Universidad de Valladolid
Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología

Integral y primitiva en el Bachillerato. Diagnóstico, revisión y actualización a la nueva normativa

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en educación secundaria obligatoria y bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas

Especialidad de Matemáticas

Alumno: Manuel Manzanares Barrajón
Tutor: D. Fernando Sanz Sánchez

Valladolid, Junio de 2023

Índice general

Introducción

La enseñanza del Cálculo Integral en el Bachillerato se aborda en la actualidad de manera introductoria y se centra en desarrollar una comprensión básica de los conceptos y técnicas fundamentales, para posteriormente en niveles universitarios profundizar sobre ella. Al presentarse por primera vez en un curso tan especial como segundo de Bachillerato, siendo este un curso destinado a la superación de las pruebas de acceso a la universidad, más que un curso introductorio a niveles universitarios, no se le otorga a este tema el tiempo y la profundidad que realmente merece. Generalmente se hace mayor hincapié en que el alumno conozca la relación existente entre la derivada y la integral, y la aplicación de éstas últimas al cálculo de áreas bajo curvas. Partiendo de las reglas que el alumno conocía de la disciplina del cálculo diferencial, se proporciona al alumno las relativas al cálculo integral, viéndose además reglas específicas de éste como la regla de integración por partes, el cambio de variables o el cálculo de áreas usando la integral definida como aplicación de la Regla de Barrow. Produciendo así que el alumno se convierta en un auténtico resolutor de primitivas, pero sin entender realmente la teoría que existe bajo este concepto. Es decir, la mayoría de los alumnos no comprenden por qué la integral definida permite calcular el área bajo una curva, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$. Simplemente se aplican los métodos conocidos, se proporciona el resultado, pero no ha habido reflexión entre la relación primitiva/área de una región.

Es por este hecho que en el presente Trabajo Final de Máster se aborda una propuesta didáctica que tiene la pretensión de mostrar al alumno las razones de por qué las integrales permiten calcular áreas bajo ciertas gráficas, aunque no se realizará con sumo rigor, pues se precisan conocimientos de Análisis Matemáticos bastante profundos enmarcados en Teoría de la Medida, se mostrarán intuitivamente los argumentos matemáticos pertinentes. Para ello, el proceso de enseñanza y aprendizaje que aquí se expone parte de conceptos básicos como el área de polígonos planos, conocidos durante toda la etapa educativa, y se llevarán a cabo procedimientos intuitivos como métodos de aproximación de áreas de figuras irregulares (curvas) mediante polígonos inscritos y circunscritos. De esta manera seguiremos el desarrollo histórico que ha sufrido la integral a lo largo del tiempo.

En nuestra propuesta vamos a centrarnos en el estudio de la integral definida, el porqué de este concepto, partiendo de sus orígenes y estableciendo su relación inherente con el cálculo de áreas. No abordaremos aquí los métodos de resolución de primitivas. Constituirá una unidad didáctica distinta de ésta. Aunque sí veremos reglas de integración de funciones potenciales, exponenciales, trigonométricas y logarítmicas por diferentes métodos como pueden ser el área regular que encierran bajo la gráfica, la aproximación por sumas de Riemann o viendo aplicaciones del teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow. Con ello, simplemente queremos que el alumno adquiera la idea de integral definida y aplique la teoría al cálculo de áreas bajo las gráficas correspondientes.

En esta propuesta se dará bastante importancia a la enseñanza y al aprendizaje autónomo del estudiante, se relegará la metodología magistral, ampliamente utilizada durante este curso y otros previos, proporcionando así al alumno mayor autonomía y libertad. El modelo de enseñanza, que será expuesto con mayor profusión en la memoria, se basará en proporcionar a los estudiantes un compendio de problemas o actividades donde, a base de conjeturar estrategias y armándose de todos los conocimientos previamente adquiridos, el propio alumno sea el que llegue a la solución del problema sin habérsele proporcionado la teoría previamente. Se llevará a cabo en parejas y las actividades serán secuenciadas, partiendo de conocimientos conocidos y tras varios pasos lleguen al objetivo final del ejercicio. En todo momento cuentan con la ayuda del profesor, que es considerado como guía de aprendizaje, además contarán con diversos materiales o podrán ayudarse entre compañeros. Asimismo, se usarán softwares dinámicos, como GeoGebra, para que los alumnos adquieran la competencia digital, presente en el perfil de salida de bachillerato.

Creemos que esta propuesta didáctica ayudará al alumno a comprender verdaderamente el concepto de integral definida, proporcionándole una idea más firme de éste, lo que le facilitará la comprensión en niveles universitarios de la formalización del cálculo integral. Al ser una propuesta un tanto innovadora y dinámica, creemos que el alumno mostrará mayor interés por los conocimientos que se tratan, consiguiendo así que éste los adquiera más sólidamente. Por tanto, este trabajo surge con la idea de mejorar la práctica docente en torno a un concepto que resulta complicado tanto a profesores como a estudiantes.

Antes de mostrar la planificación y diseño de la propuesta didáctica que aquí se recoge, vemos necesario realizar una contextualización del concepto de integral definida, desde un punto de vista tanto matemático como didáctico, para poder sentar un punto de referencia sobre por qué la enseñanza de éste se lleva a cabo de la manera actual. Se comenzará proporcionando, en el capítulo 1 el recorrido histórico que ha tenido el concepto de integral desde su aparición, podemos decir desde los griegos hasta su formalización como hoy la entendemos.

Posteriormente, en el capítulo 2 se hará un estudio curricular actual del concepto de integral. En primer lugar, se hará una comparativa de cómo se trata la disciplina de cálculo integral en la LOMCE y en la LOMLOE, pues ambas leyes se encuentran en vigor actualmente, la segunda se pondrá en marcha el curso siguiente 2023-24 en segundo de bachillerato, por lo que afectará a nuestra propuesta. Más adelante, se estudia cómo aparece el cálculo integral en los libros de textos, se ha realizado una investigación entre los libros de textos con los que contábamos, todos de la editorial Anaya, y, posteriormente, se ha contrastado con otras investigaciones previas. Por último, vincularemos el modo de trabajo actual sobre la integral en el aula con el efecto perverso que tienen las pruebas EBAU.

En el capítulo 3, se llevará a cabo un estudio detallado sobre el aprendizaje y la enseñanza de la integral definida en el bachillerato recogido en numerosas investigaciones previas, y con el que nos encontramos personalmente de acuerdo, destacaremos las investigaciones Artigue (1995), Azcárate (1996) y Turégano (1994). Además, se detectarán efectos epistemológicos y didácticos que puede adquirir el alumno con el aprendizaje actual del cálculo integral.

Finalmente, en el capítulo 4, se recoge la propuesta didáctica que se ha elaborado para trabajar el concepto de integral definida. Donde, como hemos comentado, se hará partícipe al alumno utilizando metodologías como Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) y aprendizaje cooperativo, y dónde se usará también el software GeoGebra para representar funciones y calcular áreas bajo curvas. Se recoge además las competencias y objetivos que se pretende conseguir en ella y la temporalización, secuenciación y desarrollo de los problemas que aparecen en cada una de las actividades. La puesta en marcha de todas las actividades se verá influenciada por diversos factores, como el nivel del alumnado o el tiempo del que se disponga, por tanto, el docente debería pensar cuál o cuales de las actividades pueden potenciarse y cual eliminarse. Esto se suple al presentarse un volumen considerable de tareas, por lo que el docente podrá escoger entre unas u otras. El trabajo cierra con unas reflexiones finales.

Aportaciones del máster al TFM

Las asignaturas que he cursado en el máster han influido notablemente en el desarrollo del TFM y en mi visión como docente. Procedo a detallar qué asignaturas me han servido más y por qué:

- **Procesos y contextos educativos:** Esta asignatura me permitió conocer cómo se organiza el sistema educativo español y las distintas leyes que se han ido promulgando a lo largo de la historia. Posteriormente, dicha asignatura se focalizó en la especialidad de Matemáticas con Diseño curricular.

- **Diseño curricular en matemáticas:** Gracias a esta asignatura he podido conocer cómo se encuentran las matemáticas, curricularmente, en cada una de las Leyes de Educación, en esta propuesta se tratan las dos últimas que son las que hemos visto en dicha asignatura. La propuesta además sigue el esquema de las Situaciones de Aprendizaje de la LOMLOE.

- **Metodología y evaluación en matemáticas:** Ha sido una de las asignaturas que más han contribuido tanto en esta propuesta como a nivel personal, pues en toda mi etapa educativa sólo conocía la metodología magistral o la resolución de ejercicios. He podido conocer las distintas metodologías existentes que pueden desarrollarse en una clase de Matemáticas y cuándo es mejor utilizar una que otra. Además, se estudió las diferentes propuestas de Pólya, Miguel de Guzmán y de otros autores para enfrentarse al abordaje de los problemas. En esta propuesta se pretende utilizar varias metodologías, haciendo mayor hincapié en la metodología ABP y el aprendizaje colaborativo.

- **Didáctica de las matemáticos:** En esta propuesta se utilizan los principios de Dienes vistos en dicha asignatura. Me ha parecido una asignatura bastante interesante, dónde se nos ha hecho ver cómo presentar las matemáticas desde un punto de vista más lúdico y más atractivo para el alumno.

- **Innovación docente en matemáticas:** Me ha permitido acercarme al software GeoGebra, donde he observado que se pueden realizar actividades adaptadas a distintos niveles y bastante atractivas para el alumno. Además, se potenció el pensamiento computacional, que he podido implementar en algunas tareas de mi propuesta.

- **Prácticas externas:** El periodo de prácticas que realicé en el IES "Ribera de Castilla" de Valladolid me sirvió para ponerme en situación de docente: pude observar como toda la teoría vista en el Máster se implementaba día a día en el aula, además de los problemas que pueden surgir y cómo tratar de prevenir para que no sucedan. Lamentablemente no pude observar cómo se impartía la enseñanza del cálculo integral en dicho instituto, pues se llevaría a cabo en el tercer trimestre del curso.

Capítulo 1

Introducción histórica del concepto de integral definida

En este capítulo vamos a hablar del desarrollo histórico que ha sufrido la noción de integral a lo largo de la Historia, pues este desarrollo nos sirve de guía en esta propuesta didáctica sobre la introducción a la teoría de la integración, y va constituir el modelo de enseñanza y aprendizaje de los alumnos con respecto al concepto de integral definida.

Los orígenes del Análisis Matemático en general, y el de la integral, en particular están ligados al cálculo de áreas. Como menciona Courant y Robbins (2002, pp 440) "El primer concepto básico del Análisis Matemático es el de integral" esto se debe básicamente a la estrecha relación con el cálculo del área de una superficie, el cuál ha constituido uno de los problemas fundamentales desde el principio.

La historia del concepto de integral comenzó como un intento de dar respuesta a los diferentes problemas geométricos que fueron surgiendo. Con el paso de los siglos, nuevos problemas relativos a fenómenos naturales (gravedad, movimiento, etc.) propiciaron avances en la evolución del concepto, que finalmente desembocaron en cálculo integral actual.

Vamos a fragmentar el desarrollo histórico que ha tenido la integral desde los comienzos en cuatro etapas. En la primera etapa, con la matemática griega, con Eudoxo y Arquímedes, los científicos se preocupaban más en buscar y dar justificaciones a las teorías anteriores y dotar de un mayor nivel de abstracción al cálculo de áreas, donde aparecieron los primeros métodos infinitesimales desde un enfoque geométrico, lo que supuso un salto en las matemáticas respecto a épocas precedentes. En la segunda etapa, con Kepler, Galileo y Cavarieli, se recuperan gran parte de las aportaciones en la época de la matemática griega, pero buscando nuevos métodos para el cálculo de áreas más heurísticos y más alejados del rigor de Eudoxo y de Arquímedes. En la tercera etapa, con Newton y Leibniz, se estudia la estrecha relación entre la derivación y la integración, partiendo de distintos puntos de vista. Y, finalmente, en la etapa cuarta, con los estudios de Riemann, Cauchy, Lebesgue, etc., se fundamenta perfectamente el Cálculo integral, y de forma más general, el Análisis Matemático, cuando se establece claramente el concepto de límite. En esta etapa el cálculo se hace riguroso desde un enfoque más aritmético. Podría considerarse una quinta etapa correspondiente a las matemáticas contemporáneas dónde, con el Análisis no estándar, se vuelve a considera las cantidades infinitesimales como alternativa a los ϵ-δ de la definición de límite dada por Weierstrass.

1.1. Primera etapa (siglo V a.C. hasta la primera mitad del siglo XVI)

En esta etapa distintos matemáticos crearon y utilizaron métodos, de índoles muy diferentes, que les permitieron calcular el área de distintas figuras así como probar conjeturas sobre áreas y volúmenes de éstas.

Los pitagóricos creían que todas las figuras geométricas estaban hechas de números enteros, de modo que las representaban por piedras en la arena. Por tanto, ellos creían que los lados, las áreas y los volúmenes de las figuras geométricas eran números enteros, es decir, guardaban entre sí una relación racional.

Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) fue el precursor del Cálculo Integral, al hacer, con todo rigor, sus cálculos de áreas y de volúmenes. Creó el proceso de exhausción para calcular áreas de figuras curvilíneas, inscribiendo y circunscribiendo polígonos y aumentando el número de lados para aproximar cada vez más figuras. Éste dice así:

> *Si a una magnitud, longitud, área o volumen, se le resta más de su mitad, y a lo que queda más de su mitad y así sucesivamente, ésta llega a hacerse menor que cualquier magnitud previamente dada de ese mismo tipo.*

Con este método Eudoxo demostró que el área de un círculo es proporcional al cuadrado de su radio. Si llamamos A al área de un círculo en cuestión, se tiene que al tomar un n muy alto, el valor del área del polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia P_n se aproxima al valor de A tanto como se quiera. En la Figura 1.1. se muestra como los polígonos regulares P_6, P_{12} y P_{24} aproximan cada vez mejor a la circunferencia.

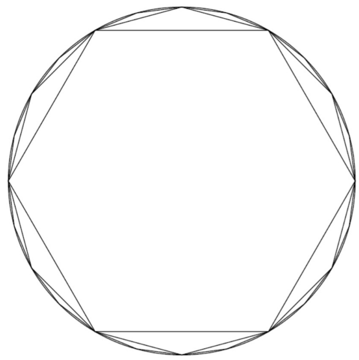


Figura 1.1: Aproximaciones a la circunferencia por polígonos regulares.

Como bien señalará Arquímedes, lo anterior no constituye realmente una demostración. Eudoxo sin embargo demostró de forma absolutamente rigurosa y formal este hecho, se basaba en el hecho de que el polígono regular de n lados inscrito en un círculo de área A se forma a partir del polígono regular de $2n-2$ lados inscrito en el mismo círculo, de manera que $A-P_n$ se forma a partir de $A-P_{n-2}$ quitándole a este área más de su mitad. En términos de nuestra figura, imaginemos por tanto que nuestro P_n es P_{12} y P_{n-2} es P_6.

Demostró además que el volumen del cono es un tercio del área círculo de la base multiplicado por su altura, lo que constituye, el área del cilindro. Para este último se apoya en el hecho de que el volumen de una pirámide de base triangular es un tercio del volumen del prisma de igual base e igual altura.

Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) fue uno de los matemáticos más prolíficos de la historia. Sus grandes incursiones a la Matemática fueron en mayor medida en el área de la geometría, aunque también destaca por sus avances en la física y la ingeniería. Gran parte de su trabajo fue la prueba de proposiciones respecto de áreas y volúmenes de figuras limitadas por líneas o superficies curvas, como la parábola, el círculo, la esfera y el cilindro. Calculó con gran exactitud el valor de π, usando el método de exhausción, aproximando el área del círculo con polígonos inscritos y circunscritos. Lo acotó entre $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$. En "*La cuadratura de la parábola*" Arquímedes demuestra que el área de un segmento de parábola, porción de plano comprendida entre ella y una cuerda (Figura 1.2.), es cuatro tercios del área del triángulo inscrito ABC formada con la cuerda AB como base y con el punto C más alto de la parábola desde esa base. Además, demostró que la suma de los dos triángulos análogamente inscritos en la parábola con bases AC y BC respectivamente es $\frac{T}{4}$, siendo T el área del triángulo ABC

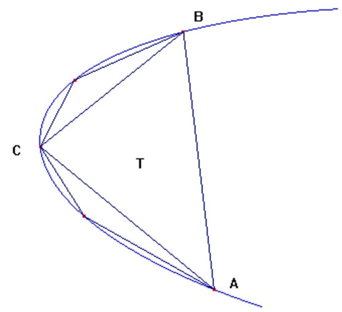


Figura 1.2: Área de un segmento parabólico.

En "*El cilindro y la esfera*" obtiene el área y el volumen de la esfera y el volumen del cilindro que circunscribe a la esfera, llegando así a la conocida fórmula que aparece en la tumba de Arquímedes:

$$\frac{Vol_{esf}}{Vol_{cil}} = \frac{2}{3}.$$

1.2. Segunda etapa (desde la segunda mitad del siglo XVI hasta comienzos del siglo XVII)

Esta etapa se inicia con el Renacimiento, en ella se recuperan gran parte de las aportaciones en la época de la matemática griega, pero a su vez se buscan nuevos métodos para calcular áreas, volúmenes, centros de gravedad y longitudes de curvas. Antes, hablaremos de la teoría del movimiento del siglo XIV:

En el siglo XIV se cultiva la teoría del movimiento. Los *Calculadores* del Merton College fueron un grupo de matemáticos, compuesto por Thomas Bardwardine, William Heytesbury, Richard Swineshead y Jhon Dumbleton, que descubrieron el movimiento uniforme y el movimiento uniformemente acelerado (según el espacio o según el tiempo) así como el concepto de velocidad media en este movimiento. Formularon y demostraron el teorema del Merton College:

El espacio recorrido en un movimiento uniformemente acelerado e coincide con aquel, que en el mismo tiempo, recorra un móvil con movimiento uniforme, llevando su velocidad media.

Nicolás de Oresme, obispo de Lisieux, en su "*Tractatus de latitudinibus formarum*" introduce el plano coordenado. Representó además el movimiento en un plano de modo que la abscisa (longitud) representaba el tiempo, y la ordenada (latitud) representaba la velocidad. Demostró el teorema del Merton College afirmando que el área que queda bajo esta gráfica es el espacio recorrido por el móvil (lo que hoy escribimos como una integral). Se puede apreciar en la figura adjunta donde en rojo se representa la gráfica de un movimiento uniformemente acelerado y, en la línea discontinua, la gráfica de un movimiento uniforme que tuviese su velocidad media.

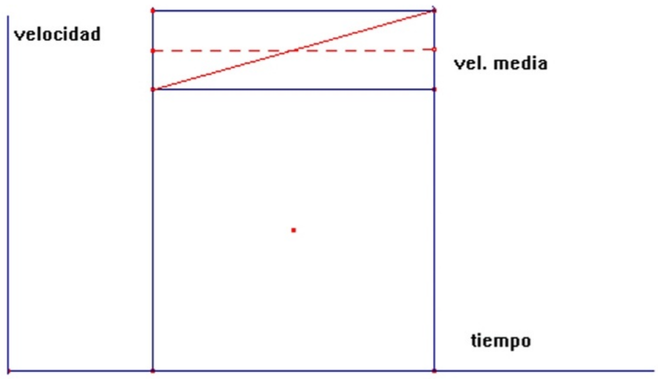


Figura 1.3: Teorema del Merton College.

El matemático holandés, Simon Stevin (1548-1620), modernizó los argumentos infinitesimales de Arquímedes, pero sin el rigor lógico del principio de exhausción. Stevin justifica la fórmula del baricentro de un triángulo como punto de encuentro de sus tres medianas. Además, en su trabajo sobre hidróstatica determinó la fuerza que ejerce la presión de un fluido sobre una presa rectangular vertical. Para ello dividió la presa en tiras horizontales finas y rotó esas tiras sobre sus bordes superior e inferior hasta convertirlas en paralelas a un plano horizontal.

Johannes Kepler (1571-1630) en su tratado sobre "los volúmenes de los barriles" encuentra una fórmula para el volumen de cualquier sólido de revolución. Durante su estudio de los movimientos planetarios, expuso un método para encontrar el área de sectores de una elipse, que consistía en pensar en las áreas como sumas de polígonos de base infinitamente pequeña.

En 1638, Galileo Galilei (1564-1642) presentó un razonamiento que relacionaba el área bajo una curva tiempo-velocidad con la distancia. El problema decía así:

Supongamos que un objeto se mueve con una velocidad variable $v = 32\ t^2$, representado en el dibujo por la recta OB. Entonces, $A'B'$ es la velocidad típica en un instante, además coincide con la distancia infinitesimal recorrida. Por tanto, él área OAB, construida juntando líneas del tipo $A'B'$, es la distancia total.

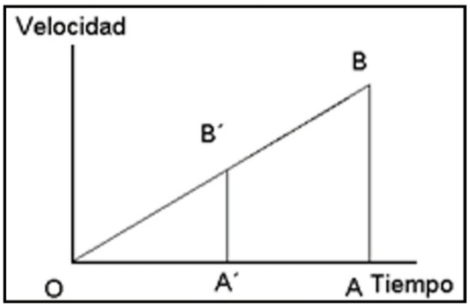


Figura 1.4: El área bajo una curva tiempo-velocidad coincide con la distancia.

Este razonamiento estaba apoyado en la menta de Galileo por consideraciones filosóficas que equivalían a considerar el área OAB como un número infinito de unidades indivisibles, como por ejemplo $A'B'$ (Fernández (2011)).

Este método de cálculo, precursor del cálculo integral, alcanza su punto álgido al final de la época que estudiamos con Bonaventura Cavarieli (1598-1647), discípulo de Galileo. Basándose en las ideas de Kepler, expuso la idea de que un área está formada por segmentos indivisibles y, de la misma manera, un volumen queda formada por áreas indivisibles. Formuló así su famoso principio:

> *Si dos cuerpos sólidos tienen la misma altura, y si las secciones que determinan planos paralelos a las bases y a distancias iguales de ellas están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los dos sólidos están siempre en esa misma proporción.*

Con este principio demuestra para $n = 1, 2$ primero y, posteriormente, para todo n, la fórmula que después en cálculo integral se expresará como

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

El razonar con indivisibles puede producir errores como “homogeneizar dimensiones” y atribuir al volumen las propiedades del área o a un área las propiedades de la recta que delimita la superficie, es decir, transferir las propiedades de las figuras componentes a la figura resultante. Artigue (1995) afirma que la percepción de superficies como apilamiento de segmentos o volúmenes como apilamiento de superficies, está presente aún en las representaciones mentales y la cultura matemática informal de los estudiantes. Aranda (2015).

Así pues Stevin, Kepler, Cavarieli y Galileo, retomaron el cálculo infinitesimal de los antiguos en la primitiva forma pre-eudóxica de Demócrito, que afirmaba que un círculo era un polígono regular de infinitos lados. Sus razonamientos tienen la ventaja de que facilitan considerablemente sus cálculos, pero tienen el inconveniente de que carecen del rigor lógico de Eudoxo y Arquímedes.

1.3. Tercera etapa (desde la segunda mitad del siglo XVII hasta 1821)

En el año 1637, Pierre de Fermat define la noción de derivada como método de cálculo de máximos y mínimos y de tangentes, a la par, comienza el primer cálculo integral (denominado cálculo de cuadraturas). Durante este periodo, el cálculo de derivadas e integrales progresa en paralelo hasta desembocar en el nacimiento, en la obra de Newton y Leibniz, del cálculo infinitesimal, cuyo inicio se sitúa con el descubrimiento de que ambas operaciones son una inversa de la otra.

Tal y como se afirma en Kline (2012), el gran desarrollo del Análisis Matemático se inició en el siglo XVII y este se debió a la necesidad de dar respuesta a los siguientes problemas:

- Obtener velocidades y aceleraciones en función del tiempo y recíprocamente, dada la aceleración, obtener la velocidad y la distancia.

- Obtener la tangente a una curva, planteado como un problema de Geometría, pero también para diseñar lentes, y para el estudio del movimiento.

- Obtener los valores máximos y mínimos de una determinada función, para maximizar el disparo de proyectiles o para el estudio del movimiento de los planetas, por ejemplo en relación a la distancia de éstos al sol.

- Obtener longitudes de diversas curvas en relación a la Astronomía, para calcular así la distancia recorrida por un planeta en un período de tiempo. O calcular el área de la superficie cerrada por una curva (cuadraturas), volúmenes cerrados por superficies (curvaturas), centros de gravedad y la atracción gravitatoria.

Pierre de Fermat (1601-1665) demostró la cuadratura de la región del plano encerrada por la gráfica de la potencia x^n.Este método que podía ser aplicado tanto a valores enteros como a fraccionarios de n, supuso un gran avance sobre la obra de Cavarieli. Fermat subdividía el intervalo $[0, a]$ en una cantidad infinita de subintervalos tomando los respectivos puntos de abscisas $a, aE, aE^2, aE^3, \ldots$, siendo E un número menor que 1. En estos puntos, consideraba sus respectivas ordenadas, aproximando el área bajo la curva por medio de rectángulos circunscritos, como se muestra en la Figura 1.4. Por tanto, las áreas de los sucesivos rectángulos vienen dadas por los términos de la progresión geométrica $a^n(a - aE)$, $a^nE^n(aE - aE^2)$, $a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3)$, ... y la suma de estos infinitos términos es

$$a^n(a - aE) + a^nE^n(aE - aE^2) + a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3) + \cdots =$$

$$= a^{n+1}(1 - E)(1 + E^{n+1} + E^{2n+2} + \cdots) = \frac{a^{n+1}(1 - E)}{1 - E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1 + E + E^2 + \cdots + E^n}.$$

Tomando $E = 1$ en la fórmula anterior obtenemos $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, es decir, el área bajo la curva x^n.

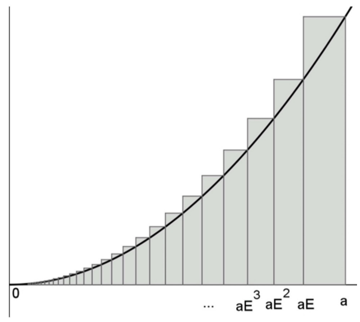


Figura 1.5: Área encerrada bajo la curva x^n según Fermat.

Gregorie de Sant Vicent, un jesuita que enseñaba en San Lorenzo del Escorial, estudió la cuadratura de x^{-1}, la única función potencial de la forma x^n para la que no tiene sentido la fórmula $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, para su cuadratura entre 0 y a. Demostró que esta especial cuadratura transforma el producto en suma, lo que equivale a decir que se trata del logaritmo de la variable. Esto lo demostró probando que si las áreas $a, b, c, d, \ldots$ de la Figura 1.4. son iguales, entonces las y_i forman una progresión geométrica.

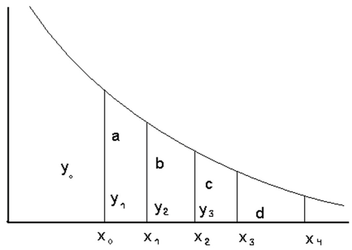


Figura 1.6: Área encerrada bajo la curva x^{-1}.

El matemático, Giles Personne de Roberval (1602-1675) calculó la integral de x^m desde 0 hasta 1 utilizando el método de los indivisibles, pero de forma más rigurosa. Obtuvo también el área bajo un arco de cicloide.

En 1655, Jhon Wallis (1616-1703), publicó su "*Arithmetica Infinitorum*" donde asignó valores numéricos a los indivisibles de Cavarieli y convirtió el cálculo de áreas, lo que suponía algo meramente geométrico, en cálculos aritméticos. Probó además que la razón de los cuadrados de los indivisibles en el triángulo con los cuadrados de los indivisibles en el paralelogramo es un tercio.

Parece que fue Isaac Barrow (1630-1677) el primero en demostrar el carácter inverso de los problemas de tangentes y los de cuadraturas. No obstante, su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer un uso efectivo de esta relación. En la lección X de su obra "*Letiones opticae and geometricae*" (1674) Barrow muestra la versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo (extraída de Fernández (2011)):

Se considera la curva $VCEG$ debajo del eje horizontal. Construimos ahora la curva $VIRH$, encima del eje horizontal, asignándole a cada punto el área encerrada por la curva inicial. Por ejemplo, la longitud del segmento PI es el área de la superficie *de vértices VCP, análogamente para el segmento DF y la superficie VED. Si trazamos la tangente a la curva $VIRH$ en un punto, se obtiene como pendiente para esa recta tangente el valor de la curva inicial en ese punto.*

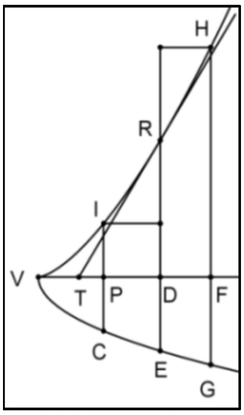


Figura 1.7: Versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo.

Fueron Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716), quienes crearon, de manera independiente, el cálculo infinitesimal. Crearon los conceptos de derivada para resolver las tangentes y de integral para el de las cuadraturas, reconociendo claramente la intrínseca conexión entre los dos problemas planteados. Newton partió de la lectura de Barrow, y Leibniz de la lectura de Pascal, de modo que la reflexión de ambos tiene su origen en el triángulo característico, presente de modo muy similar en la obra de Pascal y Barrow.

En 1687, Isaac Newton, publica tres trabajos capitales sobre cálculo infinitesimal en su obra "*Principia Matematica Philosophiae Naturalis*". En el primero de ellos, "*De Analysi per equationes numero terminorum infinitas*" (1669), aparece teoría de las series y un método de trazado de tangentes. En cuanto a la primera, Newton es el primero en desarrollar como serie un binomio elevado a potencias de n fraccionarias o negativas. Lo hizo razonando en un contexto de cuadraturas. Comprendió entonces que las series se podían sumar y multiplicar como números, dando lugar a un álgebra con las mismas reglas, y entendiendo la serie como una forma alternativa de presentar una función. Newton introdujo los conceptos de *fluente* para definir que una variable está en función del tiempo, y *fluxión*, para definir a la derivada respecto del tiempo de la fluente, además de unas reglas algorítmicas de fácil uso que posteriormente utilizó para resolver problemas de máximos y mínimos y de tangentes y cuadraturas.

En cada uno de estos tres trabajos fundamentales encontramos lo que conocemos como fundación del cálculo, es decir, se hace aparente que pendientes y cuadraturas son operaciones inversas. En el primer trabajo, cuando la curva es la gráfica de una función $y = f(x)$, Newton denotó por $y + Oq$ al nuevo valor de y cuando x ha experimentado una pequeña variación O (q es por tanto la derivada de y respecto de x). En particular, el área $z(x)$ comprendida por la gráfica de la función entre los valores 0, x de la abscisa, aumenta como $z + Of(x)$ al experimentar x un pequeño incremento O, pues el aumento es el área de un rectángulo de base O y de altura $f(x)$. Es decir, que la pendiente de la cuadratura o derivada de la integral, de una función $f(x)$ es la propia función. De esta manera Newton demuestra, que la integral de

$x^{\frac{m}{n}}$ es

$$\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$$

puesto que aumentar el exponente en una unidad y dividir por él, es operación inversa de disminuir el exponente en una unidad y multiplicar por él.

El descubrimiento de Leibniz fue posterior al de Newton, aunque fue el primero en publicarlo. Lo descubrió en 1676, leyendo a Pascal. Al observar que en el triángulo de Pascal, se sumaba un pequeño rectángulo cuya altura era la ordenada, y al ser la suma y la diferencia operaciones inversas, Leibniz utilizó la notación d que significa pequeña diferencia o diferencial, y una s de tipografía antigua $\int$ con el significado de suma infinita. En 1684 publica su cálculo diferencial en su artículo "*Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur*" y, a este le sigue la publicación en 1686 de su artículo sobre cálculo integral, en el que, por primera vez, se establece, en letra impresa, que la integración es la operación inversa de la derivación.

Leibniz trabaja con diferenciales, entendiendo por diferencial dv de una magnitud v un incremento infinitamente pequeño. Propone una serie de reglas de manipulación, con la justificación heurística que ahora nos resulta obvia, que son a modo de postulados haciendo así rigurosa la manipulación de estas diferenciales. Así, si a es una cconstante, y u, v son funciones:

$$da = 0$$

$$d(av) = adv$$

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

Leibniz verá la pendiente de una función $y(x)$ en un punto como cociente de diferenciales $\frac{dy}{dx}$ en ese punto. En particular, Leibniz demuestra con las reglas anteriores que

$$\frac{d(x^{\frac{n}{m}})}{dx} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}.$$

Esto le permite hallar la cuadratura o integral de la función exponencial $x^{\frac{n}{m}}$, al observar que esta operación que denota (como suma infinita de infinitésimos) $\int f(x)dx$ es inversa de la operación $\frac{d}{dx}$, no aportando otra razón que el hecho de que la suma es la operación inversa de la diferencia. Conclusión a la que llega gracias a su excelente notación, pues ésta describe lo que se está haciendo.

Para Leibniz, una curva era un polígono de infinitos lados, cada uno de longitud infinitesimal. Por tanto, una curva de estas características llevaba asociada una secuencia infinita de puntos (x_i, y_i). La diferencia entre dos valores sucesivos de x es el diferencial de x y lo representó por dx; de la misma forma para la ordenada y, dando así lugar a su característico triángulo con lados infinitesimales dx, dy, ds el cual se muestra en la Figura 1.8.

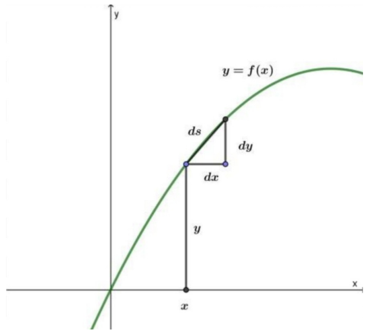


Figura 1.8: Triángulo característico de Leibniz.

Johann Bernoulli (1667-1748), por su parte, vio la integración simplemente como la operación inversa de la diferenciación y, con esta aproximación, obtuvo bastantes éxitos integrando ecuaciones diferenciales. Fue el primero en escribir un curso sistemático del cálculo integral, publicado en 1742.

Posteriormente, Leonhard Euler (1707-1783) llevó la integración hasta sus últimas consecuencias, de forma que los métodos de integración indefinidas alcanzaron prácticamente su nivel actual. Con la Γ de Euler

$$\Gamma(n) = \int e^{n-1} e^{-x} dx$$

generalizó el factorial, pues si n es un número natural, entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Pierre Simon Laplace (1749-1827) en su famoso tratado de estadística "*Théorie analytique des probabilités*" define la famosa transformada de Laplace de una función $f(x)$

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt.$$

Carl Friederich Gauss (1777-1855) fue un matemático muy prolífico, a los doce años de edad descubre la media aritmético-geométrica $M(a,b)$ de dos números a y b. Para obtenerla, construye inductivamente (a_i, b_i) con $(a_1, b_1) = (a, b)$ y tomando como $a_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$ y $b_{i+1} = \sqrt{a_i \cdot b_i}$, las medias aritmética y geométrica de los datos a_i y b_i, respectivamente. Entonces, se define

$$M(a,b) = \lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} b_i.$$

Posteriormente, en Götingen, estudiando la órbita de Pallas, demuestra que la media aritmético geométrica $M(1+x, 1-x)$ viene dada como una integral de la forma

$$\frac{1}{M(1+x,1-x)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2cos^2(\theta)}},$$

esta integral aparece en el estudio de la longitud del arco de la órbita elíptica de los planetas. Estudiando este tipo de integrales, siguiendo la idea de obtener la periodicidad de la función seno, usando que en el arco de circunferencia la función inversa $x = sen(u)$ de la función

$$u(x) = arcsenx = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

es periódica, Gauss tiene la idea de hacer esta misma inversión con la integral elíptica que le ha aparecido, obteniendo su periodicidad, o doble periodicidad si se considera como función definida sobre los complejos. Demostró también la fórmula integral de Cauchy para integrales holomorfas

$$\frac{f^{n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

puesto que la única integral no nula sobre caminos cerrados, es z^{-1}, para la cual se tiene

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{de^{i\theta}}{e^{i\theta}} = 2\pi i.$$

1.4. Cuarta etapa (desde 1821 hasta finales del siglo XIX)

En esta última etapa se fundamenta el Cálculo Diferencial e Integral. Esta fundamentación se inició cuando Cauchy publicó en 1821 su "*Cours d' Analyse de l'École Polytecnique*", después continuó con Bolzano (1781-1848) y culminó con la definición formal del concepto de límite de Weierstrass (1815-1897).

La fundamentación del análisis comienza como un intento de fundamentar la "*Thèorie analytique de la chaleur* de Fourier, que describe la propagación del calor en una barra metálica, al transcurrir el tiempo.

Fourier supone que toda función $f(x)$ debe ser, en un intervalo cerrado de longitud l, expresada como suma infinita de funciones seno y coseno con periodo l/n con $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{l} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{l} x\right),$$

con

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{l} x\right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{l} x\right) dx.$$

Fourier da por supuesto que tanto estas integrales como las sumas infinitas existen y éstas últimas conmutan con las integrales. La aclaración de esto llevará a la fundamentación de la teoría de la integración, a la noción de convergencia uniforme y en definitiva a una tarea de formalización y fundamentación que terminará con la fundamentación de los números reales y de todas las matemáticas en la teoría de conjuntos.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) recuperó el punto de vista geométrico para la integral como área, superando así la visión que se tomó en el siglo XVII, la integral como antiderivación, volviendo al método de exhausción. Define la integral de una función sobre un intervalo dado, imponiendo que sea continua, aunque no sea diferenciable, como un límite, cuando n tiende a infinito, de sumas inferiores y superiores de áreas de n rectángulos cuyas bases forman una división del intervalo dado en n subintervalos cada uno de ellos de igual longitud, y cuyas alturas son el valor mínimo y el valor máximo de la función en cada uno de esos intervalos (como sabemos, ambos límites existen y coinciden, en el caso de que f sea continua). Se muestra en la Figura 1.8. En su obra "*Résumé des leçons donées à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*" (1823), Cauchy dio la primera definición precisa de integral definida y propuso la notación actual $\int_a^b f(x)dx$. Al desligar la integral de la antiderivada, utilizó el teorema del valor medio para demostrar la relación con ésta.

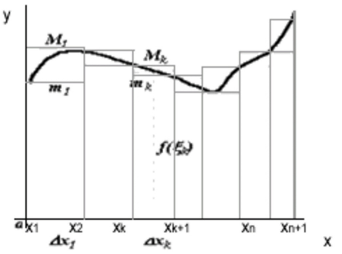


Figura 1.9: Integral de Cauchy.

La integración fue rigurosamente formalizada por Bernhard Riemann (1826-1866). Estableció un concepto de integral más general que el de Cauchy, incluyendo funciones que admiten infinitas discontinuidades siempre que estén acotadas, y caracterizó y formalizó las funciones Riemann-integrables:

> *Una función es Riemann-integrable si, y solamente si, la medida del conjunto de sus puntos de discontinuidad es nula.*

Además, hasta el momento sólo se había hecho referencia a funciones continuas y no negativas (puesto que estábamos hablando de área bajo una curva); en este aspecto Riemann generalizó sus conclusiones y la única condición que puso es que la función $f(x)$ estuviese definida en un intervalo de la forma $[a, b]$. Riemann halla el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ siguiendo el procedimiento utilizado por Fermat. Para ello, divide el intervalo $[0, 1]$ en n partes iguales, y sobre cada uno de los subintervalos construye rectángulos, de tal forma que el área de estos rectángulos le permita aproximar por bajo el área buscada, es decir, levanta en cada subintervalo un rectángulo de altura igual a la imagen del extremo izquierdo y base igual a la longitud del subintervalo. En la Figura 1.10. se muestran aproximaciones con subdivisiones igual a 5 y 12 partes iguales, respectivamente.

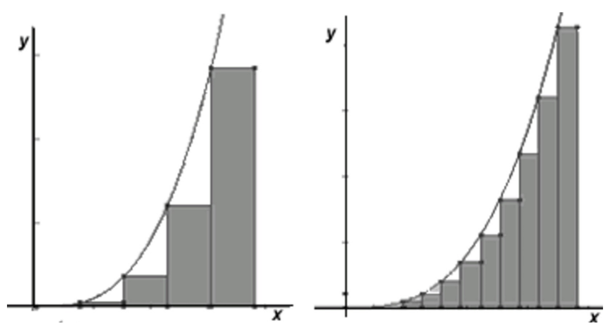


Figura 1.10: Área bajo la curva $y = x^2$ según Riemann.

En 1902, tras apreciar la posibilidad de integrar funciones que no son Riemann-integrables, Lebesgue (1875-1941) estableció la Teoría de la Medida, generalizando la idea de medida e integral en espacios n-dimensionales. Introdujo el concepto de función medible y definió la integral para el caso unidimensional. Una función integrable para Lebesgue no necesitaba ser continua excepto en un conjunto de medida nula, y esto puede extenderse a funciones no acotadas.

En la actualidad, con el desarrollo del Análisis no estándar, se está volviendo a considerar cantidades infinitesimales como alterativa a los ϵ-δ de la definición métrica de límite de Weierstrass. Las demostraciones con este análisis son más cortas y más directas que con ϵ-δ, pero se requiere de la lógica matemática moderna (Courant y Robins, 2002).

Para finalizar el análisis sobre el desarrollo histórico del concepto de integral, es interesante advertir, tal y como se nos advierte en Ferrer (2010) que un riguroso primer curso de Análisis se basa, en mayor o menor medida, en el orden siguiente

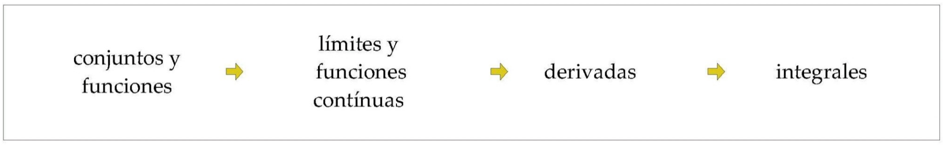


Figura 1.11: Desarrollo de un curso de análisis.

sin embargo, el desarrollo histórico tuvo lugar en orden inverso:

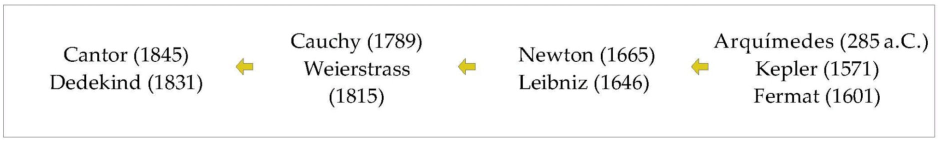


Figura 1.12: Desarrollo histórico.

Esto nos muestra que conviene tener presente que pueden surgir serias dificultades en los alumnos si estudian determinados conceptos matemáticos en orden inverso a cómo han ido surgiendo a lo largo de los tiempos. Dicho metafóricamente, es como si empezamos a construir una casa por el tejado sin haber asentado bien los cimientos.

Capítulo 2

La integral desde una perspectiva curricular y didáctica

2.1. La integral desde una perspectiva curricular: marco legislativo actual. Comparativa entre LOMCE y LOMLOE.

Como ya sabemos, el sistema educativo español actual se divide en cuatro etapas: Educación Infantil (de 0 a 6 años), Educación Primaria (de 6 a 12 años), Educación Secundaria Obligatoria, E.S.O., (de 12 a 16 años) y Bachillerato (de 16 a 18 años). Nuestro estudio se desarrolla en la etapa de Bachillerato, concretamente en el último curso. Nos encontramos en un curso de transición con dos leyes educativas, LOMCE y LOMLOE, esta última ha entrado en vigor en este curso académico 2022-23, pero solamente en cursos impares, mientras que la LOMCE sigue vigente en los cursos pares. A pesar de que nuestra propuesta se encaja dentro del contexto de la nueva ley educativa, la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre (LOMLOE), puesto que para llevarla a cabo se ha seguido el esquema de las situaciones de aprendizaje que dicha ley propone, presentando así los problemas o ejercicios contextualizados, haciéndolos más cercanos y atractivos al alumno, se presenta también el estado actual de la integral en la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre (LOMCE), puesto que en el curso académico actual sigue estando vigente.

Hasta el pasado curso académico, este documento regulaba los aspectos básicos generales de la Educación a todos los niveles, incluyendo ESO y Bachillerato. Tras la implantación de la nueva ley educativa este curso 2022/2023 en los cursos impares, la LOMLOE fija su currículum en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, es decir, donde se fijan las enseñanzas mínimas y la estructura de la ESO y del Bachillerato. Debido a que las competencias en Educación en España están compartidas entre el Ministerio de Educación y Formación Profesional y las Consejerías de Educación de cada Comunidad Autónoma, el Real Decreto anterior se concreta en la Comunidad de Castilla y León, en la cual nos encontramos, a través del DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

Respecto a la LOMCE, ésta fija su currículum en el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria y Obligatoria y del Bachillerato. Y éste Real Decreto se concreta en la Comunidad de Castilla y León a través de la ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

Como bien es sabido, posterior a estas concreciones curriculares, la siguiente institución que aparece en orden descendente es el Centro Educativo, en nuestro caso los institutos de Educación Secundaria y Bachillerato, quienes han de concretar el currículum oficial a través del Proyecto Educativo de Centro (PEC) y de la Programación General de Aula (PGA). El siguiente eslabón de esta cadena es el Departamento de Matemáticas de cada centro educativo, quien ha de elaborar una Programación Didáctica conjunta para todas las asignaturas que imparten todos los profesores que constituyen dicho departamento. Por último, se encuentra el propio docente de la materia, éste ha de condensar toda la información que se encuentra en los documentos legislativos e institucionales anteriores para elaborar su Programación Didáctica de Aula, donde se recogen todas las Unidades Didácticas de todos los temas que va a impartir en ese curso escolar. En este último punto es donde se encuentra la Propuesta Didáctica que se elabora en este Trabajo de Fin de Máster, dirigida a la enseñanza de la integral, más concretamente, la integral definida en el aula.

Con respecto al tema del cálculo integral, como ya hemos comentado, aparece por primera vez en la etapa educativa en el segundo curso de Bachillerato. Concretamente, aparece en las dos modalidades de Bachillerato siguientes: en Matemáticas II y en la rama de Ciencias Sociales, en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, en ambas al final del bloque dedicado a la rama de Análisis. En cada uno de ellos se proponen puntos de vista algo distintos: en el bachillerato científico se propone una enseñanza más técnica, centrada en los conceptos y sus propiedades. En cambio, el bachillerato de Ciencias sociales da mayor importancia a la aplicación de los contenidos teóricos y a la resolución de problemas que propongan situaciones en contextos reales.

En la nueva ley educativa, además de las competencias clave, han aparecido unas nuevas competencias, competencias específicas, llamadas así porque son las específicas para cada materia, éstas corresponden al segundo nivel de concreción de las competencias clave, siendo estas relativas a cada etapa educativa, en nuestro caso, el bachillerato. Las competencias específicas se concretan a partir de las competencias claves, y éstas a su vez a partir de los descriptores operativos, que concretan el progreso esperado en la adquisición de cada competencia clave.

En la LOMCE aparecían las competencias clave que todo alumno debería haber adquirido al finalizar la etapa educativa en cuestión. Éstas siguen encontrándose presentes en la nueva ley educativa, LOMLOE, aunque con nombres diferentes y estructuradas de distinta forma, pero también se han incorporado los descriptores operativos, que concretan el progreso esperado en la adquisición de cada competencia clave. Los descriptores operativos y las competencias clave definen el perfil de salida del alumno. Pero además de éstas competencias clave, con la LOMLOE, han aparecido unas nuevas competencias, las competencias específicas, llamadas así porque son las específicas para cada materia. Por tanto, tal y como aparece en el Bocyl de Castilla y León, es decir, en el DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre, Pág. 50083:

> *Los descriptores operativos de las competencias clave son el marco de referencia a partir del cual se concretan las competencias específicas, convirtiéndose así éstas en un segundo nivel de concreción de las primeras, ahora sí, específicas para cada materia.*

Tal y como se afirma en en el DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre, Pág. 50083, en las asignaturas de Matemáticas I y II, las competencias específicas se agrupan en torno a cinco bloques competenciales, según su naturaleza. Además se afirma lo siguiente:

La continuidad de estos bloques con los de la Educación Secundaria Obligatoria, permitirán al alumnado construir conocimientos sólidos basados en la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos, además, permitirán desarrollar de forma satisfactoria las destrezas de representación y comunicación, junto con las destrezas socio afectivas.

La ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo, propone para cada uno de los contenidos una serie de criterios de evaluación, que se concretan a su vez a través de los estándares de aprendizaje. Estos constituyen un conjunto de indicios que le permiten saber al docente si el estudiante ha adquirido los conocimientos suficientes sobre ese contenido, a la vez que determinan en qué dirección ha de enfocarlos.

En cuanto a los contenidos para Matemáticas II (relativos al tema que nos ocupa) son:

- Primitiva de una función. La integral indefinida.
- Técnicas elementales para el cálculo de primitivas: integración por partes, cambio de variable, y descomposición en fracciones simples de funciones racionales cuyo denominador tenga sus raíces reales.
- La integral definida. Teoremas del valor medio y fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow.
- Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.

Los criterios de evaluación asociados a estos contenidos son:

3. Calcular integrales de funciones sencillas aplicando las técnicas básicas para el cálculo de primitivas.
4. Aplicar el cálculo de integrales definidas en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables y, en general, a la resolución de problemas.

Los estándares de aprendizaje evaluables asociados a estos criterios de evaluación son:

3.1. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.
4.1. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.
4.2. Utiliza los medios tecnológicos para representar y resolver problemas de áreas de recintos limitados por funciones conocidas.

En cuanto a los contenidos para Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II son:

- Concepto de primitiva. Cálculo de primitivas: Propiedades básicas. Integrales inmediatas.
- Cálculo de áreas. La integral definida. Regla de Barrow.

Los criterios de evaluación asociados a estos contenidos son:

3. Aplicar el cálculo de integrales en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables utilizando técnicas de integración inmediata.

Los estándares de aprendizaje evaluables asociados a estos criterios de evaluación son:

3.1. Aplica la regla de Barrow al cálculo de integrales definidas de funciones elementales inmediatas.
3.2. Aplica el concepto de integral definida para calcular el área de recintos planos delimitados por una o dos curvas.

A diferencia de la estructura que se ha seguido en la LOMCE, en la LOMLOE, el nivel de desarrollo de cada competencia específica vendrá determinado por el grado de consecución de los criterios de evaluación con lo que se vincula, por lo que estos han de entenderse como herramientas de diagnóstico en relación con el desarrollo de las propias competencias específicas. A su vez, los contenidos se han formulado integrando conocimientos, destrezas y actitudes cuyo aprendizaje resulta necesario para la adquisición de las competencias específicas. Por ello, a la hora de su determinación se han tenido en cuenta los criterios de evaluación, puesto que estos últimos determinan los aprendizajes necesarios para adquirir cada una de las competencias específicas. (DOCV Num.190; Pág. 50083). En Matemáticas, los contenidos se estructuran en seis bloques, denominados sentidos. La integral se encuentra enmarcada en el sentido de la medida, tanto en el bachillerato de Ciencias y Tecnología como en el de Humanidades y Ciencias Sociales.

En cuanto a los contenidos para Matemáticas II son:

- Interpretación de la integral definida como el área bajo una curva.
- Cálculo de áreas bajo una curva: técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Integración por partes, cambio de variable en casos sencillos y racionales con raíces simples.
- Técnicas para la aplicación del concepto de integral a la resolución de problemas que impliquen cálculo de superficies planas o volúmenes de revolución.

Y en cuanto a los de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, estos son:

- Interpretación de la integral definida como el área bajo una curva.
- Técnicas elementales para el cálculo de primitivas: integrales inmediatas. Aplicación al cálculo de áreas.

En cuanto a los criterios de evaluación, en una u otra asignatura, no aparecen explícitamente.

Haciendo una comparativa con las dos modalidades de Bachillerato, con respecto la LOMLOE, se puede apreciar que en los contenidos, en la asignatura de Matemáticas II se da un enfoque más técnico y científico en la enseñanza de la integral, buscando su aplicación en campos como la física, la química o la biología. Además, parece que hay un estímulo mayor en que los estudiantes adquieran conocimientos sobre métodos numéricos, mientras que en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales se enfatiza el aprendizaje de la integral en contextos económicos, sociales y empresariales. A su vez se le da mayor importancia al cálculo de primitivas, esto entra en concordancia con lo expuesto anteriormente, en el sentido de que el bachillerato de ciencias sociales da mayor importancia a la aplicación de los contenidos teóricos y a la resolución de problemas que propongan situaciones en contextos reales. Este hecho se hace aún más notorio en los criterios de evaluación de la LOMCE, donde se aplican sólo técnicas de integración inmediata en el cálculo de integrales.

Tras enunciar los contenidos en estas dos leyes educativas, quizás puede observarse que la LOMCE promueve un enfoque más tradicional en la enseñanza del concepto de integral. Enfatizando más la resolución de problemas de manera algorítmica y la aplicación directa de fórmulas. Se hace mayor hincapié en calcular integrales utilizando métodos específicos, como la integración por partes, fracciones simples o la regla de Barrow, entre otros. Sin embargo, con la LOMLOE se aprecia un mayor enfoque competencial. Se busca desarrollar en los estudiantes habilidades y competencias matemáticas que puedan aplicar en diversos contextos de la vida real, es decir, los problemas aparecen contextualizados, en un determinado marco que le puede ser más agradable al alumnado. Además, con las Situaciones de Aprendizaje se promueve la interdisciplinariedad, la integración de las matemáticas, en particular, de la integral en otras áreas del conocimiento, como la física, la economía o la biología, mostrando así su relevancia en las diferentes disciplinas y fomentar una comprensión más amplia de su uso. Por último, también se fomenta el aprendizaje basado en problemas, donde los estudiantes abordan situaciones reales que requieren el uso de la integral para su resolución.

Todavía no hay demasiadas evidencias de si la LOMLOE hace mayor hincapié en el estudio de la integral definida que en el cálculo de primitivas que la LOMCE. Como no han salido libros de Bachillerato donde poder contrastarlo, o yo, al menos, no he tenido acceso a ellos, no he podido argumentar con rigor y precisión las posibles diferencias.

A pesar de ello, sí parece que ha habido cambios que se han producido en la enseñanza de las matemáticas en los últimos años que pueden llevar a este hecho. En el enfoque tradicional, se solía dar un mayor énfasis al cálculo de primitivas, también conocido como antiderivadas. Se enseñaban técnicas específicas para encontrar la primitiva de una función, como la regla de integración por partes. Este enfoque se centraba más en el aspecto simbólico y algebraico de las integrales. Sin embargo, en los últimos años ha habido una tendencia hacia un enfoque más amplio y contextualizado en la enseñanza de las matemáticas, y parece ser que esto se refleja en la LOMLOE. Se busca que los estudiantes entiendan la integral como una herramienta para resolver problemas de la vida real, y se promueve el uso de la integral definida en situaciones prácticas. La integral definida, como sabemos, se utiliza para calcular áreas, volúmenes, longitudes de arcos, así como para modelizar situaciones físicas o económicas. Se le da mayor importancia al concepto de integral por acumulación y a la interpretación geométrica de la integral definida. Además, se busca que los estudiantes sean capaces de utilizar métodos numéricos, como la regla del trapecio o la regla de Simpson, para aproximar el valor de una integral definida cuando no es posible encontrar su valor exacto. En resumen, se ha observado una tendencia hacia un enfoque más contextualizado y aplicado de la integral definida en la enseñanza de las matemáticas en los últimos años.

2.2. La integral desde una perspectiva didáctica: La integral en los libros de texto.

En la práctica diaria de la enseñanza, aparte de la legislación y de los métodos de enseñanza del docente, pueden influir considerablemente los libros de texto que se utilizan para llevar a cabo el proceso de aprendizaje y enseñanza. Debido al tipo de énfasis que el texto da a determinados conceptos, la profundidad con que se discuten los mismos, las representaciones que muestra, los problemas y ejercicios que propone, el lenguaje que utiliza, etc, puede generar en los estudiantes diferentes tipos de obstáculos.

Se va a realizar una revisión de los libros de texto de bachillerato para saber cómo se presenta en ellos el concepto de integral. Y cómo realizan el estudio de la integral definida y el cálculo de primitivas, en cuál de estos aparece antes o después. Se echará un vistazo a cómo abordan los problemas y qué tipos de problemas aparecen. Los libros de texto que se han escogido para dicho análisis pertenecen todos a la misma editorial, Anaya, pues no contaba con libros de otras editoriales. Son cuatro textos de bachillerato, correspondientes al segundo curso de bachillerato o al antiguo C.O.U. Tres de ellos son de la asignatura de matemáticas de la rama de Ciencias y Tecnología y cada uno de ellos pertenecen a una etapa educativa distinta, por lo que se va a poder apreciar la evolución que han ido sufriendo los libros de texto de una misma editorial. El otro texto es de la rama de Ciencias Sociales. A continuación indicamos la referencia correspondiente a cada uno de ellos:

- Guzmán, M de y Colera J. (1989). *Matemáticas I, C.O.U.* Madrid: Anaya.
- Guzmán, M de y Colera J. (1989). *Matemáticas II, C.O.U.* Madrid: Anaya.
- Colera, J. y Olivera, M. J. (2011). *Matemáticas II, Bachillerato.* Madrid: Anaya.
- Colera, J., Olivera, M. J., Colera, R. y Colera Cañas J. (2016). *Matemáticas II, Bachillerato.* Madrid: Anaya.

Los tres primeros libros los he extraído de la biblioteca del departamento de *Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología* de la Universidad de Valladolid. El cuarto libro lo he podido consultar en las prácticas que realicé en los meses de febrero y marzo en el instituto *I.E.S. Ribera de Castilla* de Valladolid.

En primer lugar, mencionar que los dos libros de C.O.U corresponden a lo que actualmente sería el bachillerato de ciencias y tecnología y el bachillerato de ciencias sociales, respectivamente. A continuación, vamos a enunciar algunas diferencias con respecto a los textos de C.O.U.

En el texto de Matemáticas I, el bloque de integrales se dividía en tres temas: Integral Definida, Cálculo de primitivas y Aplicaciones de la Integral, en este orden. Considero, por tanto, que el cálculo integral se daba con absoluto rigor y precisión, esto se evidencia en el gran desarrollo de la integral definida, donde además de explicar la teoría con todo detalle, aparecen demostraciones de algunas propiedades de la integral y de teoremas como el teorema fundamental del cálculo y de la regla de Barrow. Además, en el texto aparece, aunque sin justificar, la regla de Simpson de aproximación numérica. En cuanto al cálculo de primitivas, aparece con todo rigor definido el cambio de variables en integrales tanto definidas como no, y se realizan múltiples ejemplos para practicar estos métodos. Además, en dicho texto aparecen los métodos de integración por partes, donde aparece la demostración de éste, así como la integración de funciones racionales en los casos en los que el denominador es de primer grado, éste sólo tiene raíces sencillas, o tiene raíces reales múltiples o, finalmente, tiene raíces imaginarias. Por último, en este libro aparece un último tema titulado: Aplicaciones de la Integral, donde se ven aplicaciones de la integral a la física, como la atracción gravitatoria ejercida sobre un punto, las aplicaciones geométricas de la integral como el volumen de un cuerpo de revolución, la longitud de un arco de una curva probado con absoluto rigor) o el área de una superficie de revolución.

Sin embargo, en el libro de Matemáticas II, correspondiente al bachillerato de Ciencias sociales, se trata la integral definida y el cálculo de primitivas, también en este orden y compactados en un único tema, pero sin tanta profusión como en el texto anterior. Aunque se explica de forma rigurosa la integral definida y las aplicaciones de esta junto con el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow, se hace más hincapié en los métodos de cálculo de primitivas y no se tratan en este texto, las aplicaciones del cálculo integral, como sí lo hacía el primero.

Con respecto a los ejercicios, he podido observar que a medida que explicitan la teoría, aparecen varios ejemplos (sobre todo en el texto de Matemáticas I) que muestran cómo aplican los contenidos teóricos. Posteriormente, se encuentran varios ejercicios para que el alumno pueda trabajar. Y al final del tema, se muestra un compendio de problemas relativos a todo el contenido teórico del tema, lógicamente la dificultad de éstos es gradual, es decir, va aumentando progresivamente. He visto que no hay prácticamente ningún ejercicio o problema contextualizado en ninguno de los dos textos. Únicamente se limitan a pedir que calculen el valor explícito de una determinada función o que hallen el área comprendida por unas determinadas funciones. En el texto de Matemáticas I únicamente he encontrado un problema contextualizado en el tema de la integral definida, que es el siguiente:

> Dos móviles, A y B, situados a 2 km de distancia, salen simultáneamente en la misma dirección y ambos con aceleración constante. La aceleración de B, el más lento, es de $0,32cm/s^3$. Se encuentran a 3,025 km del punto de salido de B. Calcula, suponiendo que salen en estado de reposo (velocidad nula) y tomando como origen el punto de partida de B:
>
> a) El tiempo que tardan en encontrarse.
> b) La aceleración de A.
> c) Velocidades de ambos móviles en el momento de encontrarse.

Este es el ejercicio 65 de la página 342. Después, en el tema de aplicaciones de la integral aparecen 3 problemas contextualizados: el 1, el 46 y el 47. En el texto de Matemáticas II aparecen únicamente cuatro problemas contextualizados en la página 186. Aunque al principio del primer tema si que aparecen en ambos libros tres ejemplos contextualizados, donde se muestran las gráficas de las ganancias de una determinada compañía, la velocidad media de un ciclista y la potencia en Kw que se está empleando en un local, respectivamente.

En cuanto a los otros dos libros, el tercero de ellos, Colera y Olivera (2011), está dividido en dos temas: Cálculo de Primitivas e Integral Definida. Y en el cuarto, Colera, Olivera, Colera y Colera Cañas (2016), el estudio del cálculo integral viene compactado en un único tema pero siguiendo la misma estructura que el anterior. Por tanto, ya tenemos una primera diferencia con respecto a los textos anteriores. En cuanto al cálculo de primitivas, sendos textos siguen la misma estructura: definición de primitiva, propiedades, integral de funciones potencia, integrales trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Posteriormente, nos aparece la regla de la cadena y el método de integración por partes. Además, en Colera y Olivera (2011) aparece también la integración de funciones racionales, aunque sin el caso del denominador con raíces imaginarias como aparecía en el texto de C.O.U. Sin embargo, con respecto a la integral definida si que se notan más diferencias entre un libro y otro. Colera y Olivera (2011), sigue una estructura similar a los libros de C.O.U, comienza tratando la aproximación al valor del área bajo a una curva con las sumas de Riemann, da una demostración a la regla de Barrow y al Teorema fundamental del cálculo y trata los volúmenes de revolución. Sin embargo, el otro se limita a dar la siguiente definición de integral:

El área entre la gráfica de la función $y = f(x)$ y el eje OX, en el intervalo $[a, b]$ se designa:

$$\int_a^b f \;\; \textit{o bien} \;\; \int_a^b f(x)dx. \;\; \textit{Se lee integral entre } a \textit{ y } b \textit{ de } f.$$

Se enuncia el teorema fundamental del cálculo y se demuestra también la regla de Barrow.

En cuanto a los ejercicios, tras haberse explicado los conceptos y métodos teóricos se recopilan varios ejercicios resueltos para que el alumno visualice cómo se resuelven los ejercicios usando la teoría explicada. Y, al final de la página, aparecen uno o dos ejercicios propuestos para el alumno, que son de igual nivel a los ejercicios resueltos que aparecen en la misma página. Al finalizar el tema, se recopilan una serie de ejercicios resueltos de nivel mayor a los anteriores (10-15 por tema). Por último, se muestra al alumno una gran selección de ejercicios y problemas para que el alumno realice. Al igual que pasaba con los libros de C.O.U los ejercicios contextualizados brillan por su ausencia, en uno de los textos de un total de 75 ejercicios que se dejan para que el alumno resuelva, únicamente aparecen dos problemas contextualizados. También de desplazamiento de móviles. Por lo que podemos observar que no se ha hecho aún hincapié en la importancia de contextualizar los problemas en las leyes educativas anteriores. Veremos si el año que viene con la nueva ley de educación, LOMLOE, se da un giro en este sentido a la formulación de los enunciados de los problemas y ejercicios. Dado que esta ley propone despojar a las matemáticas de su tratamiento algorítmico y mecánico para pasar a poner el enfoque en la comprensión y en el uso de las tecnologías.

He tenido acceso también a un libro de texto de segundo de Bachillerato de ciencias sociales, correspondiente a la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, correspondiente a tiempos de la LOGSE. La referencia del libro es la siguiente:

Colera, J., Olivera, J. (1998). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, Bachillerato.* Madrid: Anaya.

El tema de integrales denominado Introducción a las Integrales, unifica el tema de primitivas y la integral definida. En primer lugar, trata la Integral Definida, aunque no explícitamente, me explico, trata el concepto de área bajo una curva y la relación de esta con la integral entre a y b de la función f. Me ha sorprendido que muestra bastantes representaciones gráficas para mostrar cómo varía la función área $F(x) = \int_a^x f$ cuando la función $y = f(x)$ es constante y cuando no. Pasando después a dar una serie de propiedades, entre la cual se encuentra el Teorema Fundamental del Cálculo. Lógicamente, no se realiza la demostración de ésta como aparecía en algunos de los textos anteriores. Posteriormente, define el concepto de función primitiva de una función y propone una serie de reglas de cálculo de primitivas. Para conectar el teorema fundamental del cálculo con las reglas de cálculo de primitivas, muestra la regla de Barrow. Por último, proporciona una serie de aplicaciones de las integrales como el cálculo del área entre una curva y el eje de abscisas y el cálculo del área encerrada entre dos curvas.

Configuraciones de los problemas de los textos estudiados

Siguiendo los estudios de Contreras y Ordóñez (2006), Contreras, Ordóñez y Wilhemi (2010) y Ordóñez y Contreras (2003-2010), vamos a investigar qué configuraciones epistemológicas, de estos estudios, se encuentran en los libros de textos de nuestra investigación. Éstos, al realizar sus investigaciones, diferenciaban cinco sentidos o configuraciones epistémicas en los libros de texto con los que trabajaron en el estudio: geométrica, resultado de un proceso de cambio, inversa de la derivada, aproximación al límite y algebraica. Vamos a desarrollar a continuación cada una de estas configuraciones epistémicas acompañándolas de ejemplos donde se vean el uso de éstas en determinados problemas y/o ejercicios:

- **Configuración geométrica:** Desde esta configuración epistemológica, la integral se concibe como el cálculo del área bajo o una curva (o un volumen). Se establece una relación directa entre la integral y el concepto de área, donde la integral representa la acumulación de infinitos segmentos con una determinada área. Esta perspectiva se basa en el teorema fundamental del cálculo, que establece una conexión entre la integral y la antiderivada de una función.

  Ejemplo: Calcular el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [0,2].

- **Configuración como proceso de cambio:** Esta configuración epistemológica se centra en ver la integral como una medida de cambio. Se considera que la integral representa la acumulación de cambios infinitesimales en una función a lo largo de un intervalo dado. Desde esta perspectiva, la integral se vincula con el concepto de flujo, como la cantidad de cambio que se acumula en el tiempo.

  Ejemplo: Calcular la cantidad de agua que se acumula en un tanque en función del tiempo, si el flujo de entrada de agua está dado por la función $f(t) = 2t$, donde t representa el tiempo en segundos.

- **Configuración como inversa de la derivada (antiderivada):** Esta configuración epistemológica se basa en la relación inversa entre la integral y la derivada. Según el teorema fundamental del cálculo, la derivada y la integral son operaciones inversas una de la otra. Desde esta perspectiva, la integral se concibe como la antiderivada de una función, lo que implica encontrar una función cuya derivada sea igual a la función original.

  Ejemplo: Encontrar una función cuya derivada es $f(x) = 3x^2$.

- **Configuración como proceso de paso al límite:** Esta configuración se basa en el concepto de límite y se utiliza en el desarrollo formal del cálculo integral. La integral se define como el límite de una suma de áreas de rectángulos cada vez más pequeños. Se utiliza el concepto de límite para considerar la acumulación de infinitos términos y obtener un resultado preciso.

Ejemplo: Calcular la integral definida $\int_0^1 (2x^2 + 3)dx$ utilizando una suma de Riemann.

- **Configuración algebraica:** Esta perspectiva se centra en el cálculo simbólico y algebraico de la integral. La integral se trata como una operación algebraica que sigue reglas específicas, como la linealidad, la regla de la cadena, la regla del cambio de variable y la regla de integración por partes. Esta configuración epistemológica se enfoca en la manipulación algebraica y simbólica de las expresiones integrables.

  Ejemplo: Calcular la integral $\int x^3 dx$ utilizando la regla de integración para potencias.

Cabe destacar que estas configuraciones epistemológicas no tienen por qué ser mutuamente excluyentes, de hecho, diferentes enfoques pueden combinarse en la enseñanza y comprensión de la integral. Cada una de estas perspectivas proporciona una forma de abordar y entender la integral desde un marco conceptual específico, lo que enriquece la comprensión de su significado y de sus aplicaciones. Además, de que estas son relativas a cómo se enuncian los problemas o ejercicios no a la manera de resolverlos.

De acuerdo con los investigadores, la configuración epistémica de aproximación al limite aparece en tres de ellos (los tres primeros) como introducción a la integral definida pero no se pone en práctica en ninguno de los ejercicios propuestos en los manuales.

En los ejercicios sobre cálculo de integrales propuestos en los libros de textos responden en su mayoría a configuraciones epistémicas de tipo geométrico, a la inversa de la derivada y de tipo algebraico. Aunque no aparecen ejercicios de configuración epistémica del tipo resultado de proceso de cambio, si que aparecen ejemplos de ellos al comienzo de los temas en todos los libros. Por ejemplo, el cálculo de la potencia eléctrica que hay en el funcionamiento de una vivienda a partir de la gráfica potencia/tiempo, o las ganancias de una compañía durante los doce meses de año, a partir de la gráfica dinero/meses. Únicamente en Colera y Olivera (2011) se encontraron una serie de cuestiones teóricas, donde ponen de manifiesto si realmente el estudiante ha comprendido el contenido teórico. A continuación, muestro una de las cuestiones que aparecen:

Sea F una función definida en $[0, \infty)$ tal que $F(x) = \int_0^x ln(2+t)dt$. Analiza si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:
a)$F(0) = ln(2)$.
b)$F'(x) = \frac{1}{2+x}, \quad x \geqslant 0$.
c)F es creciente en su dominio.

En cuanto a los ejercicios, ejemplos y problemas en el texto de Colera y Olivera (1998), para comenzar el tema, se muestran dos ejemplos formulados de acuerdo a la configuración de proceso de cambio: uno relativo al consumo de energía eléctrico acompañado de una gráfica potencia/tiempo y otro de dos trenes acompañado de una gráfica velocidad/tiempo. Al mostrar los contenidos teóricos, aparecen una serie de ejemplos para que el alumno pueda visualizar la idea de estos. Y al final del tema, aparecen una serie de ejercicios resueltos que pueden considerarse de tipo algebraico pues se menciona explícitamente la regla que hay que utilizar para llevar a cabo su resolución. Al igual que en los demás textos, los ejercicios que más abundan son los de configuración geométrica, pidiendo calcular el área comprendida entre una curva y unas rectas, y de configuración algebraica. También aparecen varios ejercicios en lo que se visualiza la integral como inversa de la derivada. Por ejemplo:

Hallar $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = 3x^2 - 4x + 7$ y que $f(5) = 8$.

Se percibe un ejercicio que puede considerarse como proceso de paso al límite, que es el siguiente:

> Comprueba, representando $y = x+1$ y contando cuadraditos para evaluar las áreas, que si $f(x) = x + 1$, entonces $\int_0^x f = \frac{x^2}{2} + x$.

Al final del tema, al igual que aparecía en Colera y Olivera (2011), se encuentran una serie de cuestiones teóricas donde se ponen de manifiesto si realmente el alumno ha comprendido el contenido teórico que se ha llevado a cabo en el desarrollo del tema. Se proponen tres problemas contextualizados. Uno de ellos es el siguiente que lo plasmo aquí por ser diferente a los que se recogen en otros textos consultados:

> A las nueve de la mañana surge un rumor en una ciudad que se difunde a un ritmo de $e^{2t} + 1000$ personas/hora. Sabiendo que t representa el número de horas transcurridas desde la aparición del rumor, calcula el número de personas que lo habrán oído entre las diez y las doce de la mañana.

Investigaciones sobre libros de texto

Después de hablar de las investigaciones de Contreras y Ordoñez (2006), Contreras, Ordoñez y Wilhemi (2010) y Ordoñez y Contreras (2003-2010) sobre los libros de texto y dejando atrás la investigación realizada por nuestra cuenta con los textos de la editorial Anaya consultados pasamos a describir conclusiones a las que llegan algunas investigaciones en torno a los libros de textos que resultan interesantes para los cometidos de este trabajo.

Tal y como afirma Aranda (2015) el estudio realizado por los autores anteriores fue completado por Porres (2011). El autor, siguiendo los criterios utilizados Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010), analizó en su tesis doctoral distintos aspectos sobre la integral de Darboux de once manuales de Matemática aplicada a las ciencias Sociales II, correspondientes al segundo curso de Bachillerato, de la Comunidad de Castilla y León. Porres (2011) considera que sólo dos textos dan un tratamiento aceptable, porque hacen una introducción histórica, enlazan con el cálculo de figuras conocidas, utilizando representaciones gráficas. También considera que la mayoría de los textos no dan un tratamiento aceptable a la integral definida por diversas razones: no incluyen los números ni las aproximaciones en relación con el cálculo de áreas; no enlazan con el cálculo de áreas de superficies delimitadas por curvas de determinado tipo; confunden la integral de Riemann con la de Darboux; no detallan suficientemente la sucesión de particiones ni los diámetros de las mismas. Por otra parte, muchos ignoran el teorema fundamental del cálculo, y los que lo tratan lo demuestran sin el necesario rigor, además, tienen escasas representaciones gráficas, la motivación histórica es pobre cuando existe y las nuevas tecnologías tienen escasa presencia en los textos.

Milevicich (2008) observa tras un estudio curricular de contenidos en la secundaria que la secuencia de contenidos en la disciplina de Cálculo Integral sigue, en general, el orden siguiente:

1. Cálculo de primitivas.
2. Métodos de integración.
3. La integral definida. Regla de Barrow.
4. Aplicaciones de la integración: cálculo de áreas y volúmenes.

Esto implica considerar la integración, principalmente, como la operación inversa de la diferenciación. De esta manera el objetivo que se persigue en la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina matemática es adiestrar a los estudiantes en el cálculo de primitivas y ello a base de repetir muchos ejercicios y problemas, exigiendo un considerable y progresivo nivel de destreza, por lo que se facilitan, incluso, trucos y recetas que contribuyan a ser más eficaces en la obtención del resultado. Así en los textos analizados aparecen frases como: "el truco que facilita el proceso consiste en multiplicar numerador y denominador por" (Milevicich, 2008, pp.333). Muchos de estos trucos o recetas son teoremas de gran relevancia en las Matemáticas pero que no se enseña de forma rigurosa al estudiante por si le causa temor o le produce más rechazo, provocando así que el alumno supere la asignatura sin haber aprendido nada o haber pensado mínimamente sobre ello. Simplemente les adiestramos en la resolución de ejercicios y problemas como si quisiéramos competir con los ordenadores para ver cual de los dos tarda menos tiempo en resolver el problema de forma efectiva.

En la misma línea se encuentra la investigación de Otal (2015), quien realiza un estudio de las principales editoriales de libros de texto que siguen los alumnos de Bachillerato, como Anaya y Santillana. Y observa que la enseñanza tradicional de la integral definida en la escuela basa su proceso de aprendizaje y enseñanza en el siguiente orden didáctico:

- En primer lugar, se estudian y se practican las técnicas algebraicas para el cálculo de primitivas en una primera unidad didáctica dedicada al cálculo de primitivas.
- En segundo, lugar, se institucionaliza el objeto matemático en una segunda unidad didáctica consecutiva a la anterior siguiendo el siguiente orden expositivo por parte del profesor: tras definir el área sobre una curva y las sumas superior e inferior de Riemann, se presentan el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow.

Con este desarrollo, lo que tratan de valorar los profesores es si el alumno comprende el significado de la integral definida y la relaciona con el cálculo de primitivas. Se desea averiguar con este criterio si los alumnos son capaces de aplicar el cálculo de primitivas de funciones relativamente sencillas al cálculo de áreas que acaban de estudiar.

Otal (2015) observa también que la editorial Mc Graw Hill (Rodríguez y Soler, 2003) opta por incluir en su programación una unidad didáctica denominada *La Integral*, previa a la unidad didáctica del cálculo de primitivas. Donde se inicia hablando del área de la función sobre el eje OX justificando su relación con la derivada mediante un ejemplo, para después tratar la función primitiva, la integral definida y sus propiedades e institucionalizar las funciones integrables, el teorema fundamental del cálculo integral y la regla de Barrow, y para finalizar, proporciona las técnicas para el cálculo de áreas y volúmenes de revolución.

Resumiendo un poco los resultados que se han desarrollado a lo largo de la sección en la que nos encontramos, podemos concluir que en general, la introducción del objeto matemático de la integral definida no se justifica ante el alumno como la respuesta a un problema, sino que se presenta como una técnica de aplicación del cálculo de primitivas. Sobre todo esto se observa en mayor medida en los textos más contemporáneos. Veremos si con la nueva ley de educación esto sigue el mismo camino o se da un giro para mejor.

2.3. Los efectos de la EBAU sobre la enseñanza de la integral

Cabe preguntarse si además de los efectos anteriores, la Evaluación del Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU), juega a favor de aumentar el enfoque procedimental que los alumnos tienen con el concepto de integral. Parece ser, tras algunas investigaciones, que mencionaré en esta sección, que la EBAU, o la PAU, puede influir significativamente en la formación que reciben los estudiantes. Parece que en determinados institutos, si no es en todos, el curso de segundo de bachillerato únicamente está destinado a la superación de la prueba EBAU. En estos casos, en la asignatura de Matemáticas, la docencia en Bachillerato se deja influenciar por el tipo de ejercicios o problemas que se preguntan en las pruebas de acceso en la universidad. En muchos casos, el docente únicamente está para adiestrar al alumno a la resolución de problemas de tipo EBAU y dar recetas o fórmulas que sirva al alumnado a obtener mejor resultado en dicha prueba. Pero no se explican los conceptos de manera rigurosa, o si se hacen, no se le da la importancia que realmente merecen. El alumno, por tanto, pasa a la Universidad con un compendio de fórmulas y métodos de resolución de ejercicios sin saber para qué sirven o el por qué de estos. Lo que provocará que el alumnado llegue con un nivel muy inferior al que se espera en el acceso a la Universidad. De aquí surge la necesidad de analizar cómo aparecen las cuestiones relacionadas con la integral en la misma.

Para ello, voy a apoyarme en los estudios realizados por Contreras y Ordóñez (2006), Contreras, Ordóñez y Wilhemi (2010) y Ordóñez y Contreras (2003, 2010), en el periodo 1999-2008 en las universidades andaluzas, al considerar que los resultados obtenidos por estos autores podían extrapolarse a otras comunidades entre la que nos encontramos. El objetivo del análisis realizado por estos autores fue establecer si las pruebas de acceso a la Universidad, tenían algún tipo de restricción institucional respecto al objeto de integral definida y cómo podían influir esas posibles restricciones en el aula y en las concepciones de los estudiantes.

Los autores obtuvieron como resultado de sus investigaciones que la integral se utilizaba desde cuatro sentidos distintos: Desde un punto de vista geométrico, como resultado de un proceso de cambio, como inversa de la derivada y como aproximación al límite. Tras esto, los autores analizaron la incidencia de los diferentes sentidos en las pruebas de acceso a la Universidad, y encontraron que en el 77 % de las pruebas analizadas aparece la integral definida, y que en el 32 % de los casos aparece el sentido algebraico, además, los sentidos como aproximación al límite y como resultado de un proceso de cambio no aparecieron. Además en la mayoría de casos, se trata de un uso directo, es decir, se hace explícito el sentido que hay que usar en cada ejercicio que hay que realizar.

Según los autores, los estudiantes llegan a la universidad conociendo solamente el sentido geométrico de la integral y habiendo realizado ejercicios únicamente de cariz algebraico.

Esto concuerda con Zamora (2014), quien en su tesis doctoral realiza un análisis exhaustivo de los enunciados de las pruebas de acceso a la universidad en la Comunidad de Castilla y León entre 1995 y 2009, atendiendo especialmente a la relación y la influencia de estas en el currículo de Bachillerato. El autor afirma que en dichas pruebas no se evalúa todo el conocimiento que se debería abordar en segundo de Bachillerato. Además, se da cuenta de que a medida que pasan los años el nivel de los enunciados de los problemas y los ejercicios va disminuyendo significativamente. El autor observa que en los ejercicios se repiten en mayor medida los niveles de representación, seguidos de los niveles de conexión y a penas aparecen los niveles de reflexión, únicamente se presenta en dos ejercicios (Zamora, 2014, pp. 241).

Tal y como se advierte en Granado (2022), es apreciable que en las pruebas EBAU abunda el conocimiento de tipo procedimental frente al conceptual. Prácticamente en Selectividad no aparece ningún problema o ejercicio que demuestre que el alumno ha comprendido realmente el concepto de integral. Sumado a esto encontramos la alta frecuencia con la que se repiten los ejercicios de cálculo de primitivas por los métodos clásicos o los ejercicios de integrales definidas donde únicamente tienen que aplicar la regla de Barrow, lo que refuerza el hecho de que se considere la resolución algebraica. Cabe observar que aunque en la EBAU se pregunte por el enunciado de algunos de los teoremas principales del curso, o al menos en algunas comunidades, si no es en todas, si los alumnos entienden realmente lo que el enunciado del teorema en cuestión quiere decir, la pretensión que éste tiene o la importancia que este puede ocasionar. Me gustaría saber cuántos estudiantes pueden vislumbrar la importancia del teorema fundamental del cálculo, o si al menos de éste pueden extraer la relación existente entre la derivada o la integral. O solamente se lo han estudiado de memoria sin haber pensado por un momento en su transcendencia.

No se debería permitir que la docencia en el Bachillerato esté tan condicionada por el tipo de ejercicios que se preguntan en las pruebas de acceso a la universidad. Los alumnos han de adquirir una serie de conceptos y contenidos mínimos recogidos en el currículo educativo, no solamente de tipo procedimental. Los razonamientos lógico-formales, de argumentación o demostración apenas están presentes detrás de los enunciados que se proponen, algo que no está de acuerdo con los objetivos del Bachillerato que aparecen en las leyes educativas de estos años (Zamora, 2014).

Dando mi humilde punto de vista, quizás lo que se debería intentar modificar sería la estructura de las pruebas de acceso a la universidad, enfocándolas en mayor medida al futuro profesional al que cada alumno quiere dedicarse y no como son ahora un mero evaluador de los contenidos de Bachillerato, en verdad, ni siquiera eso. De esta manera, el docente en cuestión podría orientar su asignatura a mejorar la comprensión y el nivel de aprendizaje y enseñanza del alumnado.

Capítulo 3

Enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral

Después de haber realizado en capítulos previos una investigación sobre cómo se encuentra el aprendizaje del Cálculo Integral en el currículo de Bachillerato actualmente y cómo lo tratan los libros de texto más contemporáneos y más antiguos, vamos a mostrar en esta sección una serie de investigaciones que se han llevado a cabo en España, en su gran mayoría, pero también en todo el mundo, que respaldan nuestra postura tomada en la propuesta didáctica que aquí realizamos. Además, se discutirán algunos obstáculos tanto cognitivos como didácticos encontrados en la aplicación de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Integral, en particular, y del Análisis Matemático, en general. Y cómo se pueden mitigar.

3.1. Efectos de la enseñanza en el aprendizaje. Obstáculos epistemológicos.

Aldana (2011) afirma que el Análisis Matemático es una de las materias fundamentales de los planes de estudios universitarios. En este sentido, un número importante de investigaciones de tipo cognitivo en Didáctica de las Matemáticas se centran en el estudio de los problemas de aprendizaje del Análisis Matemático, realizando sus estudios bien en la etapa universitaria o bien en la etapa de secundaria y Bachillerato para poder mejorar la enseñanza y el aprendizaje en esta última y así los estudiantes accedan a la Universidad mejor preparados académicamente en esta disciplina. Dreyfus y Eisenberg (1990) señalan que el Análisis Matemático constituye el área de la matemática avanzada que más tiempo ocupa en la enseñanza institucionalizada actual.

Muchos son los conceptos propios del área del Análisis Matemático que han sido motivo de estudio por parte de algunos investigadores. Solo mencionaremos algunos de los realizados en España y que tratan de alguna manera el aprendizaje o la enseñanza del concepto de integral. En Azcárate (1996) se presenta una propuesta sobre el aprendizaje del concepto de integral a partir de la integración numérica de forma independiente y anterior al concepto de derivada. Por otro lado, en varias investigaciones de Camacho (2008) aparece un estudio de casos sobre el aprendizaje de la integral definida en diversos contextos.

En algunas de estas investigaciones se han identificado dificultades y errores persistentes en los estudiantes relacionados con el aprendizaje de la integral definida u otros conceptos matemáticos. Según los autores estos errores son debidos a que están asociados a imágenes débiles de los conceptos matemáticos, utilizándolos exclusivamente en un contexto algorítmico y/o memorístico y al estar relacionados con concepciones erróneas.

Tall y Vinner (1981) mencionan que la memoria del estudiante evoca algo que generalmente no es la definición del concepto, sino una imagen que el alumno hace de ese concepto. Esta imagen del concepto está formada por representaciones visuales, recuerdos de experiencias con el concepto y registro de ejemplos. La imagen del concepto es, entonces, toda la estructura cognitiva asociada a una noción matemática concreta, aunque no sea necesariamente coherente en todo momento ya que los estudiantes pueden evocar imágenes contradictorias en momentos distintos. Mientras que la definición del concepto, se refiere a una "*definición verbal, a un conjunto de palabras para especificar un concepto*" (Tall y Vinner (1981)).

De esta manera, cuando un estudiante se enfrenta a una tarea en relación a un concepto matemático, generalmente esperamos que la definición correcta le ayude en la resolución de la tarea. Sin embargo, no es eso lo que suele ocurrir, puesto que el estudiante no utiliza la definición y responde de acuerdo a la imagen del concepto que él se ha formado. Por tanto, el carácter de las imágenes, propiedades y procesos que integran la imagen del concepto puede llevar a la aparición de errores y/o consistencias. El conflicto entre la imagen del concepto y la definición del concepto significa la ausencia de una correcta comprensión de éste por parte del alumno.

Schneider (1988, 1989, 1991), citado por Artigue (1995), pretende conceptuar las derivadas y primitivas a partir de objetos mentales (en el sentido de Freudenthal) como área y volumen, cuando afirma:

> *Los problemas utilizados son en esencia problemas que tienen dimensión histórica y sirven en particular para traer a colación la presencia de las concepciones espontáneas de los estudiantes sobre representaciones mentales de la superficie (respectivamente volúmenes) como agrupaciones de segmentos (respectivamente superficies) comparables con la teoría de los indivisibles de Cavarieli en el siglo XVII (...) estas representaciones pueden convertirse en el obstáculo epistemológico denominado el obstáculo de la "heterogeidad de las dimensiones" (Schneider, 1991).*

En este contexto, Tall (1996) da a conocer un error que cometen sus estudiantes al calcular las sumas inferiores y superiores de la función $y = x^3$ en el intervalo $[1, 3]$, pues estos afirman lo siguiente: "Los rectángulos tienen una anchura que al disminuir, éstos se reducen a líneas cuyo área es cero y, por tanto, no pueden sumarse". Puesto que muchos estudiantes piensan que la suma de segmentos no puede dar un área o que la suma de áreas nulas no puede dar un valor no nulo para un volumen.

El concepto de obstáculo epistemológico apareció por primera vez en el trabajo de Bachelard en 1938, pero fue Brousseu (1989) quien lo introdujo en la didáctica de la matemática. Bachelard planteó la necesidad de romper con el paradigma de que los conocimientos son irrefutables; se requiere recurrir a las manifestaciones de los errores para corregirlos, evitando así que se integren como conocimientos poniendo en tela de juicio concepciones previas.

Estas reflexiones son fundamentales, teniendo en cuenta el papel que juegan las definiciones y las representaciones mentales en la comprensión y construcción de los conceptos matemáticos. En relación a las definiciones, éstas representan el conflicto entre la estructura de la propia Matemática y los procesos cognitivos necesarios para la adquisición de un concepto matemático por parte del sujeto (Vienner, 1991).

González A. (2006) en su tesis doctoral plantea que la dificultad que tiene el estudiante para comprender los conceptos y relacionarlos con conceptos previamente adquiridos es un problema que proviene del aprendizaje descontextualizado carente de significado y de las prácticas mecanicistas. Este problema se incrementa además en el curso de segundo de bachillerato, pues la actividad docente se limita únicamente a realizar problemas que suelen caer en las pruebas de acceso a la universidad, provocando así que la actividad docente se base en la resolución de problemas reproducidos algorítmicamente. Así, el alumno realiza los ejercicios de matemáticas como un proceso mecánico que no requiere ningún tipo de pensamiento. Además, menciona, siguiendo la investigación de Orton (1980), que los estudiantes tienen un nivel relativamente bueno en la manipulación de los algoritmos algebraicos que aparecen en los cálculos de primitivas de funciones y, sin embargo, presentan enormes dificultades en la conceptualización de los procesos relativos al límite asociados al concepto de integral definida y al uso de representaciones que aparecen en el cálculo de integrales y derivadas. Esto lo evidencia valiéndose del siguiente ejemplo: *Pocos alumnos fueron capaces de expresar de manera correcta que el valor exacto del área bajo una parte de una parábola se puede obtener como el límite de sumas de franjas rectangulares.* Orton afirma que muchos estudiantes demuestran saber lo que tienen que hacer, pero cuando se les pregunta acerca de su método no saben realmente por qué lo hacen de esa determinada manera.

Según Aranda (2015), el aprendizaje del concepto de integral definida presenta dificultades para los estudiantes que se manifiesta mediante la utilización mecánica, algorítmica y memorística de su definición: no logran establecer una conexión entre el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y analítico; tienen problemas para interpretar las gráficas de áreas bajo curvas cuando la gráfica de la función pasa de ser positiva a ser negativa, o presenta discontinuidades. De acuerdo con esto está Turégano (1998) quien señala que muchos estudiantes tienden a asociar la integral siempre como un área, por lo que debe ser positiva. No aceptan soluciones en las cuales el valor de la integral sea negativo.

Según menciona Milevicich (2008), la perspectiva de la concepciones de los alumnos es de fundamental importancia. A la hora de diseñar una propuesta de enseñanza y aprendizaje del cálculo integral, estos aprendizajes previos erróneos pueden condicionar el logro de los objetivos propuestos, por lo que se debe tenerlos muy presentes. Llorens y Santoja (1997) realizan valiosas consideraciones acerca de las concepciones erróneas de los alumnos. El primero de ellos se puede sintetizar de la siguiente forma:

> *Los estudiantes identifican integral con primitiva. En este sentido, en el cálculo de la integral, para ellos, no interviene ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico. Es, por tanto, un proceso puramente algebraico, más o menos complicado y, siempre, autocontenido, de modo que un alumno puede conocer distintos métodos de integración e, incluso, saber aplicarlos con cierta soltura y, al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlos al cálculo de un área o ignorar por completo qué son las sumas de Riemann.*

Lo que coincide con Milevicich (2008), donde se menciona que la falta de asociación entre la integral definida y el análisis de convergencia, que se pone de manifiesto sobre todo cuando, al estudiar las integrales impropias, a la mayor parte de los estudiantes les sorprende enormemente que una integral pueda ser divergente.

Aldana (2011), a su vez, comenta que esta dificultad que presentan los estudiantes se debe principalmente a la utilización mecánica, algorítmica y memorística que los alumnos otorgan al concepto de integral definida y a la falta de conexión entre el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y analítico que estos presentan.

En segundo lugar, los alumnos identifican las integrales definidas con la regla de Barrow, incluso cuando ésta no puede aplicarse. Es el caso de los resultados encontrados por Mundy (1984), donde un porcentaje bastante alto de estudiantes no supo responder a la pregunta: ¿Por qué $\int_{-1}^{1} x^{-2}dx \neq -2$? Esto pone en evidencia que el estudiante no sólo desconoce las condiciones para poder aplicar la Regla de Barrow, sino que además muestra una desconexión entre la definición del concepto de integral definida y la imagen particular que tiene este concepto matemático. Este caso es muy común, pues los estudiantes no se paran a pensar qué hipótesis necesitan verificar para hacer uso de un determinado problema, sino que lo aplican directamente al presentar, quizás, las mismas características, a priori, que otros previos. También es consecuencia de haberse aprendido el enunciado del teorema de memoria sin pararse ni tan sólo un momento en pensar en su significado, otorgándole otro totalmente distinto.

Además, muchos estudiantes no distinguen entre la integral definida como área o como cálculo algebraico, porque no establece una conexión entre la representación gráfica y la representación algebraica de una función y no son capaces de calcular el área bajo una curva a partir de su gráfica. En ocasiones esto sucede porque el alumno no dispone de los conceptos previos necesarios para resolver la tarea satisfactoriamente. En este sentido, Mundy (1984) encontró que un 95 % de los estudiantes respondieron incorrectamente a la pregunta de que calculasen el área de la integral: $\int_{-3}^{3} |x-2|dx$. Debido a que los alumnos no sabían integrar la función absoluto y no han logrado establecer una relación entre la representación algebraica formal y la visualización gráfica de la función. Esto se podía haber evitado si se les proporcionara una enseñanza menos algorítmica y se reforzara más los razonamientos.

Los estudiantes utilizan entonces el contexto algebraico formal en lugar del geométrico, y solo reconocen el área como integral definida cuando se enfrentan a un ejercicio o problema donde el propio enunciado lo clarifica, lo que supone un obstáculo didáctico generalizado. Así, el alumno utiliza el contexto algebraico-formal en vez del visual-geométrico sencillamente porque no los ha integrado correctamente.

Otros estudios han demostrado el predominio del modo algebraico sobre el gráfico que tienen los estudiantes al resolver tareas de cálculo integral, se observa que hay un mayor dominio de los procedimientos algorítmicos frente a los aspectos conceptuales. Lo que concuerda con Orton (1980) en lo anteriormente expuesto.

3.2. Obstáculos didácticos.

En primer lugar, vamos a definir qué se entiende como obstáculo didáctico y en qué se diferencia del obstáculo epistemológico. Aunque ambos son considerados como barreras o dificultades que pueden surgir rm el proceso de aprendizaje del alumno y, por tanto comparten similitudes, existen diferencias importantes entre ambos conceptos:

- El obstáculo didáctico se relaciona con las dificultades que surgen en la enseñanza y el aprendizaje debido a factores pedagógicos, didácticos y metodológicos. Estos obstáculos están relacionados con la forma en que se presenta la información, los materiales utilizados, la estructura de las lecciones, la secuencia de los conceptos, entre otros aspectos. Los obstáculos didácticos pueden limitar la comprensión y el aprendizaje efectivo, ya que no se están utilizando enfoques pedagógicos adecuados o se están presentado barreras innecesarias en el proceso educativo.
- Sin embargo, el obstáculo epistemológico se refiere a las dificultades que surgen debido a la naturaleza misma del conocimiento y la forma en que las personas construyen su comprensión de éste. Estos obstáculos se originan en las ideas previas, preconcepciones o concepciones erróneas que los estudiantes tienen sobre un tema específico. Pueden surgir cuando los nuevos conceptos o teorías desafían ñas creencias o conceptos previos del estudiante. Estos obstáculos pueden dificultar, por tanto, la adquisición de nuevos conocimientos y requieren un proceso de aprendizaje y reconstrucción conceptual para superarlos.

En resumen, la principal diferencia radica en que el obstáculo epistemológico se refiere a dificultades conceptuales y de comprensión del estudiante, mientras que el obstáculo didáctico se centra en la barreras y dificultades derivadas de la manera en que se presenta la información y se lleva a cabo la enseñanza.

Uno de los fenómenos didácticos que se considera fundamental dentro de la enseñanza del Análisis Matemático es el de algebrización del cálculo diferencial. Artigue (en Contreras, 2000) habla de un *enfoque algebraico y reduccionista del cálculo* que se basa en las operaciones algebraicas con límites, derivadas e integrales, pero que trata de una forma simplista las ideas y técnicas específicas del Análisis.

Por su parte Contreras (2000) explica que cuando el profesor explica una determinada noción matemática y, no aborda, o lo hace superficialmente, los problemas característicos del Análisis, deslizándose hacia posturas algorítmicas más fáciles de gestionar y de evaluar, produce una verdadera ruptura del contrato didáctico.

Algunos de los obstáculos didácticos que dificultan el aprendizaje de los conceptos relacionados con la integral definida, son descritos por algunos investigadores en Didáctica de la Matemática:

González (2006) menciona que el tiempo que se dedica al tema limita que el estudiante pueda llegar a comprender los conceptos y no lleguen a asimilarse correctamente por el alumnado en general. Además agrega que, debido a esta limitación, no se dedica el tiempo necesario para aproximaciones formales constructivas, que tienen aun mayor riqueza en la construcción y comprensión del concepto, sino que este se plasma formalmente sin intentar hacer ver al alumno por qué creen que es así.

Orton (1983) se expresa siguiendo la misma línea, comenta algunas formas inadecuadas de introducir el concepto de integral definida que puedan dificultar la comprensión de este concepto. Plantea, por ejemplo, que al ilustrar la definición de integral definida se suele presentar en la práctica de aula una curva sin patologías, un intervalo positivo, usando un número razonable de rectángulos, pero sin insistir en cuáles de estos elementos son esenciales y cuáles no. Lo que puede implicar que la integral se identifique exclusivamente como un área, lo que lleva a problemas cuando se propone la integral de una función negativa.

Dolores (2000) afirma que pasar de lo finito a lo infinito además de considerarse como un obstáculo epistemológico resulta ser también un obstáculo didáctico, pues los estudiantes llegan a la universidad con una formación en matemática básica relacionada con los procesos finitos de cuantificación y en la matemática universitaria deben abordar los procesos infinitos. En el bachillerato los procesos infinitos se trabajan muy superficialmente, de hecho, el infinito es considerado solamente un símbolo, y por tanto, el estudiante tiene poca comprensión acerca de las manifestaciones del infinito y sus implicaciones en procesos de derivación o integración.

Para que los estudiantes superen los obstáculos cognitivos que dificultan el aprendizaje se requiere replantear el enfoque conceptual. El enfoque tradicional de la integral definida es inadecuado. Tal y como se afirma en Díaz (2015), tradicionalmente se piensa que conceptualizar el área se reduce a pensar tan solo en el triángulo y el rectángulo y las fórmulas para determinar sus áreas. Al proponer regiones poligonales diferentes pocos estudiantes alcanzan a percibir y proponer triangulaciones o cuadraturas que permitan encontrar una aproximación al área de éstas: la dificultad se agrava aún más cuando estas regiones están delimitadas por curvas. Si nos damos cuenta la enseñanza de los conceptos de área e integral definida está más sujeta a las condiciones y requisitos de los currículos que a las necesidades del estudiante o a las del conocimiento en sí, por esta razón se subestiman las características de elementos básicos pero fundamentales en la construcción de estos concepto.

La integral definida debería introducirse en una forma más intuitiva apoyada de manera más significativa sobre el concepto de área de una región plana que ha construido previamente el estudiante; al respecto (Turégano, 1998, pp.236) manifiesta:

> *La integral es una continuación de la idea de área, que los estudiantes conocen desde los primeros días de la escuela y, como decía Lebesgue: ¿No entenderían los estudiantes más fácilmente que, al pasar de la geometría al análisis, nada ha cambiado sino el lenguaje, que era más geométrico antes, pero más analítico después?*

Díaz (2015) culmina afirmando que tanto los obstáculos epistemológicos como los didácticos, son recurrentes y persisten aún en la actualidad, aunque en teoría se han resuelto con rigurosidad, además de que se han manifestado en diversos estudios y han sido divulgados ampliamente por todos los continentes. No obstante, la práctica en el aula está alejada de su estudio, sólo se dedica tiempo a la preparación básica de los temas, lo cual no permite que se modifiquen las prácticas pedagógicas e impide así que se avance en los niveles de comprensión de los conceptos. Por tanto, hace que los estudios que se han llevado a cabo estos últimos años, resulten totalmente inútiles pues no se hace nada para aprovecharlos y mejorar la calidad del aprendizaje y la enseñanza.

3.3. Antecedentes en la investigación de la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida

Tras haber plasmado una serie de reflexiones sobre el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos, en particular, en los relativos a la integral definida y tras haber reflexionado también en las dificultades que muestran los alumnos en el aprendizaje de ésta, pasamos a describir algunas aportaciones sobre el concepto de integral definida que han sido motivo de estudio por algunos investigadores.

En primer lugar, Orton (1983) realizó una de las primeras investigaciones sobre este tema y manifestó la preocupación de los profesores acerca del hecho de que los estudiantes eran capaces de integrar y diferenciar pero mostraban poca comprensión real de estos procesos. El propósito principal de su trabajo fue investigar en la comprensión por parte de los estudiantes de distintos aspectos que tienen que ver con el concepto de la integración y la diferenciación. El estudio se realizó a través de entrevista individualizadas a una población de alrededor 110 estudiantes (de edades entre 16 y 22 años), que constaban de 38 cuestiones relacionadas con límites, áreas de rectángulos, aproximación del área bajo una curva, cálculo de integrales y cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. Orton destaca algunas conclusiones que aparecen a continuación:

- Para los estudiantes fueron difíciles las preguntas que se referían a la comprensión de la integración como límite de la suma, por lo que resulta poco viable introducir integrales de esta forma, dado que el fin último es que los estudiantes sean capaces de integrar y dar respuesta a aplicaciones simples.
- El concepto de límite parece haber sido descuidado en niveles más elementales lo que dificulta sobremanera a la etapa siguiente con la introducción de las integrales.
- Muchos estudiantes mostraron dificultades en la comprensión de la relación entre la integral definida y el área bajo la curva, por ejemplo cuando la curva corta a uno de los ejes coordenados del plano.
- Resulta aconsejable que para la introducción del cálculo se utilicen tanto diagramas como gráficos. De esta manera se visualiza mejor el problema que se ha de tratar. Pudiéndose incluso detectarse errores cometidos en el cálculo de las integrales.

En Aldana (2011) citando a Turégano (1994) se muestra que ésta realizó una investigación tratando conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cálculo Infinitesimal, con el objetivo de encontrar un modelo dentro del contexto matemático (alternativo a la integral de Riemann) para elaborar una propuesta didáctica dirigida a la enseñanza de la integral definida a alumnos de secundaria. Para diseñar dicha propuesta Turégano (1994) parte de la génesis histórica del concepto, del estudio de textos y del currículo, tal y como se sigue en esta propuesta. La aplicación de la propuesta le permitió analizar las dificultades que encuentran los estudiantes en la iniciación al Cálculo y, a su vez, determinar si las dificultades de aprendizaje encontradas se pueden rectificar.

El estudio fue desarrollado en dos fases, la primera en el ámbito propio de las ideas matemáticas y la segunda en el de la investigación educativa. En la primera fase la investigadora elaboró una propuesta didáctica para enseñar a los estudiantes la integral definida a nivel más conceptual, y la segunda fase la llevó a cabo por medio de cuestionarios y entrevistas con los estudiantes. A partir del análisis del diseño de situaciones didácticas, durante la etapa de aprendizaje, y del estudio de casos obtiene algunas conclusiones. Entre las que destacamos las siguientes:

- Los modelos visuales en la enseñanza del cálculo mediante el uso de softwares gráficos, así como la eliminación de cálculos algebraicos favorecen la formación y transformación de intuiciones y la creación de imágenes de los conceptos de manera correcta y formal.

- La introducción de la integral definida de forma geométrica permite dar sentido a los conceptos de sucesión, límite, número real e integral definida en el contexto del cálculo de áreas bajo curvas.

- En el aprendizaje del concepto de integral, al igual que en el área, los alumnos ponen de manifiesto tres imágenes mentales: "primitiva, operativa y descriptiva" Turégano (1994, pp.248). En la primitiva hacen referencia a la integral asociada a una fórmula que les permite calcular áreas de figuras irregulares, en esta los alumnos no disponen de una imagen específica ni de área ni de integral; la operativa corresponde a una imagen de la integral sinónimo de área; y la imagen descriptiva es la articulación geométrica y numérica del concepto, puesto que se logra el paso al límite tanto a nivel de percepción visual como numérico, lo que les permite además transferirla a otros contextos.

- Para obtener una imagen descriptiva de la integral es necesario que el estudiante haya construido el concepto de área como magnitud, acepte la divisibilidad infinita de un segmento y la existencia del límite, y además tenga una percepción completa de la representación gráfica.

Siguiendo esta misma línea, Calvo (1997) realizó un estudio para llevar a cabo una propuesta didáctica que permitiese a los estudiantes la construcción de la imagen del concepto de integral definida consistente con su definición formal, y la relación de esta con la derivada. Utilizó un cuestionario de 10 ítems y lo propuso a un grupo de 56 estudiantes. En las conclusiones de la investigación sugirió utilizar como definiciones de la integral aquéllas que resulten independientes del concepto de derivada y del conjunto de reglas algorítmicas asociadas al cálculo. Propone elegir como definición formal de integral, la versión propuesta por Riemann y reformulada más tarde por Darboux en términos de supremos de sumas inferiores e ínfimos de sumas superiores. Además, afirma que el éxito en la actividad matemática se relaciona con la posesión, por parte del propio individuo, de esquemas conceptuales de gran riqueza que permitan, no sólo establecer conexiones con otros esquemas conceptuales, sino la existencia de varias representaciones del mismo concepto relacionadas entre sí, de manera que faciliten el paso de una perspectiva a otra según las exigencias propias del problema que se ha de resolver.

Artigue (1995) realizó investigaciones, de manera simultánea, en didáctica de la matemática y de la física, y constató que había estudiantes que pensaban lo siguiente:

> *Para integrar, es esencial no pensar en lo que representa dl y proceder mecánicamente, de lo contrario uno está perdido.*

Afirma que estudiantes que llegan a la universidad tienen una concepción de la integral como operación inversa a la derivación, asociada a la imagen del área bajo una curva. Además, Artigue (2003) afirma que en muchos países el primer contacto con las integrales se da al final del nivel secundario por medio de la noción de anti-derivada y una aproximación práctica al teorema fundamental del cálculo que le permite conectar las anti-derivadas con una noción intuitiva de área. En efecto, en España el concepto de integral se muestra a los estudiantes en segundo de bachillerato y en la gran parte de los casos (como hemos podido observar con la investigación realizada en esta memoria o las que hemos consultado) el cálculo de primitivas antecede a la integral definida mostrándose ésta ampliando el cálculo de áreas elementales, usando sobre todo la regla de Barrow.

De esta manera, el estudiante entiende la nueva unidad didáctica presentada desde una secuencia que le es familiar y cómoda: la integral, como operación inversa de la derivada, se estudia tras ella, como lógica, puesto que a lo largo de trayecto académico se ha visto que los objetos matemáticos se suelen relacionar como el proceso inverso de otro expuesto anteriormente. Podemos destacar innumerables casos, por ejemplo, la suma y la resta, la multiplicación y la división, la raíz y la potencia, etc. Lo que provoca una doble lectura que puede llevar al alumnado a obstáculos epistemológicos con posibles consecuencias graves. Tal y como menciona Otal (2015), la ventaja de conocer una relación que liga dos conceptos, aunque sea importante, se contrapone con el peligro de asociar en todo momento objetos matemáticos "inversos unos de otros"; lo que puede ocasionar una concepción errónea que les impida el estudio independiente de tópicos matemáticos cuyo aprendizaje "implica un rechazo parcial de las formas previas de conocimiento, lo que no es fácil para los estudiantes" (Artigue, 2003).

En nuestra propuesta se sigue este planteamiento, es decir, se defiende que el concepto de integral definida debe anteponerse al cálculo de primitivas. Puesto que creemos que si se invierten los términos (tal y cómo se enseña actualmente) los alumnos no entenderían, en un principio, la necesidad de las anti-derivadas y los métodos de integración, restaría así interés por la adquisición del concepto de integral definida y, posteriormente, el establecimiento del teorema fundamental del cálculo integral podría resultar a los alumnos, posiblemente , artificioso. De esta forma también seguiríamos las conclusiones obtenidas por las investigaciones de Calvo (1997) y Turégano (1994).

Una última investigación llevada a cabo por Czarnocha (2001) concluyó en los resultados obtenidos en su investigación que

- Los profesores, frecuentemente, no tienen la oportunidad de presentar los conceptos desde la instrucción basada en el desarrollo histórico a los estudiantes; por lo que la instrucción debería organizarse de forma que partiera de la intuición natural de los estudiantes para lograr que finalmente utilicen un método riguroso de la integral definida.

- Los cursos de Matemáticas, basados en un trabajo histórico están pensados, no sólo como cursos de Historia de las Matemáticas, sino que además, esta forma de instrucción puede servir como elemento para incentivar aun más a los estudiantes que tienen pasión por las Matemáticas.

Capítulo 4

Propuesta didáctica

En este capítulo se presenta la propuesta didáctica que se tiene previsto llevar al aula para el estudio de la Integral, más concretamente, la integral definida y el cálculo de áreas. A continuación, se presentará una introducción a ella, donde se expondrá como quiere tratarse a modo general la propuesta y, posteriormente, se explicitará siguiendo el esquema general de la LOMLOE de las Situaciones de Aprendizaje.

4.1. Introducción

Nuestra propuesta didáctica se basa en introducir el concepto de integral definida de manera independiente al concepto de derivada para así, evitar que los alumnos consideren la integración sólo como operación inversa a la diferenciación, lo que puede considerarse como un obstáculo epistemológico. De esta forma, cuando estudiemos el teorema fundamental del cálculo, los alumnos lo consideraran como "una relación inesperada y útil entre las estructuras matemáticas de derivación e integración, aparentemente independientes" (Azcárate, 1996). Además, de esta manera el alumno construye una concepción de la integral relacionada intrínsecamente con el cálculo de áreas. Como se puede observar, en nuestra propuesta vamos a seguir las ideas de algunas investigaciones como la de Azcárate (1996) o la de Turégano (1994).

Además, se enfocará la propuesta partiendo de la integral definida, para así, posteriormente aplicar los contenidos al cálculo de primitivas. Puesto que los alumnos, fuera de las aplicaciones directas del cálculo de áreas o volúmenes, no aprenden a reconocer cuándo el cálculo de una magnitud requiere una integración. Tal y como menciona Azcárate (1996): "El cálculo exhaustivo de primitivas, usando los diferentes métodos de integración tradicionales, será cada vez menos necesario, con el desarrollo de los ordenadores y las computadoras, que calculan primitivas en pocos segundos".

Azcárate (1996) también menciona que el cálculo integral, correspondiente al bachillerato, debe centrarse en el cálculo de áreas de superficies limitadas por curvas y su aplicación a determinados problemas físicos. Puesto que los alumnos han tenido contacto con la noción de área desde la escuela primaria, conviene consolidarlo en la escuela secundaria obligatoria mediante actividades nuevas que permitan calcular áreas de figuras distintas de las conocidas. Se pueden plantear problemas más complejos usando, por ejemplo, aproximaciones por sumas de áreas de diferentes polígonos. De hecho, esto supone reproducir, en cierta medida, el proceso histórico del desarrollo del concepto de integral, puesto que los primeros cálculos de superficies limitadas por curvas se hicieron utilizando métodos geométricos y aproximaciones por sumas de áreas de polígonos.

Consideramos que plantear la definición de integral definida previamente a la integral indefinida es preferible pues así el alumno conocerá esta última cuando sea consciente de su funcionalidad como instrumento para calcular áreas. Lo que les permitirá adquirir una mejor asimilación de los conceptos del Cálculo Integral y desarrollar unos esquemas que les permitan relacionar las distintas interpretaciones y representaciones del concepto de integral sobre una base más sólida.

Por último, decir que se estudiará la construcción del concepto de integral como límite de las sumas de Riemann, mediante ejercicios sencillos y de carácter práctico. De esta forma un alumno que acceda a una carrera de ámbito científico o tecnológico tendrá una idea intuitiva y no se extrañará cuando se le explique el concepto formal de la integral utilizando interpretaciones de paso al límite.

4.2. Contextualización

La propuesta educativa que aquí se recoge está prevista para llevarse a cabo en un centro educativo (público o concertado) de la Comunidad Autónoma de Castilla y León, con la finalidad de mejorar la docencia que actualmente se imparte en los centros educativos en cuanto al concepto de integral definida, así como el aprendizaje que adquieren los alumnos de este concepto.

Lamentablemente, no pude poner en práctica esta propuesta en el instituto en el que realicé las prácticas del máster, debido a que no tuve ningún grupo de bachillerato y en el tiempo que estuve se encontraban en otros temas de la programación. Pero considero que se podría llevar a cabo en ese mismo instituto o en otro de características similares.

El curso en el que se va a realizar la propuesta va a ser segundo de Bachillerato, pues es el curso donde por primera vez se realiza un estudio a la integral. Se llevará a cabo en el tercer trimestre del curso, al regresar de las vacaciones de Semana Santa. Se va a llevar a cabo en el Bachillerato de Ciencias, aunque se podría realizar también en el Bachillerato de Ciencias Sociales, si bien encaja mejor con las exigencias del primero.

El grupo está formado por unos 20 alumnos. A pesar de encontrarnos en un centro que está situado en una zona urbana y, por tanto, al que asisten alumnos pertenecientes de clases sociales medias-bajas, la gran parte del alumnado es de nacionalidad española, no hay gran multiculturalidad, debido quizás a que nos encontramos en un curso donde la escolarización deja de ser obligatoria. Por esto mismo, los alumnos que nos encontramos tienen claro que quieren seguir con estudios universitarios, por lo que la actitud hacia la clase es mejor que en cursos de la ESO. Al estar además en un bachillerato de ciencias, los alumnos presentan más curiosidad y no tanta reticencia hacia las Matemáticas. Además, son alumnos que están motivados por las tecnologías y muestran buena relación cuando trabajan en grupos o por parejas. Sin embargo, cuando han de enfrentarse a un problema matemático les cuesta realizar demasiados razonamientos, prefieren que el profesor les de el conocimiento ya construido, con fórmulas, teoremas y conceptos que aprenderse, antes de ser ellos lo que intenten conjeturar o intuir las ideas. Por esto mismo, se ha diseñado la propuesta y mediante metodologías activas, el uso del software Geogebra y actividades que involucran trabajo cooperativo se intenta que el alumno muestre más interés por los conceptos que se desarrollarán relacionados con el cálculo integral. De esta forma el profesor se dedicará a resolver todas las dudas que pueden surgir al alumnado, dedicándole tiempo a todos ellos. Además de explicar con rigor cada una de las definiciones o procesos que se lleven a cabo.

Además, se partirá desde conceptos muy básicos como el cálculo de áreas de figuras planas conocidas, dónde además se reforzará el cálculo de un área utilizando la técnica de dividirla en figuras más simples de áreas conocidas. Puesto que se ha observado que en cursos inferiores no se hace con demasiada frecuencia, sino que simplemente el alumno se estudia las fórmulas de las áreas conocidas y el profesor le pregunta en el examen un problema donde hay que aplicarlas tal cual, o como mucho separar la figura en dos y aplicarla. De esta forma el alumno podrá ver con naturalidad la aproximación de un área de figuras más complejas por medio de sumas de Riemann.

La actividad está dedicada a la integral definida, enmarcada por tanto en el área del Análisis Matemático, por lo que el alumno deberá tener presente los temas de continuidad y límites. Además, sabiendo la estrecha relación que este concepto guarda con la derivada, el alumno debe estar familiarizado con este concepto y con los métodos de derivación allí usados. Al encontrarse en el tercer trimestre, también se requerirán nociones numéricas, algebraicas y de geometría analítica estudiadas a lo largo del curso o de cursos previos. También se usarán conceptos usados en la asignatura de Física y Química, como la velocidad, la aceleración, así como las fórmulas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Este primer curso de Cálculo Integral, tiene como principal objetivo crear en el alumno un aprendizaje correcto, formal a la par que intuitivo, relativo a la integral, lo que le facilitará la comprensión de éste cuando lo estudie con más profundidad en los cursos universitarios.

La propuesta se llevará a cabo durante unas 15 sesiones de 50 minutos, en las que se estudiarán los contenidos propios de la integral definida, se realizarán ejercicios contextualizados de carácter prácticos, ejercicios de cariz teórico, mostrando las representaciones visuales de estos con el software Geogebra. Además de llevarse a cabo las sesiones de evaluación que se consideren pertinentes.

4.3. Objetivos de la propuesta

Se distinguirán a continuación los objetivos de etapa que se trabajarán con esta propuesta, es decir los propios del Bachillerato y los generales de la asignatura de Matemáticas II, y los objetivos específicos de la propuesta.

Objetivos de etapa

Los objetivo de etapa que se pretenden alcanzar en esta propuesta educativa son:

- Se resolverán los problemas desde distintos puntos de vista, o usando diferentes estrategias. Se pretende con esto que el alumnado tenga interés por la materia que se imparte y además valore y respete las opiniones de sus compañeros y sea capaz de defender las suyas propias, desarrollándose así actitudes de tolerancia, cooperación y solidaridad.

- La resolución de las tareas matemáticas que aparecen en esta propuesta, individuales o grupales, requieren esfuerzo y constancia en la búsqueda y obtención de soluciones, por lo que contribuirán al desarrollo y refuerzo de los hábitos de estudio.

- Con esta propuesta, a través de la resolución de los problemas que aparecen, se intenta fomentar la creatividad, el sentido crítico y la toma de decisiones, pilares que se consideran fundamentales en el desarrollo ciudadano. La reflexión sobre este proceso dota al alumnado de instrumentos para la adquisición de confianza y seguridad en sí mismo, con el objetivo de enfrentar retos cada vez más complejos.

- El alumno trabajará en la propuesta a expresarse con precisión científica utilizando los términos adecuados dentro del lenguaje matemático, para lo que se precisa una correcta expresión oral y escrita, así como una comprensión lectora adecuada al nivel en que nos encontramos.

- Además, se reconocerá y se valorará el desarrollo de la cultura científica indagando sobre los avances en matemáticas, ciencia, ingeniería y tecnología y su valor en evolución de su sociedad. La investigación en Matemáticas requiere desarrollar creatividad y flexibilidad en el razonamiento, además de aportar perseverancia, capacidad de trabajo y de abstracción mediante la resolución de problemas, aprendiendo a trabajar tanto individualmente como en grupo, cualidades que se consideran esenciales en el desarrollo social y laboral de la persona.

- Por último, se promoverá que el alumno utilice adecuadamente el razonamiento matemático, lo que propicia que el alumno adquiera una percepción más objetiva de la realidad.

Objetivos específicos de la propuesta

En particular, con esta propuesta se pretende que se consigan los siguientes objetivos específicos del Cálculo Integral:

- Saber calcular el área de una figura irregular poligonal dividiéndola como suma de áreas conocidas.

- Aproximar el área de una figura curvilínea usando sumas de Riemann.

- Entender cómo se ha construido la integral definida.

- Saber realizar una representación gráfica del recinto que delimita el área que se pretende calcular, utilizando para ello el software GeoGebra.

- Saber aplicar las diferentes propiedades de las integrales.

- Saber diferenciar si el ejercicio en cuestión nos pide determinar el área en valores absolutos o simplemente calcular la integral definida, y como aplicar cada uno de estos casos.

- Entender y saber cuándo aplicar el teorema fundamental del cálculo integral.

- Reconocer la estrecha relación existente entre la integral y la derivada.

- Entender y saber aplicar la regla de Barrow.
- Aplicar los métodos de integración necesarios para el cálculo de integrales definidas.
- Saber aplicar volúmenes de cuerpos de revolución como aplicación de la integral.

4.4. Competencias Clave

Como sabemos, la materia Matemáticas contribuye a la adquisición de las distintas competencias clave que conforman el perfil de salida del alumno. En esta propuesta en cuestión se trabajarán las siguientes:

- **Competencia en comunicación lingüística (CCL):** Esta competencia va a ser partícipe en la propuesta, puesto que el lenguaje es el vehículo para comprender las situaciones que se matematizan. Además, como se hará puesta en común de los resultados obtenidos, los alumnos deben ser capaces de argumentar y expresar correctamente las soluciones o resultados obtenidos y sus implicaciones.
- **Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM):** Resulta fundamental en una asignatura como Matemáticas, siendo transversal a todos los contenidos de esta disciplina. Se utilizarán diferentes formas de razonamiento, se hará uso de la expresión propia del lenguaje matemático, tanto escrito como verbal, y se utilizan los conocimientos propios de las matemáticas para reflexionar y resolver problemas relacionados con la vida cotidiana. También se requerirán conocimientos previos de otras asignaturas de carácter científico, como Física y Química o Informática.
- **Competencia Plurilingüe (CP):** Puesto que las matemáticas dan lugar a un lenguaje propio, los alumnos deberán expresarse correctamente en él y saber pasar del lenguaje matemático al lenguaje real, y viceversa.
- **Competencia Digital (CD):** Se trabajará mediante el software GeoGebra que permitirá al alumnado visualizar mejor el resultado a los problemas, además de ver la integral desde un punto de vista más geométrica como el área bajo una curva.
- **Competencia personal, social y aprender a aprender (CPSAA):** Se pondrá en práctica dicha competencia al llevarse a cabo estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje. Además, al ser una metodología activa los alumnos forman parte de su propio proceso de enseñanza y aprendizaje.
- **Competencia ciudadana (CC):** Durante la propuesta se realizarán actividades en las que se distribuirá al alumnado por parejas o pequeños grupos heterogéneos, posteriormente se hará además puesta en común de los resultados. Por tanto, los alumnos deberán adoptar una actitud dialogante que permita avanzar a través del respeto a las ideas ajenas y facilitando la igualdad.
- **Competencia emprendedora (CE):** Esta competencia es una de las que más se trabajen durante la propuesta, debido a que la metodología de enseñanza que más se empleará será el aprendizaje basado en problemas, por lo que los alumnos deben extraer los contenidos teóricos realizando los problemas que se les propongan, por lo que deben de armarse de todo tipo de estrategias que les ayuden a resolver el problema planteado,

además deben saber gestionar los tiempos y la toma de decisiones razonadas. En clase se propondrán los ejercicios como retos a resolver, fomentándose así el espíritu emprendedor para lograr la solución y justificarla.

- **Competencia en conciencia y expresiones culturales (CCEC):** En los ejercicios que se propondrán en las actividades contextualizadas donde los alumnos deberán calcular áreas bajo curvas que modelizan objetos presentes en el patrimonio histórico, cultural y artístico. Además, el método de enseñanza del concepto de integral definida sigue la evolución histórica de éste, por lo que se propondrán varias situaciones para que los alumnos se acerquen a estos pensamientos históricos, como el método de exhausción utilizado por Eudoxo y Arquímedes.

Los descriptores operativos, como sabemos, identifican el nivel de desarrollo de cada competencia clave que el alumnado debe lograr al finalizar esta etapa, concretando los fines del sistema educativo referidos a este periodo. En nuestra memoria los descriptores operativos relativos a cada competencia clave que acabamos de mencionar serán los que se recogen en el DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, la evaluación y desarrollo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

4.5. Competencias específicas

Las competencias específicas, propias de la asignatura de Matemáticas, que trabajaremos en esta propuesta serán las siguientes:

- **Competencia 1:** Interpretar, modelizar y resolver los problemas que nos aparezcan en las actividades, aplicando para su resolución diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.

- **Competencia 2:** Verificar la validez de las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, empleando el razonamiento y la argumentación para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.

  Las competencias 1 y 2 se trabajarán por tanto durante toda la propuesta, ya que esta consta principalmente de ejercicios que el alumno debe resolver de manera autónoma usando todo tipo de estrategias conocidas y el temario del que dispone. Además, éste contará en todo momento con la ayuda del profesor y de sus compañeros.

- **Competencia 3:** Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático. Al emplearse una metodología activa los alumnos van a ser responsables de su propio aprendizaje, por lo que deberán recurrir a todo tipo de estrategias posibles para resolver los problemas.

- **Competencia 4:** Utilizar los principios del pensamiento computacional de forma eficaz, modificando, creando y generalizando algoritmos que resuelvan problemas mediante el uso de las matemáticas, para modelizar y resolver así situaciones de la vida cotidiana. Esta competencia va trabajarse profusamente en las primeras actividades de la propuesta al descomponer una figura irregular en otras más simples para calcular su área o hallar el área bajo una función curvilínea mediante aproximaciones por exceso y por defecto de las sumas de Riemann.

- **Competencia 5:** Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático. Al ser un tema que se encuentra al final de la etapa educativa, los alumnos deberán utilizar todos los conocimientos anteriores que han visto a lo largo de la asignatura para realizar los ejercicios que se les proponen. Se usarán más los contenidos propios de Análisis Matemático, pero también se requerirán contenidos numéricos, algebraicos o geométricos.

- **Competencia 6:** Descubrir los vínculos de las Matemáticas con otras áreas de conocimiento y profundizar en sus conexiones, interrelacionando conceptos y procedimiento, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas. El cálculo de integrales es aplicable a muchas ramas de las ciencias como la física, la biología o la economía, por lo que en esta propuesta se proporcionarán problemas contextualizados y aplicables a cada una de estas ramas. Además, en algunos ejercicios hay que tener presentes contenidos vistos en otras asignaturas a lo largo de la etapa secundaria.

- **Competencia 7:** Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos. Esta competencia se llevará a cabo durante toda la propuesta, pues en gran parte de los problemas se pedirá a los alumnos que trabajen con el software GeoGebra. Además, se realizarán algunas actividades más lúdicas con la herramienta online de cuestionarios Kahoot!.

- **Competencia 8:** Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, empleando la terminología y el rigor apropiados, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas y organizar y consolidar el pensamiento matemático. Esta competencia se trabajará en todos los problemas, pues al finalizar la resolución de los mismos, se tendrá que hacer una puesta en común a la clase de los resultados obtenidos por grupos. Además, cada vez se le pedirá a un miembro del grupo que sea el portavoz de dichos resultados, para que así todos los miembros del grupo trabajen esta competencia.

- **Competencia 9:** Desarrollar destrezas sociales, identificando y gestionando las propias emociones, respetando las de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables. Además, se debe aprender de los errores cometidos pues formas parte del proceso de aprendizaje, de esta manera se persevera en la consecución de objetivos en el aprendizaje de las matemáticas. Se va a trabajar esta competencia en toda la actividad pues ya hemos comentado que se dividirá a la clase en parejas o en grupos heterogéneos pequeños, por lo que éstos deberán mostrar una actitud correcta de trabajo, con el trabajo persé y con los compañeros.

4.6. Criterios de evaluación

Como sabemos, el nivel de desarrollo de cada competencia específica vendrá determinado por el grado de consecución de los criterios de evaluación con los que se vincula, por lo que éstos han de entenderse como herramientas de diagnóstico en relación con el desarrollo de las propias competencias específicas. Puesto que la propuesta se desarrollará en el segundo curso de Bachillerato, los criterios de evaluación (correspondientes a las competencias específicas) serán los propios de este curso, y son los siguientes:

- **Competencia 1:** Manejar diferentes herramientas y estrategias apropiadas que que modelicen y contribuyan a la resolución de los problemas. Obtener además todas la soluciones posibles a los problemas contextualizados que se proponen, describiendo y justificando en todo momento el procedimiento utilizado.
- **Competencia 2:** Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto en el que se plantean. Seleccionar de entre ellas la solución más adecuada, utilizando el razonamiento y la argumentación.
- **Competencia 3:** Adquirir nuevo conocimiento mediante la formulación, el razonamiento y la justificación de las conjeturas de un problema realizado de forma autónoma.
- **Competencia 4:** Interpretar, modelizar y resolver los problemas contextualizados que se presentan en las diferentes actividades, utilizando para ello el pensamiento computacional, modificando, creando y generalizando algoritmos, resolviendo así los problemas de forma más eficaz.
- **Competencia 5:** Resolver los problemas que se plantean usando cualquier contenido visto a lo largo del curso en cursos previos. De esta manera se demuestra una visión matemática totalmente integrada.
- **Competencia 6:** Resolver los problemas utilizando contenidos propios de otras asignaturas y observar la aplicación que pueden tener las matemáticas implicadas en esta propuesta en otros contextos científicos, como en la física, la medicina o la economía.
- **Competencia 7:** Representar conceptos, procedimientos y resultados que aparezcan en los problemas de la propuesta de diferentes modos y usando herramientas digitales correctamente, visualizando así más fácilmente ideas. En nuestra actividad se usará el software GeoGebra.
- **Competencia 8:** Comunicar la información utilizando el lenguaje matemático apropiado, y con todo el rigor, utilizando diferentes medios, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.
- **Competencia 9:** A la hora de resolver los problemas, tomar decisiones evaluando diferentes opciones posibles para resolverlo, identificando y gestionando emociones, y aceptando y aprendiendo del error como parte de proceso de aprendizaje. Mostrar además una actitud positiva y perseverante, aceptando y aprendiendo de las críticas constructivas. Por último, colaborar activamente en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones. Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.

4.7. Contenidos

El orden de contenidos propios que abordaremos en esta propuesta didáctica es el siguiente:

- Cálculo de áreas de figuras planas regulares e irregulares.
- Definición de integral definida: se introducirá el concepto de integral definida de una función continua a partir de la aproximaciones de sumas de Riemann por defecto y por exceso.
- Propiedades de la integral: propiedad de linealidad, monotonía, multiplicación por un escalar y propiedades de simetrías par e impar.
- Teorema fundamental del cálculo y regla de Barrow: de esta forma se ve la relación entre la integral y la derivada.
- Concepto de primitiva y cálculo de primitivas de funciones potencias, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- Aplicaciones de la integral al cálculo de áreas: se verá un procedimiento para calcular el área entre una curva y el eje de abscisas y cómo calcular el área comprendida entre dos curvas.
- Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución.

Pero aparte de estos contenidos se tendrán que tener presentes contenidos previos vistos en la asignatura:

- Cálculo de límites, en concreto, de límites de una sucesión. Reconocimiento de las indeterminaciones básicas y cálculo de límites sencillos donde aparecen.
- Concepto de función continua. Múltiples propiedades de las funciones (monotonía, simetría, etc). Evaluación de una función en un punto.
- Cálculo de derivadas de funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Regla de la cadena. Cálculo de extremos relativos.
- Representación de funciones de todo tipo (potenciales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc.) Representación de funciones con el software Geogebra.
- Fórmulas del cálculo de áreas conocidas. Área de una figura irregular. Cálculo de la longitud de un segmento.
- Suma de los n primeros términos naturales, suma de los cuadrados de los n primeros términos naturales y suma de una serie geométrica.
- Conocimientos de geometría analítica: hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, fórmula de la distancia entre dos puntos. Ecuaciones de una recta afín, lineal, cuadrática, etc.
- Contenidos propios de la asignatura de Física y Química: ecuación de la velocidad, de la aceleración y del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Por lo que durante la propuesta educativa, aunque se trabajará con contenidos propios del sentido de la medida (medición), hay que tener muy presente contenidos del sentido de la medida (cambio), espacial y algebraico, expuestos anteriormente.

4.8. Metodología y recursos

En esta sección abordaremos el conjunto de metodologías puestas en práctica durante la propuesta, los recursos y materiales que serán necesarios para llevarla a cabo y, además, se explicarán cómo serán, de manera teórica y general, los problemas que se propondrán en cada una de las actividades y la forma que se pretende que los alumnos sigan para abordarlos. Por último, se describirá la temporalización de las actividades, es decir, la distribución de los contenidos en las diferentes actividades y el tiempo dedicado a cada una de ellas.

Metodologías empleadas

Las diferentes metodologías que se van a plantear durante la propuesta son as siguientes:

- **Aprendizaje Basado en Problemas (ABP):** Esta metodología es la que se va a emplear en gran medida. Esta metodología se caracteriza porque el aprendizaje está centrado en el estudiante. El método de aprendizaje está basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos, de manera que se potencie el autoprendizaje y el desarrollo del pensamiento crítico, cuyo objetivo es que los estudiantes analicen y resuelvan un problema planteado en un cierto escenario para así lograr ciertos objetivos esperados. Los problemas están cuidadosamente buscados por el profesor, están bastante secuenciados, la dificultad de estos es progresiva y necesitan haber realizado los anteriores para abordar el siguiente. El proceso se desarrolla en base a grupos pequeños de trabajo, de forma que aprendan de manera colaborativa en la búsqueda de resolver un problema inicial, complejo y retador. La tarea del grupo de estudiantes es discutir estos problemas y aportar explicaciones necesarias en términos fundados de procesos, principios o mecanismos relevantes. Se concede así similar importancia tanto a los conocimientos que se deben adquirir como al proceso de aprendizaje de éstos. Y el rol del profesor se convierte en el de facilitador del aprendizaje.

  En las actividades se va a distribuir a los alumnos por parejas (no seleccionadas por ellos, sino al azar), excepto en alguna actividad que podrán realizarla en grupos heterogéneos de tres o cuatro participantes. Se les va a proporcionar en cada actividad los problemas que se deben realizar, y se les proporcionará pautas, indicaciones o ayudas para que puedan resolverlo. En principio, podrían ayudarse entre los grupos pero sin ocasionar demasiado alboroto, se prefiere que las preguntas se le realicen al profesor, ya que únicamente está para tal fin. La finalidad de distribuirlos en parejas no es para que se dividan la tarea para realizarla más deprisa o que uno trabaje y el otro observe, sino para que conjuntamente propongan estrategias, desechen las menos adecuadas y se queden con la más apropiada, justificándola en todo momento. Se fijará un tiempo estimado para realizar los ejercicios, y posteriormente se procederá a una puesta en común de los resultados, donde los grupos deberán exponer y defender sus resoluciones argumentándolas apropiadamente, y respetar las de los compañeros. Se les mencionará que no tachen o corrijan su solución en el caso de que esta sea errónea, pues habrá que entregar todas las actividades que se realizado en clase y tal y como se hayan hecho. El profesor no corregirá negativamente si hay alguna solución errónea, en cambio si lo hará si no se ha hecho nada, es totalmente absurda o si se entrega perfecta y en clase no lo estaba.

- **Lección magistral:** Este modelo de metodología se llevará a cabo por el profesor. Tras haber realizado los ejercicios propios en la actividad y haber obtenido los objetivos esperados por parte del alumno con éstos, el profesor proporcionará con rigor la teoría en la que se enmarca cada ejercicio. En casi todas las actividades esta tendrá lugar después de haberse realizado los ejercicios relativos a ella, de esta manera el alumnado (con la metodología de ABP) construye la propia teoría para el caso particular del problema que se le plantea usando para ello todo tipo de conocimientos y estrategias previas, y posteriormente, el profesor generaliza este caso particular a uno más general.

- **Resolución de ejercicios:** Esta metodología se llevará a cabo cuando la lección magistral anteceda a la resolución de ejercicios relativos a la teoría en la que se enmarcan. Por ejemplo, cuando se vea cómo calcular el volumen de un cuerpo de revolución, dónde primero se da la fórmula y, posteriormente, se propone al alumno que usando dicha fórmula resuelva los problemas que se le plantean.

- **Gamificación:** En la actividad , el docente propondrá un juego utilizando la herramienta digital Kahoot! para que los alumnos calculen primitivas usando el teorema fundamental del cálculo y las reglas de derivación vistas en temas previos. Con esta metodología que se llevará a cabo por parejas se crea un ambiente distendido y agradable, lo que reforzará su entusiasmo por asistir a clase de Matemáticas.

Problemas

Los problemas que se van a proponer en la actividad están, en su mayoría, contextualizados. De esta manera, se le propone al alumno una situación real donde pueden aplicarse los contenidos que se ven en la propuesta, viendo así su aplicación a otras ramas científicas como la biología, la economía o la física. Creemos que esta manera de presentar los problemas se adecua más a la metodología que seguimos, en lugar de presentarlos sin un contexto que los enmarque, y que únicamente se les pida que resuelvan un ejercicio usando una fórmula específica. Únicamente se presentarán los problemas sin una contextualización (que los enmarque) en ejercicios de cariz teórico, como en los que hay que aplicar el teorema fundamental del cálculo. Se les indicará que el modo eficaz para llevar a cabo la resolución de un problema será seguir las fases del modelo de Pólya o de Miguel de Guzmán. Recordemos que tanto uno como el otro se dividían en cuatro fases que eran las siguientes (en el caso de Pólya):

1. **Entender el problema:** El alumno debería preguntarse: ¿Entiendo el problema? ¿Distingo cuales son los datos? ¿Hay suficiente información? ¿Este problema es similar a otro realizado previamente?

2. **Configurar un plan:** En este punto el alumno debería configurar estrategias para la resolución del problema, por ejemplo: ensayo y error, buscar patrones, resolver un problema más simple, realizar figuras o diagramas, resolver un problema equivalente, etc.

3. **Ejecutar el plan:** En este paso el alumno debe implementar la estrategia que ha conjeturado en el paso anterior, para ello será necesario dedicar un tiempo razonable y será importante ir con calma, paso a paso, para no cometer errores de cálculo que puedan llevar a soluciones absurda o soluciones visualmente aceptables, que realmente no lo son.

4. **Mirar hacia atrás:** En esta última fase, tras haber resuelto el problema, el alumno debería preguntarse si la solución hallada es la correcta y si la solución satisface lo que se requiere. Además, el alumno puede vislumbrar si existe alguna solución más sencilla que la proporcionada, o si se puede resolver el problema de más formas o si este se puede generalizar a un caso más genérico.

Materiales y recursos necesarios

Las sesiones de clase se llevarán a cabo en el aula habitual o, en su defecto, en el aula de informática, si no se dispone de ordenadores portátiles o tablets que los alumnos puedan utilizar en el aula de referencia. Estos serán necesarios en casi todas las sesiones, debiendo estar conectados a Internet y con acceso a programas y/o webs como GeoGebra o Kahoot!. Los ordenadores portátiles o las tablets se proporcionarán cada dos alumnos al estar estos distribuidos en parejas (si no se cuenta con un número par de alumnos, se seleccionará un grupo de tres personas). El profesor también tendrá a su disposición el ordenador de mesa con el que cuentan todas las aulas, y un proyector o, en su defecto, la pizarra digital donde expondrá algunos contenidos o indicaciones a los alumnos. Si no existieran ordenadores, como únicamente se requieren para realizar las representaciones en GeoGebra o para realizar el Kahoot!, los alumnos podrían incluso utilizar su propio teléfono móvil, si es que disponen de éste, aunque esta es la opción menos recomendable, por el tamaño de la pantalla, la dificultad en cuanto a manipulación con el dispositivo y las posibles distracciones de mensajes o notificaciones.

Quitando los medios tecnológicos, cada alumno deberá disponer de útiles de escritura (bolígrafos, lápices, etc) y de un cuaderno o folios cuadriculados o en blanco donde puedan escribir y en dónde reflejen las respuestas a los ejercicios y problemas que se realicen en cada una de las actividades. Se recomienda uso de lápices colores por si quieren realizar alguna representación a mano. Los alumnos pueden disponer, aunque no es necesario, del libro en el que se desarrollen los contenidos del curso o de apuntes tomados en clase a lo largo del curso. En caso de que lo tengan pueden consultarlo para aplicarlo al problema en cuestión, pero en caso de no tenerlo, pueden preguntar cualquier cosa al profesor. Pueden también disponer de una calculadora para facilitarles los problemas de cálculo, pero no de una que ya realice directamente las integrales, pues en el examen no se les dejará que usen este tipo de calculadoras.

El profesor además, deberá contar con pizarra, bien tradicional o bien digital, para llevar a cabo las explicaciones teóricas de los contenidos. Por lo que deberá estar equipado con tizas, será recomendable usar tizas de varios colores para que el alumnado visualice mejor las ideas. Las representaciones las llevará a cabo en la pizarra digital, o con el proyector usando GeoGebra o el programa en cuestión.

En cuanto a las herramientas informáticas que se utilizarán en el desarrollo de la propuesta, se destacan las siguientes:

- **GeoGebra:** es un software dinámico destinado a la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas en diferentes niveles. Combina álgebra, análisis y geometría, ofreciendo varias representaciones que se adaptan a las tareas habituales de matemáticas. Es un programa gratuito e interactivo, que permite la manipulación y la experimentación con las construcciones realizadas para obtener determinados resultados y propiedades a partir de la observación directa. Desde el punto de vista del docente, éste puede desarrollar diferentes applets para que utilicen sus alumnos, o también puede usar lo que han diseñado otros profesores. En nuestro caso, simplemente lo usaremos de manera básica para representar algunas funciones, o usar algunos comandos que nos permitan calcular el área de una determinada región o que nos calcule una determinada integral.

- **Kahoot:** es una herramienta online gratuita que puede utilizarse para crear cuestionarios de evaluación en el aula. El profesor ha de registrarse para poder diseñarlos. Una vez creado, basta con proyectar en clase las preguntas del concurso: los alumnos pueden unirse con sus dispositivos móviles, sus ordenadores portátiles o sus tablets a través de un código de invitación que el profesor les proporcionará, y deberán responder a la respuesta que consideren que es la correcta. Únicamente se realizará en una actividad, pero se les preguntará que si lo desean, el profesor podrá seleccionar más preguntas para que practiquen en casa y se preparen para el examen.

Temporalización de las actividades

La propuesta didáctica se llevará a cabo durante 15 sesiones de 50 minutos (duración habitual de una clase de Bachillerato). Como ya hemos mencionado la propuesta didáctica se fragmentará en 8 sesiones en las que habrá que resolver varios ejercicios en cada una de ellas. Para resolver los ejercicios, el docente dejará un tiempo estimado que dependerá del ejercicio en cuestión. El profesor en cualquier momento, tras comprobar el avance de los alumnos, podrá ampliar el plazo o adelantarlo. Cuando se haya acabado el tiempo, se hará una puesta en común de los resultados obtenidos, y se procederá a la corrección de este, no totalmente detallada, pues el profesor ha ido detectando los errores cometidos. Además, el docente mencionará las dificultades más habituales que ha podido advertir tras su observación. Al acabar, el docente o bien comenta rigurosamente los contenidos teóricos detrás del ejercicio, o bien proporciona el siguiente problema a realizar.

Dentro de estas 15 sesiones, está incluida la sesión de evaluación, que como ya comentaremos será la realización propia de un examen, en la que se comprobará el nivel adquirido por los alumnos. Esta sesión será de 90 minutos, tiempo estimado en realizar el examen de EBAU.

A continuación, se procederá a detallar el número de sesiones que se dedicará a cada una de las actividades. Cabe observar que es posible, tomando una actitud realista, que no se puedan llevar todas las actividades al aula o, al menos, todos los ejercicios que se proponen en esta propuesta. Esto puede depender de diversos factores, por ejemplo, el nivel de los alumnos, las exigencias de las EBAU en el curso en cuestión, que se dedique más tiempo a algún tema en particular o a alguna actividad de esta propuesta, del previsto, etc. En cualquier caso, se presenta el cronograma, a priori, de las actividades:

- Actividad 1: Esta actividad consta de 3 problemas, por lo que se llevará a cabo en 2 sesiones. En la primera sesión se realizarán los dos primeros problemas, al presentar un carácter más introductorio, y el tercero en una sesión única, pues nos va permitir introducir la aproximación por sumas de Riemann.

- Actividad 2: Esta actividad, al igual que la anterior, consta de 3 problemas, de carácter muy similar. Se realizará en 2 sesiones.

- Actividad 3: Esta actividad al constar de dos problemas relativos con el cálculo de sumas de Riemann, se llevará a cabo en dos sesiones, una para cada problema.

- Actividad 4: En esta actividad se van a realizar problemas para identificar distintas propiedades de las integrales. Consta de 6 problemas, por lo que tiene previsto realizarse en unas 2 o 3 sesiones. Al haber tantos problemas, en caso de estar limitados de tiempo, se recortarán problemas de esta parte.

- Actividades 5 y 6: Estas dos actividades son relativas a la visualización de la relación entre derivada e integral, el teorema fundamental del cálculo y a la regla de Barrow como aplicación al cálculo de primitivas. Se realizarán en 3 sesiones. En una primera sección, se resolverá un problema para que el alumno llegue por sí mismo a observar la relación entre la integral y la derivada. En la segunda sesión se introducirá de manera rigurosa y formal el teorema fundamental del cálculo y la Regla de Barrow y se realizará la actividad del Kahoot!. Y en la última sesión se realizarán problemas en los que haya que aplicar los contenidos vistos el día anterior. Al haber muchos ejercicios se dejarán para casa los que falten por realizar.

- Actividad 7: En esta actividad se explicará cómo calcular el área limitada entre dos funciones. Se llevará a cabo en una única sesión.

- Actividad 8: En esta última sesión el profesor proporcionará la fórmula para el cálculo de un volumen de revolución y se realizarán ejercicios. En caso de estar limitados de tiempo, esta actividad se recortará pues en Selectividad no se suele preguntar este tipo de problemas.

4.9. Planificación de actividades y tareas

En esta sección se van a mostrar las diferentes actividades que se va a plantear a los alumnos durante todas las sesiones dedicadas a la propuesta. Como ya hemos mencionado, los alumnos serán partícipes de su propio proceso de enseñanza y aprendizaje, por lo que éstos, armados de todos los conocimientos adquiridos durante el curso o en cursos previos, deben llevar a cabo todo tipo de estrategias que para realizar correctamente los ejercicios de la actividad. Los alumnos contarán con material disponible que quieran, tanto el libro de la asignatura, las notas tomadas a lo largo del curso y además contarán con una tablet para buscar información si es preciso. No obstante, el profesor irá resolviendo las dudas que el alumnado vaya teniendo. Todas las actividades se llevarán a cabo en parejas, con el fin mencionado en la sección anterior. A continuación se describirán cada una de las actividades, los ejercicios que las componen, qué se pretende conseguir con ellos y la resolución como cabría esperar que la hiciera el alumno, en algunos casos más detallada y en otros descrita de manera sucinta.

Actividad 1

Esta primera actividad constará de dos partes. En la primera, los alumnos deberán obtener la fórmula del área de un polígono regular y de otro irregular, usando la técnica de dividir las figuras propuestas como suma de otras figuras más sencillas, es decir, el alumno conoce la fórmula de su área. Además, deberán obtener la fórmula genérica de un polígono regular que, más tarde, en la parte dos, les será útil. Posteriormente, en la segunda parte de la actividad, el alumno deberá conseguir obtener el área de un círculo cualesquiera a partir de aproximaciones sucesivas por polígonos regulares inscritos en él, y también, mediante aproximaciones por rectángulos de base cada vez menor.

Creemos que esta actividad es buena para empezar a estudiar el concepto de integral, en primer lugar por su carácter histórico, pues la integral surgió en la Antigua Grecia ligado al cálculo de áreas planas y porque creemos que este planteamiento puede ser beneficioso para, posteriormente, pasar a estudiar las sumas de Riemann para aproximar áreas bajo determinadas curvas.

Además, en las prácticas que he realizado he podido observar que los alumnos saben calcular el área de una figura geométrica simple, conocida, es decir, de las que su fórmula está descrita. Pero ya no les resulta tan sencillo obtener el área de una figura más compleja, compuesta por varias figuras simples. Es por ello que me he tomado la libertad de introducirlo como primera parte de la actividad, pues considero que si dadas dos figuras simples no saben dar el área total, cuando desarrollemos aproximaciones al área bajo una curva mediante sumas de Riemann, el alumno no va a entender lo suficientemente bien la resolución del ejercicio, lo que llevará al fracaso de éste. Aunque estemos en un curso que no nos permite perder demasiado tiempo, debemos de garantizar que el alumno, al principio de los temas, lleve una buena base de los conceptos anteriores que serán útiles en los procesos que se desarrollarán en éste.

Ejercicio 1.1. El profesor de la asignatura de Plástica del instituto quiere realizar un mural con sus alumnos de tercer curso formado únicamente por baldosas hexagonales, las cuales deben tener la forma siguiente:

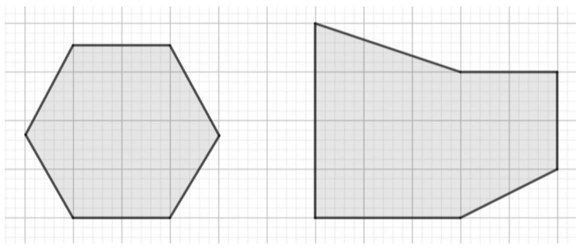


Figura 4.1: Hexágono regular e irregular.

Como el profesor no sabe calcular el área de un hexágono pide ayuda a sus estudiantes de Matemáticas. Ayudar al profesor a encontrar la fórmula del área de cada uno de ellos. Además, se pregunta si ambas figuras al ser hexágonos tendrán la misma fórmula. ¿Todos los polígonos regulares tienen la misma fórmula para calcular su área? Demostrarlo.

Lógicamente para dar la fórmula del área del hexágono regular, el alumno no puede dar como resultado la fórmula explícita, sin ningún argumento adicional, es decir, no sería válido que el alumno respondiera que la fórmula es $\frac{Perimetro\ \times\ apotema}{2}$, sin acompañarlo de un razonamiento geométrico. Se pretende, por ejemplo, que el alumno descomponga el hexágono regular en seis triángulos equiláteros iguales y obtenga la fórmula mencionada anteriormente usando que

$$A_{hex_{reg}} = 6 \cdot \frac{lado \cdot apotema}{2} = \frac{(6 \cdot lado) \cdot apotema}{2} = \frac{Perimetro \cdot apotema}{2}. \tag{4.1}$$

Siguiendo el mismo razonamiento, para hallar la fórmula del área del polígono irregular, el alumno debe dividir esta figura, por ejemplo, en dos cuadrados y en dos triángulos. Haciendo uso de las fórmulas conocidas llegaría a obtener la fórmula de la figura de partida. Claramente el área de estos dos hexágonos no viene representada por la misma fórmula.

En lugar de haberse realizado esta descomposición para obtener la fórmula del área, en ambos casos se podía haber calculado como la suma de dos trapecios. En el caso regular, éstos son iguales. Pero como no es habitual que el alumno recuerde la fórmula del área de esta figura geométrica se ha optado por tomar como referencia cuadrados y triángulos. Para dar la fórmula genérica del área de un polígono regular de n lados, se pretende que se siga el mismo razonamiento que se ha utilizado en (4.1).

Con esta primera parte de la actividad se pretende que el alumno adquiera práctica y visualice cómo puede dividir una figura en otras más simples y conocidas para hallar lo que se pretende. En este ejercicio trabajamos el pensamiento computacional, tanto al dividir una unidad como suma de otras contenidas en ella, como a la hora de obtener una fórmula de carácter genérico a partir de unos primeros resultados. Asimismo, con este ejercicio trabajamos la variabilidad perceptiva de Dienes, pues en ocasiones, muchos alumnos asocian un hexágono cualquiera al hexágono regular, pocas veces representan un hexágono irregular tras pedírseles que dibujen un hexágono. Además, nos ayuda a seguir el razonamiento propuesto pues para estos últimos no hay ninguna fórmula del área conocida a priori, sino que debemos dividir la figura en otras más sencillas para poder calcular su área.

Ejercicio 1.2. Posteriormente, el profesor quiere averiguar la fórmula del área de un círculo cualquiera. Para ayudarle a obtener el área genérica de este objeto geométrico, recordar que Eudoxo, en la Antigua Grecia, aproximaba el área del círculo mediante polígonos inscritos, de forma que al aumentar el número de lados, el área de estos polígonos se aproximaba al área del círculo. Seguir el planteamiento de Eudoxo, inscribiendo polígonos regulares dentro del círculo, empezando por el hexágono regular, ¿Qué podemos deducir reiterando este proceso? Usar GeoGebra para visualizarlo mejor.

Con este ejercicio se busca que el alumno parta de un círculo de radio r, bordeado de una circunferencia de longitud $2\pi r$, y que tras dos o tres iteracciones, tal y como se ha indicado, el alumno observe que a medida que aumentamos el número de lados del polígono regular (cuatro, ocho y dieciséis lados) éste cada vez se va aproximando más al círculo de partida. Provocando así que el perímetro y el apotema de estos polígonos se vaya pareciendo cada vez más a la longitud de la circunferencia y al radio del círculo, respectivamente. Es decir, que intuitivamente el círculo se puede considerar como un polígono regular de infinitos lados infinitamente pequeños. De esta forma

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 2\pi r \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = r,$$

siendo respectivamente p_n y a_n el perímetro y el apotema de un polígono P_n de n lados inscrito en el círculo. Así, la superficie del círculo puede venir dada por:

$$A_c = \lim_{n\to\infty} A_{P_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n \cdot a_n}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2.$$

En la figura siguiente se muestra un polígono de n lados, P_n inscrito en el círculo de partida, siendo l_n un lado de P_n, a_n su apotema, por tanto, su perímetro es n veces ese lado, luego el área será $A_{P_n} = \frac{p_n \cdot a_n}{2}$, y suponiendo que el número de lados es muy grande, éste polígono P_n debería coincidir con el círculo.

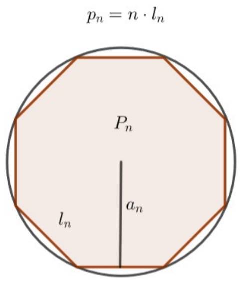


Figura 4.2: Aproximación al área del círculo por polígonos regulares.

Ejercicio 1.3. El director del instituto al ver el planteamiento llevado a cabo por parte de los alumnos para la obtención de la fórmula del área del círculo, les incita a hallar el área usando rectángulos, pues es la única figura geométrica de la que conoce su área. Además, como no quiere que obtengan una fórmula genérica, les comenta que el radio del círculo tiene que ser diez centímetros.

Como este ejercicio puede ser complicado averiguar cómo empezar y cómo escoger estos rectángulos. Por ello, el profesor les va a proporcionar una serie de preguntas para que los alumnos vayan siguiendo esos pasos y lleguen finalmente a la resolución sin demasiadas dificultades. El profesor en todo momento irá viendo como trabajan los alumnos, resolviendo así al alumno las dificultades con las que se encuentren. Finalmente, se hará una puesta en común de los resultados obtenidos a toda clase. El profesor empezará dando las siguientes indicaciones:

Para resolver el ejercicio usando este enfoque, vamos a dividir el círculo en cuatro sectores iguales, los correspondientes al cortar cada uno de los ejes coordenados con el círculo y a hallar su área. El área del círculo será, por tanto, cuatro veces el área de un sector. Trabajemos, por ejemplo, con el sector obtenido al cortar nuestro círculo con el primer cuadrante. Es decir:

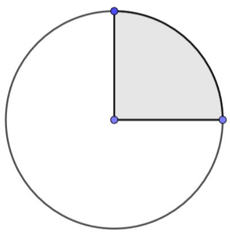


Figura 4.3: Sector circular.

Con los gráficos que aparecen representados en la Figura 4.4, responder a las siguientes preguntas:

1. En la figura de la izquierda de la Figura 2.1 : ¿Cuánto vale el área de cada uno de los rectángulos? ¿Y su suma?

2. En la figura de la izquierda de la Figura 2.1: ¿Qué área ocupan ahora esos cuatro rectángulos?

3. ¿La diferencia entre el área del sector y de la suma acumulada en cada una de las figuras es igual? Justifica la respuesta anterior.

4. Si ahora tomamos rectángulos de anchura 1 cm, responde a la pregunta 2 y 3 nuevamente con los datos de este apartado. Representadlo con GeoGebra.

5. Si iteramos este proceso un total de n veces, ¿Cuántos rectángulos nos aparecerán? ¿Qué longitud tendrán los rectángulos en cuestión?

6. Si tomamos como sucesión las longitudes de los rectángulos en cada iteracción: ¿Hacia qué número converge dicha sucesión? ¿Cuál será la diferencia entre el área del sector circular y de la suma de los rectángulos? ¿Qué podemos afirmar entonces del área del sector circular?

Figura 4.4: Aproximaciones al sector circular con 2 y 4 rectángulos, respectivamente.

Con estas preguntas buscamos que el alumno observe que a medida que aumenta el número de rectángulos y éstos, a su vez, se van haciendo más estrechos, la diferencia entre el área del sector circular y de la suma de los rectángulos disminuye. Llegando a un punto que se hace nula. Por tanto, en el último apartado pretendemos que el alumno responda que el área del sector circular coincide, realizando infinitas iteracciones, con el área de los rectángulos inscritos que la aproximan. La diferencia entre el área del sector circular y de la suma de los rectángulos se va haciendo cada vez más pequeña; es decir, si tomamos la sucesión formada por cada una de estas diferencias en cada una de las iteracciones, ésta va a converger hacia cero.

Con este ejercicio en general, y con el apartado 5, en particular, trabajaremos el pensamiento computacional, pues a partir de los dos o tres primeros casos, se pretende que el alumno obtenga una fórmula genérica para la n-ésima iteracción. Las fórmulas genéricas para el número de rectángulos que nos aparecen en cada iteracción y la longitud de cada uno de éstos, es

$$R_n = 2^n \quad \text{y} \quad L_{R_n} = 2^{3-n}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

puesto que para la primera iteracción tenemos 2 rectángulos de longitud 4; en la segunda, 4 rectángulos de longitud 2; y en la tercera, 8 rectángulos de longitud 1. Con esta información podemos formarnos la sucesión $\{4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$, que lógicamente ésta converge hacia 0.

Actividad 2

Tanto en esta actividad como en las siguientes se va a seguir la metodología de aprendizaje basado en problemas, por tanto, los alumnos deberán resolver los problemas de la vida real que se les propone usando todo tipo de estrategias vistas en la asignatura a lo largo del curso y usando todos conocimientos previos tanto de esa asignatura como de cualquier otra, y ellos mismos deben llegar a la teoría en la que se enmarcan estos problemas usando todos estos conocimientos.

Esta actividad tiene como objetivo que a partir de una serie de problemas contextualizados, el alumno calcule el área bajo una recta (constante, lineal y afín) y proporcione una fórmula general para calcular el área de ésta en un determinado intervalo $[a, b]$. Para ello, se deben tener en cuenta las fórmulas de las áreas de figuras geométricas planas conocidas que se han visto en la secundaria a lo largo de los años. Si el alumno no recuerda la fórmula explícita del área en cuestión, se le recomendará que la separe en otras figuras más sencillas cuya fórmula del área si que conozca, y así el área de la figura original será la correspondiente a sumar el área de cada una de estas figuras en las que se ha dividido la primera. Es decir, se usa la técnica vista en la actividad anterior.

Los ejercicios que aparecen en esta actividad vienen contextualizados en un marco determinado, así el alumno ve la aplicación que pueden tener las Matemáticas en su vida diaria. Los problemas vienen secuenciados por diferentes preguntas, de menor a mayor dificultad, para que el alumno pueda llegar a la conclusión que pide el ejercicio. En los ejercicios aparecen conceptos básicos vistos en la asignatura de Física y Química a lo largo de la secundaria, como velocidad, aceleración, movimiento uniformemente acelerado, etc., el alumno debe recordar estos conceptos y aplicarlos correctamente, para obtener así una solución precisa a los problemas.

A continuación se muestran los ejercicios que se proporcionarán a los alumnos, aparece la solución a ellos y lo que se pretende con dicho problema.

Ejercicio 2.1. Un senderista que sale a andar diariamente, comienza todos los días a una velocidad constante de 5 km/h.

a) Calcula la distancia que recorre el senderista pasadas dos horas.

b) Representa la gráfica de la función $v(t)$. Usa GeoGebra.

c) Halla el área limitada entre la gráfica de la función $v(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = 0$ y $t = 2$. ¿Qué observas con respecto a la relación entre el área calculada y el resultado del primer apartado?

d) Pasadas dos horas, el senderista como prevé que unas cuatro horas va a comenzar a llover, decide aumentar su velocidad a un ritmo medio de 7 km/h durante las tres horas siguientes que le quedan de trayecto. Representa la gráfica de la función resultante y calcula su desplazamiento total.

e) ¿Cuál el espacio recorrido por el senderista en el intervalo $[1, 4]$?

f) ¿Qué representa el área bajo la función $v(t)$ de la figura del apartado b)? ¿En qué unidades de medida se expresa?

g) Usando los apartados anteriores, calcular el espacio recorrido por el senderista si anda a una velocidad constante de $f(x) = k$ durante un intervalo de tiempo $[a, b]$.

Con este ejercicio pretendemos que el alumno observe por sí mismo cómo calcular el área bajo una recta horizontal de la forma $y = f(x) = k$, siendo k constante, y comprendida entre el eje de abscisas y dos rectas verticales $y = a$ e $y = b$. En el último apartado el estudiante debe responder que el área bajo la gráfica de una función constante $f(x) = k$ en un intervalo $[a, b]$ viene determinada por $A = k(b - a)$, siendo $b - a$ la longitud del intervalo.

Con los apartados a) y c) el alumno debe darse observar que el área comprendida entre la función $v(t) = 4$, el eje de abscisas y las rectas $t = 0$ y $t = 2$ coincide con el espacio que recorre el senderista en dos horas. Que es lo que se debe hacer explícito en el apartado f), pues el alumno debe responder que el área bajo la función $v(t)$ en un intervalo de tiempo $[a, b]$ representa el espacio recorrido por el senderista en dicho intervalo. Se pretende con esto que el alumno, llegado a este punto, observe que $A = s$ en cada instante de tiempo t, siendo A y s, el área del rectángulo y el espacio recorrido por el senderista, respectivamente. Y por tanto, que el área bajo la recta constante $f(t) = 5$ debe ser $s(t) = 5t$. Y si queremos determinar el área en un tiempo concreto t simplemente habría que evaluar la función en este valor. Por ello, el área bajo la gráfica de una función constante $f(x) = k$ en un intervalo $[a, b]$ viene determinada por $A = k(b - a)$, siendo $b - a$ la longitud del intervalo. Se muestra a continuación una representación del área bajo la función $f(t) = 5$

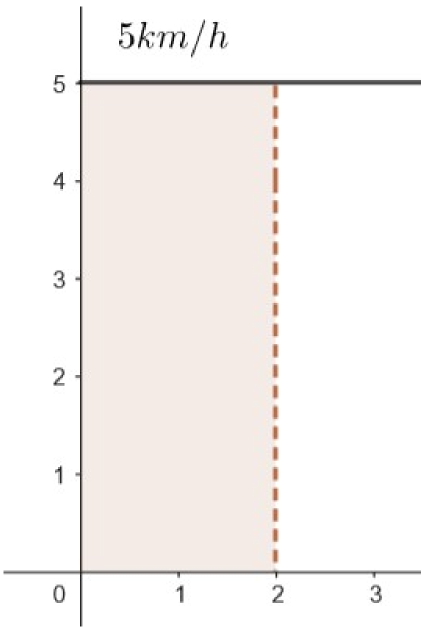


Figura 4.5: Área comprendida bajo la función $f(t) = 5$.

En el apartado d) hay que obrar igual que en los apartados b) y c). En este caso, la representación vendría dada por

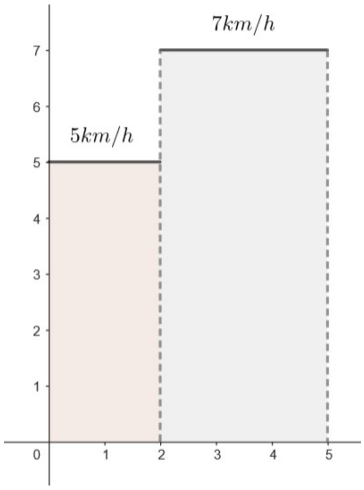


Figura 4.6: Área comprendida bajo dos funciones constantes.

Con el apartado e) pretendemos que el alumno sea consciente de que es lo que hay que realizar: primero calcular el área bajo la gráfica de una función constante $f(x) = 5$ en un intervalo $[1, 2]$, y después calcular el área bajo la gráfica de una función constante $f(x) = 7$ en un intervalo $[2, 4]$, y sumarlas, puesto que el espacio recorrido por el automóvil en el intervalo $[1, 4]$ será la suma del espacio recorrido a una velocidad constante de 5 km/h en el trayecto $[1, 2]$ y del espacio recorrido a una velocidad constante de 7 km/h en el trayecto $[2, 4]$

Ejercicio 2.2. Un chico lanza un balón desde un balcón cuya altura al suelo es desconocida, pero el compañero que se encuentra abajo, como dispone de un dispositivo móvil, mide con el cronómetro el tiempo que tarda en llegar el balcón al suelo: 5 segundos. Conviniendo en que la aceleración de la gravedad es de $g = 10\ m/s^2$.

a) Representa una gráfica que represente la velocidad del balcón en función del tiempo.

b) Calcula la altura a la que se encuentra el balcón del suelo.

c) ¿Qué magnitud representa el área encerrada por la función $v(t)$ en el intervalo $[0, 5]$?

d) Si en lugar de haber tardado 5 segundos, hubiese tardado 8, calcula la altura a la que se encuentra el balcón del suelo.

e) Observando los apartados c) y d), calcular la velocidad a la que caerá el balón determinado dependiendo del tiempo t.

Para el desarrollo de este problema los alumnos deberán tener presente la fórmula del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, visto en la asignatura de Física y Química de cursos previos. Sabiendo que la velocidad $v(t)$ para un instante de tiempo dado, viene determinada por la función $v(t) = at + v_0$, siendo a la aceleración constante en un momento determinado de tiempo, en este ejercicio es 10, y v_0 una velocidad inicial, en este caso es cero. Entonces, la posición en función del tiempo se expresa por la fórmula

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \text{ donde } s_0 \text{ es la posición inicial.}$$

La función velocidad que se tiene que representar en el primer apartado es evidentemente una función lineal, esta función nos representa la velocidad que lleva el balón al caer desde el balcón. Por lo que el alumno debe determinar cuál es el área que queda encerrada entre esta función, el eje de abscisas y la recta $y = b$, siendo b el tiempo que tarda en caer el objeto al suelo. Que nos representa la distancia que recorre el balón en un instante de tiempo determinado, o lo que es lo mismo, la altura a la que se encuentra el balcón del suelo. A continuación se representa el área bajo la función $f(t) = 10t$ que nos piden

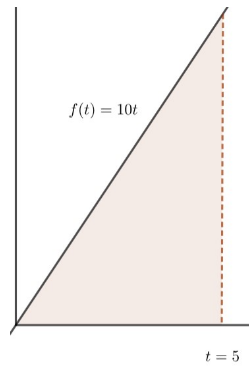


Figura 4.7: Área comprendida bajo la función $f(t) = 10t$.

Este ejercicio es muy interesante, pues en el apartado c) se pide determinar el área comprendida entre la función $v(t) = 10t$ en el intervalo $[0, 5]$, que se puede calcular de forma sencilla puesto que tenemos un triángulo de altura $v(t) = 10 \cdot 5 = 50$ y base $b = 5$, por tanto, el área será $A = \frac{5 \cdot 50}{2} = 125u^2$, que determina la distancia que ha recorrido la piedra en caer al suelo en un tiempo de 5 segundos. Y en el apartado dos nos piden calcular, usando la fórmula $s = \frac{1}{2}at^2$, la altura del balcón cuando $t = 5$. Evidentemente, el resultado obtenido en el segundo y en el tercer apartado deben coincidir por la definición que se ha realizado.

Se pretende así que el alumno, llegado a este punto, observe que $A = s$ en cada instante de tiempo t. Por tanto, que el área bajo la recta $v(t) = 10t$ debe ser $s(t) = \frac{1}{2}10t^2$. Y si queremos determinar el área en un tiempo t cualquiera no hay nada más que evaluar la función en el tiempo concreto. En el caso general, en el que la recta sea $y = mx$ el área bajo la curva y delimitada por las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de abscisas, tiene que venir determinada por la fórmula

$$A = \frac{(b - a)|mb - ma|}{2}.$$

Ejercicio 2.3. Con la inminente llegada del verano, se empiezan a limpiar las piscinas. En un bloque de vecinos, para la limpieza de una piscina, el sistema de vaciado expulsa un caudal de agua que viene representado mediante la función $f(t) = 3t + 5\ m^3/h$. Este problema ha sido extraído de Otal (2015).

a) Representa la gráfica del caudal en función del tiempo.

b) ¿Qué magnitud representa el área encerrada por la función en el intervalo $[0, 4{,}5]$?

c) ¿Qué volumen de agua se ha expulsado entre la primera y la tercera hora tras haber activado el sistema de vaciado? Determina también el volumen de agua que se ha expulsado en el segundo apartado.

d) Usando las fórmulas genéricas de cómo obtener el área bajo una recta $f(x) = k$ y $f(x) = tx$ en un intervalo $[a, b]$, con t y k constantes, averiguar la fórmula genérica del área bajo la función afín $f(x) = k + tx$ en un intervalo $[a, b]$.

La representación gráfica de la función que calcula el caudal dependiendo del tiempo se muestra en la siguiente figura, donde la zona sombreada corresponde al área bajo la función $f(t) = 3t + 5$ en el intervalo $[0, 4{,}5]$

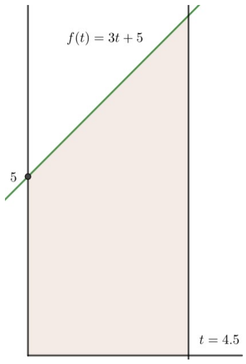


Figura 4.8: Área comprendida bajo la función $f(t) = 3t + 5$.

Evidentemente, en el segundo apartado los alumnos deberán responder que el área encerrada por la función en el intervalo $[0, 4{,}5]$ representa el volumen de agua que ha sido expulsada de la piscina en cinco horas tras haber activado el sistema de vaciado. Para dar respuesta al tercer apartado, debemos calcular el área del trapecio delimitado por la función $f(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t = a$ y $t = b$, para a y b siendo respectivamente, 0 y 1 y 3 y 4,5. El alumno debe conocer que el área de un trapecio viene formulada de la siguiente manera $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$. En este problema además se trabaja con la variabilidad perceptiva de Dienes pues el trapecio se encuentra girado, lo que puede dificultar al alumno averiguar quién es la base menor, quién es la base mayor y, por último, la altura. Además, el alumno debe darse cuenta de que la longitud de la base menor y mayor viene determinada por el valor de la función f en a y en b, respectivamente, y h es la longitud del intervalo. De esta forma, el área del trapecio en cada uno de los casos es:

$$A = \frac{(f(1) + f(3)) \cdot 2}{2} = \frac{(8 + 14) \cdot 2}{2} = 22m^3, \quad \text{si el intervalo es} \quad [1, 3]$$

$$A = \frac{(f(0) + f(4{,}5)) \cdot 4{,}5}{2} = \frac{(5 + 18{,}5) \cdot 4{,}5}{2} = 52{,}875m^3, \quad \text{si el intervalo es} \quad [0, 4{,}5]$$

Para responder al segundo apartado el alumno debe darse cuenta de que el trapecio formado por la recta $f(t) = 3t + 5$, el eje de abscisas y las rectas $t = 0$ y $t = 4{,}5$ es la suma de un rectángulo y de un triángulo, casos calculados en los ejercicios 1 y 2. Por lo que debemos calcular las áreas de las figuras que se muestra en la Figura 4.8. Tenemos, por tanto, que calcular el área del rectángulo delimitado la recta de la función constante $f(t) = 5$, el eje de abscisas y las rectas $t = 0$ y $t = 4{,}5$, y el área del triángulo delimitado entre la recta de función $f(t) = 3t$, la recta horizontal $f(t) = 5$ y las rectas $t = 0$ y $t = 4{,}5$, que obviamente, ésta es la misma que calcular el área del triángulo delimitado entre la recta de función $f(t) = 3t$, el eje de abscisas y las rectas $t = 0$ y $t = 4{,}5$, pues lo único que hacemos es trasladarlo cinco unidades hacia abajo. En consecuencia, usando las fórmulas vistas en los ejercicios previos tenemos que

$$A_{rectangulo} = k(b-a) = 5(4{,}5-0) = 22{,}5,$$
$$A_{triangulo} = \frac{(b-a)|mb-ma|}{2} = \frac{(4{,}5-0)|3\cdot 4{,}5 - 3\cdot 0|}{2} = 30{,}375,$$

luego el área del trapecio será $A_{trapecio} = 22{,}5 + 30{,}375 = 52{,}875$, que coincide con los cálculos del apartado anterior. En consecuencia, la fórmula genérica del área bajo una recta afín de la forma $f(x) = k + tx$ en un intervalo $[a, b]$, viene determinada por

$$A = k(b-a) + \frac{(b-a)|tb-ta|}{2} = \frac{(tb+k)+(k-ta)}{2}(b-a).$$

Actividad 3

En esta actividad se van a calcular áreas bajo curvas usando aproximaciones con sumas de Riemann, tanto por defecto como por exceso. Se partirá de dos ejercicios y los alumnos tendrán que calcular el área bajo una función lineal y una función cuadrática, respectivamente, de forma muy paulatina y con ayuda de representaciones, para que el proceso quede bien adquirido por los alumnos. Posteriormente, el profesor procederá a dar una explicación detallada y rigurosa de las sumas de Riemann, se verá así la integral como límite de una suma. Esta actividad al tener un nivel más avanzado, el profesor estimará si realizarla o no, dependiendo de las condiciones del alumnado o dependiendo de otros factores, como el tiempo. Al haberse visto en una actividad anterior el cálculo del área de un círculo con sumas de Riemann, el docente podrá prescindir de esta actividad en caso necesario.

Ejercicio 3.1. Marina se ha comprado unos pendientes con forma de triángulo cuyos catetos miden 1 cm de lado. Como no le gusta el color que tienen, quiere saber cuánta pintura será necesaria para pintarlos. Para ayudar a Marina a resolver cuánta pintura será necesaria para cambiar el color de sus pendientes sigue las siguientes condiciones: Ten en cuenta que hay que pintar los dos pendientes y por ambos lados.

- Usa la técnica vista en el último ejercicio de la Actividad 1, es decir, aproxima el área de dicha figura por rectángulos inscritos.
- Primero aproxima el triángulo por rectángulos cuyo extremo superior izquierdo corte a la hipotenusa, y después aproxima el triángulo por rectángulos cuyo extremo superior izquierdo corte a la hipotenusa.
- Primero aproxímalo usando dos rectángulos, después cinco, y finalmente, diez. Por último, sigue el mismo razonamiento probándolo con un número genérico de n rectángulos. Realizando un paso al límite calcula el área del triángulo.
- Comprueba mediante otras técnicas si el área obtenida es correcta.

Indicación. Ten en cuenta que hay que pintar los dos pendientes y por ambos lados. Si te es de ayuda recuerda que la suma de los primeros n números naturales viene dada por

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución. Tenemos que calcular el área comprendida entre la recta $y = x$, el eje de abscisas y la recta $x = 1$, es decir, debemos calcular el área del objeto sombreado de la Figura 4.9

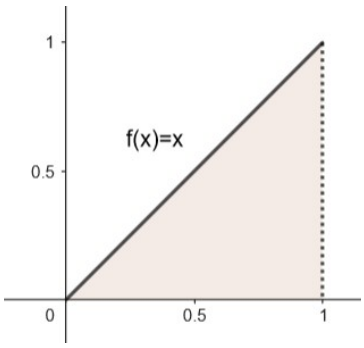


Figura 4.9: Área comprendida entre la recta $y = x$, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

Con los problemas llevados a cabo en la actividad anterior, al alumno le debe resultar sencillo calcular el área de esta región sombreada, al ser el área de un triángulo, es decir, el área bajo una recta lineal, usando la fórmula hallada en el ejercicio 2 de la actividad 2, tenemos que

$$A = \frac{(1-0)|1-0|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Vamos a obtenerla ahora siguiendo el método de sumar rectángulos. Supongamos en primer lugar, que el extremo superior izquierdo del rectángulo corta a la recta $y = x$, y calculemos el área total de estos cuando $n = 2$, $n = 5$ y $n = 10$, siendo n el número de rectángulos inscritos en el triángulo. Pretendemos que el alumno realice las representaciones que aparecen en la Figura 4.10.

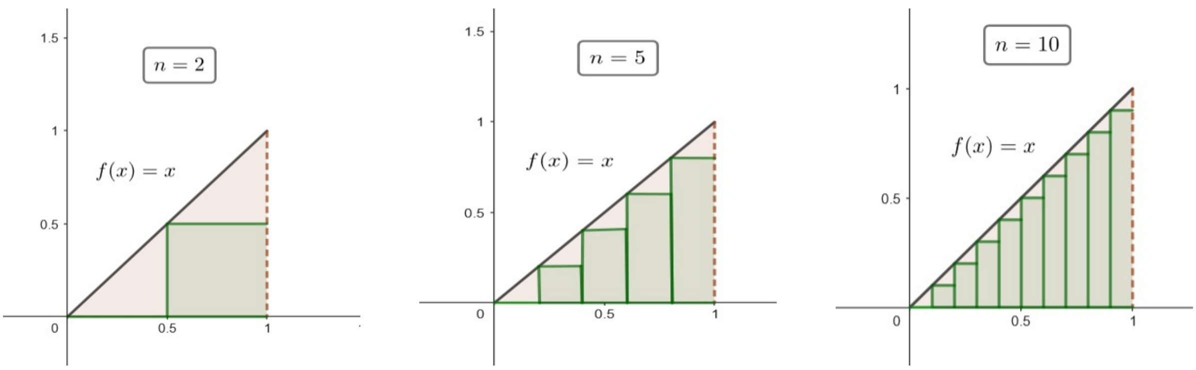


Figura 4.10: Aproximación por defecto al área del triángulo por rectángulos.

Cuando $n = 2$, tenemos dos rectángulos, entonces el intervalo $[0, 1]$ viene dado como unión de dos subintervalos $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Ambos rectángulos tienen una anchura de $\frac{1}{2}$ y la altura es

$f(0)$ y $f(\frac{1}{2})$, respectivamente. Por lo tanto, el área de la suma de ambos es

$$s_2 = A_{R_1} + A_{R_2} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Cuando $n = 5$, tenemos cinco rectángulos, entonces el intervalo $[0, 1]$ viene dado como unión de cinco subintervalos $\left[0, \frac{1}{5}\right]$, $\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$, $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$, $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$ y $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$. Ambos rectángulos tienen una anchura de $\frac{1}{5}$ y la altura es $f(0)$, $f(\frac{1}{5})$, $f(\frac{2}{5})$, $f(\frac{3}{5})$ y $f(\frac{4}{5})$, respectivamente. Por lo tanto, el área de la suma de ambos es

$$s_5 = \sum_{i=1}^{5} A_{R_i} = \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

Cuando $n = 10$, tenemos diez rectángulos, entonces el intervalo $[0, 1]$ viene dado como unión de diez subintervalos $\left[0, \frac{1}{10}\right]$, $\left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right]$, $\ldots$, $\left[\frac{9}{10}, 1\right]$. Ambos rectángulos tienen una anchura de $\frac{1}{10}$ y la altura es $f(0)$, $f(\frac{1}{10}) \ldots, f(\frac{9}{10})$, respectivamente. Por lo tanto, el área de la suma de ambos es

$$s_{10} = \sum_{i=1}^{10} A_{R_i} = \frac{1}{10} \cdot 0 + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}.$$

Veamos ahora que ocurre para un n general. Como tenemos n rectángulos, partimos el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

construimos así una partición del intervalo $[0, 1]$

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_{n-1} = \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1 = x_n.$$

tenemos que cada rectángulo R_i tiene anchura $\frac{1}{n}$, puesto que $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$, y como altura $f(x_{i-1}) = \frac{i-1}{n}$, ya que cada extremo izquierdo del rectángulo es el corte del rectángulo R_i con la función $f(x) = x$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por tanto, la suma de los n rectángulos viene dada como

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} A_{R_i} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)}{2n},$$

si calculamos el límite cuando n tiende a infinito de esta suma, habremos hallado el área bajo la curva de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)}{2n} = \frac{1}{2},$$

que coincide con el área calculada con los métodos de la Actividad 2.

Realicemos ahora el proceso análogo pero ahora recubriendo superiormente por rectángulos el triángulo de la Figura 2.9. Es decir, supongamos ahora que los rectángulos cortan a la recta $f(x) = x$ en sus extremos superiores derechos. Calculemos, en primer lugar, el área total de estos rectángulos cuando $n = 2$, $n = 5$ y $n = 10$, siendo n el número de rectángulos que circunscriben la figura anterior.

Cuando $n = 2$, tenemos dos rectángulos, entonces el intervalo $[0, 1]$ viene dado como unión de dos subintervalos $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Ambos rectángulos tienen una anchura de $\frac{1}{2}$ y la altura es $f(\frac{1}{2})$ y $f(1)$, respectivamente. Por lo tanto, el área de la suma de ambos es

$$S_2 = A_{R_1} + A_{R_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

Cuando $n = 5$, tenemos cinco rectángulos, entonces el intervalo $[0, 1]$ viene dado como unión de cinco subintervalos $\left[0, \frac{1}{5}\right]$, $\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$, $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$, $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$ y $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$. Ambos rectángulos tienen una anchura de $\frac{1}{5}$ y la altura es $f(\frac{1}{5})$, $f(\frac{2}{5})$, $f(\frac{3}{5})$, $f(\frac{4}{5})$ y $f(1)$, respectivamente. Por lo tanto, el área de la suma de ambos es

$$S_5 = \sum_{i=1}^{5} A_{R_i} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Cuando $n = 10$, tenemos diez rectángulos, entonces el intervalo $[0, 1]$ viene dado como unión de diez subintervalos $\left[0, \frac{1}{10}\right]$, $\left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right], \ldots, \left[\frac{9}{10}, 1\right]$. Ambos rectángulos tienen una anchura de $\frac{1}{10}$ y la altura es $f(\frac{1}{10})$, $f(\frac{2}{10}) \ldots, f(1)$, respectivamente. Por lo tanto, el área de la suma de ambos es

$$S_{10} = \sum_{i=1}^{10} A_{R_i} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} + \cdots + \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}.$$

Esperamos que el alumno realice las representaciones que se muestran en la Figura 4.11.

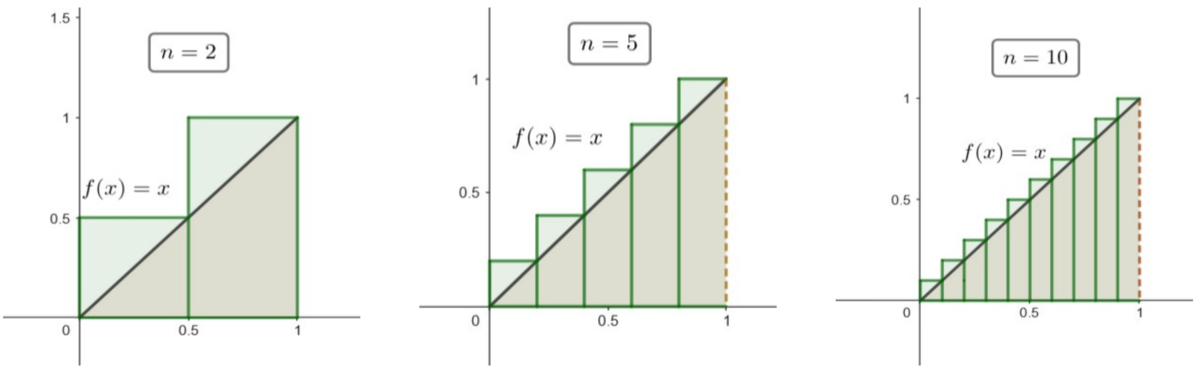


Figura 4.11: Aproximación por exceso al área del triángulo por rectángulos.

Veamos ahora que ocurre para un n general. Como tenemos n rectángulos, partimos el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

construimos así una partición del intervalo $[0, 1]$

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_{n-1} = \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1 = x_n.$$

tenemos que cada rectángulo R_i tiene anchura $\frac{1}{n}$, puesto que $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$, y como altura $f(x_i) = \frac{i}{n}$, ya que cada extremo izquierdo del rectángulo es el corte del rectángulo R_i con la función $f(x) = x$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por tanto, la suma de los n rectángulos viene dada como

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} A_{R_i} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2n},$$

si calculamos el límite cuando n tiende a infinito de esta suma, habremos hallado el área bajo la curva de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)}{2n} = \frac{1}{2},$$

que coincide con el área calculada con los métodos de la Actividad 2.

Para responder a la pregunta el alumno debe tener en cuenta la indicación que se hizo, pues $\frac{1}{2}$ no es la solución del ejercicio, corresponde al área de una cara de los pendientes. La solución del ejercicio será multiplicar este resultado por cuatro, por tanto, Marina necesitará 2 cm^2 de pintura para cambiar el color de sus pendientes.

El profesor, llegados a este punto, precisará tal y como se puede observar que para cada iteracción n, el área de la gráfica en cuestión se encontrará acotada por

$$s_n \leqslant A \leqslant S_n, \text{ para todo } n,$$

siendo s_n la suma de los n rectángulos inscritos en el triángulo de la Figura 2.4 y, a su vez, S_n es la suma de los n rectángulos circunscritos en el triángulo de dicha figura.

Ejercicio 3.2. Para la próxima legislatura, el alcalde de la ciudad de Valladolid propone diseñar un parque temático en la ciudad y desea construir una rampa de patinaje que siga la curva de la función cuadrática $f(x) = x^2$ con el fin de brindar una experiencia emocionante a los patinadores. Si desea que la rampa tenga una longitud de unos 10 metros, ¿Qué cantidad de material será necesario para construir la rampa de patinaje? Para calcular una aproximación de la misma seguir los siguientes pasos:

- Aproxima el área de la curva $f(x) = x^2$ por rectángulos cuyo extremo superior izquierdo corte a la curva (rectángulos inscritos), y después aproxímala por rectángulos cuyo extremo superior izquierdo corte a la curva (rectángulos circunscritos).
- Primero aproxima la curva usando dos rectángulos, después cinco, y finalmente, diez. Por último, sigue el mismo razonamiento probándolo con un número genérico de n rectángulos.
- Calcula la suma de las áreas de los rectángulos superiores y la suma de las áreas de los rectángulos inferiores.
- El área bajo la gráfica de la función en el intervalo $[0, 10]$ será un número comprendido entre ambas sumas. Calcula dicha aproximación.

Indicación. Si os es de ayuda recordar que la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales viene dada por

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Se va a llevar a cabo dicha resolución para mostrar como cambia las particiones del intervalo al considerarse un intervalo distinto de mayor rango. Que pienso que es un hecho notorio. La resolución es similar a la del ejercicio anterior.

Solución. Tenemos que calcular el área comprendida entre la curva $f(x) = x^2$, el eje de abscisas y la recta $x = 10$, es decir, debemos calcular el área, o al menos aproximar, del objeto sombreado de la siguiente figura

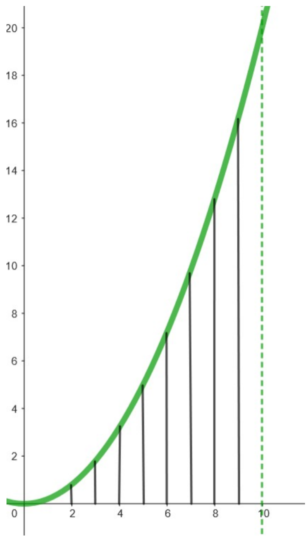


Figura 4.12: Área comprendida entre la recta $y = x^2$, el eje de abscisas y la recta $x = 10$.

Vamos a obtener el área bajo esta gráfica por medio de la aproximación por rectángulos inscritos y circunscritos. En primer lugar, vamos a realizar la aproximación mediante rectángulos inscritos, por tanto, el corte de estos con la gráfica $f(x) = x^2$ se producirá en el extremo superior izquierdo de éstos. Calculemos el área total de los rectángulos que aproximan a la gráfica cuando $n = 2$, $n = 5$ y $n = 10$, siendo n el número de rectángulos inscritos en la región comprendida entre la curva $f(x) = x^2$, el eje de abscisas y la recta $x = 10$.

Cuando $n = 2$, tenemos dos rectángulos, luego el intervalo $[0, 10]$ vendrá dado como unión de dos subintervalos $[0, 5]$ y $[5, 10]$. Ambos rectángulos tienen como anchura 5 cm y como altura $f(0)$ y $f(5)$, respectivamente. Por lo tanto, la suma de las áreas de estos rectángulos es

$$s_2 = A_{R_1} + A_{R_2} = 5 \cdot 0 + 5 \cdot 25 = 125cm^2.$$

Cuando $n = 5$, tenemos cinco rectángulos, entonces el intervalo $[0, 10]$ viene dado como unión de cinco subintervalos $[0, 2]$, $[2, 4]$, $[4, 6]$, $[6, 8]$ y $[8, 10]$. Ambos rectángulos tienen una anchura de 2 cm y la altura es $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ y $f(8)$, respectivamente. Por lo tanto, el área de la suma de ambos es

$$s_5 = \sum_{i=1}^{5} A_{R_i} = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 36 + 2 \cdot 64 = 240cm^2.$$

Cuando $n = 10$, tenemos diez rectángulos, entonces el intervalo $[0, 10]$ viene dado como unión de diez subintervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$, $\ldots$, $[9, 10]$. Ambos rectángulos tienen una anchura de 1 y la altura es $f(0)$, $f(1), \ldots, f(9)$, respectivamente. Por lo tanto, el área de la suma de ambos es

$$s_{10} = \sum_{i=1}^{10} A_{R_i} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + \cdots + 1 \cdot 81 = 285cm^2.$$

Veamos ahora que ocurre para un n general. Como tenemos n rectángulos, partimos el intervalo $[0, 10]$ en n subintervalos:

$$\left[0, \frac{10}{n}\right], \left[\frac{10}{n}, \frac{20}{n}\right], \ldots, \left[\frac{10(n-1)}{n}, 10\right]$$

construimos así una partición del intervalo $[0, 10]$

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{10}{n} < x_2 = \frac{20}{n} < \cdots < x_{n-1} = \frac{10(n-1)}{n} < \frac{10n}{n} = 10 = x_n.$$

tenemos que cada rectángulo R_i tiene anchura $\frac{10}{n}$, puesto que $x_i - x_{i-1} = \frac{10i}{n} - \frac{10(i-1)}{n} = \frac{10}{n}$, y como altura $f(x_{i-1}) = \left(\frac{10(i-1)}{n}\right)^2$, ya que cada extremo izquierdo del rectángulo es el corte del rectángulo R_i con la función $f(x) = x^2$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por tanto, la suma de los n rectángulos viene dada como

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} A_{R_i} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{10(i-1)}{n}\right)^2 \cdot \frac{10}{n} =$$

$$= \frac{10^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{1000}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{500(n-1)(2n-1)}{3n^2} = \frac{500(2n^2 - 3n + 1)}{3n^2},$$

si calculamos el límite cuando n tiende a infinito de esta suma, habremos hallado el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 10]$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{500(2n^2 - 3n + 1)}{3n^2} = \frac{1000}{3}.$$

Realicemos ahora el proceso análogo pero ahora recubriendo superiormente por rectángulos circunscritos la curva $y = x^2$ de la Figura 2.5. Es decir, supongamos ahora que los rectángulos cortan a la curva $f(x) = x^2$ en sus extremos superiores derechos. Calculemos, en primer lugar, el área total de estos rectángulos cuando $n = 2$, $n = 5$ y $n = 10$, siendo n el número de rectángulos que circunscriben la figura anterior.

Cuando $n = 2$, tenemos dos rectángulos, luego el intervalo $[0, 10]$ vendrá dado como unión de dos subintervalos $[0, 5]$ y $[5, 10]$. Ambos rectángulos tienen como anchura 5 cm y como altura $f(5)$ y $f(10)$, respectivamente. Por lo tanto, la suma de las áreas de estos rectángulos es

$$S_2 = A_{R_1} + A_{R_2} = 5 \cdot 25 + 5 \cdot 100 = 625cm^2.$$

Cuando $n = 5$, tenemos cinco rectángulos, entonces el intervalo $[0, 10]$ viene dado como unión de cinco subintervalos $[0, 2]$, $[2, 4]$, $[4, 6]$, $[6, 8]$ y $[8, 10]$. Ambos rectángulos tienen una anchura de 2 cm y la altura es $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(8)$ y $f(10)$, respectivamente. Por lo tanto, el área de la suma de ambos es

$$S_5 = \sum_{i=1}^{5} A_{R_i} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 36 + 2 \cdot 64 + 2 \cdot 100 = 440cm^2.$$

Cuando $n = 10$, tenemos diez rectángulos, entonces el intervalo $[0, 10]$ viene dado como unión de diez subintervalos $[0, 1], [1, 2], \ldots, [9, 10]$. Ambos rectángulos tienen una anchura de 1 y la altura es $f(1)$, $f(2), \ldots, f(10)$, respectivamente. Por lo tanto, el área de la suma de ambos es

$$S_{10} = \sum_{i=1}^{10} A_{R_i} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 16 + \cdots + 1 \cdot 100 = 385cm^2.$$

Veamos ahora que ocurre para un n general. Como tenemos n rectángulos, partimos el intervalo $[0, 10]$ en n subintervalos:

$$\left[0, \frac{10}{n}\right], \left[\frac{10}{n}, \frac{20}{n}\right], \ldots, \left[\frac{10(n-1)}{n}, 10\right]$$

construimos así una partición del intervalo $[0, 10]$

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{10}{n} < x_2 = \frac{20}{n} < \cdots < x_{n-1} = \frac{10(n-1)}{n} < \frac{10n}{n} = 10 = x_n.$$

tenemos que cada rectángulo R_i tiene anchura $\frac{10}{n}$, puesto que $x_i - x_{i-1} = \frac{10i}{n} - \frac{10(i-1)}{n} = \frac{10}{n}$, y como altura $f(x_i) = \left(\frac{10i}{n}\right)^2$, ya que cada extremo izquierdo del rectángulo es el corte del rectángulo R_i con la función $f(x) = x^2$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por tanto, la suma de los n rectángulos viene dada como

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} A_{R_i} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{10i}{n}\right)^2 \cdot \frac{10}{n} =$$

$$= \frac{10^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1000}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{500(n+1)(2n+1)}{3n^2} = \frac{500(2n^2+3n+1)}{3n^2},$$

si calculamos el límite cuando n tiende a infinito de esta suma, habremos hallado el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 10]$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{500(2n^2+3n+1)}{3n^2} = \frac{1000}{3}.$$

Al igual, que en el ejercicio anterior, el profesor recalcará, que en cada iteracción, el área de curva en cuestión se encontrará acotada por

$$s_n \leqslant A \leqslant S_n, \text{ para todo } n,$$

siendo s_n la suma inferior constituida por los n rectángulos inscritos en la región de la Figura 2.5 y, a su vez, S_n es la suma superior constituida por los n rectángulos circunscritos en dicha región.

Aunque es obvio observando los dos ejercicios que han realizado, el profesor mostrará a los alumnos que efectivamente se verifica la siguiente igualdad:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \text{Área bajo la gráfica de una función positiva.}$$

Posteriormente, el profesor les explicará que siguiendo esta misma técnica se pueden seguir calculando áreas bajo funciones potenciales y exponenciales. Y les dejará como ejercicio evaluable el siguiente problema extraído de Otal (2015):

Ejercicio evaluable: Un determinado tipo de bacterias se reproduce siguiendo un crecimiento exponencial parecido a la función $f(t) = 16e^{2t}$, donde $f(t)$ indica el número de bacterias que existe transcurrido un tiempo específico (medido en horas). Si la población inicial es de 2000 bacterias, ¿sabríais calcular el número de bacterias que habrá cuando hayan transcurrido 6 horas? Responde a las siguientes preguntas:

a) Representa la función $f(t) = 16e^{2t}$.

b) Subdivide el intervalo $[0, 5]$ en cinco subintervalos de longitud uno y calcula el valor de la función $f(t)$ en el punto medio de cada subintervalo.

c) Dibuja los rectángulos que tienen como base la amplitud de cada subintervalo y por altra el valor de la función en el punto medio de cada subintervalo.

d) Calcula la suma de las áreas de los rectángulos medios.

e) Subdivide ahora el intervalo $[0, 5]$ en diez subintervalos de longitud un medio cada uno de ellos y responde a los apartados c) y d) usando estos datos.

f) Halla la expresión de la suma de rectángulos medios si subdividimos el intervalo $[0, 5]$ en $5n$ subintervalos de longitud $1/n$ cada uno de ellos.

g) Halla el límite cuando n tiende a infinito de la suma hallada en el apartado anterior. Interpreta el valor obtenido atendiendo al contexto del problema.

Indicación. Sigue los pasos que habéis realizado en los dos ejercicios previos para determinar el área bajo la curva de ambas funciones potencias. Además, de la respuesta correcta a cada apartado se valorará positivamente que se entreguen todas las representaciones que pueden ser útiles para resolver el ejercicio en GeoGebra. Puede ser útil para la resolución del ejercicio que recordéis que la suma de los infinitos términos de una sucesión geométrica de razón r y con primer término a_0 viene dada por la fórmula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{r^{a_0}}{1-r}.$$

Llegados a este punto el profesor dará la definición de integral entre a y b de una función f como el área comprendida entre la gráfica de la función f, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$. Procedemos a continuación a detallar la explicación que llevará a cabo el profesor mediante un método más general que el que se ha tratado con los ejercicios:

Aproximación al valor del área bajo una curva e integral de una función continua.

Para calcular el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, se utiliza un método que consiste en dividir el intervalo $[a, b]$ en tramos y en aproximar el área mediante rectángulos con bases en el eje de abscisas y como altura tienen el mínimo valor que toma la función en ese intervalo.

Si dividimos el intervalo $[a, b]$ en n trozos, no necesariamente iguales (caso más general al tratado con los ejercicios que hemos trabajado), obtenemos así una partición del intervalo de partida:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

y llamamos m_i al menor que toma la función en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. De esta forma se calcula el área formada por los rectángulos inscritos en la curva $f(x)$:

$$m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Este área es, evidentemente, menor (o, a lo sumo, igual) que el área de la función que deseamos obtener. Nos hemos aproximado por defecto al área buscada.

También podíamos habernos aproximado por exceso sin más que tomar como altura de cada rectángulo el valor mayor, M_i, que toma la función en el intervalo correspondiente. De esta forma la suma de las áreas de los rectángulos que circunscriben la curva viene dada por

$$M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Estos valores m_i y M_i no tienen por qué ser el extremo superior izquierdo o derecho del rectángulo, respectivamente, pueden ser cualquier punto que esté en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la parte superior del rectángulo. Lo que generaliza el método que se utilizó en los ejercicios de esta actividad. Además, se le dirá a los alumnos, aunque esto ya lo han podido observar con los ejercicios realizados, que si tomamos unos rectángulos más finos, es decir, si la distancia entre x_i y x_{i-1} es menor, tanto el área por defecto como el área por exceso se aproxima más que antes al área del recinto. Y si, en vez de tomar el valor máximo o el mínimo, tomamos un valor intermedio, la aproximación será mejor aún. Esto se pretende que se consiga realizando el ejercicio evaluable que se les ha dejado planteado.

Pasamos, ahora sí, a definir con precisión la integral de una función continua:

Sea f una función continua y no negativa en un intervalo $[a, b]$. Al área entre delimitada entre la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ la llamaremos

$$\int_a^b f, \quad \text{que se lee integral entre } a \text{ y } b \text{ de } f$$

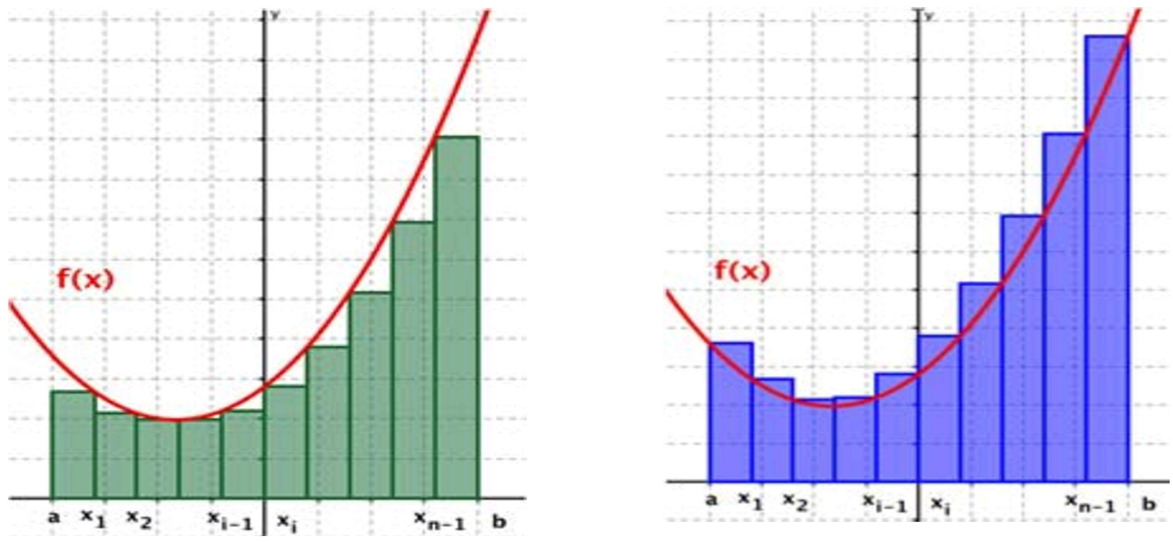


Figura 4.13: Áreas por defecto y por exceso.

También se designa por $\int_a^b f(x)dx$. Veamos como calcularla.

Tomamos una partición del intervalo $[a, b]$ de la forma anterior, y a ésta le asociamos un área por defecto s y un área por exceso S, que respectivamente vienen dadas por:

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

para las cuales se cumple que

$$s \leqslant \int_a^b f \leqslant S.$$

Si tenemos una sucesión de particiones $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k, \ldots$, les corresponderán don sucesiones de áreas por defecto y por exceso $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$ y $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$. Por último, si los diámetros de las particiones (es decir, la mayor de las distancias $x_i - x_{i-1}$) tienden hacia cero, las diferencias

$$S_1 - s_1, S_2 - s_2, \ldots, S_k - s_k, \ldots$$

tienden también hacia cero y, por tanto, ambas sucesiones convergen hacia el área que buscamos, pues

$$s_k \leqslant \int_a^b f \leqslant S_k \quad \text{y} \quad S_k - s_k \to 0,$$

entonces se tiene la igualdad vista anteriormente:

$$A = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} s_k.$$

Actividad 4

Una vez institucionalizado el procedimiento a seguir para el cálculo de áreas por debajo de gráficas de funciones positivas, veamos qué ocurre cuando se dan otro tipo de casos.

Serán los propios alumnos quienes razonarán, incentivados y ayudados por el profesor, algunas de las propiedades de la integral definida, que serán formalizadas con todo rigor al finalizar la actividad. Los alumnos podrán comprobar la generalización del cálculo de integrales de funciones positivas a otros tipos de circunstancias partiendo de las definiciones anteriores y aplicando propiedades ya conocidas de funciones, como la simetría, la periodicidad o el cálculo de áreas o de funciones no positivas en un intervalo. En todos los ejercicios se usará GeoGebra, para que visualicen mejor estas propiedades que pueden ser útiles a la hora de resolver el ejercicio correctamente.

Ejercicio 4.1. En Benidorm para este próximo verano se quiere construir un parque acuático. Una de las atracciones principales del parque será un tobogán gigante que se inclina hacia abajo siguiendo una trayectoria lineal. La altura del tobogán en cada punto se puede modelar con la función $f(x) = -x + 3$, donde x representa la distancia medida a lo largo del tobogán. Entre los 3 y los 6 metros se quiere cubrir el tobogán con un material especializado resistente al agua. Calcular la cantidad de material que será necesario.

Con este ejercicio se pretende que el alumno se de cuenta tras dibujar la gráfica de la función, y observar que $f(x)$ no es positiva en el intervalo $[3, 6]$, pero que el área comprendida entre la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$ y $x = 6$ es la misma que el área comprendida entre la función $g(x) = 3 - x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$ y $x = 6$, ya que el triángulo que se forma en cada uno de los casos es igual, como se muestra en la Figura.

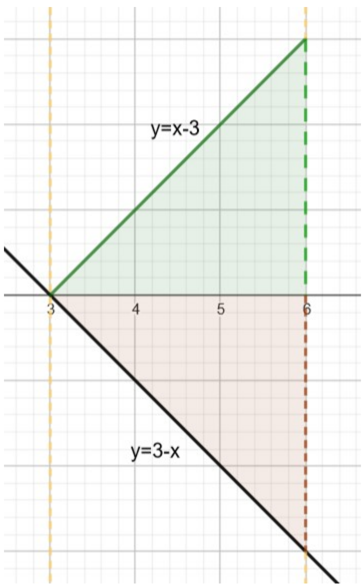


Figura 4.14: Área de una función negativa.

Por tanto, se espera que el alumno argumente de la siguiente manera: como el área comprendida entre la función $g(x) = 3 - x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$ y $x = 6$ ya sabemos calcularla y como $g(x) = -f(x)$, entonces el área que me piden será igual que la que acabo de calcular salvo cambiarle el signo.

Ejercicio 4.2. En una fábrica que produce ciertos productos químicos se necesita calcular la cantidad total de una sustancia que se produce en un periodo de tiempo específico. La producción de esta sustancia química se puede modelar utilizando una función $f(t)$, que representa la tasa de producción en función del tiempo.

a) Supongamos que la tasa de producción de la sustancia química es constante y se mantiene en 10 unidades por hora durante un tiempo determinado. Calcular la cantidad total que se ha producido de esta sustancia química entre las dos y las cuatro.

b) Suponemos que se está produciendo a la vez en otro departamento otra sustancia química. La tasa de producción de esta otra sustancia química es constante y viene modelada por la función $g(t) = 20$. Responder a la misma pregunta del apartado anterior para esta otra sustancia química.

c) ¿Veis alguna relación entre estas dos?

d) Si tuviéramos una tercera sustancia química que producir con una tasa de producción representada por una función constante $f(t) = 30$. ¿Qué relación existe entre la producción de las tres sustancias?

Con los primeros apartados del ejercicio únicamente se pretende que los alumnos observen la relación que existe entre las funciones f y g, y que, evidentemente, el área de las regiones seguirán manteniendo la misma relación. Es decir, como $g(t) = 2f(t)$, tendremos que

$$\int_2^4 g(t)dt = 2\int_2^4 f(t)dt.$$

Con el apartado d) se pretende que el alumno visualice que la tasa de producción de la tercera sustancia química coincide con la suma de las tasas de producción de las otras dos, puesto que $h(t) = f(t) + g(t)$, por tanto,

$$\int_2^4 h(t)dt = 2\int_2^4 f(t)dt + \int_2^4 g(t)dt.$$

Ejercicio 4.3. Se quiere estudiar el movimiento de una partícula que oscila periódicamente. La posición de la partícula en el tiempo puede ser modelada utilizando la función $f(t) = sin(t)$.

a) Calcular el desplazamiento neto de una partícula durante un periodo neto de oscilación, es decir, entre $t = 0$ y $t = 2\pi$. Utiliza GeoGebra.

b) Describe la relación entre el desplazamiento durante el intervalo $[0, 2\pi]$ y el desplazamiento en el intervalo $[0, \pi]$.

c) Si el intervalo del cual queremos estudiar el desplazamiento de la partícula es $[-3\pi, 3\pi]$. ¿Qué puedes concluir de estos resultados?

Con la representación de la función seno en el intervalo $[0, 2\pi]$, pretendemos que el alumno se percate de que la función seno en el intervalo $[\pi, 2\pi]$ es negativa, mientras que en el intervalo $[0, \pi]$ es positiva. Por tanto, el área encerrada entre la función seno, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ coincide con el área encerrada entre la función seno, el eje de abscisas y las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$, por lo que suma de las áreas, que coincide con el área de encerrada entre la función seno, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$, es dos veces el área comprendida entre la función seno en el intervalo $[0, \pi]$ y ele eje de abscisas. Sin embargo, utilizando el comando integral en el software GeoGebra, observamos que el valor de la integral en el intervalo $[0, 2\pi]$ es cero.

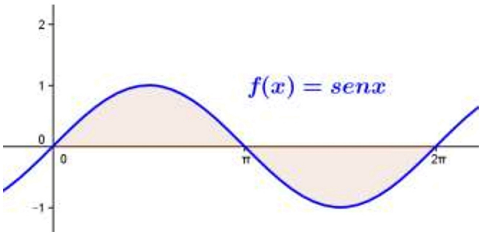


Figura 4.15: Área de la función seno en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Y en el caso, del área encerrada entre la función seno, el eje de abscisas y las rectas $x = -3\pi$ y $x = 3\pi$, también será cero.

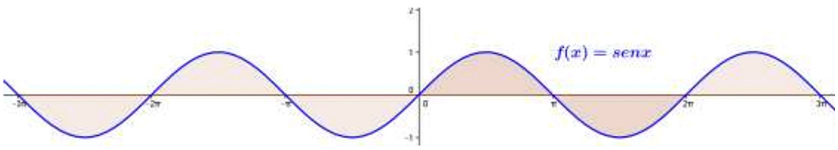


Figura 4.16: Área de la función seno en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Se hará hincapié en que los alumnos piensen para justificar este hecho en las propiedades de la función seno como la periodicidad y la simetría. Puesto que el seno es una función periódica de periodo 2π y simétrica impar. Este ejercicio se encuentra formulado en Otal (2015).

Ejercicio 4.4. Se quiere diseñar un puente peatonal curvo que atraviesa un hermoso valle y se quiere determinar la forma de la curva del puente para que sea estéticamente agradable y cumpla ciertas condiciones. Para ello se están analizando varias funciones continuas que modelan la forma del puente. Se tienen los siguientes datos:

- El puente debe tener una forma simétrica par para crear así una apariencia equilibrada y armoniosa.
- La altura del puente debe ser siempre mayor o igual a cero en el intervalo entre los 0 y 7 metros.
- La integral de la función que modela la forma del puente en el intervalo entre los

0 y 7 metros de éste es igual a 12, lo que representa el área total bajo la curva del puente.

Considerando estos datos, ¿sabríais calcular el área entre la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -7$ y $x = 7$ siendo $x = 0$ el centro del puente?

En este ejercicio se busca que el alumno use la condición de que la función tiene simetría par. Al representar la gráfica de la función el alumno observará que el área comprendida bajo la gráfica, la recta $x = 7$ y el eje de ordenadas es la misma que el área comprendida bajo la curva, la recta $x = -7$ y el eje de ordenadas. De esta forma, observe que el área bajo la curva y las rectas $x = 7$ y $x = -7$ se puede calcular como el doble del área comprendida bajo la curva, la recta $x = -7$ (o $x = 7$) y el eje de ordenadas. Para ello se les aconsejará que piensen en una función par cualquiera y utilicen esa para llevar a cabo la representación gráfica y así visualizar mejor el ejercicio. Como por ejemplo la que aparece representada en la Figura 4.17:

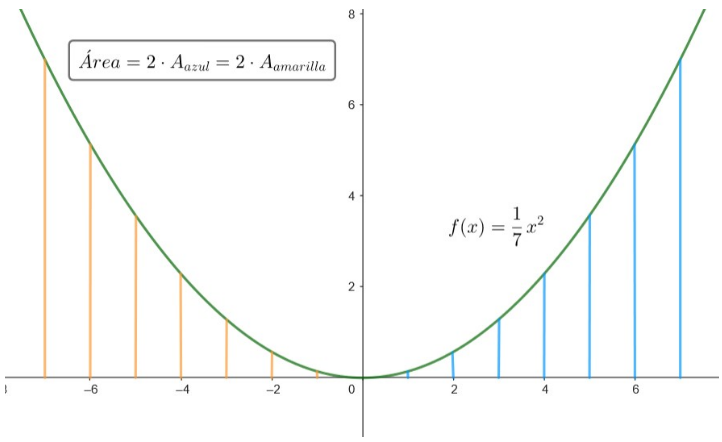


Figura 4.17: Simetría par.

Ejercicio 4.5. Un granjero dispone de un terreno de 5 hectáreas (5000 metros cuadrados) y quiere cultivar dos tipos de cultivos: avena y cebada, en el mismo terreno puesto que ambas son para alimento para el ganado. La función $f(x) = \frac{1}{5}x^2$ representa el área de cultivo de la avena en el terreno. La función $g(x) = x$ representa el área de cultivo de la cebada en el terreno. Y el eje de abscisas representa la distancia en hectáreas a lo largo del terreno. Realizando las gráficas con GeoGebra, ¿qué podéis concluir con respecto a la relación entre las funciones y sus áreas? ¿Será mayor la cantidad de avena o la de cebada?

Lógicamente, con este ejercicio se pretende que el alumno observe que la propiedad de monotonía de las funciones se traslada a sus integrales. Observando la siguiente figura, es sencillo ver que la función $f(x) \leqslant g(x)$ en el intervalo $[0, 5]$, por lo que se tendrá que

$$\int_0^5 f(x)dx \leqslant \int_0^5 g(x)dx.$$

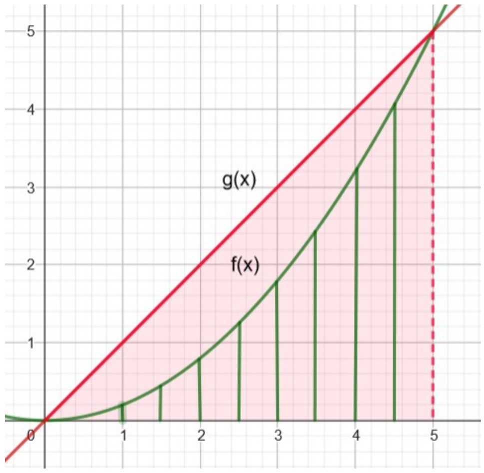


Figura 4.18: Monotonía de la integral.

Las integrales aunque son muy sencillas de calcular, el alumno no puede calcular todavía la integral de la función $f(x)$ pues el intervalo de integración es distinto al que se trabajó en otro ejercicio previo, por lo que se busca que razonen únicamente usando la representación. Además, se les dirá que usen alguna propiedad anterior para ver cómo podrían resolver la integral de la función cuadrática.

Se pretende que el alumno visualice que al ser la función par, su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas, por tanto, el área encerrada entre la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -7$ y $x = 7$, que representan los extremos del puente, será dos veces el área encerrada entre la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 7$, que coincide con el valor de su integral en el intervalo $[0, 7]$. El resultado es, por tanto, 24.

Para finalizar la clase el profesor, formalizará con todo rigor cada una de las propiedades de las integrales que se han ido observando con cada uno de los ejercicios previos y algunas más. Estas se podrían demostrar usando la definición de integral dada al final de la actividad anterior. Si no da tiempo, porque se haya consumido el tiempo de clase, el profesor les proporcionará una hoja con cada una de ellas y su prueba. A continuación, procederemos a detallar la explicación que llevará a cabo el profesor para explicar cada una de las propiedades de las integrales:

Propiedades de la integral.

1. Si $f(x) \geqslant 0$ y continua en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$. Y si $f(x) \leqslant 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$.

   Por tanto, si f cambia de signo en $[a, b]$, la integral $\int_a^b f(x)dx$ nos da la suma algebraica de las áreas que están por encima y por debajo del eje de abscisas, cada una con su signo. Si quisiéramos calcular el área en términos absolutos, tendríamos que calcular la integral de cada recinto y, antes de sumar, cambiar de signo las negativas.

2. Para a, b números reales, se tiene que $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

3. Si $a < b < c$ y f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Para cualquier número real a y para cualquier función f, se tiene $\int_a^a f(x)dx = 0$.

5. Linealidad de la integral: $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

6. Monotonía de la integral: Si para cada $x \in [a, b]$ se satisface que $f(x) \leqslant g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

7. Producto por un escalar: Para cualquiera valor de k, se satisface que

$$k \int_a^b f(x)dx = \int_a^b kf(x)dx.$$

8. Si una función f es par, $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, para cualesquiera $a \in \mathbb{R}$.

9. Si una función f es impar, $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$, para cualesquiera $a \in \mathbb{R}$.

Con el fin de que estas propiedades queden fijadas en el alumno, el profesor propondrá el siguiente ejercicio para que trabajen con ellas:

Ejercicio 4.6. Se está trabajando en un proyecto urbano en un tramo de carretera. El tramo en cuestión tiene un forma curva que se asemeja a la parábola cuadrática $y = x^2 + x - 2$, donde x representa la distancia a lo largo de del tramo de la carretera e y indica la altura de la curva en relación con el eje de abscisas.

a) Represента en el software GeoGebra la función en el intervalo $[-1, 3]$.

b) Sin calcular explícitamente la integral de la función en el intervalo $[-1, 3]$ utiliza las propiedades vistas anteriormente para indicar cómo resultaría.

c) Observando la representación realizada en el primer apartado, indica cómo se podría calcular el área que determina la curva, en términos de valores absolutos, con el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

La siguiente representación muestra el área encerrada entre la curva $f(x) = x^2 + x - 2$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 3$ (representadas en color verde). Con el color amarillo se pretende representar el área encerrada entre la curva $f(x) = x^2 + x - 2$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$ y con el color azul, el área encerrada entre la curva $f(x) = x^2 + x - 2$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 3$.

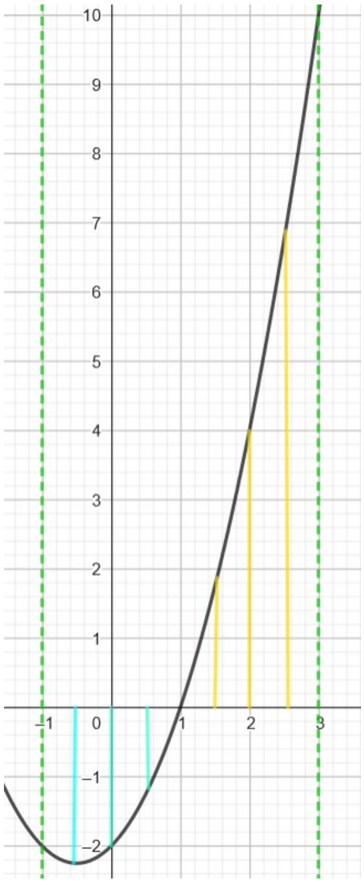


Figura 4.19: Área encerrada entre la curva $f(x) = x^2 + x - 2$, el eje de abscisas y el intervalo $[-1, 3]$.

Con este ejercicio pretendemos que el alumno adquiera manejo en la utilización de las propiedades de la integral vistas anteriormente para la resolución de los ejercicios que se les plantea. Por tanto, para responder al segundo apartado deberían usar la propiedad de la linealidad de la integral y ver así que la integral de la función $f(x)$ se descompondría como:

$$\int_{-1}^{3}(x^2 + x - 2)dx = \int_{-1}^{3} x^2 dx + \int_{-1}^{3} x dx - \int_{-1}^{3} 2dx.$$

Para responder al tercer apartado, el alumno debe ser consciente de la observación que se hizo al explicar la primera propiedad, como nos piden calcular el área en términos absolutos, el alumno debería separar la integral de la manera siguiente

$$\int_{-1}^{3}(x^2 + x - 2)dx = \left|\int_{-1}^{1}(x^2 + x - 2)dx\right| + \left|\int_{1}^{3}(x^2 + x - 2)dx\right|,$$

debido a que la función f cambia de signo en $x = 1$. Después, aplicando la propiedad de la linealidad se podrían calcular las integrales pedidas. El alumno aún no puede realizar los cálculos pues no se ha dado una fórmula explícita aún para las funciones potenciales.

Actividad 5

En esta actividad se pretende ver la relación intrínseca entre la integral y la derivada. Como punto de partida, se propondrá al alumno un problema en el que a base de calcular las integrales que aparecen, el alumno ya conoce como calcular la integral de la función que se pide, y mediante una conducción dirigida por el profesor, el alumno llegue a observar la relación existente entre la integral de la función y su derivada.

Posteriormente, el profesor formalizará este hecho por medio del teorema fundamental del cálculo integral y de la regla de Barrow. Por último, se les explicará como calcular una primitiva de una función pensando en el proceso analítico inverso de las derivadas. Así, se les mostrará mediante juegos fórmulas generales para hallar la primitiva de una determinada función dependiendo del tipo que sea ésta. Es decir, métodos de integración para conseguir las primitivas de funciones conocidas, cuando se pueda.

Ejercicio 5.1. Un economista encargado de analizar los costes de producción de una fábrica tiene información sobre la tasa de producción promedio en función del tiempo, representada por la función lineal $f(x) = \frac{1}{2}x$, siendo x el tiempo en horas e y la tasa de producción de unidades por horas.

a) Representa la gráfica del número de unidades producidas en función del tiempo.

b) Calcula el número de unidades producidas en ocho horas de trabajo.

c) Calcula el número de unidades producidas cuando han transcurrido 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 horas. Dibuja los valores sobre la gráfica y trata de hallar la función del número de unidades producidas en función del tiempo.

d) Calcula el número de unidades producidas en la fábrica hasta un tiempo t determinado (en horas). ¿Qué representa este valor y la variable t, en el contexto del problema?

e) Usando el software Geogebra, define la función $f(x)$ y su integral $F(x)$ con el comando apropiado de álgebra en el intervalo $[0, 8]$.

f) ¿Qué relación existe entre los valores que toma $F(x)$ con el área bajo la función $f(x)$?

g) ¿Qué relación existe entre la expresiones algebraicas de las funciones $f(x)$ y $F(x)$?

Si se representa la gráfica del número de unidades producidas en función del tiempo, obviamente nos queda una función lineal, por lo que, el alumno ya sabría resolver el segundo apartado, para calcular el número de unidades producidas en ocho horas de trabajo hay que calcular el área encerrada bajo la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2}x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 8$, lo que se denotaría por la integral definida $\int_0^8 f(x)dx$. Con la fórmula general se podría calcular sin problemas. Con el tercer apartado se pretende que el alumno averigüe cuál es la función que nos calcula el número de unidades producidas en función del tiempo. Esta evidentemente es $g(x) = \frac{1}{4}x^2$, y esta debe averiguarse calculando el número de unidades producidas cuando han transcurrido 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 horas y lo obtenido en el apartado previo. Para ello es útil que el alumno tenga representado la siguiente figura:

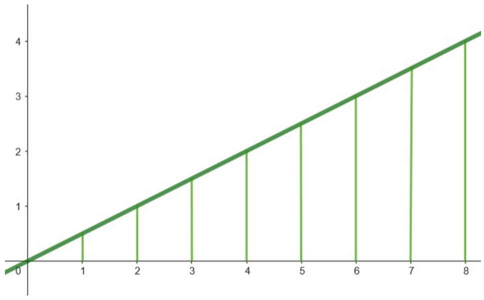


Figura 4.20: Función $f(x) = \frac{1}{2}x$ en el intervalo $[0, 8]$.

Por tanto, en el apartado d) se espera que el alumno responda que el número de de unidades producidas en la fábrica hasta un tiempo de t horas viene dado por

$$\int_0^t f(x)dx = \frac{3}{2}t^2.$$

Con los tres últimos apartados se busca que el alumno se de cuenta de que la función $F(x)$ toma los valores del área por debajo de la función $f(x)$ y que a su vez, la función $f(x)$ es la derivada de la función $F(x)$, y que estas dos vienen relacionadas por la fórmula

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx.$$

Tras haberse realizado con éxito el problema anterior, el profesor mostrará con cierto rigor la relación existente entre la derivada y la integral. A continuación se muestra como lo llevará a cabo en el aula:

La integral y su relación con la derivada

Como ya sabemos, dada una función f, continua en el intervalo $[a, b]$, podemos calcular $\int_a^c f$ para cada $c \in [a, b]$. Consideremos así la nueva función

$$F(x) = \int_a^x f, \quad x \in [a, b],$$

que es el área bajo la función f entre a y un punto variable x. Con el siguiente teorema se precisa formalmente la relación entre f y F' que se ha visto intuitivamente con el ejercicio previo.

Teorema fundamental del cálculo. Si f es una función continua en $[a, b]$, la función

$$F(x) = \int_a^x f, \quad x \in [a, b],$$

es derivable y verifica que $F'(x) = f(x)$.

Tras la relación anterior, podemos definir el siguiente concepto: la función área bajo la gráfica de f, $F(x) = \int_a^x f$, es una **primitiva** de $f(x)$, según acabamos de ver. Por eso al cálculo de primitivas se le llama integración o cálculo de integrales y se utiliza la expresión

$$\int f(x)dx$$

para designar una primitiva de la función $f(x)$. Se deduce de esto que para una función existen varias primitivas, pues dos funciones pueden tener la misma derivada si difieren en una constante.

La aplicación más importante de este teorema es la siguiente regla.

Regla de Barrow. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Debido a que la demostración de este resultado no es demasiado difícil para la comprensión del alumno, pues lo único que utiliza es el teorema anterior y el hecho de que una función puede tener más de una primitiva, el profesor proporcionará la demostración de este resultado. Con el fin de que el alumnado no se pierda durante la demostración, el profesor hará partícipe al alumno realizando cada uno de los pasos implicados conjuntamente.

Demostración. Aplicando el teorema fundamental del cálculo, tenemos que $F(x) = \int_a^b f(x)dx$ es una primitiva de la función $f(x)$, que además satisface la igualdad $F'(x) = f(x)$. Si $G(x)$ es ahora otra primitiva de $f(x)$, se tiene que $F(x) = G(x) + C$, es decir, las funciones F y G se diferencian en una cierta constante C. Si en la igualdad anterior, tomamos $x = a$, tenemos que $F(a) = G(a) + C$. Pero como

$$F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0,$$

obtenemos de la relación anterior que $C = -G(a)$. Por tanto, tenemos que se verifica $F(x) = G(x) - G(a)$. Si ahora sustituimos x por b en esta misma igualdad, tenemos que $F(b) = G(b) - G(a)$. Y por tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

$\square$

La regla de Barrow facilita notablemente el cálculo de áreas comprendidas entre curvas cuyas primitivas sean conocidas. Sin embargo, hay que controlar los puntos en los que la función cambia de signo. Puesto que si para calcular el área comprendida entre una curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y dos rectas $x = a$ y $x = b$, nos limitamos a calcular $\int_a^b f(x)dx$, nos podemos encontrar en uno de los casos que se muestran en la Figura 4.21

En cada uno de estos tres casos, el resultado de la integral no representa el área buscada. Esto es debido a las compensaciones que se producen de las partes positivas con las negativas. Como sabemos, la forma correcta de proceder será calcular, por separado, las integrales de los diversos sectores y, posteriormente, sumar sus valores absolutos.

Con el fin de que el alumno se quede con el proceso que hay que llevar a cabo con toda seguridad, el profesor enunciará los pasos que hay que realizar para calcular el área comprendida

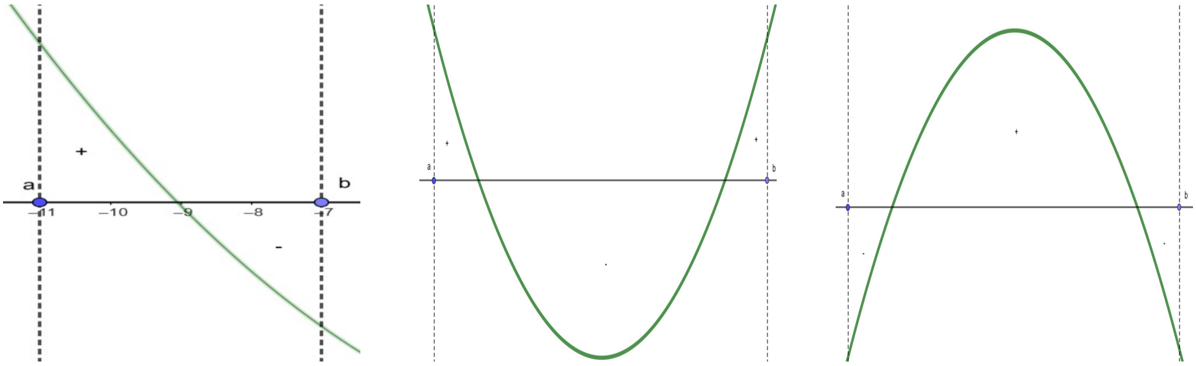


Figura 4.21: Integral de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$. Éstos se presentan a continuación:

i) Resolver la ecuación $f(x) = 0$ para averiguar los puntos de corte de la curva con el eje de abscisas.

ii) Seleccionar, de entre las raíces de la ecuación anterior, aquellas que estén comprendidas entre a y b. Imaginemos que estas raíces, ordenadas de menor a mayor, sean x_1, x_2 y x_3.

iii) Busquemos una primitiva de la función $f(x)$ y llamémosla $G(x)$.

iv) Calcular $G(a)$, $G(b)$ y la imagen en cada una de las raíces pertenecientes al intervalo $[a, b]$. En nuestro caso, $G(x_1)$, $G(x_2)$ y $G(x_3)$.

v) Así, $G(x_1) - G(a)$, $G(x_2) - G(x_1)$, $G(x_3) - G(x_2)$ y $G(b) - G(x_3)$ son las integrales de los cuatro recintos en los que queda dividida el área buscada.

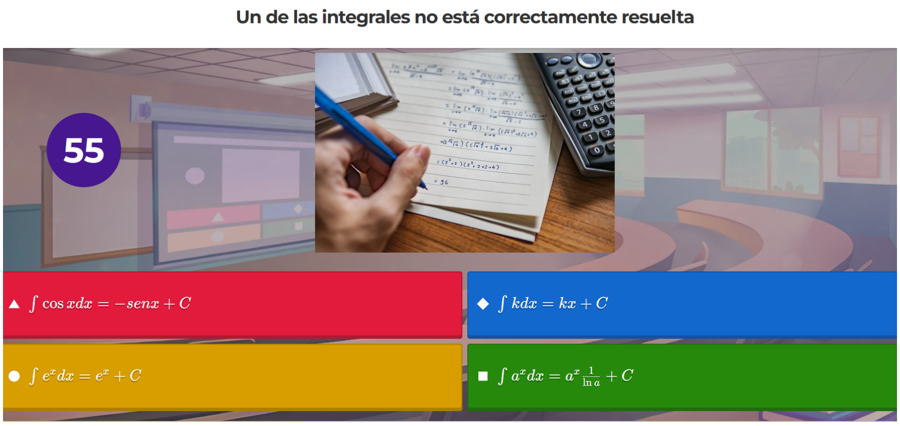
Las áreas en cada uno de los diferentes recintos son los valores absolutos de las cantidades que nos aparecen al calcular las integrales y, por tanto, el área buscada es la suma de todas estas cantidades positivas.

Actividad 6

Tras haber explicado con todo rigor la relación entre la integral y la derivada por medio del teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow, en esta actividad se van ver algunas reglas (o métodos) de cálculo de primitivas de funciones conocidas por medio de un juego y de ejercicios prácticos.

Juego con el cálculo de primitivas.

Para ahondar en el cálculo de primitivas y con el fin de que los alumnos adquieran manejo, se llevará a cabo una actividad en clase introducida a través de Kahoot!. En esta actividad se les plantearán a los alumnos una serie de preguntas sobre integrales indefinidas que deben contestar y dispondrán de un tiempo limitado para responder a cada de ellas. Esta actividad la realizarán por parejas y cada pareja dispondrá de una tablet, en el juego participarán todos los alumnos de la clase y competirán entre ellos. El juego, además de contabilizar los aciertos, ordena de mayor a menor los grupos en un ranking según el número de respuestas correctas. Como es un curso en el que importa la nota, se puede incentivar a los alumnos subiendo 0.25 puntos en la evaluación final del trimestre a los componentes de las tres parejas que mayor respuestas consigan, y que por tanto queden en los tres primeros puestos del ranking. Posteriormente, el profesor procederá a corregir las preguntas del Kahoot! y a argumentar cada afirmación. Dos ejemplos de preguntas que pueden aparecer en el Kahoot! pueden ser las siguientes:



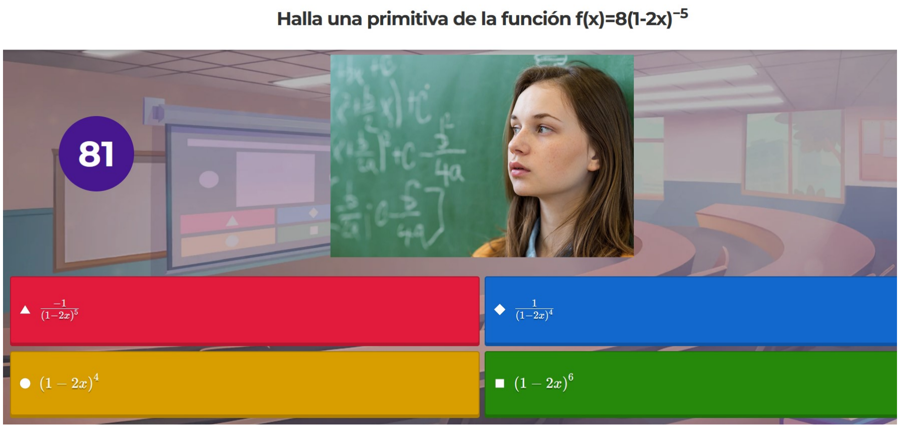


Figura 4.22: Posibles preguntas del Kahoot!.

Posteriormente, el profesor proporcionará a los alumnos una tabla que relacionará algunos tipos de funciones comunes con sus primitivas (funciones potenciales, exponenciales, trigonométricas y logarítmicas).

Para finalizar esta actividad relativa al teorema fundamental del cálculo y al cálculo de primitivas se realizarán algunos problemas prácticos para poner en práctica las técnicas y conocimientos adquiridos y alguna cuestión teórica para que los alumnos apliquen el teorema fundamental del cálculo.

Ejercicio 6.1. Un coche viaja de Valladolid a Ciudad Real a una velocidad constante de 120 km/h. Si a las diez de la mañana el coche pasa por Madrid, que está a 192 km de Valladolid. ¿A qué hora partió el coche de su destino?

Este problema tan sencillo lo único que tiene de complicado es que el alumno debe darse cuenta que el problema nos pregunta por el extremo a del intervalo, por lo que habría que aplicar la regla de Barrow y resolver la ecuación de primer grado resultante para hallar este valor de a.

Ejercicio 6.2. Se desea pintar un balcón con pintura antideslizante que cuesta 25 $/m^2$. El balcón tiene la forma del corte de una rama de la hipérbola $f(x) = \frac{3}{x-3} + 3$ con los ejes coordenados. Calcular el valor que nos costará pintar el balcón. Este ejercicio se ha extraído de Pellejero (2014).

El alumno deberá representar la hipérbola en GeoGebra y calcular el área comprendida bajo la curva, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. Así se habrá calculado el área del balcón. Para averiguar el costo simplemente habrá que multiplicar por el precio que cuesta la pintura por metro cuadrado. Para calcular el área mencionada habrá que aplicar la propiedad de la linealidad de la integral y la regla de Barrow, de esta forma se obtiene el valor de la integral

$$\int_0^2 \left(\frac{3}{x-3} + 3\right) dx = \int_0^2 \left(\frac{3}{x-3}\right) dx + \int_0^2 3dx = [3\ln|x-3| + 3x]_0^2 = 6 - \ln 3.$$

Ejercicio 6.3. La función que mide el caudal de un río en función de los meses del año viene dada por: $f(x) = 3 + 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$ donde $f(x)$ está dado en miles de hectólitros por mes, y la variable x en meses. ¿Qué cantidad de agua pasa por el río en un año? Dibuja la región correspondiente a la cantidad de agua que lleva el río.

La cantidad de agua que pasa por el río en un año se calcula mediante la siguiente integral definida:

$$\int_0^{12} \left(3 + 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right) dx = \int_0^{12} 3dx + 2\int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) dx = \left[3 \cdot x + \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right]_0^{12},$$

donde se han de aplicar las propiedades de la linealidad y la multiplicación por un escalar de las integrales y además la regla de Barrow. La región correspondiente a la cantidad de agua que lleva un río viene representada por:

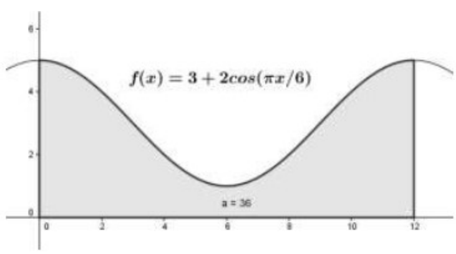


Figura 4.23: Cantidad de agua que lleva un río.

Ejercicio 6.4. El lanzamiento de un nuevo producto tecnológico hace que crezcan las ventas de éste en los doce primeros meses. El número de miles de unidades vendidas sigue la función $f(x) = 5e^{0,2x} - 4$, siendo x transcurrido el tiempo en meses. Calcula el número de unidades vendidas en los doce meses.

El alumno simplemente debe calcular la integral definida de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 12]$ y debe seguir los siguientes pasos

$$\int_0^{12} (5e^{0,2x} - 4)dx = 5 \cdot \int_0^{12} e^{0,2x}dx - \int_0^{12} 4dx = \left[25e^{0,2x} - 4x\right]_0^{12} = 202{,}579,$$

por lo que se han vendido aproximadamente 202 unidades.

Ejercicio 6.5. Sin resolver la integral, indica dónde hay máximos o mínimos relativos en la función

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)dt.$$

Comprueba usando GeoGebra si llegado al resultado correcto.

El ejercicio en el que nos encontramos es de carácter más teórico. Con este se pretende que el alumno observe que para resolverlo debe aplicar el teorema fundamental del cálculo y usar la condición necesaria de extremo relativo. Puesto que la función $f(t) = t^2 - 1$ es continua y derivable en toda la recta real, al ser una función polinómica, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo y concluir así que la función

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)dt$$

es derivable y satisface que $F'(x) = f(x) = x^2 - 1$. Usando la condición necesaria de extremo relativo, calculamos así los extremos relativos de la función $F(x)$ como

$$F'(x) = f(x) = x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Como $F'(x)$ puede escribirse como $F'(x) = (x - 1)(x + 1)$, observamos el signo de la derivada

$$F'(x) < 0 \text{ si } x - 1 < 0 \text{ y } x + 1 > 0 \text{ o si } x - 1 > 0 \text{ y } x + 1 < 0, \text{ por tanto si } x \in (-1, 1).$$

$$F'(x) > 0 \text{ si } x - 1 > 0 \text{ y } x + 1 > 0 \text{ o si } x - 1 < 0 \text{ y } x + 1 < 0,$$

por tanto se tiene si $x \in (-\infty, -1)$ o si $x \in (1, \infty)$. En consecuencia, como $F'(x) < 0$ si $x \in (-1, 1)$ y $F'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, tenemos que en el punto $x = -1$ hay un máximo relativo y en el punto $x = 1$ un mínimo absoluto. El hecho de pedirles que usen GeoGebra es para que representen la función $F(x) = \frac{x^3}{3} - x$ y vean que efectivamente tiene un mínimo relativo en $x = 1$ y un máximo relativo en $x = -1$, y que no representen la función $f(t)$. Además, existe un comando en GeoGebra que determina los extremos relativos de una función simplemente pinchando en ellas.

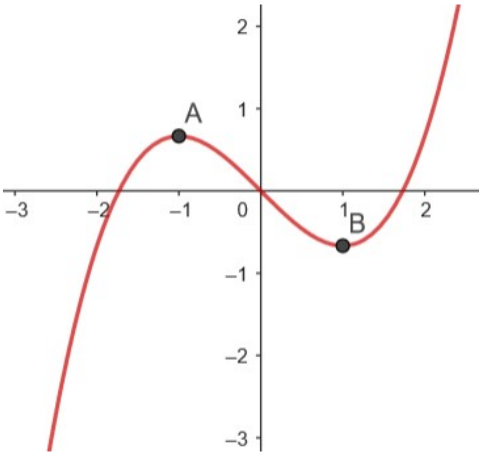


Figura 4.24: Extremos relativos de la función $F(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

Ejercicio 6.6. Sabemos que

$$\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$$

siendo f una función continua en $\mathbb{R}$. Calcula $f(2)$.

Para resolver correctamente este ejercicio únicamente se ha de tener presente el teorema fundamental del cálculo. Como la función f es continua en $\mathbb{R}$, por el teorema fundamental del cálculo, la función

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = x^2(1+x),$$

es derivable y satisface que $F'(x) = f(x)$. Por tanto, al derivar la expresión de $F(x)$ tenemos

$$F'(x) = f(x) = 2x(1+x) + x^2,$$

luego al evaluar en $x = 2$ obtenemos que $f(2) = F'(2) = 4 \cdot 3 + 4 = 16$.

Ejercicio 6.7. Sabemos que

$$\int_0^{x^2} g(t)dt = x^2(1+x)$$

siendo f una función continua en $\mathbb{R}$. Calcula $g(2)$.

Este ejercicio es parecido al ejercicio anterior pero más general, se ha de tener presente el teorema fundamental del cálculo, pero a diferencia del anterior se tiene que tener cuidado a la hora de derivar la función $G(x)$, pues se tiene que aplicar la regla de la cadena. Como la función g es continua en $\mathbb{R}$, por el teorema fundamental del cálculo, la función

$$G(x) = \int_0^{x^2} g(t)dt = x^2(1+x),$$

es derivable y satisface que $G'(x) = 2x \cdot g(x^2)$. Por tanto, al derivar la expresión de $G(x)$ tenemos

$$G'(x) = 2x \cdot g(x^2) = 2x(1+x) + x^2,$$

tenemos que $g(x^2) = 1 + \frac{3x}{2}$, por tanto, $g(x) = 1 + \frac{3\sqrt{x}}{2}$, luego al evaluar en $x = 2$ obtenemos que $g(2) = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Estos tres últimos problemas han sido extraídos del texto de Miguel de Guzmán de Matemáticas II, Anaya (1989).

Actividad 7

En esta actividad se verá cómo se puede calcular el área comprendida entre dos curvas. Se propondrá a los alumnos un ejercicio para que ellos mismos observen cómo hacerlo. Posteriormente, el profesor dará la explicación rigurosa a este hecho.

Ejercicio 7.1. Sea un terreno triangular delimitado por las rectas $f(x) = 2x$, $g(x) = -x$ y $x = 3$. Calcular el área del terreno que está delimitado por las tres rectas. Cuando hayas calculado dicho área, calcula la función $f(x) - g(x)$ y halla el área bajo dicha función, el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

Obviamente dicho área es el área del triángulo de vértices A, B y C, que puede calcularse como la suma de las áreas de los triángulos de vértices A, B y D y A, C y D, respectivamente. En términos de integrales dicho área viene dado por

$$\left|\int_0^3 f(x)dx\right| + \left|\int_0^3 g(x)dx\right| = \left|\int_0^3 (2x)dx\right| + \left|\int_0^3 (-x)dx\right| = \left[x^2 + \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{2}.$$

Obviamente coincide con el área del triángulo de vértices A, B y C pues:

$$A_T = \frac{Base \times altura}{2} = \frac{9 \times 3}{2} = \frac{27}{2}.$$

Si calculamos la función $f(x) - g(x) = 3x$ y determinamos el área encerrada entre esta función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$, llegamos a que

$$\int_0^3 3x dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{2},$$

el alumno en este momento debe darse cuenta que el área comprendida entre las gráficas f y g coincide con el área comprendida entre la función $f - g$ y el eje de abscisas.

La representación del terreno, que se supone que el alumno debe realizar, se muestra a continuación

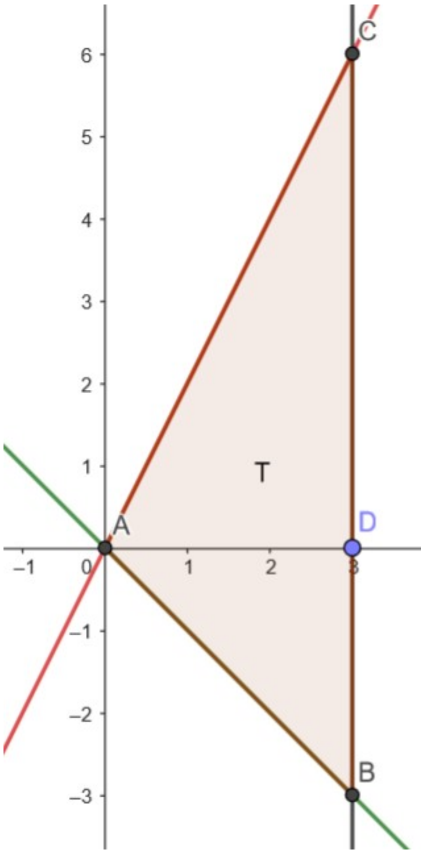


Figura 4.25: Área comprendida entre las funciones $f(x) = 2x$ y $g(x) = -x$.

Tras observar la resolución correcta al ejercicio, el profesor mencionará que este hecho se verifica siempre, no es aislado de este problema. Por tanto, si tenemos dos curvas cualesquiera f y g, el área comprendida entre ellas (región delimitada entre estas curvas) es igual al área comprendida entre la función diferencia $f - g$ y el eje de abscisas. Se practicará este hecho con otro ejercicio para que el alumno lo adquiera mejor.

Ejercicio 7.2. Una inmobiliaria está interesada en adquirir unos terrenos que pueden ser representados en un determinado plano como la superficie encerrada entre la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y la recta $g(x) = 2x$.

a) Halla la representación gráfica simultánea de estas dos funciones mediante Geogebra.

b) Si una unidad de área en este plano equivale a 1 km^2 y el precio del km^2 es de 30 millones de euros, ¿Qué importe debe pagar la inmobiliaria por esos terrenos?

Como curiosidad este ejercicio cayó en la PAU en Castilla y León en junio de 2006.

Si se representan las funciones, los terrenos que adquiere la inmobiliaria vienen representados en color marrón en la siguiente figura.

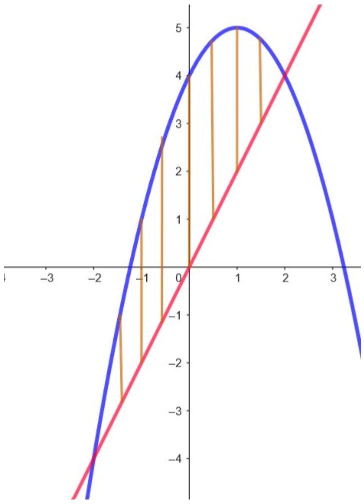


Figura 4.26: Área comprendida entre las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = 2x$.

El área que se nos pide calcular en el segundo apartado es precisamente este área. Para calcular este área usemos el hecho de que el área comprendida entre las dos curvas coincide con el área comprendida entre la función $f(x) - g(x) = -x^2 + 2x + 4 - 2x = -x^2 + 4$ y el eje de abscisas. Además, hay que tener en cuenta la observación que se hizo en la propiedad uno de las integrales, éstas debe ir en valor absoluto. Por tanto:

$$\left|\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx\right| = \left|\int_{-2}^{2} -x^2dx + \int_{-2}^{2} 4dx\right| = \left|\left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2}\right| = \frac{32}{3}km^2,$$

por lo que el importe asciende a 320 millones de euros.

Actividad 8

En esta actividad vamos a estudiar cómo calcular el volumen de un cuerpo de revolución. La metodología empleada en esta actividad va a ser diferente que en las actividades previas. El profesor proporcionará la fórmula genérica para calcular cualquier volumen de revolución y la explicará de manera intuitiva. Y posteriormente, dejará propuestos un par de ejercicios para que los alumnos practiquen. La metodología usada en esta actividad, por tanto, combinará las metodologías magistral y resolución de problemas por parte del alumnado.

Consideremos el cuerpo de revolución que se genera al girar alrededor del eje de abscisas la región plana limitada por la gráfica de una función continua f, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Para calcular su volumen, V, seguiremos un procedimiento análogo al del límite de sumas de Riemann para calcular el área de figuras planas, pero ahora en lugar de usar rectángulos se usarán cilindros. Sabiendo que el volumen del cilindro viene dado por

$$V_C = Area_{base} \cdot altura = \pi \cdot radio^2 \cdot altura,$$

tenemos que el volumen queda acotado entre la suma inferior y la suma superior de Riemann,

es decir
$$\sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2 (x_i - x_{i-1}) \leqslant V \leqslant \sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2 (x_i - x_{i-1}),$$
siendo m_i y M_i los radios mínimo y máximo, respectivamente, del cilindro C_i y la distancia $x_i - x_{i-1}$ la altura de éste. En la figura siguiente se observan las aproximaciones por defecto y exceso al volumen del cuerpo de revolución por cilindros:

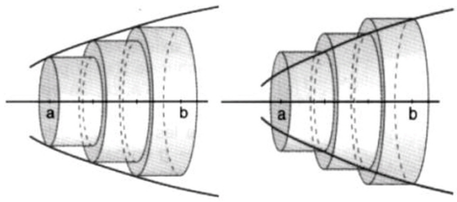


Figura 4.27: Volumen de un cuerpo de revolución.

Análogamente al caso de dimensión dos, cuando el número de cilindros aumenta, esas sumas inferior y superior tienden al valor de la integral definida de la función $\pi f(x)^2$ en el intervalo $[a, b]$, de manera que
$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

A continuación, se muestran un par de ejercicios que se dejaran para que el alumno practique con la fórmula del volumen de un cuerpo de revolución:

Ejercicio 8.1. Un salero tiene la forma de un cuerpo de revolución engendrado al girar alrededor del eje de abscisas la curva $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ entre las rectas $x = -1$ y $x = 2$. Hallar la cantidad de sal (en cm^3) que cabe en el salero. Representar con GeoGebra 3D el cuerpo de revolución resultante.

Para resolver este problema únicamente hay que usar la fórmula del volumen de un cuerpo de revolución. Por tanto,
$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \pi \int_{-1}^{2} \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{2} \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + 1\right) dx =$$
$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} = \pi \left[\frac{94}{15} - \frac{-83}{60}\right] = 7{,}65\pi.$$
Luego, en el salero cabría una cantidad total de $7{,}65\pi\ cm^3$ de sal.

Ejercicio 8.2. Tenemos un embudo engendrado a partir de la curva $f(x) = \sqrt{x}$ al girar alrededor del eje de ordenadas, entre $y = 0$ e $y = 2$. Hallar la cantidad de agua (en cm^3) que puede contener el embudo. Representar con GeoGebra 3D el cuerpo de revolución resultante.

La dificultad de este ejercicio está en que en lugar de proporcionarnos los datos con respecto al eje de abscisas nos lo han dado con respecto al eje de ordenadas. Un modo de actuar es poner la función $f(x)$ como función de y, es decir, de la forma $g(y) = x$, por tanto $g(y) = x = y^2$. Ahora sí que estamos en condiciones de usar la fórmula del volumen de un cuerpo de revolución, por tanto

$$V = \int_a^b \pi g(y)^2 dy = \int_0^2 \pi (y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 y^4 dy = \left[\pi \frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$

Luego, en el embudo cabría una cantidad total de $\frac{32}{5}\pi\ cm^3$ de agua.

Ejercicio 8.3. Calcular la fórmula que nos da el volumen de un tronco de cono de radios r_1, r_2 y altura h que se obtiene al hacer girar el segmento BC alrededor del eje de abscisas. (Este ejercicio se ha extraído de Colera y Olivera (2011)).

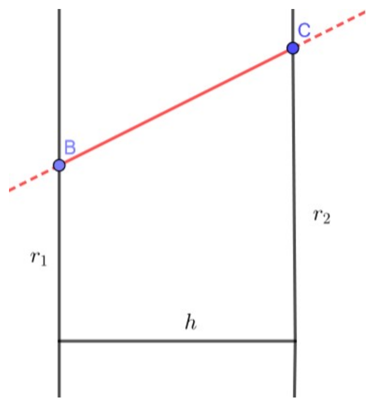


Figura 4.28: Tronco de cono de radios r_1, r_2 y altura h.

La dificultad de este ejercicio recae en pensar quién es la función $f(x)$ a la que tengo que aplicar la fórmula del volumen de revolución. Una vez que se observa, leyendo el enunciado varias veces, que ésta es la recta BC simplemente hay que hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $B = (0, r_1)$ y $C = (h, r_2)$. Usando los conocimientos adquiridos en geometría analítica, el alumno debe obtener que la ecuación de la recta que pasa por esos puntos es

$$y = r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h}\right) \cdot x$$

Por tanto, el volumen del tronco de cono de radios r_1, r_2 y altura h que se obtiene al hacer girar el segmento BC alrededor del eje de abscisas, será:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \pi \int_0^h \left[r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h}\right) \cdot x\right]^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^h \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h}\right)^2 \cdot x^2 + 2r_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{h}\right) \cdot x\right] dx =$$

$$= \pi \left[r_1^2 x + \left(\frac{r_2 - r_1}{h}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + r_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{h}\right) \cdot x^2\right]_0^h =$$

$$= \pi \left[r_1^2 h + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} + r_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot h^2 \right] =$$

$$= \pi \cdot h \left[r_1^2 + \frac{1}{3}(r_2^2 + r_1^2 - 2r_1 r_2) + r_1 r_2 - r_1^2 \right] =$$

$$= \pi \cdot h \left[\frac{1}{3} r_2^2 + \frac{1}{3} r_1^2 - \frac{2}{3} r_1 r_2 + r_1 r_2 \right] = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

4.10. Atención a las diferencias individuales

En el diseño de esta propuesta didáctica se ha prestado especial atención a la diversidad del alumnado, así como a los intereses que éstos puedan tener. En primer lugar, se ha elegido una metodología que se adapta enormemente al ritmo de los estudiantes, ellos mismos participan activamente en su proceso de enseñanza y aprendizaje, pueden ayudarse de sus compañeros de grupo, o de otros grupos y además pueden realizar cualquier consulta al profesor. De hecho, el docente con este tipo de metodologías puede dedicar más tiempo a resolver las dificultades de cada alumno del que podría dedicar con otro tipo de metodologías.

La idea de la actividad es poder integrar a todo el alumnado sin necesitar para ello la realización de una adaptación anterior, por lo que se procederá a la realización de actividades que sean pensadas y elaboradas para la totalidad del alumnado y que puedan ajustarse a los distintos ritmos de aprendizaje, siendo flexibles y adaptados a las necesidades, tanto generales como específicas del cuerpo estudiantil. Por esto también se ha tomado la libertad de agrupar a los alumnos en parejas (o en su defecto, en tríos), lo cual puede ser positivo para aquellos alumnos que presentan mayores dificultades para el aprendizaje, a estos alumnos se les pondrá con otro que esté más avanzado, y así podrá ayudarle. A veces el hecho de que la explicación la realice un compañero provoca en el otro una mayor comprensión, por la forma de explicarlo o porque le provoque menor temor preguntar a un compañero que al profesor. Se intentará colocar, por tanto, un alumno de altas capacidades con otro que le cueste más. Se fomenta así una interdependencia positiva entre los integrantes, ya que el objetivo es que uno ayude al otro y viceversa en las diferentes tareas que se proponga. Si existe algún alumno o pareja que presenta aún mayor dificultades, el profesor le presentará una atención individualizada mientras que el resto de la clase trabaja con las mismas, o si ve que hay otro alumno (o pareja) que vaya más avanzado, realizará los cambios necesarios para que los alumnos puedan ayudarse entre ellos. De esta forma se consigue que no haya ningún alumno aburrido ni ninguno demasiado retrasado.

Atendiendo a la legislación vigente, se proporcionarán diferentes formas y medios de representación donde se tendrán en cuenta todas las vías de acceso a la información. Poniéndose, en segundo lugar, en juego las múltiples formas de acción y expresión, teniendo, además en cuenta la participación del cuerpo estudiantil. Para esto, se pondrán en uso las herramientas proporcionadas en base a la necesidad del alumnado con el objetivo del aprendizaje de los conocimientos y competencias necesarios, intentando que el alumnado llegue al máximo de su capacidad de aprendizaje, centrándose, así, en un modelo competencial que resalta y favorece la capacidad que posee cada persona, mejorando y optimizando la calidad del aprendizaje, a la vez que se atiende y fortalecen las cualidades personales y la madurez como la autonomía, la autoestima o el bienestar emocional.

Por último, mencionar que se ha tenido especialmente en cuenta para motivar al alumnado el uso de las TIC en el desarrollo habitual del aula: la herramienta GeoGebra generalmente atrae al alumnado, pues pueden interactuar con el contenido y lo entienden de una manera más dinámica. Los cuestionarios de Kahoot! ayudan a que el alumnado muestre un mayor interés por la asignatura, creando un ambiente más agradable y distendido y no tan aburrido y monótono.

4.11. Evaluación

Evaluación del nivel de aprendizaje del alumnado

La evaluación ha de estar de acuerdo con las directrices que marca el DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre, en la que se atenderán a los criterios de evaluación que marca la legislación vigente. Esta propuesta didáctica se enmarca como una unidad didáctica dentro de la propuesta general que el profesor ha de realizar para todo el curso escolar. Como hemos mencionado durante la propuesta, ésta se pondrá en marcha en el tercer trimestre de la asignatura, después del resto de temas que conforman la disciplina de Análisis Matemático de este curso. La nota media, por tanto, formará parte del resto de unidades que se ejecuten durante este último trimestre, que serán relativas a la probabilidad y la estadística.

Para calificar al alumno se utilizarán los siguientes instrumentos:

- **Prueba escrita:** Será un examen en el que se evaluarán los conocimientos adquiridos por el alumno durante propuesta. Se llevará a cabo en la última sesión dedicada a esta unidad, la duración será de 90 minutos, pues se pondrán preguntas de selectividad, en su mayoría, para que se vayan acostumbrando al tiempo que tendrán para realizar dicha prueba. Se realizará por la tarde, pues por la mañana no disponen de tanto tiempo o, en su defecto, será a última hora quedándose después de que finalicen las clases (si la asignatura de Matemáticas en dicho curso tiene algún día clase a esta hora). Aunque se prefiere la primera opción, pues así no se pierden horas lectivas. Los ejercicios que aparecerán en dicho examen aunque serán parecidos a los que se han realizado en clase, serán más similares a los ejercicios que el alumno puede encontrarse en la EBAU. No estarán contextualizados, y si lo están serán de forma mínima, preparados así para que el alumno no pierda demasiado tiempo en entender el problema. Serán más bien relativos a las configuraciones algebraica, geométrica o como inversa a la derivada. Además, de ello se pondrá alguna cuestión teórica para que el alumno demuestre que de verdad ha comprendido el contenido teórico. Esta parte será la que más peso tenga en la evaluación.

- **Trabajo de clase:** Al efectuarse una propuesta con una metodología que hace más partícipe al alumnado, con el fin de que éstos trabajen y se motiven en cada sesión se evaluará el trabajo diario en clase durante las sesiones. En concreto se evaluarán: actitud frente al trabajo, cooperación en equipo, interés, motivación, realización de preguntas, sinceridad ante el trabajo realizado, asistencia. El profesor al estar de observador irá anotando cómo ha trabajado el alumno en cada una de las sesiones, y pondrá una nota conjunta. Se busca en el fondo que todo alumno tenga la puntuación máxima en esta nota.

- **Tareas entregables:** Puesto que será muy difícil realizar todos los problemas que se proponen en las actividades durante las sesiones pensadas, los ejercicios que no den tiempo, y que sean similares a los realizados en clase, se dejarán como tarea para el alumno. Estas tareas deberán ser entregadas el día del examen de la unidad. Éstas, a diferencia de los problemas de clase, deberán ser individuales, en caso de que se detecten que dos o más alumnos tienen varios problemas resueltos de forma idéntica, se procederá automáticamente a la penalización de la tarea para ambos alumnos. Se evaluará también el uso de representaciones, el rigor, la formalidad y la claridad de los ejercicios.

Los porcentajes de cada uno de los instrumentos evaluables anteriores aparecen en la Tabla 4.1.

Instrumentos de evaluación	**Porcentaje**
Prueba escrita	60 %
Trabajo de clase	20 %
Tareas entregables	20 %

Tabla 4.1: Porcentajes de los instrumentos de evaluación.

La prueba de recuperación de este último trimestre estará conformada por un único examen en donde se incluirán ejercicios de esta unidad y de todas las demás que se hayan visto en el trimestre, sin tener en cuenta el trabajo de evaluación continua realizado. Si el alumno aprueba la asignatura, se realizará la media ponderada con las calificaciones de las otras dos evaluaciones y si la nota es superior o igual a 5, el alumno habrá aprobado la asignatura. Si no es así, el alumno deberá presentarse a un examen final de toda la asignatura, donde tendrá que evaluarse de todos los contenidos del curso.

Evaluación de la actividad docente

Además de la evaluación del aprendizaje adquirido por los alumnos, se debe evaluar la actividad docente. Deberemos evaluar si la propuesta educativa cumple con los objetivos específicos que se pretendían conseguir. Para ello, deberemos verificar si la imagen conceptual que creamos con la propuesta educativa es suficiente y variada, respondiendo a las siguientes preguntas:

- ¿Se utilizan demasiadas representaciones prototípicas?
- ¿El nivel es alcanzable por los alumnos?
- ¿La propuesta contribuye a evitar obstáculos epistemológicos o didácticos habituales en torno al aprendizaje de las integrales?
- ¿Contextualizar los problemas ayuda al alumno a mejorar la visión de la integral?
- ¿Con la propuesta se ha contribuido a alejarse de los métodos más procedimentales relacionados con la integral?
- ¿Al poner en práctica esta metodología, surgen problemas para abordar ejercicios típicos de EBAU?

Estas preguntas formarán parte de la autoevaluación del proceso de enseñanza del profesor. Para cumplimentar dicha evaluación, el docente realizará a los alumnos un cuestionario para recibir un *feedback* de ellos y evaluar así el proceso de enseñanza, con el uso de esta metodología, recursos, etc, desde su punto de vista. El cuestionario esta conformado por una serie de items que los alumnos tendrán que responder. Un ejemplo de este se muestra en la Tabla 4.2.

ITEMS	**Respuesta**
¿Los contenidos han resultados interesantes?	
¿El profesor ha mostrado atención por el aprendizaje de los alumnos?	
¿Consideráis que con en esta propuesta se ha podido atender mejor las necesidades del alumnado?	
¿La metodología ABP ha resultado útil?	
¿Los materiales que se han utilizado han sido adecuados?	
¿Las actividades han sido atractivas?	
¿El nivel de las tareas ha aumentado considerablemente con respecto a otras unidades?	
¿La herramienta GeoGebra os ha ayudado a visualizar mejor los conceptos?	
¿Qué actividad ps ha parecido más difícil? ¿Por qué?	
¿La herramienta GeoGebra os ha ayudado a visualizar mejor los conceptos?	
He podido comprobar la evolución de mi aprendizaje	
¿Que os ha gustado más de esta nueva metodología?	
COMENTARIOS ADICIONALES (Poned cualquier aspecto que consideréis mejorable o algún otro que se pueda añadir)	

Tabla 4.2: Cuestionario de evaluación.

Evidentemente el cuestionario será anónimo, de esta manera el alumno no se sentirá cohibido por posibles críticas negativas y que estas se vean influenciadas en su nota. Los instrumentos de evaluación docentes que aquí se muestran se han tomado de unos similares de Granado (2022).

4.12. Conclusión y reflexión final

La propuesta didáctica que aquí se recoge presenta diferencias con respecto a las normas no escritas del proceso de enseñanza y aprendizaje en segundo de bachillerato. Se da mayor énfasis al concepto de integral definida que al cálculo de primitivas, lo que es opuesto a cómo se lleva a cabo actualmente. El objetivo de este enfoque es que el alumno tenga un concepto más profundo de la integral definida, inherente al cálculo de áreas. Somos conscientes de que este enfoque provoca un mayor esfuerzo cognitivo en el alumno, por ello se propone una metodología más activa, donde éste participe en su propio proceso de enseñanza y aprendizaje. De esta forma el contenido se hace más atractivo y útil al alumno. Se busca que además el alumno utilice representaciones que le ayuden a visualizar mejor los conceptos por medio de softwares dinámicos como GeoGebra, además se realizarán juegos con los alumnos para incentivarlos y que pongan mayor interés en las tareas. Se parte además de conceptos básicos, como el cálculo de áreas planas con la pretensión de consolidar bien estos conceptos para que el alumno no arrastre contenidos no adquiridos correctamente.

Creemos que es la mejor metodología para desarrollar los contenidos de esta propuesta, pues a la vez que el alumno trabaja en un ambiente más distendido, con mayor ilusión y no tanta desgana, se aprenden a realizar problemas que es lo que se pide en la EBAU. De esta forma también se cree que las nociones teóricas quedan mejor asentadas pues son ellos mismos quien las han construido y trabajado, por lo que será más fácil para ello deducir las fórmulas o los métodos que se usan en los problemas. Al trabajar por parejas aprenden a resolver problemas en común, a hacer lo posible para salir juntos adelante, lo que podrá trasladarse a cualquier ámbito de su vida futura y les facilitará las cosas, pues los problemas se resuelven entre todos, con ayuda. Además se fortalece de esta manera la idea de que hay pensar siempre en el bien común y no en uno mismo.

La propuesta además encaja a la perfección con la nueva Ley de Educación, presentando los problemas contextualizados, haciendo al alumno más partícipe en los procesos de aprendizaje y de su propia enseñanza y creando ambiente grupal, fomentando así un buen clima de trabajo. Fomenta además los procesos de pensamiento, relegando los métodos procedimentales y algorítmicos a un segundo plano, lo que estaba dentro de los objetivos de la propuesta.

Con este enfoque creemos que se puede prevenir o mitigar el hecho de que los alumnos puedan originar obstáculos didácticos y epistemológicos, estudiados en el capítulo 3 la memoria, creando así una mejor imagen mental del concepto en sí, lo que le permitirá adquirir nuevos conocimientos en torno a esos conceptos en niveles universitarios.

Soy consciente de que esta propuesta, un tanto rompedora, puede provocar un mayor esfuerzo de implantación en el aula tal y cómo se encuentra el Bachillerato actualmente. Espero poder llevar esta propuesta alguna vez a la práctica y obtener buenos resultados con ella. Pero en caso de que no se me permita por las razones que sean me ha gustado conocer su tratamiento curricular, didáctico e histórico, además me he dado cuenta observando otras investigaciones, que hay más profesionales que tienen el mismo parecer, por lo que espero ponerla en práctica no muy tarde.

Bibliografía

Aldana E. (2011). *Comprensión del concepto de Integral Definida en el marco de la teoría "APOE"*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Aldana E. y González T. (2011). *Desarrollo del esquema conceptual del concepto de Integral Definida en el marco teórico "APOE": Un estudio de caso.* 12º Encuentro colombiano de matemática educativa, pp. 152-161.

Aranda, M. C. (2015). *Análisis de la construcción del concepto de integral definida en estudiantes de bachillerato.* Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Artigue, M. (1995a). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez, *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*,(pp. 97-140). México: Grupo editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1995). The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics educations, En Y.M Pottier, *Proceedingd of the 1995 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*,(pp. 7-22). Ontario: University of Western Ontario.

Artigue, M. (2003). *Qué se puede aprender de la Investigación Educativa en el nivel universitario.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2.

Azcárate C., Casadevall M., Casellas E. y Bosch D. (1996). *Cálculo Diferencial e Integral.* Educación Matemática en Secundaria. Editorial Síntesis, S. A.

Azcárate C. y Camacho, M (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10, 2*, 135-149.

Boyer, C.B. (1987). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Brousseu, G. (1989). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4* (2), México, pp. 165-198.

Calvo, C. (1997). *Bases para una Propuesta Didáctica sobre Integrales.* Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Barcelona.

Camacho, M. Depool, R. y Sabrina, G. (2008). Integral Definida en diversos contextos. Un estudio de Casos. *Educación Matemática, 20,3*, 32-57.

Colera. J. y de Olivera, M. J. (1998). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, Bachillerato.* Madrid: Anaya.

Colera. J. y de Olivera, M. J. (2011). *Matemáticas II, Bachillerato.* Madrid: Anaya.

Colera. J., de Olivera, M. J., Colera R. y Colera Cañas J. (2016). *Matemáticas II, Bachillerato.* Madrid: Anaya.

Contreras, A. (2000). La Enseñanza del Análisis Matemático en Bachillerato y primer curso de la Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos espistemológicos y los actos de comprensión. *IV Simposio de la SEIEM. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, nº 9.* Noviembre. Sevilla. pp. 71-86.

Contreras, A. y Ordóñez, L (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción de la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (1)*, 65-84.

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhemi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 28 (3)*, 367-384.

Courant, R. y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas?* México D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. y Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: Coordination of two Schemas. En María van der Heuvel-Penhuizen (Ed.). *Proceeding of the XXV Conference of the International Group of Mathematics Education* (pp. 12-17). Utrecht: Freudenthal Institute.

Díaz Y. X. (2015). *Unidad didáctica para la interpretación de la integral definida como el área de una región plana, mediante la modelación de las funciones en GeoGebra.* Trabajo Fin de grado. Universidad Nacional de Colombia.

Dolores, C. (2000). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. El futuro del cálculo infinitesimal.* En I. ICME-8 (Ed.). (pp.151-181). Sevilla: Iberoamericana.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: Theoretical issues. *Proceddings of the four teenth International Conference for the Psychology of Mathematics Educations, 2*, 27-33.

Fernández, L. (2011). *La Historia como herramienta didáctica: el concepto de integral.* Trabajo Fin de Máster. Universidad de Cantabria.

Ferrer, A. (2010). *Propuesta de unidad didáctica del concepto de integral y del cálculo de* *primitivas.* Trabajo Fin de Máster. Universidad de Valencia.

Granado, A. (2022). *Planificación y diseño de una propuesta didáctica fundamentada para trabajar comprensivamente el límite de una función en Bachillerato.* Trabajo Fin de Máster. Universidad de Valladolid.

González, A. (2006). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y aprendizaje.* Tesis doctoral. Universidad de La Laguna.

Guzmán M. de y Colera J. (1989). *Matemáticas I, C.O.U.* Madrid: Anaya.

Guzmán M. de y Colera J. (1989). *Matemáticas II, C.O.U.* Madrid: Anaya.

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial.

Linares P. J. (2013). *Unidad didáctica: Integral Definida.* Trabajo Fin de Máster. Universidad de Almería.

Llorens J. L. y Santoja F. J. (1997). *Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de Integral.* Divulgaciones Matemáticos v.5, nº 1/2, pp.61-76.

Milevicich L. (2008). *Las ideas previas sobre el cálculo integral en los alumnos de primer año de la universidad.* Universidad Tecnológica. Facultad Regional General Pacheco, Buenos Aires (Argentina). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., nº 21, pp. 329-338.

Mundy, J (1984). Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En Bell, A., Low, B., y Kilpatrick, J., (Eds). *Theoru Research and Practice in Mathematics Education.* Proceedings, ICME 5. Adelaide, Working Group reports and collected papers, Shell Center. Notthingham, 170-172.

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. En E. Castro (Coord.), *Investigación en Educación Matemática VI* (pp. 277-287). Granada: SEIEM.

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2010). La integral definida en las pruebas de acceso a la universidad (PAU): sesgos y restricciones en la enseñanza de este objeto en 2º de bachillerato. *Jornadas de investigación en Análisis Matemático. Publicación del grupo de Didáctica del Análisis Matemático de la SEIEM* (pp. 23-41). Baeza: SEIEM.

Orton, A. (1980). *A Cross-sectional Study of the Understanding of Elemntary Calculus in Adolescents and Young Adults.* Tesis doctoral. University of Leeds.

Orton, A. (1983). Students Understanding of Integration. *Educationals Studies in Mathematics.* D. Rediel Publishing Company. Dordrecht: Holland/Boston: U.S.A. *14, (1)*, 1-18.

Otal, N. (2015). *Introducción a la Integral Definida: una propuesta didáctica para segundo de Bachillerato.* Trabajo Fin de Máster. Universidad de Zaragoza.

Pellejero A. (2014). *Introducción al concepto de Integral.* Trabajo Fin de Máster. Universidad Pública de Navarra.

Porres, M. (2011). *Integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Rodríguez R. y Soler J. (2003). *Matemáticas 2 de Bachiller.* Editorial Mc Graw Hill.

Schneider, M (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" de surfaces et de solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques,11* (2.3), 241-294.

Sols I. y Logares M. *Una breve historia de las Matemáticas.* Apuntes de la asignatura de Historia de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, 28 de diciembre de 2020.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity.*Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. J. Bishop y cols (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer, pp. 289-325.

Turégano, P. (1994). *Los conceptos en torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

Turégano P. (1998). *Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo.* Departamento de Matemáticas. Universidad de Castilla-La Mancha. Enseñanza de las Ciencias, 16(2), pp. 233-249.

Turégano P. (2007). *Imágenes del concepto de integral definida.* Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete, num. 22, pp. 17-57.

Vinner, S. (1991). The Rol of Definitions in the Teaching Learning of Mathematics. En D. Tall. (Ed). *Advanced Mathematicañ Thinking, 66-81.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Zamora, M. R. (2014). *Análisis de las pruebas de acceso a las universidades de Castilla y León (Matemáticas II).* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Normativa en material educativa utilizada

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.

BOE (Boletín oficial del Estado), 295, de 10 de diciembre de 2013, 97858-97921.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria y Obligatoria y Bachillerato. *BOE (Boletín oficial del Estado), 3*, de 3 de enero de 2015, 169-546.

ORDEN EDU 363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, la evaluación y desarrollo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. *BOCyL (Boletín Oficial de Castilla y León), 86,* de 8 de mayo de 2015, 32481-32984.

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE (Boletín oficial del Estado), 340,* de 30 de diciembre de 2020, 122868-122953.

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y enseñanzas mínimas del Bachillerato. *BOE (Boletín oficial del Estado), 82*, de 6 de abril de 2022, 46047-46408.

DECRETO 40/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, la evaluación y desarrollo del Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. *BOCyL (Boletín Oficial de Castilla y León), 190,* de 30 de septiembre de 2022, 49543-50352.