



**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

**Dpto. Matemática Aplicada**

# **Propuesta didáctica para el estudio de las transformaciones geométricas del plano en Secundaria**

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.**

**Alumno: Jennifer Da Costa Cortés**

**Tutor: M.<sup>a</sup> Encarnación Reyes Iglesias**

**Valladolid, junio 2023**

## **RESUMEN**

En el currículo de Educación Secundaria Obligatoria se encuentra el tema de transformaciones geométricas que incluye giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas tecnológicas o manipulativas y considera las relaciones geométricas en entornos matemáticos y no matemáticos como el arte, la naturaleza o la arquitectura. En este trabajo de fin de máster se desarrollará una propuesta didáctica en la que, mediante diversas representaciones de estas transformaciones geométricas se podrá comprobar su utilización en la vida diaria y así, fomentar el acercamiento de los estudiantes a estos conceptos.

## **ABSTRACT**

The Compulsory Secondary Education curriculum includes the subject of geometric transformations, considering rotations, translations and symmetries in diverse situations using technological or manipulative tools, as well as geometric relationships in mathematical and non-mathematical contexts such as nature, art or architecture.

In this master's thesis, a didactic proposal will be developed in which, by means of different representations of these geometric transformations, we can check their use in daily life and thus encourage the approach of students to these concepts.

## ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
<b>2. MARCO NORMATIVO</b> .....	<b>2</b>
2.1. Objetivos generales de etapa .....	2
2.2. Objetivos didácticos del área de matemáticas de 3º de ESO.....	3
2.3. Contenidos didácticos de la situación de aprendizaje: Transformaciones geométricas en el plano..	8
<b>3. ANÁLISIS DIDÁCTICO</b> .....	<b>10</b>
3.1. Análisis de contenido.....	10
3.1.1. Movimientos del plano .....	10
3.1.2. Descripción de los movimientos del plano.....	10
3.1.3. Grupo de simetría de una figura plana.....	14
3.1.4. Teoría de mosaicos .....	17
3.1.5. Arabescos en la Alhambra de Granada.....	19
3.1.6. Mosaicos de Escher .....	23
3.2. Análisis cognitivo.....	24
3.2.1. Expectativas de aprendizaje.....	25
3.2.2. Limitaciones y errores en el aprendizaje .....	26
3.2.3. Oportunidades de aprendizaje .....	28
3.3. Análisis de instrucción.....	32
3.3.1. Contenido matemático.....	33
3.3.2. Actividades contextualizadas y cercanas a la vida real .....	34
3.3.3. Demanda cognitiva.....	34
3.4. Análisis libro de texto.....	38
3.4.1. Contenidos y Adecuación de Objetivos.....	41
3.4.1. Conclusiones.....	41
<b>4. PROPUESTA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE</b> .....	<b>42</b>
4.1. Contextualización .....	43
4.2. Fundamentación curricular .....	43

4.3.	Metodología.....	46
4.4.	Planificación de actividades .....	52
4.5.	Atención a las diferencias individuales .....	60
4.6.	Proceso de evaluación .....	60
4.7.	Valoración de la situación de aprendizaje .....	66
<b>5.</b>	<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>73</b>
5.1.	Aportación del presente Trabajo Fin de Máster a la Enseñanza.....	73
5.2.	Aportación de las asignaturas del Máster a la consecución del presente Trabajo Fin de Máster ....	74
<b>6.</b>	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>76</b>
<b>ANEXOS .....</b>		<b>78</b>
	Anexo I. Rúbrica autoevaluación .....	78
	Anexo II. Rúbrica para evaluar a mis compañeros (Coevaluación) .....	79
	Anexo III. Rúbrica para evaluar la resolución de problemas .....	80
	Anexo IV. Rúbrica para evaluar la exposición oral.....	82
	Anexo V. Rúbrica para evaluar la presentación de la investigación .....	83

## ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1. Ejemplo Traslación Hexágono (AulaFacil, 2013) .....</i>	<i>11</i>
<i>Figura 2. Ejemplo de Traslación en un Friso (Makarov, 2021). Modificada (Da Costa Cortés, 2023) .....</i>	<i>12</i>
<i>Figura 3. Ejemplo de Rotación Triángulo <math>G_{-90^\circ}</math> (AulaFacil, 2013).....</i>	<i>12</i>
<i>Figura 4. Ejemplo Laberinto Alcázar de Segovia <math>G_{-45^\circ}</math> (García, 2015). Modificada (Da Costa Cortés, 2023) .....</i>	<i>13</i>
<i>Figura 5. Ejemplo de Simetría Axial de un Triángulo (AulaFacil, 2013).....</i>	<i>13</i>
<i>Figura 6. A la Izquierda Ermita de Nuestra Señora de la Anunciada. Uruña (Valladolid). Siglo XI (Simetría, 2022) y a la Derecha Mariposa Monarca con Simetría Axial casi perfecta (Mariposa naranja en flores de cosmos Foto de stock 350754023, s.f.). Modificada (Da Costa Cortés, 2023).....</i>	<i>13</i>
<i>Figura 7. Ejemplo de Simetría Central de un Triángulo.....</i>	<i>14</i>
<i>Figura 8. Algunos Naipes presentan Simetría Central. Se ven igual desde arriba y desde abajo) (Da Costa Cortés, 2023).....</i>	<i>14</i>
<i>Figura 9. Grupo de Simetría Triángulo Equilátero. ....</i>	<i>15</i>
<i>Figura 10. Grupo de Simetría Cuadrado. ....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 11. En notación Schläfli serían <math>3^6</math> (6 triángulos por vértice), <math>4^4</math>(4 cuadrados por vértice) y <math>6^3</math> (3 hexágonos por vértice), (Blasco, 2021).....</i>	<i>18</i>
<i>Figura 12. Los ocho Mosaicos Semirregulares posibles (Blasco, 2021).....</i>	<i>19</i>
<i>Figura 13. Polígonos Nazaríes (Fernández Benito &amp; Reyes Iglesias, 2003).....</i>	<i>20</i>
<i>Figura 14. Cómo construir el Clavo Nazarí (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023).....</i>	<i>20</i>
<i>Figura 15. Recubrimiento del Plano mediante Traslaciones del Clavo Nazarí (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023).....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 16. Como construir el Hueso Nazarí y recubrir el Plano mediante Traslaciones (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023).....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 17. Como construir la Pajarita Nazarí y recubrir el Plano mediante Traslaciones (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023).....</i>	<i>22</i>
<i>Figura 18. Como construir el Pétalo Nazarí y recubrir el Plano mediante Traslaciones (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023).....</i>	<i>22</i>
<i>Figura 19. Grabado titulado «Reptiles» (1943), a partir de un Hexágono y Recubrimiento del Plano mediante Traslaciones (Blasco, 2021).....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 20. Recubrimiento del Plano mediante Traslaciones del Grabado Titulado «Chinese boy» (1936), de Escher a partir de un Rombo (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023).....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 21. Mapa Conceptual. Transformaciones Geométricas (Colera Jiménez, Gaztelu Alberto, &amp; et al, 2022). Modificada (Da Costa Cortés, 2023).....</i>	<i>24</i>
<i>Figura 22. Chibi del Personaje Luffy de la Serie de Animación One Piece (KindPNG.com, s.f.) Modificada (Da Costa Cortés, 2023).....</i>	<i>30</i>

<i>Figura 23. Mosaico Alfombra de Vinilo (Alfombra de vinilo cocina patrón flores, 2022). Modificada (Da Costa Cortés, 2023)</i> .....	32
<i>Figura 24. Logotipo de la Franquicia de Alimentación McDonald's (1000marcas, 2023)</i> .....	34
<i>Figura 25. Estrella de mar (Fernández Roldán, 2019), llanta coche y rosetón (Da Costa Cortés, 2023). ....</i>	56
<i>Figura 26. Pikachu personaje de la Franquicia Pokemon (140 Dibujos de Pikachu fáciles de hacer para COLOREAR , 2019). Modificada (Da Costa Cortés, 2023)</i> .....	58

## ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1. Composición de movimientos de un Triángulo Equilátero (Calcerrada Zamora, 2010). Modificada (Da Costa Cortés, 2023).....</i>	<i>16</i>
<i>Tabla 2. Cálculo del Ángulo Interior de Polígonos Regulares (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023).....</i>	<i>17</i>
<i>Tabla 3. Expectativas de Aprendizaje. ....</i>	<i>25</i>
<i>Tabla 4. Relación Dificultades y Errores con los Objetivos de Aprendizaje. ....</i>	<i>28</i>
<i>Tabla 5. Asociación Competencia Específica con Actividades, Criterios de Evaluación y Descriptores Operativos. ....</i>	<i>45</i>
<i>Tabla 6. Descriptores Operativos con las Competencias Específica de la Materia (BOCYL-D-30092022-3 Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León., 2022).....</i>	<i>62</i>
<i>Tabla 7. Calificación Actividades .....</i>	<i>64</i>
<i>Tabla 8. Calificación Criterios de Evaluación Ponderados .....</i>	<i>65</i>

## 1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo se concibió como una sugerencia pedagógica para la enseñanza de las “Transformaciones geométricas del plano”, que forma parte de la asignatura “Matemáticas”, del curso 3º de ESO.

La razón de ser de la elección de esta propuesta fue una inquietud personal por comprender, de manera más profunda, algunas de las tareas que realizan los docentes en la enseñanza: detallar el aprendizaje, seleccionar materiales y recursos adicionales, desarrollar métodos de enseñanza de acuerdo con las necesidades de cada individuo, fomentar actividades motivadoras y, en consecuencia, permitir que los estudiantes aprendan más significativamente.

Mi creencia, al igual que mi objetivo personal, es que el aprendizaje se mejora a través de la variabilidad perceptiva y de la contextualización de las situaciones en el mundo real. Se pretende acercar a los estudiantes a través de los diferentes usos que se han ido manifestando en campos como el arte, la naturaleza o la arquitectura, a los temas de "*Transformaciones Geométricas en el Plano*".

En primer lugar, con la nueva legislación actual LOMLOE desaparecen las Unidades Didácticas y son sustituidas por Situaciones de Aprendizaje, tanto para Educación Secundaria como para Bachillerato, donde se pretende desarrollar competencias a través del aprendizaje de los contenidos y estas competencias serán las que deben evaluarse.

Una vez identificada la normativa a cumplir, se profundiza en el análisis pedagógico de la enseñanza de las "*Transformaciones Geométricas en el Plano*", examinando los contenidos matemáticos y su aplicación en diferentes áreas, así como las habilidades cognitivas de los estudiantes tal como se manifiestan en el currículo de Educación Secundaria.

Lo que se persigue es motivar y acercar estos conceptos a través de la Situación de Aprendizaje para demostrar a los alumnos la utilidad del estudio de las "*Transformaciones Geométricas en el Plano*" a través de ejemplos reales del arte, la arquitectura, la naturaleza, la industria o la publicidad.

Como conclusión, se establece en qué grado este Máster cumple con el objetivo de preparar a los futuros docentes en el ámbito de la educación y si se llegan a desarrollar las competencias que deberían adquirirse.



## 2. MARCO NORMATIVO

Con el nuevo **Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo** (BOE-A-2022-4975 Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, 2022), por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria y el **Decreto 39/2022, de 29 de septiembre** (BOCYL-D-30092022-3 Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León., 2022) que concreta su regulación en la Comunidad de Castilla y León, se va a redactar la propuesta de una Situación de Aprendizaje.

En esta Situación de Aprendizaje se trabajará los contenidos de Sentido Espacial, movimientos y transformaciones en el plano, que se imparte en la asignatura de matemáticas del curso 3º de ESO.

A continuación, se detallan los objetivos y contenidos mínimos en la etapa de la ESO.

### 2.1. Objetivos generales de etapa

Según el **Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo** se pretende que los estudiantes desarrollen capacidades que les permitan:

- a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a las demás personas, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.
- d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con las demás personas, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Desarrollar las competencias tecnológicas básicas y avanzar en una reflexión ética sobre su funcionamiento y utilización.
- f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

- g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.
- h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la comunidad autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.
- i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.
- j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de las demás personas, así como el patrimonio artístico y cultural.
- k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado, la empatía y el respeto hacia los seres vivos, especialmente los animales, y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.
- l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León son ampliados en su **Decreto 39/2022, de 29 de septiembre**:

- a) Conocer, analizar y valorar los aspectos de la cultura, tradiciones y valores de la sociedad de Castilla y León.
- b) Reconocer el patrimonio natural de la Comunidad de Castilla y León como fuente de riqueza y oportunidad de desarrollo para el medio rural, protegiéndolo, y apreciando su valor y diversidad.
- c) Reconocer y valorar el desarrollo de la cultura científica en la Comunidad de Castilla y León indagando sobre los avances en matemáticas, ciencia, ingeniería y tecnología y su valor en la transformación y mejora de su sociedad, de manera que fomente la iniciativa en investigaciones, responsabilidad, cuidado y respeto por el entorno.

## **2.2. Objetivos didácticos del área de matemáticas de 3º de ESO**

Llamamos objetivos didácticos a los logros que un alumno tiene que alcanzar al finalizar la etapa de la ESO, con la LOMLOE, estos están vinculados a la adquisición de las competencias clave y las competencias específicas.

La LOMLOE sustituye las competencias básicas de la LOMCE por competencias clave que son:

- a) Comunicación lingüística (**CCL**)
- b) Plurilingüe (**CP**)
- c) Matemática, ciencia y tecnología (**STEM**)
- d) Digital (**CD**)
- e) Personal, social y de aprender a aprender (**CPSAA**)
- f) Ciudadana (**CC**)
- g) Emprendedora (**CE**)
- h) Conciencia y expresión cultural (**CCEC**)

Cada competencia está dividida en conocimientos, destrezas y actitudes que debe desarrollar cada alumno en las distintas materias.

Cuando hablamos de conocimientos nos referimos a teorías, conceptos, hipótesis, hechos e ideas que apoyan la comprensión de un tema, mientras que cuando hablamos de destrezas se alude a las habilidades para usar los conocimientos previos con el fin de obtener unos resultados. Finalmente, al hablar de actitudes nos referimos a la predisposición y motivación para trabajar con conceptos, personas o situaciones.

Cada materia aporta un valor a cada competencia clave, es decir, ninguna materia es específica de una competencia clave. Por ello, cada competencia clave está dividida en distintos descriptores operativos, estos enlazan las competencias clave con las competencias específicas.

En concreto, los descriptores operativos de la competencia matemática y competencia en ciencia y tecnología e ingeniería (**STEM**) son los siguientes:

- a) **STEM1.** Utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y emplea diferentes estrategias para resolver problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario.
- b) **STEM2.** Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar los fenómenos que ocurren a su alrededor, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, planteándose preguntas y comprobando hipótesis mediante la experimentación y la indagación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y las limitaciones de la ciencia.
- c) **STEM3.** Plantea y desarrolla proyectos diseñando, fabricando y evaluando diferentes prototipos o modelos para generar o utilizar productos que den solución a una necesidad o problema de forma creativa y en equipo, procurando la participación de todo el grupo, resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir, adaptándose ante la incertidumbre y valorando la importancia de la sostenibilidad.

- d) **STEM4**. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de procesos, razonamientos, demostraciones, métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y precisa y en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos...), aprovechando de forma crítica la cultura digital e incluyendo el lenguaje matemático-formal con ética y responsabilidad, para compartir y construir nuevos conocimientos.
- e) **STEM5**. Emprende acciones fundamentadas científicamente para promover la salud física, mental y social, y preservar el medio ambiente y los seres vivos; y aplica principios de ética y seguridad en la realización de proyectos para transformar su entorno próximo de forma sostenible, valorando su impacto global y practicando el consumo responsable.

Como podemos apreciar, estos descriptores son más concretos y fáciles de evaluar.

En cuanto a las competencias específicas, estas se conseguirán a través de las actividades o situaciones de aprendizaje, es decir, con la práctica de las competencias clave y su relación con los descriptores operativos para cada materia.

Los criterios de evaluación que debemos tener en cuenta se dividen en cinco bloques que para 3º de ESO son:

### **Bloque 1. Resolución de problemas:**

#### **Competencia específica 1**

- 1.1. Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana, organizando los datos dados y/o localizando y seleccionando información, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. (CCL1, CCL2, CCL3, **STEM1, STEM2, STEM3, STEM4**)
- 1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. (**STEM1, STEM2, STEM3, STEM4**, CPSAA5, CE3)
- 1.3. Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias. (**STEM1, STEM2, STEM3**, CD2, CE3, CCEC4)

#### **Competencia específica 2**

- 2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos necesarios. (**STEM1, STEM2**)
- 2.2 Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.). (**STEM1, STEM4**, CD2, CPSAA4, CC3, CE3)

## **Bloque 2. Razonamiento y prueba:**

### **Competencia específica 3**

- 3.1 Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones. (CCL1, **STEM1**, **STEM2**, CD1, CD2)
- 3.2 Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema. (**STEM2**)
- 3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas analizando el resultado obtenido. (**STEM1**, CD2)

### **Competencia específica 4**

- 4.1 Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional. (**STEM1**, **STEM2**, CD2, CD3)
- 4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando y modificando algoritmos. (**STEM1**, **STEM3**, CD2, CD3)

## **Bloque 3. Conexiones:**

### **Competencia específica 5**

- 5.1 Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente. (**STEM1**, CD2, CD3)
- 5.2 Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas. (**STEM1**, CD2, CCEC1)

### **Competencia específica 6**

- 6.1 Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir. (**STEM1**, **STEM2**, CD5)
- 6.2 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados. (**STEM2**, CD3, CE3)
- 6.3 Reconocer y saber expresar la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual. (**STEM2**, **STEM5**, CE2, CCEC1)

#### **Bloque 4. Comunicación y representación:**

##### **Competencia específica 7**

- 7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información. (**STEM3**, CD1, CD2)
- 7.2 Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada. (STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4)

##### **Competencia específica 8**

- 8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones. (CCL1, CP1, **STEM2**, **STEM4**, CD2)
- 8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor. (CCL1, CCL3, CP1, **STEM2**, **STEM4**)

#### **Bloque 5. Destrezas socioafectivas**

##### **Competencia específica 9**

- 9.1 Gestionar las emociones propias y reconocer las ajenas, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. (**STEM5**, CPSAA1, CE2, CE3)
- 9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas. (CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5)

##### **Competencia específica 10**

- 10.1 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y juicios informados. (CCL5, CP3, **STEM3**, CPSAA1, CC2, CC3)
- 10.2 Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo. (CP3, **STEM3**, CPSAA3)

### 2.3. Contenidos didácticos de la situación de aprendizaje: Transformaciones geométricas en el plano

El currículo que aparece en el BOCYL (**Decreto 39/2022, de 29 de septiembre**), no presenta los contenidos vinculados directamente con los criterios de evaluación, sino que son las competencias específicas las que se evaluarán a través de la puesta en acción de los contenidos en las distintas situaciones de aprendizaje.

Estos contenidos se han dividido en seis bloques, llamados sentidos:

- a) El **sentido numérico** se refiere a la comprensión sobre los números y las operaciones y a la capacidad para utilizarlos de manera flexible.
- b) El **sentido espacial** se caracteriza por la habilidad para identificar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, establecer relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos.
- c) El **sentido algebraico** conlleva explorar y reconocer patrones y funciones, establecer generalidades a partir de casos particulares formalizándolas en el lenguaje simbólico apropiado.
- d) El **sentido estocástico** aborda el análisis, uso e interpretación de datos para elaborar argumentos convincentes y decisiones informadas.
- e) El **sentido socioafectivo** conlleva identificar y gestionar las emociones, afrontar los desafíos, mantener la motivación y la perseverancia y desarrollar el autoconcepto y el sentido de la identidad en el aprendizaje de las matemáticas.
- f) El **sentido de la medida** supone la comprensión y comparación de cualidades medibles, la adquisición de técnicas de medición y de estrategias de estimación de medida en objetos del mundo real, así como el uso adecuado de las unidades.

En nuestro caso, para el bloque geometría que vamos a tratar, trabajaremos los siguientes contenidos:

#### **b. Sentido espacial**

##### 2. Movimientos y transformaciones

- Elementos básicos de las transformaciones: vectores, rectas, puntos y ángulos de giro.
- Transformaciones elementales como giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas tecnológicas o manipulativas.

##### 3. Visualización, razonamiento y modelización geométrica

- Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia, vida diaria...).

#### **e. Sentido socioafectivo**

##### 1. Creencias, actitudes y emociones

- Esfuerzo y motivación: reconocimiento de su importancia en el aprendizaje de las matemáticas.

- Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación.
  - Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.
  - Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.
2. Trabajo en equipo y toma de decisiones
    - Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.
    - Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.
  3. Inclusión, respeto y diversidad
    - Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.
    - La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...).

Estos están estrechamente ligados a los contenidos previos vistos en el segundo curso de la ESO que son:

### **c. Sentido espacial**

1. Figuras geométricas de tres dimensiones
  - Figuras geométricas tridimensionales: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características.
  - Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras tridimensionales: identificación y aplicación.
  - Construcción de figuras geométricas tridimensionales con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada ...).
2. Localización y sistemas de representación
  - Relaciones espaciales: localización y descripción mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
  - Visualización, razonamiento y modelización geométrica.
  - Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas.



### 3. ANÁLISIS DIDÁCTICO

En este trabajo se detalla una propuesta didáctica para la enseñanza de las “*Transformaciones Geométricas del Plano*”, en particular los movimientos, haciendo hincapié en aquellos que incluye el currículo de Secundaria. Se pretende alcanzar una mejora significativa en el aprendizaje de las transformaciones geométricas para lo cual desarrollaremos un análisis del contenido a impartir, un análisis cognitivo y un análisis del tipo de actividades que se van a plantear para mejorar la actitud hacia los temas planteados a través del uso de elementos de la vida cotidiana.

#### 3.1. Análisis de contenido

A continuación, se definirá el grupo de simetría de una figura plana, estableciendo como modelo la tabla del grupo de simetría. Se finalizará con una breve introducción a los mosaicos regulares, semirregulares y *por deformación*, aportando algunos modelos geométricos de las losetas generadoras de estos últimos.

##### 3.1.1. Movimientos del plano

En el plano afín euclídeo  $\mathbb{R}^2$ , un movimiento  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una transformación del plano en sí mismo que se caracteriza por mantener la distancia entre sus puntos, es decir:

$$d[f(A), f(B)] = d(A, B), \text{ para todos } A, B \in \mathbb{R}^2 \text{ siendo } d \text{ la distancia euclídea.}$$

$$d(A, B) = \text{medida del segmento } AB$$

Los movimientos en el plano  $\mathbb{R}^2$  son por tanto isometrías (conservan distancias) del plano en sí mismo; la palabra isometría proviene del griego y significa “igual medida”.

Algunos de los movimientos del plano son las traslaciones, los giros y las simetrías axiales. Estos tipos de movimientos son los que recogen los currículos de Secundaria.

##### 3.1.2. Descripción de los movimientos del plano

Denotaremos por  $GM(\mathbb{R}^2)$  el conjunto de movimientos del plano  $\mathbb{R}^2$ , que con la composición de aplicaciones tiene estructura de Grupo.

Diremos que un punto  $A$  del plano es fijo por un movimiento  $f$  si  $f(A)=A$ . El conjunto de los puntos fijos por  $f$ , es una variedad afín y la denotaremos por  $F(f)$ .

Para describir todos los movimientos del plano, tenemos en cuenta que  $F(f)$  puede ser todo el plano  $\mathbb{R}^2$ , una recta, un punto o el conjunto vacío.

Así, la transformación identidad deja todos los puntos sin variación, por lo que es el elemento neutro del grupo, y se la denota como Id,  $\text{Id}(A) = A$ , para todo punto A de  $\mathbb{R}^2$ . Una simetría de eje e, tiene una recta de puntos fijos, precisamente el eje e. Un giro de centro el punto C y ángulo dado, solo tiene un punto fijo que es el centro C de la rotación, mientras que las traslaciones y las simetrías deslizantes carecen de puntos fijos.

Así pues, atendiendo a los puntos fijos, los movimientos del plano se clasifican en: identidad, simetría, giro, traslación y simetría deslizante.

Cada movimiento tiene a su vez otro asociado que es su inverso. Para el caso de la simetría  $S_r$ , su movimiento inverso es el mismo, mientras que para el giro  $G_{C,\alpha}$  su inverso es  $G_{C,-\alpha}$  o  $G_{C,2\pi-\alpha}$  y para la traslación  $T_u$  su inverso es  $T_{-u}$ . Aplicando la composición de cada movimiento con su inverso dará la identidad.

$$(S_r \circ S_r)(A) = \text{Id}(A) = A$$

$$(G_{C,\alpha} \circ G_{C,-\alpha})(A) = \text{Id}(A) = A$$

$$(T_u \circ T_{-u})(A) = \text{Id}(A) = A$$

A partir de aquí ilustraremos y detallaremos los movimientos que se imparten en el nivel de Secundaria:

### a) Traslación

La traslación de vector U es una isometría que realiza un cambio de posición de un punto P, a una distancia, dirección y sentido determinados por el vector U.

Este vector guía U traslada cada punto de una figura plana a otra posición del plano de la tal forma que tanto la figura inicial como la final son geoméricamente congruentes.

Por ejemplo, si aplicamos un vector U a los vértices del siguiente hexágono tenemos que al vértice A le corresponde un vértice A', a B un B' y así sucesivamente de tal forma que:

$$d(A, A') = d(B, B') = d(C, C') = d(D, D') = d(E, E') = d(F, F') = |U|$$

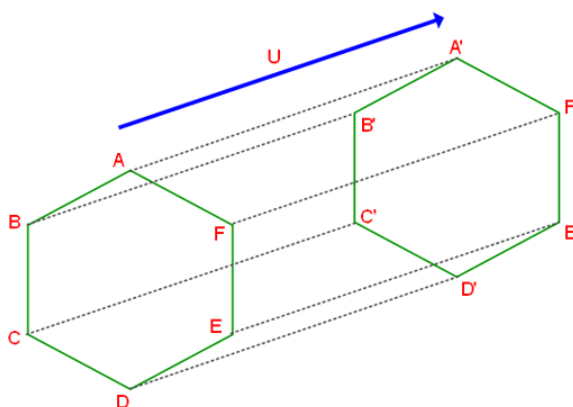


Figura 1. Ejemplo Traslación Hexágono (AulaFacil, 2013)

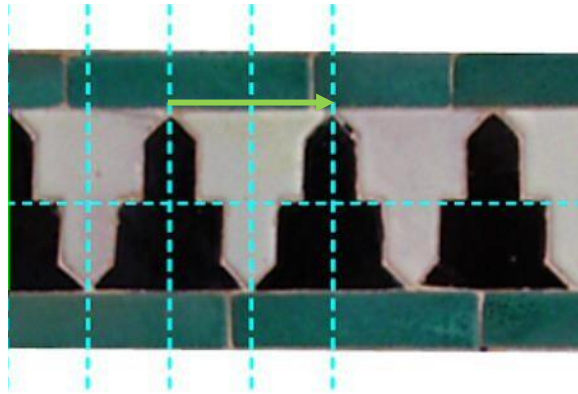


Figura 2. Ejemplo de Traslación en un Friso (Makarov, 2021). Modificada (Da Costa Cortés, 2023)

### b) Giro

La rotación o giro en torno a un punto  $C$  y ángulo dado  $\alpha$  implica un cambio de posición de un punto  $P$  del plano, de tal forma que cada punto transformado  $P'$  se mantiene a la misma distancia respecto del centro de la rotación que el punto inicial  $P$ , es decir,  $\overline{CP} = \overline{CP'}$  y, además  $\widehat{PCP'} = \alpha$ .

Se considera que el giro en el sentido de las agujas del reloj es negativo y el giro en sentido contrario es positivo.

Si se toma un triángulo de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  y un centro de rotación  $O$  y se efectúa un giro por ejemplo de  $90^\circ$ , se puede apreciar como sus vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  recorren sendos arcos hasta obtener  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  respectivamente. Aplicando un  $G_{-360^\circ}$  los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  trazan tres circunferencias de radios  $OA$ ,  $OB$  y  $OC$  respectivamente.

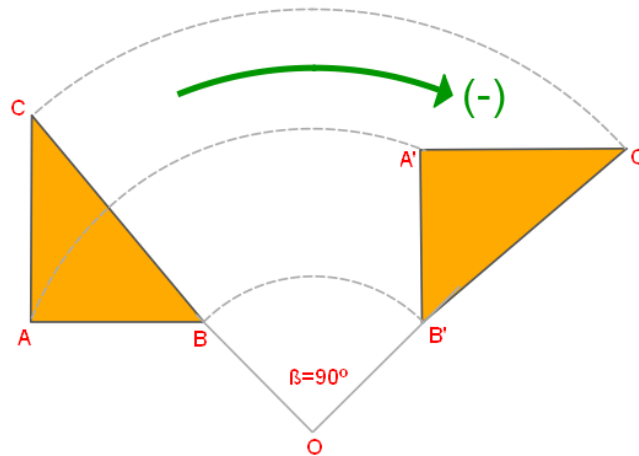


Figura 3. Ejemplo de Rotación Triángulo  $G_{-90^\circ}$  (AulaFacil, 2013)

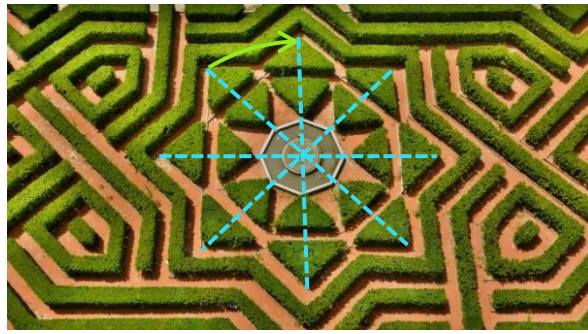


Figura 4. Ejemplo Laberinto Alcázar de Segovia  $G_{45^\circ}$  (García, 2015). Modificada (Da Costa Cortés, 2023)

### c) Simetría Axial

Una simetría axial de eje  $e$  es el movimiento que aplica a todo punto  $P$  del plano un punto  $P'$  tal que el eje  $e$  es la mediatriz del segmento que une el punto  $P$  con su imagen  $P'$ .

En el ejemplo que sigue, el eje  $e$  es la mediatriz de los segmentos  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$ , equivalentemente:

$$d(A, e) = d(A', e); d(B, e) = d(B', e); d(C, e) = d(C', e)$$

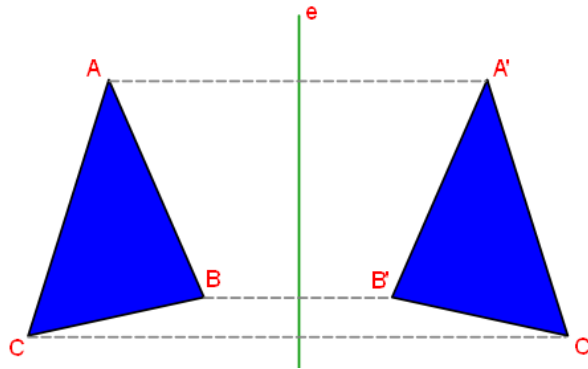


Figura 5. Ejemplo de Simetría Axial de un Triángulo (AulaFacil, 2013)

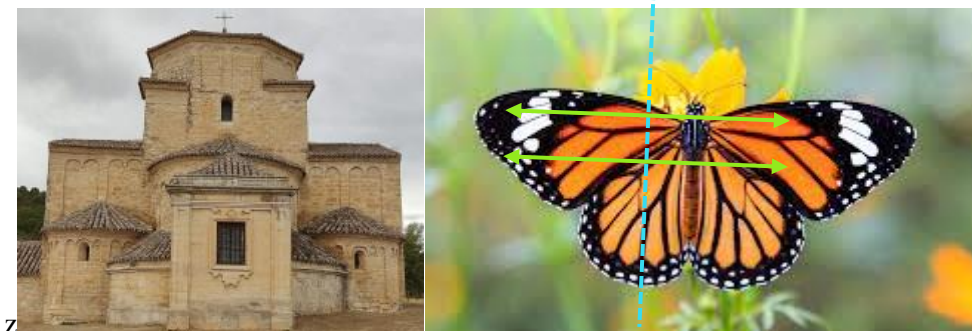


Figura 6. A la Izquierda Ermita de Nuestra Señora de la Anunciada. Uruña (Valladolid). Siglo XI (Simetría, 2022) y a la Derecha Mariposa Monarca con Simetría Axial casi perfecta (Mariposa naranja en flores de cosmos Foto de stock 350754023, s.f.). Modificada (Da Costa Cortés, 2023)

#### d) Simetría central

Se llama simetría central de centro  $O$  al giro de centro  $O$  y ángulo  $180^\circ$ . Por este movimiento, todos los puntos de una figura plana y sus respectivas imágenes están a la misma distancia del centro de simetría  $O$ , tras haber realizado la rotación de  $180^\circ$ .

Por ejemplo, en la siguiente figura los puntos  $A, A'$ ;  $B, B'$  y  $C, C'$  son simétricos respecto de  $O$  y por tanto sus distancias cumplen que:

$$d(A, O) = d(A', O); d(B, O) = d(B', O); d(C, O) = d(C', O)$$

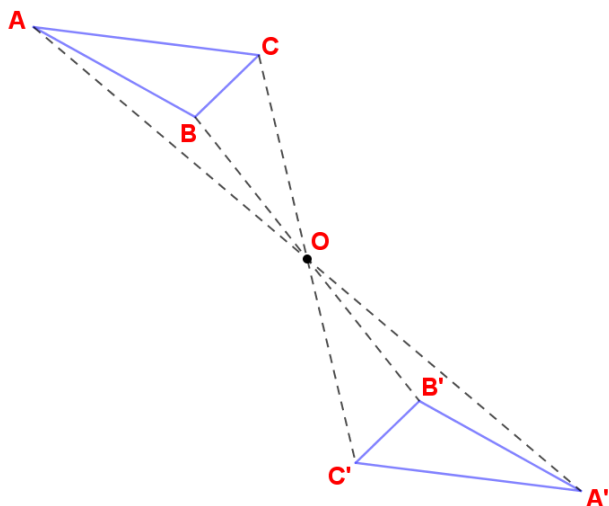


Figura 7. Ejemplo de Simetría Central de un Triángulo.



Figura 8. Algunos Naipes presentan Simetría Central. Se ven igual desde arriba y desde abajo) (Da Costa Cortés, 2023).

#### 3.1.3. Grupo de simetría de una figura plana

En geometría plana, el grupo de simetría de una figura  $F$  es el conjunto de movimientos del plano que la dejan invariante.

Los grupos de simetría de una figura también se conocen como grupos de isometría, ya que mantienen las distancias y las relaciones angulares entre los puntos de la figura invariante. La operación de estos grupos es la composición de isometrías.

La simetría es un concepto fundamental en la geometría, y los grupos de simetría son una herramienta primordial para entender la simetría de las figuras planas.

Así, si consideramos las isometrías del plano  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que conservan una figura  $F$ , es decir,  $f(P)=P$ , para todo  $P$  de  $F$ , estas tienen estructura de grupo respecto a la composición y lo denotamos por  $G_F$ .

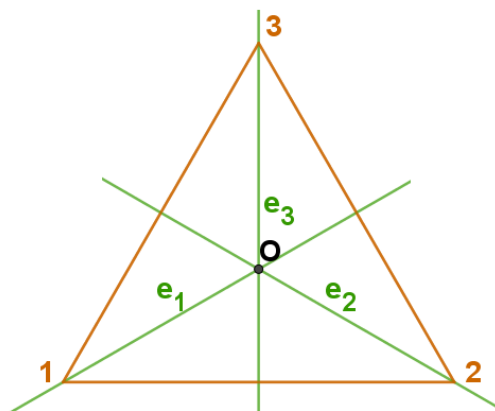
$$G_F = \{f \in GM(\mathbb{R}^2) | f(F) = F\}$$

El grupo de simetría de una figura completamente irregular está constituido solo por la identidad.

$$G_F = \{Id\}$$

A continuación, veremos algunos ejemplos.

Las isometrías que mantienen invariable el triángulo equilátero son la identidad, las rotaciones de  $120^\circ$  y  $240^\circ$  y las reflexiones respecto de los tres ejes que pasan por su baricentro y cada uno de los tres vértices. Estas isometrías forman un grupo llamado el Grupo de Simetría del triángulo equilátero y lo denotaremos por  $G_F$ .



$$G_F = \{Id, G_{120^\circ}, G_{240^\circ}, S_{e_1}, S_{e_2}, S_{e_3}\}$$

Figura 9. Grupo de Simetría Triángulo Equilátero.

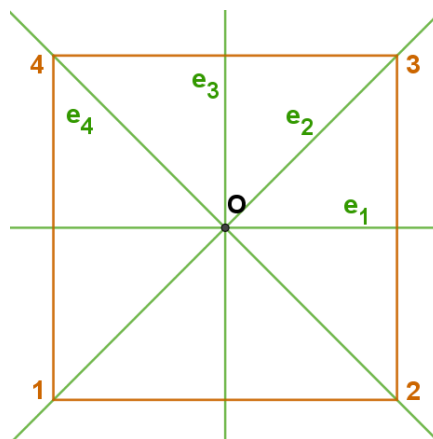
Así pues, el grupo  $G_F$ , o grupo de simetría del triángulo, está formado por los siguientes movimientos: Los giros de centro  $O$  y ángulos  $120^\circ$  y  $240^\circ$ , las simetrías de ejes  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$  y la identidad  $Id$  que coincide con el giro de centro  $O$  y ángulo  $360^\circ$ .

Tabla Modelo de composición de los movimientos para el triángulo equilátero vistos anteriormente, que muestra su estructura de grupo.

O	Id	G <sub>120°</sub>	G <sub>240°</sub>	S <sub>01</sub>	S <sub>02</sub>	S <sub>03</sub>
Id	Id	G <sub>120°</sub>	G <sub>240°</sub>	S <sub>01</sub>	S <sub>02</sub>	S <sub>03</sub>
G <sub>120°</sub>	G <sub>120°</sub>	G <sub>240°</sub>	Id	S <sub>02</sub>	S <sub>03</sub>	S <sub>01</sub>
G <sub>240°</sub>	G <sub>240°</sub>	Id	G <sub>120°</sub>	S <sub>03</sub>	S <sub>01</sub>	S <sub>02</sub>
S <sub>01</sub>	S <sub>01</sub>	S <sub>03</sub>	S <sub>02</sub>	Id	G <sub>240°</sub>	G <sub>120°</sub>
S <sub>02</sub>	S <sub>02</sub>	S <sub>01</sub>	S <sub>03</sub>	G <sub>120°</sub>	Id	G <sub>240°</sub>
S <sub>03</sub>	S <sub>03</sub>	S <sub>02</sub>	S <sub>01</sub>	G <sub>240°</sub>	G <sub>120°</sub>	Id

Tabla 1. Composición de movimientos de un Triángulo Equilátero (Calcerrada Zamora, 2010). Modificada (Da Costa Cortés, 2023)

Otro ejemplo: el Grupo de Simetría de un cuadrado incluye rotaciones de 90°, 180° y 270°, dos reflexiones respecto a las rectas que pasan por su centro geométrico y por los puntos medios de sus lados, dos reflexiones respecto a rectas que contienen a las diagonales y la identidad (sin transformación).



$$G_F = \{Id, G_{90^\circ}, G_{180^\circ}, G_{270^\circ}, S_{e_1}, S_{e_2}, S_{e_3}, S_{e_4}\}$$

Figura 10. Grupo de Simetría Cuadrado.

Así,  $G_F$ , grupo de simetría del cuadrado, está formado por los siguientes movimientos: Los giros de centro  $O$  y ángulos  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ , las simetrías de ejes  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  y  $e_4$  y la identidad  $Id$  que coincide con el giro de centro  $O$  y ángulo  $360^\circ$ .

### 3.1.4. Teoría de mosaicos

Un mosaico es un recubrimiento del plano que se genera con la repetición, en dos direcciones distintas, de un módulo que cumple ciertas características de acoplamiento y regularidad.

Las piezas (teselas) que componen un mosaico encajan, sin dejar huecos y sin solaparse, recubriendo el plano.

Los mosaicos con polígonos regulares se clasifican en dos tipos: regulares y semirregulares:

- **Mosaicos regulares:** aquellos en los que en cada vértice del mosaico concurre una única clase de polígono regular y, además, cada vértice del mosaico es también vértice de todos los polígonos que concurren en él.

Los mosaicos regulares son los -geoméricamente- más sencillos. Cada mosaico regular está formado por polígonos regulares y congruentes. Para recubrir el plano con polígonos regulares necesitamos que los ángulos interiores de los polígonos concurrentes en cada vértice del mosaico sumen  $360^\circ$ .

Nº lados	Nº Diagonales	Ángulo central	Ángulo interior	Suma de ángulos interiores
3	0	$120^\circ$	$60^\circ$	$180^\circ$
4	2	$90^\circ$	$90^\circ$	$360^\circ$
5	5	$72^\circ$	$108^\circ$	$540^\circ$
6	9	$60^\circ$	$120^\circ$	$720^\circ$
7	14	$51,4^\circ$	$128,57^\circ$	$900^\circ$
8	20	$45^\circ$	$135^\circ$	$1080^\circ$
9	27	$40^\circ$	$140^\circ$	$1260^\circ$
.....	.....	.....	.....	.....
$n$	$\frac{n(n-3)}{2}$	$\frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$	$\frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{(n-2)\pi}{n}$	$(n-2)180^\circ = (n-2)\pi$

Tabla 2. Cálculo del Ángulo Interior de Polígonos Regulares (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023).

Solo existen tres tipos de mosaicos regulares: los construidos a partir de un único hexágono regular, los generados a partir de un cuadrado y los formados con triángulos equiláteros congruentes.



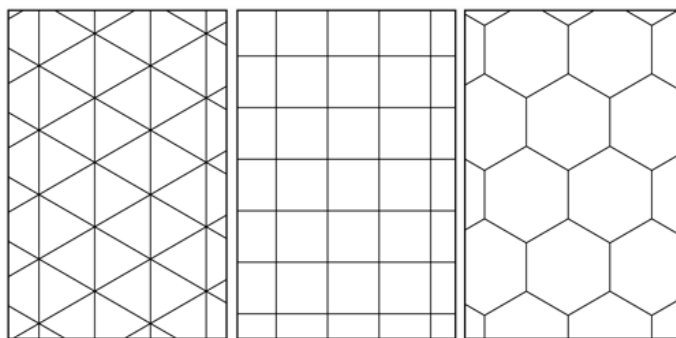


Figura 11. En notación Schläfli serían  $3^6$  (6 triángulos por vértice),  $4^4$  (4 cuadrados por vértice) y  $6^3$  (3 hexágonos por vértice), (Blasco, 2021).

Este resultado se demuestra teniendo en cuenta el ángulo interior de un polígono regular y el número  $k$  de polígonos concurrentes en un vértice. Este número  $k$  ha de ser mayor que 2, porque si  $k=2$ , cada polígono aportaría  $180^\circ$  de ángulo interior (imposible) y menor que 7, porque en otro caso significaría que existirían polígonos con ángulo interno menor de  $60^\circ$ , lo cual es imposible.

Así, tiene que verificarse la siguiente igualdad:

$$k \frac{n-2}{n} 180^\circ = 360^\circ \rightarrow k \frac{n-2}{n} = 2 \quad \text{Siendo } n \text{ el número de lados del polígono regular.}$$

Dando valores a  $k$  desde 3 hasta 6 se tiene:

- Si  $k=3$ ,  $3n-6=2n$ , es decir  $n=6$ . Concurren 3 polígonos regulares de 6 lados, o sea tres hexágonos congruentes.
  - Si  $k=4$ ,  $4n-8=2n$ , es decir  $n=4$ . Concurren 4 polígonos regulares de 4 lados, o sea cuatro cuadrados congruentes.
  - Si  $k=5$ ,  $5n-10=2n$ , es decir  $3n=10$ . Imposible.
  - Si  $k=6$ ,  $6n-12=2n$ , es decir  $n=3$ . Concurren 6 polígonos regulares de 3 lados, o sea seis triángulos equiláteros congruentes.
- **Mosaico semirregular:** constituido con combinaciones de polígonos regulares con la condición de que en todos los vértices del mosaico la disposición de polígonos sea la misma. En consecuencia, las figuras en los vértices siempre coinciden, es decir, en cada vértice confluyen los mismos polígonos y en el mismo orden.

Solo existen ocho tipos de mosaicos semirregulares, cuyas representaciones se muestran en la figura siguiente:

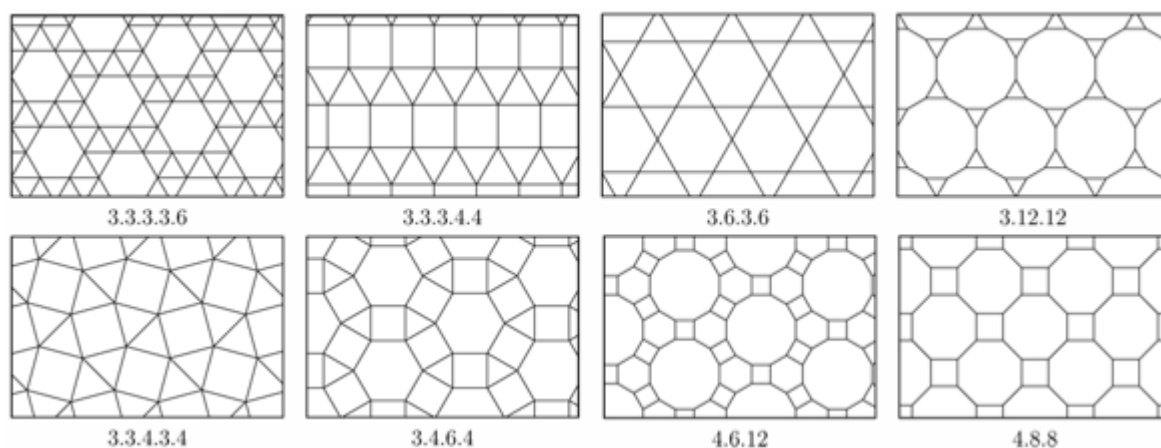


Figura 12. Los ocho Mosaicos Semirregulares posibles (Blasco, 2021)

### 3.1.5. Arabescos en la Alhambra de Granada

En la historia de las Matemáticas, los árabes son reconocidos por sus contribuciones en Geometría, Aritmética y Astronomía. Gracias a ellos, Europa pudo conocer las obras de los griegos a través de los manuscritos traducidos de la Geometría Euclídea. En términos estéticos, los árabes dejaron una importante herencia en los mosaicos de la Alhambra de Granada, un conjunto de edificios construido como acrópolis y ciudad de la corte de la dinastía nazarí. La Alhambra es el máximo exponente del arte nazarí en la península.

Los mosaicos de la Alhambra producen un efecto visual en el que ningún punto es singular ni más importante que otros, y esto se logra gracias a la utilización de la simetría y el recubrimiento de la superficie de manera regular y armoniosa. Los artesanos musulmanes para sus diseños no solo recurrieron a la Geometría estática de los objetos, sino también a la Geometría Dinámica basada en la composición de movimientos en el plano para lograr simetría y armonía. Lo más sorprendente es que la estructura geométrica de los mosaicos contiene a los diecisiete grupos de simetría del plano, lo cual indica el profundo conocimiento matemático de los artistas musulmanes.

Entre las técnicas que utilizaron los artesanos para elaborar los motivos de los mosaicos destacan la transformación de polígonos regulares, como en el caso de los polígonos nazaríes, y la rotación de un polígono regular en torno a un punto fijo, lo que da lugar a un polígono estrellado o forma estrellada. Estos recursos geométricos permitieron a los artistas musulmanes crear hermosos mosaicos en la Alhambra. (Reyes Iglesias, Fernández Benito, & et al, Enfoques actuales en la didáctica de las Matemáticas, 2006)

## Los polígonos nazaríes:

Los polígonos nazaríes son polígonos irregulares, creados a partir de polígonos convexos, regulares o irregulares, conservando el área, pero no la forma. Para construirlos se parte de un polígono, se extrae una figura interior desde un lado y se yuxtapone al otro (mediante rotaciones o traslaciones). Para facilitar la identificación de las teselas se solía utilizar conjuntos de colores para generar el mosaico final.

A continuación, se presenta una muestra de polígonos nazaríes y los mosaicos que generan.

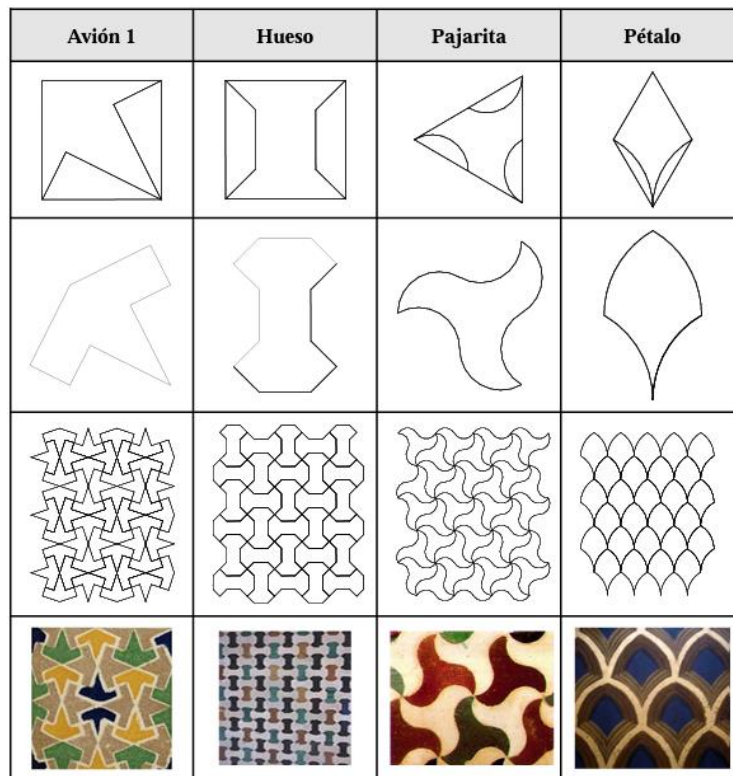


Figura 13. Polígonos Nazaríes (Fernández Benito & Reyes Iglesias, 2003)

- **El avión o clavo nazarí:** Partiendo del cuadrado, se dibujan triángulos rectángulos interiores, escalenos ( $30^\circ/60^\circ/90^\circ$ ) e iguales sobre dos lados contiguos, que actúan como hipotenusa. Efectuando giros de  $-270^\circ$  y  $270^\circ$ , las hipotenusas coinciden con los lados adyacentes.

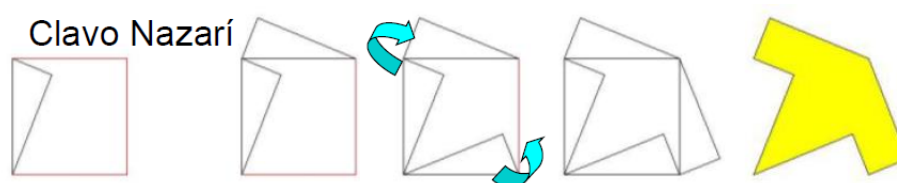


Figura 14. Cómo construir el Clavo Nazarí (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023)

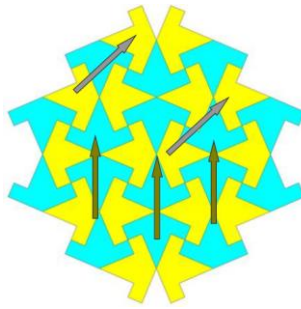


Figura 15. Recubrimiento del Plano mediante Traslaciones del Clavo Nazarí (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023)

- **El hueso nazarí:** Tomando un cuadrado como base se dibujan en su interior dos trapecios congruentes, en dos lados opuestos. Estos trapecios tienen dichos lados como bases mayores, sus dos oblicuos están sobre las diagonales y las bases menores son paralelas. Los dos trapecios son girados  $90^\circ$  respecto a uno de sus vértices para aparecer adosadas a los lados libres como un complemento exterior. La figura resultante, dodecágono cóncavo se asemeja a un “hueso”.

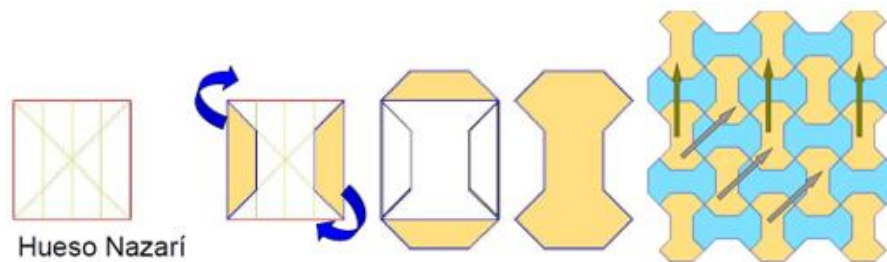


Figura 16. Como construir el Hueso Nazarí y recubrir el Plano mediante Traslaciones (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023)

- **La pajarita nazarí:** Partiendo de un triángulo equilátero, sobre la mitad de cada lado, de forma alterna, se dibuja un arco (de manera que el lado parcial escogido actúa como cuerda del segmento circular). Los tres segmentos circulares giran  $180^\circ$  pivotando sobre el punto medio de cada lado del triángulo (que es extremo del segmento). La figura resultante es conocida como “pajarita”. También puede dibujarse a partir de un hexagrama (conformado por dos triángulos equiláteros girados). En ciertos casos, las “pajaritas” albergan en su interior un hexágono estrellado.

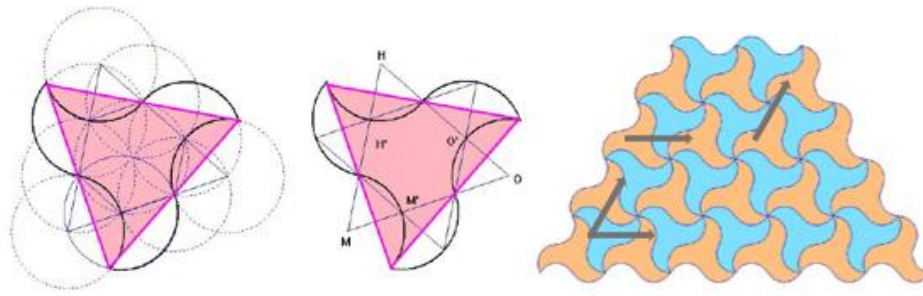


Figura 17. Como construir la Pajarita Nazarí y recubrir el Plano mediante Traslaciones (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023)

- **El pétalo nazarí:** La figura de partida es un rombo formado por la yuxtaposición de dos triángulos equiláteros. Se dibuja un arco interior sobre dos lados contiguos que confluyen en el ángulo agudo del rombo. El segmento circular resultante, de forma similar a lo explicado en la “pajarita”, gira  $-240^\circ$  grados hasta adosarse como un complemento exterior al lado contiguo (haciendo coincidir la cuerda del segmento, el antiguo lado, con el lado receptor). Mediante un giro de  $240^\circ$  aplicado al otro segmento circular se completa la figura. El resultado final recuerda un “pétalo”.

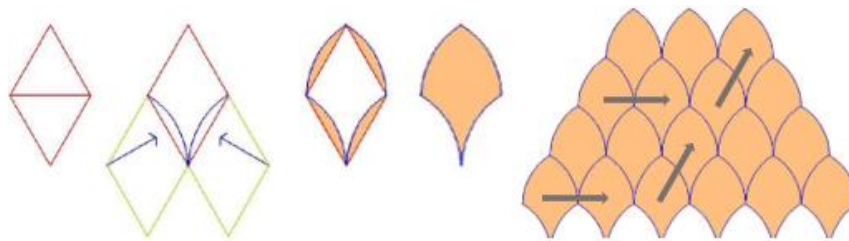


Figura 18. Como construir el Pétalo Nazarí y recubrir el Plano mediante Traslaciones (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023)

También puede obtenerse el pétalo mediante traslaciones de los segmentos circulares según los vectores determinados por los lados opuestos del rombo.

No son los únicos polígonos nazariés, aunque sí los más frecuentes y característicos que conforman varios de los alicatados completos en la Alhambra.

En la Alhambra también son interesantes frisos cerámicos (habitualmente separando el mosaico de la yesería) que disponen de motivos geométricos diversos.

### 3.1.6. Mosaicos de Escher

Parte de las obras del artista holandés Maurits Cornelis Escher se caracterizan por su utilización ingeniosa de la geometría para crear ilusiones ópticas y patrones aparentemente imposibles. Escher era conocido por su habilidad para crear dibujos que desafiaban la percepción y la lógica.

Otra parte importante de su obra es la relativa a los recubrimientos del plano. En este sentido, Escher exploró en sus dibujos la matemática de los teselados, patrones geométricos que se repiten sin dejar espacios vacíos, ni solaparse. Estos patrones son posibles gracias a la utilización de figuras geométricas regulares, como triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares, que se ajustan perfectamente en un patrón repetitivo para ser deformados posteriormente produciendo organicidad.

Algunos mosaicos de Escher conocidos son:

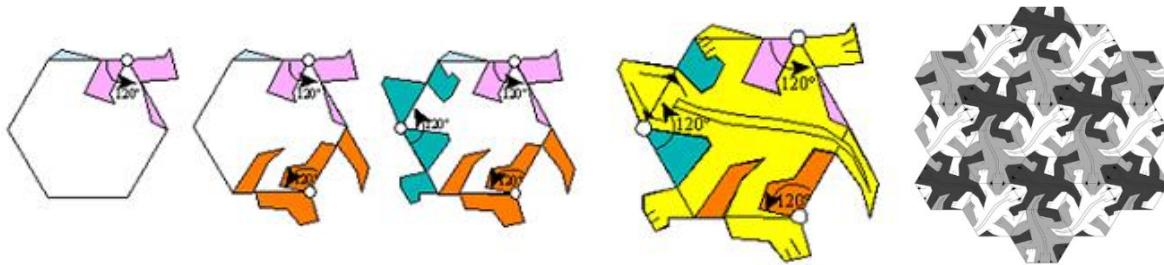


Figura 19. Grabado titulado «Reptiles» (1943), a partir de un Hexágono y Recubrimiento del Plano mediante Traslaciones (Blasco, 2021)

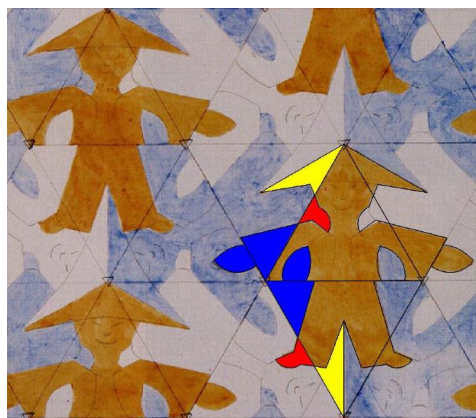


Figura 20. Recubrimiento del Plano mediante Traslaciones del Grabado Titulado «Chinese boy» (1936), de Escher a partir de un Rombo (Reyes Iglesias, Modelos matemáticos en educación secundaria, 2023)

### 3.2. Análisis cognitivo

Tras haber realizado el análisis de contenido de nuestro tema, debemos centrarnos en el aprendizaje del estudiante. Cabe destacar que el análisis cognitivo es de carácter subjetivo y se centra en las expectativas del profesor, basado en qué y cómo va a aprender el alumno.

Este análisis lo vamos a dividir en tres apartados que son: expectativas de aprendizaje, limitaciones y errores en el aprendizaje y oportunidades de aprendizaje sobre el siguiente mapa conceptual.

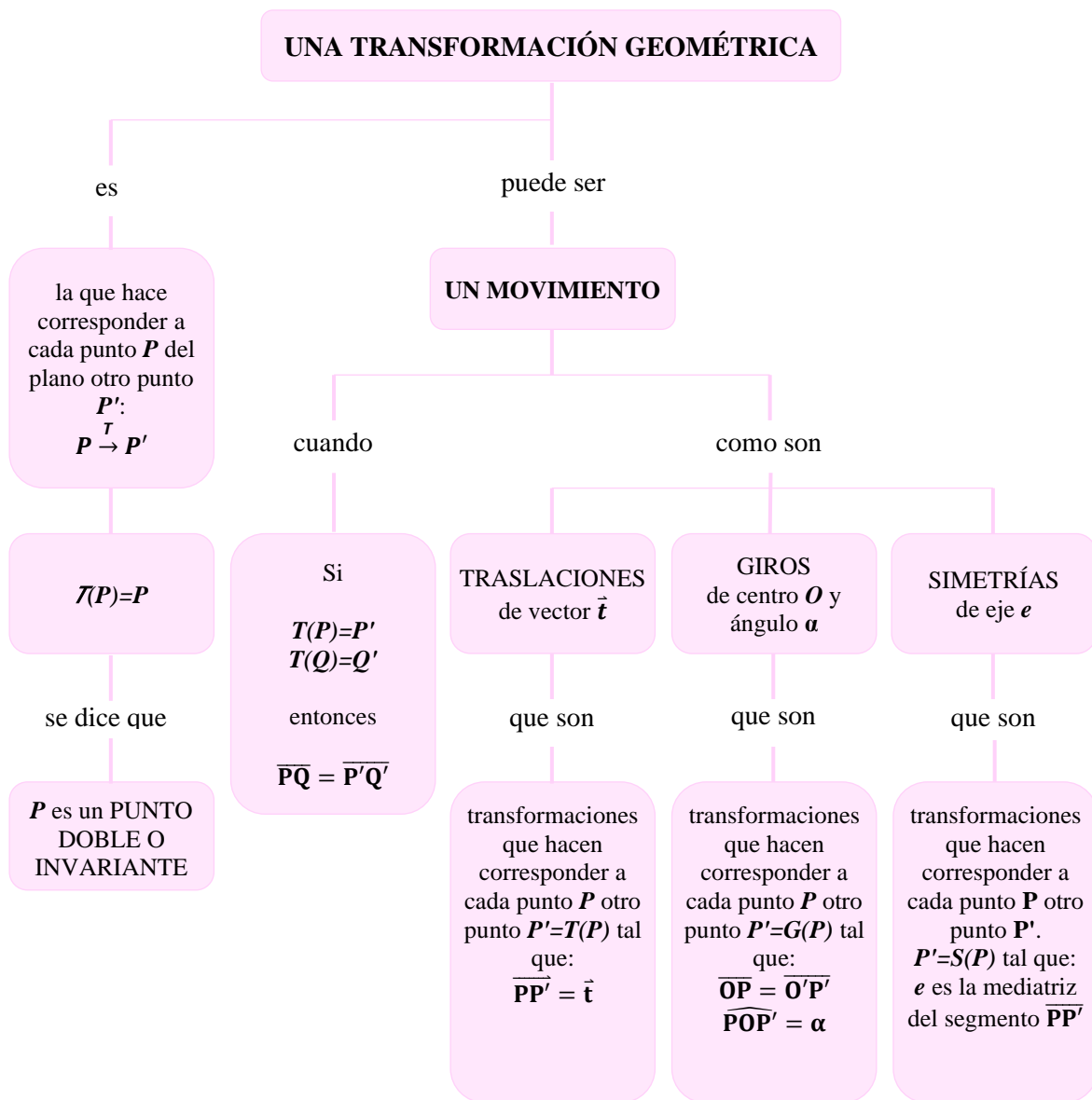


Figura 21. Mapa Conceptual. Transformaciones Geométricas (Colera Jiménez, Gaztelu Alberto, & et al, 2022).  
Modificada (Da Costa Cortés, 2023)

### 3.2.1. Expectativas de aprendizaje

En este apartado vamos a desarrollar una tabla con los conocimientos y algunas destrezas y actitudes encaminadas a la consecución de un aprendizaje significativo de este tema de transformaciones geométricas.

Pretendemos que los estudiantes sean capaces de identificar y representar los movimientos del plano que se han presentado hasta entonces.

<b>OBJETIVOS</b>	
<b>Caracterización y Representación de Isometrías.</b>	<b>La Simetría</b>
1. Reconocer figuras congruentes.	13. Construir la figura congruente obtenida al aplicar un eje de simetría sobre una figura.
2. Identificar y justificar las isometrías entre figuras congruentes.	14. Razonar y justificar que el eje de simetría es invariante en la simetría axial.
3. Distinguir y clasificar las isometrías: Traslación, Giro y Simetría.	15. Dadas dos figuras congruentes por simetría, hallar el eje de simetría axial que las relaciona.
4. Identificar para cada isometría los elementos invariantes.	16. Construir la figura congruente obtenida al aplicar una simetría central, de centro definido a una figura.
5. Aplicar diferentes isometrías o composiciones de estas a una figura utilizando GeoGebra o representación gráfica o creación manual.	17. Razonar y justificar que toda recta que pasa por el centro de una simetría central es invariante.
6. Ser capaces de reconocer y encontrar las diferentes isometrías presentes en elementos del mundo real.	18. Dadas dos figuras congruentes, hallar el centro de la simetría central que las relaciona.
<b>Traslaciones y Giros.</b>	<b>Composición de Movimientos</b>
7. Construir la figura congruente obtenida al aplicar un vector de traslación dado sobre una figura.	19. Aplicar una composición de movimientos en una figura.
8. Razonar y justificar si son invariantes las rectas paralelas al vector de la traslación.	20. Ser capaces de reconocer los movimientos utilizados en una composición aplicada a una figura.
9. Dadas dos figuras congruentes por traslación, hallar el vector de traslación que las relaciona.	<b>Mosaicos</b>
10. Construir la figura congruente obtenida al aplicar un giro de centro y ángulo definidos sobre una figura dada.	21. Ser capaz de construir un mosaico, a partir del elemento base y dos vectores de traslación linealmente independientes.
11. Razonar y justificar que no hay rectas invariantes al aplicar un giro.	22. Dado un mosaico, reconocer el elemento base y dos vectores de traslación que lo generan.
12. Dadas dos figuras congruentes por giro, hallar el centro y ángulo aplicado de dicho giro.	23. Identificar mosaicos en elementos de la vida real.

Tabla 3. Expectativas de Aprendizaje.



### 3.2.2. Limitaciones y errores en el aprendizaje

Durante todo el proceso de enseñanza el docente ha de ser consciente de las posibles limitaciones y errores que pueden aparecer. Cuanto antes detectemos y analicemos estas situaciones mejor será nuestra intervención como educadores y, por ende, antes podremos solventar estos problemas, evitar que se produzcan.


A continuación, se detallan ciertas dificultades y algunos errores que pueden aparecer en el aprendizaje del tema que nos atañe.

#### Dificultades:

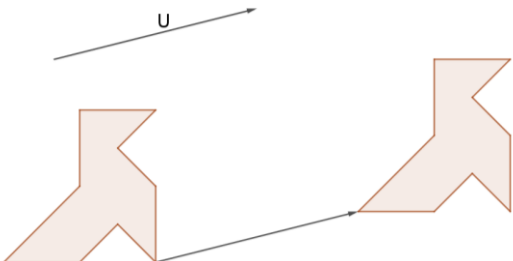
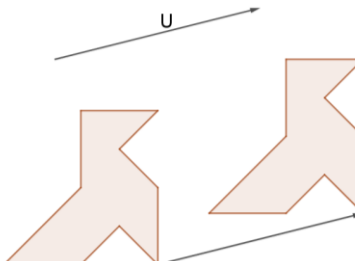
- **D.1.** Identificar las componentes horizontales y verticales de una traslación en posición oblicua (vector no paralelo a los ejes coordenados).
- **D.2.** Identificar en un giro el centro y/o ángulo aplicado que relaciona una figura y su transformada.
- **D.3.** Reconocer en función del ángulo aplicado si el giro es positivo o negativo.
- **D.4.** Diferenciar entre los dos tipos de simetrías explicadas.
- **D.5.** Identificar el eje de simetría que relaciona dos figuras congruentes por simetría.
- **D.6.** Identificar el centro de simetría central que relaciona una figura y su simétrica.
- **D.7.** Ser capaces de reconocer los movimientos utilizados en una composición aplicada a una figura.

#### Errores:

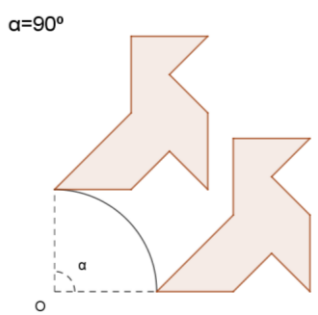
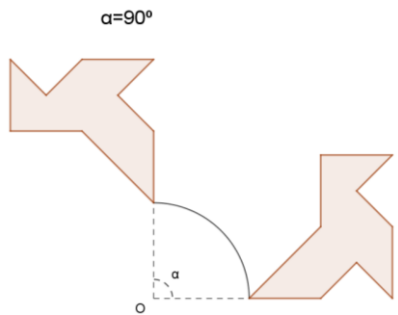
- **E.1.** Reconocer una homotecia como un movimiento.

E.1. Error Movimiento	Solución E.1. La homotecia de razón distinta de $\pm 1$ es una transformación geométrica que no un movimiento ya que no conserva el tamaño. Cuando la razón es $+1$ la trasformada es la identidad y cuando es $-1$ es un giro o simetría central.
	

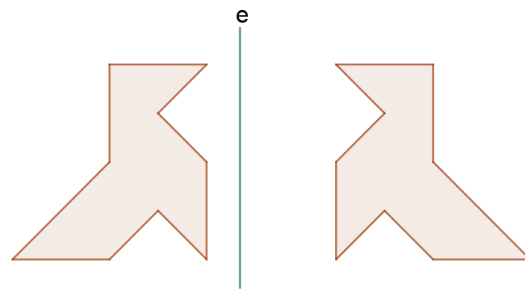
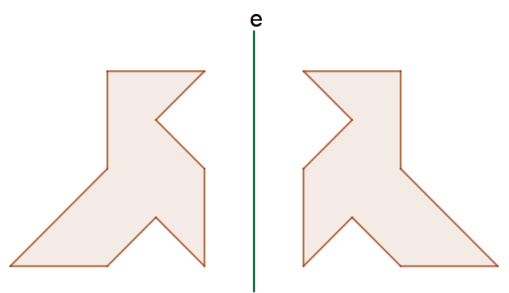
- **E.2.** Aplicar incorrectamente un vector de traslación, asociándolo a puntos diferentes entre la figura y su transformada.

E.2. Error Movimiento de Traslación	Solución E.2. Cambio de posición de un punto, a una distancia, dirección y sentido determinados por el vector $U$
	

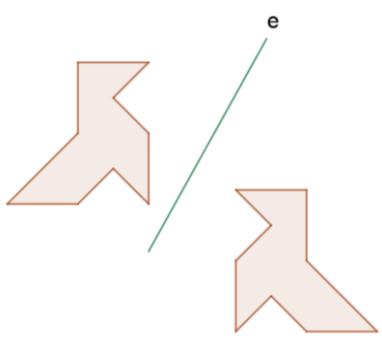
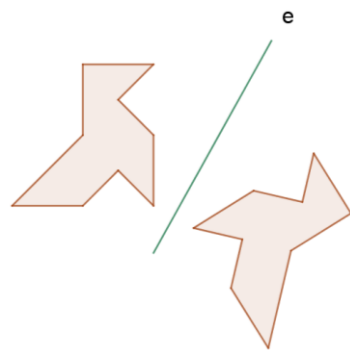
- **E.3.** Aplicar incorrectamente un giro al tomar centro y/o sentido de giro erróneos.

E.3. Error. Aplicación de una traslación, en vez de giro.	Solución E.3. Giro positivo sentido antihorario de ángulo $\alpha$ y centro O.
	

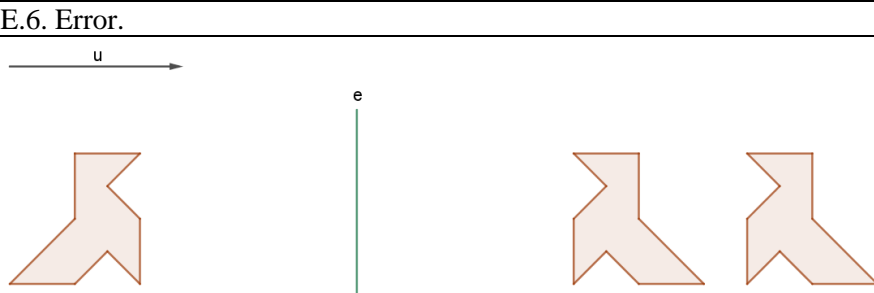
- **E.4.** Aplicar una simetría sin tener en cuenta que el eje de simetría tiene que ser la mediatriz del segmento que relaciona los puntos homólogos de la figura y su transformada.

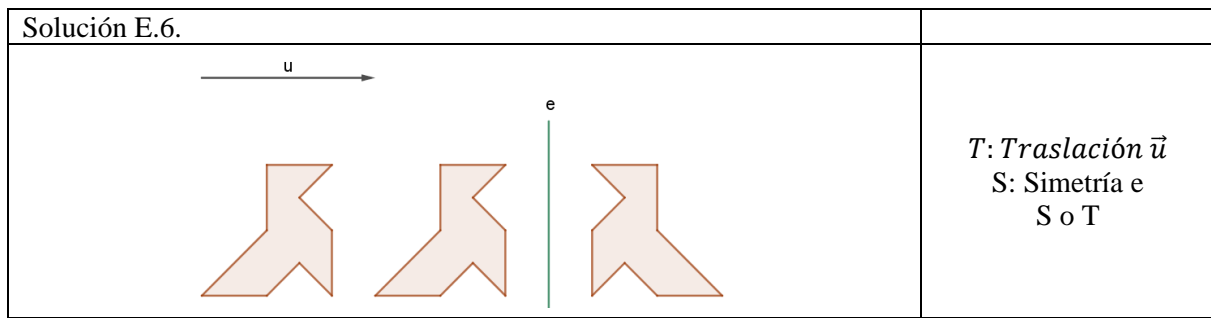
E.4. Error.	Solución E.4.
	

- **E.5.** Identificar como simétricas dos figuras que no lo son.

E.5. Error.	Solución E.5.
	

- **E.6.** Confundir el orden de aplicación de una composición de movimientos.

	<p><i>T</i>: Traslación <math>\vec{u}</math>  <i>S</i>: Simetría e  S o T</p>
--	---



Estas dificultades y errores se relacionan directamente con algunos de nuestros objetivos de aprendizaje de la manera siguiente:

	D.1	D.2	D.3	D.4	D.5	D.6	D.7	E.1	E.2	E.3	E.4	E.5	E.6
1.													
2.			X	X				X					
3.			X	X									
4.		X	X	X									
5.			X	X					X	X	X		
6.													
7.									X				
8.													
9.													
10.	X		X							X			
11.		X											
12.			X										
13.		X		X	X						X	X	
14.				X	X								
15.				X	X								
16.				X		X							
17.				X		X							
18.				X		X						X	
19.	X	X	X	X	X	X							
20.	X	X	X	X	X	X	X						
21.													
22.							X						
23.													X

Tabla 4. Relación Dificultades y Errores con los Objetivos de Aprendizaje.

### 3.2.3. Oportunidades de aprendizaje

Las actividades que generan oportunidades de aprendizaje son aquellas que están diseñadas específicamente para permitir a los estudiantes adquirir nuevos conocimientos, habilidades y comprensiones. Estas actividades pueden ser de diversos tipos, tales como:

- **Actividades prácticas:** estas actividades implican la aplicación de conocimientos teóricos en situaciones prácticas. Por ejemplo, se puede pedir a los estudiantes que dibujen figuras en el plano y que las trasladen, roten o reflejen. Los estudiantes pueden utilizar papel cuadriculado y coordenadas

- para medir y describir los movimientos. Otra actividad consistiría en utilizar un programa de geometría dinámica, como GeoGebra, para construir figuras y experimentar con transformaciones geométricas.
- **Actividades de discusión:** estas actividades permiten a los estudiantes interactuar entre sí y compartir ideas y perspectivas. Las discusiones pueden ser guiadas por un facilitador o pueden ser más abiertas y espontáneas. Por ejemplo, Los estudiantes pueden participar en una discusión en grupo sobre los diferentes tipos de movimientos en el plano, sus propiedades y cómo se relacionan entre sí. También pueden discutir cómo aplicar estos movimientos a problemas prácticos.
  - **Actividades de investigación:** estas actividades involucran a los estudiantes en la búsqueda de información y la exploración de un tema específico. Esto puede incluir la realización de investigaciones en línea, la revisión de documentos y la realización de entrevistas. Por ejemplo, Se puede pedir a los estudiantes que investiguen sobre los diferentes tipos de movimientos en el plano, sus aplicaciones en la vida real y las diferentes formas en que se pueden representar y describir. También pueden buscar ejemplos de figuras que mantienen su forma y tamaño después de aplicar un movimiento en particular.
  - **Actividades creativas:** estas actividades permiten a los estudiantes explorar su creatividad y expresarse de manera artística. Por ejemplo, se puede desafiar a los estudiantes a crear una obra de arte o un diseño utilizando exclusivamente traslaciones, rotaciones y reflexiones. Otra actividad consistirá en pedir a los estudiantes que por grupos inventen un juego que implique el uso de transformaciones geométricas, donde los jugadores deban aplicar movimientos para alcanzar objetivos específicos.
  - **Actividades de resolución de problemas:** estas actividades desafían a los estudiantes a encontrar soluciones a problemas específicos. Pueden implicar trabajar en equipo para resolver un problema complejo o encontrar una solución creativa a un problema práctico. Por ejemplo, se les puede pedir que encuentren el punto de intersección entre dos figuras después de aplicar diferentes movimientos en ellas.

En general, cualquier actividad que involucre a los estudiantes activamente en el proceso de aprendizaje, y les permita aplicar, explorar, interactuar y reflexionar sobre el contenido, puede generar oportunidades valiosas para el aprendizaje.

Si además de eso, garantizamos el éxito en las etapas iniciales, aumentaremos la motivación del alumnado, para después ir aumentando la dificultad.

Para ilustrar esta argumentación a continuación se desarrollarán algunos ejemplos de posibles actividades donde se trabaja el área de investigación, la creatividad y la resolución de problemas.

### Actividad 1:

Sobre las siguientes figuras responde a las siguientes cuestiones que se plantean:

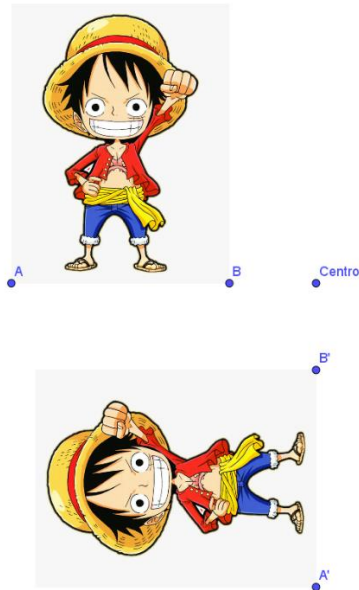


Figura 22. Chibi del Personaje Luffy de la Serie de Animación One Piece (KindPNG.com, s.f.) Modificada (Da Costa Cortés, 2023)

1. Si tomamos la figura con los puntos señalados A y B ¿Cuál es el ángulo de giro que debemos aplicar en sentido antihorario para obtener su transformada?
  - a)  $90^\circ$
  - b)  $270^\circ$
  - c) Ninguna de las anteriores.
2. Si tomamos la figura con los puntos señalados A y B ¿Cuál es el ángulo de giro que debemos aplicar en sentido horario para obtener su transformada?
  - a)  $90^\circ$
  - b)  $270^\circ$
  - c) Ninguna de las anteriores.
3. ¿Qué datos necesito saber para averiguar cuál es la figura original y cuál es su transformada?
  - a) Solo el ángulo.
  - b) El ángulo y sentido de giro.
  - c) El ángulo, el sentido de giro y el centro del giro.
  - d) No puedo saberlo.

Actividad 1: Elaboración propia.

Objetivos de aprendizaje que se persiguen:

- **1.** Reconocer figuras congruentes.
- **2.** Identificar y justificar las isometrías entre figuras congruentes.
- **3.** Distinguir y clasificar las isometrías: Traslación, Giro y Simetría.
- **12.** Dadas dos figuras congruentes por giro, hallar el centro y ángulo aplicado que las relaciona.

Dificultades y errores frecuentes:

- **D.2.** Identificar en un giro el centro y/o ángulo aplicado.
- **D.3.** Reconocer en función del ángulo aplicado si el giro es positivo o negativo.
- **E.3.** Aplicar incorrectamente un giro al tomar centro y/o sentido de giro erróneos.

**Soluciones Actividad 1:**

1. Si tomamos la figura de puntos A y B ¿Cuál es el ángulo de giro que debemos aplicar en sentido antihorario para obtener su transformada?  
**a) 90°**
2. Si tomamos la figura de puntos A y B ¿Cuál es el ángulo de giro que debemos aplicar en sentido horario para obtener su transformada?  
**b) 270°**
3. ¿Qué datos necesito saber para averiguar cuál es la figura original y cuál es su transformada?  
**c) El ángulo, el sentido de giro y el centro del giro.**

**Actividad 2:**

Como hemos comentado un mosaico es un recubrimiento del plano, que se genera con la repetición, en dos direcciones distintas, de un módulo que cumple ciertas características de acoplamiento y regularidad. Estos han ido evolucionando en diversas formas, estilos y usos. Como por ejemplo esta alfombra de vinilo para recubrimiento de cocinas.



Figura 23. Mosaico Alfombra de Vinilo (Alfombra de vinilo cocina patrón flores, 2022). Modificada (Da Costa Cortés, 2023)

Como puedes apreciar, este patrón está creado a partir de una flor que se repite en dos direcciones. Busca al menos dos elementos distintos de la vida real que se comporten de la misma manera.

Objetivos de aprendizaje que se persiguen:

- **1.** Reconocer figuras congruentes.
- **2.** Identificar y justificar las isometrías entre figuras congruentes.
- **9.** Dado dos figuras congruentes, hallar el vector de traslación que las relaciona.
- **22.** Dado un mosaico reconocer el elemento base y dos vectores de traslación que lo generan.
- **23.** Identificar mosaicos en elementos de la vida real.

Dificultades y errores frecuentes:

- **D.1.** Identificar las componentes horizontal y vertical de una traslación oblicua.
- **E.2.** Aplicar incorrectamente un vector de traslación, asociándolo a puntos diferentes entre la figura y su transformada.

**Actividad 2:** Elaboración propia.

### 3.3. Análisis de instrucción

En las Situaciones de Aprendizaje las actividades y tareas creadas para trabajar los contenidos de cada etapa deben contribuir a la adquisición y desarrollo de las competencias. Estas a su vez tienen que ser estimulantes y motivadoras, que sean significativas en cuanto a su relación con conocimientos previos y contextualizadas con elementos de la vida real (personal, social y profesional).

A continuación, se van a mostrar tres elementos que deben ser tenidos en cuenta en estas actividades.

### 3.3.1. Contenido matemático

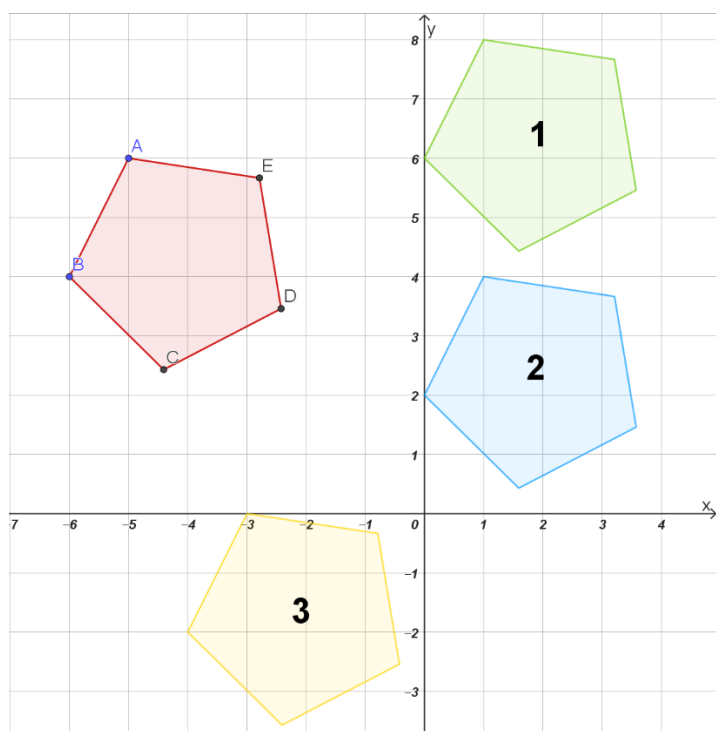
Cuando pensamos en la creación de nuestras actividades debemos tener muy claros los contenidos que vamos a impartir. En nuestro caso hablaremos de transformaciones geométricas del plano, como identificarlas, describirlas, ser capaces de crearlas y encontrarlas en el mundo que nos rodea.

Todo esto no se puede realizar de manera independiente, sino que debe favorecer el aprendizaje significativo, según el cual, el alumno es capaz de relacionar los nuevos conocimientos con los ya adquiridos.

Como ejemplo, en la siguiente actividad se necesita saber manejarse en el plano cartesiano,  $\mathbb{R}^2$ , utilizando los conocimientos que se han adquirido anteriormente.

#### Actividad 3:

Se ha trasladado el pentágono de vértices ABCDE a través de la aplicación del vector de traslación  $(6,-2)$ . Identifica el transformado de este pentágono y las coordenadas  $A'$  y  $B'$ , siendo  $A = (-5,6)$  y  $B = (-6,4)$ .



El transformado, es el pentágono     y sus coordenadas son:  $A' = ( \quad , \quad )$ ,  $B' = ( \quad , \quad )$ .

#### Soluciones Actividad 3:

El transformado, es el pentágono 2 y sus coordenadas son:  $A' = (1,4)$ ,  $B' = (0,2)$ .

Actividad 3: Elaboración propia.



### 3.3.2. Actividades contextualizadas y cercanas a la vida real

No hay mayor motivación para los alumnos que ver la aplicabilidad y la cercanía de lo que estudia en elementos que forman parte de su día a día. Para ello, mostraremos una actividad basada en un logotipo de una marca conocida por todos.

#### Actividad 4:

Los movimientos en el plano se utilizan en la vida real de distintas maneras. A continuación, se te pide identificar y describir el tipo de simetría utilizada en la creación del logotipo de McDonald's. Dibuja su eje o centro de simetría según corresponda.



Figura 24. Logotipo de la Franquicia de Alimentación McDonald's (1000marcas, 2023).

#### Solución:

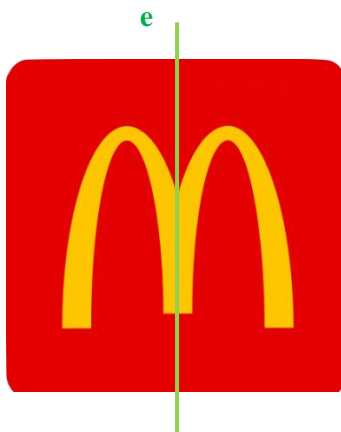


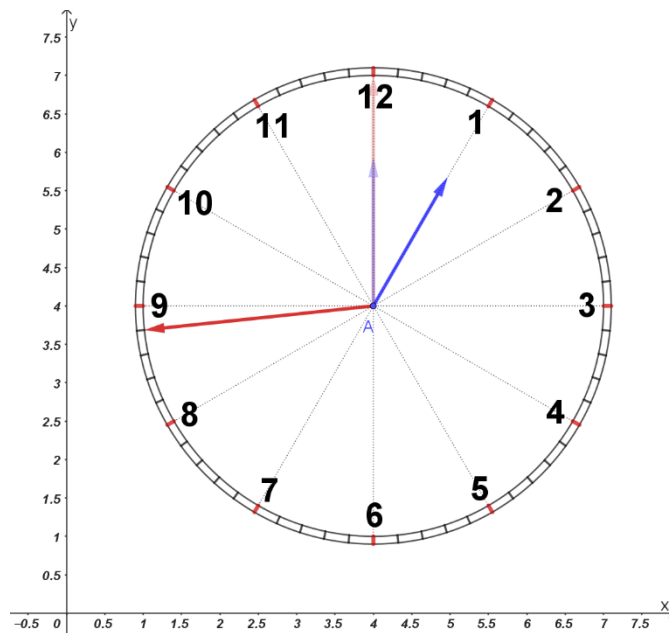
Figura 25. Logotipo de la Franquicia de Alimentación McDonald's. Modificada (Da Costa Cortés, 2023)

Actividad 4: Elaboración propia.

### 3.3.3. Demanda cognitiva

Si queremos desarrollar las competencias clave de manera adecuada, debemos elaborar actividades con diferentes niveles de demanda cognitiva que favorezcan la evolución en el aprendizaje. La demanda cognitiva se puede dividir en cuatro niveles (Smith & Stein, 1998):





**Solución:** Son las 13:44

**Actividad 6: Elaboración propia.**

3. **Procedimientos con conexión con los conceptos:** tienen una demanda cognitiva de nivel superior, por lo que para resolver estas actividades el alumno deberá comprender los conceptos matemáticos y establecer una conexión entre lo que se les piden y lo que han aprendido anteriormente.

**Actividad 7:**

Son las 12:28, si aplicamos la siguiente composición de movimientos ¿Qué hora será?

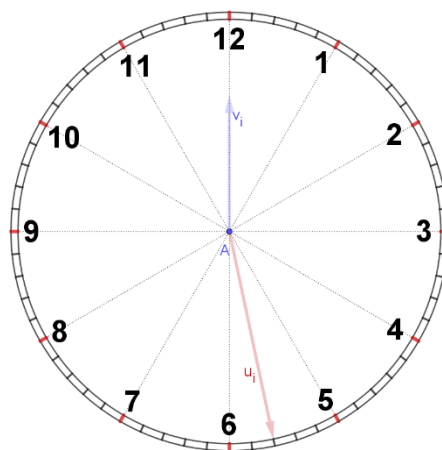
Manecilla de hora  $v_i$ :

$$v_i \xrightarrow{G_{162^\circ}} v_i' \xrightarrow{G_{60^\circ}} v_i'' \xrightarrow{G_{-42^\circ}} v_f$$

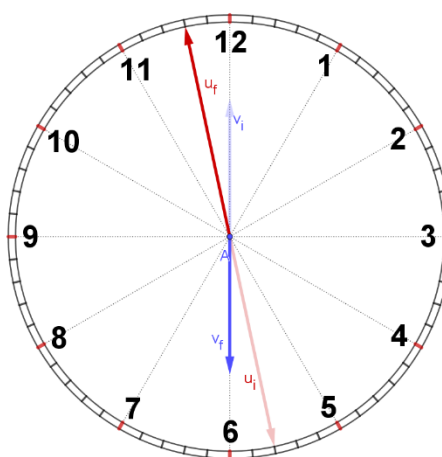
Manecilla de los minutos  $u_i$ :

$$u_i \xrightarrow{G_{24^\circ}} u_i' \xrightarrow{G_{-300^\circ}} u_i'' \xrightarrow{G_{96^\circ}} u_f$$

Una vez obtenida la hora final, ¿Crees que se podría haber obtenido este resultado aplicando un único movimiento? De ser así, razona tu respuesta.



**Solución:** Partiendo de las 12:28 al aplicar la composición obtenemos las 6:58. Sí, se puede conseguir esta hora aplicando una simetría central con centro A, la cual desplaza todos los puntos en un giro de ángulo  $180^\circ$ .



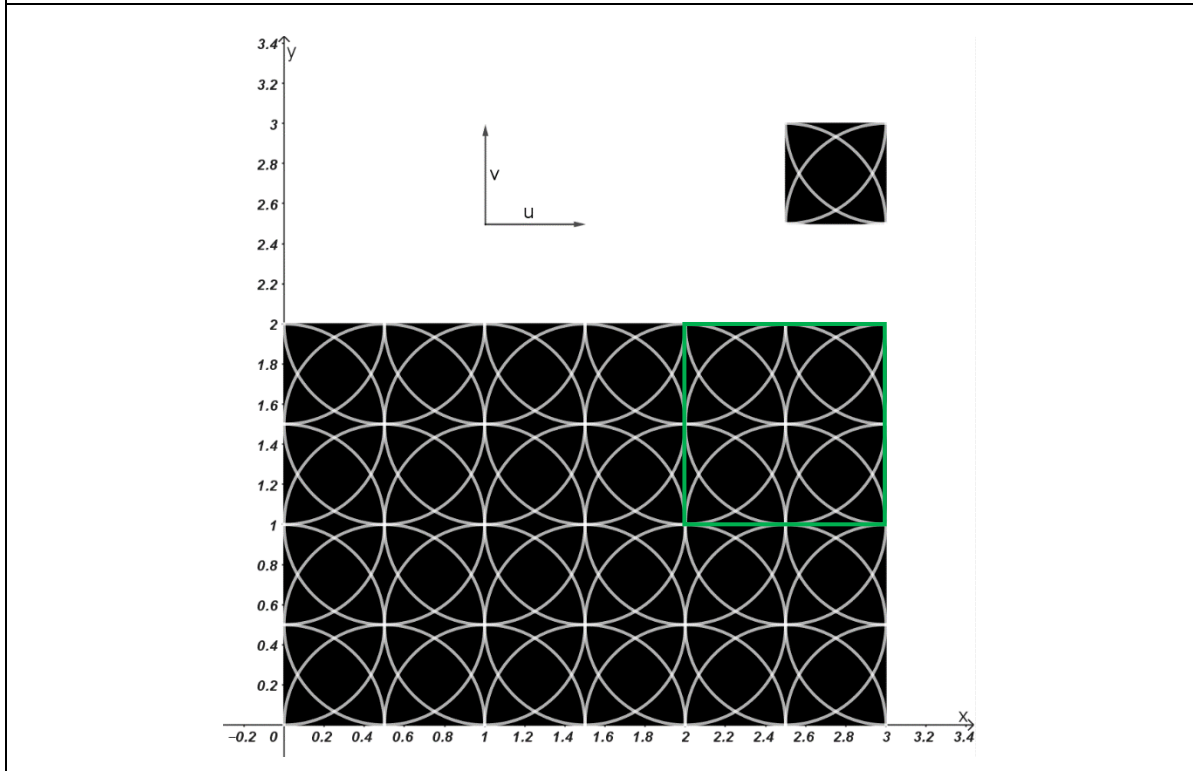
**Actividad 7: Elaboración propia.**

4. **Hacer matemáticas:** requiere un nivel superior de demanda cognitiva donde los alumnos trabajaran el pensamiento complejo pues las soluciones de las actividades no se trabajan mecánicamente aplicando algoritmos. Deberán entender los conceptos y sus relaciones, ser capaces de autorregular sus niveles cognitivos y gestionar cierto nivel de ansiedad al no tener una solución predecible.

**Actividad 8:**

Un baño de superficie  $2\text{m} \times 3\text{m}$  ha sido pavimentado con baldosas decoradas de  $0,5\text{m} \times 0,5\text{m}$ . La agrupación de cuatro baldosas genera un círculo de radio 0,5, por lo que se recubre todo el pavimento con veinticuatro baldosas o seis agrupaciones. Además, estas baldosas generan el efecto de superposición de círculos engarzados.

Realiza con GeoGebra tu propia baldosa que recubra la superficie de  $2 \times 3$ m, intercámbiala con tu compañero. Este debe ser capaz de hallar la baldosa principal e identificar los dos tipos de traslaciones que permiten recubrir el plano. A su vez, deberás hacer lo mismo con la ficha que te entregue tu compañero.



#### Actividad 8: Elaboración propia.

Con las actividades propuestas se ha introducido a los estudiantes lentamente en un proceso evolutivo a través de los movimientos del plano, de una manera amable y progresiva, con un tema altamente desarrollado con aplicaciones en la vida real.

Son actividades que crecen paulatinamente en dificultad, relacionadas con la misma temática. En cada actividad no solo se van desarrollando conceptos sino la forma de pensamiento en que se van trabajando, pasando por cada uno de los niveles cognitivos presentados por Smith y Stein (1998).

#### 3.4. Análisis libro de texto

Recordemos que en el presente curso 2022-2023 entró en vigor la LOMLOE para los cursos impares **Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo**, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y el **Decreto 39/2022, de 29 de septiembre** que lo regula en Castilla y León. En consecuencia, las editoriales han tenido que rehacer todos los libros hasta la fecha para aplicar dicha ley.

Actualmente, la mayoría de los institutos están adscritos al programa RELEO, en el cual se comprometen a mantener al menos el mismo libro durante cuatro años en cada curso, por esta razón muchos han optado por seguir utilizando el que ya tenían.

En la ESO principalmente, el libro de texto sigue siendo el recurso más utilizado. En este apartado se realizará un análisis de un libro de 3º de ESO, referido al tema “*Movimientos en el plano*” actualizado a la nueva ley.

El libro de texto que vamos a analizar es “Operación Mundo” de 3º ESO de la editorial Anaya. Actualmente utilizado en un instituto Público en núcleo urbano.

Nos vamos a centrar en el **Tema 12 Transformaciones geométricas** que se divide de la siguiente forma:

### Introducción:

Dedican dos páginas a contextualizar el tema a través de la Alhambra (Historia y arte), con diversos ejemplos que enlazan con otras actividades de aplicación manipulativa y actividades que ayudan a reflexionar.

#### 1. Transformaciones geométricas

Utiliza una página para presentar el concepto de transformación geométrica y cómo esta se puede aplicar con programas informáticos de tratamientos de fotos utilizados hoy en día para posteriormente dar una definición más formal del concepto de transformación geométrica.

#### 2. Movimientos en el plano

De nuevo dedican una página, primero a presentar de manera visual y narrada qué es un movimiento, para después dar una definición formal. A continuación, clasifica los tipos de movimientos en directos e inversos.

#### 3. Traslaciones

En la primera página utiliza el aprendizaje significativo recordando el concepto de vector, para a continuación enlazarlo con el concepto de traslación como movimiento directo e incluye una explicación sobre los elementos dobles o invariantes de las traslaciones en la segunda página.

#### 4. Giros. Figuras con centro de giro

Dedica la primera página a explicar el concepto de giro, así como el giro como movimiento directo y el concepto de elementos dobles en un giro, como las coronas circulares. Cabe destacar la nota al margen izquierdo donde explican el concepto de simetría central como giro de  $180^\circ$  de centro O.

La segunda página está dedicada a figuras con centro de giro y el número de orden de estas. A su vez, en su margen izquierdo realizan una conexión con la naturaleza enlazada con este último concepto.

## 5. Simetrías axiales. Figuras con ejes de simetría

Como en los movimientos anteriores se utiliza la primera página para definir que es simetría axial, su clasificación como movimiento inverso y cuáles son sus elementos invariantes. Prosigue describiendo figuras con ejes de simetría.

## 6. Composición de movimientos

Se define la composición de movimientos y cómo la composición de traslaciones genera como resultado otra traslación de vector suma de los vectores de las dos traslaciones anteriores. En el margen izquierdo aparece una observación de que hay que tener cuidado con el orden de aplicación de algunas composiciones. En la segunda página se realiza un estudio de la composición de simetrías axiales y cómo estas pueden dar como resultado una traslación o un giro dependiendo de si los ejes de la simetría son paralelos o se cortan respectivamente. También aborda la definición de recíproco de un movimiento, el cual deja la figura invariante ya que es también un movimiento.

## 7. Mosaicos, cenefas y rosetones

Se dedican dos páginas a explicar qué es un mosaico y su clasificación en mosaicos regulares y semirregulares, establece la definición de frisos o cenefas y rosetones.

Al final de la mayoría de las páginas se incluye una selección de ejercicios de tipo “Piensa y práctica” basados en elementos de la vida real, como, por ejemplo, el hueso nazarí.

### Ejercicios y problemas resueltos:

Se presenta una página explícitamente dedicada a ejercicios sobre mosaicos, frisos y rosetones.

### Ejercicios y problemas

Durante cinco páginas se presenta una batería de ejercicios y problemas de diferentes grados de dificultad. El apartado “¿Domina lo básico?”, contiene problemas de traslaciones, vectores, giros y simetrías de nivel 1 y sobre mosaicos de nivel 2. En “*Entrénate y practica*”, continúa con más ejercicios de niveles 1 y 2, mientras que en “*Resuelve problemas sencillos*” aparecen, después de ejercicios de nivel 1, un subapartado “Comprende y aplica en el desafío”, donde los problemas son de nivel 2.

### “Para pensar un poco más”, “También puedes hacer esto” y “¿Lo has entendido? Reflexiona”

Es una página dedicada a problemas de nivel 2, pero que precisan de un nivel de razonamiento mayor.

### Infórmate

Es una página dedicada a contextualizar aún más el contenido del tema con el contexto histórico y el arte, utilizando los diseños nazaríes. A continuación, presenta un tema de investigación sobre los mosaicos, lo que puede favorecer la curiosidad de los estudiantes.

### Autoevaluación

En una sola página se recogen diversos ejercicios y problemas sobre todo lo tratado durante esta unidad, donde los estudiantes podrán verificar si han comprendido los conocimientos explicados.

#### **3.4.1. Contenidos y Adecuación de Objetivos**

Los contenidos tratados cumplen con lo solicitado en el **BOCYL Decreto 39/2022, de 29 de septiembre** que concreta la Comunidad de Castilla y León.

En cuanto a la adecuación con los objetivos de esta ley, podemos observar cómo cumple estrictamente con la contextualización en la mayoría de sus ejercicios y problemas con referencias a la vida real, involucrándose activamente con elementos históricos y artísticos. Por otro lado, facilita una serie de ejercicios de refuerzo con distintos niveles cognitivos, para fomentar el éxito en muchos de ellos y sigue la premisa de que antes de dar una definición formal realizar una explicación más verbal e ilustrada para favorecer el aprendizaje significativo.

También trabaja con la variabilidad perceptiva desarrollando ejercicios que pueden ser resueltos por razonamiento y con recursos como lápiz y papel o resueltos mediante materiales manipulativos recortando figuras y obteniendo el resultado. Así mismo, fomenta el autoaprendizaje y la curiosidad con los apartados “*Infórmate*” o el de “*Autoevaluación*”, donde tendrán que gestionar sus creencias, actitudes y emociones.

#### **3.4.1. Conclusiones**

Siendo un libro realmente completo, no debemos olvidar que tener libros de otras editoriales facilita mantener una variedad de problemas alternativos a los del libro con el que se está impartiendo clase y a su vez tener otras opciones de presentar los conceptos. Por eso, los departamentos mantienen los libros de años anteriores y los libros ofrecidos para análisis de las editoriales.

Debido a lo precipitado que ha sido la aplicación de esta nueva ley, muchas editoriales no han podido ofertar sus libros para este curso 2022-2023 por lo que solo he podido tener acceso al libro de Anaya. Todo esto me hace tener la incertidumbre de si este libro, de entre los futuros que habrá de otras editoriales, será una de las mejores opciones.



#### 4. PROPUESTA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

En el Anexo II. C del BOCYL (**Decreto 39/2022, de 29 de septiembre**), aparecen las orientaciones necesarias para el diseño y desarrollo de situaciones de aprendizaje. A través de estas directrices trabajaremos la unidad de “Transformaciones geométricas en el plano”.

En esta propuesta se pretende trabajar tareas de creciente complejidad que permitan en sus etapas iniciales el éxito de los alumnos, con ello generaremos un nivel socioafectivo positivo hacia las matemáticas y un aumento de la motivación para emprender la resolución de problemas más complejos.

Intentaremos aunar los contenidos con diversa variabilidad perceptiva, con contextos reales y el trabajo autónomo. Con todo esto, no solo lograremos que entiendan los conceptos tratados, sino que asimilen e interioricen que las matemáticas no son solo números y cuentas, sino que son la cara oculta del mundo que nos rodea, que no son algo extrañas y que conviven con nosotros sin a veces percibirlo.

Antes de detallar los puntos de la situación de aprendizaje debe tenerse en cuenta que se ha decidido dividir los contenidos de la materia de Matemáticas de 3º ESO en catorce unidades de trabajo, con la siguiente distribución secuencial y temporal, y que solo se va a desarrollar la parte anteriormente mencionada. Como consecuencia, a la hora de evaluar, esa nota se ponderaría proporcionalmente según su peso en el conjunto del temario general.

##### **Primer trimestre**

1. Conjuntos numéricos (14 sesiones)
2. Potencias y raíces (8 sesiones)
3. Sucesiones y progresiones (12 sesiones)
4. El lenguaje algebraico: polinomios (14 sesiones)

##### **Segundo trimestre**

5. Ecuaciones de 1º y 2º grado (8 sesiones)
6. Sistemas de ecuaciones lineales (10 sesiones)
7. Introducción a las funciones (4 sesiones)
8. Funciones lineales y cuadráticas (10 sesiones)
9. Sistemas de representación y transformaciones en el plano (6 sesiones)

## Tercer trimestre

10. Geometría en el plano (8 sesiones)
11. Geometría en el espacio (8 sesiones)
12. Introducción a la estadística (4 sesiones)
13. Estadística descriptiva (12 sesiones)
14. Estadística inferencial (8 sesiones)

### 4.1. Contextualización

Esta situación de aprendizaje está orientada al curso de 3º de ESO en el IES José Jiménez Lozano, el cual es un centro público ubicado en el barrio de Parquesol, Valladolid. El aula en la que se llevará a cabo la Situación de Aprendizaje está formada por un grupo de veinticuatro alumnos.

En líneas generales el nivel sociocultural y económico del alumnado es medio alto, el contexto familiar es biparental, donde al menos uno de sus progenitores tiene estudios superiores, y pertenecen a la región de Parquesol y Arroyo de la Encomienda. La mayoría de los alumnos que llegan a este centro proceden del colegio Francisco Pino y del IESO Margarita Salas.

Con todo esto se aprecia la posibilidad de que los progenitores apoyen a sus hijos en casa hasta 3º o 4º ESO sin ninguna dificultad y si consideran que necesitan refuerzo, apuntarlos a una academia o a clases particulares.

### 4.2. Fundamentación curricular

Las matemáticas desempeñan un papel fundamental en el desarrollo y la adquisición de competencias clave del perfil de salida del alumno. A continuación, se presentan algunas de las contribuciones de las matemáticas a la consecución de estas competencias clave:

- **Competencia en comunicación lingüística (CCL):** Puesto que el lenguaje es el vehículo para comprender las situaciones que se matematizan, argumentar y expresar las soluciones y sus implicaciones, interactuar en tareas grupales y definir con precisión conceptos propios de las matemáticas.
- **Competencia plurilingüe (CP):** Las matemáticas son un lenguaje universal que requiere adquirir destrezas de transferencia con el lenguaje habitual y facilita el intercambio de información con distintas lenguas y culturas.
- **Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM):** Es a la que más contribuyen las matemáticas porque es la base del pensamiento científico, proporcionando herramientas como el razonamiento, la representación y el lenguaje matemático.

- **Competencia digital (CD):** al incluir métodos de análisis de datos y herramientas para el pensamiento computacional y crítico, vinculado a la resolución de problemas.
- **Competencia personal, social y aprender a aprender (CPSAA):** Los procesos de resolución de problemas que vertebran las matemáticas están directamente relacionados con esta competencia puesto que fomentan procesos metacognitivos de reflexión y evaluación del aprendizaje y ponen en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje.
- **Competencia ciudadana (CC):** Supone una reflexión crítica sobre los problemas sociales, a los que la materia Matemáticas contribuye con las herramientas de análisis e interpretación de datos, así como la comprensión de los conceptos y estructuras económicos, íntimamente relacionados con las matemáticas.
- **Competencia emprendedora (CE):** La resolución de problemas y tareas complejas lleva consigo la planificación, el desarrollo de ideas creativas, la toma de decisiones razonadas, la gestión de tiempos y herramientas relacionadas con esta competencia.
- **Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC):** A través del sentido espacial y la geometría, instrumentos para conocer e interpretar el patrimonio cultural y artístico y para expresar ideas de forma artística.

Las competencias clave anteriormente mencionadas están divididas en diversos descriptores operativos que concretan y contextualizan la adquisición de cada competencia clave.

El objetivo de esta Situación de Aprendizaje es que desarrollen diversas competencias específicas de la materia, con las que se logrará adquirir en cierta medida estos descriptores operativos a través de la realización de actividades. Recuérdese que todas las asignaturas del currículum contribuyen a la adquisición de estos descriptores operativos ligados a las competencias claves.

Las competencias específicas se trabajarán a través de la impartición de los siguientes contenidos, destrezas y actitudes:

- Contenidos:
  - o Movimientos y transformaciones
    - Elementos básicos de las transformaciones: vectores, rectas, puntos y ángulos de giro.
    - Transformaciones elementales como giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas tecnológicas o manipulativas.
  - o Visualización, razonamiento y modelización geométrica
    - Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia, vida diaria...).

- Destrezas y actitudes:
  - Esfuerzo y motivación: reconocimiento de su importancia en el aprendizaje de las matemáticas.
  - Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación.
  - Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.
  - Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.
  - Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.
  - Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.
  - Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.
  - La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable...).

A continuación, se muestra una tabla con las competencias específicas que se desea trabajar a través de las actividades, y sus descriptores operativos y criterios de evaluación. Cabe destacar que, aunque en una actividad se desarrollen varias competencias específicas, estas no tienen por qué ser evaluadas. Pues pueden haber sido trabajadas de una manera más concreta en otras Situaciones de Aprendizaje.

<b>Competencias Específicas</b>	<b>Actividades</b>	<b>Criterios de Evaluación</b>	<b>Descriptores Operativos</b>
<b>1</b>	2, 5 y 6	1.1	CCL1, CCL2, CCL3, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4
	2 y 4	1.2	STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CPSAA5, CE3
<b>2</b>	4, 6 y 7	2.1	CCL2, STEM1, STEM4
<b>3</b>	3 y 8	3.3	STEM1, CD2
<b>6</b>	5 y 8	6.2	STEM2, CD3, CE3
<b>7</b>	3 y 7	7.1	STEM3, CD1, CD2
<b>8</b>	3 y 9	8.1	CCL1, CP1, STEM2, STEM4, CD2
	9	8.2	CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4
<b>9</b>	3 y 9	9.1	STEM5, CPSAA1
	9	9.2	CPSAA1, CPSAA5
<b>10</b>	3	10.1	CCL5, CP3, STEM3, CPSAA3, CC2, CC3
	3	10.2	CP3, STEM3, CPSAA3

*Tabla 5. Asociación Competencia Específica con Actividades, Criterios de Evaluación y Descriptores Operativos.*

### 4.3. Metodología

Las metodologías docentes son enfoques, estrategias y técnicas utilizadas por los educadores para impartir conocimientos y facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Estas metodologías buscan establecer una estructura y un marco de trabajo que permita organizar y dirigir el proceso educativo de manera efectiva.

Existen diversas metodologías docentes, y cada una tiene sus propias características y enfoques. Las metodologías que se van a utilizar en esta situación de aprendizaje son:

- **Clase magistral o Método expositivo:** El docente presenta la información de manera verbal o escrita, y los estudiantes la reciben de forma pasiva. Es un enfoque tradicional en el que el profesor tiene un papel central y transmite los conocimientos.
- **Aprendizaje basado en resolución de problemas (ABRP):** Se centra específicamente en desarrollar habilidades de resolución de problemas en los estudiantes. En este enfoque, los estudiantes se enfrentan a problemas desafiantes que requieren de un proceso de análisis, identificación de estrategias y toma de decisiones para llegar a una solución. A través de la resolución de problemas, los estudiantes mejoran su capacidad para analizar situaciones, buscar información relevante, generar ideas, evaluar alternativas y tomar decisiones fundamentadas.
- **Aprendizaje cooperativo:** Los estudiantes trabajan en grupos pequeños para alcanzar un objetivo común. Se promueve la colaboración, la interacción y el apoyo mutuo entre los estudiantes.
- **Aprendizaje activo:** Los estudiantes participan activamente en el proceso de aprendizaje a través de actividades de tipo práctica, debates, resolución de problemas, experimentos, entre otros. Se persigue que los estudiantes sean constructores activos de su propio conocimiento.
- **Flipped Classroom (clase invertida):** Los estudiantes estudian el material de aprendizaje de forma independiente en casa, a través de recursos como videos o lecturas, y luego utilizan el tiempo en el aula para actividades prácticas, discusiones y aclaración de dudas.

Estas son solo algunas de las metodologías docentes más utilizadas, y es importante destacar que los educadores suelen combinar y adaptar diferentes enfoques según las necesidades y características de sus estudiantes. El objetivo principal es crear un entorno de aprendizaje efectivo que promueva la participación, la motivación y el desarrollo integral de los estudiantes.

Como complemento a alguna de las anteriores metodologías se utilizará la **técnica de la pregunta**.

La **técnica de la pregunta** en la docencia es una estrategia pedagógica que implica hacer preguntas a los estudiantes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje para fomentar la reflexión, la participación activa y la construcción de conocimiento.

Esta técnica tiene como objetivo principal promover el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la participación activa de los estudiantes en el aula. Al formular preguntas, el profesor busca despertar el interés, generar debate y permitir que los estudiantes expresen sus ideas y opiniones.

Existen diferentes tipos de preguntas que se pueden utilizar en la docencia, entre las cuales se encuentran:

- **Preguntas de conocimiento:** Son preguntas que buscan verificar la comprensión de conceptos básicos. Ejemplo: ¿Qué es una simetría axial? y ¿una simetría central?
- **Preguntas de comprensión:** Se utilizan para asegurarse de que los estudiantes comprendan la información presentada. Ejemplo: Explica cómo se realiza una traslación utilizando un vector de desplazamiento.
- **Preguntas de aplicación:** Buscan que los estudiantes apliquen los conceptos aprendidos a situaciones prácticas. Ejemplo: Si tienes un triángulo y aplicas una traslación de vector orientado hacia la derecha, ¿cómo cambian las coordenadas de sus vértices?
- **Preguntas de análisis:** Fomentan la capacidad de descomponer la información en sus componentes y examinar las relaciones entre ellos. Ejemplo: Descompón una figura teselada en distintas partes hasta obtener la tesela generadora o el motivo mínimo y analiza las traslaciones y simetrías presentes en ellos.
- **Preguntas de síntesis:** Se enfocan en la capacidad de combinar ideas y generar nuevas conclusiones. Ejemplo: Propón una estrategia para construir un rosetón utilizando rotaciones y simetrías.
- **Preguntas de evaluación:** Permiten a los estudiantes evaluar y emitir juicios sobre la información o argumentos presentados. Ejemplo: ¿Cuál es la importancia de comprender y aplicar las traslaciones, rotaciones, simetrías, mosaicos, frisos y rosetones en el campo de la geometría y el arte?, ¿Cómo se pueden aplicar estos conceptos matemáticos en el diseño de patrones, decoraciones o estructuras arquitectónicas? y ¿Cuál es tu opinión sobre la utilidad y la estética de las simetrías y las transformaciones geométricas en la vida cotidiana?

Al utilizar la técnica de la pregunta en la docencia, se fomenta la participación activa de los estudiantes, se estimula el pensamiento crítico y se promueve un ambiente de aprendizaje interactivo y enriquecedor. Además, ayuda a los profesores a evaluar el nivel de comprensión y el progreso de los estudiantes.

En cuanto a los **modos de agrupamiento** los trabajos individuales y por parejas son dos enfoques comunes utilizados en la docencia para organizar y realizar actividades de aprendizaje, y excepcionalmente se realizarán grupos de tres alumnos. Cada uno tiene sus propias características y ventajas, que pueden adaptarse a diferentes objetivos educativos y necesidades de los estudiantes. A continuación, se proporciona una descripción de cada enfoque y sus ventajas:

- **Trabajos individuales:** Los trabajos individuales implican que cada estudiante trabaje de forma independiente en una tarea o proyecto. En este caso, los estudiantes asumen la responsabilidad total de completar la tarea por sí mismos. Algunas ventajas de los trabajos individuales son:
  - **Enfoque personalizado:** Los trabajos individuales permiten adaptar las tareas al nivel de cada estudiante y a sus intereses particulares, lo que puede facilitar un aprendizaje más personalizado y centrado en las necesidades individuales.
  - **Reflexión y autoevaluación:** Los estudiantes pueden reflexionar sobre su propio trabajo, identificar fortalezas y áreas de mejora, y evaluar su propio progreso. Esto fomenta la autorreflexión y el desarrollo de habilidades metacognitivas.
  - **Fomento de la concentración:** Al trabajar de forma individual, los estudiantes pueden concentrarse en la tarea sin distracciones externas, lo que puede facilitar un mayor enfoque y atención en el trabajo realizado.
- **Trabajos por parejas:** Los trabajos por parejas implican que dos estudiantes participen juntos en una tarea o proyecto. Los estudiantes colaboran, comparten ideas y responsabilidades para alcanzar un objetivo común. Algunas ventajas de los trabajos por parejas son:
  - **Colaboración y comunicación:** Los estudiantes aprenden a trabajar en equipo, a comunicarse efectivamente y a desarrollar habilidades de colaboración, como el respeto mutuo, la escucha activa y el intercambio de ideas.
  - **Aprendizaje interactivo:** La interacción entre los estudiantes promueve el intercambio de conocimientos, la discusión y la construcción conjunta de significado. Pueden ofrecerse apoyo mutuo y generar un ambiente de aprendizaje cooperativo.
  - **Desarrollo de habilidades sociales:** Trabajar en pareja implica la negociación, el compromiso y el respeto hacia las ideas y perspectivas del otro. Esto contribuye al desarrollo de habilidades sociales, como la empatía, la tolerancia y la cooperación.
  - **Retroalimentación inmediata:** Los estudiantes pueden proporcionarse retroalimentación continua y apoyarse mutuamente en el proceso de aprendizaje. Esto facilita la identificación de errores, el intercambio de ideas y la mejora constante.
- **Trabajo en grupo:** Presenta varias ventajas que pueden ser beneficiosas en diferentes contextos. A continuación, se enumeran algunas de las ventajas clave del trabajo en grupo:
  - **Sinergia y creatividad:** El trabajo en grupo fomenta la sinergia, lo que significa que el resultado del trabajo conjunto es mayor que la suma de las contribuciones individuales. La interacción y la combinación de diferentes perspectivas, habilidades y conocimientos pueden generar ideas más innovadoras y soluciones creativas a los problemas.
  - **Distribución de tareas:** En un grupo, las responsabilidades y tareas pueden ser distribuidas entre los miembros según sus habilidades y fortalezas individuales. Esto permite una mayor eficiencia y productividad, ya que cada miembro puede enfocarse en lo que hacen mejor.

Además, la distribución equitativa de tareas puede reducir la carga de trabajo individual y el estrés asociado.

- **Aprendizaje colaborativo:** Trabajar en grupo fomenta el aprendizaje colaborativo, donde los miembros del equipo pueden enseñarse mutuamente, compartir conocimientos y brindar retroalimentación constructiva. Esto promueve un ambiente de aprendizaje activo, donde los miembros pueden beneficiarse del conocimiento y la experiencia de los demás, lo que conduce a un aprendizaje más profundo y significativo.
- **Desarrollo de habilidades sociales y comunicativas:** El trabajo en grupo proporciona oportunidades para mejorar las habilidades de comunicación, negociación y trabajo en equipo. Los miembros del grupo deben aprender a expresar sus ideas, escuchar activamente a los demás, resolver conflictos y llegar a acuerdos. Estas habilidades sociales son valiosas en el entorno laboral y en la vida cotidiana.
- **Motivación y apoyo mutuo:** El trabajo en grupo puede ser motivador, ya que los miembros se apoyan mutuamente, establecen metas comunes y se sienten responsables ante el grupo. La interacción y la colaboración pueden generar un ambiente de apoyo y camaradería, lo que puede aumentar la motivación, la participación y el compromiso de los miembros del equipo.
- **Mejora la resolución de problemas:** En un grupo, los miembros pueden abordar problemas y desafíos desde diferentes perspectivas, lo que puede facilitar la identificación de soluciones más completas y efectivas. La diversidad de ideas y enfoques puede enriquecer el proceso de resolución de problemas y evitar sesgos o limitaciones individuales.

Es importante considerar que la elección entre trabajos individuales, por parejas o por grupos de tres o más alumnos dependerá del objetivo de la actividad, de las características de los estudiantes y del contexto educativo. Estos enfoques tienen beneficios significativos y pueden ser utilizados de manera complementaria para promover un aprendizaje efectivo y enriquecedor.

Para finalizar mostraremos un cronograma con la distribución de las sesiones para esta Situación de Aprendizaje.

### Sesión 1

Cronograma	Tiempo (min)	Metodología	Organización Alumnos	Espacio	Recursos
Introducción y explicación teórica: “Qué es una transformación geométrica, punto invariante y qué es un movimiento en el plano y su clasificación en movimientos directos e inversos”	13	Clase magistral +Técnica de la pregunta	Individual	Aula habitual	Pizarra Vileda, rotuladores de distintos colores



Actividad 1 – Trabajo manipulativo con espejos	10	Resolución de Problemas	Parejas		Espejos y fichas
Explicación Teórica: “Concepto de vector” y “Concepto de traslación como movimiento directo y elementos dobles invariantes de una traslación”	13	Clase magistral +Técnica de la pregunta	Individual		Pizarra Vileda y rotuladores de distintos colores
Actividad 2 – Práctica de traslación con materiales manipulativos	12	Resolución de problemas	Individual		Papel milimetrado y cartón fino
Actividad 3 – Trabajo movimientos en el plano	2	Aprendizaje cooperativo	Individual		Información en TEAMS

El alumno deberá aportar el siguiente material: Libro o apuntes, cuaderno, bolígrafos, regla, compas y transportador de ángulos.

## Sesión 2

Cronograma	Tiempo (min)	Metodología	Organización Alumnos	Espacio	Recursos
Explicación Teórica: “ <i>Concepto de giro como movimiento directo, elementos dobles en un giro y figuras con centro de giro</i> ” y “ <i>Concepto de simetría axial, figura con movimiento inverso, elementos dobles de la simetría y figuras con ejes de simetría</i> ”	30	Clase magistral +Técnica de la pregunta	Individual	Aula habitual	Pizarra Vileda, rotuladores de distintos colores
Actividad 4 – Giros en la naturaleza, la industria y la arquitectura	20	Resolución de problemas			Hoja actividad
Actividad 5 – Giros y posición de poleas. Contenido trasversal con tecnología					
Actividad 6 – La simetría en el alfabeto (Deberes)	-			Casa	

Material aportado por el alumno: Libro o apuntes, cuaderno, bolígrafos, regla, compas y transportador de ángulos.

### Sesión 3

Cronograma	Tiempo (min)	Metodología	Organización Alumnos	Espacio	Recursos
Explicación teórico-práctica del uso de las herramientas para realizar movimientos con GeoGebra	15	Clase magistral +Técnica de la pregunta	Parejas	Aula informática	Proyector
Actividad 7 – Aplicación de movimientos a Pikachu	33	Resolución de problemas	Parejas		Hoja actividad y archivo GeoGebra
Actividad 8 – Descubriendo los mosaicos, frisos y rosetones	2	Flipped Classroom	Individual	Casa	Enlaces a Web en TEAMS

El alumno deberá aportar el siguiente material: Libro o apuntes, cuaderno, bolígrafos, regla, compas y transportador de ángulos.

### Sesiones 4 y 5

Cronograma	Tiempo (min)	Metodología	Organización Alumnos	Espacio	Recursos
Actividad 9 – Exposiciones alumnos	100	Clase magistral	Grupos de tres	Aula informática	Proyector

El alumno deberá aportar el siguiente material: Libro o apuntes, cuaderno, bolígrafos, regla, compas y transportador de ángulos.

### Sesión 6

Cronograma	Tiempo (min)	Metodología	Organización Alumnos	Espacio	Recursos
Repaso de contenidos y resolución de problemas	50	Clase magistral +Técnica de la pregunta	Individual	Aula habitual	Pizarra Vileda, rotuladores de distintos colores

El alumno deberá aportar el siguiente material: Libro o apuntes, cuaderno, bolígrafos, regla, compas y transportador de ángulos.

#### 4.4. Planificación de actividades

**Sesión 1 – Trabajo por parejas - Duración: 50 minutos – Aula habitual de la clase.**

- Introducción y Exposición Teórica– Duración 26 minutos

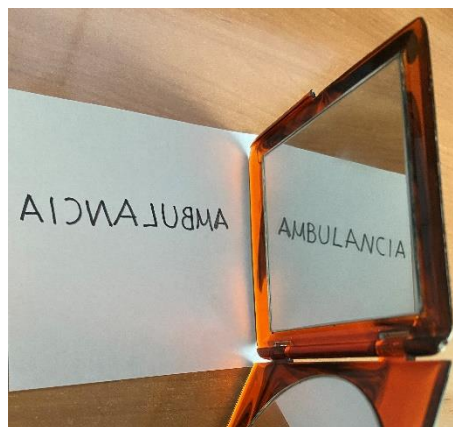
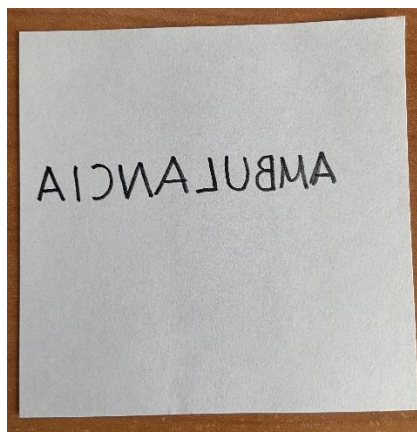
A través de clase magistral se hará una breve introducción donde se preguntará a los alumnos qué recuerdan sobre las transformaciones geométricas tratadas en cursos anteriores y se explicarán en la pizarra los conceptos de “*Qué es una transformación geométrica, punto invariante y qué es un movimiento en el plano y su clasificación en directos e inversos*” donde los alumnos podrán seguir con los apuntes o libro y preguntar las dudas que vayan apareciendo.

Una vez terminada la explicación se repartirán las siguientes fichas junto a varios espejos que podrán ir pasando entre los alumnos y se realizará la siguiente actividad.

- Actividad– Duración 10 minutos

**Actividad 1: Trabajo manipulativo con espejos – contexto de la vida real diseño para ambulancias.**

Tras haber estudiado qué es un movimiento directo e inverso, comprueba que ocurre al colocar en perpendicular un espejo al final de esta palabra. ¿Crees que este movimiento inverso es útil en la vida real?



**Actividad 1: Elaboración propia.**

Se continuará explicando el “*Concepto de vector*” visto anteriormente, para a continuación enlazarlo con “*Concepto de traslación como movimiento directo y elementos dobles invariantes de una traslación*”.

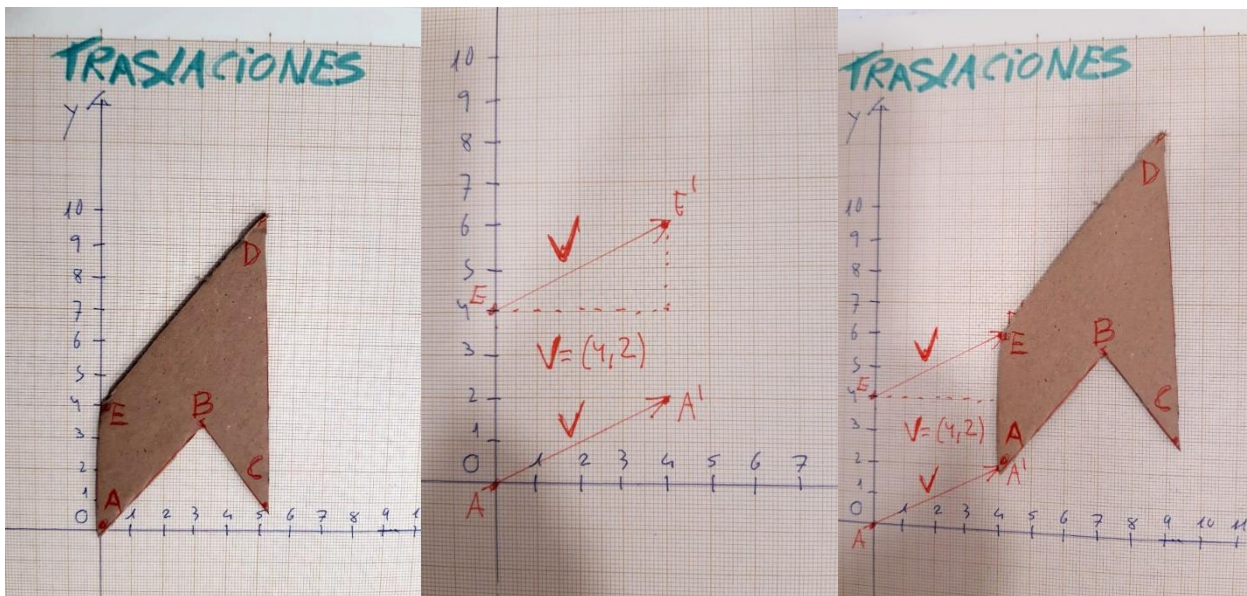
- Actividad – Duración 10 minutos

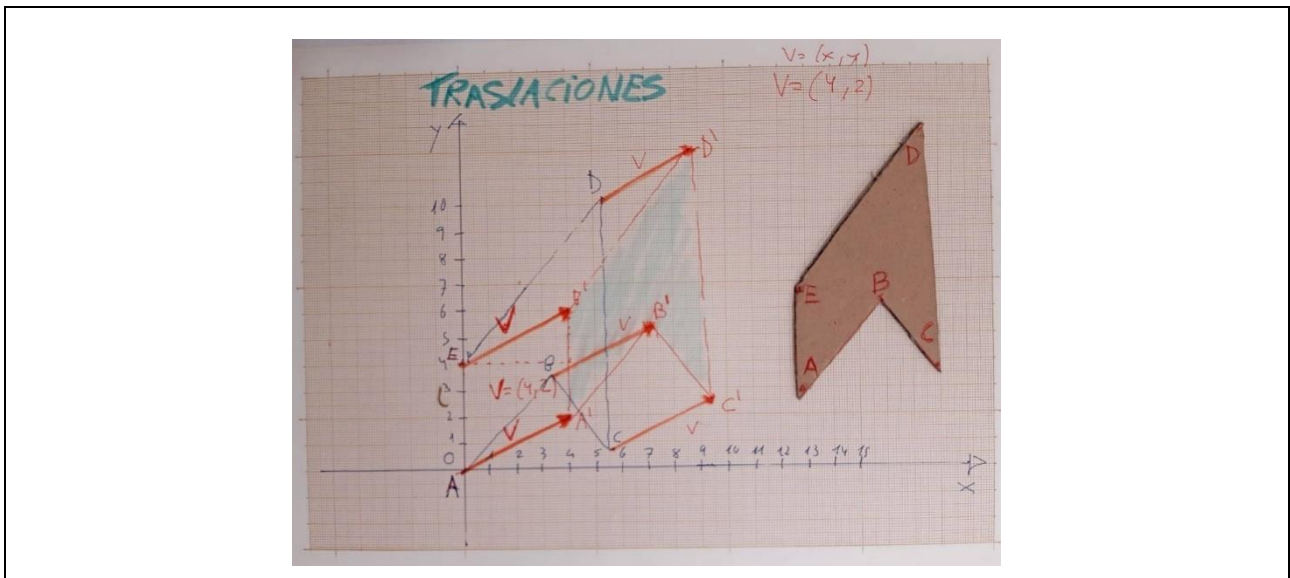
En esta actividad trabajaremos con los alumnos los contenidos de traslaciones a través de elementos manipulativos. Se facilitará papel milimetrado con ejes de coordenadas y cartón para que puedan recortar figuras que luego el alumno irá trasladando en las hojas al mismo tiempo y con los mismos movimientos que el resto de la clase. De esta forma se estimulará la creatividad y se potenciará la percepción del movimiento de las figuras.

Esta actividad se comenzará en clase y deberán terminarla en casa para ser mostrada en la clase siguiente.

### Actividad 2: Práctica de traslación con materiales manipulativos.

Se pedirá a los alumnos que dibujen un polígono en cartón a través de una serie de datos. En este ejemplo se darán los vértices de una figura poligonal y se les pedirá que apliquen un vector de traslación y dibujen la figura resultante.





**Actividad 2: Elaboración propia.**

- Actividad – Duración 2 minutos

Se anunciará que se ha subido a la plataforma TEAMS se ha subido un listado de grupos formados por tres integrantes cada uno para realizar un trabajo sobre el tema “*Transformaciones geométricas en el plano*”. Dentro encontrarán las instrucciones que deben seguir para elaborar una presentación en PowerPoint que deberán exponer en las sesiones 4 o en la 5 y las rúbricas con las que se les evaluará tanto el PowerPoint, como la exposición oral.

También encontrarán la rúbrica que deberán seguir para hacer coevaluación del trabajo de sus compañeros.

**Actividad 3: Presentación por grupos.**

Cada grupo deberá elaborar una presentación en PowerPoint sobre “*Transformaciones geométricas en el plano*”. Esta se expondrá en la Sesión 4 o 5, siendo el profesor el que marque el orden de exposición y el alumno que expondrá cada parte en cada grupo.

La presentación deberá estar formada por un máximo de diez diapositivas conteniendo:

- Portada que incluya en nombre de todos los integrantes
- Transformaciones geométricas en el plano.
- Traslación.
- Giro.
- Simetría axial.
- Composición de transformaciones.
- Mosaicos, frisos y rosetones.
- Conclusión sobre porqué las transformaciones geométricas son importantes en la vida real.

Incluirá al menos dos fotos o capturas de creaciones en GeoGebra sobre dichos movimientos y una breve explicación sobre los mismos dejando clarificado cuales son los elementos que componen esos movimientos. Deberá escribirse en el lenguaje matemático correspondiente.

Se valorará positivamente el uso de elementos de la vida real, de la naturaleza, creaciones artísticas, elementos arquitectónicos, elementos de la publicidad y creaciones propias, ya sea en formato digital o manual.

Tiempo máximo de cada exposición 8 min, controlado por el profesor.

La rúbrica, tanto de la presentación como de la exposición oral, se podrá encontrar junto al listado de grupos, contigua a la rúbrica que deberéis seguir para evaluar a vuestros compañeros de equipo y a vosotros mismos.

### **Actividad 3: Elaboración propia.**

## **Sesión 2 – Trabajo individual - Duración: 50 minutos – Aula habitual de la clase.**

### - Explicación Teórica – Duración 30 minutos

Se usará una clase magistral junto a la técnica de la pregunta para explicar:

- *“Concepto de giro como movimiento directo, elementos dobles en un giro y figuras con centro de giro”.*
- *“Concepto de simetría axial, figura con movimiento inverso, elementos dobles de la simetría y figuras con ejes de simetría”*

### - Actividades – Duración 20 minutos

En la primera actividad se trabajará los contenidos de giros a través de elementos de la vida real como por ejemplo las estrellas de mar, el diseño de llantas de los coches o los rosetones en arquitectura. Deberán identificar el centro de giro y el ángulo aplicado. De esta forma se favorecerá la motivación al ver como este movimiento existe en la vida real.

En la segunda actividad se trabaja con elementos del entorno que aparecen también en la asignatura de Tecnología donde trabajan también los conceptos relativos a giros.

Las soluciones para ambas actividades se darán al finalizar la clase.

Mientras los alumnos realizan estas actividades se irá mesa por mesa revisando la Actividad 2.

### **Actividad 4: Giros en la naturaleza, la industria y la arquitectura.**

A continuación, se muestra una estrella de mar, una llanta de coche y un rosetón de la catedral de León. Identifica el centro de giro y el ángulo de giro que se utiliza para crearlas.

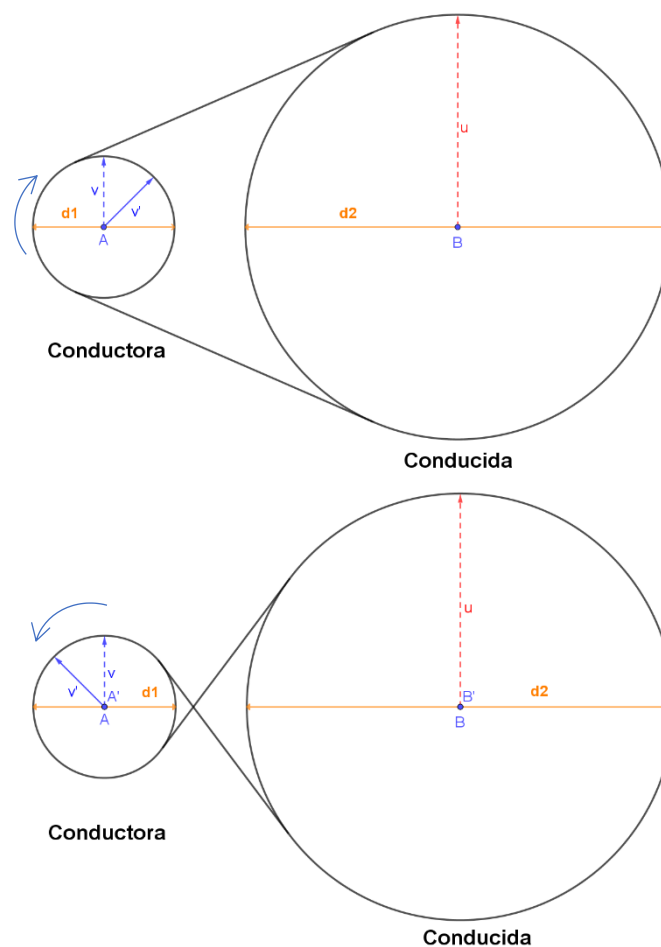


Figura 25. Estrella de mar (Fernández Roldán, 2019), llanta coche y rosetón (Da Costa Cortés, 2023).

**Actividad 4: Elaboración propia.**

**Actividad 5: Giros y posición en poleas. Contenido transversal con la asignatura de tecnología.**

Las siguientes poleas con correa tienen una relación de transmisión  $i = \frac{d1}{d2} = \frac{1}{3}$ . En la primera imagen se ha aplicado a la rueda conductora un giro de  $-45^\circ$  ( $G-45^\circ$ ) y en la segunda imagen se ha aplicado a la rueda conductora un giro de  $45^\circ$  ( $G45^\circ$ ). ¿En qué posición se hallará la rueda conducida en ambos casos?



**Actividad 5: Elaboración propia.**

### **Actividad 6: Las simetrías en el alfabeto (Actividad para hacer en casa)**

En el alfabeto podemos encontrar letras que puedes crearse a través de algún tipo de simetría o giro. Dibuja sobre la letra correspondiente los ejes de simetría o los centros de giro si los hubiera.

**A B C D E F G H I**  
**J K L M N O P Q**  
**R S T U V W X Y Z**

**Actividad 6: Elaboración propia.**

### **Sesión 3 – Trabajo por parejas - Duración: 50 minutos – Aula de informática.**

- Recogida de actividad 6.
- Explicación del programa GeoGebra en el aula de informática y aplicación de los conceptos tratados en el aula – Duración 15 minutos  
En esta actividad trabajaremos con los alumnos los contenidos de traslaciones, giros y simetrías a través del programa GeoGebra. Dispondremos a los alumnos por parejas en cada ordenador y repasaremos el funcionamiento básico del programa para que después, y junto con el profesor, apliquen los diferentes movimientos en una figura cualquiera. El objetivo de esta actividad es que los alumnos aprendan a usar el programa tanto para diseñar, como para comprobar resultados y entiendan las posibilidades que la informática nos brinda ante la representación y movimientos de figuras geométricas. Al trabajar en equipos de dos, trabajaremos también la responsabilidad y la cooperación.
- Actividad – Duración 35 minutos

### **Actividad 7: Distintos movimientos aplicados a la imagen de Pikachu, personaje de la serie Pokemon.**

A la figura original, que contiene los puntos A y B, se le han aplicado cinco isometrías. Analiza y descríbelas. También deberás anotar las coordenadas de todos los puntos desde los puntos A y B hasta los puntos A<sub>4</sub> y B<sub>4</sub>. Finalmente, con el archivo de GeoGebra que se os ha dado con la figura original aplica las isometrías y



comprueba tus resultados. Recuerda que deberás entregar tanto la hoja como el archivo de GeoGebra que has modificado.

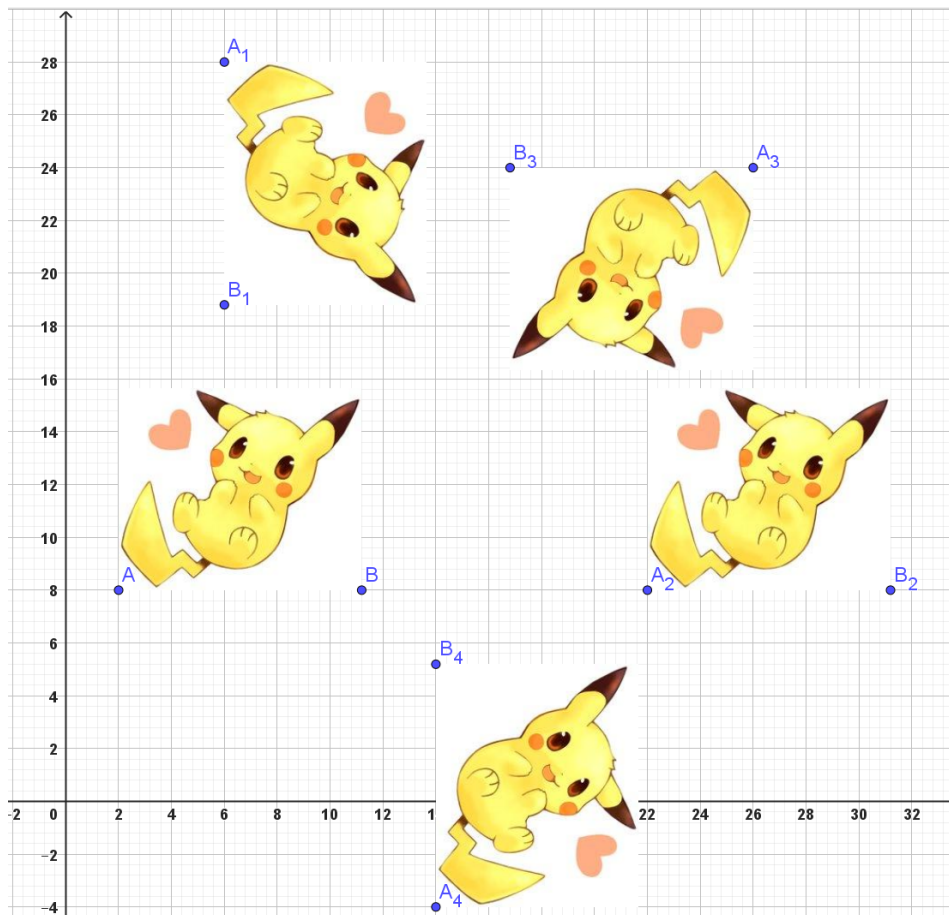


Figura 26. Pikachu personaje de la Franquicia Pokemon (140 Dibujos de Pikachu fáciles de hacer para COLOREAR , 2019). Modificada (Da Costa Cortés, 2023).

#### Actividad 7: Elaboración propia.

##### - Actividades para casa

Cada alumno deberá realizar una coevaluación del trabajo de su compañero en la sesión anterior. Esta estará disponible en TEAMS para su descarga y deberá ser enviada al profesor por privado.

La actividad está basada en la metodología Flipped Classroom, donde el alumno será el responsable de su aprendizaje.

Al finalizar la clase se les indicará que en TEAMS figuran varios enlaces a Videos y Webs de internet donde se explican algunos conceptos sobre mosaicos, frisos y rosetones. Como, por ejemplo:

- *Frisos y Mosaicos*. (2022, 19 febrero). [Video]. YouTube. Recuperado 20 de mayo de 2023, de <https://www.youtube.com/watch?v=hywoEwqHrGg>
- Mora Sánchez, J. A. (s. f.). *José Antonio Mora Sánchez – Resources*. GeoGebra. Recuperado 8 de junio de 2023, de <https://www.geogebra.org/u/jamora>

- Arranz, J. M. (s. f.). *José Manuel Arranz – Resources*. GeoGebra. Recuperado 8 de junio de 2023, de <https://www.geogebra.org/u/arranz>
- Sada Allo, M. (2007, 22 diciembre). *Webs interactivas de Matemáticas*. Recuperado 8 de junio de 2023, de <http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm>

Deberán visualizar los videos y realizar la siguiente tarea.

**Actividad 8: Descubriendo los mosaicos, frisos y rosetones.**

Accede a la plataforma TEAMS y visualiza los videos sobre “*Mosaicos, frisos y rosetones*”.

A continuación, deberás buscar/hacer dos fotografías o capturas de creaciones propias con el programa GeoGebra en las que aparezcan estos elementos. Primará la originalidad, por lo que no sirven las fotografías que aparecen en el libro.

Deberás subir las a la carpeta con tu nombre seguido de las iniciales de tus apellidos sin espacios.

**Nota:** Ponte de acuerdo con tus compañeros de la **Actividad 3: Presentación por grupos** e incluíd dos de vuestras fotos en el trabajo.

**Actividad 8: Elaboración propia.**

- Aviso: último día para subir la presentación de la actividad 11

**Sesiones 4 y 5 – Trabajo grupo - Duración: 100 minutos – Aula de informática.**

- Entrega de la Actividad 7 corregida.
- Actividad – Duración 100 minutos

**Actividad 9: Aprender a aprender.**

El profesor irá proyectando la presentación de PowerPoint de la Actividad 3; en cada presentación se indicará a los alumnos de cada grupo y el orden en que deberán exponer.

El profesor se reserva la posibilidad de hacerles alguna pregunta o de ofrecer al resto de compañeros de clase que realicen alguna pregunta, cuestión o duda.

**Actividad 9: Elaboración propia.**

**Sesión 6 – Trabajo individual - Duración: 50 minutos – Aula habitual de la clase.**

- Repaso de los contenidos tratados hasta el momento.

Se realizará un repaso de los conceptos considerados en clase y se responderán dudas sobre los ejercicios hechos en clase y de otros ejercicios solicitados por los alumnos.

#### 4.5. Atención a las diferencias individuales

La atención a la diversidad no es sólo tratar alumnos que puedan tener dificultades específicas, TEA, TDAH, altas capacidades, etc. Hay que tener en cuenta que todos los alumnos van a tener algún tipo de diferencia individual y que tienen diferentes circunstancias y distintos ritmos de aprendizaje.

Nuestros alumnos con NEE podrán realizar las mismas actividades que sus compañeros adaptando los materiales.

Toda la clase se distribuirá en grupos, de tal forma que alumnos con peores habilidades matemáticas estarán con alumnos con competencia media o alta. Se pretende buscar la cooperación y favorecer la comunicación.

A su vez tendrán que resolver problemas contextualizados en temas para adolescentes que son prácticamente conocidos por todos, los cuales también implicarán el uso del razonamiento y la abstracción y no se percibirán tan ligados a las matemáticas, lo que favorecerá la implicación de los alumnos, aunque tengan una actitud más negativa hacia estas.

Con todo ello se busca que todos puedan participar en la actividad, que no se frustren por no resolver un problema individualmente, sino que se sientan apoyados ya que son dos compañeros, que vean que los problemas que se plantean podrían ocurrir realmente, que desarrollen una actitud positiva hacia la resolución de problemas al plantearlo como actividad de grupo y que practiquen el razonamiento a la hora de resolver cuestiones que no son estrictamente un “problema”.

Además, muchas de las actividades se plantean de tal forma que conduzcan al éxito, para que así al final de la actividad, tengan una sensación positiva respecto a su esfuerzo e implicación.

Así mismo, al pasar por las mesas, si observamos que alguna pareja se ha estancado con sus problemas, podremos darles indicaciones sobre si van por buen camino o no, sin llegar a resolverles el problema, lo que se conocen como “pistas”. Por supuesto, siempre respetando el principio de equidad y justicia de que se hará con todas las parejas indiscriminadamente.

#### 4.6. Proceso de evaluación

En un proceso de evaluación es importante tener en cuenta diversos aspectos para asegurar una evaluación completa y significativa del aprendizaje de los estudiantes. A continuación, se muestran algunos aspectos clave a considerar:

- **Objetivos de aprendizaje:** Revisar los objetivos establecidos al inicio de la Situación de Aprendizaje para evaluar en qué medida se han logrado. Los objetivos deben ser claros, medibles y alineados con los contenidos y competencias desarrollados durante la situación de aprendizaje.

- **Criterios de evaluación:** Definir criterios claros y específicos que permitan valorar el nivel de logro de los estudiantes. Estos criterios deben ser comprensibles para los estudiantes y servir como referencia durante el proceso de evaluación.
- **Diversidad de evidencias:** Utilizar diferentes tipos de evidencias de aprendizaje, como pruebas escritas, proyectos, presentaciones orales, trabajos prácticos, entre otros. Esto proporciona una visión más completa del progreso y las habilidades de los estudiantes.
- **Coherencia y secuencia:** Evaluar cómo se han desarrollado los contenidos y las actividades a lo largo de la Situación de Aprendizaje, asegurando una progresión lógica y coherente en la adquisición de conocimientos y competencias.
- **Participación y colaboración:** Considerar la participación activa de los estudiantes en las actividades, su nivel de colaboración y contribución en el trabajo en equipo, debates o proyectos grupales.
- **Proceso y producto:** Evaluar tanto el proceso de aprendizaje como los productos finales. Valorar no solo los resultados finales, sino también el esfuerzo, la reflexión, el proceso de resolución de problemas y la mejora continua de los estudiantes.
- **Retroalimentación formativa:** Proporcionar retroalimentación continua y constructiva a los estudiantes, identificando sus fortalezas y áreas de mejora. La retroalimentación debe ser clara, específica y orientada hacia el desarrollo de competencias y el logro de los objetivos.
- **Evaluación auténtica:** Utilizar situaciones y contextos reales que permitan a los estudiantes aplicar los conocimientos y habilidades adquiridos de manera auténtica. Esto implica diseñar actividades y tareas que reflejen situaciones de la vida real y desafíos del mundo actual.
- **Equidad y diversidad:** Considerar las diferentes necesidades, estilos de aprendizaje y diversidad cultural de los estudiantes en el momento de evaluar. Garantizar una evaluación justa y sin sesgos, adaptando las estrategias de evaluación según las características individuales de los estudiantes.
- **Autoevaluación y coevaluación:** Fomentar la participación de los estudiantes en su propio proceso de evaluación, invitándolos a reflexionar sobre su aprendizaje, establecer metas y evaluar su propio progreso. Además, promover la coevaluación, donde los estudiantes se evalúan entre sí, favoreciendo la responsabilidad y la autorregulación.

Al considerar estos aspectos, se puede realizar una evaluación integral que brinde una visión completa del aprendizaje de los estudiantes y que sea justa, significativa y orientada al desarrollo de competencias.

En el **Decreto 39/2022, de 29 de septiembre** (BOCYL-D-30092022-3 Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León., 2022), se indican los descriptores operativos de las competencias que se relacionan con las competencias específicas de nuestra materia y donde estas últimas deben ser trabajadas durante todo el curso en diversas situaciones de aprendizaje.

### Matemáticas

	CCL					CP			STEM					CD					CPSAA					CC				CE			CCEC			
	CCL1	CCL2	CCL3	CCL4	CCL5	CP1	CP2	CP3	STEM1	STEM2	STEM3	STEM4	STEM5	CD1	CD2	CD3	CD4	CD5	CPSAA1	CPSAA2	CPSAA3	CPSAA4	CPSAA5	CC1	CC2	CC3	CC4	CE1	CE2	CE3	CCEC1	CCEC2	CCEC3	CCEC4
Competencia Específica 1	✓	✓	✓						✓	✓	✓	✓		✓							✓							✓						✓
Competencia Específica 2	✓								✓	✓		✓		✓						✓				✓				✓						
Competencia Específica 3	✓								✓	✓				✓	✓		✓											✓						
Competencia Específica 4									✓	✓	✓			✓	✓		✓											✓						
Competencia Específica 5									✓		✓			✓	✓															✓				
Competencia Específica 6	✓								✓	✓	✓		✓		✓		✓								✓		✓	✓	✓	✓				
Competencia Específica 7											✓	✓		✓	✓		✓											✓						✓
Competencia Específica 8	✓	✓				✓			✓	✓				✓	✓													✓						✓
Competencia Específica 9													✓					✓		✓	✓						✓	✓						
Competencia Específica 10				✓		✓			✓									✓	✓				✓	✓										

*Tabla 6. Descriptores Operativos con las Competencias Específica de la Materia (BOCYL-D-30092022-3 Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León., 2022)*

Debemos considerar que la evaluación de esta Situación de Aprendizaje se corresponde según carga semanal con el 17%, por lo que las notas deberán ser ponderadas con respecto a la carga semanal del trimestre completo.

La nota se dividirá en:

- **Participación en clase y comportamiento:** 30%, que se realizará mediante un anecdotario.

Un anecdotario de profesor es un registro en el que se anotan anécdotas, observaciones o incidentes relevantes relacionados con la participación en clase y el comportamiento de los estudiantes. Estará formado por la siguiente estructura:

- o Fecha: Registra la fecha en la que se produjo la anécdota o incidente.
- o Nombre del estudiante: Anota el nombre del estudiante involucrado en la situación.
- o Descripción de la situación: Describe de manera objetiva y concisa la situación específica que deseas registrar. Puedes incluir detalles relevantes como el contexto, el tipo de participación o comportamiento y cómo impactó en la dinámica de la clase.
- o Reflexión o análisis: Escribe las reflexiones del profesor sobre la situación. Análisis de la causa del comportamiento o la razón detrás de la participación del estudiante. También se

puede destacar el impacto que tuvo en el aprendizaje de los demás estudiantes o en el ambiente de la clase.

- Acciones tomadas: Registra cualquier acción tomada como resultado de la situación. Por ejemplo, si se habló con el estudiante después de clase, si se aplicó algún tipo de consecuencia o si se tomaron medidas para fomentar la participación positiva en el futuro.
- Seguimiento: Si es necesario, anotar cualquier seguimiento u observación posterior que se precise hacer con respecto a la situación. Por ejemplo, si se planea hablar con los padres del estudiante, si se necesita consultar con otros profesores o si se planea monitorear el comportamiento o la participación del estudiante a lo largo del tiempo.

Recuérdese que el anecdotario de profesor es una herramienta para tener un registro objetivo y sistemático de las situaciones de participación y comportamiento en clase. Debe ser confidencial y utilizado como una herramienta de reflexión y seguimiento para el desarrollo del estudiante.

- **Entrega de tareas y exposición: 70%.**

La evaluación se realizará mediante el uso de diversas rúbricas donde la calificación de cada actividad estará ponderada por su carga de trabajo (trabajo en clase y expectativas de trabajo personal). Las rúbricas que se utilizarán serán las que se hallan en los Anexos que se detallan a continuación para cada actividad.

- Anexo I. Rúbrica autoevaluación: Sin aplicación.
- Anexo II. Rúbrica para evaluar a mis compañeros (Coevaluación): Actividad 3.
- Anexo III. Rúbrica para evaluar la resolución de problemas: Actividades 2, 4, 5, 6, 7 y 8.
- Anexo IV. Rúbrica para evaluar la exposición oral: Actividad 9.
- Anexo V. Rúbrica para evaluar la presentación de la investigación: Actividad 3.

Otros puntos para tener en cuenta y para clarificar las tablas con los criterios de evaluación y las actividades son:

- En rúbricas donde aparezca evaluado un mismo criterio desde distintos puntos de vista, la nota de ese criterio en esa rúbrica será la media aritmética de estas.
- La valoración del criterio de evaluación obtenido de cada actividad a través de la rúbrica se realizará en tanto por diez y su resultado final se mostrará en la columna de la derecha, “Nota sobre 10”.
- A la hora de calcular el valor obtenido de cada criterio, este deberá ser ponderado en función del tiempo empleado en cada actividad.

En esta tabla se muestra la ponderación que deberá realizarse sobre las calificaciones obtenidas a través de la rúbrica para la obtención de la nota de cada actividad.

Actividad	C.Esp.1			C.Esp.2		C.Esp.3			C.Esp.4		C.Esp.5		C.Esp.6			C.Esp.7		C.Esp.8		C.Esp.9		C.Esp.10		Calificación
	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	5.1	5.2	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2	8.1	8.2	9.1	9.2	10.1	10.2	
1																								
2	2,5	7,5																						
3								2								4		1,5		0,5		1	1	
4		7		3																				
5	5													5										
6	5			5																				
7				5												5								
8								7						3										
9																		3	3	2	2			

Tabla 7. Calificación Actividades

En esta tabla se muestra la calificación final obtenida en cada criterio de evaluación de la rúbrica calculada a través de la ponderación en tanto por ciento del tiempo empleado en cada actividad.

Actividad	Ponderación (Tiempo)	C.Esp.1			C.Esp.2		C.Esp.3			C.Esp.4		C.Esp.5		C.Esp.6			C.Esp.7		C.Esp.8		C.Esp.9		C.Esp.10	
		1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	5.1	5.2	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2	8.1	8.2	9.1	9.2	10.1	10.2
1	10																							
2	30	40	75																					
3	40							22,5								44,5		33,3		20		100	100	
4	10		25		23																			
5	15	20												62,5										
6	30	40			38,5																			
7	30				38,5											55,5								
8	15							77,5						37,5										
9	8																	66,7	100	80	100			
Calificación por criterios																								

Tabla 8. Calificación Criterios de Evaluación Ponderados



#### 4.7. Valoración de la situación de aprendizaje

Una vez llevada a cabo una Situación de Aprendizaje es necesario realizar una valoración donde se evalúa su efectividad y calidad en términos de logro de objetivos educativos, adecuación de los contenidos, estrategias de enseñanza utilizadas, evaluación del aprendizaje de los estudiantes y otros aspectos relevantes. Aquí se presenta un proceso básico para llevar a cabo esta valoración por parte del profesor:

- **Revisión de los objetivos:** Analizar los objetivos planteados en la Situación de Aprendizaje para asegurarse de que son claros, específicos y alineados con los contenidos y las competencias que se pretenden desarrollar.
- **Análisis de los contenidos:** Examinar los contenidos propuestos en la Situación de Aprendizaje y evaluar si son apropiados para el nivel y las características de los estudiantes. Considerar si se abordan los conceptos clave, si hay suficiente profundidad y si se presentan de manera organizada y secuencial.
- **Evaluación de las estrategias de enseñanza:** Examinar las estrategias utilizadas por el profesor para enseñar los contenidos. Evaluar si se emplean métodos variados y adecuados para promover la participación activa de los estudiantes, si se fomenta el pensamiento crítico y la resolución de problemas, y si se utilizan recursos didácticos apropiados.
- **Revisión de la evaluación del aprendizaje:** Analizar cómo se ha llevado a cabo la evaluación del aprendizaje de los estudiantes. Considerar si se utilizan diferentes instrumentos de evaluación, como pruebas, trabajos prácticos, proyectos, etc. Evaluar si los criterios de evaluación son claros y justos, y si la retroalimentación proporcionada es adecuada y constructiva.
- **Reflexión sobre el clima de clase y la gestión del tiempo:** Observar el clima de clase durante la implementación de la Situación de Aprendizaje. Evaluar si el ambiente promueve la participación, el respeto y la colaboración entre los estudiantes. Además, considerar si el tiempo se ha administrado de manera eficiente y si se han cumplido los plazos establecidos.
- **Recopilación de datos:** Obtener información relevante a través de diferentes fuentes, como observaciones en clase, análisis de trabajos y proyectos de los estudiantes, entrevistas o encuestas a los alumnos, entre otros métodos de recolección de datos.
- **Análisis de datos y elaboración de conclusiones:** Analizar los datos recopilados y evaluar la eficacia de la Situación de Aprendizaje en relación con los aspectos mencionados anteriormente. Identificar fortalezas y áreas de mejora, y elaborar conclusiones basadas en la evidencia recopilada.
- **Propuestas de mejora:** Sugerir acciones concretas para mejorar la Situación de Aprendizaje, como ajustes en los objetivos, revisión de los contenidos, implementación de estrategias de enseñanza alternativas o modificación de los métodos de evaluación.

Hay que recordar que la valoración de una Situación de Aprendizaje es un proceso continuo y reflexivo que busca mejorar la práctica docente. Es importante mantener una actitud abierta y receptiva a los comentarios y sugerencias de los estudiantes y colegas para promover el crecimiento profesional.

Por consiguiente, es importante involucrar a los estudiantes en la evaluación de la Situación de Aprendizaje, y que se les brinde la oportunidad de reflexionar sobre su propio aprendizaje y contribuir con su perspectiva. Sin embargo, para poder obtener unos resultados sinceros es necesario crear un ambiente de confianza y respeto para que los estudiantes se sientan cómodos compartiendo sus opiniones y perspectivas.

A continuación, se muestra un modelo de cuestionario a responder por parte del profesor.

	0	1	2	3
<b>Revisión de los objetivos:</b>				
<b>¿En qué medida los objetivos planteados en la Situación de Aprendizaje son claros y comprensibles para los estudiantes?</b> (0: No son claros ni comprensibles, 1: Son poco claros o comprensibles, 2: Son moderadamente claros y comprensibles, 3: Son completamente claros y comprensibles)				
<b>¿En qué medida los objetivos establecidos en la Situación de Aprendizaje están alineados con los contenidos y las competencias que se pretenden desarrollar?</b> (0: No están alineados en absoluto, 1: Están poco alineados, 2: Están moderadamente alineados, 3: Están completamente alineados)				
<b>Análisis de los contenidos:</b>				
<b>¿En qué medida los contenidos propuestos en la Situación de Aprendizaje abordan los conceptos clave que se espera que los estudiantes comprendan?</b> (0: No abordan los conceptos clave en absoluto, 1: Abordan los conceptos clave en menor medida, 2: Abordan los conceptos clave en cierta medida, 3: Abordan completamente los conceptos clave)				
<b>¿En qué medida los contenidos se presentan de manera organizada y secuencial, facilitando la comprensión y el aprendizaje progresivo?</b> (0: No se presentan de manera organizada ni secuencial, 1: Se presentan de manera poco organizada o secuencial, 2: Se presentan de manera moderadamente organizada y secuencial, 3: Se presentan de manera completamente organizada y secuencial)				
<b>Evaluación de las estrategias de enseñanza:</b>				
<b>¿En qué medida las estrategias de enseñanza utilizadas promovieron la participación activa de los estudiantes en el proceso de aprendizaje?</b> (0: No promovieron la participación activa en absoluto, 1: Promovieron la participación activa en menor medida, 2: Promovieron la participación activa en cierta medida, 3: Promovieron completamente la participación activa)				
<b>¿En qué medida las estrategias de enseñanza fomentaron el pensamiento crítico y la resolución de problemas por parte de los estudiantes?</b> (0: No fomentaron el				

pensamiento crítico ni la resolución de problemas en absoluto, 1: Fomentaron en menor medida el pensamiento crítico y la resolución de problemas, 2: Fomentaron moderadamente el pensamiento crítico y la resolución de problemas, 3: Fomentaron completamente el pensamiento crítico y la resolución de problemas)				
<b>Revisión de la evaluación del aprendizaje:</b>				
<b>¿En qué medida se utilizaron diferentes instrumentos de evaluación para medir el aprendizaje de los estudiantes en la Situación de Aprendizaje?</b> (0: No se utilizaron diferentes instrumentos de evaluación en absoluto, 1: Se utilizaron en menor medida diferentes instrumentos de evaluación, 2: Se utilizaron en cierta medida diferentes instrumentos de evaluación, 3: Se utilizaron completamente diferentes instrumentos de evaluación)				
<b>¿En qué medida la retroalimentación proporcionada a los estudiantes fue clara, específica y útil para mejorar su aprendizaje?</b> (0: No fue clara, específica ni útil en absoluto, 1: Fue poco clara, específica o útil, 2: Fue moderadamente clara, específica y útil, 3: Fue completamente clara, específica y útil)				
<b>Reflexión sobre el clima de clase y la gestión del tiempo:</b>				
<b>¿En qué medida el ambiente de clase promovió la participación, el respeto y la colaboración entre los estudiantes durante la implementación de la Situación de Aprendizaje?</b> (0: No promovió en absoluto la participación, el respeto ni la colaboración, 1: Promovió en menor medida la participación, el respeto o la colaboración, 2: Promovió moderadamente la participación, el respeto y la colaboración, 3: Promovió completamente la participación, el respeto y la colaboración)  <b>¿En qué medida se administró eficientemente el tiempo durante la implementación de la Situación de Aprendizaje y se cumplieron los plazos establecidos?</b> (0: El tiempo no se administró eficientemente y no se cumplieron los plazos en absoluto, 1: El tiempo se administró poco eficientemente y se cumplieron parcialmente los plazos, 2: El tiempo se administró moderadamente eficientemente y se cumplieron la mayoría de los plazos, 3: El tiempo se administró completamente eficientemente y se cumplieron todos los plazos)				
<b>Recopilación de datos:</b>				
<b>¿En qué medida se obtuvo información relevante a través de diferentes fuentes, como observaciones en clase, análisis de trabajos y proyectos de los estudiantes, entrevistas o encuestas a los alumnos, entre otros métodos de recolección de datos?</b> (0: No se obtuvo información relevante en absoluto, 1: Se obtuvo información relevante en menor medida, 2: Se obtuvo información relevante en cierta medida, 3: Se obtuvo información relevante de manera completa)				
<b>¿En qué medida se recopilaron datos de manera sistemática y organizada para evaluar la Situación de Aprendizaje y obtener una visión completa del proceso de aprendizaje?</b> (0: No se recopilaron datos de manera sistemática ni organizada en absoluto, 1: Se recopilaron datos de manera poco sistemática u organizada, 2: Se recopilaron datos de manera moderadamente sistemática y organizada, 3: Se recopilaron datos de manera completamente sistemática y organizada)				
<b>Análisis de datos y elaboración de conclusiones:</b>				

<p><b>¿En qué medida se analizaron los datos recopilados de manera rigurosa y objetiva para evaluar la eficacia de la Situación de Aprendizaje en relación con los aspectos mencionados anteriormente?</b> (0: No se analizaron los datos de manera rigurosa ni objetiva en absoluto, 1: Se analizaron los datos de manera poco rigurosa u objetiva, 2: Se analizaron los datos de manera moderadamente rigurosa y objetiva, 3: Se analizaron los datos de manera completamente rigurosa y objetiva)</p>				
<p><b>¿En qué medida se elaboraron conclusiones basadas en la evidencia recopilada, identificando tanto las fortalezas como las áreas de mejora de la Situación de Aprendizaje?</b> (0: No se elaboraron conclusiones basadas en la evidencia en absoluto, 1: Se elaboraron conclusiones con poca base en la evidencia, 2: Se elaboraron conclusiones con base moderada en la evidencia, 3: Se elaboraron conclusiones basadas en la evidencia de manera completa)</p>				
<p><b>Propuestas de mejora:</b></p>				
<p><b>¿En qué medida se sugirieron acciones concretas y realistas para mejorar la Situación de Aprendizaje, como ajustes en los objetivos, revisión de los contenidos o implementación de estrategias de enseñanza alternativas?</b> (0: No se sugirieron acciones de mejora en absoluto, 1: Se sugirieron acciones de mejora en menor medida, 2: Se sugirieron acciones de mejora en cierta medida, 3: Se sugirieron acciones de mejora de manera completa)</p>				
<p><b>¿En qué medida se consideraron los resultados del análisis de datos y las conclusiones para proponer mejoras específicas y factibles en relación con los aspectos evaluados?</b> (0: No se consideraron los resultados del análisis de datos y las conclusiones en absoluto, 1: Se consideraron de manera parcial los resultados del análisis de datos y las conclusiones, 2: Se consideraron moderadamente los resultados del análisis de datos y las conclusiones, 3: Se consideraron completamente los resultados del análisis de datos y las conclusiones)</p>				

Para los cuestionarios de los alumnos se utilizará uno tipo test con una escala Likert de cuatro opciones para generar una mayor precisión y eliminando la opción central para forzar una respuesta más concreta y no se superarán las diez preguntas para evitar que les resulte pesado realizarla. El otro cuestionario será de preguntas cortas, donde el alumno podrá dar una opinión más completa.

Se podrá optar por realizar un modelo u otro en función de la actitud de alumnos; lo que se pretende es evitar el rechazo de realizarlo dando la sensación de que ellos han tenido opción de elegir. Seguidamente, se pueden observar ambos formatos.

**Cuestionario sobre el Tema - Transformaciones geométricas.**

	0	1	2	3
<b>¿En qué medida sientes que has alcanzado los objetivos?</b> (0: No los he alcanzado, 1: Los he alcanzado en menor medida, 2: Los he alcanzado en cierta medida, 3: Los he alcanzado completamente)				
<b>¿En qué medida encontraste útiles las actividades de enseñanza para aprender los contenidos?</b> (0: Son inútiles, 1: Son poco útiles, 2: Algo útiles, 3: Muy útiles)				
<b>¿En qué medida consideras que alguna actividad no fue efectiva o no te ayudó a comprender el tema?</b> (0: Nada efectiva, 1: Poco efectiva, 2: Algo efectiva, 3: Completamente efectiva)				
<b>¿En qué medida consideras que la retroalimentación que recibiste sobre tu trabajo y desempeño fue útil para mejorar tu aprendizaje?</b> (0: No fue útil en absoluto, 1: Fue poco útil, 2: Fue moderadamente útil, 3: Fue muy útil)				
<b>¿En qué medida consideras que superaste los aspectos más desafiantes de esta Situación de Aprendizaje?</b> (0: No los superé, 1: Los superé en menor medida, 2: Los superé en cierta medida, 3: Los superé completamente)				
<b>¿En qué medida te sentiste motivado/a e interesado/a en los temas abordados?</b> (0: Nada motivado/a e interesado/a, 1: Poco motivado/a e interesado/a, 2: Moderadamente motivado/a e interesado/a, 3: Muy motivado/a e interesado/a)				
<b>¿En qué medida encontraste útiles los recursos o materiales didácticos para tu aprendizaje?</b> (0: Inútiles, 1: Poco útiles, 2: Útiles, 3: Muy útiles)				
<b>¿En qué medida consideras que podríamos mejorar esta Situación de Aprendizaje para que sea más efectiva y significativa para ti y tus compañeros?</b> (0: No se puede mejorar, 1: Se puede mejorar poco, 2: Se puede mejorar en cierta medida, 3: Se puede mejorar completamente)				
<b>¿En qué medida te sientes satisfecho/a en general?</b> (0: Nada satisfecho/a, 1: Poco satisfecho/a, 2: Satisfecho/a, 3: Muy satisfecho)				

**Evaluación del Tema - Transformaciones geométricas.**

<p><b>¿Cuáles fueron los objetivos de aprendizaje y sientes que los has alcanzado? ¿Por qué sí o por qué no?</b></p>
<p><b>¿Qué actividades de enseñanza te resultaron más útiles para aprender los contenidos? ¿Por qué?</b></p>
<p><b>¿Hubo alguna actividad que no te resultó efectiva o no te ayudó a comprender los contenidos? ¿Por qué?</b></p>
<p><b>¿Cómo te sentiste al recibir retroalimentación sobre tu trabajo y desempeño? ¿Crees que fue útil para mejorar tu aprendizaje? ¿Por qué?</b></p>
<p><b>¿Cómo te evaluaste a ti mismo/a? ¿Crees que tu autoevaluación fue precisa? ¿Por qué?</b></p>

<b>¿Qué aspectos de esta te resultaron más desafiantes? ¿Cómo los superaste o qué podrías haber hecho de manera diferente?</b>
<b>¿Hubo algún momento en el que te sentiste poco motivado/a o poco interesado/a en los temas abordados? ¿Por qué crees que sucedió?</b>
<b>¿Qué recursos o materiales didácticos te resultaron más útiles para ti?</b>
<b>¿Cómo crees que podríamos mejorar esta Situación de Aprendizaje para que sea más efectiva y significativa para ti y tus compañeros?</b>
<b>¿Hay alguna sugerencia o comentario adicional que te gustaría hacer?</b>

## 5. CONCLUSIONES

### 5.1. Aportación del presente Trabajo Fin de Máster a la Enseñanza

En el presente TFM se ha desarrollado una propuesta didáctica motivadora para el estudio de las transformaciones geométricas del plano en el nivel de secundaria. A través de la incorporación de actividades manipulativas, el uso de herramientas tecnológicas y la inclusión de contextos relevantes, se ha buscado acercar este tema de manera efectiva a los estudiantes de tercer curso de la ESO.

La revisión de los objetivos ha permitido establecer metas claras y específicas, alineadas con los contenidos y competencias que se pretendían desarrollar. Los objetivos planteados buscaban impulsar el aprendizaje significativo y la comprensión profunda de las transformaciones geométricas.

En relación con el análisis de los contenidos propuestos, se ha realizado una selección cuidadosa de los conceptos clave y se ha buscado presentarlos de manera organizada y secuencial. Se ha considerado la importancia de abordar los contenidos de manera adecuada al nivel y las características de los estudiantes.

Las estrategias de enseñanza propuestas, que incluyen actividades manipulativas y el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra, presentan un enfoque innovador y prometedor para fomentar la participación activa y el pensamiento crítico de los estudiantes. Estas estrategias ofrecen oportunidades para la experimentación y la visualización de las transformaciones geométricas.

En cuanto a la evaluación del aprendizaje, se ha estimado un sistema integral que incluye diferentes instrumentos de evaluación para medir las competencias adquiridas por los estudiantes. Se han considerado criterios de evaluación claros y justos.

Durante la reflexión sobre el clima de clase y la gestión del tiempo, se ha considerado la importancia de crear un ambiente propicio para la participación, el respeto y la colaboración entre los estudiantes. Asimismo, se ha destacado la necesidad de una administración eficiente del tiempo para asegurar el cumplimiento de los plazos establecidos.

A pesar de que esta propuesta didáctica no se llevará a cabo en la práctica, el proceso de recopilación y análisis de datos ha permitido obtener una visión completa de los aspectos teóricos y metodológicos involucrados. A través de la recopilación de información de diferentes fuentes, se ha obtenido una perspectiva enriquecedora sobre el tema de las transformaciones geométricas y su enseñanza en el nivel de secundaria.

En resumen, este TFM ha presentado una propuesta didáctica interesante y novedosa para el estudio de las transformaciones geométricas del plano en secundaria. Aunque no se pondrá en práctica, la elaboración de esta propuesta ha permitido reflexionar sobre aspectos fundamentales de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como explorar enfoques innovadores para acercar este tema a los estudiantes.



## 5.2. Aportación de las asignaturas del Máster a la consecución del presente Trabajo Fin de Máster

En cuanto a la relación de las asignaturas del Máster, el Trabajo Fin de Máster se presenta como una integración de todas las enseñanzas recibidas, incluyendo las competencias adquiridas en cada una de las asignaturas. En este caso, el enfoque se centra en la elaboración de una Propuesta Didáctica para el estudio de las Transformaciones Geométricas del plano en Secundaria.

A lo largo del desarrollo del TFM, se evidencia la contribución de las diferentes asignaturas del Máster en la elaboración de esta propuesta.

En primer lugar, la asignatura de *Diseño Curricular en Matemáticas* proporcionó las bases para conocer los contenidos mínimos establecidos en los documentos institucionales y los objetivos específicos de la educación secundaria en general y del tema en particular. Además, se analizó el sistema educativo y el modelo de competencias requerido por la legislación, que sirvió como guía para la realización de la propuesta didáctica.

Por otro lado, la asignatura de *Complementos de Matemáticas* brindó conocimientos de nivel superior, necesarios para transmitir con confianza los conceptos matemáticos y abordar situaciones especiales, como la atención a estudiantes con altas capacidades o la enseñanza en bachilleratos de excelencia. Esto asegura que los futuros docentes adquieran un nivel académico adecuado.

La asignatura de *Didáctica de la Matemática* fue fundamental para planificar la enseñanza de manera efectiva, teniendo en cuenta las mejores formas de transmitir los conocimientos y promover un aprendizaje significativo. Además, la asignatura de *Modelos Matemáticos en Educación Secundaria* proporcionó ejemplos y situaciones que ayudaron a desarrollar diversas actividades para que los estudiantes puedan realizar deducciones y estrategias propias en la resolución de problemas.

La asignatura de *Metodología y Evaluación en Matemáticas* fue esencial para seleccionar las metodologías adecuadas que se alineen con los objetivos y competencias planteados. Además, se consideraron las pautas estudiadas para desarrollar un sistema de evaluación eficiente.

La asignatura de *Innovación Docente en Matemáticas* analizó la importancia de introducir enfoques innovadores en la enseñanza, así como el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en el aula. Estos aspectos se tuvieron en cuenta al diseñar actividades motivadoras e incluir herramientas informáticas en la propuesta didáctica.

La asignatura de *Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas* contribuyó a comprender la importancia de la investigación en la educación y proporcionó estrategias para el análisis didáctico de contenidos e instrucción, así como para el estudio de libros de texto.

La asignatura *Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia* fue importante, ya que el enfoque histórico de la propuesta didáctica requería comprender la evolución de los movimientos en el plano y las manifestaciones culturales y artísticas relacionadas con los conceptos matemáticos.

Finalmente, las *Prácticas Externas* en un centro de educación secundaria permitieron observar las dificultades y la falta de interés de los estudiantes. Estas observaciones influyeron en la elaboración de actividades atractivas y motivadoras que utilizaran materiales diversos, manipulación de instrumentos y programas informáticos.

En resumen, el Máster se convierte en una herramienta fundamental para desarrollar el TFM y, en consecuencia, para planificar la docencia en el futuro. La formación recibida en cada asignatura contribuye al desarrollo y preparación de diferentes proyectos docentes y ayuda a los futuros docentes para afrontar los desafíos de la educación secundaria y bachillerato.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1000marcas. (2023). Recuperado el 15 de mayo de 2023, de McDonalds Logo: <https://1000marcas.net/logo-mcdonalds/>
- 140 Dibujos de Pikachu fáciles de hacer para COLOREAR . (2019). Recuperado el 21 de mayo de 2023, de dibujosaparacolorear.blogspot.com: <https://dibujosaparacolorear.blogspot.com/2019/08/140-dibujos-de-pikachu-faciles-de-hacer.html>
- Alfombra de vinilo cocina patrón flores. (2022). Recuperado el 27 de mayo de 2023, de TenVinilo: <https://www.tenvinilo.com/alfombras-vinilicas/alfombra-vinilo-cocina-patron-flores-R2322>
- AulaFacil. (2013). *Transformaciones geométricas isométricas. - Educación plástica y visual (3o ESO)*. Recuperado el 13 de abril de 2023, de <https://www.aulafacil.com/cursos/dibujo-lineal-secundaria/educacion-plastica-y-visual-3-eso/transformaciones-geometricas-isometricas-19184>
- Blasco, J. A. (10 de marzo de 2021). *Cuando las paredes hablan: epigrafías y geometría en yaserías y mosaicos de la Alhambra*. Recuperado el 22 de abril de 2023, de <http://urban-networks.blogspot.com/2016/07/cuando-las-paredes-hablan-epigrafias-y.html>
- BOCYL-D-30092022-3 Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. (2022). Recuperado el 17 de marzo de 2023, de <https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/decreto-39-2022-29-septiembre-establece-ordenacion-curricul>
- BOE-A-2022-4975 Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. (2022). Recuperado el 17 de marzo de 2023, de <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-4975>
- Calcerrada Zamora, F. (2010). *Las matemáticas y la arquitectura*.
- Colera Jiménez, J., Gaztelu Alberto, I., & et al. (2022). *Matemáticas, 3º ESO, Operación mundo*. ANAYA.
- Da Costa Cortés, J. (2023). Elaboración propia.
- Fernández Benito, I., & Reyes Iglesias, M. E. (2003). *Geometría con el hexágono y el octógono : papiroflexia, proporciones, disecciones, cuadraturas, mosaicos, geometría Sagrada*. Proyecto Sur de Ediciones.

- Fernández Roldán, L. (2019). *Estrella de mar: características, reproducción y taxonomía*. Recuperado el 28 de mayo de 2023, de Ecología verde: <https://www.ecologiaverde.com/estrella-de-mar-caracteristicas-reproduccion-y-taxonomia-2286.html>
- García, A. G. (2015). *Jardines y Geometría. Arte y Naturaleza. . . | Matemolivares*. Recuperado el 20 de abril de 2023, de <http://matemolivares.blogia.com/temas/jardines-y-geometria.-arte-y-naturaleza.....php>
- KindPNG.com. (s.f.). Recuperado el 23 de abril de 2023, de Yükle Chibi Luffy - Luffy One Piece Chibi, HD Png Download - kindpng: [https://www.kindpng.com/imgv/iohmooo\\_ykle-chibi-luffy-luffy-one-piece-chibi-hd/](https://www.kindpng.com/imgv/iohmooo_ykle-chibi-luffy-luffy-one-piece-chibi-hd/)
- Makarov, A. (2021). *Un paseo matemático por la Alhambra: cuando el arte se basa en los números*. Recuperado el 18 de abril de 2023, de Xataka: <https://www.xataka.com/especiales/paseo-matematico-alhambra-cuando-arte-se-basa-numeros-2>
- Mariposa naranja en flores de cosmos Foto de stock 350754023*. (s.f.). Recuperado el 19 de abril de 2023, de Shutterstock: <https://www.shutterstock.com/es/image-photo/orange-butterfly-on-cosmos-flowers-350754023>
- Reyes Iglesias, M. E. (2023). *Modelos matemáticos en educación secundaria*. Apuntes académicos. Máster de profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Universidad de Valladolid.
- Reyes Iglesias, M. E., Fernández Benito, I., & et al. (2006). *Enfoques actuales en la didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Instituto Superior de Formación del Profesorado.
- Schattschneider, D. (1992). *Visions of Symmetry: Notebooks, Periodic Drawings, and Related Work of M.C. Escher*. W.H.Freeman & Co Ltd.
- Simetría*. (2022). Recuperado el 12 de abril de 2023, de Glosario ilustrado de artearquitectónico: <https://www.glosarioarquitectonico.com/glossary/simetria/>
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). *Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344-350. Recuperado el 23 de mayo de 2023, de <http://mathedseminar.pbworks.com/w/file/attach/92864991/Smith%20and%20Stein%20-%201998%20-%20Selecting%20and%20Creating%20Mathematical%20Tasks%20From%20Re.pdf>

## ANEXOS

### Anexo I. Rúbrica autoevaluación

#### ESCALA DE AUTOEVALUACIÓN DEL TRABAJO

Nombre del alumno/a: \_\_\_\_\_

	Siempre	Casi siempre	A veces	Nunca
He participado activamente en las tareas, colaborando y ayudando a los demás.				
He expresado mis opiniones y he respetado las de los demás.				
He sabido en todo momento qué es lo que tenía que hacer, asumiendo responsabilidades.				
He llevado a cabo las tareas con esfuerzo, intentando hacerlas lo mejor posible				

**Anexo II. Rúbrica para evaluar a mis compañeros (Coevaluación)**

**RÚBRICA PARA EVALUAR A MIS COMPAÑEROS**

Nombre del alumno/a que evalúa: \_\_\_\_\_

ASPECTOS	4 EXCELENTE	3 SATISFACTORIO	2 MEJORABLE	1 INSUFICIENTE
<b>Es responsable con la tarea asignada (Criterio 10.2)</b>	Sí. Ha hecho todo lo que tenía que hacer.	Ha hecho el 70/80 % del trabajo que tenía que hacer.	Ha terminado un poco más de la mitad de la tarea asignada.	No ha hecho casi nada o como máximo algo menos de la mitad de la tarea.
<b>Acepta las opiniones de los otros compañeros del grupo (Criterio 10.1)</b>	Escucha y acepta los comentarios, sugerencias y opiniones de otros y los usa para mejorar su trabajo.	Escucha los comentarios, sugerencias y opiniones de otros, pero no los usa para mejorar su trabajo.	Escucha los comentarios y sugerencias de los otros. No obstante, no siempre les presta atención ni los acepta positivamente	No escucha al resto de compañeros del equipo.
<b>Es respetuoso y favorece el trabajo del grupo (Criterio 9.1)</b>	Respeto a todos los compañeros. Anima al grupo y a todos sus componentes para mejorar. Hace propuestas para que el trabajo y los resultados mejoren.	Respeto a todos los compañeros. Anima al grupo y a todos sus componentes para mejorar.	Respeto a todos los compañeros. No anima al grupo o solo anima a algunos de sus componentes para mejorar el trabajo.	No es respetuoso con los compañeros del grupo.

Nombre del alumno/a evaluado: \_\_\_\_\_

<b>Puntuación</b>				
-------------------	--	--	--	--

Nombre del alumno/a evaluado: \_\_\_\_\_

<b>Puntuación</b>				
-------------------	--	--	--	--

Anexo III. Rúbrica para evaluar la resolución de problemas

**RÚBRICA PARA EVALUAR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

ASPECTOS	4 EXCELENTE	3 SATISFACTORIO	2 MEJORABLE	1 INSUFICIENTE
<b>Comprensión del problema (Criterio 1.1)</b>	Analiza, reconoce e interpreta perfectamente los datos, identificando con certeza lo que se busca y demostrando una absoluta comprensión del problema.	Analiza, reconoce e interpreta los datos, identificando con claridad lo que se busca y demostrando una alta comprensión del problema.	Reconoce los datos e interpreta la relación entre los mismos, demostrando una comprensión elemental del problema.	No reconoce los datos, sus relaciones ni el contexto del problema, mostrando poca comprensión de este.
<b>Estrategia (Criterio 1.2)</b>	Siempre utiliza estrategias eficientes que contribuyen a la resolución de problemas.	Acostumbra a usar estrategias eficientes que contribuyen a la resolución de problemas.	Algunas veces usa estrategias eficientes que contribuyen a la resolución de problemas.	En contadas ocasiones usa estrategias eficientes que contribuyen a la resolución de problemas. Se detecta incoherencia.
<b>Planteamiento razonado (Criterio 4.1)</b>	Detalla los pasos seguidos, organiza los datos y descompone el problema aplicando en grado óptimo los conceptos matemáticos necesarios que facilitan su interpretación.	Detalla los pasos seguidos y aplica correctamente los conceptos matemáticos necesarios.	Detalla los pasos seguidos y muestra un aceptable conocimiento de los conceptos matemáticos.	No detalla los pasos seguidos y se aprecia desconocimiento en los conceptos matemáticos necesarios.
<b>Solución del problema (Criterio 2.1)</b>	Aporta correctamente la solución del problema, analiza y discute sobre su unicidad y reflexiona y valora sobre su fiabilidad. Revisa el proceso, detecta si hay errores y procede a su rectificación.	Aporta correctamente la solución del problema, analiza y discute sobre su unicidad y reflexiona y valora sobre su fiabilidad.	Aporta la solución correcta pero no reflexiona sobre su fiabilidad.	No aporta la solución correcta.

ASPECTOS	4 EXCELENTE	3 SATISFACTORIO	2 MEJORABLE	1 INSUFICIENTE
<b>Empleo de herramientas tecnológicas para investigación (Criterio 3.3)</b>	Accede a los enlaces y aporta la información significativa y de gran calidad solicitada, sobre el tema en cuestión.	Accede a los enlaces y aporta la información solicitada sobre el tema en cuestión.	Accede a los enlaces y aporta algo de información sobre el tema en cuestión.	No accede o accede a los enlaces suministrados, pero la información aportada es errónea.
<b>Contextualización (Criterio 6.2)</b>	Habilidad excepcional para identificar conexiones coherentes y significativas entre matemáticas y otras materias. Capacidad avanzada para resolver problemas contextualizados con un alto nivel de competencia. Comprende de manera profunda cómo aplicar conceptos matemáticos en diferentes contextos.	Habilidad sólida para identificar conexiones coherentes entre matemáticas y otras materias. Capacidad adecuada para resolver problemas contextualizados con una buena comprensión. Comprende cómo aplicar conceptos matemáticos en diferentes contextos.	Habilidad básica para identificar conexiones entre matemáticas y otras materias. Capacidad adecuada para resolver problemas contextualizados, pero con espacio para mejorar. Comprende de manera básica cómo aplicar conceptos matemáticos en diferentes contextos.	Dificultad para identificar conexiones entre matemáticas y otras materias. Capacidad limitada para resolver problemas contextualizados. Comprende de manera limitada cómo aplicar conceptos matemáticos en diferentes contextos.



Anexo IV. Rúbrica para evaluar la exposición oral

<b>RÚBRICA PARA EVALUAR UNA EXPOSICIÓN ORAL</b>				
<b>CATEGORÍA</b>	<b>4 EXCELENTE</b>	<b>3 SATISFACTORIO</b>	<b>2 MEJORABLE</b>	<b>1 INSUFICIENTE</b>
<b>Vocabulario (Criterio 8.1)</b>	Usa vocabulario apropiado para la audiencia. Aumenta el vocabulario de la audiencia definiendo las palabras que podrían ser nuevas para ésta.	Usa vocabulario apropiado para la audiencia. Incluye 1-2 palabras que podrían ser nuevas para la mayor parte de la audiencia, pero no las define.	Usa vocabulario apropiado para la audiencia. No incluye vocabulario que podría ser nuevo para la audiencia.	Usa varias (5 o más) palabras o frases que no son entendidas por la audiencia.
<b>Contenido (Criterio 8.2)</b>	Demuestra un completo entendimiento del tema que expone.	Demuestra un buen entendimiento del tema que expone.	Demuestra un buen entendimiento de partes del tema que expone.	No parece entender muy bien el tema que expone.
<b>Habla (Criterio 9.1)</b>	Habla despacio y con gran claridad.	La mayoría del tiempo habla despacio y con claridad.	Unas veces habla despacio y con claridad, pero otras se acelera y se le entiende mal.	Habla rápido o se detiene demasiado a la hora de hablar. Además, su pronunciación no es buena.
<b>Volumen (Criterio 9.1)</b>	El volumen es lo suficientemente alto para ser escuchado por todos los miembros de la audiencia a través de toda la presentación.	El volumen es lo suficientemente alto para ser escuchado por todos los miembros de la audiencia al menos 90% del tiempo.	El volumen es lo suficientemente alto para ser escuchado por todos los miembros de la audiencia al menos el 80% del tiempo.	El volumen con frecuencia es muy débil para ser escuchado por todos los miembros de la audiencia.
<b>Comprensión (Criterio 8.1)</b>	El estudiante puede con precisión contestar casi todas las preguntas planteadas sobre el tema por sus compañeros de clase.	El estudiante puede contestar con precisión la mayoría de las preguntas planteadas sobre el tema por sus compañeros de clase.	El estudiante puede con precisión contestar unas pocas preguntas planteadas sobre el tema por sus compañeros de clase.	El estudiante no puede contestar las preguntas planteadas sobre el tema por sus compañeros de clase.
<b>Postura del cuerpo y contacto visual (Criterio 9.2)</b>	A la hora de hablar la postura y el gesto son muy adecuados. Mira a todos los compañeros con total naturalidad.	La mayoría del tiempo la postura y el gesto son adecuados y casi siempre mira a los compañeros mientras habla.	Algunas veces, mantiene la postura y el gesto adecuados, y otras no. En ocasiones mira a sus compañeros.	No mantiene la postura y gesto propios de una exposición oral y, la mayoría de las veces no mira a sus compañeros.

Anexo V. Rúbrica para evaluar la presentación de la investigación

<b>RÚBRICA PARA EVALUAR LA PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN</b>				
<b>CATEGORÍA</b>	<b>4 EXCELENTE</b>	<b>3 SATISFACTORIO</b>	<b>2 MEJORABLE</b>	<b>1 INSUFICIENTE</b>
<b>Secciones (Criterio 7.1)</b>	Completa todas las secciones (conceptos, procedimientos, información y resultados) del trabajo con buena presentación y calidad.	Completa satisfactoriamente todas las secciones del trabajo (conceptos, procedimientos, información y resultados).	Completa, al menos, el 75% de las secciones (conceptos, procedimientos, información y resultados), pero con poca calidad.	Completa menos del 75% de las secciones del trabajo (conceptos, procedimientos, información y resultados).
<b>Lenguaje y simbología matemática (Criterio 8.1)</b>	Usa correctamente todos los símbolos y expresiones matemáticas necesarias para redactar el trabajo.	Usa símbolos y expresiones matemáticas, pero de manera incompleta y con bastantes errores.	Escaso uso de símbolos y expresiones matemáticas.	No utiliza simbología y expresiones matemáticas o lo hace de forma incorrecta.
<b>Expresión escrita (Criterio 8.1)</b>	Contesta de forma correcta y con la debida extensión en sus respuestas, usando un vocabulario preciso en relación con el tema.	Contesta de forma correcta y con una extensión razonable en sus respuestas, usando un vocabulario bastante adecuado relacionado a los contenidos estudiados.	Contesta con imprecisiones y vaguedad en sus respuestas, sin la extensión adecuada y con un vocabulario no del todo acorde con el tema.	Contesta de forma incorrecta y las respuestas no se ajustan a la extensión esperable o solicitada, con un vocabulario pobre o inadecuado con relación al tema.
<b>Actitudes propias del trabajo matemático (Criterio 3.3)</b>	Durante el desarrollo de la investigación matemática se pone de manifiesto una amplia gama de actitudes necesarias para un correcto trabajo de investigación: curiosidad, esfuerzo, perseverancia, indagación, precisión, rigor, búsqueda de respuestas adecuadas, pensamiento crítico, espíritu científico, ...	Durante el desarrollo de la investigación matemática se ponen de manifiesto bastantes actitudes necesarias para un correcto trabajo de investigación: curiosidad, esfuerzo, perseverancia, indagación, precisión.	Durante el desarrollo de la investigación se ponen de manifiesto algunas de las actitudes necesarias en el quehacer matemático, al menos, curiosidad, interés, esfuerzo y perseverancia.	Durante el desarrollo de la investigación no se manifiestan ninguna de las actitudes básicas del trabajo matemático: curiosidad, interés, esfuerzo, perseverancia.