



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Matemática Aplicada

Simetrías en el plano: una aproximación desde el Currículo de E.S.O.

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: César Rollán Serrano

Tutora: M^a Encarnación Reyes Iglesias

Valladolid, junio de 2023

Resumen

Los patrones simétricos se han estudiado y usado por la humanidad desde la antigüedad, siendo utilizados en el diseño de una gran variedad de objetos, máquinas, dispositivos y proyectos, en tecnología, arte, arquitectura, etc. Las transformaciones geométricas del plano, en particular los movimientos y, dentro de estos, las simetrías axiales, constituyen una parte relevante de las matemáticas que puede ser abordada de diferentes formas. El presente trabajo las analiza desde cuatro puntos de vista (regla y compás, dibujo técnico, método analítico y doblado de papel). Una parte de este trabajo es el diseño de una Situación de Aprendizaje para proporcionar una aproximación al tema de Simetrías en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

Abstract

Symmetrical patterns have been studied and used by mankind since ancient times, being used in the design of a great variety of objects, machines, devices and projects, in technology, art, architecture, etc. The geometrical transformations of the plane, in particular the rigid motions, and within these, the axial symmetries, constitute a relevant part of mathematics that can be approached in different ways. The present work analyzes them from four points of view (ruler and compass, technical drawing, analytical method and paper folding). A part of this work is the design of a Learning Situation, to provide an approach to the topic of Symmetries in the Compulsory Secondary Education curriculum.

Índice

Resumen.....	2
Abstract.....	2
Índice.....	3
Simetrías en el plano: una aproximación desde el Currículo de E.S.O.....	7
Introducción y objetivos.....	7
Motivación y antecedentes.....	7
Movimientos en el plano.....	7
Metodologías didácticas.....	9
Agradecimientos.....	9
Giros, simetrías y traslaciones.....	10
Introducción.....	10
Vectores.....	10
Los vectores tienen varias características:.....	10
Operaciones con vectores.....	12
Suma de vectores.....	12
Multiplicación de un vector por un número.....	13
Traslación.....	13
Giro.....	14
Simetrías.....	15
Simetría axial.....	15
Simetría central.....	16
Grupos de simetría puntuales (o grupos de Leonardo).....	16
Ejemplo de “Simetría rotacional cíclica”.....	16
Ejemplos de “Simetría rotacional diedral”.....	17
Simetrías mediante regla y compás.....	19
Simetría central o giro de 180°	19
Demostración.....	20
Simetría respecto de una recta de un punto.....	20
Demostración.....	21
Traslación de un punto siguiendo un vector.....	21
Demostración.....	22
Giro de un punto un ángulo.....	23
Ángulos construibles mediante regla y compás.....	24
Movimientos del plano mediante otros instrumentos de dibujo.....	25
Simetría respecto de una recta.....	25
Traslación de un punto siguiendo un vector.....	26
Giro de un punto respecto de otro punto dado y un ángulo determinado.....	28
Multiplicación de un vector por un número.....	29
Mediante coordenadas numéricas y ejes cartesianos.....	30
Vectores en coordenadas cartesianas.....	30
Multiplicación de un vector por un número real.....	31
Obtener un vector a partir de los puntos de origen y de destino.....	31
Traslación de un punto siguiendo un vector.....	32
Giro de un punto 180° respecto del origen (simetría central).....	33
Giro de un punto 90° respecto del origen.....	34
Simetría respecto de los ejes de coordenadas.....	35
Eje X.....	35

Eje Y.....	35
Simetría respecto de la bisectriz de los ejes del primer y tercer cuadrante.....	36
Simetría respecto de la bisectriz de los ejes del segundo y cuarto cuadrante.....	36
Doblado de papel.....	37
1 ^{er} axioma O_1 :.....	37
2 ^o axioma O_2 :.....	37
3 ^{er} axioma O_3 :.....	38
4 ^o axioma O_4 :.....	38
Simetría de un punto respecto de un eje.....	39
Simetría central de un punto respecto a otro.....	39
Giro de un punto un ángulo dado.....	40
Demostración.....	41
Alternativa.....	41
Demostración.....	42
Traslación de un punto según un vector.....	42
Alternativa.....	44
Demostración.....	45
Desarrollo de la situación de aprendizaje.....	46
Situación de aprendizaje “Transformaciones en el plano”.....	47
Introducción y contextualización.....	47
Objetivos didácticos.....	47
Elementos curriculares involucrados.....	47
Competencias específicas.....	48
Competencias clave.....	49
Descripción de la actividad.....	51
Primera sesión.....	51
Planteamiento inicial.....	51
Repaso.....	51
Preparación de la siguiente sesión.....	52
Segunda, tercera y cuarta sesión.....	52
Preguntas.....	52
Ejercicios.....	53
Actividad coordinada con las asignaturas de Tecnología y Educación Plástica.....	53
Geoplanos.....	54
Aplicaciones de simetrías.....	54
Quinta sesión.....	55
Ampliación.....	55
Rigor en las matemáticas.....	55
Toma de apuntes.....	55
Sexta sesión.....	56
Séptima sesión.....	56
Atención a la diversidad.....	56
Metodología y estrategias didácticas.....	56
Ludificación (gamificación).....	57
Juegos de respuestas múltiples.....	58
Expositivo o magistral.....	58
Aprendizaje colaborativo.....	59
Puzle.....	59
Preguntas.....	59
Portafolio (simplificado).....	60

Recomendaciones finales.....	60
Moviendo un antiguo edificio.....	61
Proceso a seguir.....	63
Preguntas:.....	63
Plano simplificado de trabajo:.....	64
Anexo 2: Presentación para a actividad de recordatorio.....	65
Selección de ejemplos en tecnología.....	67
Simetrías espaciales.....	67
Lámpara compuesta de láminas de papel.....	69
Pinza de la ropa.....	69
Paraguas.....	69
Abanico y soporte de toldo.....	70
Puertas giratorias.....	70
Trípode.....	71
Tijera.....	71
Disipador de calor y ventilador para procesador de ordenador.....	72
Potenciómetro (divisor de voltaje variable).....	72
Sensor de movimientos de un ratón de bola.....	73
Obturador de los proyectores de cine.....	76
Diafragma de las cámaras de fotos o de cine.....	77
Patrón estroboscópico en reproductores de discos de vinilo.....	78
Zootropo.....	80
Elementos roscados (tornillos, tuercas...).....	80
Mecanismo de los bolígrafos.....	81
Calculadoras mecánicas.....	81
Gramola.....	82
Contactos de los rotores de una máquina de cifrar mecánica.....	82
Candado con contraseña mediante ruedas con números.....	82
Robots delta (y otros sistemas similares).....	83
Posiciones de un objeto en el espacio.....	83
Funcionamiento:.....	84
Atracciones mecánicas “planas” (“flat rides”).....	84
Torno de control de acceso de tres barras.....	87
Centrifugadora de laboratorio.....	87
Grúa con rueda.....	87
Noria para elevar agua.....	88
¿Máquinas de movimiento perpetuo?.....	89
Molinos de viento y turbinas de agua.....	89
Ventiladores y bombas.....	90
Sirena mecánica.....	91
Motores eléctricos, generadores y sus bobinados.....	92
Relojes.....	92
Telégrafo ABC.....	94
Carraca.....	94
Engranajes.....	95
Engranajes planetarios.....	96
Rueda de Génova.....	96
Llantas de los coches y ruedas de bicicletas.....	97
Rueda y trinquete de sentido único.....	97
Ruleta para generar sucesos aleatorios.....	97

Perindola para generar sucesos aleatorios.....	98
Quemador de gas.....	98
Tambor de lavadora.....	99
Magnetron del microondas (y radares antiguos).....	99
Escáner PET usado en hospitales.....	101
Acoplamiento automático de los trenes.....	102
Conclusiones.....	104
Bibliografía.....	105

Simetrías en el plano: una aproximación desde el Currículo de E.S.O.

Introducción y objetivos

Este Trabajo de Fin de Máster trata sobre simetrías radiales (rotacionales) y sobre la realización de una Situación de Aprendizaje LOMLOE orientada a Movimientos en el plano para 3º de ESO.

Este tipo de simetrías ocurre con frecuencia en la naturaleza y en creaciones humanas, tanto artísticas como técnicas. En el caso de este trabajo de fin de máster se tratarán con más profundidad las aplicaciones técnicas en el contexto de la asignatura de Tecnología de 3º de ESO, pero incluyendo también otros niveles.

La parte de las matemáticas que trata sobre movimientos en el plano suele ser atractiva para los alumnos que cursan la ESO. En este trabajo se aborda su docencia desde diferentes enfoques, tanto analítico, como clásico usando regla no graduada y compás, además de otro más reciente basado en la papiroflexia o doblado de papel. Adicionalmente también se aborda usando otros instrumentos típicos de dibujo técnico (escuadra, cartabón y semicírculo graduado).

Las temáticas en las que se ambienta la Situación de Aprendizaje son, por un lado, la sensibilidad hacia el patrimonio artístico y arquitectónico y, por otro lado, lo motivador y atractivo que puede resultar a los alumnos ejemplificar el estudio de los vectores con un partido de fútbol, ya que los pases realizados por los jugadores de ambos equipos durante el partido se pueden modelizar como vectores que definen los pases de la pelota.

Los temas de patrimonio están vinculados a la asignatura de Historia, donde los alumnos aprenden a valorar los edificios por su significación, planteando el problema como el traslado de una antigua escuela, que se modeliza como el movimiento de un rectángulo sobre un plano usando sus cuatro vértices. Aprovechando este problema también se plantean varias cuestiones adicionales sobre simetrías y ejes de simetrías, giros y traslaciones.

Motivación y antecedentes

La motivación de este trabajo es poner en práctica lo aprendido en las diferentes asignaturas del máster, procurando incluir conocimientos de todas ellas. Se pretende tener en consideración lo aprendido durante el periodo de prácticas: desde la interacción con los alumnos y otros profesores, así como, sus preferencias en cuanto a metodologías didácticas, errores típicos que se suelen cometer, estilos docentes de los profesores y actividades realizadas, disposición de las aulas, relaciones entre alumnos...

Movimientos en el plano

Actualmente los movimientos en el plano son utilizados de forma masiva; es posible que en cada segundo de la actualidad se procesen más cálculos de este tipo por vía analítica en los ordenadores, que en muchos años de la antigüedad con instrumentos de dibujo.

Estas operaciones han permitido el desarrollo de diversas áreas, como el cálculo de estructuras por vía gráfica, diseño arquitectónico, diseño artístico...

Así, por ejemplo, las operaciones con vectores: multiplicación de un vector por un número real, suma y resta de vectores... permiten realizar el cálculo de una estructura por vía gráfica. En el ámbito de la mecánica también sirven para calcular movimientos de mecanismos, fuerzas internas, trepidación, etc. A la hora de representar en el plano elementos de máquinas o estructuras, también se recurre a realizar transformaciones en el plano para obtener proyecciones, abatimientos, intersecciones...

En el momento actual, la informática ha aportado recursos potentes para trabajar en muchos campos, y, aunque, por ejemplo, se usan menos los métodos gráficos para hacer cálculos, o el papel para diseñar máquinas, los movimientos en el plano mantienen una relevancia máxima, ya que los ordenadores usan estas operaciones en multitud de ocasiones; así, por ejemplo, muchas de las ilustraciones de este trabajo de fin de máster están realizadas mediante un programa de dibujo vectorial (Inkscape). Estas aplicaciones informáticas representan los elementos de forma numérica aplicando todo tipo de movimientos (giros, simetrías, traslaciones, simetrías deslizantes...) y otros tipos de transformaciones, no solo sobre la figura en el espacio de trabajo, sino a la hora de representarla en pantalla aplicando un factor de ampliación o de giro del área de dibujo.

Muchos alumnos seguramente estén familiarizados con la recreación de entornos virtuales, esto es, videojuegos o empleo de gráficos por ordenador para hacer los efectos especiales en película.

En el ámbito profesional multitud de aplicaciones usan transformaciones: modelado sólido, cálculo estructural, simulaciones, inteligencia artificial...

Todos estos cálculos, que se efectúan mediante medios informáticos, son realizados por métodos analíticos siendo introducidos mediante transformaciones geométricas sencillas: desplazamientos o traslaciones, giros de 90° respecto del origen, reflexiones sobre los ejes X e Y, simetrías centrales o giros de 180° , y opcionalmente, reflexiones o simetrías axiales sobre las bisectrices de los cuadrantes. Estos procedimientos permiten a los alumnos obtener una base conceptual de las transformaciones geométricas del plano, de manera que en niveles superiores puedan abordar otras presentaciones como, por ejemplo, la escritura matricial de las transformaciones geométricas, en particular de los movimientos del plano.

Aunque muchos de los alumnos no emplearán movimientos y transformaciones de forma explícita cuando terminen la ESO, su estudio permite ofrecerles una manera de interpretar fenómenos que se pueden encontrar en el futuro, además de una formación clave para aquellos que puedan tener intención de seguir su formación

hacia ramas de la ciencia o la técnica, o bien a aquellos que quieran realizar diseños mediante aplicaciones de modelado 2D o 3D.

Metodologías didácticas

Se aplican diferentes metodologías didácticas tal y como se describen en el desarrollo de la Situación de Aprendizaje. Estas metodologías se han seleccionado en base al contexto de la clase, procurando que se adapten bien a lo que se imparte, buscando la variedad para evitar la monotonía y desconexión de los alumnos o fomentar la colaboración entre compañeros para el adecuado desarrollo de la socialización.

Una adecuada selección de las metodologías permite desarrollar competencias transversales, el tener que preguntar una duda a un compañero y que este la responda, facilita por una parte el aprendizaje en ambos de la materia, pero además favorece otras habilidades:

- Regulación y expresión de las emociones.
- Respeto entre compañeros.
- Expresión oral.

Las metodologías de ludificación (o gamificación) crean un reto que incentiva el aprendizaje por parte del alumno; las ludificaciones han ganado popularidad en los últimos años, incluso existen estudios (aún sin oficialidad) destinados a este tipo de metodología.

La metodología de clase magistral es útil cuando los alumnos deben seguir un modelo para poder llegar a un resultado adecuado, por ello se aplica a la actividad de papiroflexia. En esta actividad se puede al mismo tiempo introducir a los alumnos en la toma de apuntes de forma eficaz, según se van explicando los pasos.

No se usarán aplicaciones informáticas porque estas ya se usan en otras unidades didácticas y las metodologías elegidas ya cubren bien los conceptos que se quieren impartir, además de que se puede perder el efecto diferenciador que habitualmente los alumnos asocian al uso de ordenadores en contraste a las actividades tradicionales de aula.

No obstante, se va a mencionar y mostrar brevemente algunas aplicaciones que permiten trabajar con esto o bien realizar creaciones, diseños y composiciones artísticas basadas en estos tipos de simetría.

Agradecimientos

Agradezco la ayuda de mi tutora M^a Encarnación Reyes Iglesias en la realización del presente Trabajo de Fin de Máster, así como a todos los profesores que nos han acompañado en nuestro aprendizaje estos meses mostrándonos las diferentes facetas que tiene la profesión docente y lo que debemos conocer para su correcto ejercicio. Mi agradecimiento a los tutores durante las prácticas por permitirme participar en la rutina del Centro. Agradezco además la labor de todas las personas que realizan divulgación científica o técnica. También quiero agradecer la ayuda de mi familia y de todas mis personas próximas.

Giros, simetrías y traslaciones

Introducción

En el entorno cotidiano es frecuente aplicar transformaciones a los objetos para situarlos en otros lugares u otras posiciones, o bien se ven reflejados en espejos. Estos hechos pueden describirse geoméricamente.

En todos los dibujos que siguen a continuación, los puntos se representan como aspas (\times), coloreándose de morado los puntos de origen y de azul los de destino. Los puntos auxiliares (intermedios), en caso de existir, son de otros colores. Las líneas iniciales que definen las transformaciones también son moradas.

Una transformación geométrica en el plano R^2 es una aplicación $f : R^2 \rightarrow R^2$ que hace corresponder a cada punto P del plano otro punto P' del mismo.

Una transformación geométrica en el plano se dice que es un movimiento si conserva las formas y los tamaños, esto es equivalente a decir que un movimiento conserva las distancias: para cada par de puntos P y Q del plano se cumple: $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$.

Existen cinco movimientos del plano: identidad, traslación, giro, simetría axial y simetría deslizante.

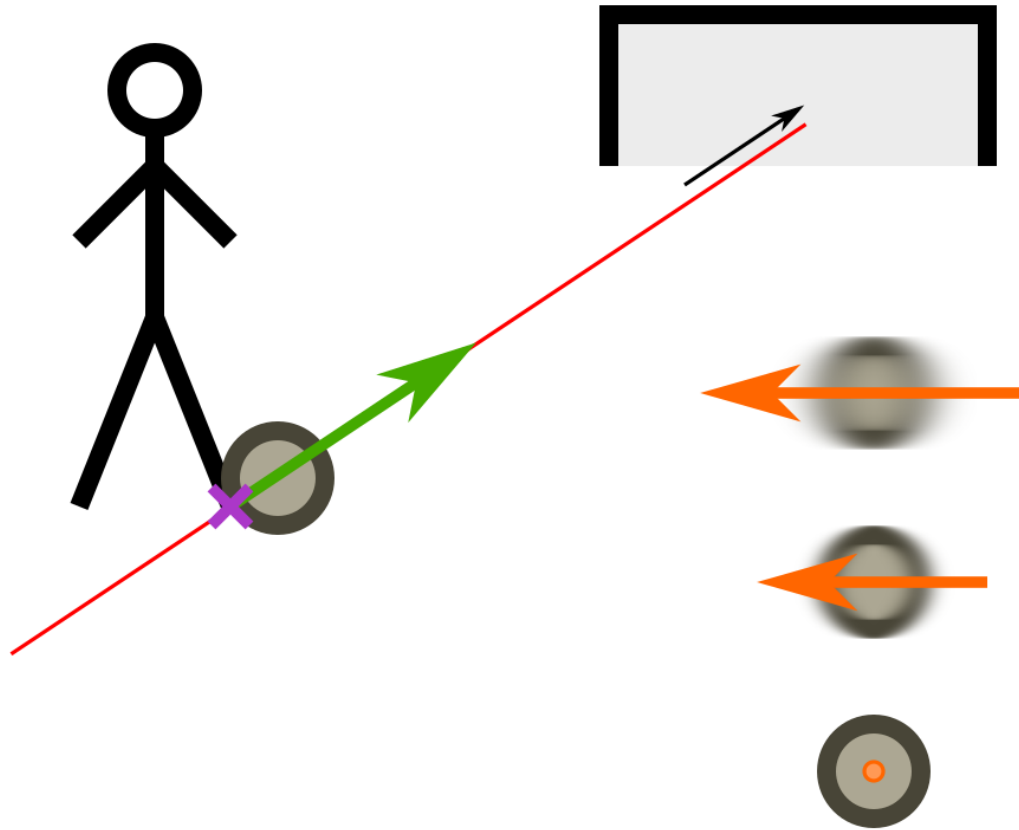
Vectores

Un vector es un segmento orientado de una recta. Está determinado por dos puntos A y B y se representa por \overrightarrow{AB} . El punto A se llama origen del vector y el punto B extremo del vector.

Los vectores tienen varias características:

- Dirección
- Sentido
- Módulo
- Punto de aplicación

Dos vectores son iguales cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

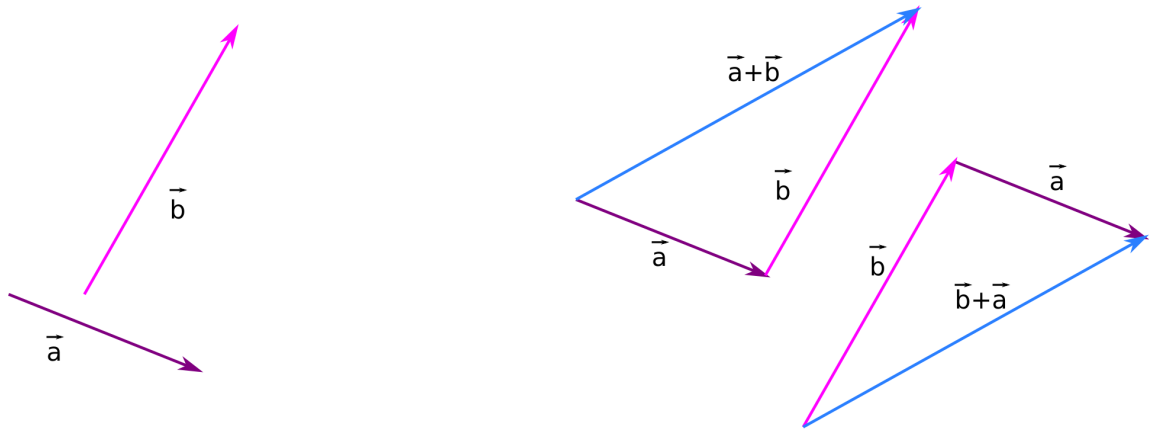


En este ejemplo de un futbolista chutando un balón, tanto el chute como la velocidad del balón se pueden expresar con vectores. El punto de aplicación es aquel donde se aplica la fuerza (en la pelota en este caso, marcado en morado), la dirección es la línea roja que contiene al vector, el sentido apunta a la portería y está marcada por la flecha negra y el módulo pone de manifiesto lo fuerte que ha sido el impulso y se expresa por la longitud del vector (verde), o la velocidad como se ve representa en las pelotas de la derecha.

Operaciones con vectores

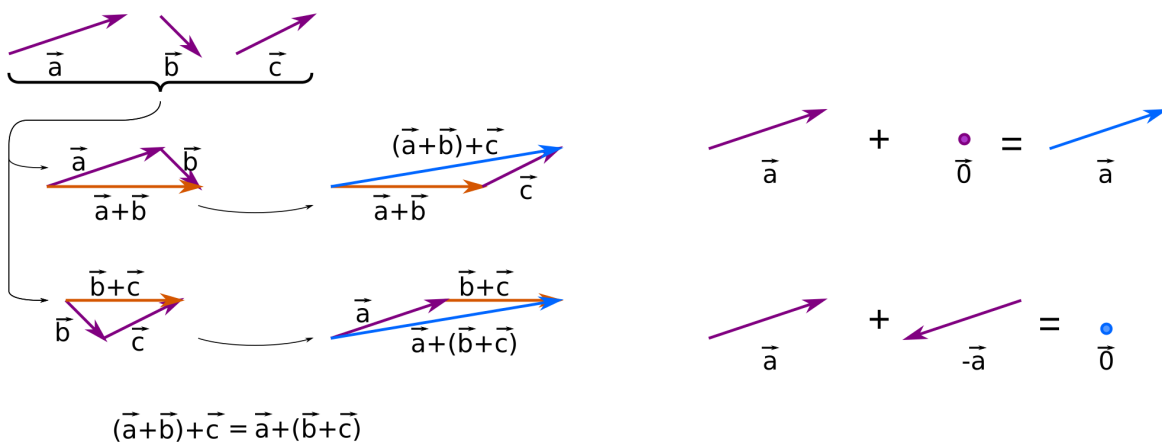
Suma de vectores

Para obtener el vector suma de dos vectores se sitúa uno de ellos al final del otro uniendo el extremo del primero con el origen del segundo.



La suma de vectores tiene estas propiedades:

- **Conmutativa** (se puede cambiar el orden de los sumandos), en el dibujo superior se puede ver que \vec{a} y \vec{b} se pueden intercambiar dando el mismo resultado.
- **Asociativa**: Para la suma de tres vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} , se puede sumar primero \vec{a} y \vec{b} y luego sumar al resultado \vec{c} , o bien se puede sumar \vec{b} y \vec{c} y después \vec{a} . En los dos casos se obtiene el mismo resultado.



- Existe un **elemento neutro** (vector nulo) que al sumarlo a cualquier vector lo deja igual.
- Cada vector tiene asociado un **vector opuesto**. La suma de un vector y su opuesto es el vector nulo.

Nota: La diferencia de dos vectores se define a través de la suma de un vector y su opuesto:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Multiplicación de un vector por un número

El producto de un vector \vec{a} por un número real k , es otro vector $k\vec{a}$ tal que:

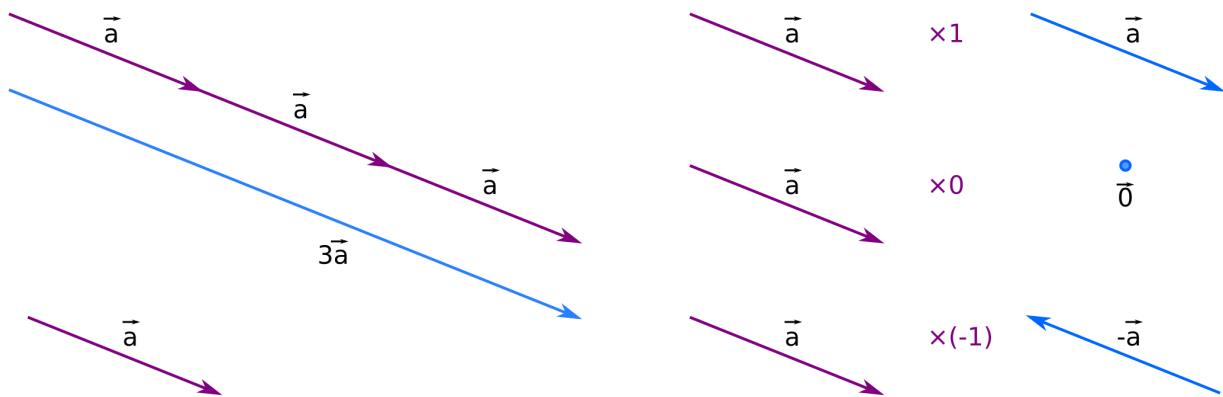
El módulo de $k\vec{a}$ es el valor absoluto de k por el módulo del vector \vec{a} .

La dirección de $k\vec{a}$ es la misma que la del vector \vec{a} .

El sentido de $k\vec{a}$ es el mismo que el del vector \vec{a} si k es positivo y opuesto al del vector \vec{a} si k es negativo.

Si el número k es 0, al multiplicarlo por cualquier vector el resultado es el vector nulo.

En el ejemplo gráfico se ve el resultado de multiplicar el vector \vec{a} por los números 3, 1, 0 y -1.



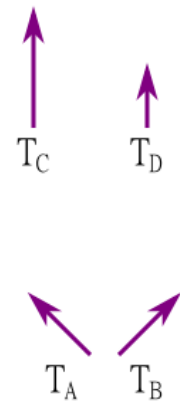
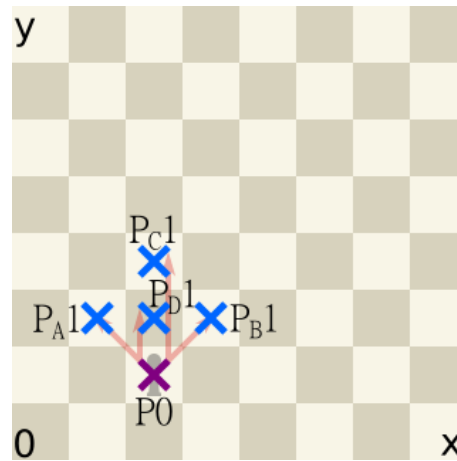
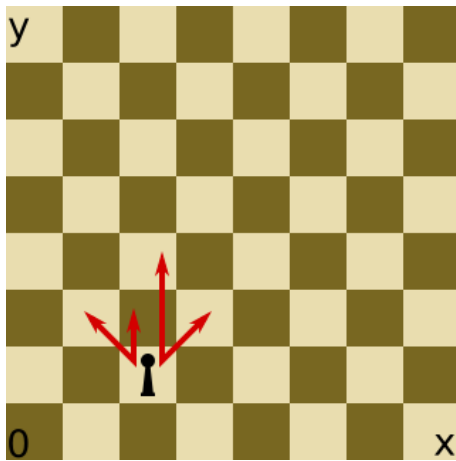
A continuación, y de acuerdo al currículo de Secundaria, se tratarán los movimientos: Traslación, Giro y Simetría axial.

Traslación

Definición: Una traslación de vector $\vec{v} \in R^2$ es la aplicación $t_{\vec{v}} : R^2 \rightarrow R^2$ que transforma cada punto $P \in R^2$ en el punto $P' = t_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$.

Una traslación desplaza un punto siguiendo un vector que describe el movimiento. La trayectoria que sigue el punto que se mueve es una recta. Cuando se traslada una figura geométrica, esta permanece con la misma orientación, no se deforma, ni cambia de tamaño, solo cambia de lugar ya que la traslación es un movimiento directo o que conserva la orientación.

Un ejemplo de traslación es el movimiento de las fichas del ajedrez. El peón normalmente solo puede desplazarse una casilla hacia adelante, salvo cuando hace su primer movimiento que puede desplazarse dos casillas. Si come a otra ficha debe hacerlo en diagonal hacia adelante a la izquierda, o hacia adelante a la derecha. Estos movimientos se pueden describir con vectores:



Giro

Definición:

Dados un punto C y un ángulo α , se llama giro de centro el punto C y ángulo α , denotado por $g_{C,\alpha}$ al movimiento del plano que transforma un punto P en un punto $P' = g_{C,\alpha}(P)$ tal que $\overline{CP} = \overline{CP'}$ y $\widehat{PCP'} = \alpha$.

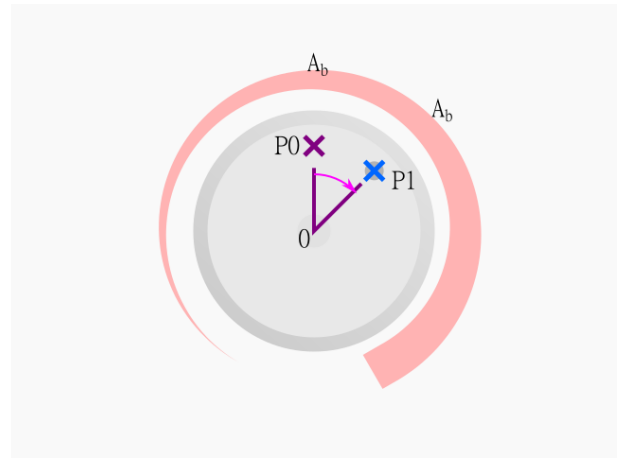
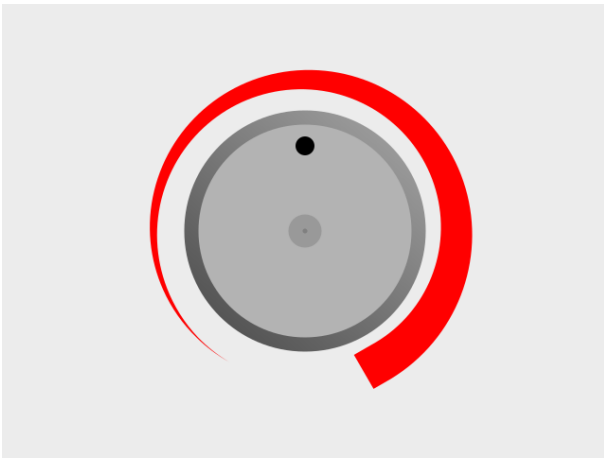
En consecuencia, un giro mueve un punto alrededor de otro un determinado ángulo; la trayectoria que sigue el punto es un arco de circunferencia.

La Tierra gira sobre sí misma y también en torno al sol; este último movimiento se le conoce como “traslación”, aunque en realidad es una aproximación a un giro (ya que la órbita no es circular, sino elíptica). Otro ejemplo de giro es una ruleta o el movimiento de los vehículos en una rotonda.

Existe un criterio en los signos de los giros: cuando el giro es en el sentido contrario al de las agujas del reloj o antihorario, es decir a la izquierda (mirando la zona superior), el sentido del giro es positivo (+). Si el giro es en el sentido de las agujas (horario o a la derecha) se dice que es negativo (-).

Los ángulos de giro están formados por dos semirrectas que se cortan en un punto llamado vértice.

Por ejemplo, si giramos a la derecha este termostato para aumentar la temperatura, se aplica un giro con signo negativo (-), si giramos a la izquierda para bajarla, el giro es positivo (+).



Simetrías

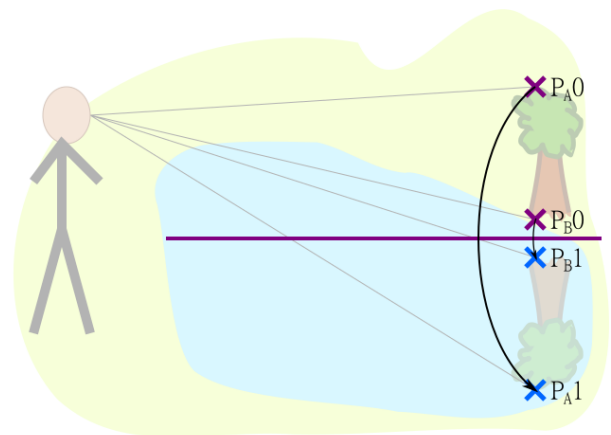
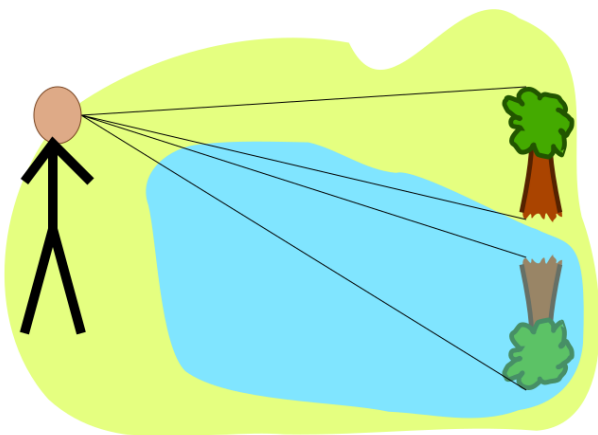
Simetría axial

Definición: Una simetría axial de eje e es un movimiento del plano que hace corresponder a un punto P otro punto P' tal que la recta e es mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.

En una simetría respecto de una, recta, el punto P' transformado de un punto P se visualiza como reflejado en un espejo; por ello, a la simetría axial también se llama reflexión. Cuando se realiza una reflexión de una figura completa, esta se transforma reflejada, de la misma forma que los objetos reflejados en los espejos están “al revés” (lo de la izquierda a la derecha y lo de la derecha a la izquierda).

Cuando se observa la reflexión de un árbol en un charco de agua, la copa con las hojas se ve más abajo que el tronco, y aún más abajo se ve el cielo.

Las simetrías son muy usadas en diseño industrial, esculturas, arquitectura, joyería, y también tienen aplicaciones técnicas muy variadas.



Simetría central

Una simetría central de centro C es el giro de centro C y ángulo de 180° . También puede expresarse como la simetría de un punto P respecto a otro punto dado C . Si P' es el punto transformado por esta simetría, el punto C es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$. Algunos modelos de tijeras, formadas por dos piezas idénticas giradas 180° presentan una simetría central.



Grupos de simetría puntuales (o grupos de Leonardo)

Una figura F plana es cualquier subconjunto del plano R^2 y el grupo de simetría S_F de una figura plana F es el conjunto de movimientos del plano que la dejan invariante.

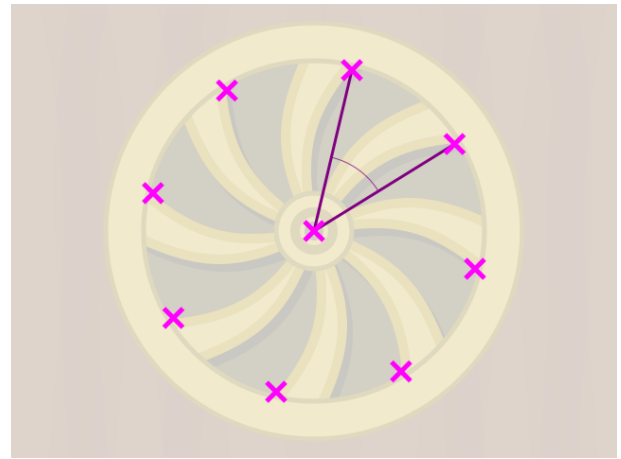
Así pues: $S_F = \{\text{movimientos } T \text{ del plano} \mid T(F) = F\}$

Un grupo de simetría puntual o de Leonardo es finito y tiene un punto llamado fijo llamado centro de simetría.

Pueden ser de dos tipos: Cíclicos (solo contienen giros con centro el punto fijo) y Diedrales (contienen giros centro el punto fijo y simetrías axiales respecto a rectas que pasan por el punto fijo).

Ejemplo de “Simetría rotacional cíclica”

Este tipo de simetría se basa en la repetición de un elemento mediante un giro respecto a un punto.

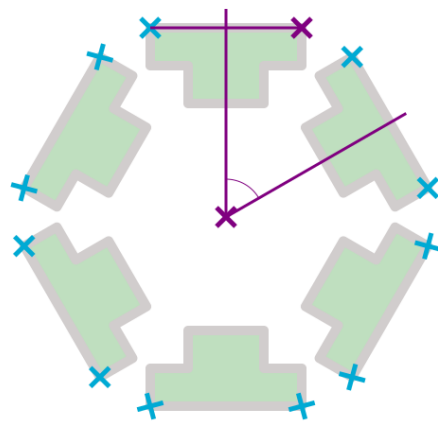
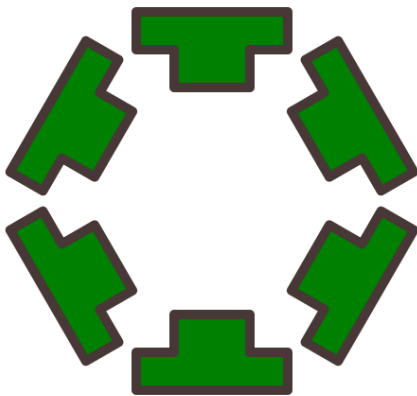


Un ejemplo de simetría cíclica es esta mirilla de una puerta. Cuando se presenta este tipo de simetría, no hay simetrías axiales.

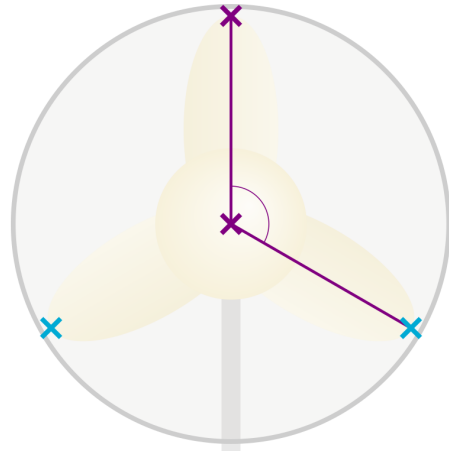
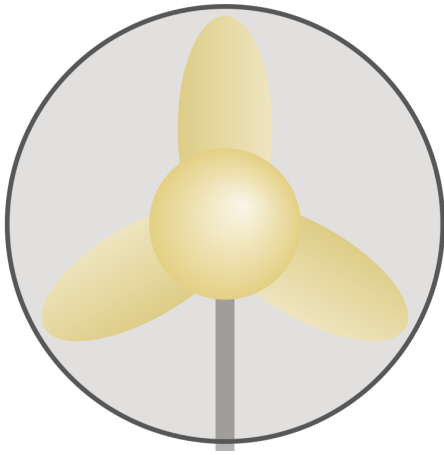
Ejemplos de “Simetría rotacional diedral”

Este tipo de simetría posee reflexiones y giros.

Un ejemplo de esta simetría rotacional de orden 6 es la distribución hexagonal de la primera figura.



Otro ejemplo de simetría rotacional diedral de orden 3 es un ventilador con tres aspas. Cada aspa se obtiene de la anterior por un giro de 120° .



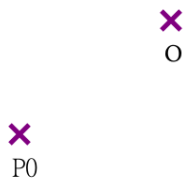
En contraste con la simetría cíclica, las figuras que presentan simetría diedral tienen ejes de simetría axiales.

Simetrías mediante regla y compás

En este caso solo se dispone de una regla no graduada y un compás.

Este procedimiento se ha usado mucho desde la antigüedad, tiene unas reglas muy sencillas y permite hacer muchos tipos de cálculo mediante geometría, pero también tiene limitaciones muy conocidas: no se puede dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales (trisección de un ángulo) y tampoco determinar sobre una recta la relación entre el radio de una circunferencia y su longitud. Por ejemplo, con regla y compás no se puede trazar un polígono de 9 lados, ya que requeriría dividir un ángulo de 120° (que sí se puede obtener) en tres partes iguales.

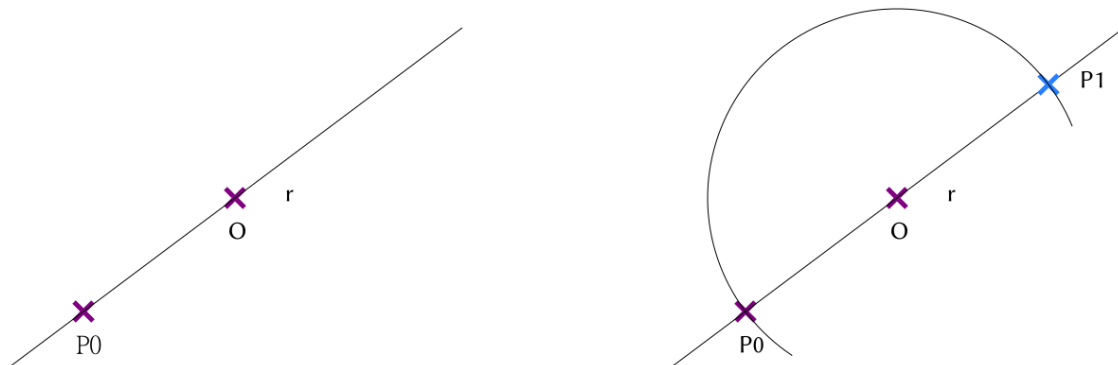
Simetría central o giro de 180°



Para calcular el punto simétrico P_1 de un punto inicial P_0 respecto de un punto O se procede del siguiente modo:

Se traza una recta r que pasa por los puntos P_0 y O .

Con el compás se traza un arco con centro en O y con radio la distancia $O-P_0$; el arco de circunferencia corta a la recta anterior r al lado opuesto del punto de inicio P_0 , obteniéndose el punto P_1 que es el punto buscado (opcionalmente se puede trazar un arco completo mayor de 180° desde P_0 hasta P_1).



Demostración

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro; en este caso, tanto P_0 como P_1 forman parte de la circunferencia C trazada con centro en O y de radio OP_0 , por lo que la distancia desde los dos puntos al centro es la misma.

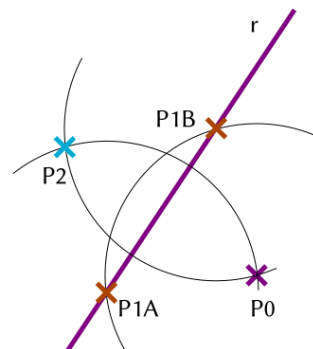
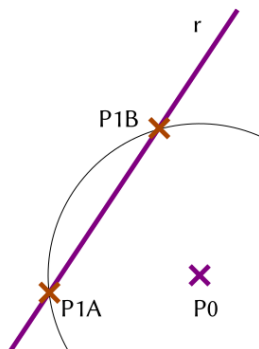
Simetría respecto de una recta de un punto

Se parte de una recta r y de un punto P_0 , y se busca calcular el simétrico P_2 del punto P_0 .

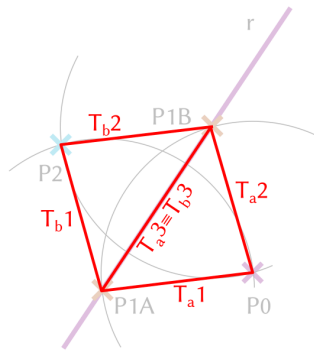


En primer lugar, se traza un arco de circunferencia con centro en P_0 que corte a r en dos puntos que definirán un segmento sobre r y servirán de apoyo para trazar el simétrico (es un proceso similar a la obtención de una mediatriz). Estos puntos se denominarán P_{1A} y P_{1B} (el nombre que reciben no influye).

A continuación, se traza sobre cada uno de esos puntos como centro un arco de circunferencia de radio la distancia de cada punto a P_0 . El punto de corte de estos arcos define el punto simétrico P_2 del punto P_0 .



Demostración



Al trazar un arco de circunferencia desde P_0 , se definen los puntos de corte P_{1A} y P_{1B} , que definen un triángulo isósceles de lados T_{a1} , T_{a2} y T_{a3} , donde T_{a1} y T_{a2} son de igual longitud. Al hacer con el mismo radio los arcos que definen P_2 , se define también un triángulo de lados T_{b1} , T_{b2} y T_{b3} ; como los radios son iguales que los empleados antes, los lados T_{b1} y T_{b2} tienen la misma longitud que T_{a1} o T_{a2} . Por otra parte, el lado T_{b3} , al estar construido sobre T_{a3} , tiene la misma longitud.

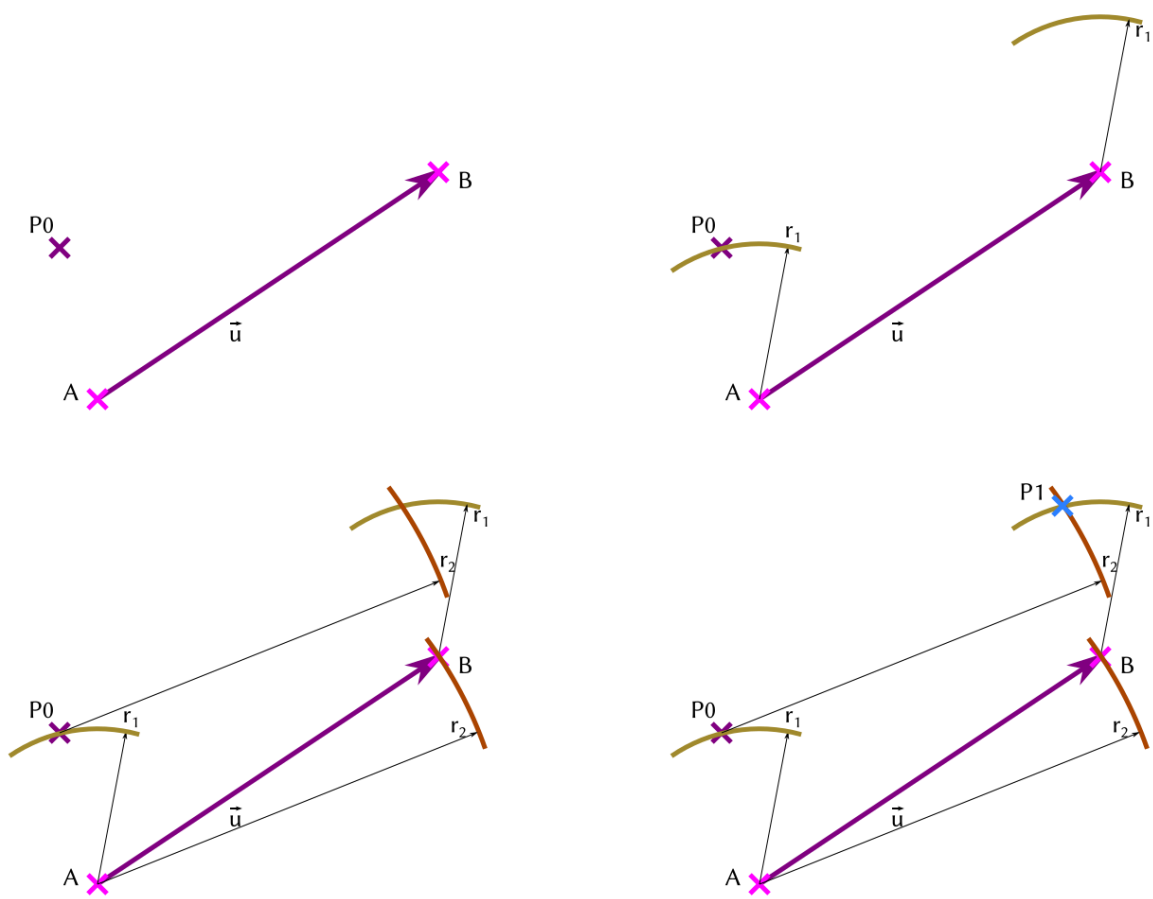
Por tanto, al tener los triángulos la misma longitud de sus lados, son congruentes y sus alturas también, ambos triángulos son isósceles y forman entre ambos un rombo de vértices P_0 , P_{1A} , P_2 y P_{1B} , con una de sus diagonales sobre la recta r . Los rombos tienen dos ejes de simetría que pasan por sus diagonales, por tanto, los vértices del rombo P_0 y P_2 son simétricos.

Traslación de un punto siguiendo un vector

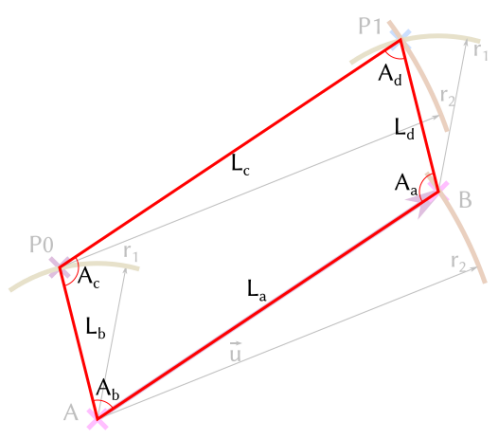
En este caso el vector de traslación se denota por \vec{u} y el punto inicial por P_0 .

Se comienza trazando un arco de circunferencia con origen en el extremo del vector \vec{u} y con radio (denotado como r_1) la distancia entre el origen A de este vector y P_0 . Este arco cubre la zona donde puede coincidir el punto final.

Después (aunque se puede realizar antes que el anterior) se traza un arco de manera similar, tomando como radio la longitud del vector \vec{u} , y con centro en P_0 ; este arco r_2 cortará al que se ha realizado anteriormente y permite obtener el punto P_1 . Geométricamente existe un segundo punto de corte (dos circunferencias cuando se cortan lo hacen siempre en dos puntos), se elige siempre el punto de corte que proporcione un desplazamiento paralelo al vector \vec{u} .



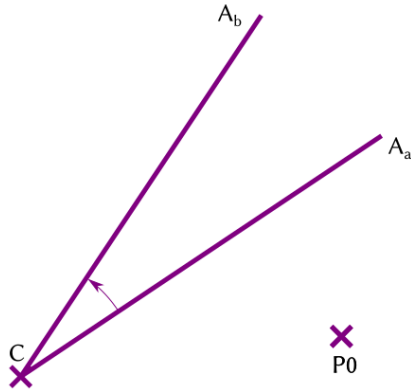
Demostración



Los puntos A, B, P1 y P0 forman un paralelogramo, ya que los pares de lados L_a , L_c , y L_b , L_d tienen dos a dos la misma longitud, y al efectuar el trazado, de las dos soluciones que admite el corte de los arcos de circunferencia trazados desde B y A, se elige la que hace que L_c sea paralela a L_a (la otra solución produciría una figura donde L_a y L_c se cortarían entre sí). De esta forma, al ser L_c y L_a paralelas y de la misma longitud, distancia entre P0 y P1 es la mismo que entre A y B.

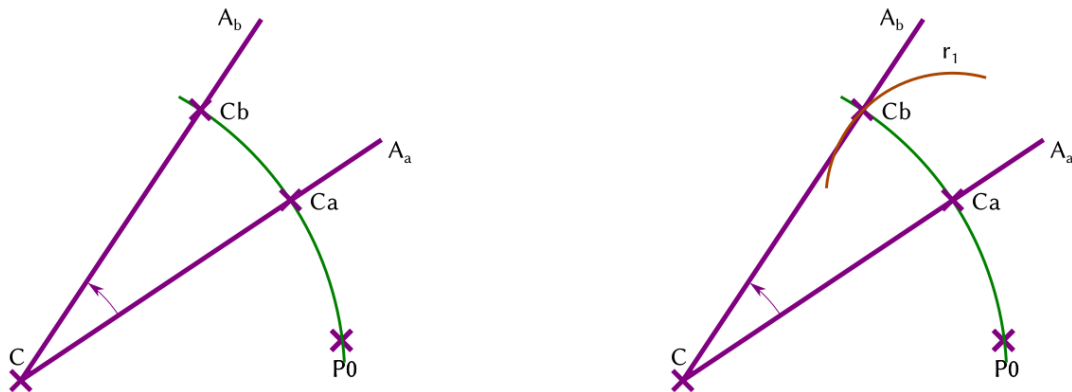
Giro de un punto de centro C y un ángulo dado

Se parte de un ángulo definido por las rectas A_a y A_b , que se cortan en C y un punto P_0 que se desea girar. Se efectuará un giro en sentido positivo, es decir hacia la izquierda o en el sentido contrario a las agujas del reloj.

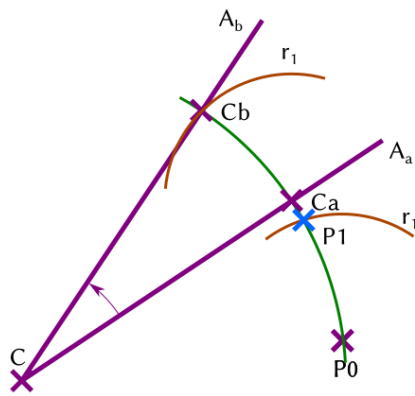


Se traza en primer lugar un arco de circunferencia con centro en C y radio C- P_0 que pase por el punto P_0 y corte a los lados del ángulo; con ello se obtienen los puntos C_a y C_b .

A continuación, se toma la distancia entre estos dos puntos C_a y C_b con el compás, no hace falta dibujar el arco como sale en el dibujo, solo tomar la distancia.



Finalmente, con este radio se traza un arco con el radio r_1 obtenido previamente que corte al arco inicial y permita obtener P_1 .



Ángulos construibles mediante regla y compás

En este ejercicio se ha partido de un ángulo arbitrario determinado en el dibujo.

Si el ángulo de giro no está dibujado en el papel, sino que es una referencia numérica (60° , 45° , 30° ...) se puede construir en algunos casos usando regla y compás y siguiendo los procedimientos de división de la circunferencia, como la bisección de un ángulo (bisectriz) o la división de la circunferencia en 5 o 6 partes para construir un pentágono o un hexágono respectivamente.

No todos los ángulos son construibles con este procedimiento, en algunos casos como mucho se puede obtener una aproximación, incluso aunque el trazado fuera muy minucioso y los instrumentos extremadamente precisos no es posible construirlos. Un ejemplo es el ángulo de 40° , que se obtiene de dividir 360° entre 9. La primera división de 360 entre 3 se puede realizar, pero la segunda requiere de dividir un ángulo (de 120°) en tres partes y eso no se puede hacer con regla y compás. La trisección de ángulos arbitrarios es uno de los problemas clásicos de la geometría griega que ha estado sin resolver hasta el siglo XIX por Pierre Wantzel. Sin embargo, mediante doblado de papel (papiroflexia) sí se puede realizar este tipo de construcción de forma rigurosa desde un punto de vista matemático. Si no se usa doblado de papel, se puede recurrir a aproximaciones o al semicírculo graduado, pero ya no sería una construcción con regla y compás.

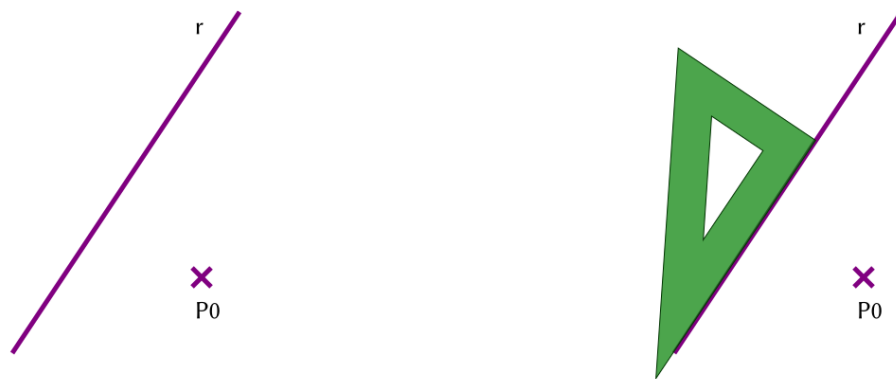
Movimientos del plano mediante otros instrumentos de dibujo

Además de los instrumentos de dibujo ya utilizados, para realizar los movimientos del plano, pueden tomarse otros, como son: escuadra, cartabón, regla graduada, semicírculo graduado y compás.

En dibujo técnico estos instrumentos se usaban con frecuencia; ahora con el uso masivo de los ordenadores se emplean menos, pero, sin embargo, su conocimiento ayuda a manejar mejor las herramientas digitales. La precisión está muy determinada por las escalas de las herramientas utilizadas, por ello, a nivel profesional, se usaban instrumentos de gran tamaño y se trabajaba con documentos muy grandes.

Simetría respecto de una recta

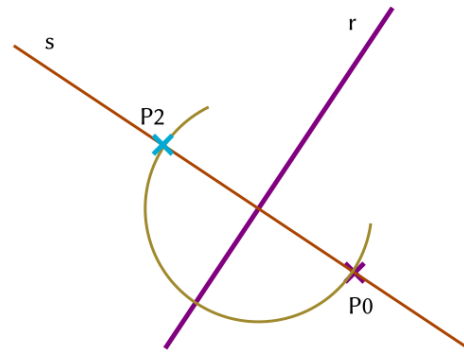
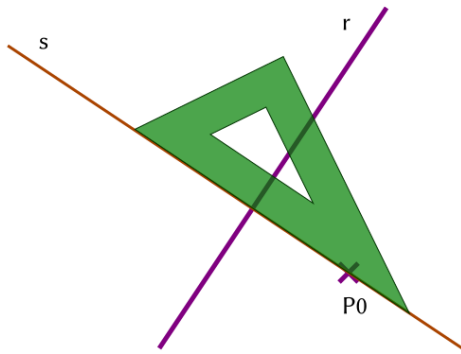
Como anteriormente, se parte de una recta r y de un punto P_0 , y se trata de hallar el simétrico P_1 .



Se sitúa el cartabón alineado con la recta r , y una vez realizado esto, se sitúa la escuadra con uno de sus catetos apoyado sobre el cartabón y el otro cateto sobre el punto P_0 , esto permite tener la orientación de una recta perpendicular a r que pasa por P_0 .

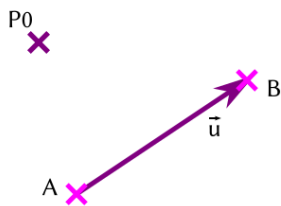


Después se mantiene fija la escuadra y se gira el cartabón, de forma que se apoye sobre el cateto alineado con P_0 . Una vez realizado esto se retira la escuadra y se traza la recta perpendicular a r , que se llamará s .

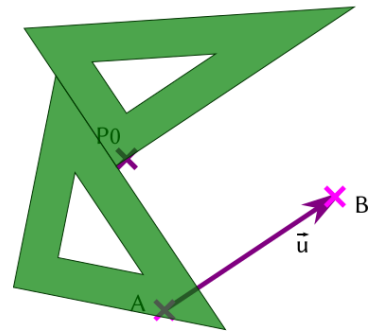
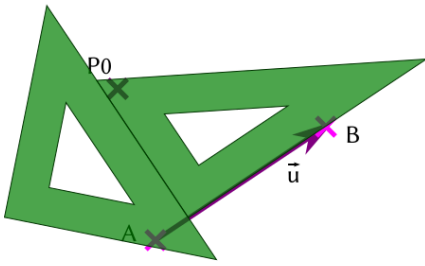


A continuación, con una regla graduada o el compás se traslada la distancia entre el punto P_0 y la recta anterior r , al otro lado, obteniéndose el punto simétrico P_2 . Es un procedimiento menos exacto que el anterior con regla y compás porque está condicionada a una buena alineación inicial.

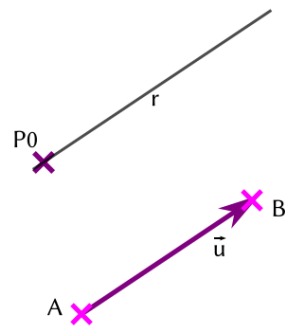
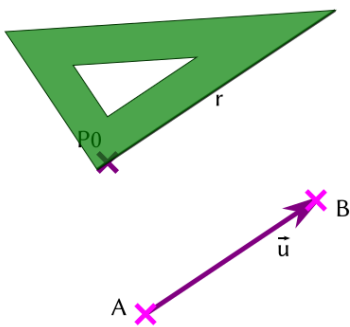
Traslación de un punto siguiendo un vector



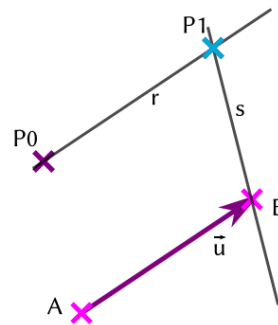
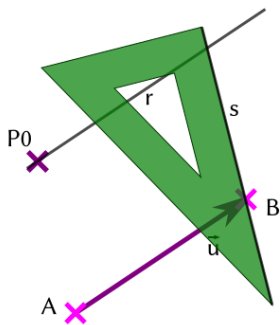
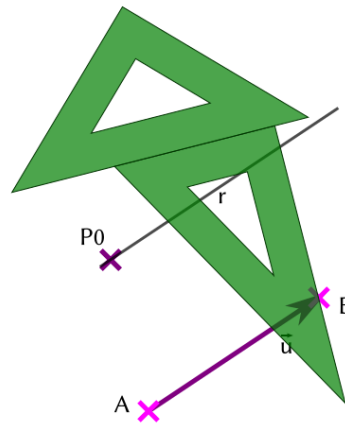
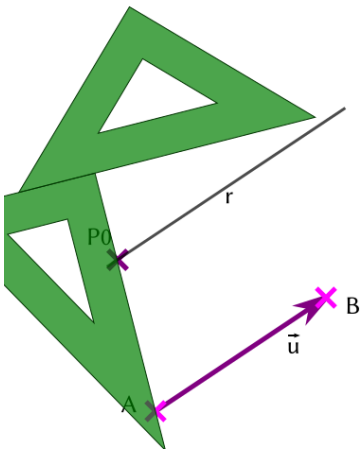
Denotamos por P_0 el punto a trasladar y el vector de traslación es \vec{u} (que va de del punto A al punto B), se empieza apoyando uno de los lados de un instrumento en el vector, alineándolo con su dirección (por ejemplo, el lado largo del cartabón), por conveniencia se debe avanzar este lado para trazar una recta paralela por P_0 , para que este lado cubra bien el punto P_0 y la longitud del vector. La recta paralela trazada se denota por r .



Hecho esto, se apoya el otro elemento (por ejemplo, la escuadra) en uno de los lados del otro (el cartabón siguiendo el ejemplo), y manteniéndolo fijo (la escuadra en este ejemplo), se desplaza el elemento que se alineó con el vector hasta alinearlo con P_0 deslizándolo sobre el otro elemento.

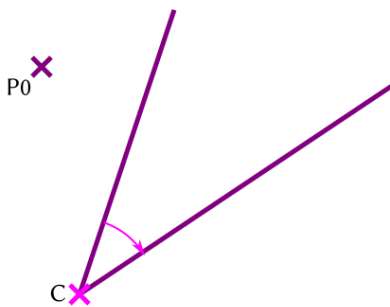


Cuando se ha hecho esto se traza una recta r por P_0 que es paralela al vector \vec{u} , hecho esto se puede tomar la distancia marcada por la longitud del vector y trasladarla a la recta desde P_0 , obteniéndose P_2 , esto se puede hacer con una regla graduada o un compás, o siguiendo el ejemplo anterior, trasladar la recta que estaría definida por los puntos A y P_0 (no está dibujada) y hacer una recta s paralela a ella por B , de forma que se pueda usar la intersección con la recta dibujada antes (r) y en ella marcar el punto obtenido P_1 . La precisión de este método está limitada por la alineación de los elementos usados o de la regla graduada si se usó.



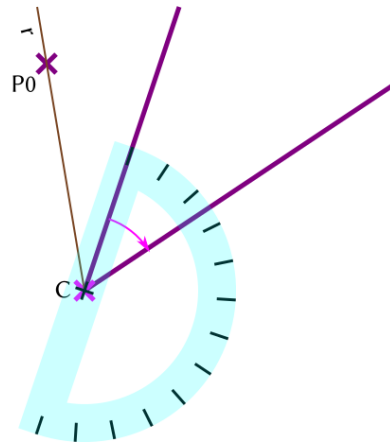
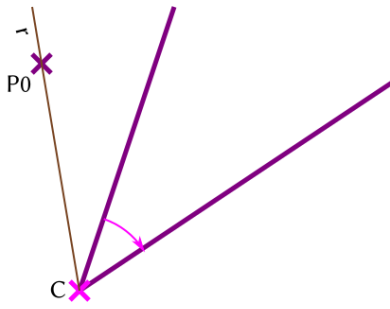
Giro de un punto respecto de otro punto dado y un ángulo determinado

Se parte de un centro C de giro, un ángulo α y un punto inicial P_0 .



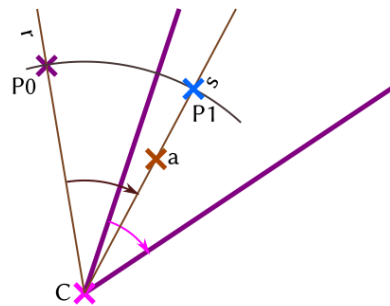
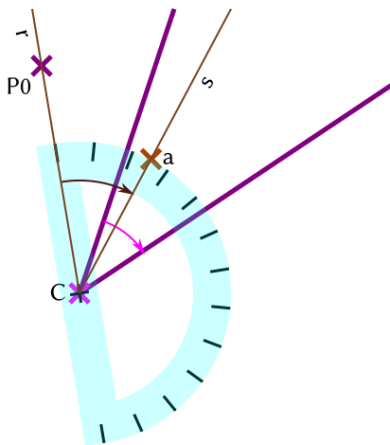
El proceso se inicia trazando una recta que pasa por C y P_0 y denotada por r .

La medida del ángulo, se hace apoyando el semicírculo graduado en uno de los lados del ángulo y con el centro en el vértice C , entonces se apunta el valor que marca la escala del semicírculo, donde está el otro lado del ángulo.



A continuación, se apoya el semicírculo graduado en el punto C y se alinea su base con la recta dibujada, y hace una marca (a) correspondiente al ángulo que se quiere trazar.

Después, con la regla se traza una recta s que pase por los puntos a y C, marcando el ángulo final.



Tomando el compás, con el centro en C y un radio correspondiente a la distancia entre C y P0, se traza un arco que corte a la recta s . El punto de corte P1 es el punto girado.

Multiplicación de un vector por un número

Esta operación puede realizarse midiendo con una regla o bien aplicando una proporción mediante rectas paralelas.

Mediante coordenadas numéricas y ejes cartesianos

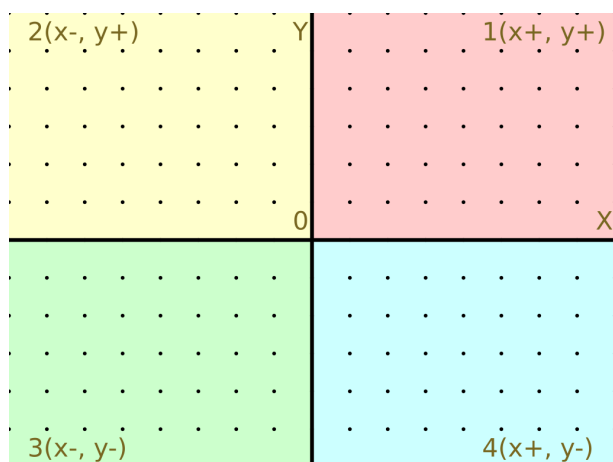
Las transformaciones geométricas: traslación, simetría, giros, escalados (cambio de tamaño), deformaciones... pueden hallarse a partir de la geometría analítica con el apoyo del cálculo matricial y de la trigonometría para el caso de las rotaciones o giros.

En este nivel de tercero de Secundaria se explicarán las transformaciones geométricas que no necesitan este tipo de procedimientos.

Las transformaciones mencionadas son muy utilizadas para generar gráficos por ordenador, simulaciones...

En un sistema cartesiano, los ejes X e Y dividen al plano en cuatro zonas llamadas cuadrantes y que numeramos del 1 a 4 siguiendo el sentido de giro antihorario (el positivo para los ángulos). En los cuadrantes 1 y 2, la ordenada y tiene valores positivos, y en los dos restantes, 3 y 4 son negativos. En los cuadrantes 1 y 4, la abscisa x tiene valores positivos, y en los cuadrantes 2 y 3 son negativos. Esto es muy importante para situar los puntos correctamente.

En un sistema de ejes cartesianos, cada punto $P \in R^2$ se describe mediante un par (a, b) de números reales, así $P = (a, b)$ y cada vector \vec{u} se determina por dos puntos P y Q , $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$. El punto P es el origen del vector \vec{u} y el punto Q es el extremo. Las componentes del vector se obtienen restando a las coordenadas del punto extremo las del punto origen.

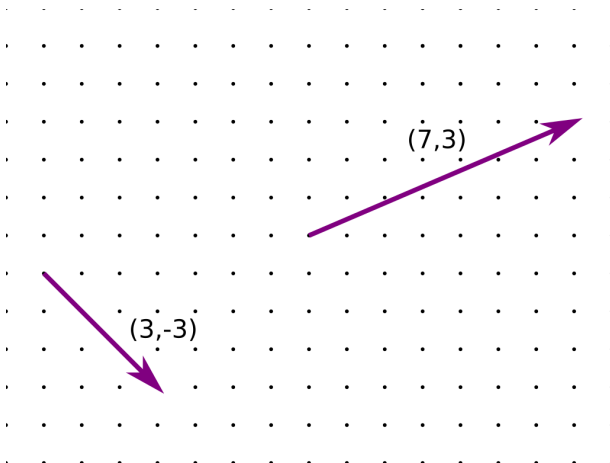


Vectores en coordenadas cartesianas

Un vector en el plano R^2 es un par de números reales, un vector del espacio R^3 es una terna de números reales y en general un vector de R^n es una n-upla de números reales.

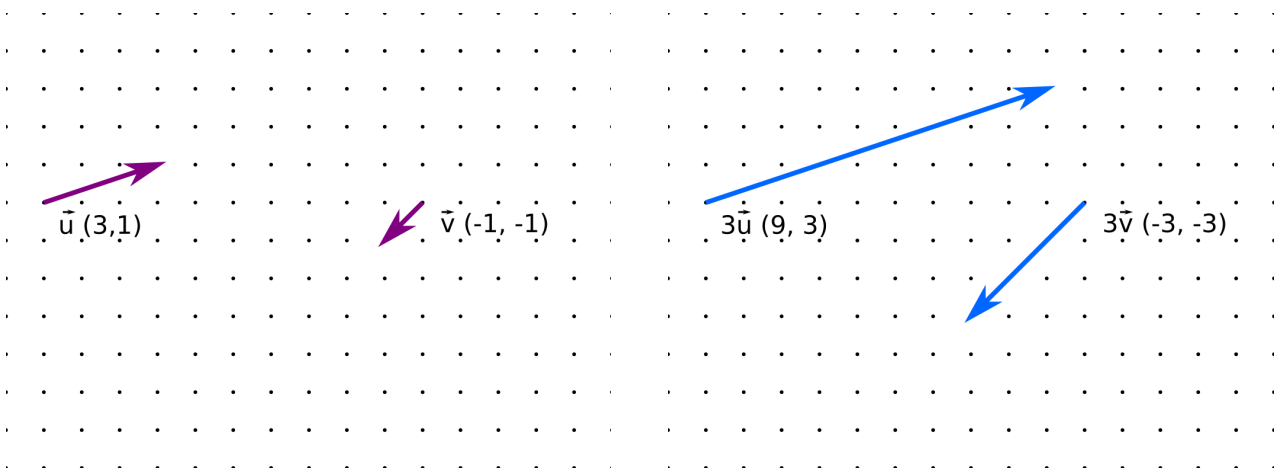
Se puede acercar a los alumnos la idea de vector comparándolo con un ascensor especial de la siguiente manera: un vector se asemeja a un ascensor, pero en vez de moverse solo en una dirección (vertical, solo hacia arriba y hacia abajo), se puede mover en dos direcciones, es decir, puede subir, bajar, y también moverse hacia la izquierda y hacia la derecha. Para conocer la posición de un ascensor normal basta con

saber en qué piso está, basta un número, pero con el ascensor bidimensional harían falta dos números, es decir, dos componentes.



Multiplicación de un vector por un número real

Para multiplicar un vector por un número se multiplican todas las componentes del vector por el número. Si el vector es $\vec{u}=(a,b)$ y el número real es k , el vector $k\vec{u}$ es $(k \cdot a, k \cdot b)$. El punto de aplicación del vector producto se mantiene dónde estaba.



En este ejemplo, el vector resultante se calcula multiplicando las dos componentes:

- $\vec{u}(3,1) \rightarrow 3\vec{u} = (3 \cdot 3, 3 \cdot 1) = \mathbf{(9, 3)}$
- $\vec{v}(-1, -1) \rightarrow 3\vec{v} = (3 \cdot (-1), 3 \cdot (-1)) = \mathbf{(-3, -3)}$

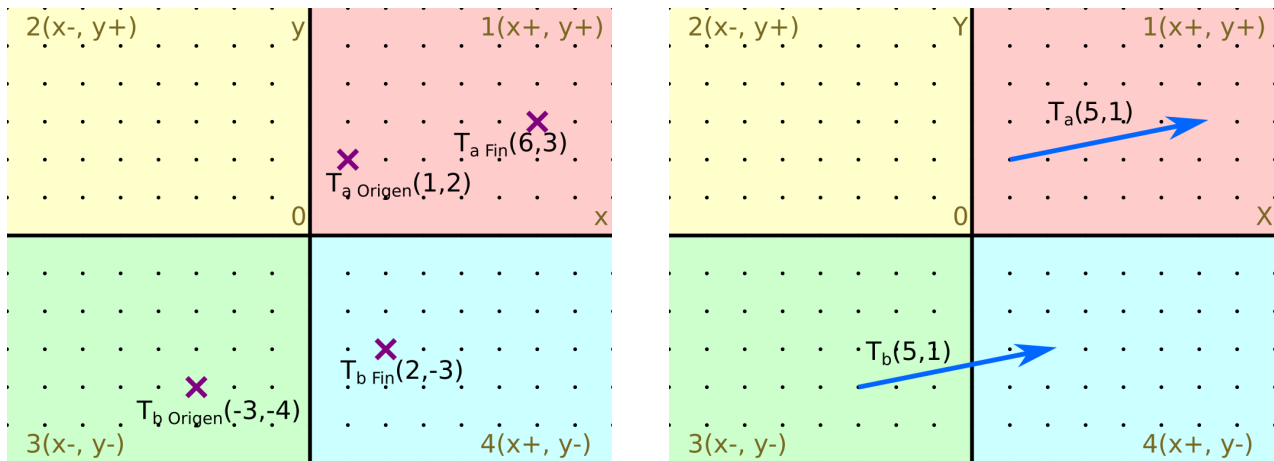
Referido al ejemplo futbolístico del inicio, esto sería equivalente a chutar con el triple de fuerza la pelota, manteniendo la dirección, sentido y punto donde se golpea.

Obtener un vector a partir de los puntos de origen y de destino

Esta operación dibujando sobre papel es trivial, pero numéricamente requiere un poco más de trabajo. Consiste en restar a las coordenadas del punto de destino las del punto de origen, esta resta hay que hacerla

coordenada a coordenada, es decir, la coordenada x del destino menos la coordenada x del origen, y lo mismo con la y.

La mejor forma de visualizar esto es con el ejemplo del ascensor: si un ascensor está en el piso 3 y sube al 8, suponiendo que los pisos vayan correlativos, el ascensor habría subido 5 pisos (en algunas culturas se saltan algunos números por superstición como el 4 o el 13). Un ascensor se mueve en una sola dimensión (un hueco vertical en el edificio), sólo puede subir y bajar, en el plano en cambio hay dos dimensiones, por eso estos vectores tienen dos componentes.



En este ejemplo se calcula de la siguiente manera (los vectores resultantes comparten el módulo, la dirección y el sentido, pero no el punto de aplicación):

- $T_a : (6 - 1 , 3 - 2) = (5, 1)$
- $T_b : (2 - (-3) , -3 - (-4)) = (5, 1)$

También se puede hallar el punto de origen a partir del punto final y las componentes del vector, de igual modo, conociendo el punto de origen se puede conociendo el punto de origen determinar dónde está el punto final.

En ambos casos se trata de sumar al punto un vector. En el primer caso se suma el opuesto del vector, en el segundo se suma el vector sin modificar. El vector opuesto se obtiene multiplicándolo por -1, como se explicó en el apartado anterior, multiplicando todas las componentes por -1.

- $T_{a \text{ Origen}} = T_{a \text{ Fin}} - T_a \quad (6,3) - (5,1) = (6 - 5 , 3 - 1) = (1, 2)$
- $T_{b \text{ Fin}} = T_{a \text{ Inicio}} + T_a: \quad (1,2) + (5,1) = (1 + 5 , 2 + 1) = (6, 3)$

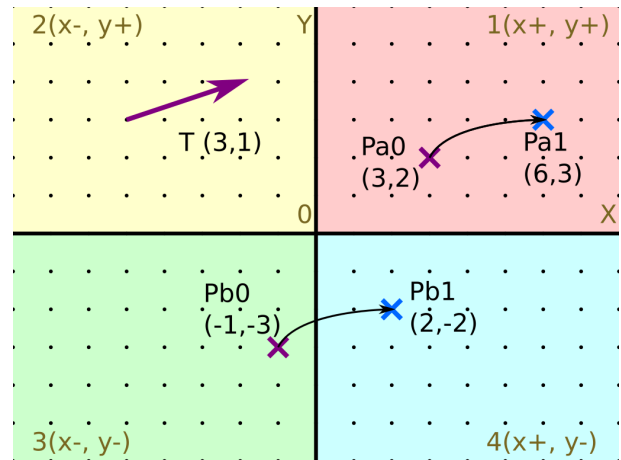
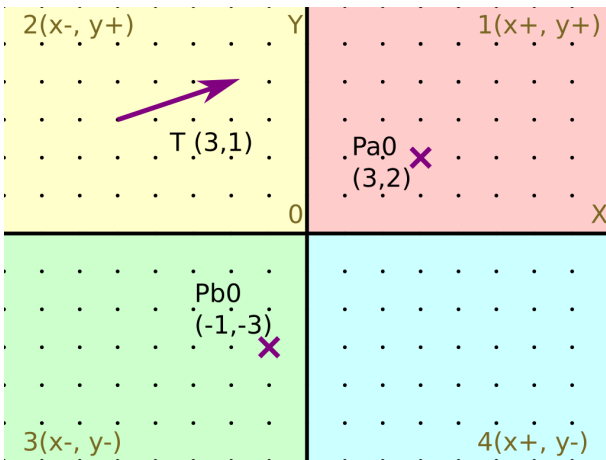
Equivale a una traslación de un punto según un vector, lo que se explica a continuación.

Traslación de un punto siguiendo un vector

La traslación se realiza sumando a las coordenadas del punto las componentes del vector, esto se hace componente por cada componente (la componente x del punto con la componente x del vector, la componente y del punto con la componente y del vector...).

Ejemplo con Pa0 y Pb0 y el vector T (3, 1):

- Pa0 (3, 2) → Pa1 (3+3, 2+1) = **(6, 3)**
- Pb0 (-1, -3) → Pb1 (-1+3, -3+1) = **(2, -2)**

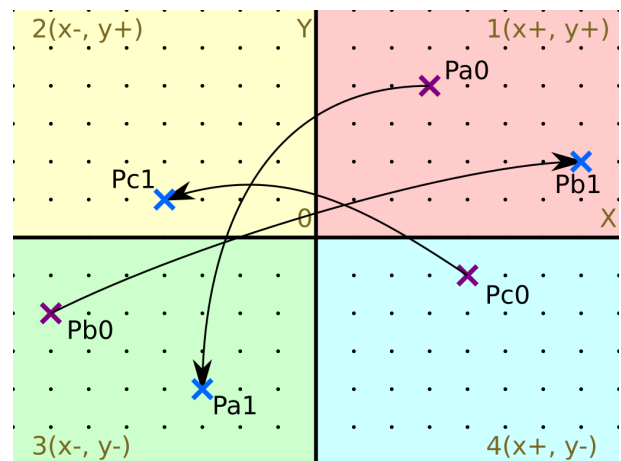
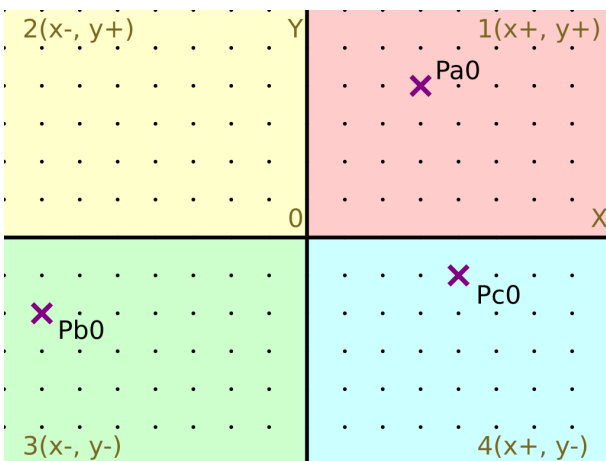


Giro de un punto 180° respecto del origen (simetría central)

Se cambia el signo en ambas componentes (el valor absoluto se mantiene), esto es porque los puntos pasan al cuadrante opuesto (del 1° al 3°, y del 2° al 4°, y al contrario, del 3° al 1° y del 4° al 2°), y en los cuadrantes opuestos los signos son los contrarios.

Ejemplos:

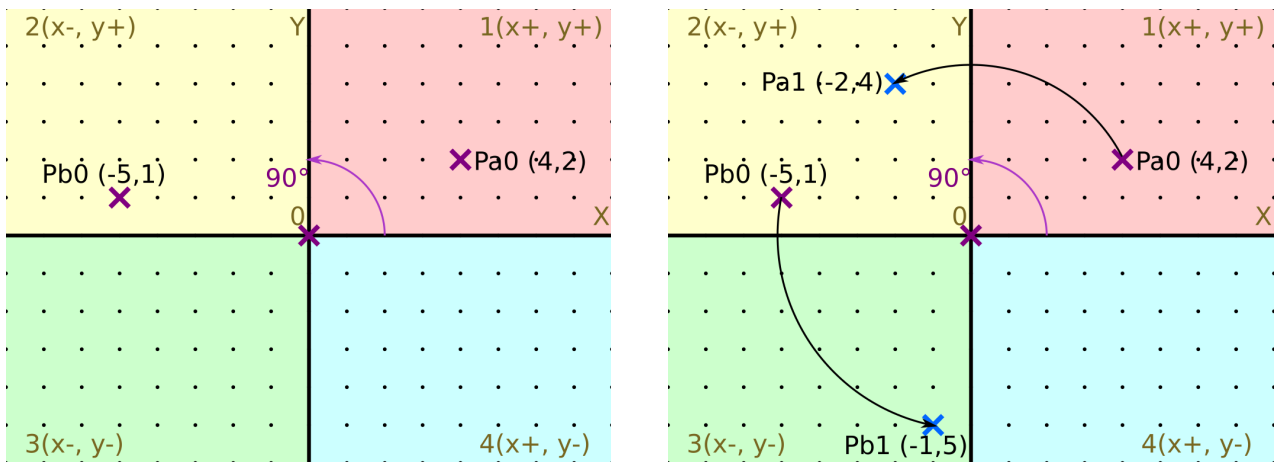
- Pa0 (3, 4) → Pa1 (-3, -4)
- Pb0 (-7, -2) → Pb1 (7, 2)
- Pc0 (4, -1) → Pc1 (-4, 1)



Giro de un punto 90° respecto del origen

Cuando el giro es en sentido positivo (antihorario o a la izquierda), se intercambian las componentes de la posición y en algunos casos se cambia de signo. No es conveniente aprenderse el criterio, lo mejor es razonarlo cuando se necesite aplicarlo.

Si está en el primer cuadrante y el giro es a la izquierda (+) o antihorario, el signo de la componente x pasa a ser negativo porque pasa al segundo cuadrante donde la componente x es negativa, y el de la componente y se mantiene porque en ese cuadrante la componente y es positiva. Si el giro es al contrario, es decir, a la derecha (-), la componente x se mantiene, la que cambia de signo es la y , ya que el punto pasa de quedar por encima del eje X a quedar por debajo. Este razonamiento es similar para el resto de cuadrantes.



Simetría respecto de los ejes de coordenadas

En este caso solo hay que poner el signo opuesto en una de las componentes, hay dos casos:

Eje X

Si el eje de simetría es el eje horizontal (eje de abscisas o X), la componente vertical y cambia el signo.

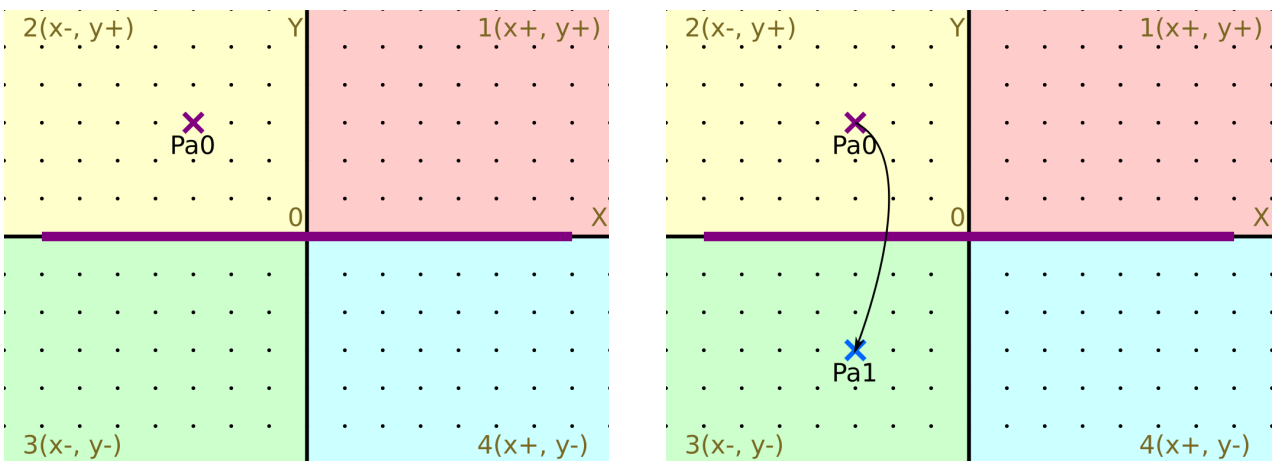
Eje Y

Si el eje de simetría es el eje vertical (eje de ordenadas o Y), la componente horizontal x cambia el signo.

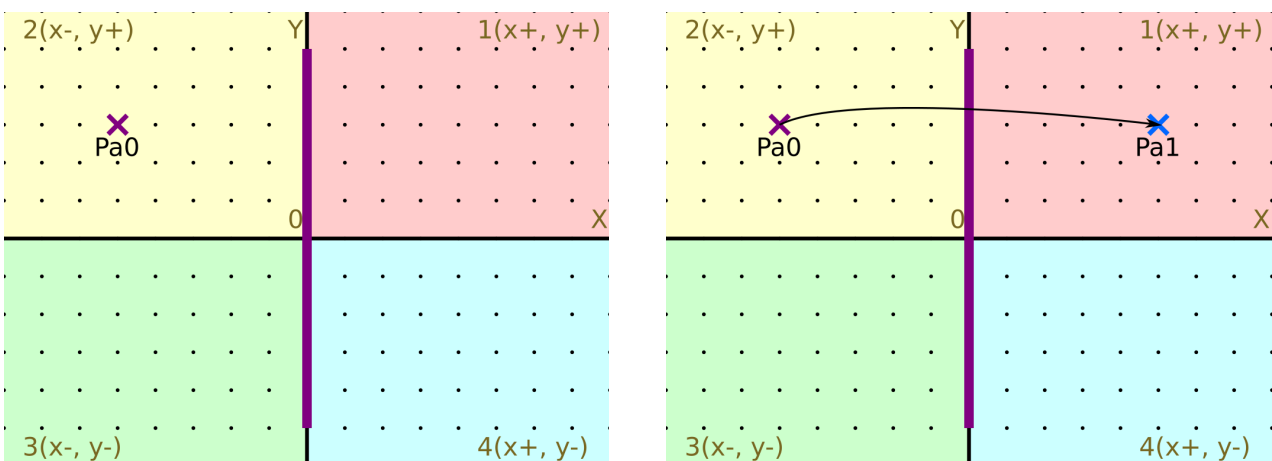
Ejemplo:

- $(-5, 3)$ se transforme con una simetría respecto del eje Y en el punto $(5, 3)$.
- $(-3, 3)$ se transforma mediante una simetría respecto del eje X pasa a ser $(-3, -3)$.

Ejemplo: simetría respecto al eje X:

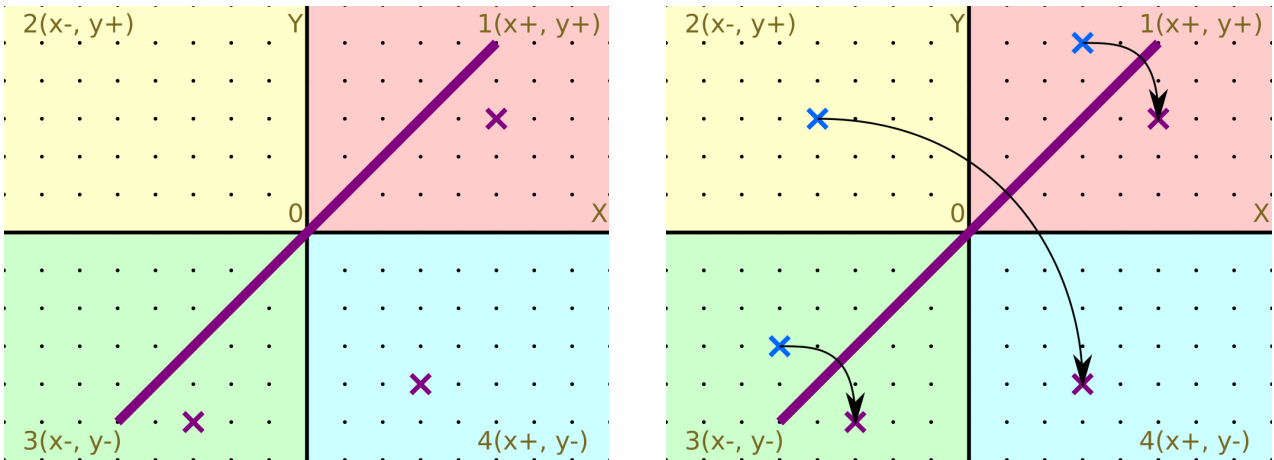


Ejemplo: simetría respecto al eje Y:



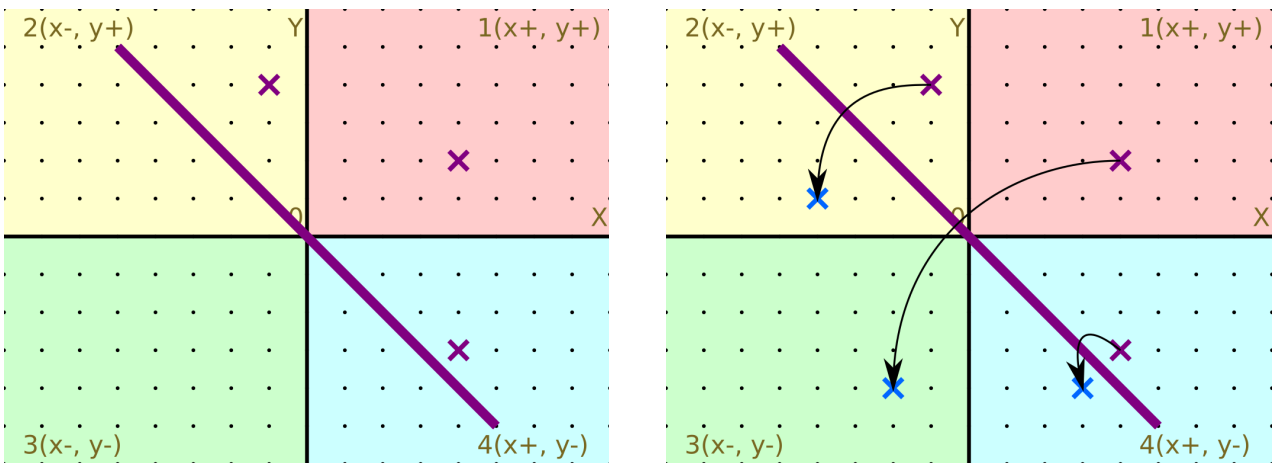
Simetría respecto de la bisectriz de los ejes del primer y tercer cuadrante

Se intercambian los valores de las componentes (x pasa a ser y , e y pasa a ser x), asignando signos positivos o negativos a las componentes en función de los cuadrantes donde se sitúan los puntos.



Simetría respecto de la bisectriz de los ejes del segundo y cuarto cuadrante

Al igual que antes, se intercambian los valores de las componentes, asignando signos positivos o negativos a las componentes en función de los cuadrantes donde se sitúan los puntos.



Doblado de papel

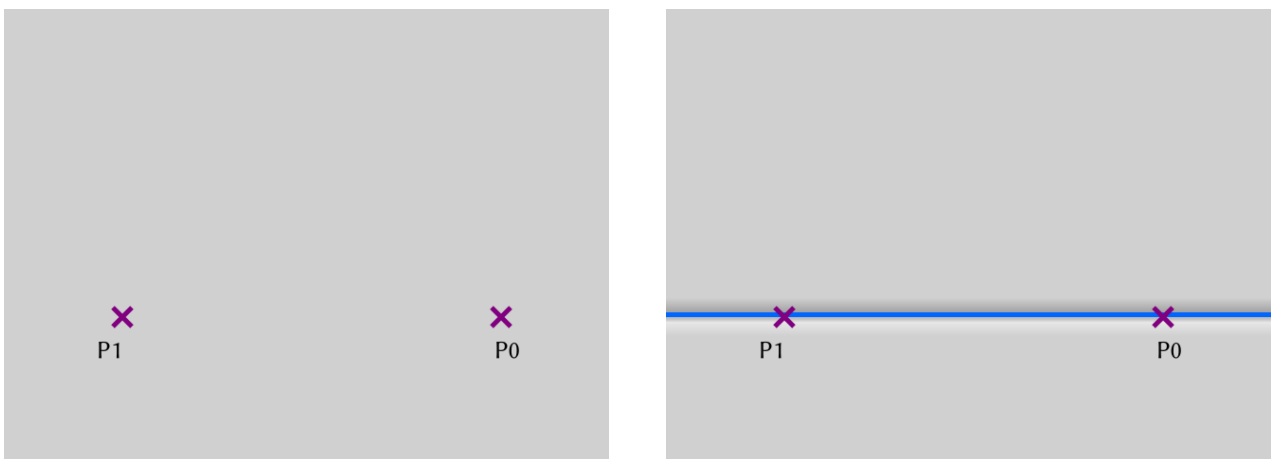
Se pueden realizar estas transformaciones mediante doblado de papel, existen varios métodos, en este caso se explicarán los procedimientos basándose en algunos axiomas de **Huzita–Hatori**, en concreto y mediante dobleces únicos del papel, sin solapes (se dobla el papel, se desdobra y se marca (si fuera necesario) con un bolígrafo o un rotulador la huella del doblez).

En los dibujos, muchos de los elementos tienen una alineación horizontal o vertical, pero este procedimiento se puede aplicar con cualquier orientación. También se incluyen los dobleces aplicados con degradados junto a las líneas de doblez.

A continuación se exponen los cuatro primeros axiomas, que son los necesarios para realizar los movimientos sobre el plano:

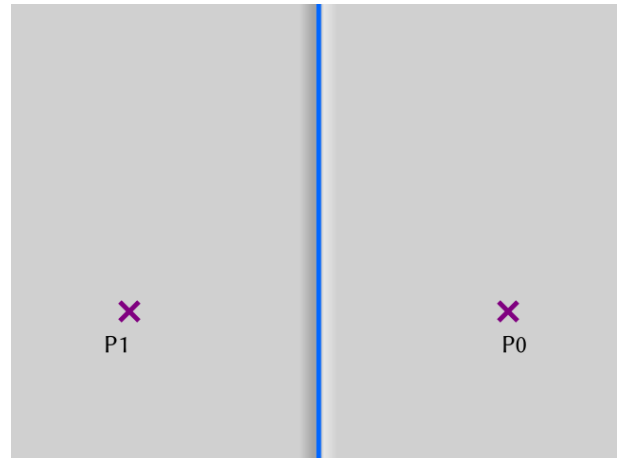
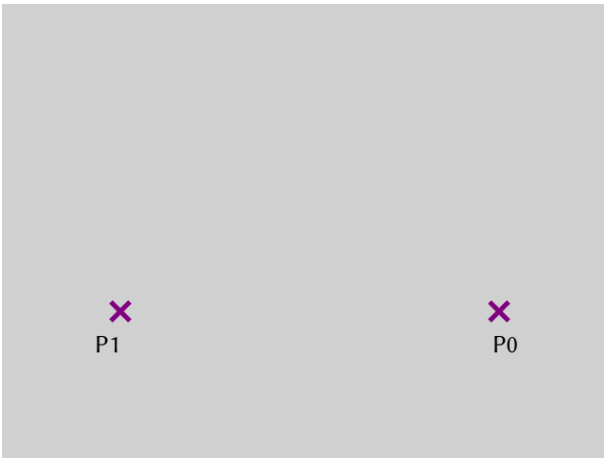
1^{er} axioma O_1

Dados dos puntos P_0 y P_1 (que no sean coincidentes), hay un único doblez que pasa por ellos, es equivalente a trazar una línea por dos puntos con una regla:



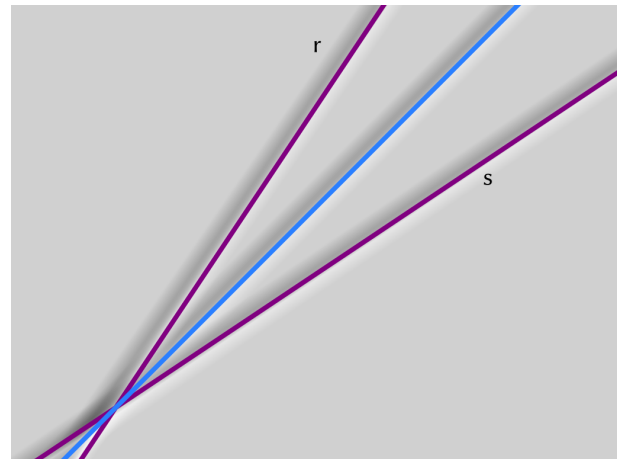
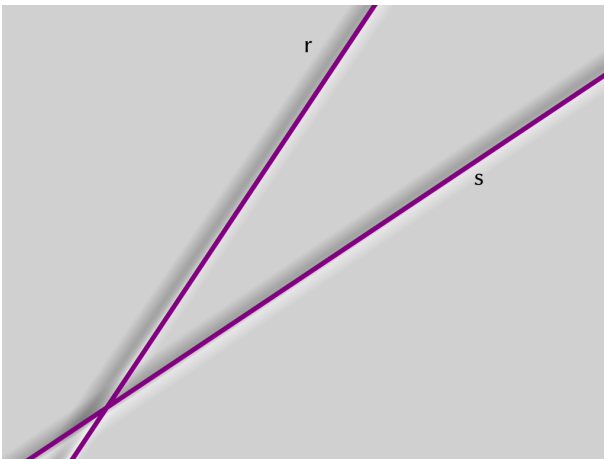
2^o axioma O_2

Dados dos puntos P_0 y P_1 (que no sean coincidentes), hay un único doblez que coloca los puntos uno sobre el otro, es el equivalente a la hallar la mediatriz de un segmento:



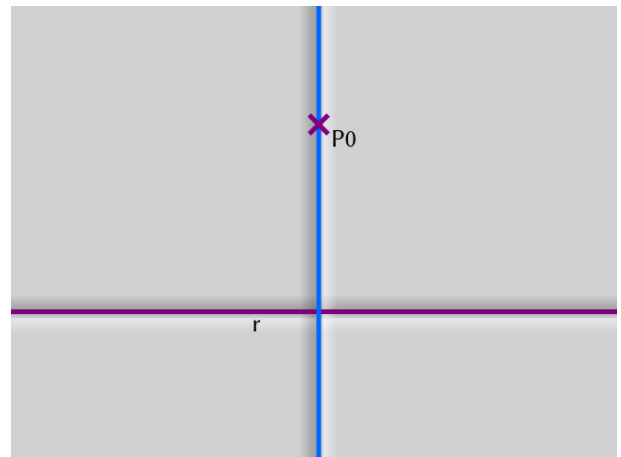
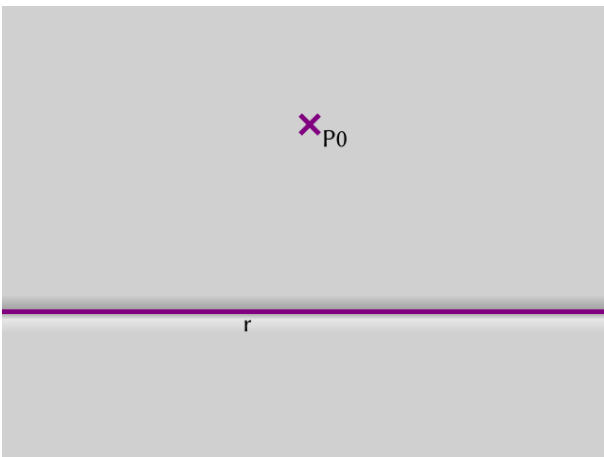
3^{er} axioma O₃

Dadas dos rectas r y s , existe un pliegue que sitúa a una recta sobre la otra, es equivalente a realizar la bisectriz de un ángulo, si las rectas iniciales son paralelas, la recta obtenida está entre medias de ambas:



4^o axioma O₄

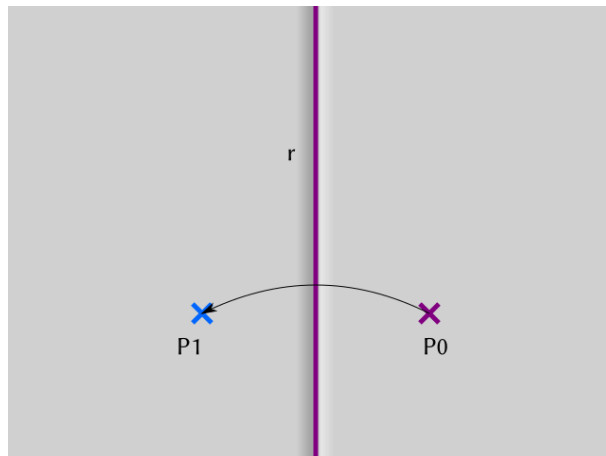
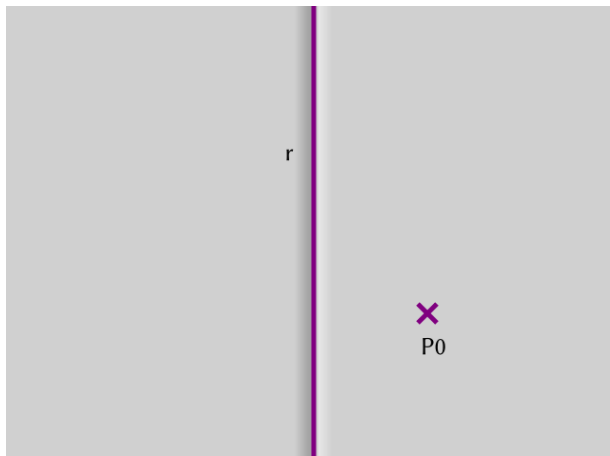
Dado un punto P_0 y una recta r , se puede realizar un pliegue que pase por el punto y es perpendicular a la recta, de forma que esta quede plegada sobre si misma, el punto puede estar situado sobre la recta:



Simetría de un punto respecto de un eje

La determinación del simétrico de un punto respecto a una recta dada r en papiroflexia es trivial.

Se dobla el papel respecto de la línea que determina dicho eje, y después, mediante la transparencia del papel se puede marcar el punto.

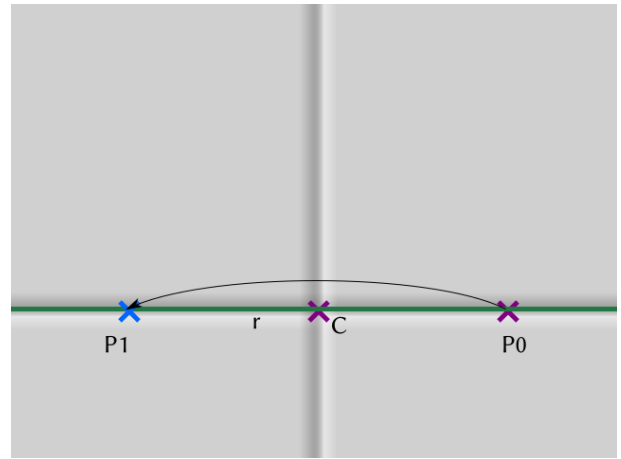
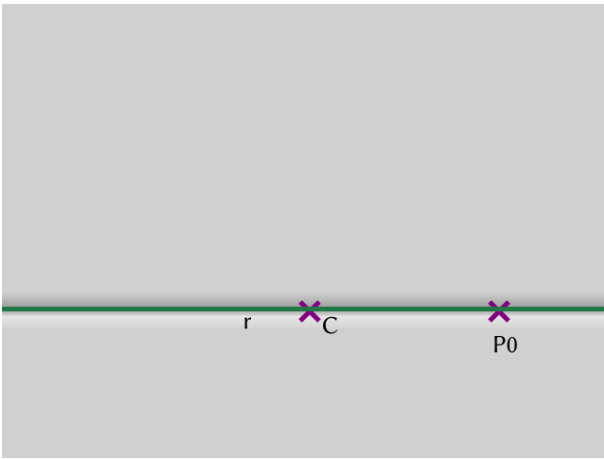


Simetría central de un punto respecto a otro

Se parte de un punto inicial P_1 y un punto central C .

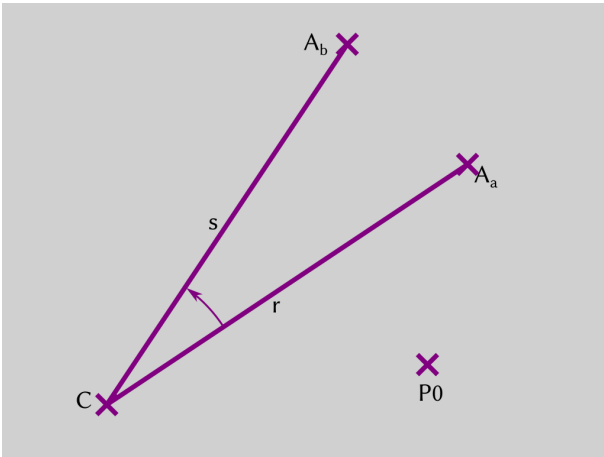


El primer paso consiste en obtener el doblez por ambos puntos usando el axioma O_1 obteniendo la recta r , el siguiente paso es emplear el axioma O_4 para plegar la recta r sobre ella misma pasando por el punto C . Así se determina el punto P_1 , simétrico de P_0 .

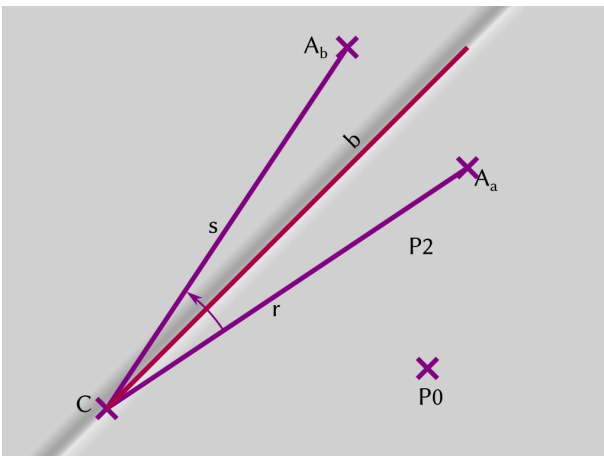


Giro de un punto un ángulo dado

Se parte de un punto P_0 y un ángulo formado por las líneas r y s que se cortan en C .

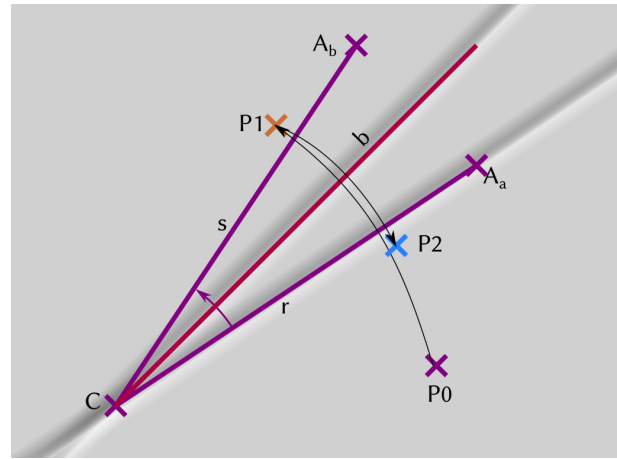
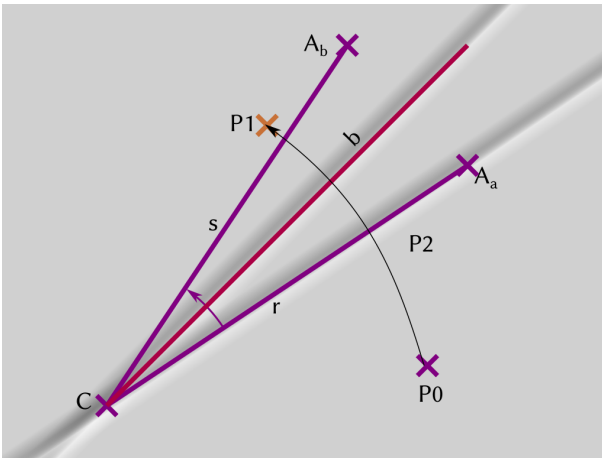


En primer lugar, se obtiene por doblado la bisectriz b de r y s .



Después se lleva el punto P_0 por simetría respecto de la recta r , obteniéndose P_1 .

El punto final P_2 se determina llevando P_1 por simetría respecto de la bisectriz b .

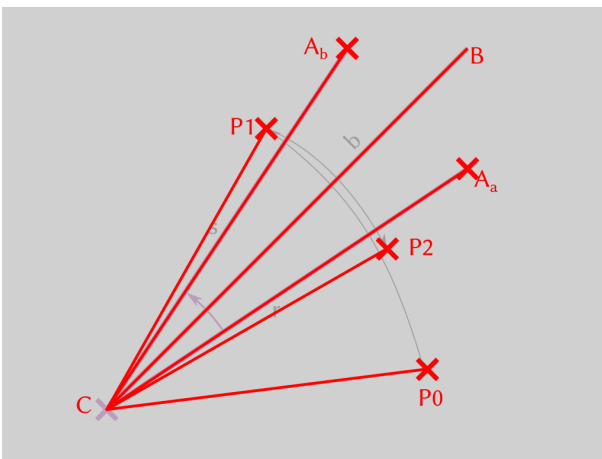


Demostración

Sea B es un punto de la bisectriz del ángulo de giro $\widehat{A_a C A_b}$.

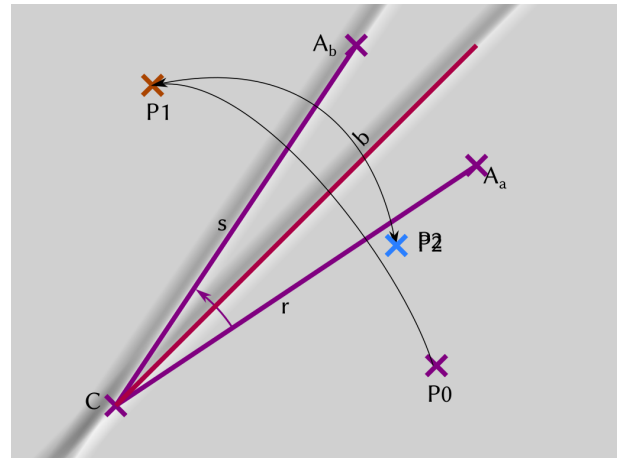
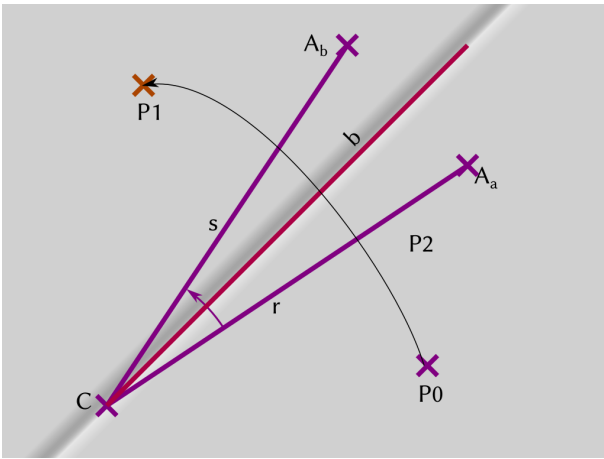
En la figura siguiente se ilustra la demostración. El ángulo $\widehat{P0 C A_a}$ es la suma de $\widehat{P0 C P2}$ (el ángulo de giro) y $\widehat{P2 C A_a}$. Al aplicar la simetría, el ángulo $\widehat{P0 C P1}$ es el doble de $\widehat{P0 C A_a}$ (es decir, vale $2 \cdot \widehat{P0 C P2} + 2 \cdot \widehat{P2 C A_a}$).

Al aplicar el segundo paso (reflexión sobre r), al ángulo $\widehat{P0 C A_b}$ se resta el doble del ángulo $\widehat{B C A_a}$ (bisectriz del ángulo de giro) y $\widehat{A_b C P1}$ (que es igual a $\widehat{P2 C A_a}$), por lo tanto el giro total es el ángulo $\widehat{A_a C A_b}$.



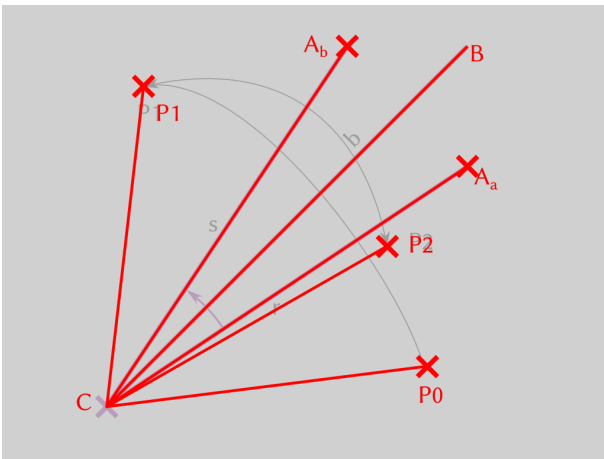
Alternativa

Existe una alternativa para el caso de problemas de espacio (final del papel o por acumulación de otros puntos). Para ello la primera bisectriz b de r y s se obtiene igual que antes. Después, la simetría de P0 se hace sobre la bisectriz r, obteniendo P1, y finalmente se obtiene el punto buscado P2 con la simetría de P1 sobre la recta s.



Demostración

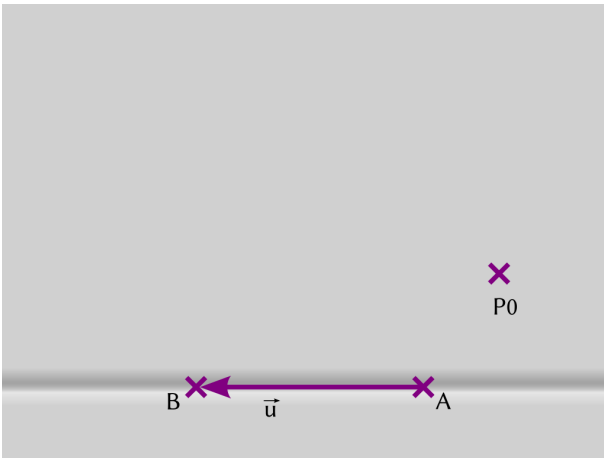
En la figura que sigue se comprueba el segundo procedimiento, de manera similar a la anterior.



La composición de dos simetrías axiales de ejes r y s que se cortan en un punto C es el giro de centro C y ángulo doble del ángulo que forman las rectas r y s , es decir $2 \cdot \widehat{r, s}$.

Traslación de un punto según un vector

Se parte de un vector \vec{u} y de un punto P_0 , si solo se tienen los puntos se puede obtener el doblez completo para tener la dirección del vector mediante el axioma O_1 usando los puntos A y B :

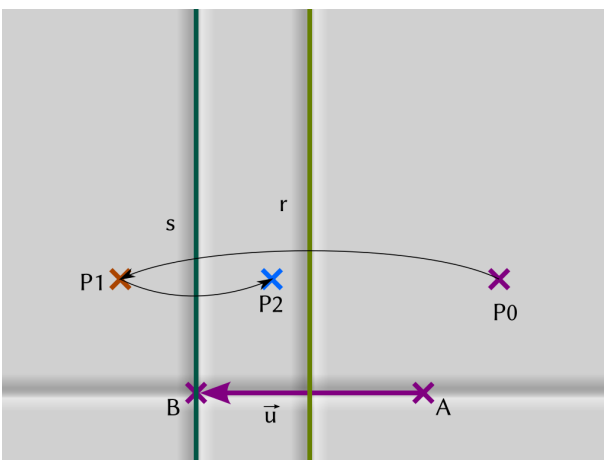
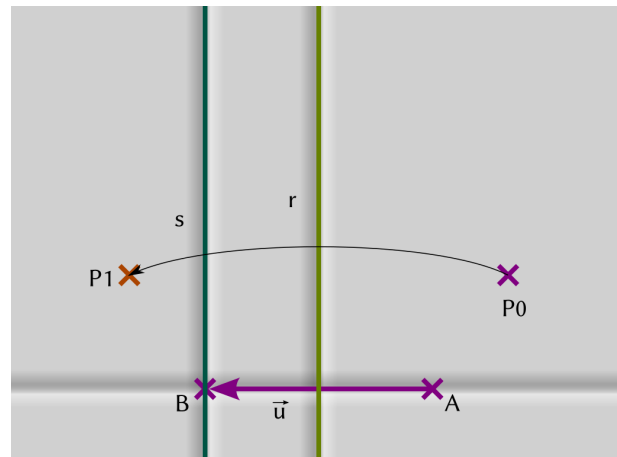
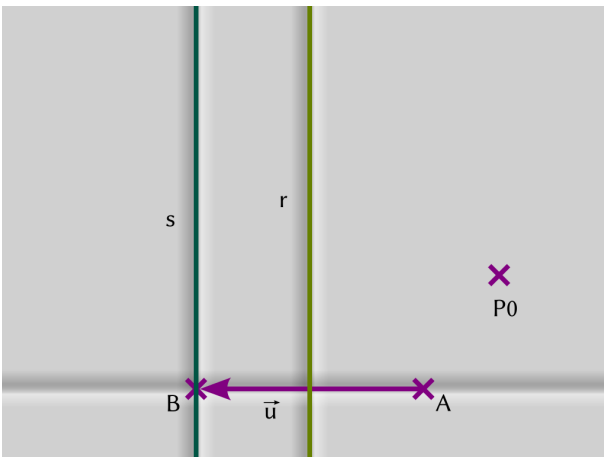


En primer lugar, se obtiene la mediatriz r del segmento AB usando el axioma O_2 .

A continuación, se hace una perpendicular s por B , a la recta definida por la dirección del vector usando el axioma O_4 .

Se lleva el punto P_0 al otro lado de la mediatriz r usando el axioma O_2 y obteniendo P_1 .

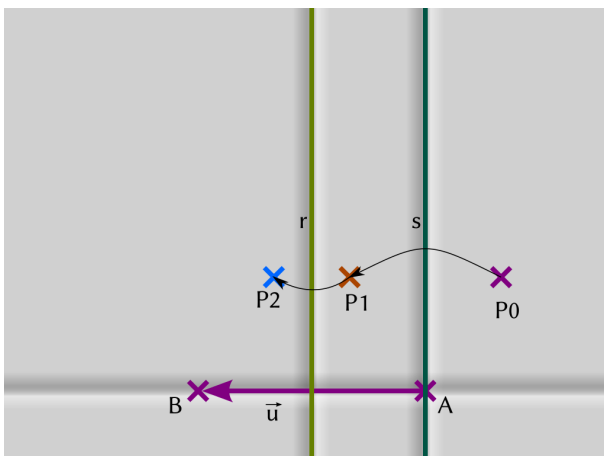
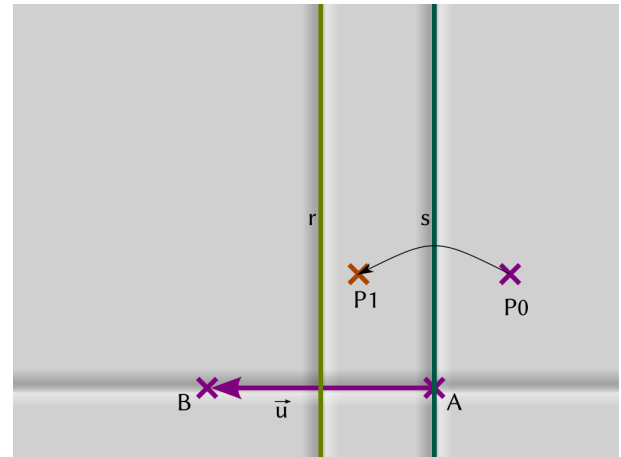
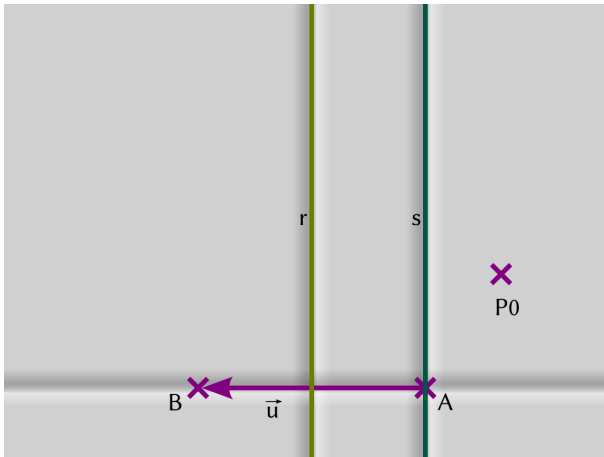
El punto final P_2 se obtiene llevando P_1 al otro lado de s con el axioma O_2 .



Alternativa

Como en el caso de un giro, existe una forma alternativa de hacerlo que puede ser más conveniente en algunos casos, como la falta de espacio.

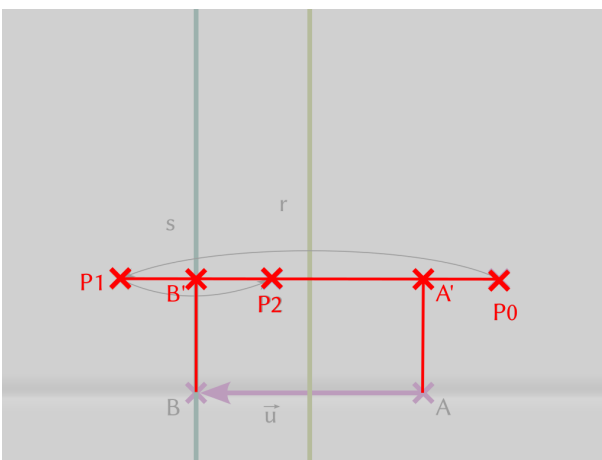
El doblar, por el axioma O_2 , que forma la recta r (mediatriz de AB) se realiza igual que antes, pero el doblar, recta s (axioma O_4) se hace sobre A ; a partir de él se obtiene en primer lugar P_1 desde de P_0 y la recta s , y posteriormente P_2 a partir de P_1 y con la recta r .



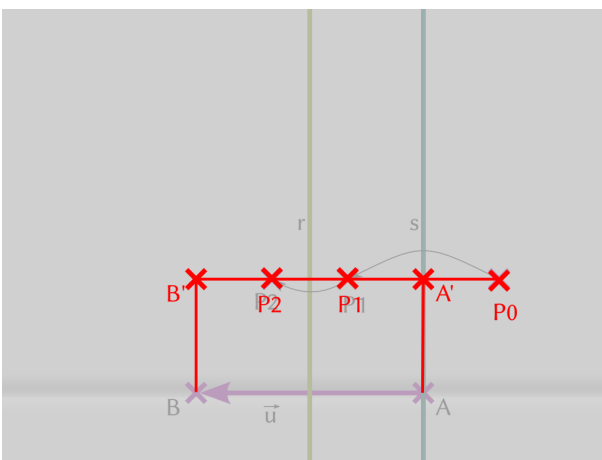
Demostración

Para demostrar la validez de los procedimientos de traslación en ambos casos, se hallan en primer lugar las proyecciones ortogonales de A y B en la recta paralela al vector \vec{u} que contiene al punto P0, obteniendo A' y B'. Los puntos P1 y P2 están contenidos en esa recta porque todas las transformaciones son simetrías respecto a rectas perpendiculares a la dirección del vector \vec{u} .

En el primer método la longitud del segmento P0 P1 es la suma de las longitudes de los segmentos P0 A', A'B' y B' P1. Por la simetría respecto a r, los segmentos P0 A' y B' P1 tienen la misma longitud, por lo que el segmento P0 P1 mide $2 \cdot P0 A' + A'B'$. Al hacer el pliegue por la recta s, se obtiene el punto P2 y el segmento P1 P2, que tiene el doble de longitud que el segmento B' P1, por tanto, al restar la distancia P1 P2 al segmento P0 P1 se obtiene la distancia A'B'.



En el método alternativo, por la simetría respecto a s, los segmentos P0 A' y A' P1 tienen la misma longitud. Al hacer el pliegue en r se obtiene el segmento P1 P2, cuya medida es la medida del segmento A'B' menos la suma de las medidas de los segmentos A' P1 y P2 B', pero al ser segmentos simétricos respecto de r, son de igual longitud. Por tanto, si a la longitud P1 P2 se le suma P0 A' y A' P1 se obtiene A'B'.



Desarrollo de la Situación de Aprendizaje

A continuación, se desarrolla una unidad didáctica correspondiente al currículo de 3º de ESO establecido en la LOMLOE y el BOCyL.

Situación de Aprendizaje “Transformaciones en el plano”

Introducción y contextualización

Se describe una Situación de Aprendizaje para trabajar en 3º de la ESO los conceptos de traslaciones, giros y simetrías en un plano, así como conocer diversas aplicaciones en el ámbito artístico y en el cultural. Algunas de las actividades se realizarán en grupos de tres personas, y otras colectivamente.

El contexto es un colegio público situado en un barrio de Valladolid, con una parte del alumnado extranjero, pero con un buen dominio del idioma, de manera que no van a tener problemas para seguir las actividades; también hay dos alumnos TDAH (ADHD en inglés) pero que no presentan grandes dificultades. No hay alumnos con dislexia u otras dificultades. En cuanto al uso de nuevas tecnologías, no todos los alumnos tienen un teléfono móvil y el manejo de ordenador es bastante básico en muchos de ellos. El número de alumnos en el aula es de veintiuno (todos ellos habiendo promocionado de segundo de ESO en el curso anterior) y el grado de interés por las matemáticas es intermedio, algunos alumnos tienen cierto interés en ampliar sus conocimientos, y otros, sin embargo, necesitan motivación adicional para llevar a cabo las tareas. Algunos de los alumnos han tenido contacto con el plegado de papel (papiroflexia) para la resolución de ecuaciones o construcción de figuras geométricas en cursos anteriores. Por lo general y debido a las acciones en cursos previos, ya no asocian las matemáticas solo a realizar operaciones. En cuanto a otras asignaturas, el nivel en tecnología es de tipo medio y en expresión artística también, algunos estudiantes tienen una buena habilidad para el dibujo manual y otros sobresalen mediante instrumentos.

En cuanto a intereses y aficiones, muchos de los alumnos tienen un gran interés por el fútbol, lo cual se deja notar por las conversaciones o artículos que llevan y comentan. No obstante, las temáticas de las situaciones de aprendizaje serán variadas para abarcar los intereses de todos los alumnos.

Objetivos didácticos

Sentido espacial:

1. Localización y sistemas de representación
 - Vectores: coordenadas, operaciones.
2. Movimientos y transformaciones
 - Transformaciones elementales como giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas manipulativas.

Elementos curriculares involucrados

- **Sentido matemático:** al repasar el concepto de vector aprendido en el curso anterior, de número real, de dimensiones...
- **Sentido espacial:** al evaluarse las posiciones de un punto en coordenadas cartesianas antes y después de su transformación por un movimiento, al trabajarse con vectores, direcciones, sentidos de giro... en el tratamiento de figuras poligonales, líneas, puntos...
- **Sentido de la medida:** en esta actividad se trabaja con medidas angulares y lineales, lo que permite practicar su manejo y recordar las diferencias entre ellas. También se trabaja con procedimientos gráficos donde no hay medidas numéricas, pero sí visuales en forma de la longitud de una línea.
- **Sentido socioafectivo:** al fomentar el trabajo en equipo, compartir el resultado de las actividades realizadas, se manejan técnicas de trabajo en grupos de tres personas que fomentan la colaboración entre los alumnos en su propio aprendizaje. Se favorecen actitudes empáticas de escucha activa a los compañeros e inclusivas a través del trabajo en grupos heterogéneos, además de que los conocimientos que se vinculan a personas significativas suelen ser mejor recordados en el futuro.

Competencias específicas

- 2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.
 - Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM4, CD2, CPSAA4, CC3, CE3.
 - Criterios de evaluación
 - 2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos necesarios. (STEM1, STEM2)
 - 2.2 Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.). (STEM1, STEM4, CD2, CPSAA4, CC3, CE3)
- 5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.
 - Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1.

- **6.** Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos para aplicarlos en situaciones diversas.
 - Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM3, STEM5, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.
- **7.** Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.
 - Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM3, STEM4, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4.
- **8.** Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas
 - Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3.
- **9.** Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.
 - Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.
- **10.** Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.
 - Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.

Competencias clave

- **CCL1.** Se expresa de forma oral, escrita, signada o multimodal con coherencia, corrección y adecuación a los diferentes contextos sociales, y participa en interacciones comunicativas con actitud cooperativa y respetuosa tanto para intercambiar información, crear conocimiento y transmitir opiniones, como para construir vínculos personales.

- **CPSAA1.** Regula y expresa sus emociones, fortaleciendo el optimismo, la resiliencia, la autoeficacia y la búsqueda de propósito y motivación hacia el aprendizaje, para gestionar los retos y cambios y armonizarlos con sus propios objetivos.
- **CPSAA3.** Comprende proactivamente las perspectivas y las experiencias de las demás personas y las incorpora a su aprendizaje, para participar en el trabajo en grupo, distribuyendo y aceptando tareas y responsabilidades de manera equitativa y empleando estrategias cooperativas.
- **CPSAA5.** Planea objetivos a medio plazo y desarrolla procesos metacognitivos de retroalimentación para aprender de sus errores en el proceso de construcción del conocimiento.
- **CCEC1.** Conoce, aprecia críticamente y respeta el patrimonio cultural y artístico, implicándose en su conservación y valorando el enriquecimiento inherente a la diversidad cultural y artística.
- **CCEC2.** Disfruta, reconoce y analiza con autonomía las especificidades e intencionalidades de las manifestaciones artísticas y culturales más destacadas del patrimonio, distinguiendo los medios y soportes, así como los lenguajes y elementos técnicos que las caracterizan.
- **STEM1.** Utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y emplea diferentes estrategias para resolver problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario.
- **STEM2.** Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar los fenómenos que ocurren a su alrededor, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, planteándose preguntas y comprobando hipótesis mediante la experimentación y la indagación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y las limitaciones de la ciencia.
- **STEM4.** Interpreta y transmite los elementos más relevantes de procesos, razonamientos, demostraciones, métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y precisa y en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos...), aprovechando de forma crítica la cultura digital e incluyendo el lenguaje matemático-formal con ética y responsabilidad, para compartir y construir nuevos conocimientos.
- **CC1.** Analiza y comprende ideas relativas a la dimensión social y ciudadana de su propia identidad, así como a los hechos culturales, históricos y normativos que la determinan, demostrando respeto por las normas, empatía, equidad y espíritu constructivo en la interacción con los demás en cualquier contexto.

Descripción de la actividad

Primera sesión

Planteamiento inicial

Se explica en primer lugar la actividad relativa al traslado de un edificio histórico. En ella se relata que en una ciudad imaginaria tienen que salvar un antiguo edificio moviéndolo de lugar; de momento solo se muestra en pantalla el entorno de trabajo. Esa actividad enlaza con la siguiente del campo de fútbol.

La realización de la actividad planteada promueve la apreciación del patrimonio histórico, que sin duda puede enlazar con la asignatura de Historia. También es una primera toma de contacto con conceptos de urbanismo como parte de una cultura general básica.

A cada alumno se le entregará un documento de tres folios donde aparece explicada la actividad en los dos primeros, y en el último se muestra un plano simplificado sobre el que se deben realizar las tareas; los alumnos también reciben una copia digital de la actividad.

Repaso

A modo de repaso, se presenta una actividad previa donde se plantea una serie de preguntas con varias respuestas cada una, siendo válida solo una de ellas. Es una actividad que se realiza de forma individual. Para que resulte más entretenida, la forma de puntuarla es similar a un partido de fútbol donde el alumno marca o recibe goles según acierte o no las preguntas (que son de repaso de otros años); las respuestas que no están muy alejadas de la correcta no conllevan goles en contra, esto es así porque permite dar una motivación adicional a los alumnos en caso de cometer un error. El criterio es elegir algunas respuestas que, aunque sean incorrectas, al menos tengan menos incongruencias.

Se incide sobre todo en tener claros los conceptos previos, y si no se tienen, se repasan. Algunas de las preguntas están basadas en fallos frecuentes que a veces se cometen, como contar los desplazamientos empezando desde uno (en vez de iniciar la cuenta en cero), o tener problemas para encontrar los ejes de simetría de una figura.

Esta actividad no es evaluativa, pero permite a los alumnos recordar conocimientos de años anteriores o saber en qué aspectos de la materia necesitan mejorar.

Las preguntas son mostradas mediante una presentación en el proyector, las respuestas se presentan en la diapositiva siguiente a la pregunta para que la corrección pueda ser inmediata. En cada pregunta se realiza, si es necesario, alguna explicación y contextualización de lo que se pregunta, y en las respuestas se aclaran los conceptos para dejar patentes los motivos que hacen las respuestas incorrectas. Algunas preguntas están ambientadas en el fútbol.

Preparación de la siguiente sesión

Se plantea a los alumnos la siguiente actividad, que consiste en aplicar transformaciones geométricas sobre un plano. La metodología empleada para esta actividad es la de puzle. Así, se organizarán tres paquetes de contenidos para repartir entre los grupos establecidos de tres alumnos. Los alumnos deben repartirse los bloques de temas y leer en casa los que les correspondan para exponerlos al día siguiente a sus compañeros de grupo. Como el tiempo puede ser limitado, las transformaciones mediante instrumentos de dibujo tienen menos prioridad, salvo el giro de un punto. Si algunos alumnos tienen facilidad para entenderlo pueden ver las demostraciones o procedimientos adicionales.

El reparto de tareas será el siguiente:

1. Suma de vectores, giro de un ángulo con regla y compás, coordenadas de un vector a partir de sus puntos de origen y de destino, traslación de un punto por métodos analíticos, traslación de un punto usando instrumentos de dibujo: regla y compás y otros.
2. Multiplicación de un vector expresado en coordenadas por un número real, multiplicación de un vector por un número usando instrumentos de dibujo, giros de 180° y 90° aplicados a un punto usando métodos analíticos y simetrías respecto de los ejes X e Y.
3. Simetría central o giro de 180° con regla y compás, transformado de un punto mediante un giro de centro otro punto y ángulo determinado usando instrumentos de dibujo y semicírculo graduado y simetría de un punto respecto de una recta usando regla y compás.

Segunda, tercera y cuarta sesión

Con los grupos formados en la sesión anterior, y siguiendo la técnica del aprendizaje cooperativo (o puzle) se enseñan entre sí las transformaciones de giros, traslaciones y simetrías de un punto mediante regla y compás, mediante coordenadas numéricas y mediante herramientas de dibujo.

El orden de prioridad es en primer lugar por coordenadas, después por regla y compás y finalmente por otros instrumentos de dibujo, que es optativo (salvo el giro de un punto un determinado ángulo).

Esta actividad es preparada por los propios alumnos en casa a partir del material didáctico que reciben en clase (en folios y un documento digital con toda la teoría adaptada a un lenguaje próximo a los alumnos); previamente se reparten entre ellos lo que explicará cada uno.

Preguntas

Se realizan algunas preguntas básicas para repasar y asegurar conocimientos.

- Sumar un ángulo de 200° y otro de 220° dibujando en la pizarra los ángulos girados, pero haciéndolo mal a propósito, de manera que los alumnos entiendan la importancia de comprobar las operaciones que hace otra persona y no presuponer que están bien hechas. Consiste en suponer 200° como media circunferencia (180°) y añadir otros 20° , y posteriormente se calcula otra media circunferencia y se

añaden otros 20° de forma que los alumnos no se den cuenta de que hay un solape y solo se añaden 20° grados una vez.

- Mostrar en pantalla varias figuras preguntando si son simétricas o no (simetría de reflexión). Son imágenes que pueden llevar a confusión (por ejemplo, dos espirales o dos hélices). Es una forma de hacer más amena la clase y aprender a distinguir cuando algo es simétrico de cuando no lo es. Se aprovecha para enseñar algunos medios cuando se tienen problemas para visualizar bien las simetrías, como interponer un objeto delgado en el dibujo, por ejemplo, un lapicero o un alambre o girar el papel.

Ejercicios

Se plantean unas cuestiones y ejercicios básicos para poner en práctica los conocimientos aprendidos durante esta sesión.

Actividad coordinada con las asignaturas de Tecnología y Educación Plástica

Esta actividad se realiza en coordinación de las asignaturas de Matemáticas, Tecnología y de Educación Plástica, ello se explica al final de la segunda sesión para dar a los alumnos más tiempo a prepararla.

Cada grupo de alumnos elige dos temas relacionados con las simetrías radiales o rotacionales: uno relacionado con Tecnología y otro con Educación Plástica y lo preparan durante un periodo de tiempo, tras el cual lo exponen en las clases de Tecnología y de Plástica. Estos temas se impartirán durante 2-4 minutos delante de sus compañeros.

Los dos temas son de estos tipos:

- Describir algún tipo de mecanismo o aparato que tenga simetría radial, explicando para qué sirve, en qué época se inventó, y si ya no se usa, cuándo se dejó de usar y el motivo. Hay que señalar qué puede aportar la simetría radial en cuanto al funcionamiento, costes, fabricación, manejo por parte del usuario... Los alumnos se ponen de acuerdo entre ellos para evitar repetir el tema.
- Mostrar algunos elementos de diseño industrial o artístico que usan este tipo de simetría, mostrando cómo se componen. Pueden ser llantas de coches, elementos arquitectónicos de edificios de la ciudad, obras pictóricas, logotipos...

A modo de introducción se presentan algunos ejemplos del año anterior sobre simetrías por traslación. En función del tiempo disponible se puede presentar alguno más o explicarlos con más profundidad, estos ejemplos ayudan a los alumnos a tener unas ideas de partida para saber cómo enfocar el trabajo a realizar o cómo presentarlo, ya que a veces puede surgir un bloqueo en los alumnos por la falta de ideas que puede derivar en la procrastinación.

Los ejemplos de temas elegidos son variados, desde los muy cotidianos y sencillos, hasta otros más complejos, estos últimos explicados en un lenguaje sencillo y que puedan entender con los conocimientos que tienen, vinculándolos a otras materias como la historia, la física o la biología.

Geoplanos

El uso de geoplanos es útil para trabajar los conceptos de suma de vectores, propiedades de la suma de vectores y la multiplicación de un vector por un número escalar. Se emplearía uno por cada grupo.

Aplicaciones de simetrías

Existen muchos programas informáticos que permiten explotar las simetrías para la creación de diseños, tanto para el ámbito técnico como el artístico. Se mostrarán algunas aplicaciones web o de escritorio de uso gratuito o con licencia libre, usando algunas de ellas. Se destacará que, aunque su uso al principio no siempre es sencillo, estas herramientas permitirán a los alumnos dar rienda suelta a su creatividad, o aprender y descubrir muchos tipos de patrones basados en simetrías:

- **Inkscape:** Se explica de forma breve, destacando que algunos de los dibujos usados en clase se han realizado con él. Se mostrarán algunos ejemplos de la red.
- **Kali y Moranements :** Se explican brevemente, permite experimentar con multitud de patrones de simetría.
- Páginas web:
 - <https://create.kahoot.it/share/simetrias-actividad-eso/2006f215-4afb-4cef-97b3-4365d131856f> (Recuperada el 11 de junio de 2023)
 - <https://es.khanacademy.org/math/geometry/xff63fac4:hs-geo-transformation-properties-and-proofs/hs-geo-symmetry/v/example-rotating-polygons> (Recuperada el 11 de junio de 2023)
 - <https://www2.ual.es/jardinmatema/simetrias/> (Recuperada el 11 de junio de 2023) se abordan las simetría radiales y plantea varias actividades o cuestionarios de respuesta múltiple tipo Kahoot!
- **FreeCAD y Blender:** (mención y mostrar capturas de pantalla), explicando que son herramientas avanzadas orientadas al modelado 3D para imprimir o crear vídeos.
- **Geogebra:** esta aplicación que ya conocen los alumnos permite trabajar con las transformaciones geométricas que se manejan en 3º de ESO. Se mencionan las herramientas que se usan para ello y se muestran algunos ejemplos.

El tiempo dedicado dependerá de la evolución de la clase. A modo complementario se mostrarán también algunas creaciones de M. C. Escher o algunas diapositivas de ejemplos en monumentos.

Quinta sesión

En esta sesión se mantienen los grupos del día anterior, se repasan las transformaciones geométricas mediante papiroflexia, pero atendiendo una clase magistral en la que se explica de forma sencilla los procedimientos. Esta actividad se basa en los axiomas de Huzita–Hatori, de los cuales se van a usar solo los cuatro primeros, que son de fácil aplicación, aunque muchos alumnos pueden conocer de cursos anteriores los demás. En este método, el papel solo se dobla una vez de manera simultánea, teniéndose que desplegar antes de realizar el siguiente doblez.

Los materiales que se entregan son hojas de formato DIN A4 divididas a la mitad: una para realizar la traslación de un punto y otra para realizar un giro. El motivo de usar un folio DIN A4 dividido en dos (es decir, un DIN A5) es porque es fácil de pegar luego en el cuaderno con celo o pegamento y así conservar el trabajo realizado para el futuro.

Esta sesión permite iniciarse o conocer mejor este tipo de procedimiento de reciente desarrollo y que permite operaciones bastante complejas. En este caso las operaciones que se van a realizar son: hallar el simétrico de un punto, hacer una traslación de un punto y el girado de un punto.

Al realizar la actividad con los compañeros en grupos, si alguno tiene dudas, estas pueden ser resueltas por los propios compañeros. A nivel didáctico hay que incidir en que tomen nota de los pasos que se dan, apunten el número de cada operación realizada para tener el orden, etc.

Ampliación

Se muestran algunos ejemplos de aplicaciones informáticas con las que realizar simetrías y jugar con ellas o crear diseños, destacando la faceta artística de esta parte de la asignatura.

Rigor en las matemáticas

Esta actividad se puede aprovechar para hacer una breve introducción del rigor en las matemáticas y su importancia, explicando que detrás de cada ejercicio realizado sobre papel hay unas demostraciones matemáticas que prueban que los procedimientos realizados son perfectamente válidos, y que la simple realización, sin justificación, de las figuras sobre papel no es suficiente.

Se aclara que las demostraciones no se exigirán en el examen final, pero, sin embargo, su comprensión es necesaria para un aprendizaje correcto de esos conceptos.

Toma de apuntes

Cuando se explican los pasos de la papiroflexia, se guía a los alumnos para la toma de apuntes, diciendo qué tienen que anotar esos pasos en el cuaderno de cara a que, si quisieran repetir la actividad por su cuenta en el futuro, puedan usar sus propios apuntes como fuente de información.

Saber tomar apuntes de forma eficaz es una competencia básica, no solo para poder afrontar cursos de niveles superiores, sino también para otros ámbitos no académicos.

Sexta sesión

Como actividad final, se realiza la actividad planteada inicialmente del traslado del edificio, siguiendo todos los pasos y aplicando las coordenadas. Si hubiera tiempo se puede hacer el complemento del reflejo de un edificio en la fachada de otro o se pueden buscar los ejes de simetría de un octógono que está girado respecto a la posición típica más usual con la que se muestra esta figura geométrica.

Para realizar esta actividad se proporcionarán hojas con el entorno simplificado para facilitar la tarea. Los grupos de alumnos son los mismos que anteriormente. Si aún hubiera tiempo se repasarían los conceptos para preparar la actividad evaluativa. Al final de la sesión se plantea la actividad conjunta con Tecnología y Educación Plástica.

Séptima sesión

Como actividad evaluativa final, se plantea un examen con el símil de un "partido de vuelta". Esta actividad se realiza en una hoja de papel que contiene varias preguntas, algunas de repaso y otras de lo aprendido recientemente. Se puntúa del 0 al 10, pero, además, para mantener la ludificación, se añade un resultado, típicamente de fútbol, a la nota, que muestre el rendimiento del alumno de una manera diferente. En caso de rendimientos bajos, se evitaría poner aquí notas demasiado exageradas para no penalizar la motivación de cara a futuras pruebas.

Parte de la evaluación corresponde a un pequeño portafolio; los alumnos deben describir en un cuaderno de forma breve lo que han aprendido durante las clases.

Otra parte de la evaluación corresponde a la observación de los alumnos durante la realización de las actividades propuestas.

Atención a la diversidad

Se emplean varias metodologías que buscan conseguir una actividad amena y que evite la monotonía que puede suponer mantener unos mismos tipos de métodos durante mucho tiempo, además de procurar abarcar mejor a las diferentes capacidades de los alumnos.

Metodología y estrategias didácticas

Se emplean varias metodologías que buscan conseguir una actividad amena y que evite la monotonía que puede suponer mantener unos mismos tipos de métodos durante mucho tiempo, además de procurar abarcar mejor a las diferentes capacidades de los alumnos.

Ludificación (gamificación)

La ludificación consiste en la adaptación de una actividad de aprendizaje en una actividad de juego que resulte más entretenida o divertida, de manera que se facilite realización de esta actividad por parte de los alumnos y se aumente su interés en ella.

El origen etimológico de la palabra ludificación viene de la palabra latina “ludo”, que significa juego o jugar, en el caso de la palabra gamificación, el origen es la palabra en inglés “game”, que traducida al español también significa “juego”.

La Real Academia Española (RAE) recomienda el uso de la palabra “ludificación”:

acción y efecto de ludificar.

Ludificar:

- 1. tr. Transformar algo en un juego o fomentar sus aspectos lúdicos.*
- 2. tr. Aplicar técnicas o dinámicas propias del juego a actividades o entornos no recreativos para potenciar la motivación y la participación, o facilitar el aprendizaje y la consecución de objetivos.*

Las ludificaciones cada vez son más frecuentes en el mundo de la enseñanza. Para que resulten efectivas se deben realizar siempre sin perder de vista los objetivos didácticos que se persiguen.

Sus principales ventajas están en que por sí mismas las ludificaciones crean un reto para los alumnos, de manera que aumentan mucho su interés y participación. Entre los inconvenientes figuran que pueden generar frustración cuando se pierde, o que requieren de más tiempo para su preparación previa por parte del docente o de un cierto tiempo de preparación al inicio de la actividad para explicarla a los alumnos; por ello es recomendable evitar las complejidades excesivas que podrían hacer que los alumnos puedan perder la conexión con la actividad y no participar en ella, o que se pierda demasiado tiempo aclarando cómo se realiza la actividad.

Estas actividades se pueden llevar a cabo de forma colectiva o individualmente. Las que se realizan colectivamente, fomentan la cooperación entre los estudiantes, además de estimular el trabajo y realización de tareas en equipo. Además, las ludificaciones permiten mantener una cierta flexibilidad en el desarrollo de la clase, promueven que los alumnos aprendan a seguir unas reglas claras y concreta las expectativas de comportamiento. En ellas también existe la opción de ajustar la dificultad a las capacidades de cada alumno, personalizando el aprendizaje.

Existen diversas formas de ludificar una actividad: se puede recurrir a medios informáticos (aplicaciones para ordenador de escritorio o portátil, para teléfono móvil...), o al uso de juguetes y otros medios didácticos o bien plantearse de forma sencilla usando los medios habituales de clase (cuadernos, bolígrafos, pizarra, proyector...).

En el caso de la actividad de recordatorio del primer día ambientada como un partido de fútbol, se opta por una ludificación no competitiva, ya que los alumnos juegan contra ellos mismos. No se dan recompensas al final del juego, ya que es una pequeña actividad orientada sobre todo a recordar conceptos del curso anterior. El desarrollo de la actividad es muy simple: consiste solo en preguntas y respuestas que se revelan al poco tiempo de plantearse las preguntas, dando tiempo a los alumnos para recordar lo que saben y responder a las mismas. También es muy simple en cuanto a material, ya que se puede realizar solo usando el cuaderno de clase y un bolígrafo normal. Las reglas son sencillas, las respuestas pueden estar bien o mal; si se responden correctamente son un gol a favor y si están mal el gol es en contra, adicionalmente, algunas respuestas, aunque estén mal, si se considera que están “encaminadas” entonces no hay gol (el balón sale fuera).

En esta actividad, además de recordar los conocimientos adquiridos en años anteriores, se busca repasar conceptos que van a ser necesarios y que a veces son confundidos por los alumnos, dificultando el proceso de aprendizaje posterior.

Cuestionarios de respuestas múltiples

Los cuestionarios de respuestas múltiples son unas herramientas transversales y multidisciplinarias. Son muy útiles para profesores y estudiantes, permiten aprender y repasar conceptos de forma lúdica por medio de cuestiones con respuestas múltiples, siendo una de las respuestas verdadera.

Con estos cuestionarios se puede evaluar el aprendizaje de conceptos previos, reforzando contenidos, o introducir nuevos conceptos a partir de cuestiones dirigidas por el profesor, así como preparar pruebas de conocimientos que sirvan para reforzar la evaluación final.

Puede organizarse a modo de concurso, con aplicaciones instaladas en dispositivos digitales o que se usan en línea. Responder a las cuestiones de forma correcta otorga puntos, así como contestarlas con mayor rapidez que el resto de alumnos.

Una actividad de estas características puede plantearse de forma individual o bien a grupos cooperativos de alumnos bien distribuidos, combinando a los alumnos más rápidos con otros que lo son menos.

Una herramienta de este tipo forma parte de las metodologías activas y suele resultar muy motivadora para los estudiantes, al combinar ludificación con una participación diferente del alumnado en el proceso de su aprendizaje.

Expositivo o magistral

Consiste en que el docente expone a los alumnos el contenido que han de aprender y estos toman nota y estudian lo impartido. Es un método eficaz y rápido, pero que no conviene abusar para no caer en la monotonía y producir con ello la desconexión de los alumnos del aprendizaje.

Este método se aplicará en la papiroflexia, puesto que es una actividad donde el aprendizaje por imitación de un modelo tiene una gran utilidad.

Aprendizaje colaborativo

El trabajo en el aula se enfoca interactivamente, de manera que el aprendizaje es responsabilidad de los propios estudiantes, quienes se encargan del aprendizaje de los otros compañeros. De esta forma, se promueve que tengan un papel activo, se ayuda a evitar la monotonía y se favorecen las relaciones sociales. En este método existe en primer lugar una fase en la que se repartirán las tareas y se explicarán; después los alumnos las preparan por su cuenta en casa a partir de los apuntes proporcionados en clase, y al día siguiente, lo explican a sus compañeros, para, finalmente comprobar que el aprendizaje haya sido efectivo, mientras tanto, se controla el proceso y se interviene en los casos necesarios.

En esta Situación de Aprendizaje que planteamos la mayoría de actividades serán realizadas en grupo.

Puzle

La técnica del puzle permite promover la cooperación y diálogo entre compañeros, y fomentar la autonomía en el aprendizaje. El procedimiento consiste en dividir el aula en varios grupos de alumnos y el contenido a enseñar en varias partes (tantas partes como número de alumnos haya en el grupo). Cada uno de los alumnos de cada grupo recibe un número que es la parte que tiene que preparar por su cuenta en casa, tomando nota de las dudas que tenga. En otra sesión posterior, se juntan los alumnos con el mismo tema (mismo número) y ponen en común lo que han aprendido, resolviendo las dudas que puedan tener. Posteriormente, cada alumno vuelve a su grupo original y entre ellos exponen lo aprendido al resto de los compañeros de su grupo escuchando y aprendiendo de los demás su parte. Este tipo de aprendizaje es adecuado aplicarlo en contenidos que se puedan dividir en partes que no dependan unas de otras.

En este caso se permite a los alumnos elegir las tareas que realizarán en lugar de tener asignadas unas tareas en concreto.

Preguntas

La realización de preguntas al alumnado es una forma de estimular su interés, de destacar aspectos relevantes, de repasar lo aprendido en cursos anteriores o de interrelacionar el contenido con otras asignaturas. Se debe evitar el uso de preguntas que puedan humillar a los alumnos por no estar atentos o no saber correctamente la respuesta.

En esta Situación de Aprendizaje se va a aprovechar para poner en el proyector algunos tipos de figuras que pueden dar lugar a error a la hora de interpretar si son simétricas o no y para explicar de forma didáctica algunos métodos para ver mejor las simetrías por reflexión cuando se tienen dificultades, por ejemplo, interponiendo un objeto estrecho donde puede estar el eje de simetría. También se expondrá un ejercicio mal resuelto a propósito para fomentar el desarrollo de una mentalidad crítica ante un ejercicio mal resuelto para evitar que los errores queden sin detectar.

Portafolio (simplificado)

Una forma de afianzar el contenido aprendido es echar la vista atrás y resumir los conceptos aprendidos durante las actividades, añadiendo qué partes han podido suponer una mayor dificultad, cuáles han sido más fáciles o cuales han sido de mayor o menor agrado. Existen muchas formas de realizarlo, pero en este caso se buscará la simplificación: un párrafo en el propio cuaderno es suficiente para resumir lo aprendido.

Si algún alumno se siente bloqueado por la falta de ideas para poder redactar el texto, se le puede ayudar con preguntas acerca de la actividad, además de la ayuda de sus compañeros de grupo.

Evaluación

Ya se han comentado varios instrumentos de evaluación, pero se pueden resumir de tres formas: por un lado mediante la observación de los alumnos durante las actividades, valoración del portafolio simple y mediante un examen final que se realizará en la última sesión.

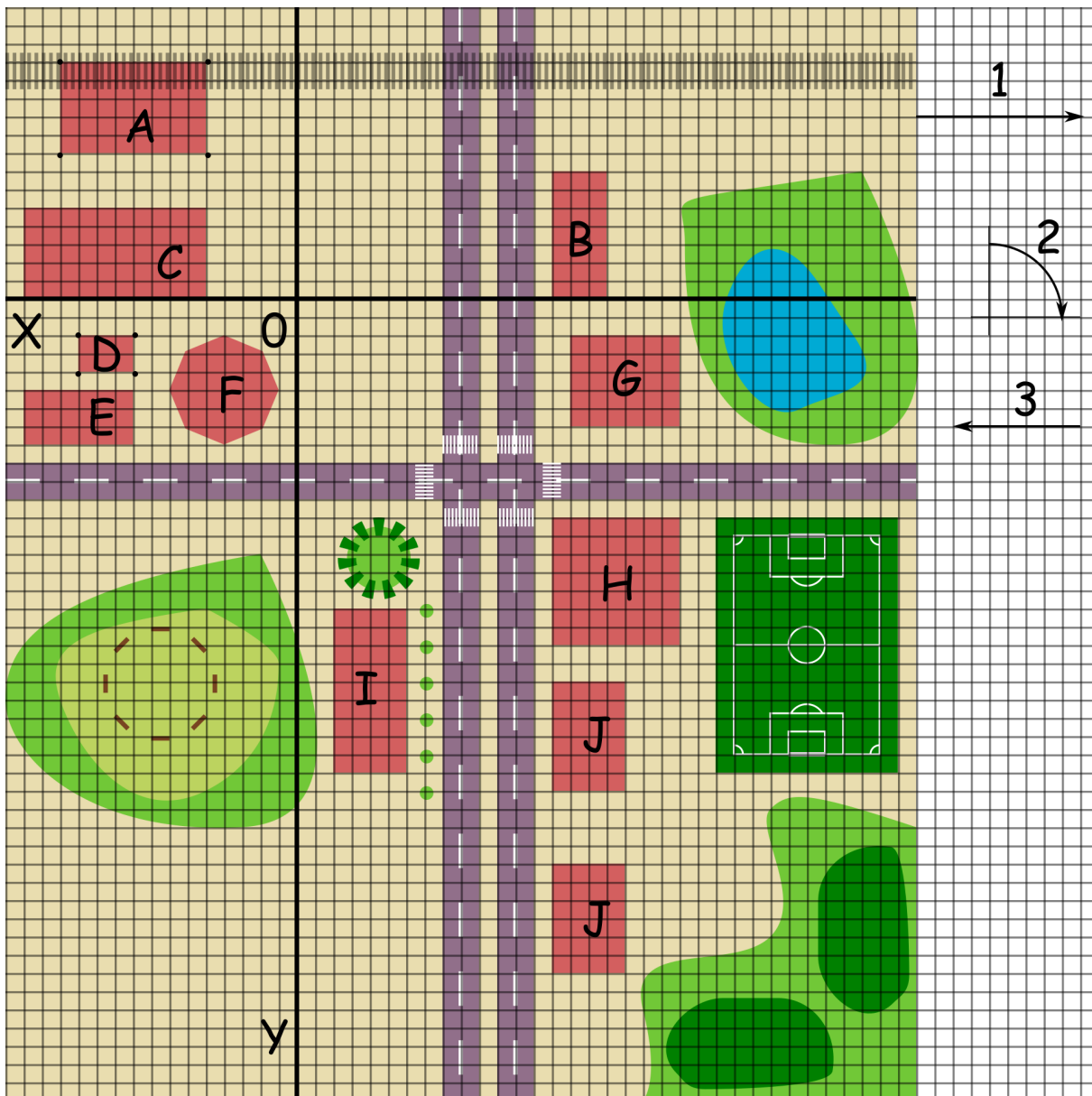
Recomendaciones finales

Mantener una actitud observadora y orientativa sobre el alumno es de gran importancia, ya que es una actividad sencilla pero que en la toma de contacto puede resultar confusa. La naturaleza de la actividad de doblado de papel permitirá mantener la curiosidad de los alumnos al descubrir cómo un mismo procedimiento puede realizarse de múltiples maneras posibles, evitando la aparición de la apatía por parte de los alumnos; además, esta actividad es una buena ocasión para inculcar a los estudiantes la seriedad a la hora de realizar las tareas para evitar cometer errores o que se realicen de manera pobre, o introducir a los alumnos en el concepto de rigor matemático. Finalmente, si algún alumno tiene problemas para escribir el párrafo de resumen de la actividad (a modo de introducción al portafolio), se le ayudará mediante preguntas cuyas respuestas por parte del alumno pueden proporcionarle un medio para sacar adelante la tarea y así saber cómo afrontarla en el futuro.

Moviendo un antiguo edificio

En una localidad situada en el alfoz de una ciudad imaginaria están construyendo una nueva vía de tren que comunique a los habitantes de la localidad con dicha ciudad y que facilite a la gente el viajar en transporte público, pero se enfrentan a un problema, y es que el trazado ideal del nuevo ferrocarril coincide justo con el emplazamiento de un antiguo edificio de principios del s. XX que se usó como escuela y que ahora es un centro cívico con sala de teatro, biblioteca y el archivo municipal.

En el plano se representa el edificio por A y se situará girado justo entre el edificio F y la avenida vertical.



El edificio no puede ser trasladado "piedra a piedra" porque está construido en hormigón y ladrillo y esto no es posible. Para evitar el derribo van a optar por una solución cara (pero eficaz) en estos problemas: mover el edificio como un único bloque situando una estructura bajo él, y mediante unos raíles llevarlo a una nueva

ubicación, en la que se construirá primero una nueva cimentación con sótano donde se habilitará una discoteca. Aprovechando el traslado se situará el edificio en una nueva orientación más óptima para permitir un mejor aprovechamiento de la energía solar.

El problema es que ese edificio ya tenía varias construcciones cerca, y que el nuevo emplazamiento está un poco alejado del original, pasando entre otros edificios que no se pueden derribar, así que tendrán que calcular no solo la nueva posición, sino también todo el trayecto que debe hacerse para salvar este elemento del patrimonio de dicha ciudad.

La opción de modificar el trazado de la vía de tren con una curva cerrada supondría que los trenes tendrían que circular muy despacio, y generarían mucho ruido y vibraciones en el edificio al pasar muy cerca de este. Tampoco se puede construir la línea de tren en otro sitio, ya que es de cercanías y se pretende que dé servicio a la zona con una estación en las proximidades, y si se aleja mucho no cumpliría con su papel a la hora de ayudar en la movilidad sostenible. Los expertos en patrimonio han determinado que el traslado no supone un daño demasiado grave como sí podría serlo en el caso de otro tipo de edificios como una catedral o castillo.

Pero antes de empezar con esto, vamos al campo de fútbol a jugar un partido, aunque con algunas diferencias: para marcar goles hay que responder bien a unas preguntas. Si la respuesta es correcta, marcáis un gol, si es incorrecta, pero se acercaba un poco a la correcta, el balón sale fuera, y si es incorrecta y no se acerca a la correcta, el gol os lo marcáis en propia puerta.

Después aprenderéis cómo mover los puntos en un plano y así podréis superar este reto sin problemas. Esta actividad para hacerla más sencilla se dividirá en partes que estudiaréis por separado y luego las juntaréis en común.

A continuación se aprenderá a trabajar usando solo papel y bolígrafo, mediante papiroflexia.

Luego ya estaremos listos para afrontar el reto, finalmente se jugará otro partido de vuelta donde pondréis a prueba lo que habréis aprendido en esta actividad.

Proceso a seguir

El edificio a mover, como se ha indicado, es el que está representado como A, para ello hay que marcar sus vértices.

- Traslado siguiendo el vector 1.
- Giro de 90° respecto del origen O en sentido positivo (a la derecha u horario).
- Traslado siguiendo el vector 3.

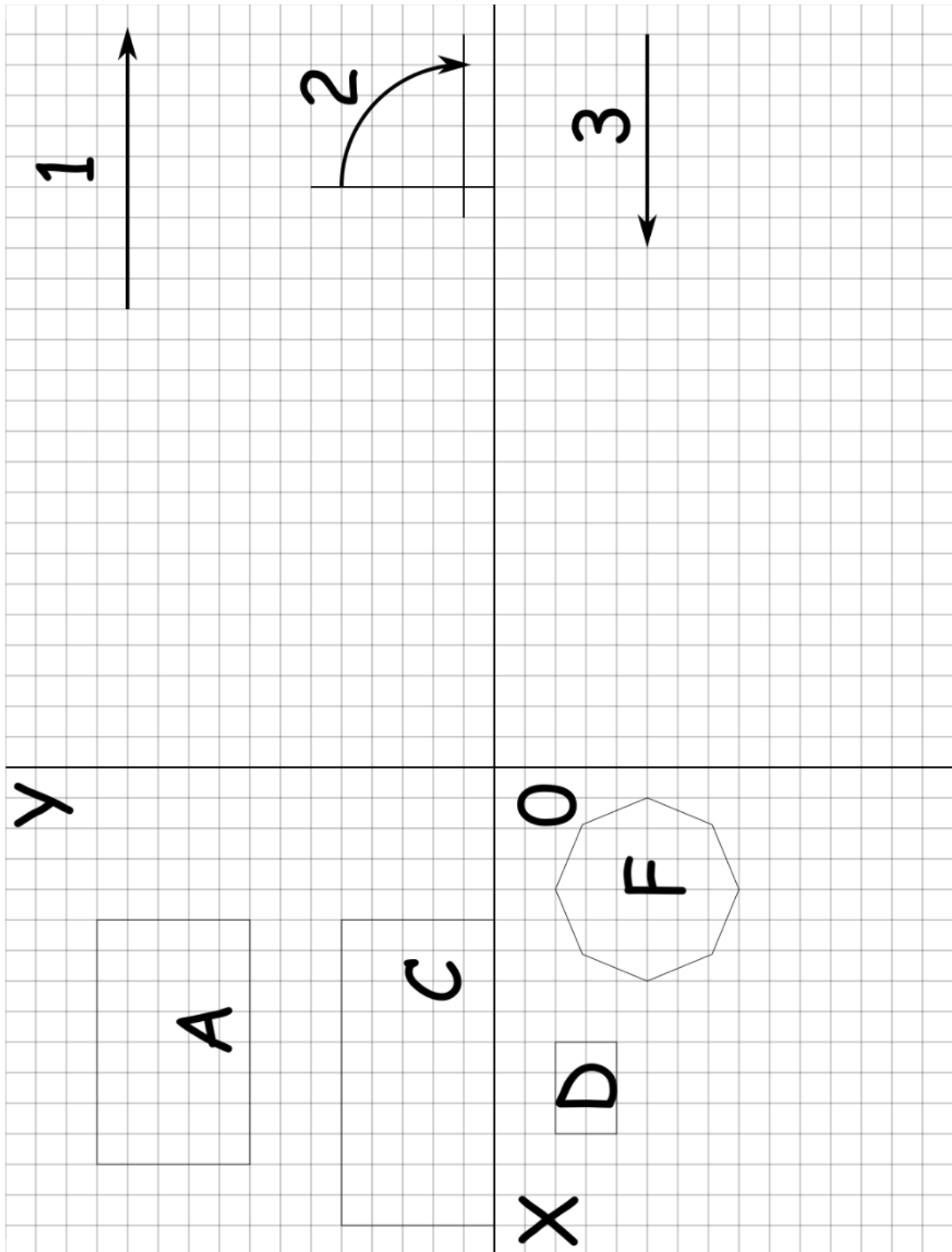
Para ello, une los puntos en sus sucesivos emplazamientos con los arcos y líneas que determinan sus movimientos y ten en cuenta si en algún momento invaden algún edificio existente.

De ti depende que este antiguo edificio pueda seguir existiendo.

Preguntas:

- ¿Puedes dibujar las etapas intermedias del edificio y la localización final?
- ¿Intercepta en algún momento alguno de los edificios existentes durante su traslado?
- El edificio C tiene una fachada de cristal. ¿Cómo se vería reflejado el edificio D en él? Para calcular esto, realiza una simetría, respecto del eje X de los puntos correspondientes al edificio D y únelos.
- ¿Cuántos ejes de simetría tiene el edificio F? ¿Cómo se llama ese polígono? ¿Tiene simetría puntual o de Leonardo?
- ¿Hay algún otro elemento en el plano con simetría puntual?
- ¿Cuáles son los ejes de simetría de la pista deportiva?
- ¿Existen parterres simétricos axiales? ¿Respecto de qué eje?
- ¿Puedes encontrar elementos dados en el plano dados obtenidos por el movimiento de traslación?

Plano simplificado de trabajo:



Presentación para a actividad de recordatorio

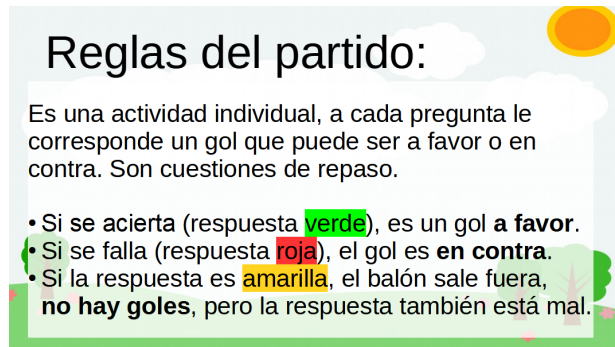
Partido de fútbol



Reglas del partido:

Es una actividad individual, a cada pregunta le corresponde un gol que puede ser a favor o en contra. Son cuestiones de repaso.

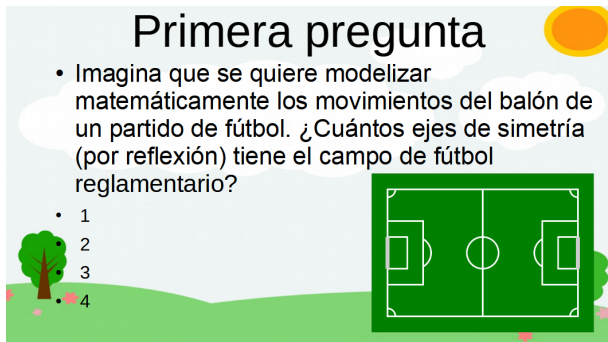
- Si se acierta (respuesta **verde**), es un gol **a favor**.
- Si se falla (respuesta **roja**), el gol es **en contra**.
- Si la respuesta es **amarilla**, el balón sale fuera, **no hay goles**, pero la respuesta también está mal.



Primera pregunta

- Imagina que se quiere modelizar matemáticamente los movimientos del balón de un partido de fútbol. ¿Cuántos ejes de simetría (por reflexión) tiene el campo de fútbol reglamentario?

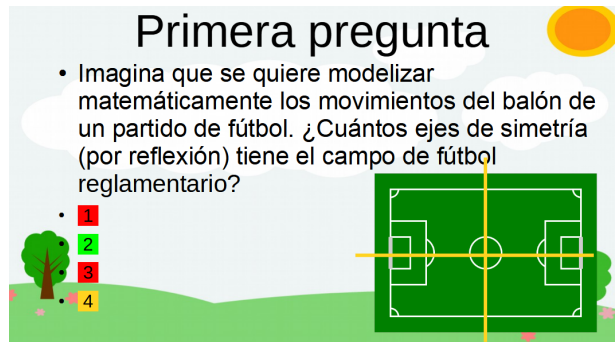
- 1
- 2
- 3
- 4



Primera pregunta

- Imagina que se quiere modelizar matemáticamente los movimientos del balón de un partido de fútbol. ¿Cuántos ejes de simetría (por reflexión) tiene el campo de fútbol reglamentario?

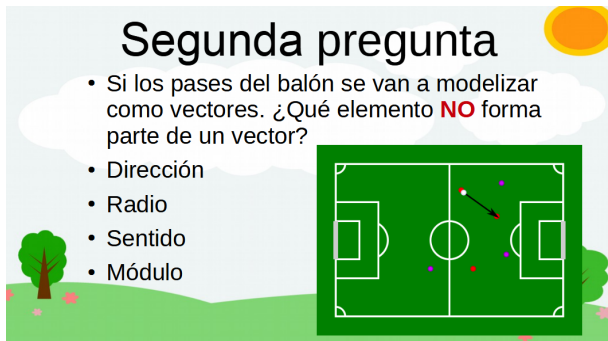
- 1
- 2
- 3
- 4



Segunda pregunta

- Si los pases del balón se van a modelizar como vectores. ¿Qué elemento **NO** forma parte de un vector?

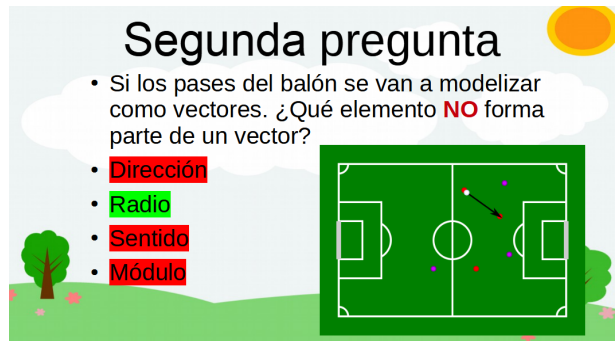
- Dirección
- Radio
- Sentido
- Módulo



Segunda pregunta

- Si los pases del balón se van a modelizar como vectores. ¿Qué elemento **NO** forma parte de un vector?

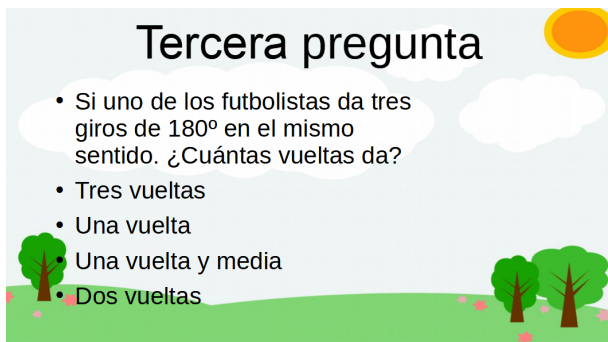
- **Dirección**
- **Radio**
- **Sentido**
- **Módulo**



Tercera pregunta

- Si uno de los futbolistas da tres giros de 180° en el mismo sentido. ¿Cuántas vueltas da?

- Tres vueltas
- Una vuelta
- Una vuelta y media
- Dos vueltas



Tercera pregunta

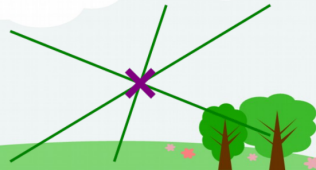
- Si uno de los futbolistas da tres giros de 180° en el mismo sentido. ¿Cuántas vueltas da?

- **Tres vueltas**
- **Una vuelta**
- **Una vuelta y media**
- **Dos vueltas**



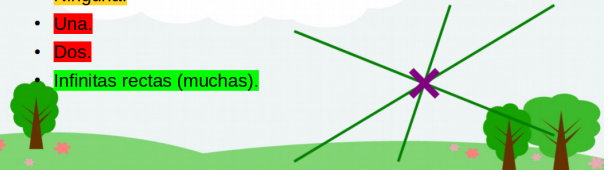
Cuarta pregunta

- ¿Cuántas rectas se pueden dibujar en un papel a partir de un único punto?
- Ninguna.
- Una.
- Dos.
- Infinitas rectas (muchas).



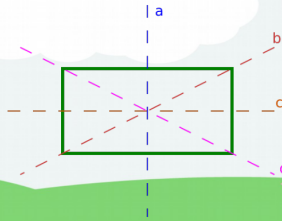
Cuarta pregunta

- ¿Cuántas rectas se pueden dibujar en un papel a partir de un único punto?
- Ninguna.
- Una.
- Dos.
- Infinitas rectas (muchas).



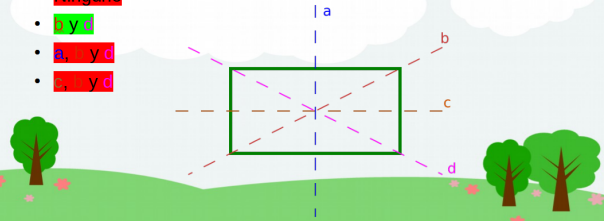
Quinta pregunta

- ¿Qué ejes de simetría están mal dibujados en esta imagen?
- Ninguno
- b y d
- a, b y d
- c, b y d



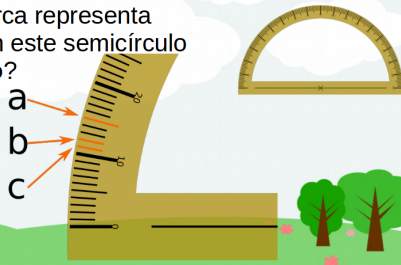
Quinta pregunta

- ¿Qué ejes de simetría están mal dibujados en esta imagen?
- Ninguno
- b y d
- a, b y d
- c, b y d



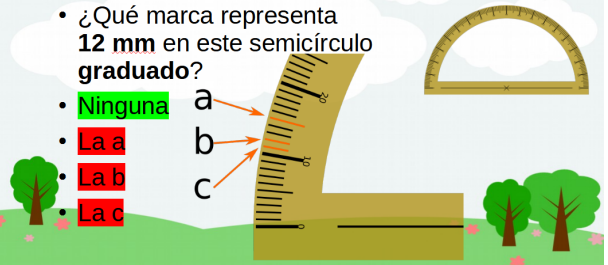
Sexta pregunta

- ¿Qué marca representa 12 mm en este semicírculo graduado?
- Ninguna
- La a
- La b
- La c



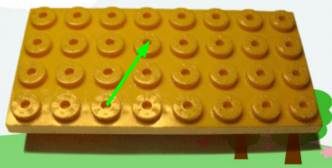
Sexta pregunta

- ¿Qué marca representa 12 mm en este semicírculo graduado?
- Ninguna
- La a
- La b
- La c



Séptima pregunta

- ¿Qué movimiento representa esta flecha verde?
- 2 arriba, 1 a la derecha
- 3 arriba, 1 a la derecha
- 2 arriba, 2 a la derecha
- 3 arriba, 2 a la derecha



Séptima pregunta

- ¿Qué movimiento representa esta flecha verde?
- 2 arriba, 1 a la derecha
- 3 arriba, 1 a la derecha
- 2 arriba, 2 a la derecha
- 3 arriba, 2 a la derecha



Selección de ejemplos en tecnología

A continuación, se muestra una recopilación de objetos, dispositivos y máquinas donde se aplican simetrías radiales o rotacionales. Es una selección orientada tanto a alumnos de 3º de ESO y cursos superiores, como alumnos de altas capacidades o alumnos con una especial habilidad o curiosidad para la tecnología.

Se han buscado ejemplos de temáticas, tipos y épocas diversas, agrupados por la proximidad de su ámbito de aplicación. Por regla general se pueden encontrar patrones matemáticos en muchos ámbitos de la vida cotidiana, por ello la actividad en coordinación con tecnología puede ser de gran facilidad para los alumnos. Una prueba de la gran importancia de las simetrías radiales en el ámbito tecnológico es que casi todos los programas de modelado sólido orientado a aplicaciones técnicas o artísticas, tienen herramientas destinadas a aplicar este tipo de simetría en los diseños. También el uso de posicionadores en máquinas de mecanizado por fresado para facilitar la creación de piezas cuando se aplican simetrías rotacionales.

En los ámbitos artístico y de diseño también se recurre frecuentemente a las simetrías centrales, y nuevamente, esta es la razón por la que muchos programas informáticos orientados a la creatividad tienen herramientas para facilitar este tipo de operaciones.

Simetrías espaciales

Aunque este TFM lleva por título: *Simetrías en el plano: una aproximación desde el Currículo de E.S.O.* y así se ha planteado la Situación de Aprendizaje, en el apartado que sigue a continuación sobre aplicaciones de las simetrías rotacionales o radiales, muchos ejemplos del campo tecnológico o cotidiano involucran simetrías en el espacio respecto a planos, giros de un ángulo dado en torno a un eje, etc., es decir transformaciones geométricas, en particular movimientos, en tres dimensiones.

En el currículo de la ESO no se tratan directamente los movimientos en el espacio, solo se estudian algunos movimientos en el plano, entre ellos las simetrías axiales (reflexiones), las simetrías centrales (giros de 180°) y brevemente las simetrías rotacionales o puntuales (Rosetones).

El concepto de movimiento en el plano se generaliza al espacio tridimensional.

Un movimiento T del espacio R^3 es una aplicación $T: R^3 \rightarrow R^3$ que conserva las distancias, es decir: $d(P, Q) = d(T(P), T(Q))$, para todos los puntos P y Q de R^3 .

Un movimiento T en el espacio puede clasificarse por el conjunto de sus puntos fijos, que puede ser todo el espacio, un plano, una recta, un punto o el vacío.

De entre los movimientos del espacio, nos interesan fundamentalmente, para los ejemplos que se presentan, las rotaciones o giros de eje la recta r cuyo conjunto de puntos fijos es la recta r y las simetrías respecto a un plano cuyo conjunto de puntos fijos es el propio plano.

El concepto de Grupo de Simetría de una figura en el espacio, es de manera natural, una extensión del concepto de grupo de Simetría de una figura en el plano.

Una figura F en el espacio es cualquier subconjunto de R^3 y el Grupo de Simetría S_F de una figura espacial F es el conjunto de movimientos del espacio que la dejan invariante.

Así pues: $S_F = \{ \text{movimientos } T \text{ del espacio} \mid T(F) = F \}$

Las figuras de los ejemplos que siguen presentan, fundamentalmente, simetrías radiales o rotacionales con ejes de giro, aunque pueden aparecer también otros movimientos en el espacio.

Como ya se ha comentado, estas aplicaciones sirven para la actividad conjunta y coordinada con la asignatura de tecnología, y algunas de ellas también con la asignatura de educación plástica.

Lámpara compuesta de láminas de papel

En este tipo de lámpara se usan láminas de papel entrelazadas entre sí para formar una figura aproximadamente esférica. En los puntos de encuentro de las piezas se recurre a este tipo de simetría rotacional cíclica de órdenes tres y cinco para que se produzca un trabado entre ellas.

También se recurre a este sistema para cerrar recipientes no herméticos de cartón de forma prismática sin necesidad de aplicar pegamento.

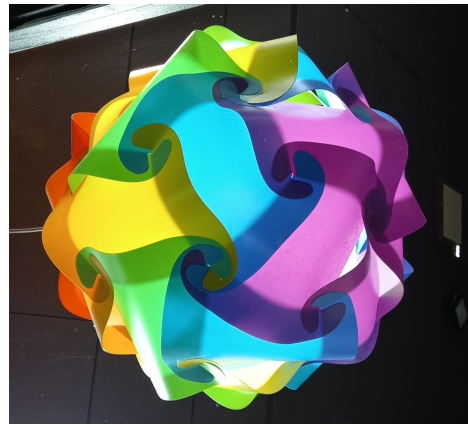


Figura 1: Lámpara expuesta en un escaparate de Valladolid.

Pinza de la ropa



Figura 2: Superiormente, pinza de la ropa desmontada, inferiormente, pinza montada

Muchas pinzas para colgar ropa están constituidas por dos mitades idénticas y montadas mediante un giro de 180° entre ellas con un muelle que genera la fuerza necesaria para que la pinza se cierre y además sujete el conjunto.

Al ser las dos piezas iguales, el proceso de fabricación es más sencillo (no hacen falta dos moldes, ni trabajar con dos piezas diferentes).

Paraguas

La simetría rotacional diedral permite un plegado de todo el paraguas deslizando una sola pieza, y poder sujetar la tela usando un único soporte que se puede sujetar empleando una sola mano.

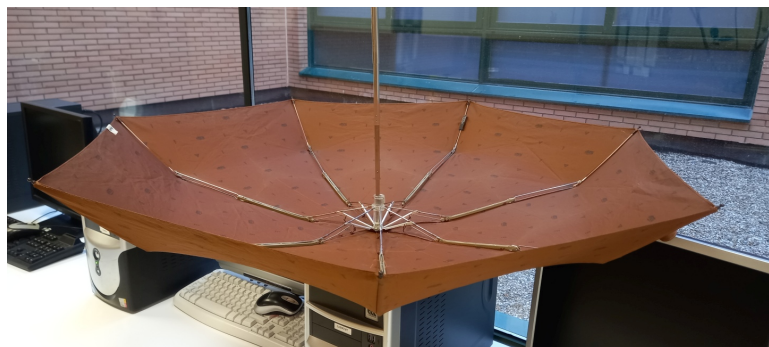


Figura 3: El contorno de este paraguas forma un heptágono.

Abanico y soporte de toldo

Aunque no es un patrón perfecto, tanto el abanico como el soporte metálico del toldo, sino que tiene en ambos casos algunas modificaciones, permiten en ambos casos plegar y desplegar una tela sin necesidad de mecanismos muy complejos.



Figura 4: Ejemplo en el Paseo de Arco de Ladrillo, Valladolid.

Puertas giratorias

Este sistema de puertas tiene la característica de no permitir que el aire pueda pasar fácilmente, con lo que puede contribuir al ahorro energético. Su inconveniente es que limita mucho el paso de personas y por ello necesita que haya puertas alternativas para casos de emergencia.



Figura 5: Puerta de acceso a un edificio de la calle Duque de la Victoria en Valladolid.

Trípode

Si se hace una foto y la cámara se mueve durante el tiempo en que se hace la foto, esta quedará movida y se verá borrosa. Por ello las cámaras intentan usar ajustes en el que la exposición dure muy poco (menos de 1/10 de segundo) y de esa forma se evite este efecto.

Sin embargo esto tiene una contrapartida: la foto queda más oscura, porque se ha tomado menos luz, una forma de solucionarlo es abrir el diafragma, pero esto dificulta enfocar bien objetos a distancias muy diferentes en la misma foto (ver explicación del diafragma). Otra opción es aumentar la sensibilidad, pero esto hace que la foto tenga más ruido, y se vea como granulada. Esto no solo ocurre con las cámaras de fotos digitales modernas (y móviles), con las películas químicas también ocurría.

Es por eso que cuando hay poca luz (por la noche, en interiores...) se puede usar un trípode para garantizar un buen resultado, o bien apoyar la cámara en algún elemento firme.

La palabra “trípode” significa “tres pies”, y es que precisamente tienen tres pies. La forma del trípode permite recogerlo en mucho menos espacio. Se usan tres pies porque es el menor número necesario para que puedan ser colocados sobre el suelo (o sea un plano) de forma estable, ya que un plano se define matemáticamente en el espacio con tres puntos.

Tijera

Como en el caso de la pinza, las dos mitades que forman este utensilio están montadas con un giro a 180°, lo que facilita la fabricación, ya que solo se necesita hacer un tipo de pieza.

Un problema que existe en las tijeras es que muchas están orientadas a ser usadas con la mano derecha, de manera que las personas que usen de forma preferente la mano izquierda van a tener problemas, por ello existen modelos que son una simetría por reflexión de una tijera completa y pueden ser usadas cómodamente con la mano izquierda.



Disipador de calor y ventilador para procesador de ordenador

El procesador de los ordenadores produce calor residual que debe ser disipado de forma eficaz para permitir un funcionamiento óptimo, ya que si esto no se produce (por ejemplo, se avería el ventilador), la temperatura del procesador aumenta, esto es detectado por unos sensores y para auto protegerse se reduce la velocidad de funcionamiento.

En este caso el disipador sigue una simetría rotacional, con un detalle interesante a valorar para mantener la distancia entre lamas aproximadamente constante. Las lamas se desdoblán en dos cuando se alejan del centro, la razón de esto es que una distancia entre láminas demasiado estrecha dificulta un flujo eficiente de aire, y si es demasiado ancha permite que pase mucho aire sin que produzca un efecto eficaz de eliminación de calor. Como la distancia entre elementos crece con el radio, se opta por esta solución, que a partir de cierto radio las lamas se desdoblén.

El ventilador produce un flujo forzado de aire, que permite incrementar la eficiencia de enfriamiento respecto a lo que habría si solo actuase la convección de forma natural.

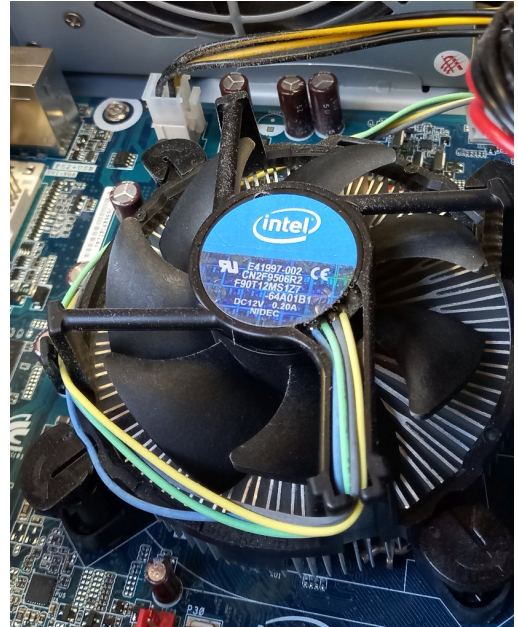


Figura 6: Ejemplo de un ordenador de la Facultad de Educación y Trabajo Social. Debajo del ventilador se ven las láminas desdoblándose, más abajo (oculto) está el procesador.

Potenciómetro (divisor de voltaje variable)

Este elemento se usa para crear un voltaje intermedio entre dos voltajes de referencia (por ejemplo, 5 V y 0 V), para que luego pueda ser usado para otro fin, por ejemplo, indicar a un amplificador de un reproductor de música cuánto tiene que aumentar la intensidad del sonido. De esta forma, el usuario puede hacer que suene más o menos fuerte la música según el ángulo de giro que otorgue al mando, pero existen otras muchas aplicaciones.

Este elemento eléctrico se puede construir de diversas formas, una de ellas consta de una resistencia eléctrica formada por una serie de espiras aisladas eléctricamente entre sí y enrolladas en un elemento de forma circular, esto es, se sigue un patrón rotacional cíclico. Estas espiras están aisladas entre sí, aunque en uno de los lados no tienen aislamiento de forma que un elemento que se desliza sobre ellas, pueda hacer contacto y circular la electricidad por él. Las espiras tienen una resistencia eléctrica grande, de forma que a lo largo del elemento circular se crea un gradiente de voltaje entre las dos referencias, así cuando el elemento toca alguna

de las espiras, adquiere el voltaje de esa zona, siguiendo una proporcionalidad entre la diferencia de voltajes y el ángulo de giro.

Este elemento es frecuentemente usado en proyectos de electrónica o de robótica a nivel escolar o universitario, la razón es que es un método de entrada de información al dispositivo fácil de usar; si el pin de entrada tiene una resolución de 10 bits, los valores que son leídos van de 0 a 1023 ($2^{10}-1$).

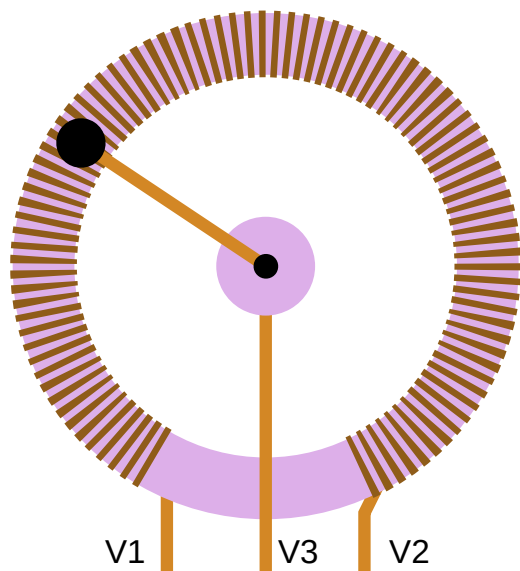


Figura 7: El punto negro está unido eléctricamente al cable V3 y puede girar a uno y otro lado.

Sensor de movimientos de un ratón de bola

Aunque este tipo de ratones ya han caído en desuso, es interesante destacar en ellos una tecnología que hace uso del patrón radial, aunque primero es interesante explicar cómo convierten los movimientos sobre el plano en coordenadas cartesianas mecánicamente.

Para detectar los movimientos X Y en el plano de deslizamiento, se emplea una bola (es decir, una esfera) que hace contacto con dos cilindros en posiciones perpendiculares entre sí. Esto permite leer los movimientos siguiendo un esquema ortogonal. En estos cilindros se produce un movimiento entre la superficie de la esfera y del cilindro; cuando la esfera rueda siguiendo un eje de giro paralelo al eje del cilindro, el cilindro gira de forma solidaria con la esfera, siguiendo una relación de velocidades inversa a los radios de ambos elementos (se multiplica el número de vueltas). Cuando la esfera gira siguiendo un eje perpendicular al cilindro, este no gira y la esfera se limita a deslizarse sobre este. Cuando el eje de giro está en una situación intermedia de las anteriores se produce una proyección de la componente de giro en el eje paralelo al cilindro, de esta manera los movimientos realizados sobre el plano son descompuestos en una componente horizontal y otra vertical.



Figura 8: Vista general del ratón, a la derecha está la carcasa, la bola no está en la imagen, iría en el hueco redondo del centro de la imagen de la izquierda.

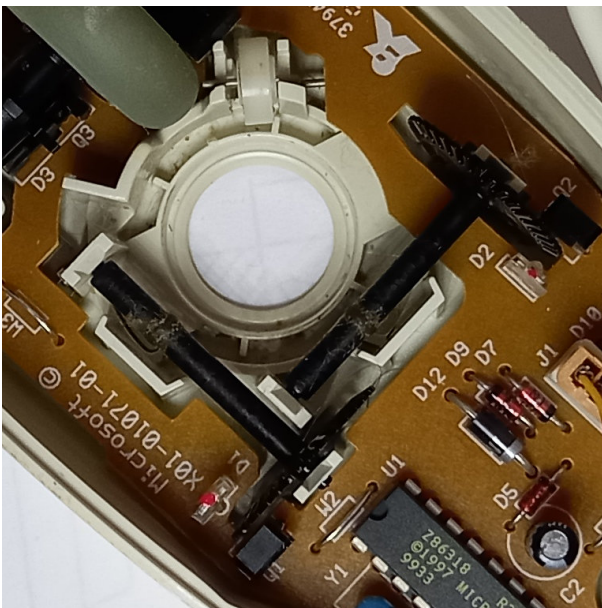


Figura 9: Vista de detalle de la zona donde va alojada la bola. Un inconveniente de este tipo de ratones es la acumulación de suciedad.

Posteriormente, el movimiento de los cilindros es llevado a una ruleta con un patrón de ranuras radiales que gira solidariamente con él; esta ruleta bloquea el paso de una pareja haces de rayos infrarrojos de manera que un circuito integrado (un elemento que tiene una gran cantidad de circuitos electrónicos en su interior) puede saber cuándo se gira la bola en una dirección y en otra, y cómo de rápido es ese movimiento o cuánto movimiento en total se ha hecho, siempre y cuando la velocidad de obturación de las ranuras de la ruleta no

supere a la velocidad a la que el circuito integrado puede leer estos movimientos (como suele ser muy rápido en la lectura es muy difícil que esto ocurra).

Como el movimiento entre la esfera (bola) y el eje de la ruleta está amplificado (por la relación entre radios), un movimiento muy pequeño de la bola produce un gran paso de ranuras por el detector, esto es, aumenta la resolución de los movimientos, de forma que no hace falta desplazar físicamente el ratón una gran distancia para poder desplazar el cursor por toda la pantalla.

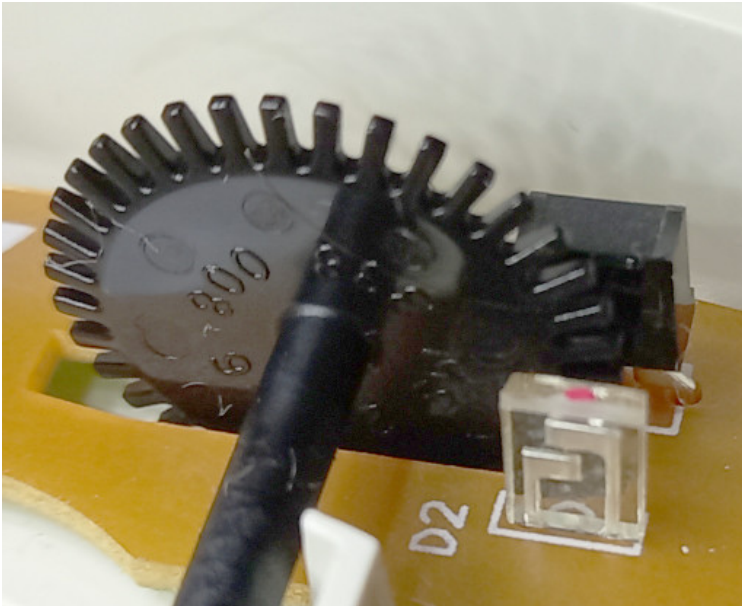


Figura 10: Ruleta con muescas al final del eje accionado por la bola, se observa cómo se interpone entre las dos parejas de emisor y receptor, bloqueándolos con su giro.

La lectura de los movimientos de las ruedas de desplazamiento vertical siguen un sistema similar al anterior, con la adición de un elemento con otro patrón similar que impide el movimiento de giro de la rueda, salvo que se alcance un umbral mínimo de fuerza, si esta (la que aplica el usuario) alcanza ese umbral la rueda girará y el sensor de movimiento lo captará, indicando al ordenador que realice la acción correspondiente. Esto produce un “movimiento a saltos” que facilita el uso.

Actualmente el sistema más empleado consiste en una cámara de poca resolución, pero que es capaz de tomar un elevado número de imágenes por segundo. Junto a ella se encuentra una luz que ilumina la superficie de trabajo, la misión de esta luz no es solo iluminar la zona, sino además, resaltar las irregularidades de la superficie mediante el uso de un ángulo de incidencia alejado de un ángulo recto.

Un procesador se encarga de leer la imagen de la cámara y mediante algoritmos matemáticos obtener el vector de desplazamiento en cada instante, después envía esta información al ordenador.

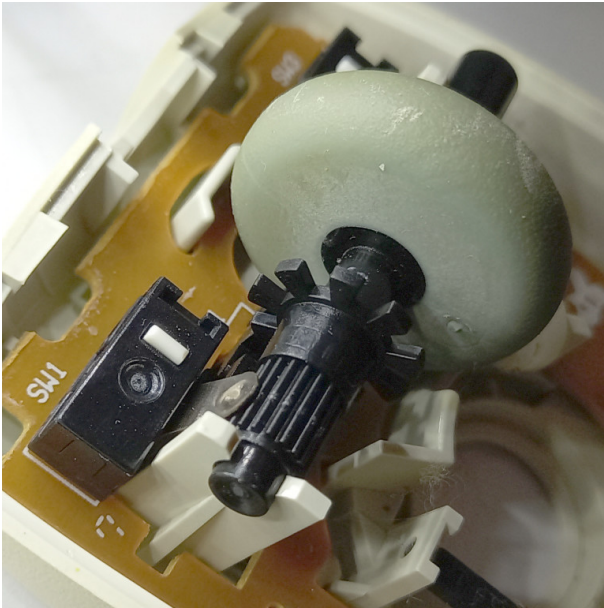


Figura 11: La rueda (pieza gris) sobresale por la carcasa, y mueve la ruleta con muescas (el sensor está abajo) y la zona con estrías, que bloquea parcialmente el movimiento.

Obturador de los proyectores de cine

A la hora de proyectar una película de cine mediante un proyector de película tradicional (es decir, no uno digital tipo DLP o similar), la película debe estar absolutamente parada durante la fracción de segundo en que es proyectada, sin embargo, la película también debe avanzar para mostrar más fotogramas, y este movimiento de arrastre produciría una imagen borrosa. Por ello lo que se hace es interceptar la luz durante ese breve momento. En las cámaras esa pieza dispone de una serie de láminas dispuestas en simetría rotacional (con una forma parecida a un ventilador, pero plano), y su movimiento sincronizado con los de arrastre de la película permite bloquear la luz justo cuando la película es arrastrada para mostrar el fotograma siguiente.

Los mecanismos de arrastre de la película de un proyector, también recurren a patrones simétricos rotacionales, mediante unos dientes que engranan con las muescas de la película.

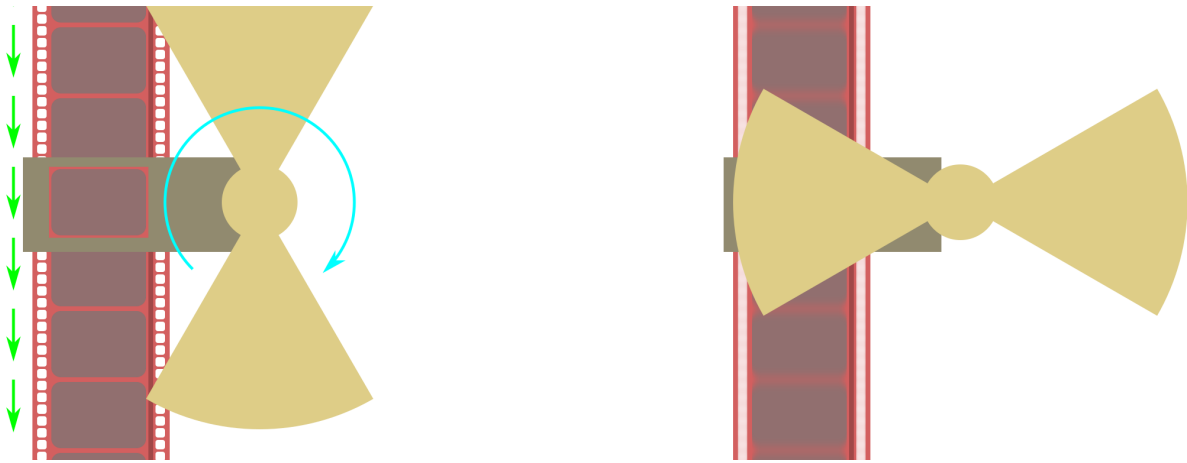


Figura 12: Justo en el momento en que la película avanza (movimiento discontinuo marcado en verde), la luz se bloquea por la pieza rotatoria, que gira continuamente (flecha azul claro).

Diafragma de las cámaras de fotos o de cine

Este elemento sirve para regular la cantidad de luz que entra en una cámara y al mismo tiempo la profundidad de campo de una fotografía.

La profundidad de campo es el rango de distancia en el cual los elementos aparecen con un determinado nivel de enfoque en la foto. Cuando los elementos fotografiados están más lejos o más cerca de este intervalo, aparecen progresivamente más desenfocados según se alejan de él. Permitir que entre más luz a la cámara posibilita poder hacer fotos con menos luz ambiental, de esa forma se necesita menos sensibilidad en la película o en el sensor electrónico (lo que produce menos ruido), o necesitar menos tiempo para hacer la foto (lo que permite evitar que la foto salga movida, sobre todo si la cámara no se encuentra apoyada), pero como contrapartida se reduce la profundidad de campo, con lo que es más probable que algunos elementos de la foto salgan borrosos, no obstante a veces se busca este efecto para acentuar algunos elementos respecto a otros.

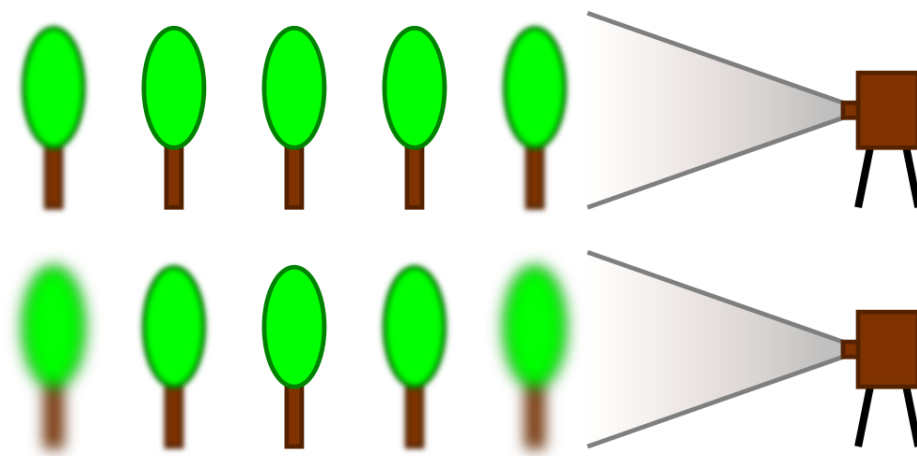


Figura 13: Profundidad de campo, arriba es mayor que abajo.

Un diafragma consta de varias placas situadas siguiendo una simetría rotacional, cuando se abre y cierra el diafragma estas plaquitas giran al unísono siguiendo ejes paralelos al eje central, produciendo una apertura o cierre del orificio central. El número de estas placas determina la forma en la que los elementos quedan difuminados cuando están desenfocados, la cantidad de láminas determina el número de lados del polígono (de vértices redondeados) que sale en las fotos, esto se visualiza bien cuando es una foto nocturna y el elemento desenfocado es una luz intensa como una farola lejana (que es aproximadamente puntual).

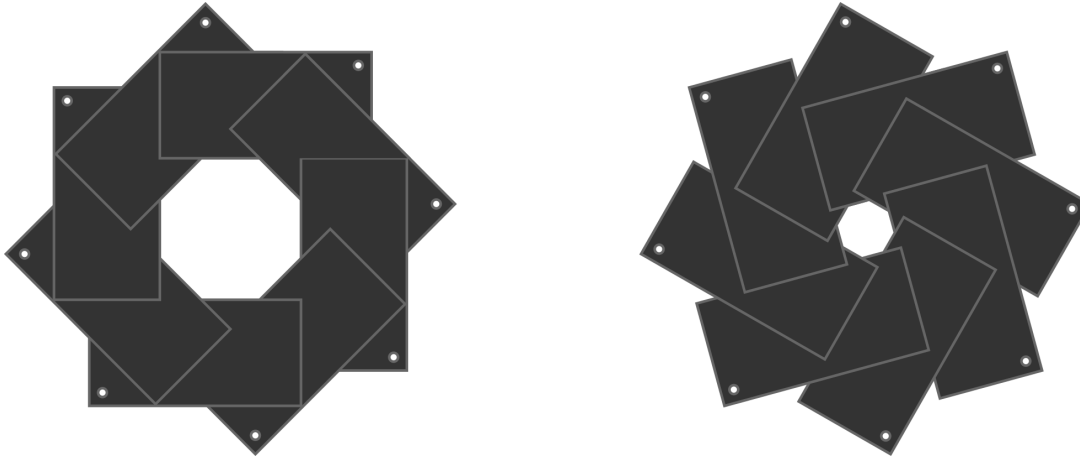


Figura 14: Algunos diafragmas son de este tipo, con varias piezas que giran. Aquí se ha representado de forma esquemática, en realidad necesitan llevar algún mecanismo que las haga girar al unísono.

Patrón estroboscópico en reproductores de discos de vinilo

Una luz estroboscópica es un tipo de luz normal, pero que en vez de emitirse de forma continua se emite en pulsos muy breves y muy intensos, de forma que permite “detener” visualmente el movimiento de los objetos. Tiene bastante uso tanto en ciencia como en ocio, en muchas discotecas se dispone de una para la pista donde está el público, creando una ilusión visual de que el tiempo transcurre de forma discontinua, a saltos; la luz estroboscópica emite pulsos cada pocas décimas de segundo, de forma que los movimientos de las personas que están en la sala se perciben de forma discontinua.

Mencionamos ahora una aplicación diferente, en los reproductores de discos de vinilo.



Figura 15: Cabina de DJ de una antigua discoteca de Olmedo donde se aprecia el patrón estroboscópico alrededor de la zona donde está el disco. La luz estroboscópica se emite desde el pequeño saliente brillante de la derecha que hay junto al disco.

En los reproductores de discos de vinilo orientados a ser usados en eventos EDM (Electronic Dance Music) es usual que exista un mando que permite ajustar la velocidad de giro de los discos. Para que el usuario (DJ) pueda conocer si el disco se reproduce por encima o por debajo de su velocidad nominal existen en algunos reproductores un sistema que permite visualizarlo fácilmente mediante una serie de patrones simétricos rotacionales de puntos situados en la zona donde se coloca el disco.

Uno de esos patrones se repite de forma periódica de forma que cuando se está reproduciendo un vinilo a su velocidad nominal, ofrece la apariencia de permanecer estático (los puntos en realidad siguen girando), esta apariencia solo se produce en la zona iluminada por la luz estroboscópica; en el resto de zonas, que están iluminadas por la luz ambiental, se observa el giro normal.

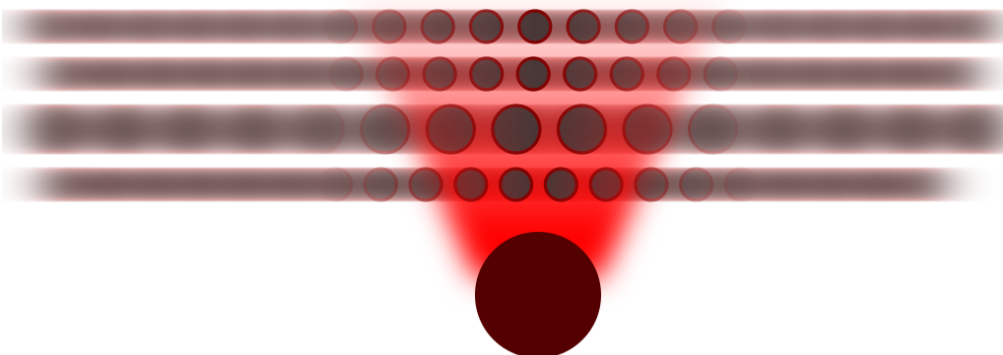


Figura 16: Los puntos avanzan rápidamente y se ven borrosos, salvo en la zona iluminada con la luz estroboscópica, aparentando moverse despacio o estar parados.

Este efecto se genera de la siguiente forma: los puntos están separados de manera que cuando un disco gira, una luz emite pulsos luminosos separados entre sí el tiempo en que tarda en pasar dos puntos respecto de esta luz; estos pulsos son lo suficientemente intensos y breves como para que los puntos, pese a estar pasando continuamente y con cierta velocidad, aparenten que no están girando, sino que permanecen estáticos.

Si el disco gira un poco más lentamente, cada punto siguiente recibirá el pulso de luz ligeramente más atrás, pareciendo que es siempre el mismo punto, pero que se mueve poco a poco hacia atrás. Si el disco va un poco más rápido de su velocidad nominal, ocurre lo contrario: cuando el siguiente punto en pasar por la luz reciba el pulso de luz estará un poco más adelantado, y la apariencia será que los puntos están moviéndose poco a poco hacia adelante.

Los otros patrones que hay a los lados tienen una separación entre puntos ligeramente diferente, de manera que, aunque el disco vaya a su velocidad nominal, uno de los que están a un lado parece que gira un poco más rápido que el disco y el otro parece ir un poco más despacio.

Zootropo

Las ranuras y los dibujos se repiten periódicamente, las ranuras permiten visualizar la viñeta opuesta durante un breve periodo de tiempo, de forma que no se vea movida, ya que para generar ilusión de movimiento se requiere de un cierto número de imágenes por segundo, lo que lleva consigo que el aparato gire a cierta velocidad.

La rápida sucesión de ranuras y dibujos al otro lado permite generar ilusión de movimiento de forma similar al cine; es un antecesor de las pequeñas animaciones que solemos encontrar en Internet. Debido a la limitación de tamaño, las animaciones deben ser muy breves.



Figura 17: Zootropos y tiras con animaciones breves en un escaparate de Madrid.

Elementos roscados (tornillos, tuercas...)

Aquí el uso de simetrías rotacionales frente a no realizar repeticiones de este tipo permite que estos elementos se puedan apretar en espacios angostos, ya que hacen que el elemento de apriete no necesite realizar un giro completo, sino solo una fracción de este, de manera que con sucesivos giros se puede

producir el apriete. Por otro lado, el uso de estos patrones incrementa el área de contacto entre el elemento mecánico y la herramienta. Las figuras que se pueden emplear deben tener un número par de lados para tener dos caras paralelas entre las que deslizar la llave. Un rectángulo permite hacer más fuerza al girar, pero tiene el inconveniente de tener solo dos posiciones en las que situar la llave.

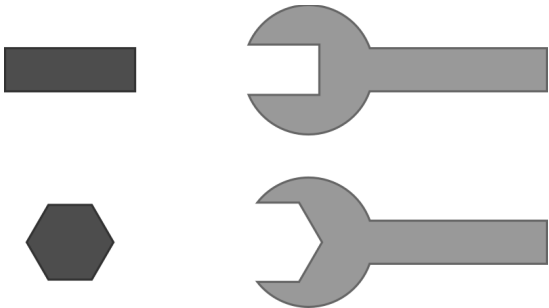


Figura 18: El hexágono representa un equilibrio entre facilidad de uso y agarre. Un polígono mayor requeriría de un ajuste muy fino entre la llave y la cabeza del tornillo para que no salte al girarla.



Figura 19: Ejemplo (cíclico) alrededor de un tapón de una botella de horchata.

En algunos casos (por ejemplo, el cierre de recipientes para alimentos y bebidas) se usan roscas de múltiples entradas (con varios hilos) que se disponen alrededor del eje central del tapón, y esto permite usar roscas que con poco giro puedan pasar, de estar apretadas, a estar completamente liberadas, distribuyendo la fuerza de apriete por toda la superficie. Si solo hubiera un hilo y un ángulo pequeño, sólo podría haber una zona con rosca, quedando el resto sin nada, y la rosca apretada solo de un lado.

Mecanismo de los bolígrafos.

Existen diferentes variaciones, algunas tienen en común elementos rotatorios donde se sigue una simetría rotacional. En cada ciclo de dos pulsaciones (salida y entrada) este elemento hace una parte del giro completo (típicamente media vuelta), por ello debe tener una forma que sea simétrica rotacionalmente; además, este elemento es movido por otro elemento empujador que lo hace girar, este elemento tienen que tener una simetría del doble del otro elemento.

Un dispositivo que tiene dos posiciones en las que se mantiene fijo por sí mismo, se le denomina “biestable”, como por ejemplo son los bolígrafos (dentro – fuera), o los interruptores de la luz (encendido – apagado). En realidad, este tipo de bolígrafos tienen cuatro posiciones estables, porque giran un cuarto de vuelta en cada pulsación y necesitan cuatro pulsaciones para volver al estado inicial, pero a efectos prácticos se pueden no considerar el giro del cartucho de tinta, sino solo si está dentro o fuera de la carcasa, siendo entonces “biestable”.

La gran ventaja de los bolígrafos retráctiles es que al no necesitar un capuchón, este no se pierde nunca, sin embargo, también son un poco más caros de fabricar por ser más complejos.

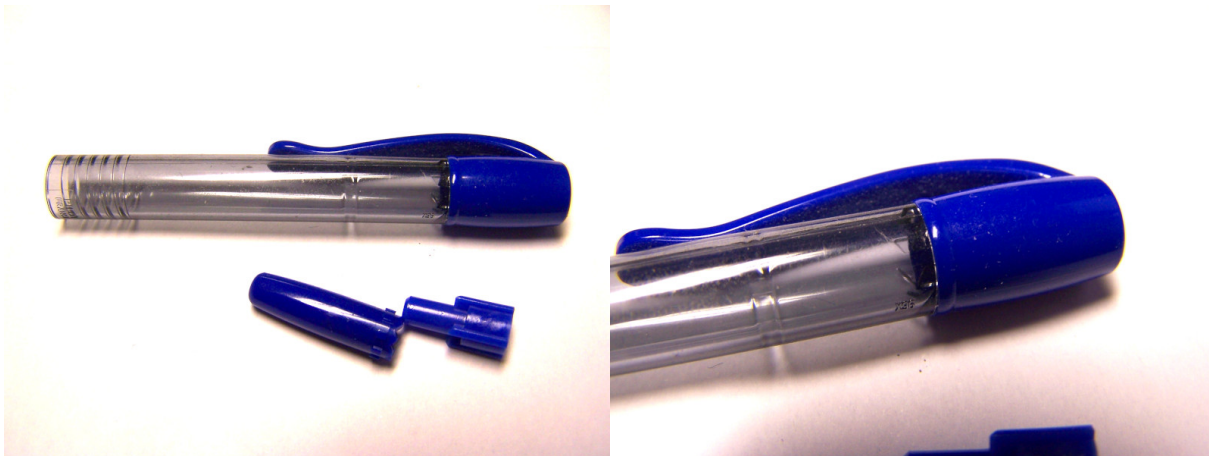


Figura 20: Este bolígrafo tiene ocho posiciones intermedias (cuatro dentro y cuatro fuera), antes de volver a su posición inicial.

Calculadoras mecánicas

Antes de que aparecieran las calculadoras electrónicas, se usaban diversos instrumentos o métodos para hacer cálculos: ábacos, tablas de datos, reglas de cálculo, calculadoras mecánicas...

De estas últimas existen muchos tipos, desde las que solo permiten hacer sumas y restas hasta dispositivos que permiten calcular integrales usando exclusivamente medios mecánicos. Muchas calculadoras mecánicas están basadas en engranajes.

Uno de los modelos más conocidos el "Curta" posee un diseño de forma cilíndrica y compacta, alrededor de la cual se disponen los dispositivos para la entrada de los datos.

Gramola

Una gramola es un aparato para reproducir música que antiguamente se usaba más que en la actualidad. Muchos establecimientos de ocio poseían una gramola, consistiendo ésta en un armario con discos en su interior que permitía a los clientes del establecimiento seleccionar las canciones que deseaban reproducir bajo introducción previa de monedas o billetes. Actualmente los dueños de locales prefieren contratar a un pinchadiscos (DJ) que mezcle las canciones para evitar el "vacío sonoro" que hay entre canción y canción si no se mezclan.

En muchos modelos los discos se sitúan en forma de patrón en torno a un eje de giro, esto permite un diseño más compacto y simple que otro tipo de soluciones (por ejemplo, siguiendo ejes cartesianos X Y), ya que un único motor permite girar el conjunto y llegar a cualquier disco, mientras que un sistema cartesiano requeriría de dos motores (sería más caro y complejo).

Además de almacenar los discos hasta el momento de ser reproducidos, existe una memoria mecánica que permite almacenar la selección de los clientes hasta el momento de ser reproducida. Es un dispositivo que gira y "lee" una serie de elementos que bloquean su giro y están dispuestos en la misma posición que los discos, de forma que cuando están hacia afuera (porque un cliente haya seleccionado esa canción), el elemento rotatorio se para y activa la reproducción del disco que está en la posición del elemento de bloqueo. Este tipo de memorias también han caído en desuso. Una memoria electrónica moderna es millones de veces más barata para una misma capacidad de datos almacenados.

Contactos de los rotores de una máquina de cifrar mecánica.

La finalidad de estos rotores es "revolver" de manera reversible la información, para ello constan de una serie de contactos a un lado y a otro conectados entre sí de manera saltada. Para que los contactos entre diferentes ruedas puedan hacer también contacto entre sí, se necesita que estén dispuestos en las mismas posiciones entre los diferentes rotores, pero, además, al girar los rotores, los contactos deben seguir produciéndose (aunque cambien los contactos de posición, que sigan coincidiendo), por ello se necesita recurrir a un patrón de simetría rotacional, ya que la regularidad del ángulo formado entre repeticiones permite que los contactos siempre se conecten entre sí en cada giro.

Además, los rotores tienen unas muescas siguiendo un mecanismo de trinquete que les permite girar a cada pulsación de una tecla, para que el esquema de cifrado sea diferente para cada letra (cifrado polialfabético).

Candado con contraseña mediante ruedas con números

Existen diferentes variantes, algunas de ellas se basan en varias ruedas alrededor de las cuales se disponen los números, y dentro de ellas hay un hueco de forma circular con una muesca. Cuando varios de estos huecos se alinean correctamente al introducir la combinación correcta, se permite el paso de una pieza por los huecos alineados, posibilitando la apertura del candado.

Robots delta (y otros sistemas similares)

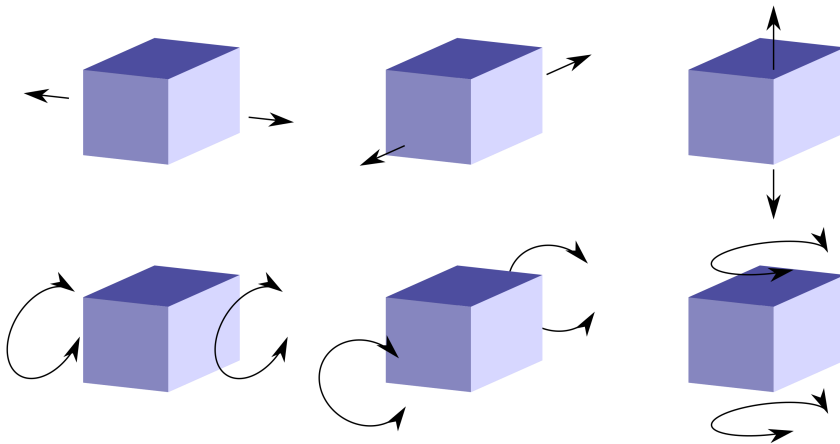
Existen aparatos muy diferentes que comparten el mismo fundamento: Posicionar un elemento respecto a otro mediante el uso de seis actuadores lineales, esto es, elementos mecánicos cuya longitud se puede ajustar a voluntad.

Posiciones de un objeto en el espacio

Existen aparatos muy diferentes que comparten el mismo fundamento: posicionar un elemento respecto a otro mediante el uso de seis actuadores lineales, esto es, elementos mecánicos cuya longitud se puede ajustar a voluntad.

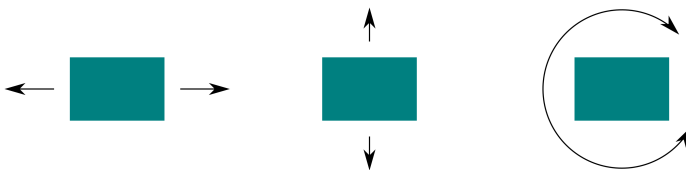
Los objetos en el espacio tienen seis grados de libertad, es decir, seis formas diferentes de moverse, pueden subir o bajar (1ª), pueden moverse hacia adelante o hacia atrás (2ª), y también pueden moverse hacia la

izquierda o hacia la derecha (3ª); además de estas tres direcciones de movimiento (cada una con sus dos sentidos), existen otras tres formas de movimiento basadas en giros: picado o cabeceo (“pitch” en inglés, la 4ª), guiñada (“yaw”, la 5ª) y alabeo (“roll”, la 6ª).



Cuando un objeto se mueve libremente por el espacio, su movimiento se puede describir con estos seis tipos de movimiento. No se tienen en cuenta si el objeto se deforma o si tiene piezas por dentro móviles (se considera como un “sólido rígido”).

En dos dimensiones también existen movimientos, pero son menos, en concreto tres: X o moverse hacia a los lados, Y o moverse lateralmente y finalmente la rotación respecto a un centro de giro:



En una dimensión solo hay una posibilidad de movimiento:



Este caso se puede imaginar como un tren en una vía sin desvíos, solo se puede moverse hacia adelante o hacia atrás, o bien un ascensor, que solo puede subir o bajar.

Funcionamiento:

Mediante elementos mecánicos cuya longitud se pueda modificar (por ejemplo, seis cilindros neumáticos), se puede ajustar la posición de un elemento respecto a otro, ya que cada uno restringe un grado de libertad. Es decir, cada elemento solo ajusta la posición en la dirección que está situado, no transmite giros ni

movimientos laterales. El resultado final con giros y otros movimientos es debido a la acción coordinada de los seis elementos; si uno de ellos se avería, el conjunto final no puede funcionar.

Existen muchos sistemas que usan este tipo de posicionamiento, simuladores de feria o profesionales, robots industriales que mueven objetos de una posición a otra, aparatos de traumatología para modificar la forma o longitud de un hueso, etcétera.

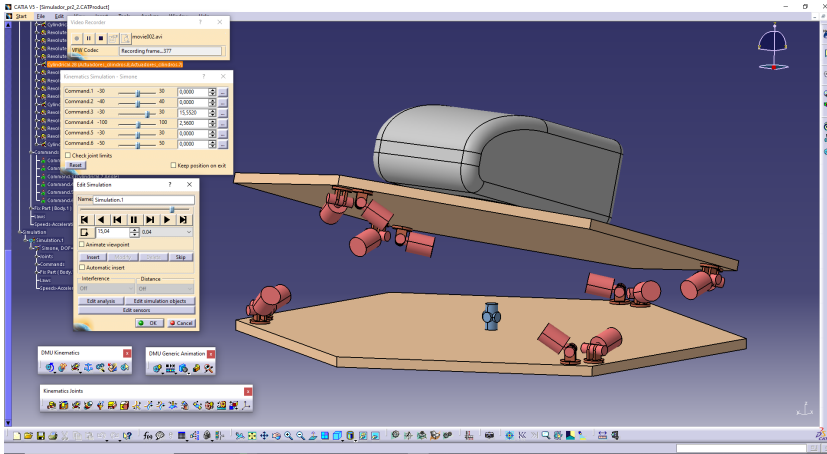


Figura 21: Recreación con Catia V5 de un simulador, los cilindros neumáticos no aparecen, sólo sus extremos (en rojo).

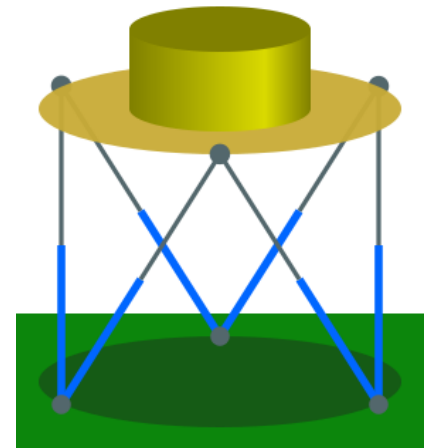


Figura 22: Los seis cilindros pueden mover la plataforma superior a cualquier posición.

Atracciones mecánicas “planas” (“flat rides”)

Muchas atracciones mecánicas "planas" recurren a patrones rotacionales; la ventaja de esta disposición es que con un único motor se puede controlar el movimiento de todos los elementos que forman la atracción, además de conseguir un diseño compacto y ser más fácil de transportar en atracciones portátiles.

Algunos tipos cuentan con varios tipos de simetría.



Figura 23: Atracción real en las fiestas de Valladolid.

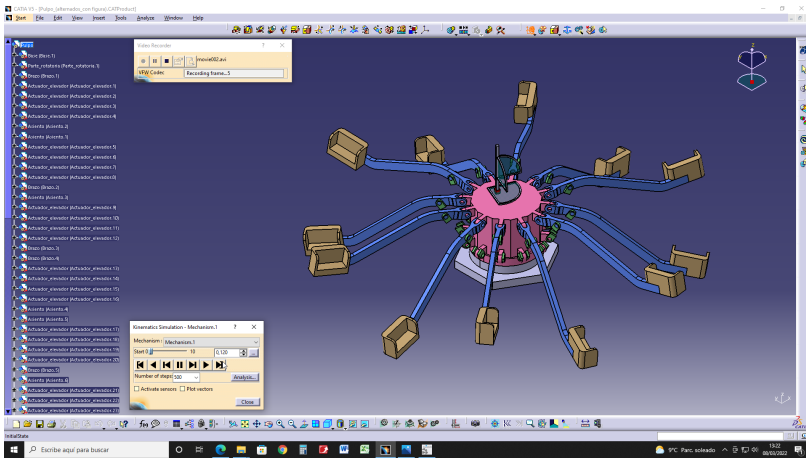


Figura 24: Recreación con Catia V5.

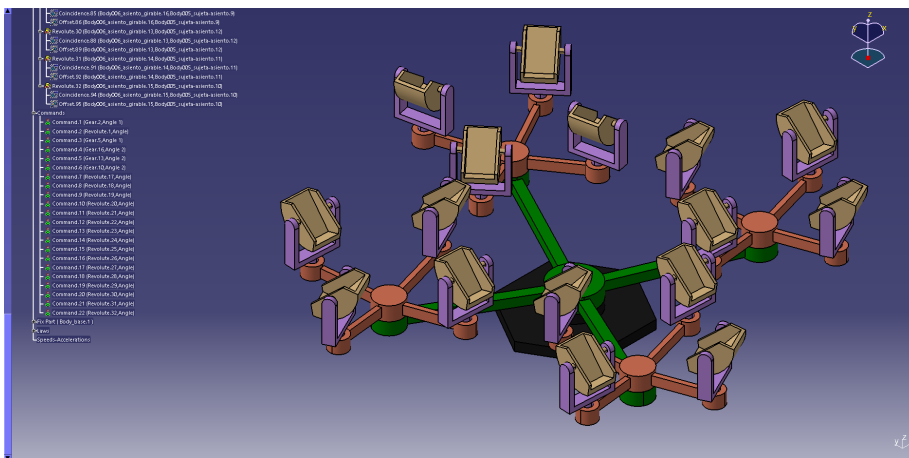


Figura 25: Recreación con Catia V5.



Figura 26: Atracción real en las fiestas de Valladolid.

Torno de control de acceso de tres barras.

Las barras están situadas de tal manera que una de ellas está sobre un plano horizontal y las otras dos sobre un plano perpendicular a esa barra horizontal (es decir, un plano vertical), eso permite que las barras puedan girar sin chocar contra la persona que está pasando. El uso de una simetría rotacional permite que puedan pasar las personas de forma continua, ya que el movimiento es cíclico. El espaciado entre las barras es tal que permita el paso de las personas de una en una.



Figura 27: Tornos para acceder al metro en la estación de Príncipe Pío (Madrid).

Centrifugadora de laboratorio

Este aparato sirve para acelerar la decantación en tubos de ensayo; al girar a alta velocidad produce una fuerza centrífuga mucho mayor que la gravedad permitiendo decantar muestras para las que sería insuficiente la acción de la gravedad o lo harían muy despacio .

En realidad, la fuerza centrífuga no existe como tal, la fuerza que existe es la fuerza centrípeta que hace que los objetos cambien su dirección constantemente, es decir, sigan girando.

Hay unos espacios donde se colocan las muestras, como en otros casos, el uso de una simetría rotacional permite mantener el centro de gravedad lo más próximo posible al centro de giro, reduciendo las vibraciones indeseadas y reduciendo la pérdida de energía que conllevarían.

Grúa con rueda

Las grúas, elementos destinados a la elevación de cargas, se han empleado desde la antigüedad. Para producir el movimiento se usaba un dispositivo circular donde una o varias personas caminaban y mediante su peso lo hacían girar, transmitiendo luego el movimiento al eje donde se enrollaba la cuerda que elevaba la carga.

Además, para sujetar las piedras se podían usar unas pinzas que al sostener el peso tendían a cerrarse, y estas pinzas consistían en dos copias de una misma pieza, pero giradas 180°, de forma similar a muchos tipos de tijera modernos. Para sujetar las piedras estas tenían muescas donde se introducían la punta de las pinzas, estas muescas han perdurado hasta nuestros días en muchos monumentos.

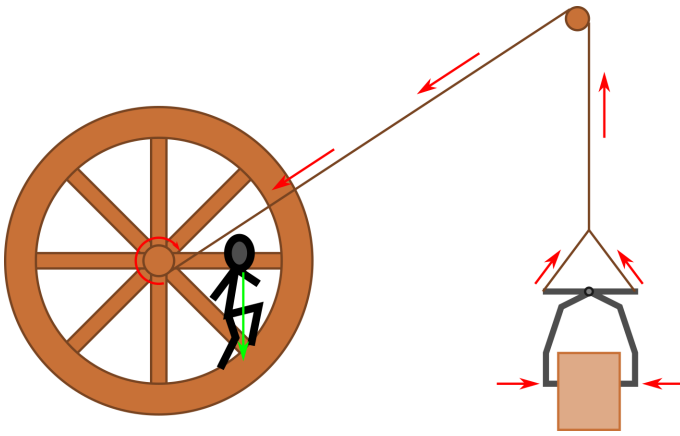


Figura 28: Modelo simplificado de una grúa de rueda y la pinza, que al entrar en carga tiende a cerrarse sobre la pieza.



Figura 29: Detalle de los agujeros en las piedras del puente romano de Salamanca para sujetarlas durante su elevación.

En esta figura, el peso de la persona que está dentro de la rueda ejerce una fuerza sobre esta, y como en un torno (un tipo de máquina simple), la relación entre la fuerza elevadora y el peso de la persona, es inversamente proporcional al radio del eje donde se enrolla la cuerda (flecha redonda roja) y directamente proporcional la distancia entre la persona y el centro del eje (cuanto más se mueva a la derecha, más fuerza ejerce); esta fuerza se dirige después mediante una polea hasta la zona donde está la carga que se eleva usando una estructura de madera (no dibujada por simplicidad).

Estas grúas se han usado históricamente para elevar grandes piedras; para sujetar la carga se emplea una “pinza”, que sujeta la piedra por los lados de forma que el propio peso de la piedra crea también la fuerza que cierra la pinza, ya que es una palanca.

Noria para elevar agua

Varios canjilones dispuestos siguiendo una simetría rotacional permiten elevar el agua desde una cota inferior hasta una cota superior donde el agua se descarga. Una de las ventajas de una noria es que solo tiene un eje móvil y no múltiples partes móviles entre sí, que pueden producir un fallo en más lugares.

Existe un dispositivo similar usado antiguamente en azucareras para elevar agua con remolachas flotando en ella.



Figura 30: Ejemplo en el Parque de las Norias de Valladolid.

¿Máquinas de movimiento perpetuo?

Estas máquinas no tienen un fundamento mecánico que las permita funcionar, y en muchas de ellas se recurre a simetrías rotacionales. Este tipo de máquinas prometen producir un movimiento giratorio sin un aporte energético más que el inicial, lo cual es imposible bajo el marco teórico actual de la ciencia.

Molinos de viento y turbinas de agua

Este tipo de elementos aprovechan un movimiento de un fluido para generar un movimiento giratorio en un eje, luego este movimiento puede ser aprovechado de diferentes formas. Actualmente lo más habitual es generar energía eléctrica (energía hidroeléctrica y eólica), pero también se han usado históricamente para otros fines: moler grano (molinos), cortar madera (aserraderos), machacar piedra (minas)...

Existen diferentes tipos con funcionamientos diferentes según la naturaleza del fluido (aire o agua), o según la presión y velocidad que tenga.



Figura 31: Turbina Pelton situada en Nuevos Ministerios, Madrid.

Los molinos de viento consistían en una serie de aspas situadas siguiendo un patrón simétrico rotacional y de forma que su dimensión mayor es perpendicular al eje de giro, el eje de giro se orienta al viento y el movimiento es transmitido a la piedra que muele los granos mediante ruedas dentadas primitivas (al ser accionadas a baja velocidad, la irregularidad de su movimiento no era un gran problema). El eje de giro de las aspas se podía variar según la orientación del viento.

En las ruedas hidráulicas antiguas existían diversos modelos según cayera el agua desde arriba, desde un lateral o corriera por la parte inferior.

Los molinos actuales para generación de energía eléctrica (aerogeneradores) suelen ser similares a los antiguos molinos de viento, pero más avanzados, se emplean tres aspas porque son un punto óptimo entre costes y eficiencia. Como en los antiguos, se puede orientar el eje de giro, pero, además, se puede variar el ángulo de ataque de las aspas para adecuarse a la variabilidad de la velocidad del viento, permitiendo iniciar la producción con velocidades del viento bajas y no tener que empezar a disminuir la producción hasta alcanzar velocidades relativamente altas (90 km/h), en los modelos no tan modernos a esta velocidad se cortaba la producción, ahora se disminuye progresivamente.

Del mismo modo las turbinas hidroeléctricas actuales son más avanzadas que las antiguas, existen dos familias (impulsión y reacción) orientadas respectivamente a saltos de agua de gran altura (presión) y caudal reducido y saltos de agua de gran caudal pero menor altura.

También existe otro tipo de molinos con un eje vertical, y, aunque se ha investigado mucho sobre ellos, no han llegado a desplazar a los de eje horizontal, una de sus ventajas sería su mayor sencillez al no necesitar un mecanismo de orientación.

Ventiladores y bombas

Estos elementos realizan la función opuesta a los anteriores, a partir de un movimiento giratorio generan un flujo en un fluido.

En ambos casos (ventiladores y bombas) existen de flujo axial y de tipo radial: en los primeros el fluido se desplaza en dirección al eje de giro (como en los ventiladores típicos), en los segundos el fluido entra en dirección al eje de giro y sale en dirección perpendicular a este.

Estos elementos con ciertas variaciones se usan frecuentemente: ventiladores para refrescar la piel (disminuir la sensación térmica sin enfriar activamente el aire), hélices para propulsar aviones, propulsar un fluido por un conducto (aire de ventilación, agua en un circuito de calefacción o agua caliente sanitaria), agua potable en una red urbana de suministro o en una red de un edificio...



Figura 32: Bomba de aire radial situada en una fragua portátil en una exhibición.



Figura 33: Hélice de avión situada en Nuevos Ministerios, Madrid.

Los motores de avión (y turbinas de gas en general) tienen una turbina para accionar el compresor de entrada o un eje del que se obtiene energía. El turbo de los motores sobrealimentados tiene también una turbina, en ellos los álabes siguen un patrón simétrico rotacional, pero también unas paletas que regulan el flujo de entrada; si es un turbo de geometría variable, estas paletas pueden cambiar su ángulo de inclinación.

Sirena mecánica

Su funcionamiento se basa en el giro de un elemento a gran velocidad. Es básicamente una bomba de aire centrífuga donde el aire bombeado no es llevado a un conducto, en lugar de ello se deja que este salga al exterior libremente.

Como los álabes no producen un movimiento continuo, sino a pulsos, estos pulsos, uno tras otro, forman las ondas sonoras; cuanto más rápido gira la sirena, más cerca están entre sí los pulsos formados y más agudo suena el sonido, por eso cuando se dejan de accionar el tono se hace más grave según se va frenando poco a poco.

El tono (medido en vibraciones por segundo o Hz, de Herz), viene determinado por el número de paletas que pasan por segundo, esto es, la velocidad de giro de la rueda en revoluciones por segundo y multiplicado por

el número de paletas. Por ejemplo, para emitir un La 440 requeriría de girar 110 vueltas por segundo si hay cuatro paletas como en el dibujo.

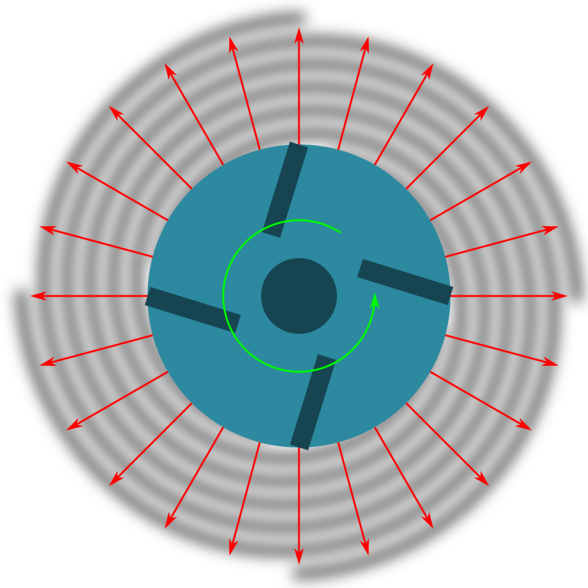


Figura 34: Las paletas del interior giran (flecha verde) impulsando el aire y generando ondas a su paso que se van propagando (flechas rojas) por los alrededores; estas ondas forman el sonido.

Motores eléctricos, generadores y sus bobinados

Los motores eléctricos constan de varios bobinados y de imanes permanentes (según el tiempo de motor pueden tener solo bobinados), estos bobinados siguen una simetría rotacional de forma que el movimiento sea lo más uniforme posible y no haya fuerzas de trepidación debidas a una disposición asimétrica de las masas.

Los bobinados pueden estar en el estátor (la parte fija que no gira) o el rotor (la parte que sí gira) o en ambas partes (si no tiene imanes).

Por otro lado, en los motores con escobillas, estas y sus contactos también se encuentran siguiendo un patrón simétrico rotacional, puesto que deben energizar los bobinados al unísono según va girando el rotor.

Relojes

La disposición de las diferentes horas siguiendo un patrón de simetría rotacional permite que la hora pueda ser mostrada por un elemento señalador giratorio cuyo eje de giro está situado siguiendo un movimiento continuo. Si se intentase usar una disposición lineal, se requeriría de un mecanismo de retroceso rápido cuando se llega a las 12 horas o 60 minutos, algo que un movimiento circular no necesita por su naturaleza periódica (al llegar a 12 vuelve a empezar de nuevo sin necesidad de tener que retroceder).

Las agujas se mueven a partir de un elemento que controla el paso del tiempo; este movimiento es llevado a la aguja de los segundos mediante un eje que sobresale de la esfera (donde están los números). Como los ejes que mueven la aguja de los minutos y de las horas comparten la misma posición geométrica, se recurre a cilindros concéntricos para poder mover las tres agujas de forma independiente. La aguja de las horas está sujeta a un eje hueco, dentro de él hay otro eje para la aguja de los minutos y también está hueco y dentro de ese otro hueco va el eje que mueve la aguja de los segundos.

Para controlar la velocidad de los giros de los ejes (que tienen que ir en relación 1:60) se emplean trenes de engranajes cuya relación de velocidades combinada es esa.

Existe una variación en la que el tiempo es mostrado mediante unas paletas que caen mostrando los números correspondientes a las horas y los minutos. Estos relojes a nivel interno son muy similares a un reloj de agujas, los ejes, en vez de mover unas agujas sobre la esfera, mueven las paletas que muestran los números, el punto de anclaje de estas paletas a los ejes sigue un patrón simétrico rotacional (la posición de las paletas no).

En los relojes modernos el paso del tiempo es controlado por un cristal de cuarzo que envía señales a un motor síncrono, es decir, el motor da pasos según recibe los pulsos. La vibración del cristal de cuarzo es controlada por un circuito electrónico, entre los dos generan pulsos cada segundo, el circuito electrónico primero hace vibrar al cristal, y este recibe las vibraciones de una forma muy regular. Posteriormente el circuito cuenta las vibraciones que suman un segundo y cuando eso se produce, vuelve a empezar a contar y al mismo tiempo envía un pulso eléctrico al motor para que avance un paso. El circuito electrónico de los relojes digitales, además realiza divisiones enteras (sin decimales) entre 60 para tener los minutos y las horas, además de otras funciones como la alarma.

En los relojes mecánicos se necesita un mecanismo que controla el paso del tiempo, habitualmente se usa un mecanismo de escape, en el cual hay una rueda dentada con triángulos (similar al trinquete explicado a continuación) y un elemento oscilatorio que deja escapar los dientes de esta rueda uno a uno, siguiendo un patrón periódico en el tiempo. Existen dos variaciones de este sistema de escape, uno es el de saltamontes y otro el de ancla (o ancora), otro más antiguo es el de Foliot. Estos mecanismos proporcionaron una precisión mucho más alta que otros como el paso de un fluido por un orificio estrecho (que puede variar por la temperatura, que hace variar la viscosidad).

Muchos relojes conectados a la red eléctrica no miden el paso del tiempo, en cambio usan como referencia la periodicidad de la red eléctrica, que en Europa es de 50 Hz, es decir, en un segundo cambia de sentido 100 veces, como esto está controlado de forma muy precisa, permite tener una buena referencia para el paso del tiempo.

Telégrafo ABC

Aunque están en desuso, un ejemplo curioso es el del telégrafo ABC, las letras se disponen de manera similar a las horas del reloj, y la aguja central solo necesita hacer un movimiento circular. Alrededor se encuentran las teclas que permiten parar la aguja en la letra transmitida.

Este tipo de telégrafo puede tener el número de letras que sea conveniente para cada alfabeto, al contrario que los modelos de varias agujas (también de Weastone), que están limitados a una matriz 5×5 donde los elementos de la diagonal principal no se pueden usar por estar ocupados por las agujas que señalan el resto de letras, con lo que al transmitir los mensajes se necesita simplificarlos ortográficamente, porque solo hay veinte letras disponibles. Como inconveniente, tenía más complejidad, ya que el de agujas básicamente consiste en cinco galvanómetros, mientras que el ABC necesita más mecanismos para transmitir el movimiento; a cambio necesita menos hilos entre telégrafos, lo que puede suponer un ahorro a la hora de construir las redes.



Figura 35: Telégrafo similar conservado en el Museo del Ferrocarril de Madrid, de este tipo de telégrafos hay diversas variaciones.

Carraca

Una carraca es un instrumento musical consistente en una rueda dentada acoplada a un mango y un cuerpo de madera con una lengüeta. Aquí hay un elemento con salientes dispuestos en un patrón, este elemento en su giro empuja una lengüeta saliente que forma parte de la estructura del elemento, cuando esta lengüeta es forzada por uno de los salientes a deformarse, acumula energía, y cuando el saliente se desplaza lo suficiente como para dejar libre a la lengüeta, esta recupera su posición original liberando de golpe la energía en forma de sonido (entre otras), al accionarse la carraca este proceso se produce de forma continua produciendo su característico sonido.

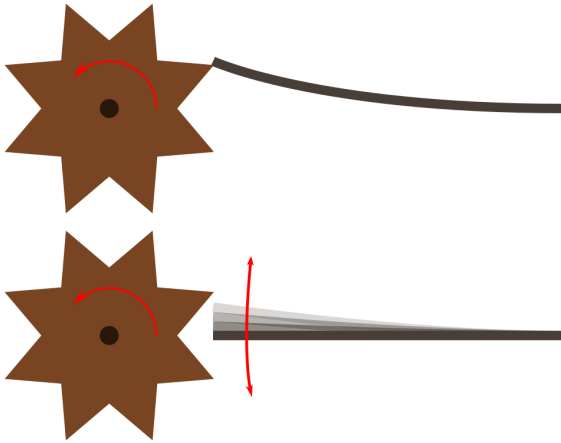


Figura 36: Al avanzar la rueda dentada libera la lengüeta que recupera su forma original emitiendo sonido.

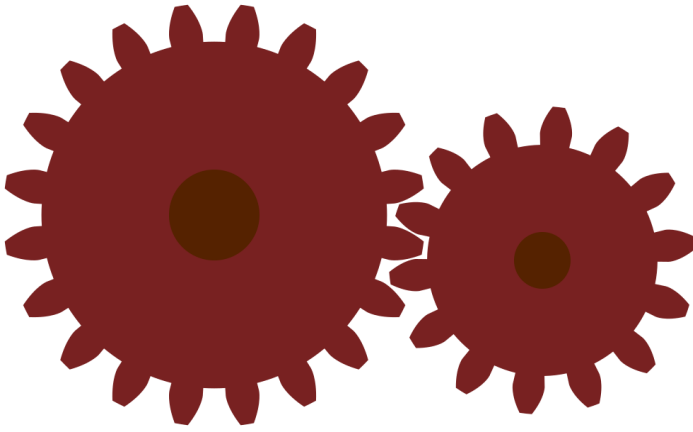
Engranajes

Este tipo de elementos ha existido desde bastante antiguo para transmitir movimiento, pero con la revolución industrial evolucionaron en su concepción para procurar una transmisión del movimiento constante, además de su estandarización para facilitar su intercambiabilidad y que las herramientas de mecanizado no tengan que ser excesivamente diversas.

En los engranajes, para que la transmisión del movimiento sea casi constante (constante desde un punto de vista teórico), se requiere que los dientes tengan un tipo de perfil concreto. Existen dos tipos de perfiles que cumplen esta ley, uno es la epicicloide y otro es la envolvente de círculo.

En los engranajes se da una relación de proporcionalidad entre las velocidades y las fuerzas de transmisión (desde un punto de vista ideal en el caso de las fuerzas). La velocidad de la rueda conducida respecto de la rueda conductora es inversamente proporcional al número de dientes de la rueda conducida y directamente proporcional al número de dientes de la rueda conductora. Por otro lado, las fuerzas son justo al revés, es decir, la fuerza (momento, porque es una transmisión de movimiento circular) es inversamente proporcional al número de dientes de la rueda conducida y directamente proporcional al número de dientes de la rueda conductora. El número de dientes es básicamente un diámetro, es decir, el diámetro primitivo del engranaje, que aproximadamente está a la mitad de su altura (no se debe confundir el diámetro primitivo de la rueda dentada con el del bruto de donde es producida).

Esto es así porque el número de dientes es básicamente el diámetro del engranaje, de hecho en engranajes se habla del “diámetro primitivo del engranaje”, que corresponde aproximadamente al que queda a la mitad de la altura de los dientes. También hay otros diámetros, como el de la base de los dientes, el de la zona superior de estos, o el de la pieza en bruto a partir de la que son fabricados.



En este ejemplo, si engranaje de la izquierda gira a 70 vueltas por minuto y tiene 20 dientes, el de la derecha que tiene 14 dientes girará:

$$Velocidad_{der.} = Velocidad_{izq.} \cdot \frac{dientes_{izq.}}{dientes_{der.}} = 70 \text{ rpm} \cdot \frac{20 \text{ dientes}}{14 \text{ dientes}} = 100 \text{ rpm}$$

Por el contrario, su fuerza de giro será 14/20, que es la inversa de la fracción anterior.

Para que el movimiento de los engranajes sea solidario al del eje donde están situados, antiguamente se posicionaban chavetas, pero actualmente existen unos acoplamientos cónicos que permiten no solo transmitir mucha más fuerza, sino también que esta se distribuya de forma homogénea por toda la rueda dentada y el eje, y el centro de masas esté mucho más centrado.

Engranajes planetarios

Estos engranajes consisten en una rueda grande con el dentado hacia el interior, un piñón en el centro (sol) que gira unido a un eje de forma fija; entre ellos hay varios piñones que giran entre los dos y son sujetados por un brazo unido a otro eje mecánico (el eje geométrico es el mismo). Este mecanismo es de gran interés, porque tiene dos entradas de movimiento y una salida.

Rueda de Génova

Este tipo de mecanismo convierte un movimiento circular continuo en uno pulsante, a la vez que produce el bloqueo de la rueda conducida para que esta no quede libre durante la fase de parada.

Esta rueda transmite el movimiento a una rueda conducida con diferentes salientes siguiendo un patrón de simetría rotacional.

Es un mecanismo que se puede crear fácilmente con una impresora 3D.

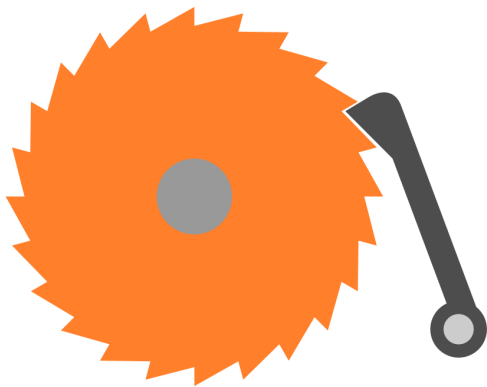
Llantas de los coches y ruedas de bicicletas

Con el fin de aligerar la masa, en muchas ruedas se ahueca la zona entre el contorno y el eje, como este vaciado no puede ser completo, porque entonces la rueda quedaría cortada en dos piezas, se dejan varias uniones entre ambas zonas. La distribución ideal de estas uniones es siguiendo un patrón simétrico rotacional de manera que no haya un desequilibrio de masas que produzca vibraciones.

Rueda y trinquete de sentido único

Es un mecanismo que solo permite una dirección de giro, el dentado cuando gira en un sentido se desliza bajo el gatillo de retención, levantándolo hasta que pasa el diente, pero cuando intenta girar en el sentido opuesto, la otra cara de los dientes choca con el gatillo y este impide que siga girando más, solo podría girar si se le levantara por algún otro medio.

Este mecanismo, además, permite una cierta discretización del movimiento, solo es estable en unas posiciones determinadas.



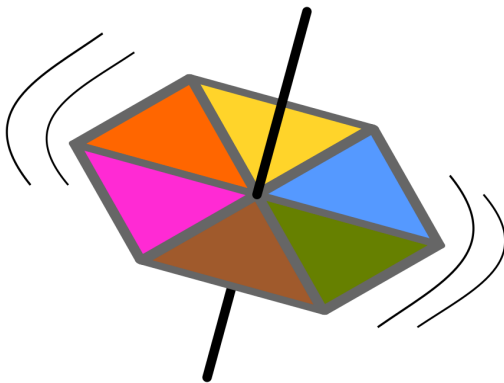
Ruleta para generar sucesos aleatorios

Aquí se necesitan dos funciones, por un lado, generar aleatoriedad, es decir, debe ser difícil predecir la posición de parada de la ruleta, de manera que sea casi aleatoria. Por otro lado, se suele realizar una discretización del resultado dividiendo la ruleta en sectores. Para definir bien en qué sector se detiene la ruleta, se puede usar un indicador oscilante y una serie de palos divisores dispuestos siguiendo una simetría rotacional.



Perindola para generar sucesos aleatorios

Este es un caso similar al anterior pero simplificado. Habitualmente este instrumento suele ofrecer resultados equiprobables, para ello se sirve de una forma poligonal y su giro en torno a un eje, para que la posición de regreso al equilibrio al dejar de girar sea apoyándose sobre una de sus caras.



Quemador de gas

Los orificios se sitúan radialmente no solo para distribuir mejor el calor en los recipientes de cocción, sino para favorecer una combustión más eficiente, porque se aumenta la superficie de mezcla entre el aire circundante y el gas emitido desde el quemador. Además de mejorar la eficiencia, se evita la producción de inquemados (si la combustión no es perfecta, se produce carbonilla y también otros gases además de CO₂ y vapor de agua, lo que puede ser dañino). Cuanto más finos y numerosos sean los agujeros, hay más superficie de mezcla entre el gas y el aire, sin embargo, también hay más riesgo de que se puedan obturar, por lo que tampoco se hacen demasiado pequeños.



Figura 37: Ejemplo de una cocina con tres fogones de varios tamaños, por el hueco inferior entra aire permitiendo que por los agujeros pequeños salga gas con algo de aire mezclado para mejorar la combustión. La pieza blanca a la izquierda del fogón grande es el encendido (genera una chispa que enciende el gas) y la barra fina es un sensor de seguridad para cortar el gas si no hay llama.

Tambor de lavadora

Este elemento necesita tener agujeros en su superficie para permitir la entrada y salida del agua de lavado. La forma más práctica de hacer todos esos agujeros es seguir una simetría rotacional, además esto evita la generación de desequilibrios mecánicos, si bien la trepidación es casi inevitable por la distribución irregular de la ropa en el tambor cuando entra el ciclo de centrifugado. Las lavadoras modernas tienden a ajustar la aceleración con precisión tratando de que la ropa quede en una posición más o menos equilibrada o bien pequeñas aceleraciones y paradas. Con ello reducen las pérdidas de energía debidas a la vibración.



Figura 38: Tambor de lavadora.

Magnetron del microondas (y radares antiguos)

Este elemento es el componente más importante de los hornos microondas; su función es producir este tipo de ondas (que son similares a las ondas de radio), para ser introducidas en la cavidad donde se introducen los alimentos a calentar.

Su fundamento consiste en hacer girar en espiral unos electrones ayudándose de un fuerte campo magnético y un voltaje elevado (unos 3000 V). Los electrones, al dar vueltas, circulan próximos a unas placas de metal generando campos eléctricos en ellas, estas placas de metal se disponen siguiendo una simetría rotacional. En el centro se encuentra un filamento de tungsteno (wolframio, W) que emite estos electrones cuando es calentado.

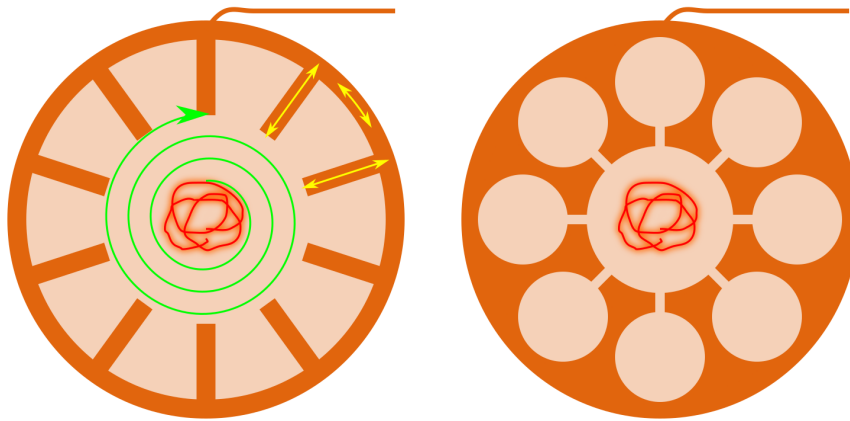


Figura 39: A la derecha se visualiza el modelo que se solía usar para radares y a la izquierda el modelo para calentar alimentos. Al calentarse el filamento de tungsteno en el centro (como una bombilla antigua), empieza a emitir electrones. Estos en vez de ir en línea recta hasta el borde, lo hacen siguiendo un recorrido en espiral (flecha verde) porque hay un campo magnético (un imán) que los obliga a ello. Los electrones tienen carga eléctrica negativa, por lo que tienden a repeler otros electrones próximos (como los que hay en las piezas de metal). Cuando pasan cerca de las placas metálicas que hay alrededor del filamento caliente, estas repulsiones producen corrientes eléctricas (flechas amarillas) que se propagan por toda la pieza y son recogidas por la antena de la zona superior; esta antena produce las microondas que después entran en la cámara donde se calienta el alimento.

Si se quisiera producir algo similar sin recurrir a esta disposición se requeriría de una pieza muy larga, ya que los electrones dan muchas vueltas en su recorrido en espiral produciendo las ondas cuando pasan cerca de las láminas.

Algunos modelos de horno microondas disponen de un elemento adicional que también sigue este tipo de patrón: consiste en una serie de paletas dispuestas alrededor de un eje giratorio que se sitúa en el techo de la zona donde van los alimentos y cuya función es “remover las ondas”, de manera que la energía se distribuya de forma más uniforme por el interior del horno. Este elemento no se suele montar mucho, ya que

aumentaría el precio final del producto, y muchos consumidores prefieren pagar menos, aunque el resultado sea una cocción menos uniforme. El motivo de tener un plato giratorio es para mitigar esta no uniformidad.

Existe otro tipo de magnetron en el que en vez de láminas se usan huecos de forma cilíndrica, aunque su fundamento de funcionamiento es similar. Fue desarrollado para construir radares con los que detectar aviones enemigos durante la Segunda Guerra Mundial. El radar emite microondas y las ondas que rebotan en los aviones enemigos son recibidas en una antena de manera que se consigue detectarlos. Este uso requería de una precisión muy alta a la hora de construir este elemento. Cuando terminó la guerra se empezaron a usar los magnetrones para producir ondas con las que calentar alimentos, ya que tenían la ventaja de calentarlos desde más adentro que los métodos convencionales, lo que permitía acelerar el proceso. Estos magnetrones eran más caros y por ello se optó por el tipo anterior (el de las placas dispuestas de forma radial), que era más barato y cumplía bien con su nueva función.

El voltaje elevado es producido por un transformador donde el bobinado de salida tiene un mayor número de espiras (vueltas alrededor de una pieza de hierro) que el de entrada, produciendo una elevación de voltaje, esta elevación del voltaje responde a una proporcionalidad directa con el número de espiras del bobinado de salida, y una proporcionalidad inversa con el de entrada. Es decir, al aumentar las espiras en el bobinado de la salida sube el voltaje de salida y al aumentar las espiras en el de entrada baja el voltaje de salida.

El recorrido en espiral de los electrones es causado por la Fuerza de Lorentz, que genera una fuerza perpendicular a la dirección de movimiento de los electrones y al campo magnético; esto hace que en vez de ir en línea recta desde el filamento, lo tengan que hacer siguiendo una espiral.

Escáner PET usado en hospitales

En los hospitales existen varios tipos de escáneres que permiten ver el interior del cuerpo en tres dimensiones. El uso de uno u otro depende del tipo de examen que se quiera realizar.

El escáner PET (Tomografía por Emisión de Positrones) se basa en introducir en el paciente una sustancia que es ligeramente radiactiva, pero no es cualquier radiactividad, sino que tiene una característica muy particular: al producirse la emisión radiactiva, esta forma una pareja de rayos gamma que se propagan en direcciones opuestas desde el punto que es emitida, esto es, entre los dos rayos forman una recta (o un ángulo muy próximo a 180°). La sustancia tiende a concentrarse en algunos órganos o en tumores, emitiendo desde ahí los rayos que luego se detectan.

Mediante el uso de detectores dispuestos en forma circular alrededor del paciente se puede detectar la posición de donde vienen estos rayos, ya que la línea recta formada por los rayos corta el círculo en dos puntos, además las dos detecciones son casi simultáneas. Esta simultaneidad permite descartar las interferencias que se pueden producir por otras fuentes (si no hay dos detectores que salten a la vez, es que es un dato erróneo, y se descarta).

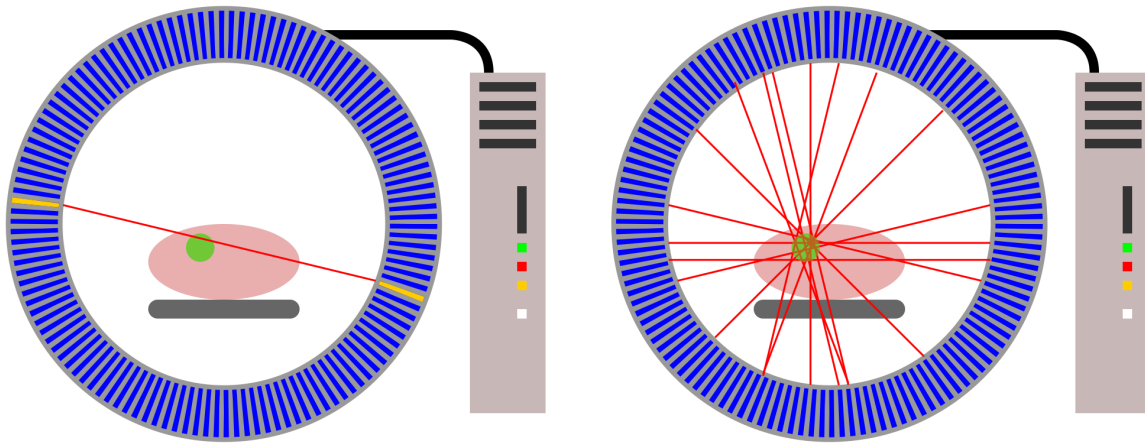


Figura 40: El cuerpo del paciente se representa por la forma rosa. A la izquierda se percibe cómo un par de rayos crearía un primer dato recogido por el ordenador. A la derecha se observa que uniendo muchos datos se puede saber de dónde vienen y así determinar la zona verde, donde se ha concentrado el producto y mostrarla por pantalla al médico..

A continuación, un ordenador combina los datos de muchas detecciones y así consigue establecer dónde se ha concentrado el producto, y de esta forma poder localizar tumores ante una sospecha de su existencia. Para evitar los riesgos de la radiactividad se suministra al paciente una pequeña dosis de un producto y que al poco tiempo se elimina.

Los positrones son una partícula que fue predicha a partir de un modelo matemático por Paul Dirac años antes de que se demostrara su existencia física. Estas partículas son similares a los electrones y comparten todas sus propiedades salvo una: la carga eléctrica, que es la opuesta, de ahí su nombre. Cuando un electrón y un positrón se encuentran, ambos emiten rayos gamma como se describe anteriormente.

Acoplamiento automático de los trenes

Existen numerosos tipos de enganche para los trenes, uno de ellos que se usa con frecuencia es el Scharfenberg, utilizado en trenes autopropulsados (sin locomotora) de pasajeros. En él hay una pieza con forma de gancho con una zona plana hacia adentro, que se enlaza con la de otro tren que sea compatible (que tenga el mismo tipo de gancho y a la misma altura). Justo en el momento del acoplamiento, los ganchos chocan por su parte frontal, que está inclinada de forma que cada uno se desplaza hacia su derecha hasta librar la forma del otro, momento en el que recupera su posición con un muelle y quedan acoplados. Para el desacople se les mueve hacia un lado y se separan los trenes. Este acoplamiento es automático, sin embargo, en los vagones de mercancías, una persona debe enroscar el gancho manualmente.



Figura 41: Vista general y detalle de un antiguo coche de Metro de Madrid usado como escenario y situada en el parque Tierno Galván (Distrito de Arganzuela). En la parte inferior hay tres filas de conexiones eléctricas, los agujeros son conexiones neumáticas. El hueco grande es para que el otro gancho pueda entrar.

Es una simetría central o giro de 180º; si no existiera este tipo de simetría y fuera una reflexión como en un espejo, no se podrían acoplar los trenes, ya que chocarían los dos ganchos del mismo lado.

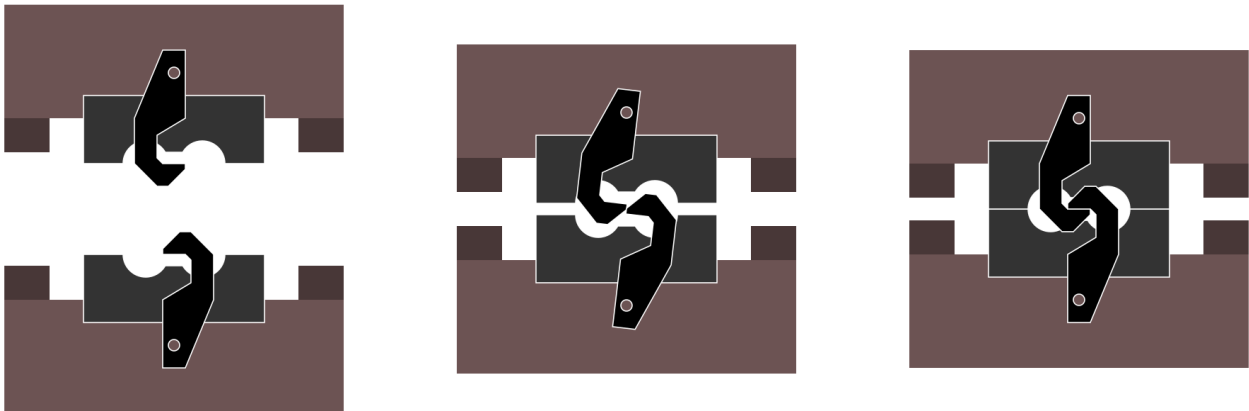


Figura 42: Secuencia de acoplamiento entre dos trenes.

En trenes de alta velocidad este enganche se oculta tras una tapa para favorecer la aerodinámica, ya que la energía gastada depende del cuadrado de la velocidad, y la potencia necesaria para mantener la velocidad depende del cubo de la velocidad. En trenes más lentos, al llevar menos velocidad, el efecto que tendría esto sería menor y por eso el enganche no suele disponerse tras una tapa móvil.

Conclusiones

Realizar el presente trabajo de fin de máster me ha ayudado a sintetizar todo lo aprendido en el máster, además de adquirir recursos donde ampliar la información que es necesaria para el ejercicio de la profesión docente, y técnicas para plasmarla de forma adecuada para que pueda ser transmitida a otras personas.

Durante su realización he investigado los movimientos en el plano usando doblado de papel o papiroflexia (simetría por reflexión, giro y traslación), una alternativa que puede suscitar el interés entre los alumnos, he realizado numerosas ilustraciones con las que he mejorado mi habilidad para la representación gráfica, además de aprender a valorar qué aspectos en las ilustraciones son de mayor importancia para facilitar que otras personas puedan entenderlas bien. Aunque el trabajo realizado en este fin de máster solo de movimientos en el plano y de simetrías radiales de una figura plana, con un breve acercamiento a las simetrías radiales en el espacio y sin embargo múltiples aplicaciones en el mundo tecnológico, el aprendizaje se puede enfocar no solo a otras áreas de las matemáticas, sino también a otras asignaturas, algo que en el futuro puede ser muy relevante si se realizan actividades coordinadas entre asignaturas diferentes como parte de una metodología de aprendizaje basado en proyectos.

También he aprovechado para probar alternativas a la hora de denominar las rectas y puntos en los diagramas, buscando que los elementos estuvieran referenciados mediante su orden de realización o los elementos previos que lo producen, si bien el resultado fue demasiado complejo y finalmente he recurrido a la notación habitual, que visualmente es más sencilla y la descripción en forma de texto junto a las figuras es suficiente para que los elementos queden identificados.

Todas las asignaturas cursadas en el máster me han servido para mi formación como futuro docente, habiendo sido instruido en distintos marcos, normativo, teórico, de investigación educativa, fundamentos de matemáticas, técnicas para localizar fuentes de información científica fiables, medios didácticos para facilitar el aprendizaje, presentación y exposición de documentos, trabajos o propuestas ante otras personas, conocer la evolución de la educación en España a lo largo de la historia o los principales retos a los que se enfrenta, conocer mejor la personalidad de los alumnos para poder empatizar de la forma más adecuada, ampliar lo que sé sobre patrones matemáticos y cómo estos están presentes en el arte, en la naturaleza. También he aprendido a detectar posibles problemas que pueden surgir en la dinámica de un aula y de cómo hacer frente a ellos, cómo combinar diferentes estilos docentes y metodologías didácticas para atraer el interés del alumnado, cómo evitar que los alumnos puedan aprender mal los conceptos por no exponerlos de todas las formas que estos pueden presentarse, y otros muchos más aspectos.

Y no puedo terminar sin recordar a todas las personas que he conocido entre docentes y compañeros y que entre todos ellos han hecho de esta experiencia algo extraordinario.

Bibliografía

- Giménez Martín, Philippe Thierry (2022-2023). Apuntes de geometría de Complementos de matemáticas.
- González Fernández, Cesáreo Jesús (2022-2023). Apuntes de Metodología y Evaluación en Matemáticas.
- Reyes Iglesias, María Encarnación (2022-2023). Apuntes de Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia.
- Alsina C. y Trillas E. (1984) Lecciones de Álgebra y Geometría, Editorial Gustavo Gili.
- BOCYL-D-30092022-3 Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. (2022). Recuperado el 17 de marzo de 2023, de <https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/decreto-39-2022-29-septiembre-establece-ordenacion-curricul> (Recuperado, 11 de Junio de 2023)
- BOE-A-2022-4975 Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. (2022). Recuperado el 17 de marzo de 2023, de <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-4975> (Recuperado, 11 de Junio de 2023)
- Páginas web:
 - <https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetron> (Recuperado, 10 de Junio de 2023)
 - https://en.wikipedia.org/wiki/Huzita%E2%80%93Hatori_axioms (Recuperado, 10 de Junio de 2023)
 - <https://math.stackexchange.com/questions/1809440/is-there-a-way-to-draw-a-1-degree-angle-using-only-ruler-and-compass> (Recuperado, 10 de Junio de 2023)
 - https://en.wikipedia.org/wiki/Constructible_number (Recuperado, 10 de Junio de 2023)
 - https://en.wikipedia.org/wiki/Positron_emission_tomography (Recuperado, 10 de Junio de 2023)
 - https://en.wikipedia.org/wiki/Anchor_escapement (Recuperado, 10 de Junio de 2023)
 - https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_telegraph (Recuperado, 10 de Junio de 2023)
 - <https://www.educacionrespuntocero.com/noticias/aprendizaje-cooperativo-y-colaborativo/> (Recuperado, 11 de Junio de 2023)
 - <https://www2.ual.es/jardinmatema/simetrias/> (Recuperada el 11 de junio de 2023)
 - <https://create.kahoot.it/share/simetrias-actividad-eso/2006f215-4afb-4cef-97b3-4365d131856f> (Recuperado, 11 de junio de 2023)

- <https://es.khanacademy.org/math/geometry/xff63fac4:hs-geo-transformation-properties-and-proofs/hs-geo-symmetry/v/example-rotating-polygons> (Recuperado, 11 de junio de 2023)
- https://en.wikipedia.org/wiki/Mechanical_calculator (Recuperado, 11 de junio de 2023)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Siren_\(alarm\)#Physics_of_the_sound](https://en.wikipedia.org/wiki/Siren_(alarm)#Physics_of_the_sound) (Recuperado, 11 de junio de 2023)
- https://en.wikipedia.org/wiki/Treadwheel_crane (Recuperado, 11 de junio de 2023)
- Vídeos:
 - Lesics (2020) Magnetron, How does it work?
<https://www.youtube.com/watch?v=bUsS5KUMLvw> (Recuperado, 11 de junio de 2023)
 - Electronoobs (2023) El Magnetrón Como Funciona
<https://www.youtube.com/watch?v=NxKS6JsAYKU> (Recuperado, 11 de junio de 2023)
 - Technology Connections (2020) The Selection Accumulator; a Jukebox's Brain
<https://www.youtube.com/watch?v=o1qRzKuskK0> (Recuperado, 11 de junio de 2023)
 - <https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-transformations/hs-geo-transformations-intro/a/intro-to-rotations> (Recuperado, 11 de junio de 2023)