al finalizar el tercer mes tenemos tres parejas de conejos. Durante el cuarto mes dos de las tres parejas tiene descendencia de manera que al finalizar el cuarto mes hay cinco parejas en el corral. En el quinto mes tres de las cinco parejas se reproducen de manera que al final del quinto mes tenemos ocho parejas de conejos. Si continuamos con este procedimiento al cabo de un año habrá 144 parejas de conejos.

Estudiando los resultados anteriores podemos deducir la cantidad de parejas de conejos que habrá en un determinado tiempo del siguiente modo:

- Al analizar la figura nos damos cuenta de que en el tercer mes se suma se suman las cantidades de los dos primeros meses: 1+1=2.
- Al siguiente mes, el cuarto, se suma el número de parejas del segundo con el tercero, es decir: 1+2=3.
- A continuación, para obtener el valor del quinto mes podemos sumar la cifra del tercero con el cuarto mes, de modo: 2+3=5. Y así sucesivamente.

Por tanto, a partir del segundo mes, para saber el número de conejos que tenemos al finalizar cada mes bastaría con sumar el número de conejos que hay al finalizar los dos meses anteriores.

En conclusión, determinar la cuantía de parejas de conejos a lo largo del año es relativamente fácil. Sin embargo, el valor detrás de este problema radica en la secuencia de los resultados mes a mes, en la que encontramos una relación matemática que fue la causa de la inmortalidad del problema de los conejos.

[4.2.4] DEFINICIÓN DE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

Para ahondar en la relación numérica de la que nace la grandeza del problema de los conejos tenemos que aislarla y presentarla como objeto matemático. La lista de números resultantes es (Vargas Contreras, 2003):

$$\mathbf{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144}, \ldots$$

En primer lugar, podemos afirmar que dichos números forman una lista de números infinita que es ordenada, es decir, que existe un primer término, un segundo, un tercero y así sucesivamente. A este tipo de listas le damos el nombre de sucesión, y evidentemente, ésta en particular recibe el nombre de Sucesión de Fibonacci.

Si denotamos a la sucesión por la letra *F* en general, nos referimos entonces con dicha letra y un subíndice a un término específico de ella. Así pues:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \ldots, F_{10} = 55, F_{11} = 89$$

$$F_n = n - \acute{e}simo\ t\acute{e}rmino\ de\ Fibonacci$$

Como podemos ver, los subíndices indican el término de la sucesión al cual nos referimos, al orden que ocupa en la sucesión mientras que el número en sí es el valor que asociamos a ese término.

Por tanto, la Sucesión de Fibonacci es una relación de recurrencia que cumple que cada término de la sucesión es la suma de los dos términos estrictamente anteriores, con valores 1 y 1 para los dos primeros términos de la sucesión:

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \, , \forall n \geq 3$$

La infinidad de propiedades matemáticas de la Sucesión de Fibonacci ha fascinado a lo largo de la historia a estudiosos de diversas disciplinas de tal manera que existe una publicación específica titulada *Fibonacci Quaterly* dedicada exclusivamente a divulgar los avances de las investigaciones en torno a dicha secuencia.

[4.2.5] RELACIÓN CON EL NÚMERO ÁUREO

Como ya se ha mencionado en el apartado 4.2.3, la principal relación con el número áureo surge al realizar el cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, ya que conforme mayores sean los términos, más se aproximará el resultado al número áureo.

Para mostrar dicha relación vamos a seguir los siguientes pasos:

- Realizamos los cocientes $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ de los términos consecutivos de la sucesión comenzando en $n = 2$.
- Comparamos el resultado obtenido con los resultados de las divisiones anteriores.
- Estimamos el comportamiento de los sucesivos cocientes cuando $n \to \infty$.

$$\frac{F_2}{F_1} = 1 \;\; ; \;\; \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2 \;\; ; \;\; \frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \;\; ; \;\; \frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1{,}\hat{6} \;\; ; \;\; \frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1{,}625 \;\; ; \;\; \frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1{,}615 \ldots \;\; ; \;\; \frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} = 1{,}619 \ldots \;\; ; \;\; \frac{F_7}{F_6} = \frac{55}{34} = 1{,}617 \ldots$$

Como vemos el resultado del cociente se va acercando alternativamente por encima y por debajo cada vez más al número de oro. Si realizamos el límite de los sucesivos cocientes cuando $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + 1/\left(\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}\right) = \frac{1}{L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \Phi$$

[4.2.6] ESPIRAL DE FIBONACCI

La espiral de Fibonacci es una aproximación de la espiral áurea, generada a partir de arcos circulares conectando las esquinas opuestas de los cuadrados cuyos lados se ajustan a los valores de la sucesión de Fibonacci, a diferencia de la espiral de Durero, la cual se construye a partir de rectángulos áureos

Esta curva se genera por la yuxtaposición sucesiva de cuadrados cuyos lados son los números de la sucesión de Fibonacci. Se comienza con un cuadrado de lado 1 (F_1) al que se le une otro cuadrado de lado (F_2). Al rectángulo que obtenemos de lados 2x1 se le yuxtapone un cuadrado de lado 2 (F_3) para conseguir un rectángulo de lados 2x3. A continuación a dicho rectángulo se le añade otro cuadrado de lado 3 (F_4) dando lugar a un rectángulo de 3x5 y así sucesivamente. La espiral se forma conectando las esquinas opuestas de los cuadrados con arcos de 90º como muestra las siguientes figuras:

Figura 26. *Despiece de cuadrados cuyos lados coinciden con los valores de Fibonacci. Editado de Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fibonacci_Squares.svg Creative Commons.*

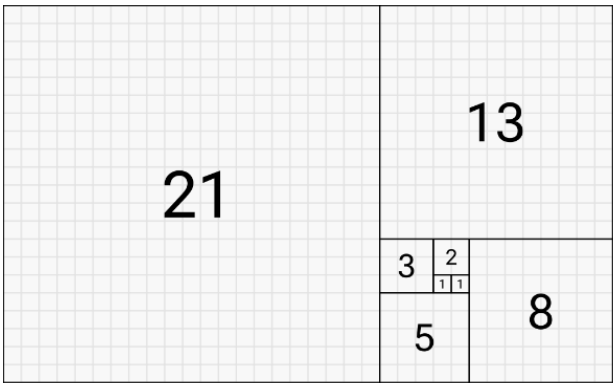
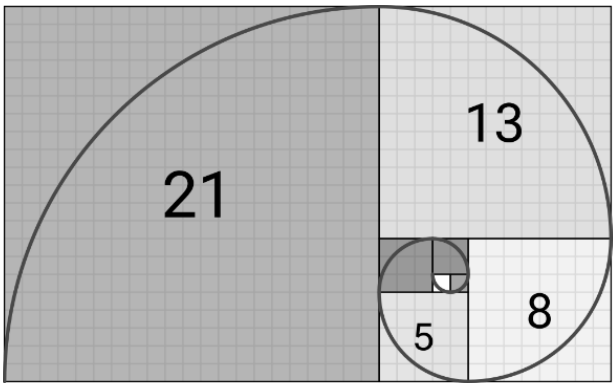


Figura 27. *Espiral de Fibonacci. Editado de Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fibonacci_Spiral.svg Creative Commons*



Esta curva, al igual que la espiral de Durero, son aproximaciones de la llamada espiral logarítmica. La espiral logarítmica es el único tipo de espiral que mantiene su forma al ser reescalada y aumenta o disminuye su tamaño en cada cuarto de vuelta en aproximadamente 1,618…veces el anterior. Dicha cifra que corresponde al número de oro.

[4.3] Aplicaciones del Número de Oro y la Sucesión de Fibonacci

[4.3.1] EN LA NATURALEZA

La Sucesión de Fibonacci ha impresionado a lo largo de la historia no sólo a matemáticos, también a biólogos y arquitectos. Dicha sucesión tiene tal gran cantidad de aplicaciones en la naturaleza que muchos matemáticos y biólogos piensan que Fibonacci, de manera inintencionada, había descubierto una clave del crecimiento de la naturaleza.

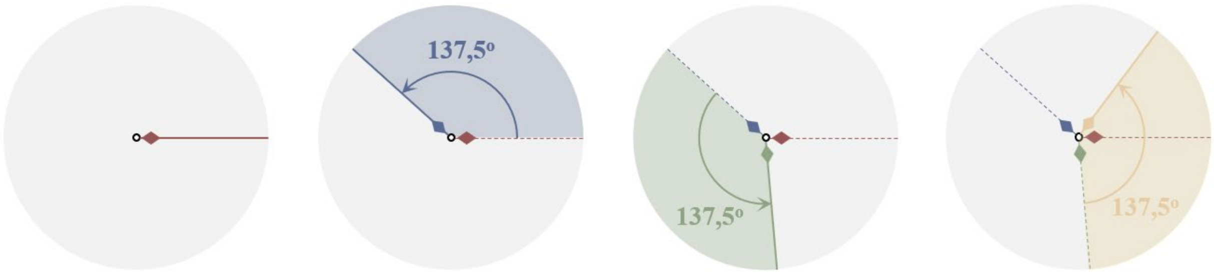
La Sucesión de Fibonacci se encuentra estrechamente relacionada con la filotaxia, es decir, con el análisis de los patrones que rigen la disposición de las hojas o flores alrededor del tallo de las plantas. Las ramas y las hojas de los árboles se distribuyen de cierto modo con el objetivo de recibir siempre la mayor cantidad de iluminación posible para cada una de ellas. Por este motivo ninguna hoja nace justo en al vertical de la anterior, sino que se distribuyen en torno al tallo siguiendo secuencias basadas en la sucesión de Fibonacci.

Es más, en multitud de flores y frutos, el número de espirales también se ajustan a parejas de términos consecutivos de la sucesión. Por poner un ejemplo, se puede hablar de las pipas de girasol, las cuales forman espirales en sentidos contrarios. El número de espirales de pipas de girasol que hay en uno y otro sentido son términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, siendo las combinaciones más comunes: 21 y 34, 34 y 55, 89 y 144. En el girasol de la siguiente imagen vemos que el número de espirales que hay en el sentido de las agujas del reloj es de 21, y en el sentido contrario son 34, los cuales son dos cifras que corresponden a números consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

Figura 28. *Espirales en girasol. Editado de Flickr: https://www.flickr.com/photos/monteregina/28969839761 Creative Commons 2.0*

Cada semilla nace del punto central del girasol y es empujada paulatinamente por el resto de semillas nacientes. La semilla elige una trayectoria radial con un ángulo determinado, de tal forma que va cubriendo la cabeza del girasol de manera eficiente sin que quede ningún hueco, es decir, dicho ángulo es fundamental para empaquetamiento óptimo de las semillas. Este ángulo es el ángulo áureo: 137,5º.

Figura 29. *Crecimiento pepitas de girasol. Elaboración propia.*

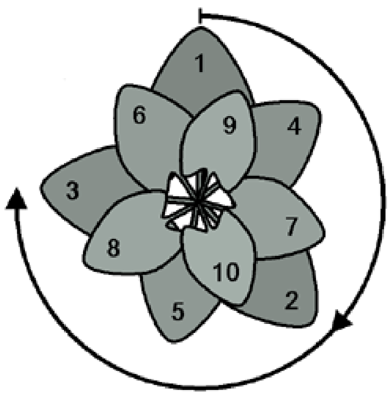


Nace la primera pipa (roja) con su primera trayectoria radial, a continuación la segunda pipa (azul) nace formando un ángulo de 137,5º con la primera a medida que la primera se aleja del centro empujada por la segunda. La tercera (verde) nacerá formando nuevamente un ángulo de 137,5º con la segunda empujando a las dos primeras fuera del centro y así sucesivamente.

De esta manera el girasol consigue una estructura en la que la distribución de las pipas es la más compacta posible. Es este el motivo por el que se localiza con tanta frecuencia el número áureo al estudiar el crecimiento de las plantas, los empaques, la mejor distribución para cubrir el espacio y ordenar los objetos minimizando el espacio perdido. Así, se topa con que la naturaleza emplea el mismo patrón para disponer las semillas en una flor, los pétalos en sus bordes, o la localización de las hojas en un tallo, siendo dicho patrón eficaz a medida que la planta va creciendo.

Se ha comprobado que las plantas crecen a partir un grupo de células, llamado meristema, situado en la punta de cada sección que crecen y se ordenan en espiral condicionados por un determinado ángulo de rotación conocido (ángulo áureo). Por ejemplo, en la ilustración de la Figura 30, el ángulo comprendido entre dos hojas consecutivas a lo largo del tallo coincide con el *ángulo áureo* (137,5º). Esto responde a la necesidad de las plantas de asegurarse que cada hoja reciba la máxima iluminación posible a medida que crece el tallo evitando superposiciones entre hojas.

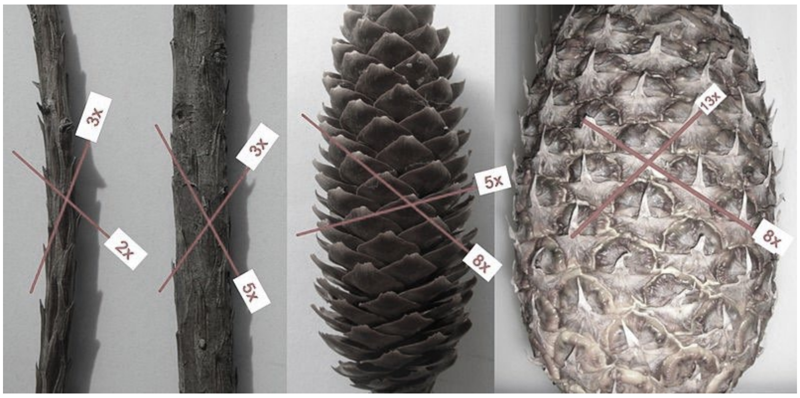
Figura 30. *Filotaxis. Editado de Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldener_Schnitt_Blattstand.png?uselang=fr Crative Commons 3.0*



El número de oro también está presente en la disposición de los pétalos de plantas como los cactus o las rosas. Si se sigue analizando el mundo vegetal encontramos con que la mayoría de las flores tienen 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 u 89 pétalos, es decir, los términos de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo, el Lirio tiene 3 pétalos, algunos Ranúnculos 5, o bien 8 (Bragado Rodríguez, 2018). Las margaritas también disponen en sus semillas en 21 o 34 espirales, respetando los términos de la sucesión y, al igual que sucedía con las hojas, los pétalos de algunas flores también crecen guardando el ángulo áureo entre pétalos consecutivos.

Además, en algunas plantas está presente la sucesión de Fibonacci en el número de ramificaciones que se van generando a medida que crece la planta. También podemos encontrar los términos de la sucesión en las espirales que se conforman en el crecimiento de las piñas coníferas, cuyo número de espirales más frecuente en cada sentido son las parejas de términos 5 y 8 (Filotaxis 5,8) y 8 y 13 (Filotaxis 8,13).

Figura 31. *Serie de Fibonacci en biología. Editado de Wikimedia:*
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PommeDePinFibonacci.PNG
Createve Commons 4.0



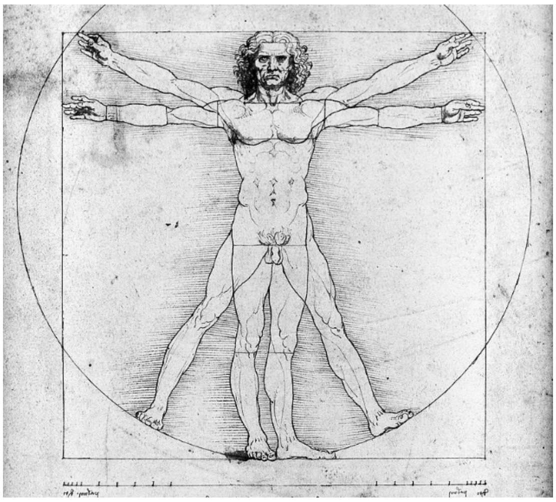
Da la sensación de que el mundo vegetal tenga programado en sus códigos genéticos de crecimiento los términos de la Sucesión de Fibonacci, no obstante, *sólo se trata de los resultados de la evolución, una cuestión meramente práctica que coincide con los números de la sucesión de Fibonacci.*

[4.3.2] EN EL CUERPO HUMANO

[EL HOMBRE DE VITRUVIO]

Durante el Renacimiento destacan las figuras de Luca Pacioli y Leonardo Da Vinci al ser los responsables de poner el número de oro en la órbita de la belleza y el arte dándole el nombre de *divina proporción.* Como se ha señalado anteriormente en el apartado 4.1.11, Luca Pacioli escribe el libro *De Divina Proportione* en el que eleva dicha proporción al grado de divina. Dicho libro fue ilustrado por Leonardo Da Vinci bajo las premisas de Pacioli. Una de las ilustraciones más famosa de Da Vinci es el *Hombre de Vitruvio (1490).* Da Vinci se inspira en los textos de Vitruvio, arquitecto de Julio César en la antigua Roma, para plasmar en dicho dibujo un estudio de las proporciones ideales del cuerpo humano.

Figura 32.*Hombre de Vitruvio. Leonardo da Vinci. Editado de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Vitruvian_Man_by_Leonardo_da_Vinci.jpg Creative Commons*



El *Hombre de Vitruvio* representa una figura masculina desnuda en dos posiciones distintas sobreimpresas de brazos y piernas e inscrita en un círculo y un cuadrado. Según Vitrubio, la altura de un hombre es igual a la envergadura con los brazos extendidos y si un hombre se tumba en el suelo y extiende sus extremidades queda inscrito en un círculo con centro en el ombligo.

Pacioli propone un hombre perfecto en el que las proporciones entre distintas partes de su cuerpo sean áureas. El círculo que inscribe al hombre se traza estirando sus brazos y piernas y tomando como centro de la circunferencia el ombligo, mientras que el cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo, que es coincidente con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo recto con la vertical del tronco.

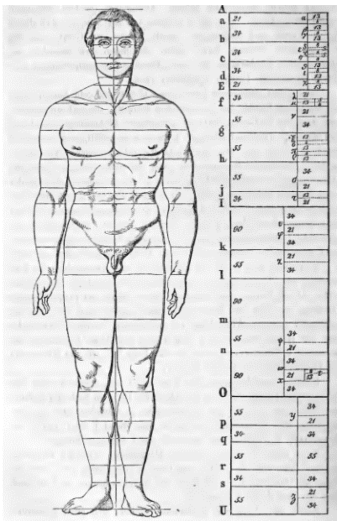
Leonardo planteó una solución original: el cuadrado y el círculo que inscriben el cuerpo tienen centros diferentes. Por un lado, el ombligo es el centro de la circunferencia mientras que, por otro lado, los genitales marcarían el centro del cuadrado. Las proporciones ideales del cuerpo humano que muestra la figura serían aquellas cuya relación entre el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia es la razón áurea.

[ADOLF ZEISING]

Como se ha mencionado en el apartado 4.1.11, Adolf Zeising fue un psicólogo alemán del siglo XIX interesado por las matemáticas y la filosofía. En el año 1854 publica: *Nueva teoría de las proporciones del cuerpo humano, desarrolladas a partir de una ley morfológica básica hasta ahora desconocida, y que está presente en toda la naturaleza y el arte, acompañado por un resumen completo de los sistemas prevalentes*, en el que presenta sus propios análisis de las proporciones del cuerpo humano (Solà-Soler, 2012).

Zeising divide la altura del cuerpo del hombre en cuatro zonas principales: de la parte superior de la cabeza al hombro, del hombro al ombligo, del ombligo a la rodilla y de la rodilla a los pies. A su vez cada una de estas zonas se subdividen en 5 segmentos dispuestos simétricos en cada zona. Se pueden apreciar las proporciones de la sucesión de Fibonacci en cada uno de los segmentos y entre segmentos a distintas escalas, que se aproximan a la proporción áurea.

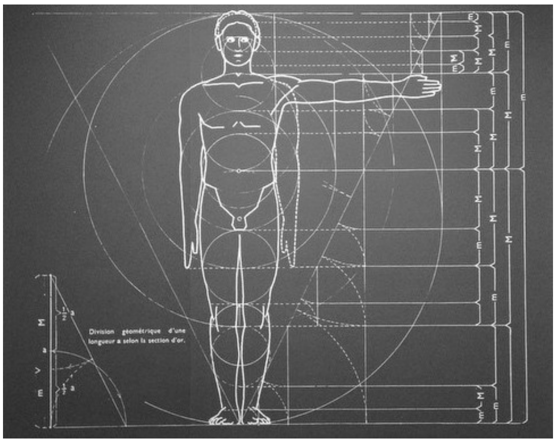
Figura 33. *Proporciones en el cuerpo humano (Zeising, 1854). Editado de Wikimedia:* *https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b2/Neue_Lehre_von_den_Proportionen_des_menschlichen_K%C3%B6rpers.pdf* *Dominio público*



[ERNST NEUFERT]

En el siglo XX, el arquitecto Neufert difundió la razón áurea como el principio arquitectónico de la proporción en el cuerpo humano. Neufert, a diferencia de Zeising, no sigue estrictamente las proporciones de Fibonacci sino que introduce la razón áurea exacta. Para Neufert la proporción áurea proporciona el enlace principal entre todas las armonías en arquitectura.

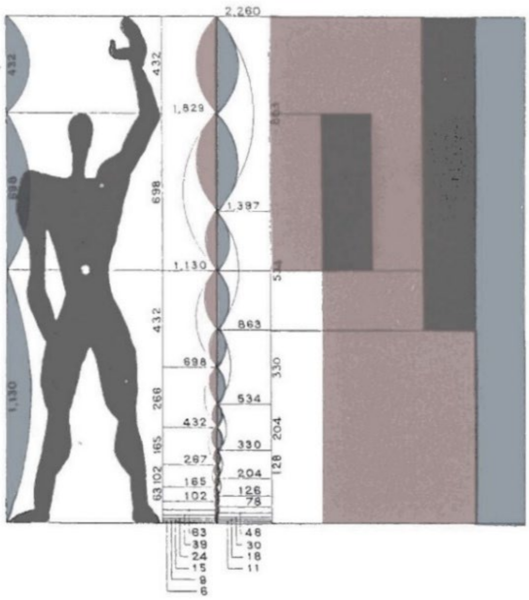
Figura 34. *Proporciones áureas propuestas por Neufert. Editado de Wikimedia:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Neufert_musealizado._(15556058364).jpg *Creative Commons 2.0*



[LE CORBUSIER]

Otro importante sistema de proporciones corporales del siglo XX fue el Modulor, propuesto por el arquitecto Le Corbusier en su manifiesto *Vers une architecture* (Jeanneret, 1923). En dicho manifiesto se presenta la proporción áurea como un ritmo natural incorporado de nacimiento en todo organismo humano. En su versión final, el Modulor II, propone dos progresiones de medidas en sucesión de Fibonacci como se muestra en Figura 34, en el que cada medida se obtiene de la suma de las dos anteriores. De este modo, el cociente de cualquier par de medidas consecutivas de estas progresiones se aproxima a la razón áurea.

Figura 35. *Modulor II de Le Corbusier. Editado de Archdaily:* https://www.archdaily.cl/cl/949493/la-evolucion-de-las-escalas-humanas-en-la-arquitectura *CC BY-ND 2.0*



[4.3.3] <u>EN EL ARTE</u>

[PINTURA]

[SALVADOR DALÍ]

Es uno de los pintores más utilizó la proporción áurea en sus obras debido a su pasión por *De Divina Proportione* de Luca Pacioli. Podemos destacar su cuadro *La semitaza gigante volando con anexo inexplicable de 5 metros de longitud,* en esta obra Dalí emplea la división de rectángulos áureos en la que se traza la espiral de Durero. Este cuadro será el primero en el que Dalí aplique la divina proporción.

[VELÁZQUEZ]

Se puede encontrar la presencia de la proporción áurea también en una de las obras más célebres del arte español, en *Las Meninas* de Velázquez. Existe la teoría de que Velázquez empleó la espiral de Durero para distribuir el espacio y los personajes de la obra. La espiral áurea entraría por la ventana y acabaría en la paleta y el pincel de Velázquez.

[LEONARDO DA VINCI]

Como se ha mencionado en apartados anteriores, Leonardo Da Vinci fue uno de los artistas que más hizo uso de la proporción áurea. Da Vinci empleó las proporciones del rectángulo áureo para plasmarlas en el rostro de la *Gioconda.*

Figura 36. *Semitaza gigante volando con anexo inexplicable de 5 metros de longitud. Salvador Dalí. Editado de Wikiart: https://www.wikiart.org/es/salvador-dali/giant-flying-mocca-cup-with-an-inexplicable-five-metre-appendage Uso legítimo para fines educacionales.*

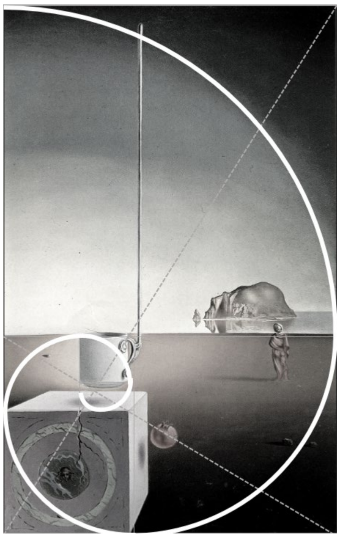
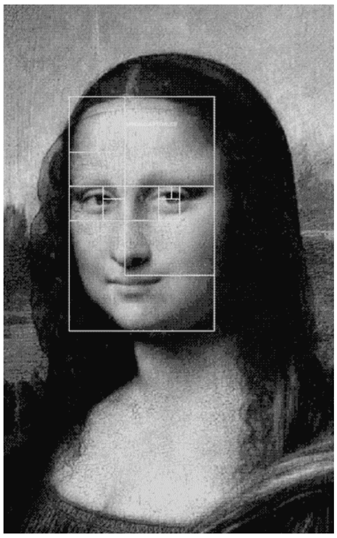


Figura 37. *Las Meninas. Diego Velázquez. Editado de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Las_Meninas_01.jpg Dominio público*

Figura 38. *La Gioconda. Leonardo da Vinci. Editado de Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joconde.gif Creative Commons 2.5*

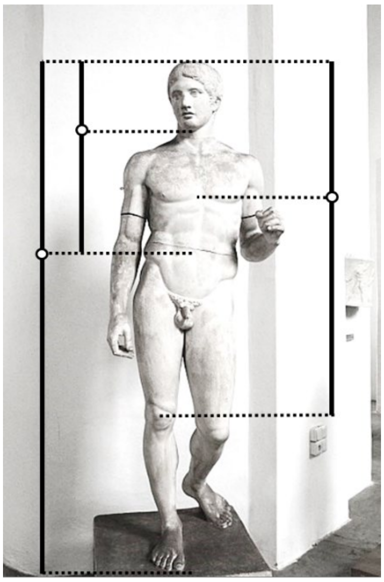


[ESCULTURA]

[EL DORÍFORO DE POLICLETO]

Podemos encontrar la presencia de la sección áurea al comparar las diversas partes del cuerpo en las esculturas griegas más célebres. Un claro ejemplo lo encontramos en el *Doríforo* de Policleto, escultor contemporáneo de Fidias en el que, entre otras relaciones, podemos ver cómo el ombligo divide la figura en segmentos en relación áurea.

Figura 39. *Proporción áurea en el Doríforo de Policleto. Editado de Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polykleitos,_Doryphoros,_440_BC,_Plaster_cast,_Hostinn%C3%A9,_188288.jpg Creative Commons 4.0*



[NÚMERO ÁUREO EN ARQUITECTURA]

[PIRÁMIDE DE KEOPS]

Según el historiador griego Herodoto, los egipcios construyeron la Gran Pirámide de manera que la superficie de una de sus caras triangulares coincidiera con el área de un cuadrado de lado la altura de la pirámide. Si escribimos en lenguaje matemático lo dicho por Herodoto, tenemos que:

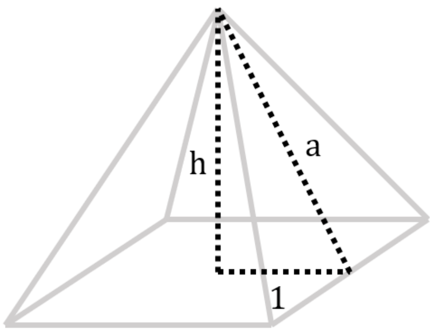
$$A_{cara} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{2a}{2} = a = h^2$$

Si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo de la Figura 40:

$$a^2 = 1^2 + h^2 \Rightarrow a^2 = 1 + a \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \Phi \Rightarrow h = \sqrt{\Phi}$$

Por tanto, podemos afirmar que el cociente entre la altura de una cara triangular y la mitad del lado de la base (apotema) es Φ. Además, el cociente entre el área lateral y el área de la base también será el número de oro al igual que el cociente entre el área total de la pirámide y el área lateral.

Figura 40. *Esquema Pirámide de Keops. Elaboración propia*



[PARTENÓN DE ATENAS]

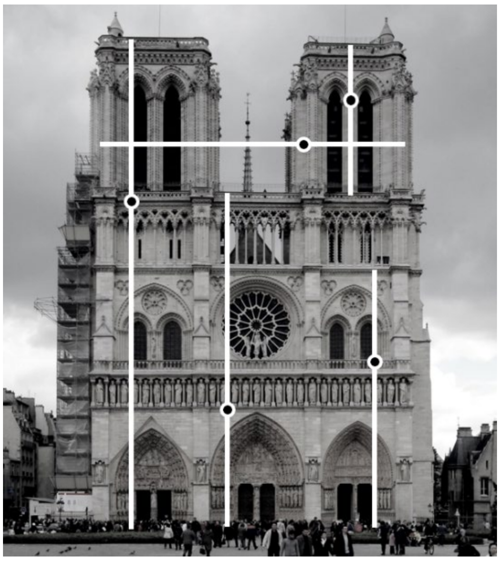
Los griegos eran grandes conocedores de la proporción áurea, la cual usaron para proporcionar muchas de sus construcciones. Podemos destacar el Partenón de Atenas en el cuál muchas de sus proporciones están vinculadas al número de oro como vemos en la Figura 41.

[NOTRE DAME DE PARIS]

Como se puede ver en la Figura 42, la fachada frontal de la catedral de Notre Dame de Paris se puede inscribir en un rectángulo áureo y podemos encontrar en la relación de los distintos elementos compositivos el número de oro.

Figura 41. *Fachada oeste del Partenón. Editado de Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fachada_oeste_del_Parten%C3%B3n,_Acr%C3%B3polis,_Atenas,_Grecia,_2019_15.jpg Creative Commons 4.0*

Figura 42. *Fachada de Notre Dame de Paris. Editado de Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Notre-dame-de-paris-facade.jpg Creative Commons 3.0*

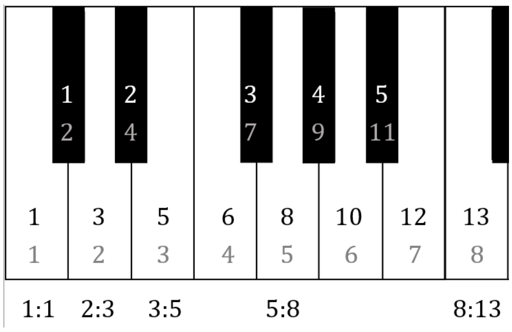


[MÚSICA]

La proporción áurea ha sido uno de los recursos estructurales más empleados por los compositores del siglo XX. Principalmente los compositores la empleaban para dividir las partes de una obra o establecer un punto culminante justo en la intersección de los dos segmentos. Para Debussy la sucesión de Fibonacci era de gran importancia y es rara la obra en la que no haya resonancias áureas en la forma. En el mismo siglo XX Bartók utilizó la proporción áurea no sólo para estructurar la forma de la obra, sino para establecer el devenir armónico de la música y los intervalos que conforman los acordes (Vela, 2016).

En las teclas del piano podemos encontrar también relación entre la música y la sucesión de Fibonacci puesto que los primeros números de la sucesión figuran en una octava de piano. Desde cualquier nota hasta su octava hay 13 teclas, 8 teclas blancas y 5 teclas negras, en grupos de 2 y 3 como se puede ver en la siguiente figura:

Figura 43. *Teclas de piano. Editado de Pixabay: https://pixabay.com/es/vectors/piano-teclas-octava-m%C3%BAsica-teclado-307653/ Creative Commons Zero*



[4.3.4] EN LA VIDA COTIDIANA

La proporción áurea se ha empleado en el diseño del DNI, tarjetas de créditos, diseño de muebles, marcos de ventanas, cajetillas de tabaco, en logos de marcas comerciales…

Muchos diseñadores gráficos, a la hora de diseñar logos, tratan de seguir la proporción áurea o la sucesión de Fibonacci se puede apreciar en los logos de importantes empresas como Apple, Toyota, Twitter, Pepsi o National Geographic.

[4.3.5] EN LA CIUDAD DE VALLADOLID

En la ciudad de Valladolid se encuentran ejemplos en edificios de la aplicación de la proporción áurea puesto que es un recurso que resuelve la relación entre las partes y el todo de un edificio. A continuación, vamos a mencionar algunos casos de presencia de la proporción áurea, y de otras proporciones, en la arquitectura vallisoletana (Reyes Iglesias & Fernández Benito, 2018).

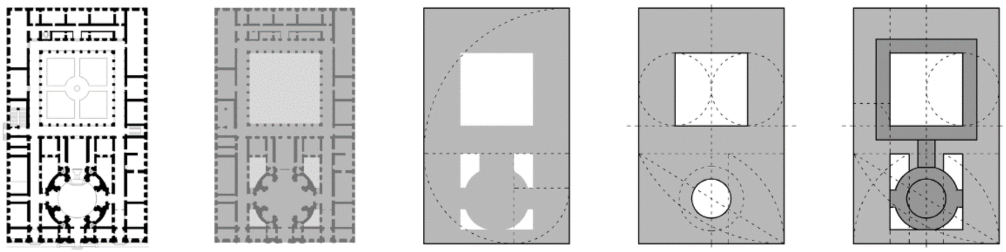
[CAPITELES DE ORDEN CORINTIO]

Si se analizan las proporciones entre los segmentos verticales de los distintos volúmenes en que se divide un capitel corintio se puede encontrar la presencia del número de oro. Se encuentran capiteles corintios en la fachada de la iglesia de las Angustias, en la fachada de la Catedral, en la iglesia de la Vera Cruz y en la iglesia de San Lorenzo.

[CONVENTO DE LOS AGUSTINOS FILIPINOS]

El trazado en planta del edificio se proyectó en base a un rectángulo, que por sus dimensiones y fragmentación interior puede considerarse áureo. El rectángulo queda dividido en un cuadrado en cuyo interior se sitúa el claustro y en otro rectángulo áureo donde se ubicó la iglesia.

Figura 44. *Trazado y proporciones del convento de los Agustinos Filipinos de Valladolid. Viar Basterra L.. Obtenido de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Ventura_Rodriguez_Filipinos_Valladolid_Trazado_y_proporciones.png Creative Commons 3.0*



[CASA CONSISTORIAL]

Podemos encontrar un rectángulo áureo en el volumen central de la casa consistorial, actual sede del ayuntamiento de Valladolid.

[IGLESIA DE SAN MIGUEL]

Dentro de la iglesia de San Miguel se ubica un retablo barroco de finales del siglo XVI. Los cuerpos de dicho retablo se encuentran determinados por los trazados de varios rectángulos áureos intersecados, siendo la intersección de dichos rectángulos enfrentados otro rectángulo áureo.

[CATEDRAL DE VALLADOLID]

En la catedral, del arquitecto Juan de Herrera, fue preferentemente considerada la proporción sesquiáltera (3/2). Además de emplearla en rectángulos sobre la planta, dicha proporción aparecía en alzados de las fachadas y en la composición de los diferentes cuerpos de estas.

[5] Catálogo de Situaciones de Aprendizaje

La enseñanza de las matemáticas generalmente se centra en el estudio de procesos y conceptos matemáticos, estableciendo escasas relaciones entre ellos y la realidad que nos rodea. Como concluye el estudio del apartado 3.1, dicha desconexión puede fomentar la desmotivación y apatía del alumnado hacia el estudio de la asignatura ya que no llegan a comprender el uso que se puede hacer de los contenidos impartidos en su vida cotidiana.

En el presente TFM se confecciona un catálogo de situaciones de aprendizaje según las premisas establecidas en la LOMLOE y que cuentan con el estudio del número de oro y la sucesión de Fibonacci como temas centrales. La elección de los temas centrales se debe a que son conceptos matemáticos de los que se desprende múltiples aplicaciones en el arte, el cuerpo humano y la vida cotidiana. Por tanto, se facilita el estudio simultáneo de conceptos no puramente matemáticos y así se permite a los alumnos que establezcan relaciones entre las matemáticas y el mundo que les rodea.

Para conseguir tal fin, se imparten los contenidos mediante metodologías activas que promuevan la participación del alumnado, el involucramiento en su propio aprendizaje y el empleo de las Tecnologías de la Información y Comunicación que los alumnos tienen a su alcance.

Se desarrollan tres situaciones de aprendizaje especialmente diseñadas para ser trabajadas en los tres primeros cursos de Educación Secundaria. La selección de los cursos no es arbitraria, he escogido aquellos en los que impartí docencia durante el período de sus prácticas externas. En dicha etapa se consiguió poner en práctica borradores de algunas de las actividades incorporadas dentro de las situaciones de aprendizaje.

Las situaciones de aprendizaje diseñadas son las siguientes:

- *Búsqueda de oro en Valladolid:* Los alumnos de 2º de la ESO realizan una serie de actividades que les permitan formarse para la búsqueda del número de oro en los principales monumentos de la ciudad. Mediante el repaso de conceptos vistos durante el curso se mostrará cómo pueden ser aplicados para, trabajando en equipo, calcular las alturas de edificios partiendo de la medición de las sombras que proyectan.
- *La vida áurea:* Los alumnos de 1º de la ESO llevan a cabo una secuencia de ejercicios y tareas que deben resolver de manera autónoma, en parejas o en equipos y así descubrir la presencia del número áureo en su cotidianidad, en famosas obras de arte y en sus propios cuerpos.
- *Números metálicos y la Sucesión de Fibonacci*: Los alumnos de 3º de la ESO estudian el número de oro dentro de los números metálicos y su relación con la sucesión de Fibonacci. Se elabora una serie de actividades de distinto grado de complejidad estrechamente relacionadas con los contenidos propios del curso.

[5.A] ***Búsqueda de oro en Valladolid***

[A.1] CONTEXTUALIZACIÓN E INTENCIÓN DIDÁCTICA

Se plantea a los alumnos una situación de aprendizaje para trabajar en 2º de la ESO los conceptos de proporción y número áureos. Al mismo tiempo, se trabajan los sentidos de medida y estocástico, entre otros que surgen durante la ejecución de las actividades propuestas.

La actividad se presenta a los alumnos en un formato de situación de problema en el que deben demostrar la presencia de la proporción áurea en los volúmenes que componen diversos monumentos de la ciudad de Valladolid. Para ello, se propone una secuenciación de actividades con distinto grado de complejidad para hallar las dimensiones de los distintos cuerpos arquitectónicos de los monumentos mediante la medición de las sombras que éstos proyectan. Se pretende de esta manera que el número áureo sirva de hilo conductor en una serie de actividades en las que los alumnos repasan diversos contenidos vistos a lo largo del curso.

Previamente al comienzo de las actividades los alumnos deben estar familiarizados con los contenidos que se pondrán en práctica en la situación de aprendizaje: teorema de Pitágoras, teorema de Tales, problemas de proporcionalidad directa y conceptos de media y mediana.

[A.2] FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

[OBJETIVOS DE ETAPA A LOS QUE SE PRETENDE CONTRIBUIR]

- Transmitir al alumnado la necesidad de escuchar y respetar las opiniones de otros y a defender las suyas propias, lo que supone desarrollar actitudes de tolerancia, cooperación y solidaridad.
- La resolución de tareas matemáticas, individuales o grupales, requieren esfuerzo y constancia en la búsqueda de la solución, por lo que contribuyen al desarrollo y refuerzo de hábitos de estudio.
- Aportar al alumnado, a través de la necesidad de relacionar conocimientos y usar instrumentos de análisis de datos, sentido crítico para seleccionar y utilizar datos adecuados a cada situación, reconociendo aquellas interpretaciones incorrectas o manipuladas de los datos con los que trabaja y argumentando la interpretación correcta de los mismos.
- Contribuir, a través de la resolución de problemas, a fomentar de la creatividad, el sentido crítico y la toma de decisiones, pilares fundamentales en el desarrollo como ciudadano. La reflexión sobre este proceso dota al alumnado de instrumentos para la adquisición de confianza y seguridad en sí mismo, con el objetivo de enfrentar retos cada vez más complejos.

[COMPETENCIAS ESPECÍFICAS, CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y DESCRIPTORES OPERATIVOS]

Se trabajan los siguientes elementos curriculares de 2º ESO (Consejería de Educación, 2022):

Competencias específicas	***Criterios de evaluación y descriptores operativos***
1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las Matemáticas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.	*1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana extrayendo los datos dados, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. (CCL1, CCL2, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4)*
	1.2 Aplicar algunas herramientas sencillas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. (STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CPSAA5, CE3).
	1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema por métodos sencillos activando los conocimientos necesarios. (STEM1, STEM2, STEM3, CE3, CCEC4)
2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.	*2.1 Comprobar, de forma guiada, la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos necesarios. (STEM1, STEM2)*
	2.2 Comprobar, de manera guiada, la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, conociendo el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.). (CCL2, STEM1, STEM4)
3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.	*3.1 Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones y propiedades. (CCL1, STEM1, STEM2)*
	3.2 Plantear variantes de un problema dado de forma guiada modificando algún dato. (CCL1, STEM2)
	3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la comprobación de problemas analizando el resultado obtenido. (STEM1, CD2).
4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.	*4.1 Organizar datos y descomponer un problema en partes más simples identificando los datos y los resultados de cada una de las partes (STEM1, STEM2).*
	4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando algoritmos. (STEM1, STEM3)
5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.	*5.1 Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas apreciando un todo coherente. (STEM1)*
	5.2 Identificar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas. (STEM1)

6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos para aplicarlos en situaciones diversas.	*6.1 Identificar situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: medir, comunicar y clasificar. (CCL1, STEM1, STEM2, CE3)*
	6.2 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados de manera guiada. (STEM2)
	6.3 Conocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual. (STEM2, STEM5, CCEC1)
7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.	*7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos. (STEM3)*
	7.2 Utilizar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada, usando material manipulativo si es necesario. (STEM3)
8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.	*8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos. (CCL1, CP1, STEM2, STEM4*
	8.2 Reconocer el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión. (CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4)
9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.	*9.1 Reconocer las emociones propias, valorar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. (STEM5, CPSAA1)*
	9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje planteadas. (CPSAA1, CPSAA5)
10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.	*10.1 Colaborar activamente y construir relaciones con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva y pensando de forma creativa. (CCL5, CP3, STEM3, CPSAA3, CC2, CC3)*
	10.2 Participar en las tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa y asumiendo el rol asignado. (CPSAA1)

[CONTENIDOS]

Se trabajan los siguientes contenidos de 2º ESO (Consejería de Educación, 2022):

A. Sentido numérico

2. Sentido de las operaciones:

- *Propiedades de las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación): cálculos de manera eficiente con enteros, fracciones, decimales, tanto mentalmente como de forma manual, con calculadora u hoja de cálculo.*

3. Relaciones

- *Selección y utilización de la representación más adecuada de una misma cantidad (decimal, fracción, representación gráfica, incluida la representación en la recta) en cada situación o problema.*

4. Razonamiento proporcional

- *Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas (aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, escalas, cambio de divisas, cálculos geométricos, repartos, velocidad y tiempo, etc.)*

B. Sentido de la medida

2. Estimación y relaciones

- *Formulación de conjeturas sobre medidas en el espacio o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones.*
- *Estrategias para la toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida en el espacio.*

3. Medición

- *Longitudes, áreas y volúmenes en figuras tridimensionales: deducción, interpretación y aplicación.*
- *La probabilidad como medida asociada a la incertidumbre de experimentos aleatorios.*

C. Sentido espacial

1. Figuras geométricas de tres dimensiones

- *Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras tridimensionales: identificación y aplicación.*

3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica

- *Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas.*

D. Sentido algebraico

2. Modelo matemático

- *Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando material manipulativo y representaciones matemáticas para llegar al lenguaje algebraico.*
- *Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.*

- *Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.*

6. Pensamiento computacional

- *Estrategias útiles en la interpretación y/o modificación de algoritmos.*

E. <u>Sentido estocástico</u>

1. Incertidumbre

- *Experimentos simples: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada.*

F. <u>Sentido socioafectivo</u>

1. Creencias, actitudes y emociones

- *Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.*
- *Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.*

2. Trabajo en equipo y toma de decisiones

- *Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.*
- *Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.*
- *Inclusión, respeto y diversidad.*

3. Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.

- *La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...).*

[A.3] <u>METODOLOGÍA</u>

<u>[MÉTODOS]</u>

Durante la realización de las actividades en equipo y parejas conviene que el/la docente se acerque a los distintos equipos con el objetivo de asegurar que el alumnado vaya comprendiendo correctamente los ejercicios planteados. Se trata de una situación que fomenta el trabajo colaborativo y cooperativo, así como la reflexión y el debate entre los integrantes del equipo mediante un lenguaje formal referenciando a los contenidos matemáticos que entrar en juego.

El docente desempeñará el papel de facilitador del aprendizaje favoreciendo la autonomía del alumnado. Se fomenta la elaboración de un portfolio por parte del alumnado a modo de evidencia del proceso de aprendizaje y recurso de evaluación. El portfolio se considerará como una colección de materiales seleccionados con la intención de reflejar el rendimiento o el aprendizaje a lo largo del proceso de formación en el que se incorporará una dimensión reflexiva.

Se empleará una metodología activa en la que se promueva el trabajo autónomo y el trabajo en equipo. Se usarán técnicas como la argumentación, el estudio biográfico, el diálogo, la exposición, el debate, la experimentación, la interacción o el descubrimiento.

[ORGANIZACIÓN ALUMNADO Y AGRUPAMIENTOS]

Durante la realización de las actividades se dividirá el aula en grupos de 4 o 5 personas. Esta organización del aula en grupos de trabajo heterogéneos promoverá el aprendizaje colaborativo y cooperativo mediante la resolución conjunta de tareas. Mediante el aprendizaje colaborativo los miembros del grupo conocerán las estrategias utilizadas por sus iguales con el objetivo de poder imitarlas en situaciones similares.

[CRONOGRAMA Y ORGANIZACIÓN DEL TIEMPO Y ESPACIOS]

SESIÓN 1	Introducción a los conceptos de proporción y número áureos.
SESIÓN 2	Activación de conocimientos previos en el aula. Aprendizaje toma de datos de longitudes.
SESIÓN 3	Realización de actividades en el patio de la escuela.
SESIÓN 4	Desplazamiento a una plaza de Valladolid Toma de datos.
SESIÓN 5	Puesta en común de los datos recopilados. Redacción de informes y conclusiones.

[ORGANIZACIÓN DEL ESPACIO]

Sesión 1: Se lleva a cabo en el aula del grupo. Los alumnos organizarán el mobiliario del aula para facilitar el trabajo en parejas.

Sesión 2: Se desarrolla en el aula del grupo. Los alumnos dispondrán los pupitres para facilitar el trabajo en equipos con suficiente distancia entre ellos para no dificultar el trabajo de otros equipos.

Sesión 3: Los alumnos se trasladan al patio del centro. Se dispondrán separados entre sí para no entorpecerse entre los equipos.

Sesión 4: Los alumnos se desplazan a una plaza adyacente a algún edificio monumental de Valladolid. Se dispondrán alejados unos de otros a lo largo del espacio público para no entorpecerse entre los equipos. Ante todo, se procurará minimizar el efecto que pueda tener, el desarrollo de la actividad del alumnado tanto en el espacio público como en sus usuarios.

Sesión 5: La última sesión se realiza nuevamente en el aula del grupo. Se organiza el aula en equipos para la recopilación final de toda la documentación elaborada e irán exponiendo en orden.

[MATERIALES Y RECURSOS]

- Pizarra convencional, utilizada para la exposición de contenidos y corrección de actividades.
- Para las actividades planteadas será necesario que el aula cuente con una pizarra digital con acceso a internet o, en su defecto, un proyector conectado al ordenador del aula.
- Calculadora, útil para la realización de las operaciones de cálculo de longitudes.
- Para las actividades programadas en espacio exteriores será necesario el empleo de cinta métrica, un palo esbelto (palo de fregona o de estiramientos) y tiza para realizar anotaciones en el suelo.
- Fotocopias de las actividades para el desarrollo de la situación de aprendizaje.
- Cuaderno de clase, útil tanto en las actividades dentro del aula como en las de exteriores.

[A.4] PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDADES Y TAREAS

- ***[4.1] Introducción número áureo***

En la primera sesión se trabajarán los conceptos de número áureo, proporción áurea y sus principales cualidades y características. Se seguirá la siguiente secuenciación:

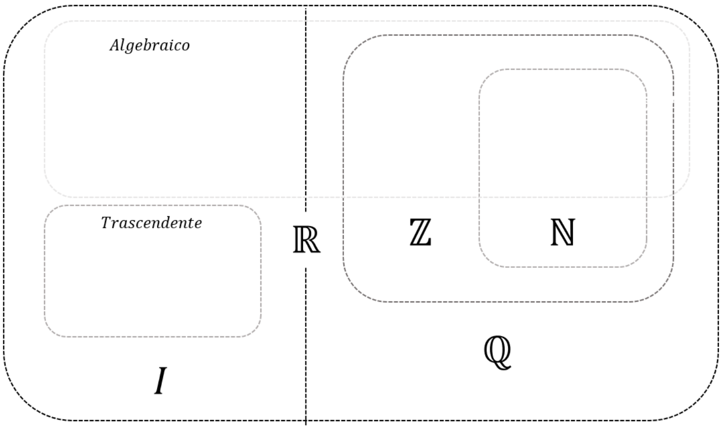
Presentación de los conceptos: Se comenzará con una sesión de introducción al número y proporción áureos. Para ello, el profesor destinará los primeros minutos de la sesión a realizar una breve introducción sobre dichos conceptos, su importancia a lo largo de la historia en diversas disciplinas y su vinculación con el ideal de belleza y la divinidad como se ha mencionado a lo largo del apartado 4.1. Esta introducción tendrá como principal objetivo el de despertar el interés y la motivación de los estudiantes.

Visualización de video: Se visualizará, haciendo uso de las herramientas digitales disponibles en el aula, el siguiente video titulado *Proporción áurea y cómo se aplica al diseño gráfico* del canal de Youtube *Hey Jaime* (Hey Jaime, 2023). En este video de 10 minutos de duración se hace una breve, pero completa, descripción de la proporción áurea. Se habla sobre sus denominaciones, su nacimiento, el número de oro, la sucesión de Fibonacci y su relación con la proporción áurea, rectángulo áureo, espiral de oro, su vinculación con la divinidad, su presencia en la naturaleza y su aplicación al diseño gráfico.

Definición y cálculo del número áureo: Se dividirá a los estudiantes en parejas y se les entregará una ficha (*Ficha A.I*, Anejo A) en la que se les explica los pasos a seguir para que, por sí mismos, partiendo de la definición de número áureo, hallen el valor numérico del número de oro. Será necesario que los alumnos tengan conocimientos sobre la resolución de ecuaciones de 2º grado puesto que deberán resolver la ecuación áurea.

Clasificación de los números reales: En el ejercicio anterior los alumnos han hallado el valor del número de oro, un número irracional. En este ejercicio (*Ficha A.II*, Anejo A) los alumnos deberán llevar a cabo una clasificación de varios números reales en sus respectivos conjuntos: número naturales, enteros, racionales e irracionales (algebraicos y trascendentes). El objetivo de esta actividad es que los alumnos sepan discernir las diferencias entre los distintos conjuntos de números y las particularidades de los números irracionales algebraicos como el número Φ.

Figura 45. *Conjuntos de números. Elaboración propia.*



- ***[4.2] Activación de conocimientos previos***

Se llevará a cabo una sesión de activación de conocimientos previos que sirva de preparación y planificación de las sesiones posteriores. Al comienzo de la sesión se dividirá el aula en grupos heterogéneos de cuatro o cinco personas con alumnos con diverso rendimiento académico en Matemáticas.

En esta sesión se repasarán brevemente algunos contenidos de Matemáticas vistos anteriormente durante el curso o en cursos anteriores. Más concretamente, se repasará el teorema de Pitágoras, teorema de Tales, ejercicios de proporcionalidad directa y parámetros estadísticos como media y mediana.

Se facilitará a los alumnos la *Ficha A.III* (Anejo A) en la que deberán responder algunos problemas sencillos sobre geometría que servirán de guía para actividades posteriores en los que deberán hacer uso del teorema de Pitágoras y de Tales para solucionarlo. A su vez, se incluyen algunos problemas para poner en práctica contenidos de proporcionalidad directa.

Para su realización cada grupo deberá contar con una cinta de medir, puesto que se pedirá a los alumnos que midan y registren las dimensiones de los pies y tres pasos de cada integrante del grupo. Con los datos recopilados deberán realizar la media de las dimensiones de los pies y de los tres pasos de todos los integrantes del equipo y determinar la persona cuyos datos constituyen la mediana.

Por último, se pedirá a los alumnos que realicen un levantamiento esquemático de la planta del aula midiendo las dimensiones con pies y con pasos de las personas que constituían la mediana del grupo y compararlo con los resultados obtenidos midiendo el aula con una cinta métrica. Esta última actividad servirá a los alumnos para repasar los métodos de resolución de ejercicios de proporcionalidad directa: regla de tres y la reducción a la unidad.

- ***[4.3] Medición de alturas en el interior del instituto***

En esta sesión los alumnos se trasladarán al patio del centro educativo para el cálculo de la altura de distintos elementos que arrojen sombra. Se pedirá a los alumnos que para realizar la actividad traigan consigo cintas métricas, algún objeto esbelto como puede ser el palo de una fregona, calculadora y algunos bolígrafos y cuadernos para realizar anotaciones. El docente facilitará a los alumnos tizas para que puedan realizar anotaciones en el suelo. En caso de que los alumnos no puedan traer palos se podrá hablar con el departamento de Educación Física del centro para el préstamo de bastones de gimnasia de madera.

Una vez en el patio, el aula se dividirá en los grupos establecidos en las sesiones previas. Una vez distribuidos los grupos por el patio se pedirá a los alumnos que coloquen el palo en vertical y anoten las longitudes tanto del palo como de la sombra que proyecta sobre el suelo. Como primer ejercicio se les pedirá que, una vez tengan dichas dimensiones, calculen la longitud que deberá tener una cuerda que vaya desde el extremo superior del palo hasta el punto más alejado de la sombra. Para ello los alumnos nos podrán usar la cinta métrica, se les pedirá que lo calculen analíticamente y deberán llegar a razonar por sí mismos el empleo del teorema de Pitágoras.

Como segundo ejercicio se les pedirá que hallen la altura de un elemento del patio como puede ser una canasta o un árbol. Se pedirá a los alumnos que midan las sombras con la cinta métrica, con pasos y con pies como se practicó dentro del aula en la sesión anterior. Para ello, podrán hacer uso de los datos recopilados en la actividad anterior sobre las dimensiones de los pasos y pies de cada integrante del equipo. El objetivo de realizar las mediciones de tres métodos distintos es que los alumnos puedan comparar los resultados y sacar sus propias conclusiones sobre la fiabilidad de los resultados. Se emplazará a los alumnos a que tomen las medidas en la misma dirección en la que se proyectan las sombras para evitar errores en la toma de datos.

Por último, los alumnos medirán la sombra que proyecta sobre algún edificio adyacente al centro o perteneciente al propio centro. De nuevo se pedirá a los alumnos que tomen las medidas mediante los tres métodos ya vistos. Se pedirá a los alumnos que muestren especial atención a posibles ménsulas o salientes de las fachadas de los edificios que se muestren en la sombra y que puedan servir de referencia para marcar la separación entre plantas o entre distintos volúmenes de los edificios. Una vez obtenida la altura total del edificio los alumnos deberán calcular la longitud de cuerda que es necesaria para la construcción de una tirolina que vaya desde el punto más alto del edificio hasta el punto más alejado de la sombra.

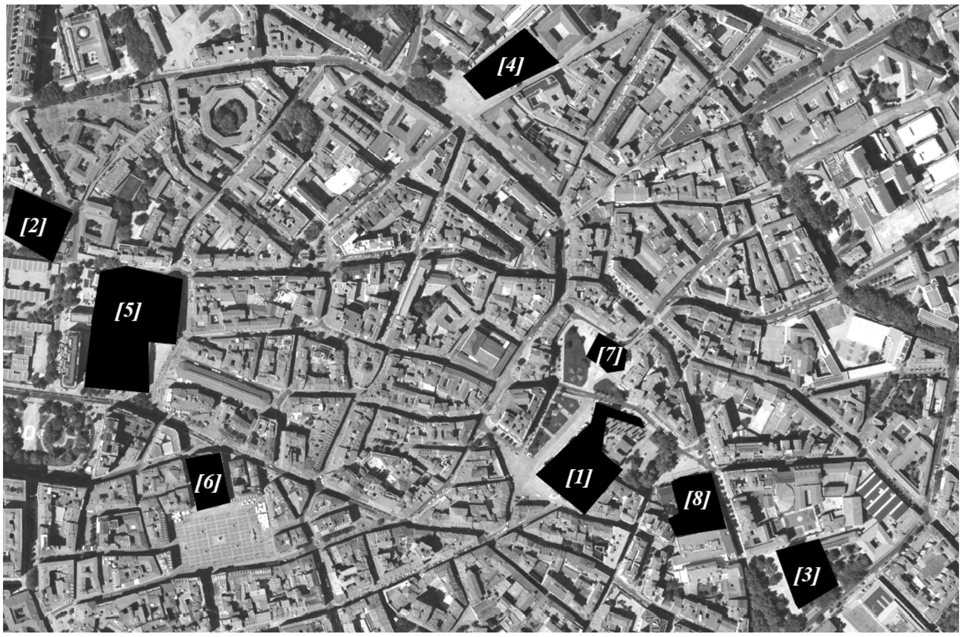
Antes de la medición de cada sombra, los alumnos deberán repetir la anotación de las dimensiones del palo y su sombra, puesto que en el transcurso de la actividad la inclinación de los rayos solares cambia y, por tanto, cambian las longitudes de las sombras proyectadas.

- ***[4.4] Proporción áurea en monumentos de Valladolid***

Todas las actividades previas sirven de preparación para esta última actividad. Finalmente, los alumnos comprobarán la presencia de la proporción áurea en alguno de los monumentos de Valladolid.

Los alumnos se desplazarán, supervisados por docentes, a una plaza adyacente a algún monumento principal de la ciudad de Valladolid en la que el monumento proyecte sombra sobre la que se pueda trabajar. Para la selección del monumento se ha generado un catálogo de monumentos (*ficha A.V. del Anejo A*) de la ciudad con plazas adyacentes donde los alumnos puedan trabajar cómodamente sin tráfico rodado. Se podrá consultar las sombras proyectadas por los monumentos en las inmediaciones para la organización de la actividad en la siguiente página web: https://shadowmap.org/es.

Figura 46. *Selección de monumentos de Valladolid. Editado del Instituto Geográfico Nacional: http://www.ign.es/iberpix/visor Dominio público*



A la llegada a la plaza seleccionada para llevar a cabo la actividad se agruparán nuevamente en los mismos grupos de las actividades anteriores. Se distribuirán los alumnos a lo largo y ancho de la plaza de las sombras de los edificios. Nuevamente se pedirá a los alumnos que midan las sombras con los tres procedimientos que ya conocen y que porten consigo todos los materiales empleados en la actividad anterior realizada en el patio del instituto.

Se pedirá a los alumnos que presten especial atención a la proyección de los frisos o ménsulas de las fachadas de los edificios renacentistas que se muestren en la sombra y que sirvan para marcar la separación entre los distintos cuerpos compositivos. Una vez recopiladas las dimensiones de los distintos cuerpos de las construcciones los alumnos deberán compararlas para encontrar la proporción áurea en ellas. Se pedirá que comparen tanto las dimensiones en altura como las dimensiones en planta. En caso de no encontrar la proporción áurea los alumnos argumentarán y debatirán las proporciones presentes en los edificios.

- ***[4.5] Puesta en común de los datos recopilados. Redacción de informe y conclusiones.***

La última sesión de la situación de aprendizaje se destinará a la puesta en común de la toma de datos con el objetivo que confrontar los resultados y conclusiones alcanzadas por cada uno de los equipos de trabajo. Se fomentará el debate dentro del aula y el intercambio de información.

Por último y para terminar la situación de aprendizaje, se pedirá a los alumnos la recopilación de toda la información y anotaciones realizadas por los grupos a modo de portfolio en el que quede registrado todos los procedimientos y estrategias seguidas por los alumnos y las conclusiones alcanzadas.

[A.5] ATENCIÓN A LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES

Durante el desarrollo de las actividades, los contenidos se presentan a los alumnos de diferentes maneras. En ocasiones el profesor será el trasmisor del conocimiento a través de explicaciones colectivas o individuales y otras veces serán los propios alumnos los que deberán de encontrar en equipo el procedimiento idóneo para la resolución de los problemas planteados. El trabajo en equipos fomentará el aprendizaje entre compañeros mediante la ayuda y el apoyo de pares de igual o similar nivel o estatus.

[A.6] PROCESO DE EVALUACIÓN

La evaluación será continúa a lo largo de toda la actividad de tal manera que se permita la adaptación de ésta orientada a mejorar los aprendizajes del alumnado. Para la evaluación se hará uso de los siguientes instrumentos de evaluación:

- El registro anecdótico realizado por el docente en su guía de observación durante el desarrollo de las actividades.
- Informe presentado por el equipo a modo de portfolio en el que recopilan todas las decisiones razonamientos, procedimientos y estrategias seguidas por el equipo a lo largo de las distintas actividades de la situación de aprendizaje.
- Fichas rellenas por los alumnos individualmente.

Se evaluarán los criterios de evaluación de las competencias específicas que se desarrollan en la situación de aprendizaje. Para ello, el docente desglosará los criterios de evaluación en los indicadores de logro fijados por el propio docente, o bien, por el Departamento de Matemáticas del centro en su programación anual.

Criterios de evaluación	***Indicadores de logro***			
	I.L.1	**I.L.2**	**I.L.3**	**I.L.4**
1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana extrayendo los datos dados, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.				
1.2 Aplicar algunas herramientas sencillas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.				

1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema por métodos sencillos activando los conocimientos necesarios.				
2.1 Comprobar, de forma guiada, la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos necesarios.				
2.2 Comprobar, de manera guiada, la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, conociendo el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.).				
3.1 Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones y propiedades.				
3.2 Plantear variantes de un problema dado de forma guiada modificando algún dato.				
3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la comprobación de problemas analizando el resultado obtenido.				
4.1 Organizar datos y descomponer un problema en partes más simples identificando los datos y los resultados de cada una de las partes.				
4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando algoritmos.				
5.1 Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas apreciando un todo coherente.				
5.2 Identificar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.				
6.1 Identificar situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: medir, comunicar y clasificar.				
6.2 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados de manera guiada.				
6.3 Conocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.				
7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos.				
7.2 Utilizar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada, usando material manipulativo si es necesario.				
8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos.				
8.2 Reconocer el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión.				
9.1 Reconocer las emociones propias, valorar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.				
9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje planteadas.				

10.1 Colaborar activamente y construir relaciones con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva y pensando de forma creativa.				
10.2 Participar en las tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa y asumiendo el rol asignado.				

Se dejarán los criterios de calificación de los distintos criterios de evaluación a elección del docente.

[A.7] VALORACIÓN DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Una vez realizada la situación de aprendizaje en el aula se realizará una evaluación de la propia situación de aprendizaje, en la que se valorará si se ha hecho una correcta definición de los elementos curriculares, se evaluará el desarrollo, el impacto y la satisfacción de los participantes. Una vez recogida la información se procederá a la interpretación de los datos y elaboración de un informe con la finalidad de prevenir posibles dificultades y mejorar el proceso educativo.

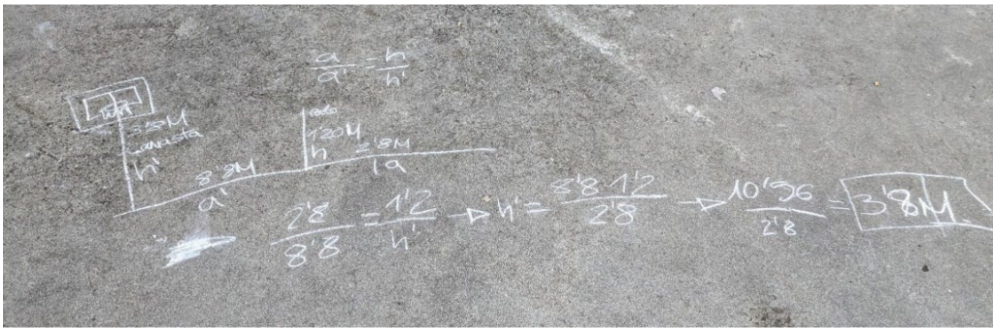
[PUESTA EN PRÁCTICA EN LAS PRACTICAS EXTERNAS]

Durante el periodo de prácticas, en el IES Zorrilla de Valladolid, se pudo poner en práctica parte de la presente situación de aprendizaje, concretamente las actividades de la sesión 3. El objetivo de la actividad consistía en hallar la altura del edificio de una residencia de estudiantes que proyectaba su sombra sobre el patio del Instituto Zorrilla.

Figura 47. *Medición de sombras. Elaboración propia.*

Para tal fin, se comenzó con el cálculo de la altura de un árbol y una canasta presentes en el patio del centro. Para la ejecución de la actividad se proveyó a los alumnos de un palo de fregona, cinta métrica y unas tizas con las que poder hacer anotaciones y cálculos en el suelo como se muestra en la Figura 45.

Figura 48. *Cálculo de la altura de una canasta. Elaboración propia*



A continuación, se enuncian algunos puntos a destacar durante la puesta en práctica de la actividad:

- El desarrollo de las actividades en un lugar distinto a un aula de instituto, así como el empleo de herramientas para la realización de las actividades (cinta métrica, palo, tizas) incrementó el interés y la motivación de los alumnos por la realización de la actividad.
- Fue necesario la repetición de algún ejercicio por parte de los alumnos puesto que los resultados salían desajustados debido a que las sombras habían cambiado durante el trascurso de la actividad. Hubo que recordar a los alumnos que repitiesen la medición de la sombra del palo que empleaban como referencia. Por tanto, los alumnos no sólo tienen que saber hacer las tareas, sino que las tienen que saber hacer con cierta agilidad porque les puede tocar repetir operaciones.
- No se pudo poner en práctica la sesión 4 puesto que era necesario contar con justificantes y permisos firmados por los padres de los alumnos. Si se llegase a poner en práctica serían necesarios dichos justificantes antes de la realización de la actividad.
- El mes idóneo para la realización de la actividad sería el mes de junio puesto que se contaría con mayor número de horas y días de sol. Además, serviría como actividad para el repaso de contenidos vistos previamente durante el curso al mismo tiempo que se trabaja el número áureo.
- En la sesión 3 se permitió el uso de tizas para realizar anotaciones en el suelo del patio, pero se procuraría en la sesión 4 el empleo de la tiza exclusivamente para realizar algunas marcas guía y así evitar dejar marcado el espacio público.
- El empleo de distintas estrategias para medir las sombras facilitó el descubrimiento de datos erróneos gracias a la comparación de resultados. Por ejemplo, durante el cálculo de la altura de la residencia de estudiantes, el resultado obtenido con la medición con pies distó de las otras dos, tras una reflexión por parte de los alumnos llegaron a la conclusión de que deberían aumentar un poco la longitud de pie que tomaban de referencia puesto que al pegar talón con punta podían quedarse algunos centímetros sin medir.
- Es necesario insistir en que los alumnos tomen las medidas en la misma dirección en la que se proyecta la sombra, y no en perpendicular al edificio, para evitar errores de cálculo.

[5.B] La vida áurea

[B.1] TÍTULO Y CONTEXTUALIZACIÓN

Se plantea a los alumnos una situación de aprendizaje para trabajar en 1º de la ESO los conceptos de proporción áurea y número de oro. Al mismo tiempo se trabajarán los sentidos de medida y numérico, entre otros que emergen naturalmente en la realización de las tareas propuestas.

La actividad se presenta a los alumnos como una secuencia de ejercicios y tareas que deben resolver de manera autónoma, en parejas o en equipo, que sirven para familiarizar al alumno con los conceptos que se están trabajando. Estas actividades están orientadas a realizar en equipo un estudio lo más detallado posible de la presencia del número áureo en el cuerpo humano mediante el descubrimiento de éste en sus propios cuerpos, en su vida cotidiana y en obras de arte. Se pretende de esta manera que el número áureo sirva de hilo conductor en una serie de actividades en las que los alumnos repasaran diversos contenidos vistos a lo largo del curso.

Previamente al comienzo de las actividades los alumnos deben estar familiarizados con los contenidos que se pondrán en práctica en la situación de aprendizaje: categorías de números, números irracionales, proporcionalidad directa, media y mediana.

[B.2] FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

[OBJETIVOS DE ETAPA A LOS QUE SE PRETENDE CONTRIBUIR]

- Transmitir al alumnado la necesidad de escuchar y respetar las opiniones de otros y a defender las suyas propias, lo que supone desarrollar actitudes de tolerancia, cooperación y solidaridad.
- La resolución de tareas matemáticas, individuales o grupales, requieren esfuerzo y constancia en la búsqueda de la solución, por lo que contribuyen al desarrollo y refuerzo de hábitos de estudio.
- Aportar al alumnado, a través de la necesidad de relacionar conocimientos y usar instrumentos de análisis de datos, sentido crítico para seleccionar y utilizar datos adecuados a cada situación, reconociendo aquellas interpretaciones incorrectas o manipuladas de los datos con los que trabaja y argumentando la interpretación correcta de los mismos.
- Contribuir, a través de la resolución de problemas, a fomentar de la creatividad, el sentido crítico y la toma de decisiones, pilares fundamentales en el desarrollo como ciudadano. La reflexión sobre este proceso dota al alumnado de instrumentos para la adquisición de confianza y seguridad en sí mismo, con el objetivo de enfrentar retos cada vez más complejos.

[COMPETENCIAS ESPECÍFICAS, CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y DESCRIPTORES OPERATIVOS]

Se trabajan los siguientes elementos curriculares de 1º ESO (Consejería de Educación, 2022):

Competencias específicas	***Criterios de evaluación y descriptores operativos***
1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las Matemáticas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.	*1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana extrayendo los datos dados, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. (CCL1, CCL2, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4)*
	1.2 Aplicar algunas herramientas sencillas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. (STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CPSAA5, CE3).
	1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema por métodos sencillos activando los conocimientos necesarios. (STEM1, STEM2, STEM3, CE3, CCEC4)
2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.	*2.1 Comprobar, de forma guiada, la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos necesarios. (STEM1, STEM2)*
	2.2 Comprobar, de manera guiada, la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, conociendo el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.). (CCL2, STEM1, STEM4)
3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.	*3.1 Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones y propiedades. (CCL1, STEM1, STEM2)*
	3.2 Plantear variantes de un problema dado de forma guiada modificando algún dato. (CCL1, STEM2)
	3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la comprobación de problemas analizando el resultado obtenido. (STEM1, CD2).
4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.	*4.1 Organizar datos y descomponer un problema en partes más simples identificando los datos y los resultados de cada una de las partes (STEM1, STEM2).*
	4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando algoritmos. (STEM1, STEM3)
5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.	*5.1 Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas apreciando un todo coherente. (STEM1)*
	5.2 Identificar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas. (STEM1)

6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos para aplicarlos en situaciones diversas.	*6.1 Identificar situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: medir, comunicar y clasificar. (CCL1, STEM1, STEM2, CE3)*
	6.2 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados de manera guiada. (STEM2)
	6.3 Conocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual. (STEM2, STEM5, CCEC1)
7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.	*7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos. (STEM3)*
	7.2 Utilizar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada, usando material manipulativo si es necesario. (STEM3)
8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.	*8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos. (CCL1, CP1, STEM2, STEM4*
	8.2 Reconocer el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión. (CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4)
9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.	*9.1 Reconocer las emociones propias, valorar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. (STEM5, CPSAA1)*
	9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje planteadas. (CPSAA1, CPSAA5)
10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.	*10.1 Colaborar activamente y construir relaciones con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva y pensando de forma creativa. (CCL5, CP3, STEM3, CPSAA3, CC2, CC3)*
	10.2 Participar en las tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa y asumiendo el rol asignado. (CPSAA1)

[CONTENIDOS]

Se trabajan los siguientes contenidos de 1º ESO (Consejería de Educación, 2022):

A. Sentido numérico

2. Cantidad:

- *Números naturales, enteros, fracciones, decimales y potencias de exponente natural en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana.*

3. Sentido de las operaciones:

- *Efectos de las operaciones aritméticas con naturales, enteros, fracciones, expresiones decimales, potencias de exponente natural y raíces sencillas.*

5. Razonamiento proporcional

- *Razones y proporciones: comprensión y representación de relaciones cuantitativas.*

B. Sentido de la medida

1. Magnitud

- *Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos en el plano: investigación y relación entre los mismos.*
- *Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida en el plano.*

3. Estimación y relaciones

- *Formulación de conjeturas sobre medidas en el plano o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones.*
- *Estrategias para la toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida en el plano.*

C. Sentido espacial

1. Figuras geométricas de dos dimensiones

- *Construcción de figuras geométricas planas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada…).*

D. Sentido algebraico

6. Pensamiento computacional

- *Estrategias útiles en la interpretación y/o modificación de algoritmos sencillos.*

E. Sentido socioafectivo

1. *Creencias, actitudes y emociones*
   - *Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.*
   - *Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.*
2. *Trabajo en equipo y toma de decisiones*
   - *Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.*
   - *Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.*
3. *Inclusión, respeto y diversidad*
   - *Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.*
   - *La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde diferentes perspectivas*

[B.3] METODOLOGÍA

[MÉTODOS]

Durante la realización de las actividades en equipo y parejas conviene que el/la docente se acerque a los distintos equipos con el objetivo de asegurar que el alumnado vaya comprendiendo correctamente los ejercicios planteados. Se trata de una situación que fomenta el trabajo colaborativo y cooperativo, así como la reflexión y el debate entre los integrantes del equipo mediante un lenguaje formal referenciando a los contenidos matemáticos que entran en juego.

El docente desempeñará el papel de facilitador del aprendizaje favoreciendo la autonomía del alumnado. Se fomenta la elaboración de un portfolio por parte del alumnado a modo de evidencia del proceso de aprendizaje y recurso de evaluación del aprendizaje desarrollado. El portfolio se considerará como una colección de materiales seleccionados con la intención de reflejar el rendimiento o el aprendizaje a lo largo del proceso de formación en el que se incorporará una dimensión reflexiva.

Se empleará una metodología activa en la que se promueva el trabajo autónomo y el trabajo en equipo. Se usarán técnicas como la argumentación, la interacción, el diálogo, la exposición, el debate, la experimentación, la interacción o el descubrimiento.

[ORGANIZACIÓN ALUMNADO Y AGRUPAMIENTOS]

Durante la realización de las actividades se dividirá el aula en grupos de 4 o 5 personas. Esta organización del aula en grupos de trabajo heterogéneos promoverá el aprendizaje colaborativo y cooperativo mediante la resolución conjunta de tareas. Mediante el aprendizaje colaborativo los miembros del grupo conocerán las estrategias utilizadas por sus iguales con el objetivo de poder imitarlas en situaciones similares. Por lo general será el docente quien forme los grupos, aunque en alguna sesión se permitirá que sean los propios alumnos quien se organicen en parejas o grupos.

[CRONOGRAMA Y ORGANIZACIÓN DEL TIEMPO Y ESPACIOS]

SESIÓN 1	Introducción a los conceptos de proporción y número áureos.
SESIÓN 2	Papiroflexia: Rectángulo áureo, su crecimiento gnomónico y la espiral de Durero. Tarea: Búsqueda de la proporción áurea en casa.
SESIÓN 3	El número de oro en la vida cotidiana y el arte.
SESIÓN 4	El número de oro en el cuerpo humano.
SESIÓN 5	Puesta en común de los datos recopilados. Redacción de informes y conclusiones.

[ORGANIZACIÓN DEL ESPACIO]

Sesión 1: Se llevará a cabo en el aula del grupo. Los alumnos distribuirán el mobiliario del aula para posibilitar el trabajo en parejas.

Sesión 2: Se desarrollará en la misma aula. Los alumnos dispondrán los pupitres para facilitar el trabajo en grupos a su libre elección.

Sesión 3: Se distribuirán en equipos heterogéneos de 4 o 5 personas dentro del aula, organizando el mobiliario en disposición de círculo para fomentar el debate.

Sesión 4: Se liberará el espacio necesario para que los mismos grupos de la sesión anterior puedan realizar la actividad cómodamente, sin obstaculizar a los otros grupos.

Sesión 5: Se organizará el aula en equipos para la recopilación final de toda la documentación elaborada e irán exponiendo en orden.

[MATERIALES Y RECURSOS]

- Pizarra convencional, utilizada para la exposición de contenidos y corrección de actividades.
- Para las actividades planteadas será necesario que el aula cuente con una pizarra digital con acceso a internet o, en su defecto, un proyector conectado al ordenador del aula.
- Calculadora, útil para la comparación de longitudes.
- Empleo de regla y cinta métrica para las actividades en las que deban tomar medidas.
- Fotocopias de las actividades para el desarrollo de la situación de aprendizaje. Folios disponibles para la sesión de papiroflexia.
- Cuaderno de clase de cada alumno.

[B.4] PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDADES Y TAREAS

- ***[4.1] Introducción número de oro. Números Reales.***

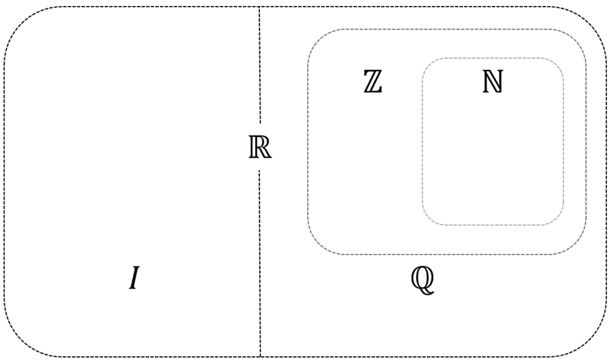
En la primera sesión se trabajarán los conceptos de número áureo, proporción áurea, sus propiedades más destacables y la presencia del número áureo en distintos elementos de la vida cotidiana, en la naturaleza, en el arte y en el cuerpo humano como se menciona en el apartado 4.3 del marco teórico. Se seguirá la siguiente secuenciación:

<u>*Presentación de los conceptos*</u>: Se comenzará con una sesión de introducción al número de oro y sus aplicaciones. Para ello, el profesor destinará los primeros minutos de la sesión a realizar una breve introducción sobre la omnipresencia del número áureo en nuestras vidas y el interés que ha despertado a lo largo de la historia siendo asociado con el ideal de belleza y con la divinidad. Esta introducción tendrá como principal objetivo promover el interés y la motivación de los estudiantes por el tema introducido.

<u>*Visualización de video*</u>: Se empleará los dispositivos digitales presentes en el aula para la visualización del video titulado *"La proporción áurea y la máscara que te dice si tu cara es guapa"* del canal de Youtube *El canal de Korah* (El Canal de Korah, 2023). El video tiene una duración de 9 minutos y describe de manera atractiva la sucesión de Fibonacci, la proporción áurea y su presencia en el cuerpo y rostro humanos.

<u>*Número de oro y clasificación de números reales*</u>: Seguidamente se repartirá a los alumnos la *ficha B.I del Anejo B*. En dicha ficha deberán hacer uso de la calculadora para hallar el valor del número de oro, un número irracional. Además, se propone una actividad en la que los alumnos deberán realizar una clasificación de distintos números en sus respectivos conjuntos: naturales, enteros, racionales e irracionales. El objetivo de esta actividad es que los alumnos sepan discernir las diferencias entre las distintas categorías de números y las particularidades de los distintos conjuntos.

Figura 49. *Clasificación de números. Elaboración propia.*

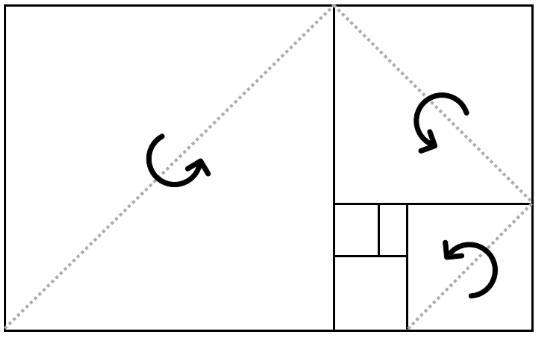


- ***[4.2] Rectángulo áureo. Papiroflexia.***

<u>*Papiroflexia. Rectángulo áureo*</u>: Se propone a los alumnos la realización de un rectángulo áureo con papiroflexia partiendo de un folio. Para ello se visualizará el video de Paulino Valderas Braojos titulado

Papiroflexia matemática: construcción del rectángulo a partir de un folio áureo disponible en la plataforma Youtube (Valderas Braojos, 2023) en que se explica cómo generar un rectángulo áureo con regla y compás y con papiroflexia. Para facilitar su construcción es aconsejable que el docente dibuje en la pizarra esquemáticamente los pasos que deben seguir los alumnos. Una vez obtenido el rectángulo áureo se les pedirá a los alumnos que midan los lados del rectángulo y calculen su cociente con ayuda de una calculadora para comprobar si el cociente entre sus lados se aproxima al número de oro.

Figura 50. *Rectángulos áureos con papiroflexia. Elaboración propia.*



A continuación, se pedirá que dibujen una espiral de Durero en dicho rectángulo áureo de papel con ayuda de un compás y que, doblando el papel como se muestra en la *ficha B.II del Anejo B*, obtengan la sucesión de rectángulos áureos que se obtienen por crecimiento gnomónico. Lo alumnos deberán registrar las medidas de los sucesivos rectángulos áureos y comprobar que siguen cumpliendo la proporción áurea rellenando la tabla del apartado B de la misma ficha.

<u>Tarea para casa</u>: En los últimos minutos de la sesión se repartirá la *ficha B.III del Anejo B* a los alumnos para que realicen las tareas en ella descritas en casa. En ella se pide a los alumnos realizar un breve ejercicio para comprobar la presencia del número áureo en una tarjeta, como puede ser su propio DNI o el abono transporte aula (Señas Pariente, 2023).

Al mismo tiempo, se pedirá a los alumnos que comprueben la presencia del número de oro en al menos tres objetos rectangulares de su casa indicando si son o no áureos y que hagan una pequeña investigación en internet sobre objetos de la vida cotidiana que guarden dicha proporción. Los alumnos registrarán su investigación con imágenes y tomando medidas y se pedirá que suban la documentación recopilada a la carpeta compartida del grupo en Teams, o la plataforma de enseñanza virtual que corresponda, para visualizarlas en el aula al día siguiente. Se emplazará a los alumnos a portar para la siguiente sesión una regla con la que poder tomar medidas.

- ***[4.3] En busca del número de oro.***

<u>*Búsqueda del número de oro en la vida cotidiana:*</u> Al comienzo de la sesión se visualizarán las imágenes subidas por los alumnos a la carpeta de Teams con objetos de su propia casa o información que hayan

encontrado sobre la presencia del número de oro en objetos de la vida cotidiana. Se permitirá que los alumnos expongan sus descubrimientos a los compañeros y que debatan. Además, los alumnos entregarán la *ficha B.III* rellena.

<u>*Búsqueda del número de oro en arte:*</u> Para la siguiente actividad se hará entrega a los alumnos de la *ficha B.IV del Anejo B* en la que se muestran imágenes de obras de arte (pintura, escultura y arquitectura). En dichas imágenes vienen ya marcadas medidas en las que deben comprobar la presencia de la proporción áurea y, además, deberán encontrar más relaciones áureas dentro de la obra. Las obras de arte seleccionadas son: la fachada principal del Partenón de Atenas, el cuadro de la Gioconda, el Doríforo de Policleto y la fachada principal de Notre Dame de Paris.

Los alumnos, empleando una regla de medir, tomarán medidas de los distintos elementos que componen las obras de arte y las dejarán anotadas en la tabla de la *ficha B.V*, y seguidamente compararán las medidas para encontrar el número de oro en ellas y encontrar las relaciones áureas que esconden las obras.

Se emplazará a los alumnos a portar para la siguiente sesión una cinta métrica para poder tomar medidas.

- ***[4.4] Proporción áurea en el cuerpo humano.***

En esta sesión se formarán grupos heterogéneos de 4 o 5 alumnos para la realización de la siguiente actividad. Seguidamente se repartirá a cada grupo la *ficha B.VI del Anejo B* en la que se muestra una imagen el hombre de Vitruvio y otra del estudio de las proporciones del cuerpo humano de Ernst Neufert, que se desarrollaron en el apartado 4.3.2.

Los alumnos deben tomar medidas de su propio cuerpo, realizando anotaciones en la ficha que se les ha facilitado, y comparar las distintas dimensiones obtenidas para encontrar el número de oro y establecer relaciones áureas dentro de su propio cuerpo. Se aconseja que, conforme tomen medidas, vayan anotándolas en las ilustraciones que se le ha entregado para que, una vez tengan los datos, hagan uso de una calculadora para comparar las medidas y encontrar el número de oro rellenando nuevamente la tabla de la *ficha B.V*. Conforme vayan encontrando partes del cuerpo con cocientes que se aproximen al número de oro, las irán dejando registradas en la ficha *B.VII del Anejo B*, dejando claro en cada relación cuál es la parte menor, la parte mayor y la suma de ambas. Por ejemplo: $\frac{De\ rodilla\ a\ pies}{De\ rodilla\ a\ ombligo} = \frac{De\ rodilla\ a\ ombligo}{De\ ombligo\ a\ pies}$.

A los grupos aventajados se les puede proponer que tomen las medidas de las partes del cuerpo de todos los integrantes del equipo y luego hagan la media y comparen si la relación entre las dimensiones medias se acerca más a la proporción áurea que los datos individualizados de cada alumno.

Aparte de centrarse en la proporción áurea, los alumnos también comprobarán como sus cuerpos miden apropiadamente lo mismo de alto que de envergadura con los brazos extendidos y que si se tumban en el suelo y extienden todas las extremidades se puede trazar una circunferencia con centro en el ombligo que pase por los extremos de manos y pies como se muestra en el *Hombre de Vitruvio*.

- ***[4.5] Recopilación de información y puesta en común.***

Esta última sesión se destinará a que los alumnos, en grupos, redacten un pequeño informe y recopilen toda la información generada a modo de portfolio con las conclusiones que han sacado de la presencia del número áureo en el cuerpo humano y que realicen una breve exposición oral de dicho informe. Se fomentará el debate y el intercambio de información entre los distintos grupos.

[B.5] ATENCIÓN A LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES

Durante el desarrollo de las actividades los contenidos se presentan a los alumnos de diferentes maneras. En ocasiones el profesor será el trasmisor del conocimiento a través de explicaciones colectivas o individuales y otras veces serán los propios alumnos los que deberán de encontrar en equipo o en parejas el procedimiento idóneo para la resolución de las actividades planteadas. El trabajo en equipos fomentará el aprendizaje entre compañeros mediante la ayuda y el apoyo de pares de igual o similar nivel o estatus.

[B.6] PROCESO DE EVALUACIÓN

La evaluación será continúa a lo largo de toda la actividad de tal manera que se permita la adaptación de ésta orientada a mejorar los aprendizajes del alumnado. Para la evaluación se hará uso de los siguientes instrumentos de evaluación:

- El registro anecdótico realizado por el docente en su guía de observación durante el desarrollo de las actividades.
- Informe a modo de portfolio presentado por el equipo a modo en el que recopilan todas las decisiones razonamientos, procedimientos y estrategias seguidas por el equipo a lo largo de las distintas actividades de la situación de aprendizaje.
- Fichas rellenas por los alumnos de manera individual.

Se evaluarán los criterios de evaluación de las competencias específicas que se desarrollan en la situación de aprendizaje. Para ello, el docente desglosará los criterios de evaluación en los indicadores de logro fijados por el propio docente o bien por el Departamento de Matemáticas del centro en su programación anual.

Criterios de evaluación	***Indicadores de logro***			
	I.L.1	**I.L.2**	**I.L.3**	**I.L.4**
1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana extrayendo los datos dados, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.				
1.2 Aplicar algunas herramientas sencillas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.				
1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema por métodos sencillos activando los conocimientos necesarios.				
2.1 Comprobar, de forma guiada, la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos necesarios.				
2.2 Comprobar, de manera guiada, la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, conociendo el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.).				
3.1 Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones y propiedades.				
3.2 Plantear variantes de un problema dado de forma guiada modificando algún dato.				
3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la comprobación de problemas analizando el resultado obtenido.				
4.1 Organizar datos y descomponer un problema en partes más simples identificando los datos y los resultados de cada una de las partes.				
4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando algoritmos.				
5.1 Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas apreciando un todo coherente.				
5.2 Identificar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.				
6.1 Identificar situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: medir, comunicar y clasificar.				
6.2 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados de manera guiada.				
6.3 Conocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.				
7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos.				
7.2 Utilizar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada, usando material manipulativo si es necesario.				
8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos.				

8.2 Reconocer el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión.				
9.1 Reconocer las emociones propias, valorar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.				
9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje planteadas.				
10.1 Colaborar activamente y construir relaciones con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva y pensando de forma creativa.				
10.2 Participar en las tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa y asumiendo el rol asignado.				

Se dejarán los criterios de calificación de los distintos criterios de evaluación a elección del docente.

[B.7] VALORACIÓN DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Una vez realizada la situación de aprendizaje en el aula se realizará una evaluación de la propia situación de aprendizaje, en la que se valorará si se ha hecho una correcta definición de los elementos curriculares, se evaluará el desarrollo, el impacto y la satisfacción de los participantes. Una vez recogida la información se procederá a la interpretación de los datos y elaboración de un informe con la finalidad de prevenir posibles dificultades y mejorar el proceso educativo.

[PUESTA EN PRÁCTICA EN LAS PRACTICAS EXTERNAS]

Durante el periodo de prácticas, en el IES Zorrilla de Valladolid, se pudo poner en práctica un borrador de la presente situación de aprendizaje con un grupo de 3º de la ESO. Se pudo realizar algunas de las actividades planteadas en las sesiones 2, 3 y 4 como la realización del rectángulo áureo en papiroflexia y el estudio de la presencia de la proporción áurea en el cuerpo humano.

A continuación, se mencionan algunos puntos a destacar durante la puesta en práctica:

- Para la elaboración del rectángulo áureo a partir de un folio fue de ayuda mostrarles en la pizarra cómo se construye el rectángulo con regla y compás, puesto que son materiales con los que están más familiarizados. Esto permitió que los alumnos establecieran relaciones entre los dos métodos. Se entregó un folio a cada uno de los alumnos y se les pidió que repitiesen los mismos dobleces que el profesor realizaba con su folio. Para ello, fue necesario dibujar a modo de esquema en la pizarra convencional los pasos que se debía seguir doblando el papel ya que a algunos alumnos se perdían al no ver de cerca el folio del profesor.
- En la puesta en práctica de la actividad de la sesión 4, en la que se estudia la proporción áurea en el cuerpo humano, se dio total libertad para formar los agrupamientos. Se pudo observar un mejor rendimiento en los grupos a partir de 4 personas puesto que mientras uno hacía de modelo, dos

personas tomaban medidas y la cuarta persona dejaba registro de las mediciones. De esta manera, se pudo realizar la toma de datos rápidamente y comenzar con la ayuda de calculadoras a establecer relaciones áureas en el cuerpo. Para el registro de las mediciones resultó de ayuda entregarles impresiones del hombre de Vitruvio en las que podían dibujar encima y anotar las mediciones de cada uno de los compañeros.

- El empleo de materiales manipulativos (papiroflexia, cintas de medir, fichas…) sirvió para aumentar el interés y la motivación de los alumnos por la realización de las distintas actividades.
- Se realizó una sesión de puesta en común al finalizar la sesión de estudio de la proporción áurea en el cuerpo humano. Para dicha sesión se les proyectó el video "*La importancia del culo de Kim Kardashian"* del canal de Youtube de la divulgadora Ter, en el que se habla sobre la proporción áurea, el Modulor de Le Corbusier y la ruptura con los cánones de belleza clásicos de las nuevas celebridades. Este video de tono informal y que captó la atención de los alumnos sirvió para plantear un debate sobre la proporción áurea y los cánones de belleza tanto clásicos como contemporáneos. Se originó un debate muy activo sobre la subjetividad de la belleza y la efimeridad de los cánones de belleza. Esta actividad se podría incluir para su puesta en práctica en cursos como 3º o 4º de la ESO, en los que los alumnos ya cuentan con una mayor madurez.

[5.C] Números Metálicos y la Sucesión de Fibonacci

[C.1] TÍTULO Y CONTEXTUALIZACIÓN

Se plantea a los alumnos de 3º de la ESO una situación de aprendizaje para trabajar los conceptos de número áureo, números metálicos y la sucesión de Fibonacci. Simultáneamente se trabajarán los sentidos de numérico y algebraico, entre otros derivados de la realización de las actividades propuestas.

La situación de aprendizaje se divide en una serie de actividades y tareas de progresivo grado de complejidad que se realizarán en grupo con el empleo de TICs y de distintas fichas de actividad que los alumnos deberán completar. Se pretende que el número de oro y la sucesión de Fibonacci sean el hilo conductor para trabajar contenidos propios del curso como las sucesiones, las ecuaciones de 2º grado con radicales y el trabajo en equipo.

[C.2] FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR

[OBJETIVOS DE ETAPA A LOS QUE SE PRETENDE CONTRIBUIR]

- Transmitir al alumnado la necesidad de escuchar y respetar las opiniones de otros y a defender las suyas propias, lo que supone desarrollar actitudes de tolerancia, cooperación y solidaridad.
- La resolución de tareas matemáticas, individuales o grupales, requieren esfuerzo y constancia en la búsqueda de la solución, por lo que contribuyen al desarrollo y refuerzo de hábitos de estudio.
- Aportar al alumnado, a través de la necesidad de relacionar conocimientos y usar instrumentos de análisis de datos, sentido crítico para seleccionar y utilizar datos adecuados a cada situación, reconociendo aquellas interpretaciones incorrectas o manipuladas de los datos con los que trabaja y argumentando la interpretación correcta de los mismos.
- Contribuir, a través de la resolución de problemas, a fomentar de la creatividad, el sentido crítico y la toma de decisiones, pilares fundamentales en el desarrollo como ciudadano. La reflexión sobre este proceso dota al alumnado de instrumentos para la adquisición de confianza y seguridad en sí mismo, con el objetivo de enfrentar retos cada vez más complejos.

[COMPETENCIAS ESPECÍFICAS, CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y DESCRIPTORES OPERATIVOS]

Se trabajan los siguientes elementos curriculares de 3º ESO (Consejería de Educación, 2022):

Competencias específicas	*Criterios de evaluación y descriptores operativos*
1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las Matemáticas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.	*1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana extrayendo los datos dados, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. (CCL1, CCL2, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4)*
	1.2 Aplicar algunas herramientas sencillas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. (STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CPSAA5, CE3).
	1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema por métodos sencillos activando los conocimientos necesarios. (STEM1, STEM2, STEM3, CE3, CCEC4)
2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.	*2.1 Comprobar, de forma guiada, la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos necesarios. (STEM1, STEM2)*
	2.2 Comprobar, de manera guiada, la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, conociendo el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.). (CCL2, STEM1, STEM4)
3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.	*3.1 Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones y propiedades. (CCL1, STEM1, STEM2)*
	3.2 Plantear variantes de un problema dado de forma guiada modificando algún dato. (CCL1, STEM2)
	3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la comprobación de problemas analizando el resultado obtenido. (STEM1, CD2).
4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.	*4.1 Organizar datos y descomponer un problema en partes más simples identificando los datos y los resultados de cada una de las partes (STEM1, STEM2).*
	4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando algoritmos. (STEM1, STEM3)
5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.	*5.1 Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas apreciando un todo coherente. (STEM1)*
	5.2 Identificar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas. (STEM1)
6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales	*6.1 Identificar situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las*

susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos para aplicarlos en situaciones diversas.	*matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: medir, comunicar y clasificar. (CCL1, STEM1, STEM2, CE3)*
	6.2 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados de manera guiada. (STEM2)
	6.3 Conocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual. (STEM2, STEM5, CCEC1)
7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.	*7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos. (STEM3)*
	7.2 Utilizar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada, usando material manipulativo si es necesario. (STEM3)
8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.	*8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos. (CCL1, CP1, STEM2, STEM4*
	8.2 Reconocer el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión. (CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4)
9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.	*9.1 Reconocer las emociones propias, valorar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. (STEM5, CPSAA1)*
	9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje planteadas. (CPSAA1, CPSAA5)
10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.	*10.1 Colaborar activamente y construir relaciones con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva y pensando de forma creativa. (CCL5, CP3, STEM3, CPSAA3, CC2, CC3)*
	10.2 Participar en las tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa y asumiendo el rol asignado. (CPSAA1)

[CONTENIDOS]

Se trabajan los siguientes contenidos de 3º ESO (Consejería de Educación, 2022):

A. Sentido numérico

4. Relaciones

- *Patrones y regularidades numéricas. Reconocimiento, aplicación y uso de las sucesiones numéricas.*

B. Sentido espacial

3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica

- *Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia, vida diaria…).*

C. Sentido algebraico

2. Modelo matemático

- *Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando, representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico.*
- *Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.*

3. Variable

- *Variable: comprensión del concepto como incógnita en ecuaciones cuadráticas, como indeterminadas en expresión de patrones o identidades notables y como cantidades variables en fórmulas y funciones cuadráticas.*

4. Igualdad y desigualdad

- *Ecuaciones cuadráticas: resolución mediante cálculo mental, métodos manuales o el uso de la tecnología según el grado de dificultad.*

6. Pensamiento computacional

- *Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.*

E.Sentido socioafectivo

1. Creencias, actitudes y emociones

- *Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.*
- *Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.*

2. Trabajo en equipo y toma de decisiones

- *Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.*

3. Inclusión, respeto y diversidad

- *Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.*

[C.3] METODOLOGÍA

[MÉTODOS]

Durante la realización de las actividades en equipo y parejas conviene que el/la docente se acerque a los distintos equipos con el objetivo de asegurar que el alumnado vaya comprendiendo correctamente los ejercicios planteados. Se trata de una situación que fomenta el trabajo colaborativo y cooperativo, así como la reflexión y el debate entre los integrantes del equipo mediante un lenguaje formal referenciando a los contenidos matemáticos que entran en juego.

El docente desempeñará el papel de facilitador del aprendizaje favoreciendo la autonomía del alumnado. Se fomenta la elaboración de un portfolio por parte del alumnado a modo de evidencia del proceso de aprendizaje y recurso de evaluación del aprendizaje desarrollado. El portfolio se considerará como una colección de materiales seleccionados con la intención de reflejar el rendimiento o el aprendizaje a lo largo del proceso de formación en el que se incorporará una dimensión reflexiva.

Se empleará una metodología activa en la que se promueva el trabajo autónomo y el trabajo en equipo. Se usarán técnicas como la argumentación, el debate, la experimentación, la interacción o el descubrimiento.

Se hará uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC): la utilización de las pizarras digitales del aula y el empleo de la calculadora de Geogebra.

[ORGANIZACIÓN ALUMNADO Y AGRUPAMIENTOS]

Durante la realización de las actividades se dividirá el aula en grupos de diferentes números de integrantes dependiendo de las actividades. En las dos primeras sesiones se opta por agrupamientos de 3 personas mientras que en la última sesión se forman grupos de 5 o 6 integrantes. Esta organización del aula en grupos de trabajo heterogéneos promoverá el aprendizaje colaborativo y cooperativo mediante la resolución conjunta de tareas. Mediante el aprendizaje colaborativo los miembros del grupo conocerán las estrategias utilizadas por sus iguales con el objetivo de poder imitarlas en situaciones similares.

[CRONOGRAMA Y ORGANIZACIÓN DEL TIEMPO Y ESPACIOS]

SESIÓN 1	Introducción a los conceptos número de oro, números metálicos y sucesión de Fibonacci. Actividad de Geogebra.
SESIÓN 2	El problema de los conejos. Relación de la sucesión de Fibonacci con el número áureo.
SESIÓN 3	Competición: Los números metálicos.

[ORGANIZACIÓN DEL ESPACIO]

Sesión 1 y 2: El aula se organizará de manera que los alumnos puedan trabajar cómodamente en grupos de 3 y tengan buena visibilidad de la pizarra digital.

Sesión 3: Se distribuirán en grupos heterogéneos de 5 o 6 personas dentro del aula, organizando el mobiliario en formación de círculo y con la suficiente distante entre los grupos para que puedan trabajar cómodamente.

[MATERIALES Y RECURSOS]

- Pizarra convencional, utilizada para la exposición de contenidos y corrección de actividades.
- Para las actividades planteadas será necesario que el aula cuente con una pizarra digital con acceso a internet o, en su defecto, un proyector conectado al ordenador del aula.
- Calculadora.
- Geogebra.
- Teléfonos móviles personales de los alumnos.
- Fotocopias de las actividades para el desarrollo de la situación de aprendizaje.
- Cuaderno de clase de cada alumno.

[C.4] PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDADES Y TAREAS

- ***[4.1] Introducción número de oro y sucesión de Fibonacci. Números metálicos.***

En la primera sesión se trabajarán los conceptos de número áureo, la sucesión de Fibonacci y la relación entre ambas. Se seguirá la siguiente secuenciación:

Presentación de los conceptos: Se comenzará con una sesión de introducción al número y proporción áureos y la sucesión de Fibonacci. Para ello el profesor destinará los primeros minutos de la sesión a realizar una breve introducción sobre dichos conceptos, su importancia a lo largo de la historia en diversas disciplinas y su vinculación con el ideal de belleza y la divinidad. Esta introducción tendrá como principal objetivo el de despertar el interés y la motivación de los estudiantes.

Visualización de video: Se visualizará en el soporte digital disponible en el aula un video del divulgador científico Eduardo Sáenz Cabezón titulado *La sucesión de Fibonacci y la razón áurea* (Sáenz Cabezón, 2023). El video tiene una duración de 6 minutos y hace una breve, pero completa descripción de la sucesión de Fibonacci, el número áureo y la relación entre ambos.

Definición y cálculo del número áureo: Seguidamente se hará entrega los alumnos de la *ficha C.I del Anejo C* en la en la que los alumnos deberán repetir el proceso que han visto realizar a Sáenz Cabezón para, partiendo de la definición de número de oro, obtener la ecuación áurea y así conseguir el valor del número de oro.

Números metálicos en Geogebra: Para la siguiente actividad se dividirá al alumnado en grupos heterogéneos de 3 personas y se permitirá el uso de sus teléfonos móviles personales para acceder a la aplicación de Geogebra. Para ello, se les proporcionará a los alumnos el siguiente QR para acceder a la actividad titulada *Números metálicos* (Álvarez García, 2023):

Figura 51. *Código QR. Actividad números metálicos. Elaboración propia.*

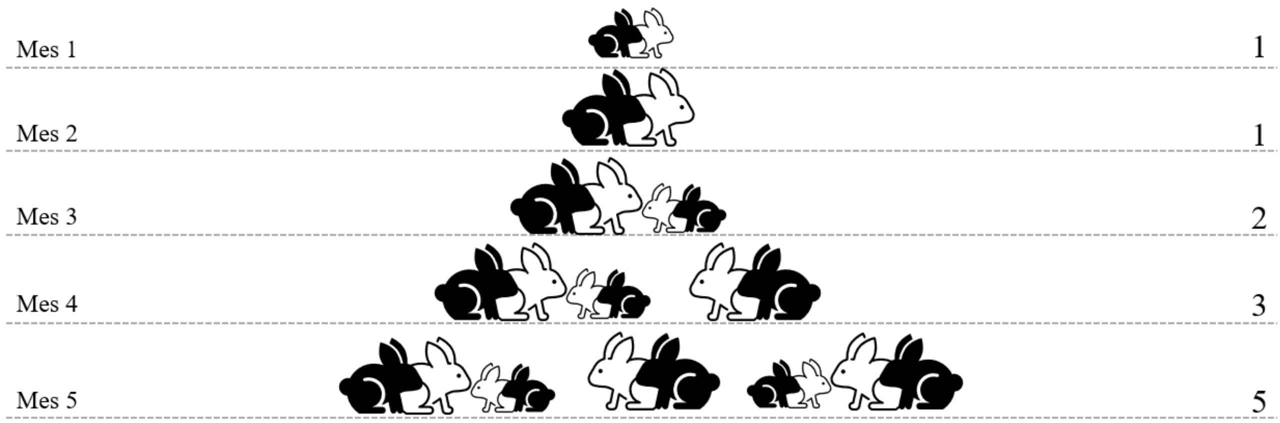
https://www.geogebra.org
/m/UwCgHa2U

La actividad se centra en los números metálicos. Comienza con una explicación de qué son y cómo se obtienen y su representación gráfica. Se dejará tiempo a los alumnos para que se muevan los tabuladores según los valores de p y q para obtener los valores de los diferentes números metálicos. Deberán rellenar una tabla con los diferentes números metálicos y responder a las preguntas que se les pide en parejas (*ficha C.II del Anejo C).*

- ***[4.2] El problema de los conejos.***

El problema de los conejos: En esta sesión se trabajará la sucesión de Fibonacci y su relación con el número de oro en los mismos grupos fijados en la actividad anterior. Para ello, se les planteará el famoso problema de los conejos de Leonardo de Pisa (*ficha C.III del Anejo C),* comentado en el apartado 4.4.3 y los alumnos deberán ir rellenando los datos hasta obtener el número de parejas de conejos que se obtiene al final del año. Para guiarles el profesor les irá haciendo las preguntas de la *ficha C.IV*, con el objetivo de que establezcan la relación de cada término de la sucesión de Fibonacci con sus dos anteriores. Una vez los alumnos hayan descubierto cómo se genera cada término de la sucesión se entregará la *ficha C.IV* para que respondan a las preguntas y verbalicen lo que han aprendido.

Figura 52. *Problema de los conejos. Elaboración propia.*



<u>*La sucesión de Fibonacci y el número de oro*</u>: A continuación, se les repartirá la *ficha C.V del Anejo C* para realizar un ejercicio en el que los alumnos descubrirán la relación entre los términos de la sucesión de Fibonacci y el número de oro. Para este fin, se les pedirá que rellenen la tabla que aparece en la ficha según las indicaciones que se les muestran. Tendrán que hacer el cociente de cada término de la sucesión de Fibonacci y el anterior y comprobar que cuanto mayores son las cifras de la sucesión, más se acerca el resultado del cociente al número áureo.

<u>*Sucesión de Fibonacci generalizada y el número de plata*</u>: Por último, se les propondrá un ejercicio (*ficha C.VI del Anejo C)* en el que se parte de una sucesión de Fibonacci generalizada de la cual deben descubrir el mecanismo para obtener nuevos términos de la sucesión, y rellenar una tabla parecida a la del ejercicio anterior en la que el cociente de los términos consecutivos se aproxima, en esta ocasión, al número de plata (Señas Pariente, 2023).

- ***[4.3] ¡A competir! Las ecuaciones metálicas***

En esta última actividad se formarán equipos heterogéneos de 5 o 6 personas formados por el docente, pudiéndose fusionar dos grupos de las actividades anteriores en uno solo. El objetivo de cada equipo será conseguir el mayor número de punto al final de la sesión en la que deberán resolver un conjunto de ecuaciones de 2º grado con radicales, las ecuaciones metálicas. Para el desarrollo de la actividad, se hará entrega de la *ficha C.VII del Anejo C* a cada integrante de cada equipo.

Figura 53. *Tabla incluida en la ficha C.VII. Elaboración propia*

Nombre del número	Ecuación	p	q	Solución positiva	Valor aproximado
	$x^2 - x - 1 = 0$				
	$x^2 - 2x - 1 = 0$				
	$x^2 - 3x - 1 = 0$				
	$x^2 - x - 2 = 0$				
	$x^2 - x - 3 = 0$				
	$x^2 - 2x - 2 = 0$				

Para poder puntuar cada equipo será necesario que todos los integrantes del grupo tengan resuelta cada una de las ecuaciones correctamente. Además, deberán de especificar a qué ecuación metálica corresponde cada una de las ecuaciones dadas y marcar qué número metálico se obtiene en su raíz positiva. Para tal fin, se les proporcionará a los alumnos nuevamente el QR con el que podrán acceder a la actividad *Números metálicos* de la primera sesión (*ficha C.II).*

Para facilitar el sistema de puntuación el docente puede hacer uso de la aplicación de Android *"Contador de puntos"* introduciendo el nombre de cada grupo y dándoles libertad a los alumnos de elegir el nombre y el color característico del equipo. Además, los alumnos deberán escribir el nombre del grupo en un post-it o folio que quedará encima de la mesa de trabajo grupal a la vista del profesor.

Se establecen las siguientes normas:

- Por cada ecuación metálica correctamente resuelta y fila de la tabla correctamente rellena que tengan todos los integrantes del grupo realizado en su cuaderno el equipo obtiene entre 3 y 5 puntos.
- Conforme van teniendo realizados los ejercicios se pide al integrante de un grupo que salga a la pizarra a resolverlo para toda la clase, para que el ejercicio resuelto quede a la vista de toda la clase. Si el alumno realiza el ejercicio correctamente el equipo gana 2 extras.
- Si se percibe que algún alumno con dificultades se ha limitado a copiar el ejercicio de los compañeros de equipo de manera mecánica sin comprenderlo se pedirá a los compañeros del equipo que se lo expliquen. Para ello se les dejará unos minutos para las explicaciones entre compañeros. Pasado ese tiempo el docente se volverá a pasar por el grupo para que el alumno en cuestión le explicase el ejercicio. Si finalmente todos lo han entendido, el equipo recibe 1 o 2 puntos extras. Esta práctica resulta muy efectiva y favorece enormemente la colaboración entre los compañeros.
- Se les avisará que el profesor solamente se acercará a corregir los ejercicios en los grupos que estén todos los integrantes en silencio con la mano levantada.
- En caso de mal comportamiento se puede bajar la puntuación.

Al finalizar la sesión se pedirá a los alumnos que redacten un informe a modo de portfolio en el que recopilen todo el material elaborado durante las sesiones de trabajo prestando especial atención a las reflexiones y conclusiones a las que hayan llegado durante su proceso de aprendizaje. Dicho portfolio lo podrán desarrollar en casa y entregarlo en la fecha fijada por el docente.

[C.5] ATENCIÓN A LAS DIFERENCIAS INDIVIDUALES

Durante el desarrollo de las actividades los contenidos se presentan a los alumnos de diferentes maneras. En ocasiones el profesor será el trasmisor del conocimiento a través de explicaciones colectivas o individuales y otras veces serán los propios alumnos los que deberán de encontrar en equipos pequeños o grandes procedimiento idóneo para la resolución de las actividades planteadas. El trabajo en equipos fomentará el aprendizaje entre compañeros mediante la ayuda y el apoyo de pares de igual o similar nivel o estatus.

[C.6] PROCESO DE EVALUACIÓN

La evaluación será continúa a lo largo de toda la actividad de tal manera que se permita la adaptación de ésta orientada a mejorar los aprendizajes del alumnado. Para la evaluación se hará uso de los siguientes instrumentos de evaluación:

- El registro anecdótico realizado por el docente en su guía de observación durante el desarrollo de las actividades grupales.
- Informe a modo de portfolio presentado por el equipo a modo en el que recopilan todas las decisiones razonamientos, procedimientos, reflexiones y conclusiones seguidas por el equipo y por cada individuo a lo largo de las distintas actividades de la situación de aprendizaje.
- Fichas rellenas por los alumnos de manera individual.

Se evaluarán los criterios de evaluación de las competencias específicas que se desarrollan en la situación de aprendizaje. Para ello, el docente desglosará los criterios de evaluación en los indicadores de logro fijados por el propio docente o bien por el Departamento de Matemáticas del centro en su programación anual.

Criterios de evaluación	***Indicadores de logro***			
	I.L.1	**I.L.2**	**I.L.3**	**I.L.4**
1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana extrayendo los datos dados, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.				
1.2 Aplicar algunas herramientas sencillas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.				
1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema por métodos sencillos activando los conocimientos necesarios.				
2.1 Comprobar, de forma guiada, la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos necesarios.				
2.2 Comprobar, de manera guiada, la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, conociendo el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.).				

3.1 Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones y propiedades.				
3.2 Plantear variantes de un problema dado de forma guiada modificando algún dato.				
3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la comprobación de problemas analizando el resultado obtenido.				
4.1 Organizar datos y descomponer un problema en partes más simples identificando los datos y los resultados de cada una de las partes.				
4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando algoritmos.				
5.1 Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas apreciando un todo coherente.				
5.2 Identificar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.				
6.1 Identificar situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: medir, comunicar y clasificar.				
6.2 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados de manera guiada.				
6.3 Conocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.				
7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos.				
7.2 Utilizar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada, usando material manipulativo si es necesario.				
8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos.				
8.2 Reconocer el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión.				
9.1 Reconocer las emociones propias, valorar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.				
9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje planteadas.				
10.1 Colaborar activamente y construir relaciones con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva y pensando de forma creativa.				
10.2 Participar en las tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa y asumiendo el rol asignado.				

Se dejarán los criterios de calificación de los distintos criterios de evaluación a elección del docente.

[C.7] VALORACIÓN DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Una vez realizada la situación de aprendizaje en el aula se realizará una evaluación de la propia situación de aprendizaje, en la que se valorará si se ha realizado una correcta definición de los elementos curriculares y se evaluará el desarrollo, el impacto y la satisfacción de los participantes. Una vez recogida la información se procederá a la interpretación de los datos y elaboración de un informe con la finalidad de prevenir posibles dificultades y mejorar el proceso educativo.

[PUESTA EN PRÁCTICA EN LAS PRACTICAS EXTERNAS]

Durante el periodo de prácticas, en el IES Zorrilla de Valladolid se pudo poner en práctica un borrador de esta situación de aprendizaje. Concretamente se pudo realizar la sesión 3 modificada en dos grupos de 2º de la ESO sustituyendo las ecuaciones metálicas por ecuaciones de 2º grado sin radicales. El objetivo de la actividad era el probar una mecánica distinta a la que se seguía de clases magistrales, puesto que los alumnos progresivamente fueron perdiendo interés.

A continuación, se enuncian algunos puntos a destacar durante la puesta en práctica de la actividad:

- La realización de la actividad resultó satisfactoria para los alumnos quienes mostraron gran motivación durante su desarrollo. Para activar el interés de los alumnos por participar resultó muy útil el permitirles seleccionar el nombre de su grupo y el color que les representase.
- Se dio libertad a los alumnos para que formasen grupos quedando bastante descompensados, lo que ocasionó que algunos grupos desconectasen al no haber ningún miembro que dominase el tema en el que el grupo se pudiera apoyar. Hubo una gran diversidad de agrupamientos, de 3 a 7 personas, lo cual permitió comparar los rendimientos de grupos con distinto número de integrantes.
- Se observó que los grupos que mejor rendimiento tuvieron fueron los grupos heterogéneos de 5 o 6 integrantes, puesto que al poderse ayudar los unos a los otros obtuvieron gran cantidad de puntos extra de ayuda. Se valoró enormemente la colaboración entre compañeros.
- Para evaluar la colaboración entre compañeros se pedía a algún integrante del equipo que explicase al docente cómo había resuelto la ecuación, para comprobar que no se había limitado únicamente a copiar los ejercicios de los compañeros de equipo. Si no era capaz de responder correctamente se le concedía unos minutos para que los compañeros de equipo de lo explicasen, si pasado dichos minutos era capaz de responder correctamente, se les incorporaba los puntos extra al marcador del equipo.
- Para el registro de las puntuaciones se empleó la aplicación de móvil *Contador de puntos* para facilitar al docente la supervisión, pero se podrá emplear cualquier otro método de registro de puntuación.

ANEJOS

[ANEJO A] Materiales de apoyo Situación de Aprendizaje A

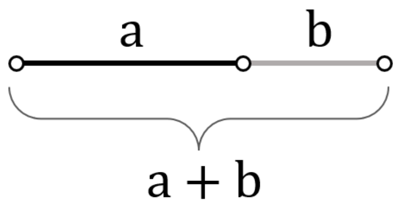
[FICHA A.I]

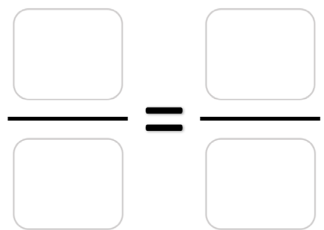
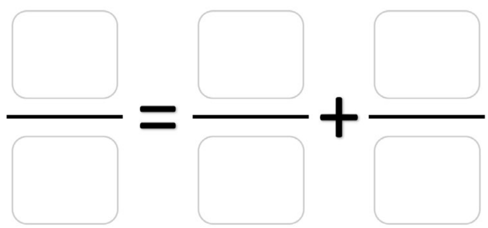
<u>*¿CUÁL ES EL VALOR EL NÚMERO DE ORO?*</u>

Para hallar el valor numérico del número áureo partiremos de su definición:

El número áureo es el valor numérico de la proporción que guardan entre sí dos segmentos de recta a *y* b *(siendo* a *más largo que* b*), de tal manera que la longitud total (la suma de los dos segmentos* a *y* b*) es al segmento mayor* a *como el segmento* a *es al segmento menor* b*. Dicho de otra manera, el total es a la parte mayor como la parte mayor es a la parte pequeña.*

Figura 54. *Segmento dividido en proporción áurea. Elaboración propia.*



Expresar algebraicamente la definición de número áureo.	
Separar la expresión obtenida en fracciones con un solo valor en el numerador.	
Sustituir en la igualdad: $\frac{a}{b} = x$	

Multiplica la ecuación obtenida por x para obtener una ecuación de segundo grado (ecuación áurea)	$\square - \square - \square = 0$	
Resuelve la ecuación áurea para obtener sus raíces.		
La raíz positiva de la ecuación áurea es el número áureo.	*Raíz Positiva* $\square$ *Número de oro (Φ)*	*Raíz Negativa* $\square$

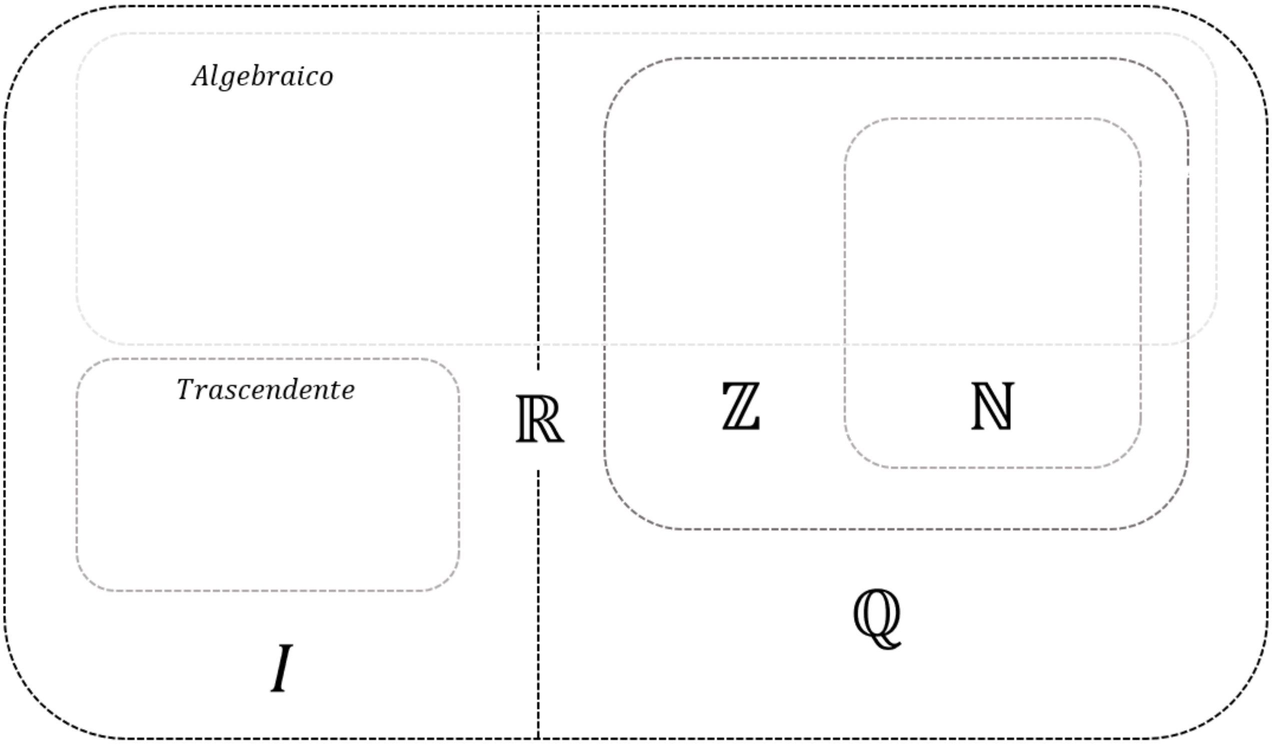
[FICHA A.II]

CLASIFICACIÓN DE NÚMEROS REALES

Clasificar los siguientes números reales en sus respectivos conjuntos:

$$\frac{2}{3}\ ,\ \pi\ ,\ \sqrt{5}\ ,\ -7\ ,\ \phi\ ,\ 139\ ,\ \frac{35}{2}\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ -13{,}45\ ,\ 0{,}5\ ,\ -2.456$$

Figura 55. *Clasificación de números. Elaboración propia.*



[FICHA A.III]

PROBLEMAS. TEOREMA DE PITÁGORAS Y TALES.

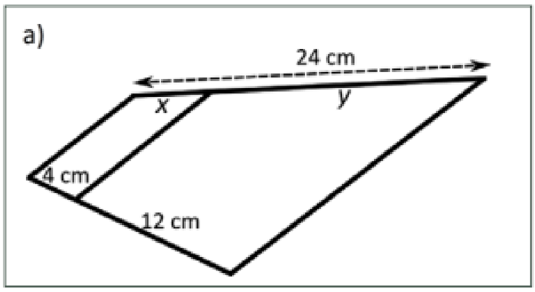
Resolver los siguientes problemas geométricos:

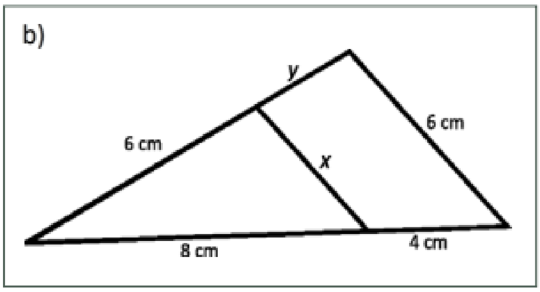
Figura 56. *Ejercicios Teorema de Pitágoras. (Rodrigo, Hernández, & Encabo, Matemáticas 2º de ESO. Capítulo 6: Longitudes y áreas, 2022). Obtenido de Apuntesmareaverde:*
https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/2ESO/2_06_Longitudes.pdf CC BY NC SA

1. ¿Es posible construir un triángulo rectángulo de 10 *cm* y 6 *cm* de medida de sus catetos y 15 *cm* de hipotenusa? Razona tu respuesta
2. Dibuja en papel cuadriculado en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cuadritos. Dibuja luego otro triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cuadritos. Mide las dos hipotenusas y anota los resultados. ¿Es la medida de la segunda hipotenusa doble que la de la primera? Razona la respuesta. Calcula las áreas formadas por los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa.

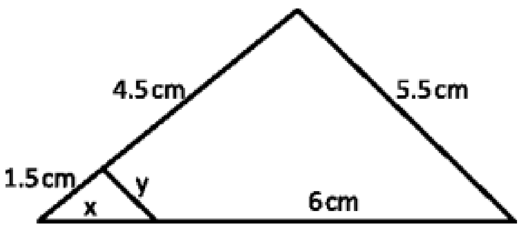
Figura 57. *Ejercicios Teorema de Tales. (Rodrigo, Hernández, & Encabo, Matemáticas 2º de ESO. Capítulo 6: Longitudes y áreas, 2022). Obtenido de Apuntesmareaverde:*
https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/2ESO/2_06_Longitudes.pdf CC BY NC SA

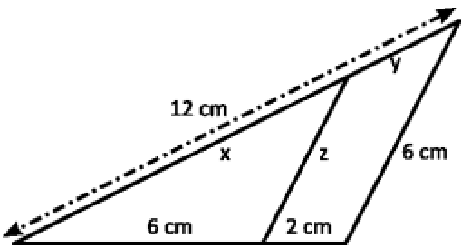
27. Calcula los valores de *x* e *y* en las siguientes figuras.





30. Calcula las longitudes que se indican:





PROBLEMAS. PROPORCIONALIDAD DIRECTA.

Resolver los siguientes problemas de magnitudes directamente proporcionales:

Figura 58. *Actividades de proporcionalidad directa (Rodrigo , Hernández, & Encabo, Matemáticas 2º de ESO. Capítulo 8: Magnitudes proporcionales. Porcentajes, 2022). Obtenido de apuntesmareaverde:* https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/2ESO/2_08_Proporciones.pdf *CC BY NC SA*

Actividades propuestas

10. El coche de Juan gasta 5.5 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 673 km?

11. En una rifa se han vendido 250 papeletas y se han recaudado 625 euros. ¿A cuánto se vendía cada papeleta? ¿Cuánto habrían recaudado si hubieran vendido 900 papeletas?

12. Una fabada para 6 personas necesitas 750 g de judías, ¿cuántas personas pueden comer fabada si utilizamos 6 kg de judías?

13. Cuatro camisetas nos costaron 25.5 €, ¿cuánto pagaremos por 14 camisetas iguales?

[FICHA A.IV]

A) Rellenar la siguiente tabla con los nombres de los integrantes del equipo, las dimensiones de sus suelas de zapato y la longitud de tres pasos dados por la persona.

	Nombre	Longitud suela	Longitud 3 pasos
Alumno@ 01			
Alumno@ 02			
Alumno@ 03			
Alumno@ 04			
Alumno@ 05			

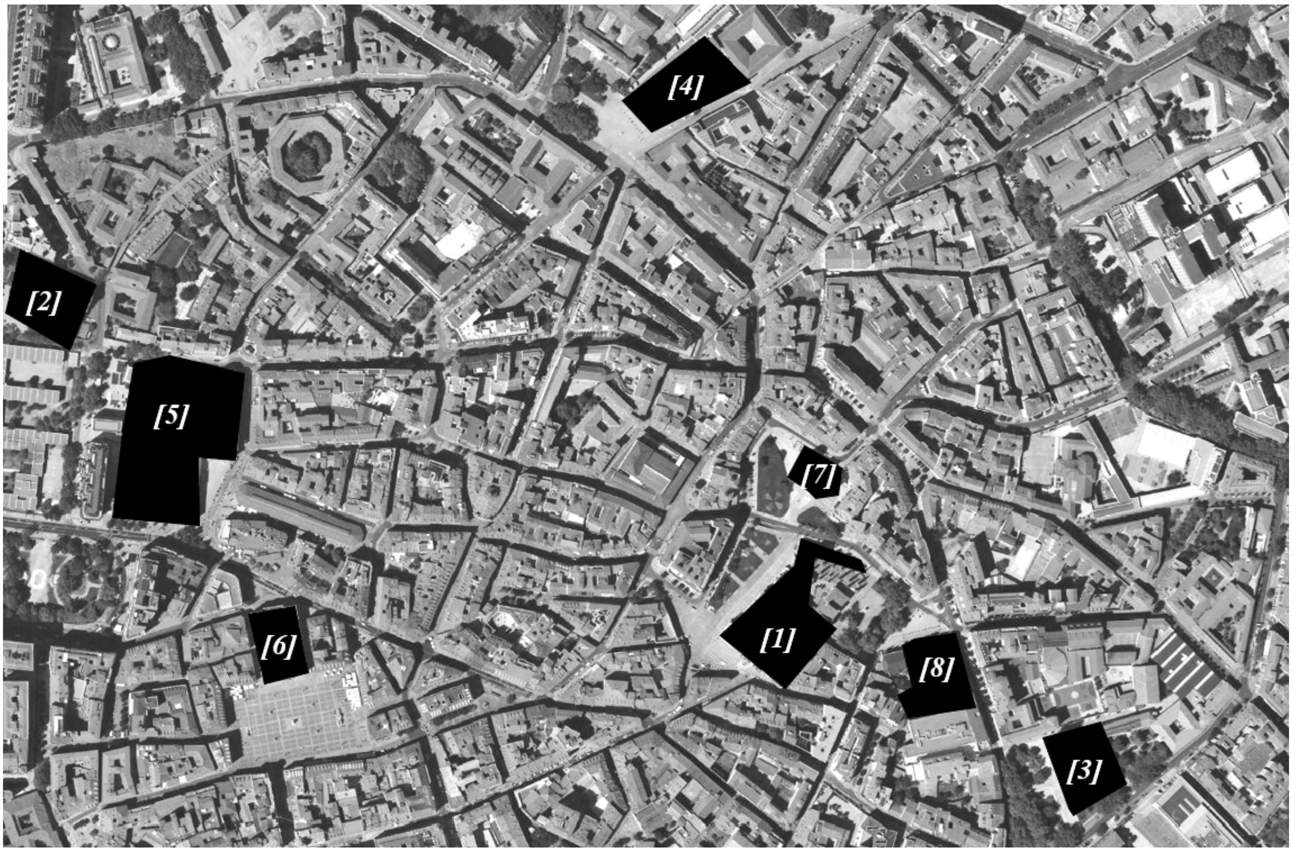
B) Hallar la media del equipo de las longitudes de suela y de tres pasos e indicar el integrante del equipo cuyo dado más se acerque a la media.

C) Indicar la persona o personas cuyo dato representa la mediana del equipo tanto en la longitud de la suela como la de tres pasos. ¿Cuánto medirán 31 pies de la persona cuyo valor es la mediana del equipo? ¿Cuánto medirán 23 pasos de la persona cuyo valor es la mediana del equipo?

D) Mediante el conteo de pasos y pies hallar las dimensiones del aula en el que nos encontramos. Comparar dicho resultado con las dimensiones medidas con cinta métrica. ¿Cuál es la proporción ente el largo y el ancho del aula? ¿Qué dimensiones debería tener el aula para tener proporción áurea?

[FICHA A.V]

Figura 59. *Selección de monumentos de Valladolid. Editado del Instituto Geográfico Nacional: http://www.ign.es/iberpix/visor Dominio público*



[1] Catedral de Nuestra Señora de la Asunción.

[2] Archivo Municipal de Valladolid.

[3] Palacio de Santa Cruz.

[4] Iglesia Conventual de San Pablo.

[5] Iglesia de San Benito el Real. Museo Patio Herreriano.

[6] Ayuntamiento de Valladolid. Casa Consistorial.

[7] Iglesia parroquial de Santa María de la Antigua.

[8] Fachada de la Universidad de Valladolid.

[ANEJO B] Materiales de apoyo Situación de Aprendizaje B

[FICHA B.I]

¿CUÁL ES EL VALOR EL NÚMERO DE ORO?

A) Ayudándote de tu calculadora, calcula, con 4 decimales, el valor del número de oro:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Respuesta:

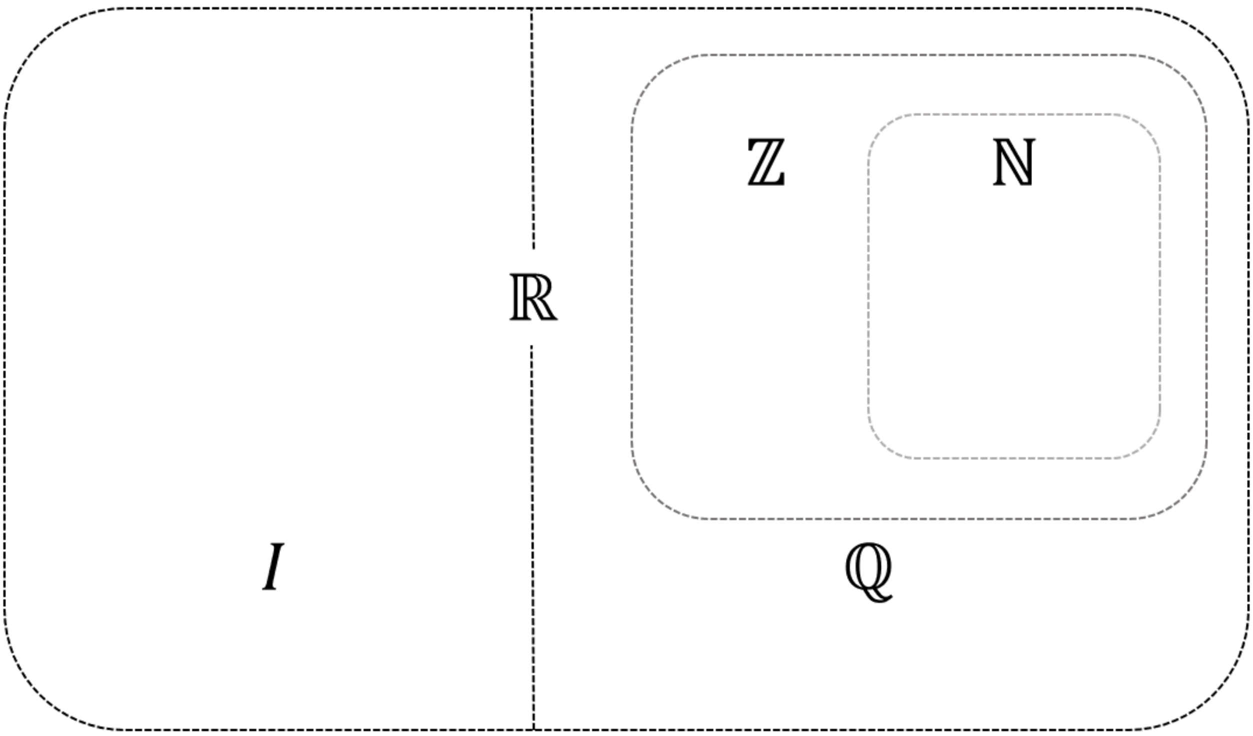
B) ¿A qué conjunto de números pertenece?

CLASIFICACIÓN DE NÚMEROS REALES

Clasificar los siguientes números reales en sus respectivos conjuntos:

$$\frac{2}{3} \;,\; \pi \;,\; \sqrt{5} \;,\; -7 \;,\; \phi \;,\; 139 \;,\; \frac{35}{2} \;,\; \sqrt{2} \;,\; -13{,}45 \;,\; 0{,}5 \;,\; -2.456$$

Figura 60. *Clasificación números reales. Elaboración propia.*

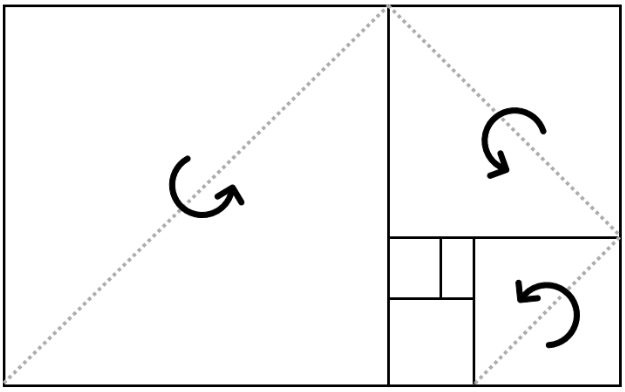


[FICHA B.II]

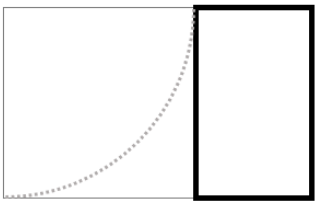
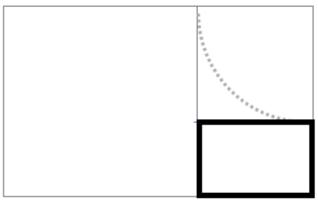
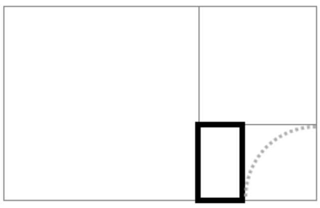
<u>*RECTÁNGULOS DE ORO*</u>

A) Pliega el rectángulo áureo según el siguiente dibujo:

Figura 61. *Secuencia de rectángulos áureos con papiroflexia. Elaboración propia*



B) Una vez plegado indica en la siguiente tabla las dimensiones de los distintos rectángulos que has obtenido, ¿se sigue manteniendo la proporción áurea en la sucesión de rectángulos?

Rectángulo	***Lado mayor (A)***	***Lado menor (B)***	***(A/B)***
			
			
			
			

[FICHA B.III]

EN BUSCA DEL NÚMERO DE ORO EN LA VIDA COTIDIANA

A) Coje una tarjeta, DNI o bono transporte y mide sus dimensiones, longitud y anchura en milímetros.

Figura 62. *Reservo de Documento Nacional de Identidad. Obtenido de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Spanish_ID_card_(back_side).webp Dominio público.*

B) Calcula la razón entre su longitud y su anchura.

Longitud (L)	***Anchura (A)***	***L/A***

C) ¿Las dimensiones de la tarjeta se encuentran en proporción áurea?, ¿Por qué?

D) Elige otros tres objetos presentes en tu casa e investiga las relaciones entre sus dimensiones:

Objeto	***Longitud (L)***	***Anchura (A)***	***L/A***

E) ¿Las dimensiones de los objetos que has medido guardan proporción áurea? En caso negativo investigar qué proporción pueden tener.

[FICHA B.IV]

EN BUSCA DEL NÚMERO DE ORO EN EL ARTE

A continuación, se muestran cuatro obras de arte con varias medidas marcadas:

Figura 63. *Fachada del Partenón. Editado de Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fachada_oeste_del_Parten%C3%B3n,_Acr%C3%B3polis,_Atenas,_Grecia,_2019_15.jpg Creative Commons 4.0*

Figura 64. *La Gioconda. Editado de Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joconde.gif Creative Commons 2.5*

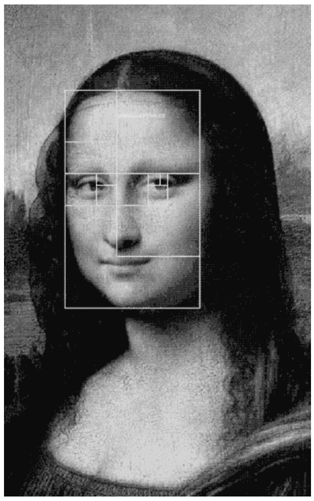


Figura 65. *Fachada Notre Dame. Editado de Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Notre-dame-de-paris-facade.jpg Creative Commons 3.0*

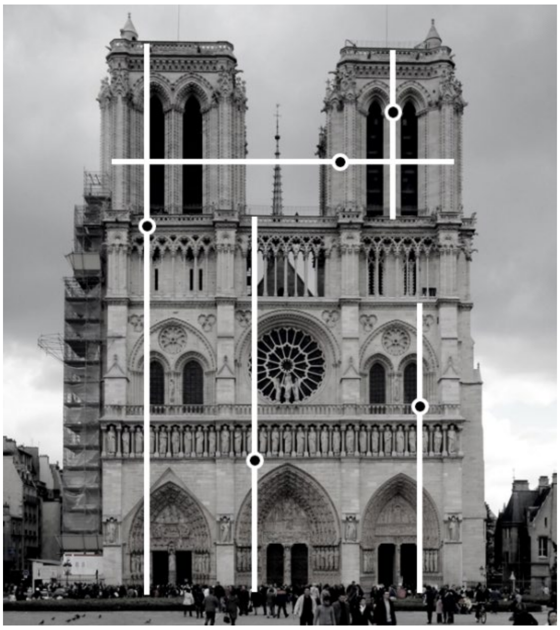
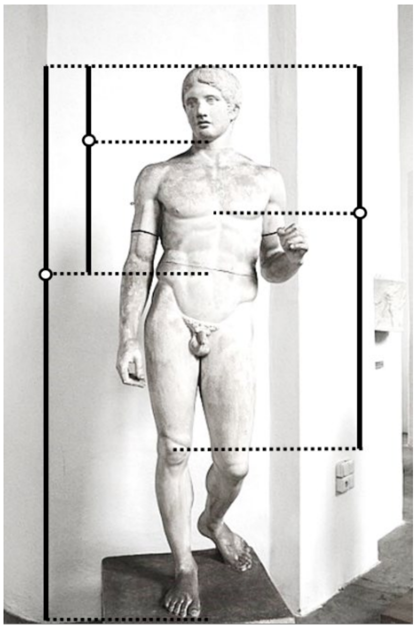


Figura 66. *Doríforo de Policleto. Editado de Wikimedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polykleitos,_Doryphoros,_440_BC,_Plaster_cast,_Hostinn%C3%A9,_188288.jpg Creative Commons 4.0*



Toma medidas en milímetro de los distintos elementos marcado en las imágenes y regístralos en la siguiente tabla. Seguidamente divide la medida mayor entre la menor y nota los valores obtenidos. ¿A qué número se aproximan los valores obtenidos?

[FICHA B.V]

Utiliza la siguiente tabla para encontrar las relaciones áureas:

Longitud mayor (A)	***Longitud menor (B)***	***A/B***

[FICHA B.VI]

<u>*PROPORCIÓN ÁUREA EN EL CUERPO HUMANO*</u>

Utiliza las siguientes imágenes para registrar las medidas tomadas:

Figura 67. *Hombre de Vitruvio. Leonardo da Vinci. Editado de Wikipedia:* https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Vitruvian_Man_by_Leonardo_da_Vinci.jpg *Creative Commons*

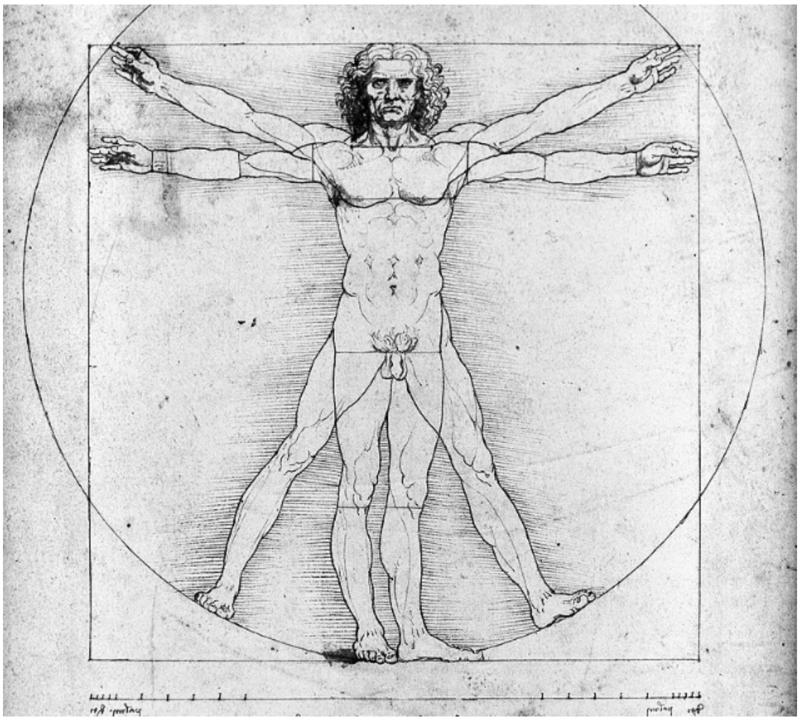
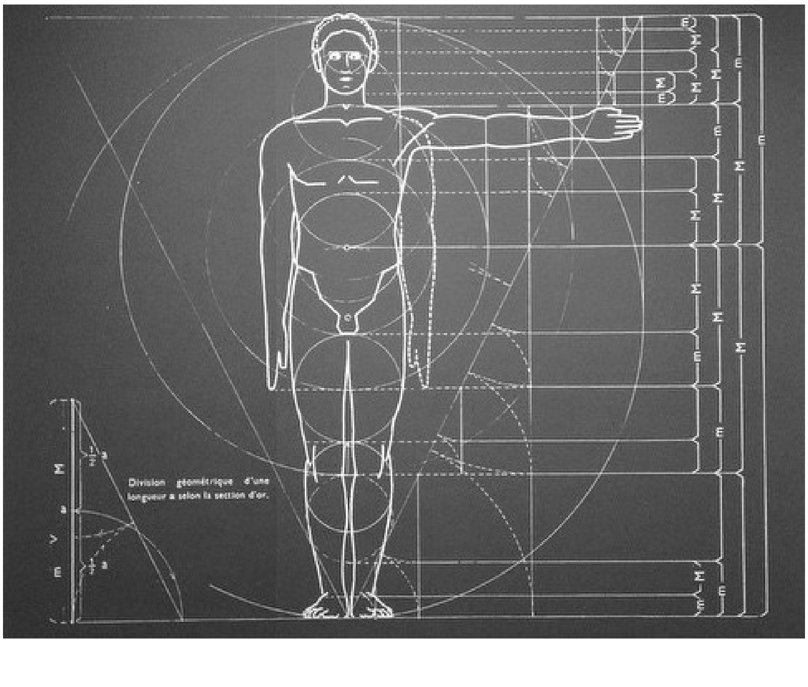


Figura 68. *Proporciones áureas propuestas por Neufert. Editado de Wikimedia:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Neufert_musealizado._(15556058364).jpg *Creative Commons 2.0*



[FICHA B.VII]

Registra en la siguiente tabla las relaciones áureas encontradas en el cuerpo humano:

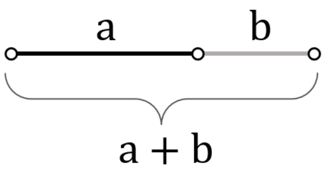
[ANEJO C] ***Materiales de apoyo Situación de Aprendizaje C***

[FICHA C.I]

¿CUÁL ES EL VALOR EL NÚMERO DE ORO?

Para hallar el valor numérico del número áureo partiremos de su definición:

Figura 69. *Proporción áurea. Elaboración propia.*



"El número áureo es el valor numérico de la proporción que guardan entre sí dos segmentos de recta a *y* b *(siendo* a *más largo que* b*), de tal manera que la longitud total (la suma de los dos segmentos* a *y* b*) es al segmento mayor* a *como el segmento* a *es al segmento menor* b*. Dicho de otra manera, el total es a la parte mayor como la parte mayor es a la parte pequeña."*

Expresar algebraicamente la definición de número áureo.		
Desarrollar dicha igualdad para la obtención de la ecuación áurea. Pista: $\frac{a}{b} = x$		
Resuelve la ecuación áurea para obtener sus raíces.		
La raíz positiva de la ecuación áurea es el número áureo.	*Raíz Positiva:* *Número de oro (Φ)*	*Raíz Negativa*

[FICHA C.II]

Accede a la siguiente actividad de Geogebra escaneando el siguiente código QR con tu teléfono (Álvarez García, 2023):

Figura 70. *Código QR para acceder a actividad de Geogebra. Elaboración propia*

https://www.geogebra.org
/m/UwCgHa2U

<u>*NÚMEROS METÁLICOS*</u>

La familia de los **números metálicos**, presentada por la matemática argentina Vera de Spinadel en 1994, está formada por las raíces positivas de las ecuaciones de la forma $x^2 = p\,x + q$, o su equivalente $x^2 - p\,x - p = 0$, donde p y q son números enteros positivos.

Algunos de estos números metálicos tienen nombre propio. El más famoso de todos ellos se obtiene cuando $p = 1$ y $q = 1$. En tal caso la ecuación que nos resulta es $x^2 - x - 1 = 0$, cuya raíz positiva es **el número de oro**: $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$

En la siguiente tabla puedes ver los nombres de algunos de los números metálicos:

p	***q***	***Nombre del número***
1	1	*Número de oro*
2	1	*Número de plata*
3	1	*Número de bronce*
1	2	*Número de cobre*
1	3	*Número de níquel*
2	2	*Número de platino*

<u>*PREGUNTAS*</u>

1. Observa la construcción. Fíjate que obtenemos en el eje horizontal el valor de un determinado número metálico a partir de la intersección de la recta que hemos dibujado y de la parábola. ¿Cuál es la ecuación de la parábola que aparece dibujada? ¿Y la de la recta?

¿Qué relación tienen esas gráficas con la ecuación que tratamos de resolver? ¿Por qué la intersección de la recta y la parábola nos permite calcular las raíces de la ecuación $x^2 - p\,x - q = 0$?

Respuesta:

2. Completa la siguiente tabla. Para ello resuelve la ecuación $x^2 - p\,x - q = 0$ para los valores de p y q que en cada caso corresponden y, a continuación, comprueba tus resultados con la aplicación:

p	***q***	***Símbolo***	***Nombre del número***	***Valor exacto***	***Valor aproximado***
1	1	Φ	*Número de oro*		
2	1	$\sigma_{2,1}$	*Número de plata*		
3	1	$\sigma_{3,1}$	*Número de bronce*		
1	2	$\sigma_{1,2}$	*Número de cobre*		
1	3	$\sigma_{1,3}$	*Número de níquel*		
2	2	$\sigma_{2,2}$	*Número de platino*		

3. ¿Cuál es la expresión general del número metálico de orden (p, q) que representamos como $\sigma_{p,q}$?

Respuesta:

4. ¿Podemos expresar siempre en forma decimal el valor exacto de un número metálico? ¿Por qué?

Respuesta:

5. ¿Qué relación debe existir entre p y q para que el número metálico $\sigma_{p,q}$ sea un número entero?

Respuesta:

6. Prueba que $\sigma_{4,4} = 2\,\sigma_{2,1}$

Respuesta:

7. Halla la relación existente entre el número de bronce y el de níquel.

Respuesta:

8. Prueba que: $\sigma_{4,1} = \Phi^3$

Respuesta:

[FICHA C.III]

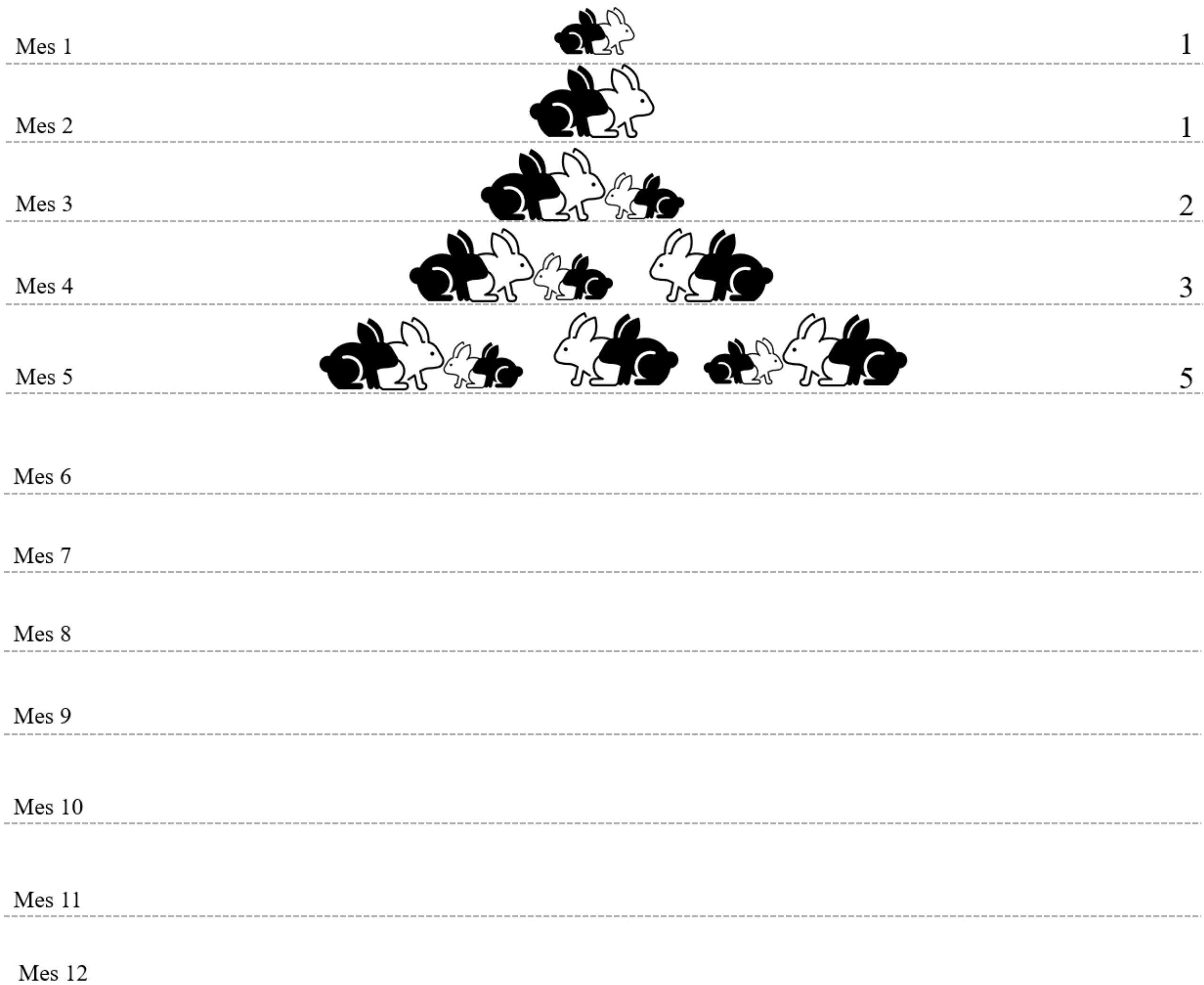
EL PROBLEMA DE LOS CONEJOS

"En un corral, se coloca una pareja de conejos, recién nacidos, para ver cuántos descendientes produce en el curso de un año, y suponiendo que cada mes a partir del segundo mes de su vida, cada pareja de conejos da origen a una nueva pareja"

Para solucionar este problema y saber la cantidad de conejos que habrá en el corral al cabo del año, Fibonacci utilizó las siguientes premisas:

- Un conejo recién nacido necesita que pase un mes para llegar a su madurez reproductiva y estar preparado para procrear.
- Una pareja (macho y hembra) de conejos maduros dan a luz una nueva pareja de conejos tras un mes de gestación.
- Durante dicho año no muere ningún conejo.

Figura 71. *Problema de los conejos. Elaboración propia.*



[FICHA C.IV]

[PREGUNTAS DEL PROFESOR]

1. ¿Existe alguna relación entre los resultados que se obtiene mes a mes?

Respuesta:

2. ¿Podéis establecer alguna relación entre cada número y el inmediatamente anterior?

Respuesta:

3. ¿Existe alguna relación entre cada miembro y los dos anteriores?

Respuesta:

4. ¿Qué sucede si sumamos los resultados de los dos meses anteriores?

Respuesta:

5. ¿Guarda alguna relación la suma de las parejas de conejos de los dos meses anteriores con el resultado de dicho mes?

Respuesta:

6. ¿Se cumple esta relación todos los meses? ¿En cuales no?

Respuesta:

7. De existir tal relación, ¿se podría encontrar algún mecanismo para hallar la cantidad de conejos mes a mes de una manera rápida?

Respuesta:

8. Explicad dicho mecanismo.

Respuesta:

9. ¿Cuántas parejas de conejos se obtendrían al acabar el año? ¿Y al año y medio?

Respuesta:

[FICHA C.V]

Efectúa los siguientes cocientes:

Nº de Fibonacci	$\boldsymbol{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$
1	
1	$\frac{1}{1} =$
2	$\frac{2}{1} =$
3	$\frac{3}{2} =$
5	$-$
8	$-$
13	$-$
21	$-$
34	$-$
55	$-$
89	$-$
144	$-$

[PREGUNTAS]

1. ¿Qué puedes observar conforme van siendo mayores los valores?

Respuesta:

2. ¿Cuánto mayores son los valores, el cociente tiende a un determinado valor? ¿Qué valor?

Respuesta:

3. ¿Qué conclusión puedes sacar?

Respuesta:

[FICHA C.VI]

Tomemos ahora la secuencia 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99… Se trata de una sucesión de Fibonacci generalizada donde ¿puedes encontrar el mecanismo para obtener nuevos términos? Si procedemos como en la actividad anterior y realizamos las sucesivas divisiones (Señas Pariente, 2023):

Número de Fibonacci	$\boldsymbol{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$
1	
1	$\frac{1}{1} =$
3	$\frac{2}{1} =$
7	$\frac{3}{2} =$
17	$\frac{}{}$
41	$\frac{}{}$
99	$\frac{}{}$
	$\frac{}{}$
	$\frac{}{}$
	$\frac{}{}$

En este caso, los cocientes se aproximan al valor 2,414…, que es el número de plata.

Análogamente se podrían obtener otros números metálicos modificando las condiciones de la sucesión. Por ejemplo, si tomásemos cada término como el “triple del anterior más el anterior de éste” y tomásemos los cocientes respectivos, se obtendría el número de bronce 3,3027…

[FICHA C.VII]

COMPETICIÓN: RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES METÁLICAS

Resolver en equipos de 5 o 6 integrantes las siguientes ecuaciones metálicas y rellenar la siguiente tabla:

Para ello podréis hacer uso de la información de la información de *la ficha C.II.*

Nombre del número	***Ecuación***	***p***	***q***	***Solución positiva***	***Valor aproximado***
	$x^2 - x - 1 = 0$				
	$x^2 - 2x - 1 = 0$				
	$x^2 - 3x - 1 = 0$				
	$x^2 - x - 2 = 0$				
	$x^2 - x - 3 = 0$				
	$x^2 - 2x - 2 = 0$				

NORMAS

- *Por cada ecuación metálica correctamente resuelta y fila de la tabla correctamente rellana que tengan todos los integrantes del grupo realizado en su cuaderno el equipo obtiene entre 3 y 5 puntos.*
- *Conforme van teniendo realizados los ejercicios se pide al integrante de un grupo que salga a la pizarra a resolverlo para toda la clase, para que el ejercicio resuelto quede a la vista de toda la clase. Si el alumno realiza el ejercicio correctamente el equipo gana dos 2 extra.*
- *Si se percibe que algún alumno con dificultades se ha limitado a copiar el ejercicio de los compañeros de equipo de manera mecánica sin comprenderlo se pedirá a los compañeros del equipo que se lo expliquen. Para ello se les dejará unos minutos para las explicaciones entre compañeros. Pasado ese tiempo me volvía a pasar por el grupo para que el alumno en cuestión me explicase a mi el ejercicio. Si el alumno había entendido como realizarlo y lo había entendido el equipo recibía 1 o 2 puntos extra. Esta práctica resulto muy efectiva y favoreció enormemente la colaboración entre los compañeros.*
- *Se les avisará que el profesor solamente se acercará a corregir los ejercicios en los grupos que estén todos los integrantes en silencio con la mano levantada.*
- *Es preferible que los ejercicios estén bien hechos a que se tarde poco en hacerlos, aunque se mirará también la limpieza y el tiempo.*
- *En caso de mal comportamiento se puede bajar la puntuación.*

[Bibliografía]

Álvarez García, J. (mayo de 2023). *Números metálicos*. Obtenido de Geogebra: http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/aritmetica/irracionales/metalicos2/actividad.html

Barrios Calmaestra, L. (Abril de 2021). *blogsaverroes.juntadeandalucia*. Obtenido de https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/recursosdematematicas/el-pentagono-regular-y-el-numero-de-oro/#:~:text=En%20cualquier%20pent%C3%A1gono%20regular%2C%20el,es%20el%20n%C3%BAmero%20de%20oro.

Bonell, C. (1999). *La divina Proporción. La formas geométricas.* Universitat Politècnica de Catalunya.

Bragado Rodríguez, J. (2018). *La proporción áurea.* Obtenido de juanbragado: http://www.juanbragado.es/ficheros/Mis%20trabajos%20para%20la%20web/El%20numero%20de%20oro.pdf

Consejería de Educación. (2022). *DECRETO 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.* BOCYL.

El Canal de Korah. (2023). *La proporción áurea y la máscara que te dice si tu cara es guapa*. Obtenido de Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=5FVrmnR1LV0

Gutiérrez Rodríguez, Á. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, M. De la Fuente, & F. Ruiz, *Geometría para el siglo XXI* (págs. pp. 13-58). Badajoz, España: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Hey Jaime. (mayo de 2023). *Proporción áurea y cómo se aplica en diseño gráfico*. Obtenido de Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=gNmjsCqCfwY&t=53s

Jeanneret, C.-É. (1923). *Vers une architecture.* París: G. Crès et Cie.

La Proporicón Áurea. (s.f.). Obtenido de https://www.proporcionaurea.com/

Luque Ordóñez, J. (2022). El número áureo y la Sucesión de Fibonacci. *Revista Digital de ACTA*.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.* BOE.

Mota Villegas, D., & Valles Pereira, R. (2020). El número áureo como elemento motivador hacia el estudio de las matemáticas. *INNOVA*, 157-173.

Reyes Iglesias, E., & Fernández Benito, I. (2015). *Pentágonos. Construcciones. Mosaicos. Geometría sagrada.* Valladolid: Universidad de Valladolid.

Reyes Iglesias, M., & Fernández Benito, I. (2018). *Periplo por la geometría de Valladolid.* Valladolid: Servicio Municipal de Educación del Ayuntameinto de Valladolid.

Rodrigo , J., Hernández, R., & Encabo, J. (febrero de 2022). *Matemáticas 2º de ESO. Capítulo 8: Magnitudes proporcionales. Porcentajes.* Obtenido de apuntesmarea verde: https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/2ESO/2_08_Proporciones.pdf

Rodrigo, J., Hernández, R., & Encabo, J. (febrero de 2022). *Matemáticas 2º de ESO. Capítulo 6: Longitudes y áreas.* Obtenido de apuntesmareaverde.org.es: https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/2ESO/2_06_Longitudes.pdf

Sáenz Cabezón, E. (mayo de 2023). *La sucesión de Fibonacci y la razón áurea*. Obtenido de Derivando. Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=yDyMSliKsxI&t=238s

Señas Pariente, M. (mayo de 2023). *Los números metálicos.* Obtenido de Estalmat: https://www.estalmat.org/archivos/LosNumerosMetalicos.pdf

Solà-Soler, J. (2012). *Phi en el cuerpo humano*. Obtenido de sacred-geometry: https://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/phi-en-el-cuerpo-humano

Valderas Braojos, P. (mayo de 2023). *Papiroflexia matemática: construcción del rectángulo áureo a partir de un folio*. Obtenido de Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=UG6OSkD16js

Vargas Contreras, M. (2003). Sucesión de Fibonacci y el número áureo. *Revista del Instituto de Matemática y Física*.

Vela, M. (junio de 2016). *La sección áurea en la música anterior a 1900*. Obtenido de unir.net: https://www.unir.net/humanidades/revista/la-seccion-aurea-en-la-musica-anterior-a-1900/#:~:text=La%20proporci%C3%B3n%20%C3%A1urea%20fue%20uno,intersecci%C3%B3n%20de%20los%20dos%20segmentos.

Zeising, A. (1854). *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers.* Leipzig.