UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

DPTO. ÁLGEBRA, ANÁLISIS MATEMÁTICO,
GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Estímulo del razonamiento matemático en ESO y Bachillerato a través de paradojas

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumna: Inés Marcos Lomo

Tutor: Philippe Gimenez

Valladolid, Junio de 2023

Índice general

Introducción

El presente Trabajo Fin de Máster (TFM) es el último paso del *Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Porfesional y Enseñanza de Idiomas*. Pretende ser un trabajo que recoja lo aprendido y lo aplique desde una reflexión sobre el valor de las matemáticas y el modo que estas han de ser enseñadas. A través del tema concreto del estímulo del razonamiento matemático a través de paradojas, esperamos hacer una reflexión sobre cómo transmitir a nuestros alumnos una concepción verídica de las matemáticas.

Las matemáticas no pueden ser reducidas a meros algoritmos. En consecuencia, no han de ser enseñadas como una serie de procedimientos de resolución de problemas que se aplican mecánicamente. De hecho, estos procesos pueden ser llevados a cabo de manera muy eficiente por los ordenadores. Es central en las matemáticas la comprensión de las ideas y los conceptos detrás de estos procedimientos, para poder indicar a un ordenador que los lleve a cabo o ser capaz, en el futuro, de proponer nuevos algoritmos. La capacidad de razonamiento abstracto es la habilidad que se ha de buscar desarrollar principalmente en el aula de matemáticas.

Ahora bien, ¿cómo lograr mejorar esta capacidad en nuestros alumnos? Esta no es una cuestión sencilla. El primer paso es lograr que los alumnos perciban la necesidad del razonamiento para las matemáticas. Posteriormente, han de ver estimulada su capacidad, han de creer que son capaces de razonar y que esta capacidad se puede entrenar y fortalecer. En muchos casos, los alumnos se ven bloqueados para razonar por su autoconcepto y piensan que son incapaces de entender lo que no entienden inmediatamente.

En este TFM hacemos una propuesta de estímulo del razonamiento matemático: la introducción de paradojas en el aula. Estas muestran un elemento de contradicción, que hace necesario saber exactamente qué es lo que se está afirmando y qué argumentos se están utilizando para poder llegar a conclusiones sobre la veracidad o falsedad de una sentencia. Las paradojas evitan los procesos algorítmicos y exigen para su resolución el razonamiento. Las paradojas pueden ser útiles, por tanto, para ayudar a los estudiantes de secundaria y bachillerato a desarrollar habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas, centrales en las matemáticas.

Por otra parte, las paradojas han sido un elemento que ha favorecido el progreso de las matemáticas a lo largo de la historia. Más aún, lo sigue siendo hoy en día. La confusión que generan es un factor de asombro y motivación, que estimula el interés por profundizar en un tema. Esto es también beneficioso en el aula. Las paradojas pueden ser una fuente de curiosidad y asombro para nuestros alumnos, de manera que pueden servir como motivación en el aprendizaje de las matemáticas. Como herramienta dinámica, son valiosas para mostrar a los alumnos una cara nueva de las matemáticas, más vinculada con el aprendizaje en competencias.

Tenemos muchos tipos de paradojas que tocan de un modo u otro a las matemáticas. En el Capítulo 1, tras acercarnos brevemente al propio concepto de "paradoja" y su importancia en el desarrollo de las matemáticas, presentaremos algunos tipos de paradojas, destacando múltiples ejemplos. Veremos paradojas visuales, paradojas lógicas, paradojas de probabilidad y estadística y paradojas del infinito. Este marco teórico nos servirá como referencia en los siguientes capítulos, pues nos aporta un acercamiento concreto a muchas paradojas y a sus conceptos e ideas matemáticas asociadas.

Posteriormente, en el Capítulo 2 haremos una reflexión y una justificación de los beneficios que se pueden obtener de introducir las paradojas en las aulas de secundaria y bachillerato. ¿Son las paradojas estímulo del razonamiento matemático? ¿De qué manera pueden serlo? ¿Qué importancia puede tener una insistencia en el desarrollo del razonamiento? Estas son algunas de las preguntas que buscaremos responder. Justificaremos el valor de las paradojas en la educación en general y en las matemáticas en particular, en todo momento a la luz de la legislación vigente en España. Además, nos fijaremos especialmente en las contribuciones competenciales que pueden aportar las paradojas.

En el último capítulo, veremos algunas propuestas de implementación de las paradojas en el aula de matemáticas. Las actividades propuestas serán diversas y abiertas, buscando así su fácil inclusión en contextos muy distintos, como sabemos que se dan en el ámbito de la educación. Además, las actividades abarcarán distintos cursos de secundaria y bachillerato, pues comprendemos que las paradojas pueden ser un recurso transversal para el aula de matemáticas.

Finalmente, terminaremos este TFM con unas breves conclusiones. Con ello pretendemos recoger los elementos centrales del trabajo y entrelazarlos con coherencia. Esperamos que este TFM pueda ser de utilizad y sirva también como una apertura de horizontes para la mejora de la enseñanza de las matemñaticas en secundaria y bachillerato.

Capítulo 1

Marco teórico

En este primer capítulo, vamos a presentar un marco teórico. En primer lugar veremos qué entendemos por una paradoja, así como su importancia y utilidad. Efectivamente, las paradojas han sido estimulantes del desarrollo de la ciencia a lo largo de la historia, y en particular en matemáticas. Posteriormente, veremos algunos tipos de paradojas, donde destacaremos múltiples ejemplos. La clasificación se ha realizado con un criterio de temática.

Este marco teórico nos servirá para poder encuadrar después la propuesta didáctica. Trataremos de ir sugiriendo a lo largo de esta presentación algunos de los aspectos beneficiosos que pueden aportar al estímulo del razonamiento en las aulas de secundaria y bachillerato.

1.1. ¿Qué es una paradoja?

Comencemos preguntándonos qué es una pradoja. Según la RAE (Real Academia Española) se entiende por paradoja lo siguiente:

1. Hecho o dicho aparentemente contrario a la lógica.

2. Figura de pensamiento que consiste en emplear expresiones o frases que envuelven contradicción; p.ej. *Mira al avaro, en sus riquezas, pobre.*

Vemos en ambas acepciones que el elemento común es la contradicción, que puede ser o no mera apariencia. Etimológicamente, de hecho, el término "paradoja" significa "contrario a la opinión". Se entiende contrario a la opinión recibida y común, lo cual tiene un elemento sociocultural de gran peso. Es decir, son resultados que son contrarios a la intuición y al sentido común, de manera que generan sorpresa. Este asombro que provocan las paradojas es un gran estímulo para el razonamiento.

Dado que la contradicción puede ser una apariencia o puede ser revelación de un error, podemos hacer una clasificación de paradojas según su veracidad o falsedad:

1. Afirmaciones que parecen falsas, pero son verdaderas.

2. Afirmaciones que parecen verdaderas, pero son falsas.

3. Falacias, esto es, sucesión de razonamientos aparentemente correctos que llevan a contradicciones lógicas.

4. Afirmaciones de las que no se puede indicar su veracidad o falsedad.

Cuando nos encontramos con una paradoja, lo primero que tenemos que discernir es su veracidad o falsedad. Las paradojas exigen para ello un razonamiento atento y cuidadoso.

Ahora bien, las paradojas son, por tanto, afirmaciones que contienen algún tipo de contradicción, que puede ser aparente o engañosa. Pero, ¿para qué sirve una paradoja? A lo largo de la historia, la presencia de paradojas ha favorecido el desarrollo del pensamiento científico. De hecho, con el paso del tiempo inluso algunas paradojas, algunos hechos que resultaban incomprensibles, hoy nos resultan completamente normales, como el pensar que la Tierra es redonda y no plana. Están asociadas, por tanto, con crisis en el pensamiento que han provocado avances revolucionarios. Encontrar resultados que no encajan en una determinada idea de las matemáticas ha favorecido grandes progresos. En efecto, las paradojas pueden abordar ideas muy profundas que no se comprenden bien y que, por tanto, necesitan nuevas explicaciones.

Ya a los primeros matemáticos griegos les resultaba profundamente paradógico y sorprendente que no se pudiera medir de forma exacta el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1. Es decir, no comprendían la naturaleza de $\sqrt{2}$. A partir de este hecho aparentemente ilógico, se abrió paso al estudio de los números irracionales. Las famosas paradojas de Zenón, que nos hablan de la convergencia hacia el infinito, también ofrecieron un marco de reflexión. Con el contexto de la democracia griega, que hacía tan importante el debate público, las paradojas ofrecieron la oportunidad de profundizar en los elementos de un buen razonamiento o una argumentación consistente, para diferenciarlo de las falacias.

Otro ejemplo más moderno lo encontramos en las matemáticas del siglo XX. Parecía tremendamente paradójico que pudieran establecerce correspondencias biunívocas entre todos los elementos de un conjunto infinito y los elementos de un subconjunto suyo. Esta y otras paradojas contribuyeron a la reflexión sobre los conjuntos y sus cardinales, lo que promovió el desarrollo de la teoría de conjuntos moderna.

La comprensión histórica del desarrollo de las ideas nos da grandes pistas para su trasmisión a los estudiantes. En efecto, estimular las preguntas tal y como aparecieron en la historia genera cadenas de razonamiento de forma más natural en el alumno, que no tiene por qué haberse hecho estas preguntas que han generado nuevas matemáticas. Antes de ofrecer las respuestas, antes de enseñar los elementos matemáticos que queremos que los alumnos aprendan, debemos plantearles las cuestiones históricas a las que son respuesta dichas ideas matemáticas.

Las paradojas, por tanto, tienen mucho que enseñarnos. Han sido y siguen siendo un elemento de desarrollo de las matemáticas y nos dan la oportunidad de ofrecer de forma sintética y sorprendente preguntas para introducir ideas o conceptos matemáticos a los estudiantes de secundaria y bachillerato. Generan un asombro que estimula el interés por encontrar una explicación convincente. De esta manera, pueden favorecer grandemente el razonamiento.

1.2. Tipos de paradojas

Vamos a acercarnos ahora a unas cuantas paradojas desde una clasificación temática. Hemos visto anteriormente una clasificación según la veracidad de las paradojas, pero entendemos que ofrece una mejor panorámica una organización por temas. Tendremos presente, sin embargo, el criterio de veracidad con cada paradoja que presentemos.

La distribución que proponemos reparte las paradojas en cuatro grupos: paradojas visuales, paradojas lógicas, paradojas de probabilidad y estadística y paradojas del infinito.

1.2.1. Paradojas visuales

Presentamos en primer lugar paradojas visuales. Este tipo de paradojas presentan engaños o deformaciones que nos hacen cuestionar lo que de hecho vemos. ¿Cómo de fácil es engañar a nuestro ojo?

Figuras ambiguas

Una figura ambigua es aquella que puede interpretarse de diferentes maneras. No son imágenes ni verdaderas ni falsas, sino que están sujetas a interpretación. Podemos encontrar ejemplos más o menos artísticos de este tipo de paradojas visuales. Veámos algunos.

Figura 1.1: *Las visiones del Quijote* por Octavio Campo

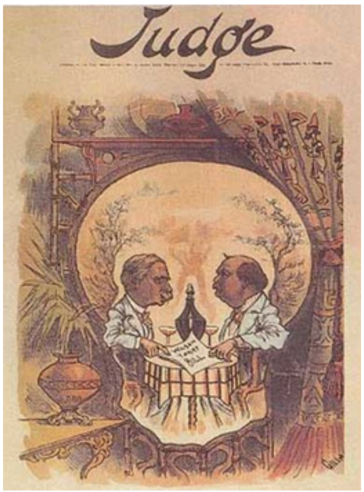


Figura 1.2: *Muerte a las grandes industrias*

¿Qué vemos en la Figura 1.1? ¿Un retrato de el Quijote o a Don Quijote y Sancho Panza cabalgando con unos molinos de fondo? Y en la Figura 1.2, ¿vemos dos empresarios tomando un vino o una calabera? Esta imagen quiere transmitirnos un mensaje reivindicativo con su doble interpretación. En ningún caso podemos "ver" las dos posibles interpretaciones de las imagen al mismo tiempo. Presentamos otros dos ejemplos muy conocidos:

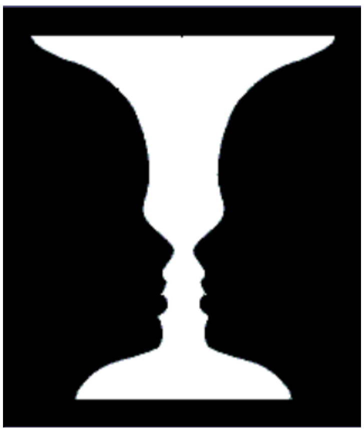


Figura 1.3: *¿Caras o copa?*, inversión de figuras de E. Rubin

Figura 1.4: *¿Mujer joven o vieja bruja?*, inversión de figuras de E.G. Boring

La perspectiva juega a veces un papel clave en la interpretación de las imágenes. Girar la imagen o acercarla hace que tendamos a ver una figura u otra. Vemos seguidamente tres ejemplos de esto:

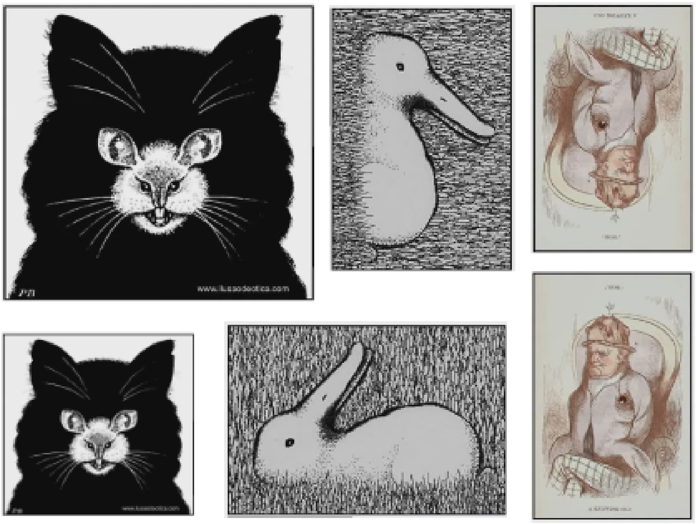


Figura 1.5

En estas imágenes podemos ver, de izquierda a derecha, un ratón o un gato, un pato o un conejo, un burro o un hombre.

También encontramos algunas figuras ambiguas con un carácter más geométrico, como las que presentamos a continuación. Así, en la imagen de la izquierda podemos contar seis o siete cubos según la interpretación. La imagen de la derecha tiene tres interpretaciones posibles: un cubo pequeño en una esquina, un cubo pequeño sobresaliendo de un cubo grande o un cubo grande con un hueco de un cubo pequeño.

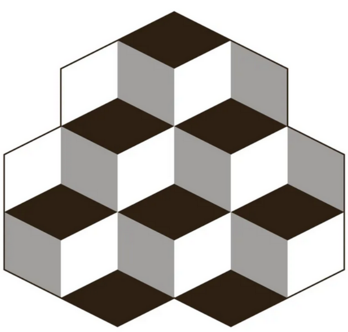


Figura 1.6

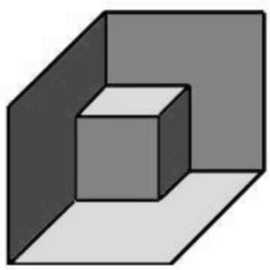
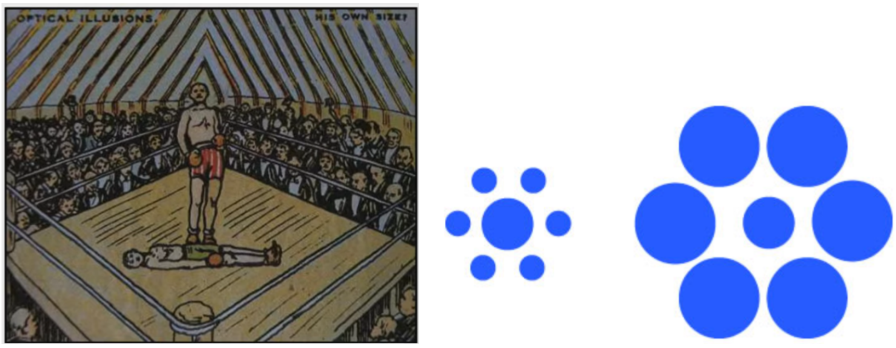


Figura 1.7

Ilusiones ópticas

Las ilusiones ópticas nos presentan objetos que parecen distorsionarse al presentarlos junto con otros elementos o con una determinada perspectiva. Muchas veces aparecen relaciones comparativas, por ejemplo, el que dos rectas sean paralelas o el que el tamaño de dos objetos sea el mismo. Las ilusiones ópticas presentan estas relaciones de forma que no parecen ciertas, aunque de hecho sí lo sean. Veámos algunos ejemplos.

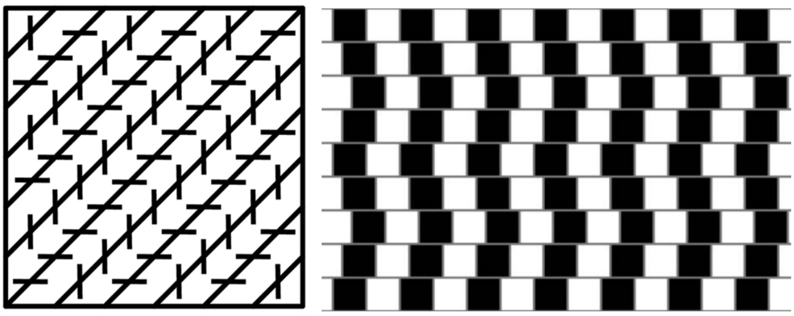
En este primer par de imágenes presentamos objetos del mismo tamaño pero que parecen distintos: los dos boxeadores son igual de altos y los cículos centrales igual de grandes:



(a) (b)

Figura 1.8

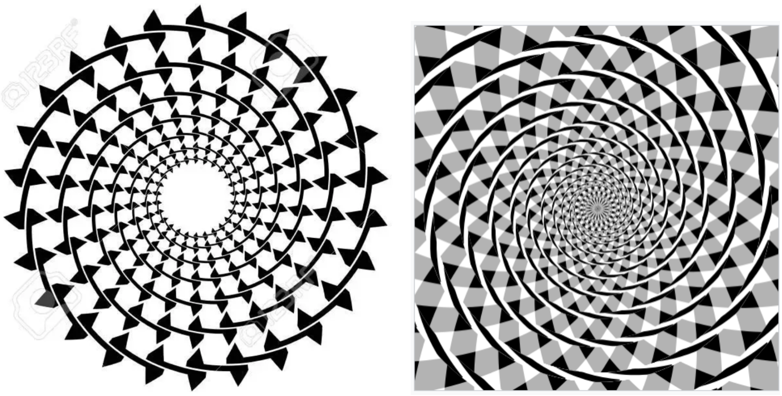
Ahora presentamos dos imágenes con líneas paralelas que no parecen tales:



(a) (b)

Figura 1.9

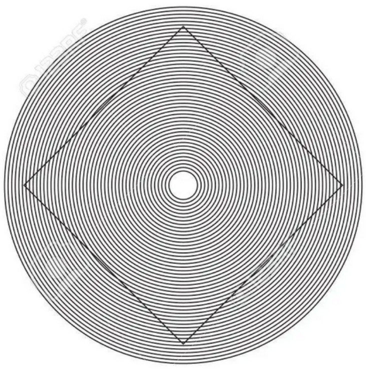
En las siguientes imágenes con circunferencias concéntricas parece que vemos espirales:



(a) (b)

Figura 1.10

Como últimos ejemplos de este estilo tenemos, a la izquierda, un cuadrado que parece deformado, y a la derecha, una red de cuadrados que nos hacen ver unos puntos grises que realmente no están pintados.



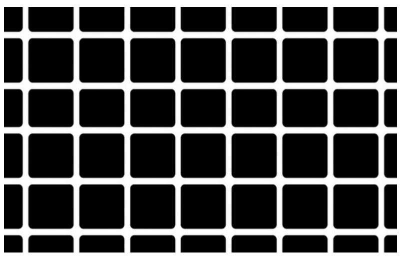


Figura 1.12

Figura 1.11

También podríamos incluir dentro de las ilusiones ópticas a los fractales. Estos objetos geométricos tienen la particularidad de repetir patrones a distintas escalas. De esta manera, por mucho que se amplíe una figura con este tipo de características, se sigue viendo “lo mismo”, los mismos patrones. Algunos ejemplos son el triángulo (Figura 1.13) y la alfombra de Sierpinski (Figura 1.14) o el copo de nieve de Koch (Figura 1.15).La geometría fractal puede resultar paradójica por ser antiintuitiva. Parece que al ampliar un objeto debe presentar un aspecto distinto. Sin embargo, también en la naturaleza aparecen este tipo de geometrías con patrones repetidos a distintos tamaños. Por ejemplo, en flores u hojas, en plantas como la coliflor o los helechos, en algunas conchas o en las líneas de las costas.

Figura 1.13: *Triángulo de Sierpinski*

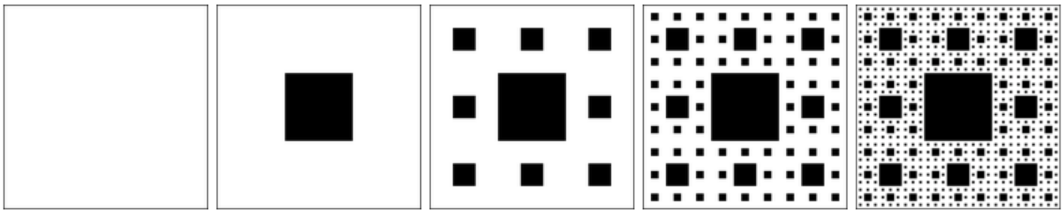


Figura 1.14: *Alfombra de Sierpinski*

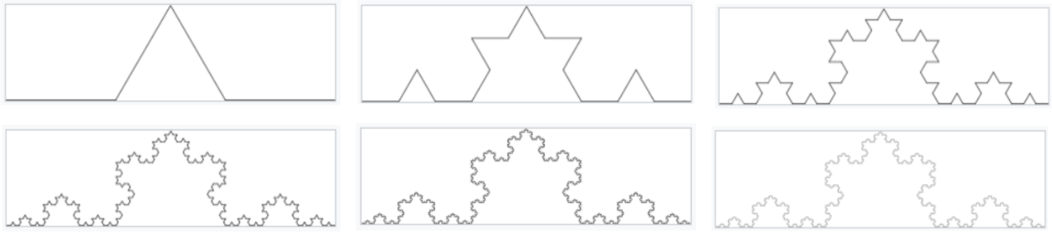


Figura 1.15: *Copo de nieve de Koch*

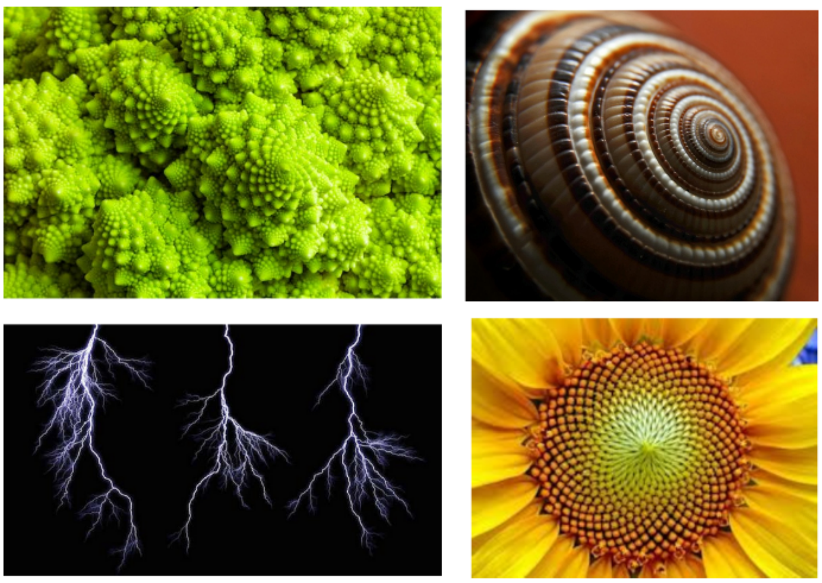


Figura 1.16: Geometría fractal en la naturaleza

Desapariciones o ampliaciones geométricas

En este tipo de paradojas visules presentamos cómo al trocear una superficie y reordenar los trozos aumenta o disminuye el área de la superficie. Esto nos lleva a un absurdo, pues la traslación de piezas no afecta a su área. En efecto, aunque la cadena de razonamiento que vamos a seguir es aparentemente correcta, juega con la sutileza de que no todo se percibe con el ojo humano.

En todos los casos se realizan una serie de cortes a la superficie. Al final del proceso, con el reajuste de trozos, se dan pequeñas superposiciones que hacen parecer que ha desaparecido una unidad de superficie o al contrario, aparece una rendija imperceptible que hace que parezca que la superficie ha aumentado. Este tipo de paradojas visuales, por tanto, presentan un razonamiento falso que aparentemente es correcto. Este tipo de paradojas geométricas son conocidas también como paradojas de Hooper.

Por ejemplo, tomemos un rectángulo de lados 5 y 13, como muestra la Figura 1.17. Si hacemos los cortes marcados y recolocamos los trozos como muestra la Figura 1.18, aparece un cuadrado de lado 8. Es decir, al principio, teníamos un rectángulo con área 65 unidades y hemos pasado a un cuadrado con 64 unidades de área.

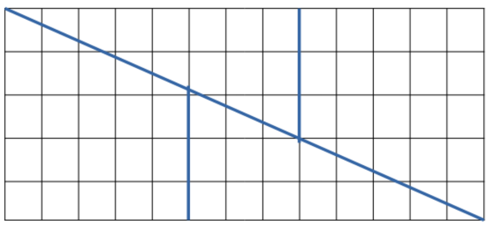


Figura 1.17

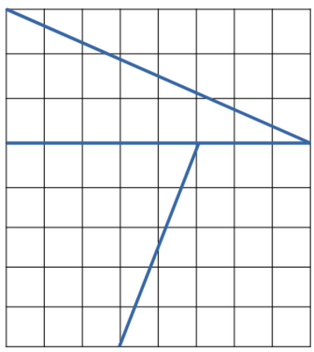


Figura 1.18

Presentamos ahora otro ejemplo similar en el que pasamos de un cuadrado de lado 13 a un rectángulo de lados 21 y 8. Es decir, perdemos de nuevo una unidad de área, pues pasamos de 169 a 168.

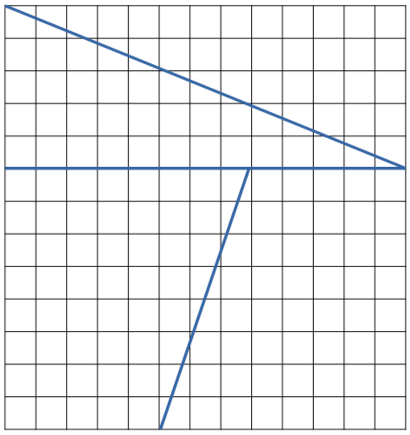


Figura 1.19

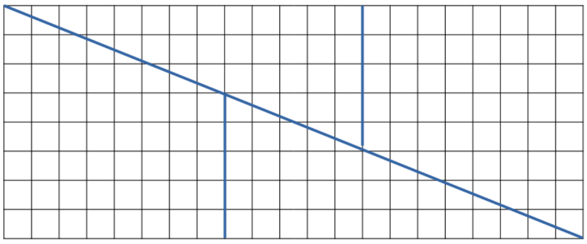


Figura 1.20

En ambos casos se da una superposición inapreciable en los límites de los trozos, lo cual hace perder la unidad de área. Si prestamos atención nos daremos cuenta de que los valores que aparecen en los lados en ambos ejemplos son sumas unos de otros. En efecto, todos estos valores pertenecen a la sucesión de Fibonacci, en la que un nuevo elemento de la sucesión, F_n, se consigue sumando los dos anteriores, F_{n-2} y F_{n-1}, siendo $F_1 = 1$ y $F_2 = 1$ los términos iniciales. Los primeros elemento de esta sucesión son los siguientes:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...$$

Esta sucesión tiene la siguiente propiedad:

$$F_n^2 = (F_{n-1} \cdot F_{n+1}) \pm 1,$$

que es la explicación de la paradoja. Si se toma una sucesión de Fibonacci generalizada cambiando los términos iniciales, podríamos hacer construcciones en las que se perdieran más unidades de área. Estas serían, sin embargo, más visibles al ojo humano.

Pasando a otro ejemplo, conocido como paradoja de Curry, tomamos un cuadrado de lado 12 y lo seccionamos como indica la Figura 1.21. Recolocando las piezas como se muestra en la Figura 1.22, nos aparece de nuevo un cuadrado de lado 12 con un hueco en el interior. En este caso, en lugar de darse una superposición, la segunda figura está un tanto estirada, y tiene una altura de $12 + \frac{1}{12}$. Ese pequeño rectángulo añadido a la altura tiene la misma área que la porción que falta en el interior.

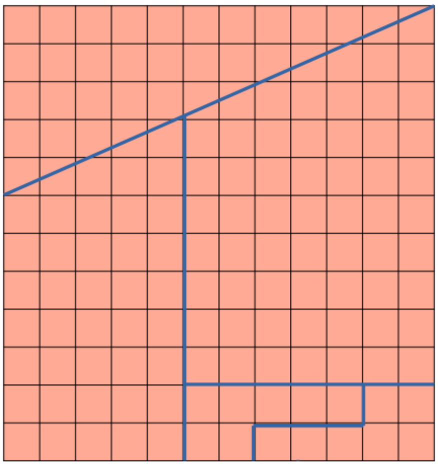


Figura 1.21

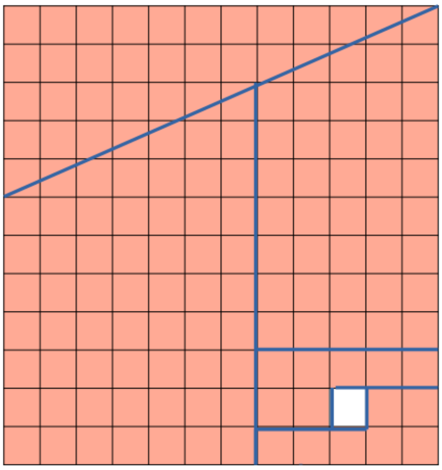


Figura 1.22

En todos los ejemplos vistos hasta ahora hemos visto desaparecer porciones de área. En todos los casos se basan en ir cogiendo pedacitos de área de muchos sitios, de manera imperceptible para el ojo humano. Con la reagrupación de las piezas, salta a vista de pronto, pareciendo una desaparición súbita.

De este estilo podemos encontrar imágenes curiosas en las que desaparece un conejo o un duendecillo[1]. Realmente, el conejo no ha desaparecido, solamente se ha repartido entre otros, que han pasado a ser un poco más grandes. Y los duendes supervivientes, si nos fijamos, son más altos que antes de que desapareciera su compañero.

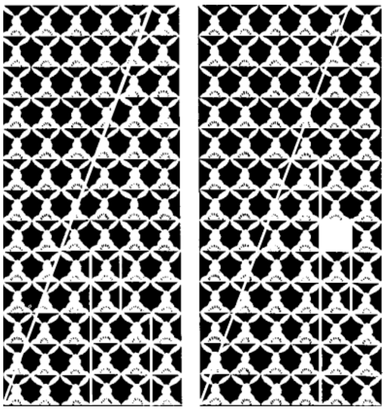


Figura 1.23

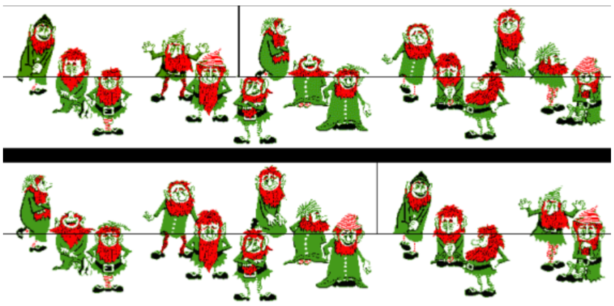


Figura 1.24

[1]©Copyright 1968, W. A. Elliott Co., Toronto, Canadá.

Anamorfosis

Etimológicamente, la palabra "anamorfosis" significa "transformar". Relacionado con el significado etimológico, una anamorfosis es una deformación reversible de una imágen a través de procedimientos matemáticos u ópticos. Aparentemente, son figuras deformes, pero al mirarlas con la perspectiva adecuada y, en algunos casos, haciendo uso de algún tipo de espejo, se puede encontrar un punto desde el que se invierta la transformación realizada a la imagen.

Las anamorfosis se utilizan, por ejemplo, para las señalizaciones de tráfico del suelo. El conductor mira la carretera desde una perspectiva inclinada que hace ver las señalizaciones sin deformar. Si nos accercamos como peatones veremos que las señales están estiradas, deformadas. También se utilizan transformaciones anamórficas para cartografía estadística. Haciendo este tipo de transformaciones se puede dibujar una zona más o menos grande de lo que en realidad es para mostrar, no la geografía, sino otro tipo de fenómenos, como la densidad de población o la riqueza. Por tanto, las anamorfosis tienen algunas aplicaciones útiles. También están presentes en contextos más artísticos. A veces buscando ocultar algún elemento o mensaje en una obra, como veremos en algún ejemplo. En otras ocasiones, se utilizaban estas técnicas cuando se pintaban techos, que se observan desde una perspectiva particular, para que se vieran las imágenes bien proporcionadas y sin deformar.

Tenemos anamorfosis ópticas y catóptricas. En las primeras el punto de vista desde el cual se ve la imagen está situado en una posición oblicua respecto al plano pictórico. Por otra parte, en las catóptricas es necesario una superficie especular para poder ver la imagen escondida. Según cuál sea la superficie necesaria, podemos encontrar anamorfosis cilíndricas o cónicas.

Las anamorfosis ópticas u oblicuas se consiguen proyectando la imagen sin deformar de forma oblicua en lugar de perpendicular. Como no se añade ningún objeto geométrico aparte del propio plano, la imagen no deformada se puede observar mirando la imagen con una perspectiva con igual inclinación que la proyección realizada. Un ejemplo clásico de este tipo de anamorfosis lo encontramos en el cuadro *Los embajadores*, pintado por Holbein el joven en 1533[2].

[2] Este cuadro se encuentra actualmente en la *National Gallery* de Londres

Figura 1.25

En la parte inferior del cuadro, podemos observar una figura deformada que no logramos identificar bien. Si miramos el cuadro desde su lateral izquierdo, podemos ver que esta figura es una calabera. Se han propuesto distintas explicaciones de la intención del pintor al añadir este objeto. Algunas de estas interpretaciones han sido una amenaza velada o una firma del autor, cuyo apellido en alemán significa "hueso hueco".

En las anamorfosis catóptricas se coloca la imagen que queremos deformar dentro de un cilindro o un cono, según se busque una anamorfosis cilíndrica o cónica, y se proyecta como indican las siguientes imágenes[3]:

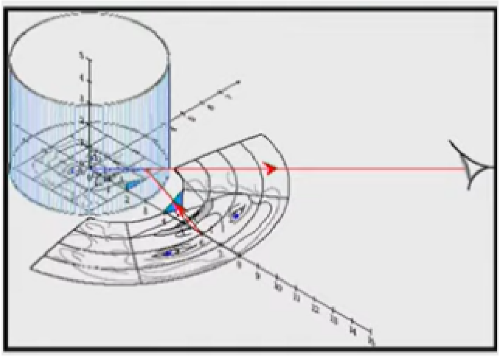


Figura 1.26: Anamorfosis cilíndrica

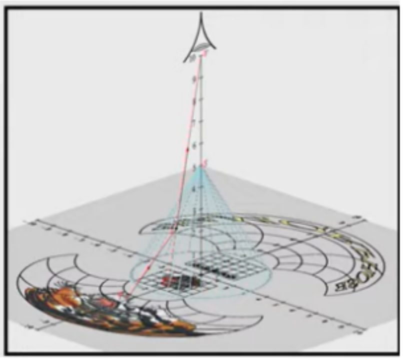


Figura 1.27: Anamorfosis cónica

Para ver la imágen sin deformar, se ha de utilizar una superficie especular cilíndrica o cónica y mirar desde la perspectiva adecuada. Un ejemplo de anamorfosis cilíndrica es *La*

[3]Para una descripción algebraica desarrolla de las transformaciones que se llevan a cabo, se puede consultar el siguiente enlace web: `https://melusine.eu.org/syracuse/G/pstricks/Anamorphoses/` Consultado el 09/05/2023.

isla misteriosa de István Orosz. Como vemos en la Figura 1.28, esta imagen oculta con una anamorfosis cilíndrica un retrato de Jules Verne, autor de una novela titulada precisamente *La isla misteriosa.*

(a) (b)

Figura 1.28

Las anamorfosis pueden estimular grandemente la curiosidad y el interés de los alumnos por las matemáticas. Su aparente deformidad y la explicación matemática, sencilla de comprender, pueden ser elementos favorables para provocar el asombro. Por otra parte, dan la oportunidad de explicar algunas técnicas utilizadas a lo largo de la historia del arte, así como de introducir algunas obras concretas. Esto es muy positivo para una formación integral y transversal de los alumnos, que permita que sean capaces de relacionar distintas áreas del conocimiento.

1.2.2. Paradojas lógicas

La ciencia está basada en las matemáticas, y las matemáticas en la lógica. Pero, ¿la lógica es tan irrefutable como parece? Encontramos muchas paradojas de carácter lógico, que muestran contradicciones en este campo. Es decir, encontramos muchas cadenas de razonamientos aparentemente correctos que conducen a contradicciones obvias. Aparecen en todos los casos indicios de razonamiento circular o autoalusión.

Muchos filósofos, lógicos y matemáticos, como B. Russell, han tratado de hacer desaparecer estas paradojas siendo precisos y concretos en los enunciados, para que no den lugar a equivocaciones. Las paradojas de las que vamos a hablar han estimulado, por tanto, el avance de la lógica, sobre todo durante en siglo XX. Las vamos a separar en cuatro grupos: paradojas semánticas, paradojas de teoría de conjuntos, paradojas de vaguedad y paradojas de predicción.

Paradojas semánticas

Las paradojas semánticas tratan acerca del valor de la verdad. Podemos encontrar muchas paradojas cotidianas, como una pintada en la que ponga «¡Basta ya de pintadas!» o una tienda llamada «La siempre abierta» que se encuentre cerrada. También tenemos ejemplos cotidianos de autoinvalidación, como decir «Todo conocimiento es dudoso». Otro ejemplo es la sentencia del economista Alfred Marshall: «Toda frase breve acerca de economía es intrínsecamente falsa». Vemos con estos pequeños ejemplos la relavancia que tiene el lenguaje en la aparición de paradojas.

Vamos a ver ahora la paradoja del mentiroso, atribuida en su versión original a Epeménides, poeta griego que vivió hacia el siglo VI a.C. Este poeta indicó que «Todos los cretenses son mentirosos», siendo él mismo cretense. Ahora bien, ¿dijo Epeménides la verdad? Si la afirmación es verdadera, habría al menos un cretense que dice la verdad. Pero entonces, no todos los cretenses serían mentirosos y la afirmación sería falsa. En cualquier caso, llegamos a contradicción.

Otra forma de expresar esta paradoja es tomar la siguiente proposición:

$$P : \text{Esta sentencia es falsa}$$

De nuevo, si P es verdad, resulta que es falsa. Por el contrario, si es falsa, es verdad. Se da una cierta regresión infinita, como en la clásica paradoja que se pregunta qué fue antes, si el huevo o la gallina. En 1947, W. Burkhart y T. Kalin construyeron un ordenador proyectado para resolver problemas de lógica binaria. Al plantear a la máquina que asignase un valor de verdad o falsedad a la paradoja del mentiroso, esta entró en bucle infinito.

Según el principio de razonamiento *consequentia mirabilis*, que dice que si una proposición implica su propia negación, se puede concluir la negación de la proposición. Si tomamos las siguientes sentencias,

(1) Si P es cierta, entonces es falsa, es decir, no cierta.

(2) Si P es falsa, entonces es cierta, es decir, no falsa.

Aplicando el principio de *consequientia mirabilis*, de (1) podríamos inferir que P no es cierta y de (2) que sí lo es. Es decir, la sentencia P no es ni cierta ni falsa.

Parece que el principal problema de la paradoja del mentiroso es la autoalusión. Sin embargo, si tomamos la siguiente versión de la paradoja, muy estudiada en la Edad Media y conocida como la paradoja de Platón y Sócrates, desaparece la autoalusión:

A La frase B es falsa.

B La frase A es cierta.

Estas dos sentencias, cuando son tomadas conjuntamente, alteran una y otra vez el valor de verdadero o falso asignado a la otra. Tenemos de nuevo la regresión infinita, pero sin la autoalusión. En la novela de L. Carroll, *Alicia en el país de las maravillas: a través del espejo* aparece, en cierto modo, esta versión de la paradoja. A Alicia, que sueña que está en el país de las maravillas, le dicen que el Rey, que está dormido, sueña con ella. ¿Quién sueña con quién? Tenemos también en este ejemplo la regresión infinita.

Una solución para la paradoja del mentiroso es rechazar que el principio de bivalencia sea siempre cierto. Es decir, asumir que no toda sentencia es cierta o falsa. Restringiendo el principio a sentencias declarativas, relacionadas con hechos. Sin embargo, habría que desestimar también sentencias que describen un hecho de forma insuficiente, y por tanto defectuosa. Por ejemplo, la sentencia

S : Has dejado de fumar,

si nunca has fumado es no cierta. Pero si decimos que S es falsa, entendemos que sigues fumando.

Otra solución es la propuesta de la jerarquía de verdades de Tarski. Según esto, el concepto ordinario de “verdad” es incohente. Se debe tomar, en cambio, una serie de “conceptos de verdad” ordenados jerárquicamente. Cada nivel de verdad esta asociado a un determinado lenguaje. Para hablar de si una sentencia es cierta o falsa, hay que acudir a un “metalenguaje” situado en el peldaño inmediatamente superior. Podemos proponer el siguiente ejemplo de los primeros peldaños:

A Los ángulos interiores de un triángulo suman 180º.

B La frase A es cierta.

C La frase B es cierta.

D La frase C es cierta.

De nivel A puede ser una lista de teoremas enunciados. De nivel B sus demostraciones. De nivel C un libro sobre teoría de las demostraciones. Es raro, al menos en matemáticas, que haya necesidad de pasar de este tercer nivel de metalenguaje. Esta solución parece para algunos, sin embargo, demasiado radical.

Paradojas de teoría de conjuntos

B. Russell, lógico y matemático, ha sido el que ha llamado la atención sobre las paradojas en la teoría de conjuntos. Además, ha aportado también mucho a la investigación en la lógica para resolverlas.

Antes de ver las distintas paradojas, vamos a enunciar un teorema sobre la cardinalidad de los conjuntos. En el caso de conjuntos finitos, dos tienen igual cardinal (son equipotentes) si tienen el mismo número de elementos. Como generalización, dos conjuntos cualesquiera son equipotentes si podemos establecer una biyección (una aplicación sobreyectiva e inyectiva) entre ambos. Presentamos ahora el Teorema de Cantor:

Teorema 1. (de Cantor). Dado un conjunto C, existe siempre otro de mayor cardinalidad, que es el conjunto de sus partes, $P(C)$, formado por todos los subconjuntos de C:

$$P(C) = \{S : S \subseteq C\}$$

Ahora bien, consideramos el conjunto U = conjunto de todas las cosas. Cualquiera de los elementos de $P(U)$ es una cosa, por lo que todos sus elementos pertenecen a U, es decir, $P(U)$ está contenido en U. En consecuencia, el cardinal de U es mayor o igual que el de $P(U)$. Con esto hemos encontrado un contraejemplo del Teorema de Cantor. Esta paradoja propuesta por Russell deja en evidencia la fragilidad de la teoría de conjuntos de principios del siglo XX.

Otra paradoja de conjuntos de Russell es la conocida como paradoja del barbero. En un pueblo hay un barbero que indica lo siguiente: «Yo afeito a todos los que no se afeitan a sí mismos, y solamente a estos». Entonces, ¿quién afeita al barbero? Si se afeita a sí mismo, entonces no pueder ser de los que el barbero afeita. Pero si no se afeita a sí mismo, entra a formar parte del grupo que afeita el barbero. Esta paradoja ilustra la contradicción de considerar el conjunto

$$W = \{C : C \notin C\}.$$

Pues entonces, ¿W pertenece o no a W?

Esta paradoja provocó una gran crisis en la lógica y en la teoría de conjuntos, que se creía coherente y fundamentada. Como anécdota al respecto podemos mencionar la publicación de *Fundamentos de la aritmética* de G. Frege. Este tuvo que retractar su obra, recién publicada, tras recibir una carta de Russell en la que le indicaba la contradicción de admitir un conjunto formado por todos los que no son miembros de sí mismos. La teoría de conjuntos propuesta en la obra de Frege permitía la construcción de dicho conjunto.

Podemos añadir variantes de la paradoja del barbero. En todos los casos, formaremos un determinado conjunto C en el que incluiremos a todos los objetos y solamente a esos objetos que no cumplan un cierta relación con respecto a sí mismos. La paradoja surge cuando se plantea la cuestión de si C pertenece o no a sí mismo.

- La paradoja de Grelling. Dividimos los adjetivos en autodescriptivos y no-autodescriptivos. Los primeros describen en sí mismos lo que significan. Es decir, *español* es una palabra escrita en español, por lo que es autodescriptiva. De la misma manera, *corto*, que es una palabra corta, o *polisílabo*, que tiene varias sílabas, son también autodescriptivas. Por el contrario, *húngaro*, *largo* o *monosílabo* son no-autodescriptivas. La paradoja aparece cuando nos preguntamos a qué clase de adjetivos pertenece la palabra *no-autodescriptivo*.

- Paradoja de Berry. Consideramos C el conjunto de los enteros que pueden ser descritos con menos de 13 palabras. Definimos ahora m como el «mínimo entero que no puede ser descrito con menos de trece palabras». Esta expresión consta de 12 palabras, pero describe a un número que no puede ser descrito con menos de trece palabras. Entonces, ¿pertenece el entero m al conjunto C? En cualquier caso, llegamos a contradicción.

- Una paradoja análoga a la anterior, propuesta por M. Black es la siguiente. En la introducción de un libro encontramos la siguiente sentencia: «Este libro menciona diferentes numeros enteros. Fíjese en la lectura en el mínimo entero que no es mencionado de ninguna manera en este libro». Si C es el conjunto de los enteros mencionados en el libro, ¿pertenece a dicho conjunto el mínimo entero no mencionado en el libro?

- Podemos plantear infinidad de paradojas similares. ¿Quién repara al robot encargado de reparar a todos los robots que no se autorreparan? ¿Qué catálogo notifica la relación del catálogo al que pertenecen todos los catálogos que no se mencionan a sí mismos?

Una tercera paradoja de teoría de conjuntos es la paradoja de los números interesantes.

Fue propuesta por E.F. Bechenbach en 1945 como una "demostración" de que todos los números naturales son interesantes. Comenzaremos dividiendo todos los números naturales en dos conjuntos, los interesantes y los no interesantes. Dentro de los interesantes incluiremos aquellos que cumpla alguna propiedad única o tenga alguna característica especial. Ahora bien, si nos fijamos en el conjunto de los naturales no interesantes, encontraremos uno que sea el menos interesante de todos. Pero precisamente esto hace a ese número interesante, por lo que hemos de moverlo al otro conjunto. Repitiendo este proceso podemos pasar todos los números naturales al conjunto de los interesantes. En conclusión, todos los naturales son interesantes.

¿Es válida esta demostración? Cuando pasemos el segundo número menos interesante al conjunto de los interesantes, ¿volverá a ser vulgar al estar en el mismo conjunto que el primero de los números menos interesantes? ¿O ser el segundo es ya una característica única que lo hace interesante? ¿Algo es interesante por ser lo menos interesante de un grupo? Finalmente, si todos los números son interesantes, ¿aporta algún valor descriptivo el adjetivo *interesante*? La paradoja se da por lo subjetivo del aspecto que se pretende analizar: el hecho de que un número sea o no interesante.

Todas estas paradojas relacionadas con los conjuntos están muy relacionadas con las paradojas semánticas. Toda proposición con algún valor de verdad asignado, puede escribirse como un enunciado sobre conjuntos. Recíprocamente, también cualquier enunciado de conjuntos puede transformarse en una sentencia. Por ejemplo, son equivalentes las siguientes proposiciones:

A Todos los patos son pájaros.

B El conjunto de los patos está contenido en el conjunto de los pájaros.

Por tanto, se puede establecer una correspondencia entre las correspondencias semánticas y las que encontramos en la teoría de conjuntos. Si recordamos la paradoja del mentiroso y nos fijamos en la sentencia que tomamos:

$$P : \text{Esta sentencia es falsa,}$$

podemos reescribirla de la siguiente manera:

$$P' : \text{Esta sentencia pertenece al conjunto de las proposiciones falsas.}$$

Tanto si P' pertenece a C, siendo este de las proposiciones falsas, como si no, llegamos a la contradicción que ya hemos visto con anterioridad.

Esta correspondencia estaba justificada con un postulado de la lógica tradicional, de herencia aristótelica. Según este postulado, conocido como *principio de comprensión*, toda propiedad puede expresarse como un conjunto. Es decir, dada una propiedad $P(x)$, podemos tomar el conjunto $\{x : P(x)\}$. La paradoja aparece cuando Russell considera la proposición $P(x) = (x \notin x)$, es decir, cuando aparece la autoalusión. Seguidamente aparecen las paradojas que hemos ido viendo.

Una posible solución es la teoría de tipos de Russell. Esta teoría es homóloga a la jerarquía de verdades de Tarski que hemos visto anteriormente. En la teoría de tipos tenemos una jerarquización de los conjuntos, que se clasifican en "tipos". Como en la propuesta de Tarski, solo se puede referir a todos los elementos que cumplen una sentencia si ambos son del mismo tipo, es decir, si están al mismo nivel. De esta manera no está permitido hablar de si un conjunto pertenece o no a sí mismo. Con esto se evita la formación de conjuntos contradictorio. Así, la proposición de la paradoja del mentiroso es no válida. O la solución de la paradoja del barbero es tan sencilla como que dicho barbero no existe, la paradoja es un enunciado mal realizado

Otra propuesta de solución es la axiomática de Zermelo-Fraenkel, que elimina el *principio de comprensión* e incluye el *axioma de elección*. De esta manera se busca admitir en la teoría de conjuntos solo aquellos que no llevan a contradicciones.

Paradojas de vaguedad

Este tipo de paradojas cuentan con la vaguedad del lenguaje y se atribuyen al lógico griego Eubulides de Mileto. Estas paradojas también se llaman de tipo sorites debido a la paradoja del grano de arena y el montón de arena. En efecto, esta palabra griega, *sorites*, significa "montón" o "pila".

Vamos a ver en primer lugar la paradoja del grano de arena y el montón de arena. Si tenemos un montón de arena con, por ejemplo, 10000 granos y retiramos 1, sigue siendo un montón. Iterando este razonamiento de forma inductiva podemos llegar a que un montón de 1 grano es un montón. De la misma manera, no diríamos que 1 grano de arena es un montón, y en consecuencia, tampoco si añadimos un grano diríamos que tenemos un montón. Así, 2 granos no son un montón, 3 granos no son un montón, etc. Iterando el proceso llegamos a que 10000 granos no son un montón. Con el mismo tipo de razonamiento hemos llegado a afirmar que tanto 10000 granos de arena como 1 grano son y no son un montón.

La clave de la paradoja reside, como hemos adelantado, en la vaguedad. ¿Cuántos granos de arena podemos considerar que son un montón? ¿Dónde está la frontera entre lo que es un montón y lo que no? La diferencia que no vemos entre un montón de 10000 granos y uno de 9999 nos parece obvia si comparamos 10000 granos con 1, por eso nos resulta paradójico o contradictorio.

Otras paradojas de este tipo, que juegan con la vaguedad del lenguaje, son las siguientes:

- Paradoja del hombre calvo. Si a un hombre que no es calvo le quitas un pelo, sigue sin ser calvo. Si iteramos el proceso llegamos a que un hombre con 2 pelos o 1 no es calvo. ¿Cuántos pelos tiene que perder una persona para que se le considere calvo?

- Paradoja del hombre con capucha. «Dices que conoces a tu hermano, este hombre con capucha es tu hermano y no lo conoces». Esta paradoja juega con la vaguedad al uitilizar el término "conoces". ¿Qué significa conocer? ¿Significa saber bien quién es, identificar, reconocer?

Como solución a este tipo de paradojas, lógicos como Russell o Frege, ya mencionados, hablan de una tendencia a un leguaje ideal. Se ha de procurar precisar los términos y sus fronteras para evitar este tipo de paradojas. Otra propuesta de solución es la utilización de lógicas graduadas, que tengan más valores aparte del "sí" o el "no". Podríamos hablar así, por ejemplo, de grados de calvicie en lugar de decir si un hombre es o no calvo. Tiene el problema, sin embargo, de las fronteras entre un nivel y otro. Ejemplo de este tipo de lógicas es la lógica difusa de Goguen y Zadeh. Una tercera respuesta posible a este tipo de paradojas es, simplemente, aceptarlas.

Paradojas de predicción

Este tipo de paradojas lógicas incluyen en sus planteamientos algún tipo de predicción. Vamos a ver tres paradojas distintas para ilustrar los diferentes tipos de contradicciones que nos podemos encontrar respecto a la predicción.

- La paradoja de la autopredicción. Se tiene un ordenador que solo puede responder "sí" o "no". Alguien le pregunta a la máquina si su próxima respuesta va a ser "no". Entonces, el ordenador no puede responder sin entrar en contradicción. En efecto, si responde "sí" no estará respondiendo verídicamente, pues su respuesta más próxima ha sido "sí" en lugar de “no”. Por otra parte, si reponde “no” habrá cumplido el decir “no” y por tanto la respuesta debería haber sido “sí”. En cualquier caso hay contradicción.

En realidad, esta paradoja es una nueva versión de la paradoja del mentiroso. Que el ordenador responda “no” viene a significar «Es falso que yo esté diciendo ahora mismo “es falso”». Esto es equivalente a la negación proposición que planteabamos en la paradoja del mentiroso: «Esta sentencia es falsa».

- La paradoja del condenado. A un prisionero se le dice que un día del próximo mes, por la mañana, será ejecutado, pero que no sabrá el día hasta la misma mañana de la ejecución. Ésta sobrevendrá al condenado de forma inesperada.

  En esta situación, el prisionero argumenta que el último día del mes, el día 30, no puede ser la ejecución, pues si llega el día 29 ya solo quedaría el 30 para cumplir la sentencia, por lo que no sería inesperada. Pero si el 30 no puede ser la ejecución, el último día posible pasa a ser el 29, por lo que el 28 se tendría la certeza de la próxima ejecución. Entonces, tampoco el 29 puede cumplirse la sentencia. De esta manera, el prisionero llega a la conclusión de que no es posible cumplir la condena que se le ha predicho y que no habrá ejecución. Sin embargo, un día cualquiera del mes, de hecho se cumple la sentencia y es ajusticiado. ¿En qué ha fallado el razonamiento del condenado?

  Parece razonable conceder que el primer paso del razonamiento del prisionero es correcto. Sin embargo, puesto que cada paso del argumento es idéntico al anterior, una vez admitido el primer paso, el resto del razonamiento resulta inevitable. Hasta el primer paso es, por tanto, incorrecto.

  La paradoja subsistiría aunque el mes solo tuviera un día. En efecto, pensemos que le hubieran dicho al condenado «Mañana serás ejecutado inesperadamente». Si la sentencia es cierta, esperaremos la sentencia, pero entonces ya no será inesperada. Esta contradicción generará dudas al prisionero sobre si de hecho habrá ejecución, por lo que si la hay será inesperada, como había sido predicho. Una solución a paradoja, por tanto, sería advertir que si bien el que ha predicho la ejecución en el próximo mes puede cumplir su palabra, el prisionero no tiene forma de saber si la cumplirá o no. En consecuencia, no puede sacar conclusiones válidas sobre el no cumplimiento de la ejecución respecto a nigún día del mes, ni siquiera el último.

  Otra posible respuesta es caer en la cuenta de que un conjunto tiene propiedades distintas que cada uno de sus miembros tomados individualmente. De esta manera, no es lo mismo considerar un mes que la suma de 30 días. Así, el conjunto del mes puede contener "días sorpresa", pero esta característica se pierde al fijarse en los días individualmente. El error es llevar conclusiones observadas en días individuales al conjunto del mes.

Esta paradoja tiene otras versiones, como la de un profesor que anuncia un examen sorpresa para la semana siguiente o un rey que presenta un conjunto de puertas numeradas y anuncia que tras una de ellas se esconde un tigre que saltará de forma inesperada sobre quien va abriendo las puertas siguiendo el orden de numeración.

- La paradoja de Newcomb. Inventada por el físico W. Newcomb, fue publicada y analizada por primera vez por el filósofo R. Nozick. Un presentador con fama de predicción sobre las decisiones de las personas toma dos cajas, una transparente y otra opaca, que llamaremos A y B respectivamente. En la caja trasparente se ven 1000 euros. Por otra parte, la caja opaca puede estar vacía o contener un millón de euros. El presentador presenta la siguiente situación a otras personas: «Tienes dos opciones. La primera es tomar ambas cajas y quedarte con el dinero que contienen. La segunda, tomar solamente la caja B y quedarte con su contenido. Ahora bien, si yo creo que vas a decantarte por la primera opción, habré dejado vacía la caja B, por lo que solo te llevarás 1000 euros. Si, por el contrario, pienso que vas a tomar la segunda opción, habré dejado el millón de euros».

  Una primera persona, P_1, decide quedarse solamente con la caja B, con el siguiente razonamiento: «He visto al presentador predecir otras veces y siempre acierta. Por tanto, me llevaré solo la caja opaca y, cumpliendose su predicción, tendré un millón de euros». Otra persona, P_2, elige, por el contrario, llevarse las dos cajas, diciendo: «Sea lo que sea que el presentador piensa que voy a hacer, ya ha hecho su predicción. El contenido de la caja B no va a cambiar haga lo que haga. Por tanto, lo mejor es llevarme las dos cajas, pues, así esté o no vacía la caja B, me llevaré 1000 euros más que si solo cogiera la caja B». ¿Quién ha elegido mejor? ¿P_1 o P_2?

  El análisis de esta paradoja está relacionado con la teoría de juegos y la teoría de decisión. Algunos han propuesto que esta paradoja es simplemente un método para comprobar las convicciones de una persona acerca de la posibilidad de conductas espontáneas. Puede pensar que nunca son previsibles del todo, o por el contrario, que todo está determinado. Así, la reacción de P_1 ante el problema es "determinista" y la de P_2 "espontaneísta".

Otra solución a la paradoja es negar su validez, por ser las condiciones exigidas para su planteamiento contradicctorias, independientemente de si el futuro está o no determinado.

Todas estas paradojas muestran las dificultades lógicas que implica añadir hipótesis de predicción a los razonamientos. Precisamente por ser elementos en cierto modo desconocidos, presentan dificultades a la hora de considerarlos dentro de una argumentación de tipo deductivo.

1.2.3. Paradojas de probabilidad y estadística

En el campo de la probabilidad y la estadística es habitual encontrarse con resultados contrarios a la intuición. Las paradojas de las que vamos a hablar en este apartado ilustran este hecho. Mostrar y explicar este tipo de paradojas en el aula puede alertar a los alumnos sobre la falta de fiabilidad, en algunos casos, de su propia intuición. También pueden ser útiles para fomentar el pensamiento crítico.

Paradojas de probabilidad

En primer lugar, vamos a ver algunas falacias utilizadas en el contexto de los juegos de azar, las apuestas y los concursos televisivos. En estos resultados, se presentan probabilidades falsas que no llaman la atención por parecer, a priori, lógicas según nuestro sentido común.

- La falacia del jugador. Esta falacia se basa en la creencia de que dos experimentos idénticos y próximos en el tiempo han de tener influencia uno sobre otro. Así, si una pareja ha tenido 5 hijos varones y esperan un nuevo descendiente, ¿es más probable que sea niño o niña? Si lanzando una moneda tenemos 4 caras seguidas, ¿qué es más probable que salga en el quinto lanzamiento? En realidad, los sucesos «el sexto hijo es niño» y «el sexto hijo es niña» son equiprobables. De igual modo, la probabilidad de que salga cara en el quinto lanzamiento es la misma probabilidad de que salga cruz: 1/2. Esto se debe a que el sexo del sexto hijo o el que el quinto lanzamiento sea cara o cruz son independientes de el sexo del resto de los hijos y de los lanzamientos anteriores respectivamente.

  Sin embargo, esta falacia estaba presente en las estrategias de los jugadores de azar. Por ejemplo, el sistema de D'Alembert para jugar a la ruleta indica que el jugador que apuesta al rojo o al negro (sucesos equiprobables) debe aumentar las cantidades que apuesta tras cada pérdida y reducirlas tras cada ganancia.

- El timo de las tres cartas. Un banquero tiene tres tarjetas de doble cara. Una de ellas tiene ambas caras azules, otra tiene las dos caras rojas y la tercera tiene una cara azul y otra roja. Tras enseñar a un paseante las tres tarjetas, las introduce en una bolsa opaca y saca aleatoriamente una de ellas enseñando tan solo una cara. Entonces propone una apuesta: «Si las caras son de distinto color, ganas tú, si son de igual color gano yo». Supongamos que ya cara visible es azul, entonces el banquero argumenta que la carta que está fuera de la bolsa es, o bien la de las dos caras azules o la que tiene una cara de cada color. Es decir, la apuesta es igual para ambos. ¿O no?

  En realidad, la tarjeta ha sido tomada entre tres, donde dos tienen el mismo color y una los tiene distintos. El descarte de la tarjeta de las caras rojas se da después de haber realizado la elección aleatoria. La probabilidad de que gane el banquero no es de 1/2, sino de 2/3.

- La paradoja de Monty Hall. También conocida como la paradoja de las tres puertas, se contextualiza dentro de un concurso de televisión. Se presentan al concursante tres puertas. Tras una de las puertas se encuentra el premio, por ejemplo, un coche. El concursante debe elegir una puerta, y se llevará lo que haya tras ella: el coche o nada. Sin embargo, una vez escogida una puerta, el presentador abre una de las otras dos, tras la cual no hay nada, y da la oportunidad al concursante de cambiar su elección.

  Intuitivamente, parece que la nueva posibilidad no es influyente, o al contrario, que no es más que un truco para hacer dudar al concursante y alejarlo de la puerta correcta. Sin embargo, al contrario que en la paradoja anterior, en este caso al descarte de una puerta sucede una nueva elección aleatoria. En el siguiente gráfico tenemos todos los casos posibles:

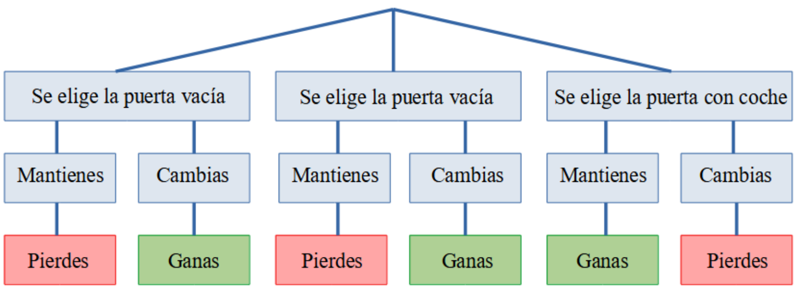


Figura 1.29

Ahora bien, si se mantiene la puerta inicial, la probabilidad de ganar el coche es $1/3$. Sin ambargo, cambiando de puerta la probabilidad de ganar es el doble, $2/3$.

Veamos ahora otros resultados de probabilidad que llaman notoriamente la atención por lo contrarios que resultan al sentido común. Sin embargo, todos ellos son correctos.

- La paradoja del cumpleaños. Si tomamos 23 personas, la probabilidad de que al menos dos personas cumplan el mismo día es superior al 50 %. Si tomamos 30 personas, el porcentaje asciende al 70 %, tomando 50 al 97 %, y con 100 el suceso tiene más de tres millones de casos favorables con por cada caso en contra. ¿Es esto posible?

  Hagamos el cálculo para 23 personas. Vamos a calcular la probabilidad del suceso $A =$"no coincide el cumpleaños de ninguno":

  $$P(A) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot ... \cdot 344 \cdot 343}{365^{23}} = \frac{364!}{342! \cdot 365^{22}}.$$

  Este producto resulta aproximadamente 0,4927. La probabilidad que buscamos es la del suceso A^c, es decir

  $$P(A^c) = 1 - P(A) \approx 1 - 0,4927 = 0,5073.$$

  Haciendo un cálculo similar podríamos ver las otras probabilidades que hemos indicado.

- La paradoja de las patatas. Tenemos 100 kg de patatas. El 99 % de este peso es de agua. Si deshidratamos las patatas hasta que contengan un 98 % de agua, las patatas pasarán a pesar 50 kg. ¿Cómo es esto posible?

  Veámoslo. Al principio tenemos 100 kg, de los cuales 99 kg corresponden al agua y 1 kg a compuestos sólidos, es decir, la proporción sólido-agua es 1:99. Queremos deshidratar hasta obtener una proporción 2:98, equivalente a 1:49. Puesto que el peso sólido de las patatas no se reduce por la deshidratación, seguirá siendo de 1 kg. En consecuencia, los kilogramos de agua que ha de haber para que se dé la proporción 2:98 son 49. Sumando entonces los kilos de agua y sólido tenemos que las patatas pesan 50 kg tras la deshidratación.

Todas estas paradojas son una invitación a profundizar de forma razonada en los problemas que se nos proponen. Esto puede ir entrenando nuestra intuición para que no se alarme con las soluciones que vamos encontrando.

Paradojas de estadística

Dadas las grandes masas de datos con las que somos bombardeados a diario, la carencia de sentido crítico de carácter estadístico facilita la manipulación y el engaño. Las paradojas que vamos a mostrar a continuación pueden servir como fomento de este pensamiento critico.

Comencemos con la pradoja de Condorcet, relacionada con el voto. Este político francés proponía que en todo sistema elecctoral, el vencedor legítimo debía ser aquel que fuera preferido al resto de candidatos por vía electoral. Sin embargo, si tomamos a tres votantes, V_1, V_2 y V_3 cuyas preferencias el elegir entre tres candidatos A, B y C son las siguientes:

- V_1: A - B - C
- V_2: B - C - A
- V_3: C - A - B

se tiene que A es preferido a B, B es preferido a C y C es preferido a A. ¿Quién gana? Hay una ausencia de ganador, pues se da una mayoría cíclica. Esto nos genera sorpresa porque suponemos intuitivamente que la preferencia cumple transitividad. Es decir, dado que A es preferido a B y B es preferido a C, se espera que A sea preferido a C, y sin embargo no es así.

Este tipo de mayorías cíclicas en los sistemas elecctorales aumentan de forma notoria al aumentar el número de candidatos y opciones. Sin embargo, también disminuye si incrementamos el número de votantes.

Una paradoja muy ilustrativa para acercarnos a algunos elementos de estadística es la paradoja de Simpson. Esta paradoja fue formulada por E. Simpson en 1951 muestra la importancia de escoger muestras representativas en los análisis estadísticos. Tenemos dos grupos de cartas, en cada grupo hay cartas rojas y negras y cartas marcadas y sin marcar, según indica la siguiente tabla:

	Grupo 1		**Grupo 2**	
	Rojas	Negras	Rojas	Negras
Marcadas	5	6	6	3
Sin marcar	3	4	9	5

Si calculamos en cada grupo las probabilidades de extraer al azar una carta roja entre las marcadas y la probabilidad de extraerla entre las no marcadas, tenemos lo siguiente:

	Grupo 1	**Grupo 2**
Marcadas	0,45	0,66
Sin marcar	0,42	0,64

Podemos observar que en ambos grupos la probabilidad de extraer una carta roja es mayor entre las cartas marcadas que entre las cartas sin marcar. Si juntamos ambos grupos de cartas y calculamos de nuevo las probabilidades de tomar una carta roja de entre las marcadas y de entre las no marcadas, parece razonable pensar que será mayor la probabilidad entre las marcadas. Vamos a ver, sin embargo, que no sucede así. Juntándolas tendremos, entre las marcadas, 11 cartas rojas y 9 negras; y entre las no marcadas, 12 rojas y 9 negras. Si hacemos el cáculo tenemos las siguentes probabilidades:

Marcadas	0,55
Sin marcar	0,57

Es decir, la probabilidad de extraer una carta roja es mayor si la tomamos entre las cartas sin marcar. Esto se debe a la desigualdad proporción entre los grupos: en el segundo grupo la proporción de cartas sin marcar es mucho mayor que en el primero. La distribución desigual entre los grupos de color y las marcas es una "variable" oculta que genera la paradoja.

Otra versión de esta paradoja se dio en 1973 en la Universidad de California. Se realizó un estudio bucando posible discriminación por cuestión de sexo en la admisión de los postgrados. Resultó que un 44 % de los graduados masculinos recibían la admisión al postgrado solicitado y solo un 35 % de las mujeres eran admitidas. Sin embargo, si se analizaban los datos por facultades, resultó que en cada facultad el porcentaje de mujeres admitidas en el postgrado solicitado era mayor que el de varones. Es decir, tomando cada postgrado de forma individual, las posibilidades de ser admitido eran mayores en las mujeres. La paradoja se generaba porque las mujeres tendían a solicitar la admisión en postgrados más difíciles que los varones. Esto hacía, que al juntar todos los datos sin tener en cuenta el postgrado, pareciese que los varones tenían ventajas de admisión.

Hemos de tener cuidado, por tanto, a la hora de utilizar las herramientas estadísticas. En este caso hemos propuesto la paradoja en relación con la elección de las muestras, pero podemos construir paradojas con otros aspectos. Por ejemplo, la media de un conjunto de datos puede resultar engañosa si entre dichos datos hay algunos muy extremos, es decir, si la distribución es notablemente asimétrica. Así, la media de los sueldos de los empleados de una empresa puede ser bastante mayor de lo que cobran casi todos sus miembros si hay unos pocos que cobran mucho más que el resto. En definitiva, es fácil interpretar los datos de forma errónea si no realizamos los análisis estadísticos adecuadamente.

Vamos a mostrar ahora un par de paradojas que podemos denominar como paradojas de la confirmación. Estas paradojas nos cuestionan acerca de nuestra comprensión del papel de la estadística en el método científico o del funcionamiento mismo de la estadística.

- La paradoja de los cuervos de Hempel. Esta paradoja fue propuesta por C. Hempel y tiene la siguiente conclusión: «la existencia de una vaca violeta aumenta la probabilidad de que todos los cuervos sean negros». Para explicar esto comencemos tomando la siguiente hipótesis:

  $$H_1 : \text{Todos los cuervos son negros.}$$

  Tomando el contrarrecíproco, proposición lógicamente equivalente, tenemos:

  $$H_2 : \text{Todos los objetos no-negros son no-cuervos.}$$

  Ahora bien, si encontramos un objeto no negro y verificamos que no es un cuervo, estaremos confirmando la hipótesis H_2, y en consecuencia, la sentencia equivalente H_1. En particular, si encontramos una vaca de color violeta, estaremos confirmando la hipótesis de que todos los cuervos son negros.

  Sin embargo, el grado de confirmación que nos ofrece la vaca violeta es demasiado pequeño como para no ser despreciable. Por otra parte, algunos opositores a la paradoja de Hempel añaden que la existencia de una vaca violeta también confirma la hipótesis de que todos los cuervos son blancos.

- La paradoja de Goodman. Esta paradoja propone también un problema de confirmación. Es conocido que hay objetos que cambian de color con el paso del tiempo: las frutas al madurar, el cabello al envejecer, etc. N. Goodman, teniendo esto en cuenta denominó objetos “verzules” a aquellos que eran verdes antes del año 2000, y azules una vez pasado dicho año. Suponiendo que nos encontramos en 1999, tomamos las siguientes hipótesis:

$$H_1 : \text{Todas las esmeraldas son verdes,}$$

$$H_2 : \text{Todas las esmeraldas son verzules.}$$

Ambas hipótesis están igual de confirmadas en 1999 observando cualquier esmeralda. Sin embargo, H_1 es aceptada como una hipótesis razonable y H_2 no.

Hemos visto con estas paradojas la complejidad de los elementos de la probabilidad y la estadística. Otras paradojas en las que no hemos entrado, como la paradoja de Bertrand, muestran además la facilidad con la que es posible la manipulación no consciente de espacios probabilísticos si no se definen claramente las variables implicadas. Esta es una área de suma importancia en las matemáticas por su gran impacto en la sociedad. Por esto, todas estas cuestiones son muy relevantes en la búsqueda de un tratamiento de los datos justo y veraz.

1.2.4. Paradojas del infinito

Nos disponemos a terminar este marco teórico sobre las paradojas presentando algunas referentes al infinito. Este es uno de los conceptos matemáticos más complicados de entender, pues no tenemos experiencia de objetos infinitos en nuestra vida cotidiana. Esta dificultad es aún mayor si nos ponemos en el contexto de las aulas de secundaria o bachillerato.

Vamos a comenzar con algunas paradojas referentes a las sumas infinitas de infinitésimos y pasaremos después a paradojas referentes a conjuntos de cardinal infinito.

Sumas infinitas

Las paradojas que vamos a ver a continuación aparecen al suponer que la suma de infinitos números debe ser infinita. Sin embargo, esto, como veremos, no es cierto. Estas paradojas están relacionadas también, con el tiempo y el movimiento. Veámos algunos ejemplos:

- Aquiles y la tortuga. Esta paradoja está atribuida a Zenón, de la escuela eleática, una de las escuelas presocráticas más importantes. La pardoja relata una carrera entre Aquiles, conocido por ser el más veloz de todos los hombres, y una tortuga. Dada su lentitud, este héroe griego permite a la tortuga partir con ventaja. Zenón afirma entonces que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. Cuando Aquiles llegue al lugar del que partía la tortuga, que podemos denominar t_0 esta habrá avanzado hasta un punto t_1. Cuando el corredor llegue al punto t_1, la tortuga estará en un punto t_2 más avanzado. Así, por pequeña que sea la distancia entre t_n y t_{n+1}, la totuga siempre estará por delante de Aquiles.

Una paradoja equivalente es imaginar a un corredor que quiere recorrer una distancia de 100 metros. Este reflexiona que, antes de llegar al final de su recorrido, tendrá que pasar por el punto medio, $t_1 = \frac{1}{2}$. Una vez alcanzado, para llegar al final, tendrá que pasar antes por el punto medio de la distancia que le queda, $t_2 = \frac{1}{2^2}$. De esta manera, nunca alcanza el final.

El error de Zenón surge de la suposición de que la suma de los términos de una sucesión infinita de intervalos de tiempo positivos debe ser infinita. Es decir, debe costar una eternidad, de manera que es imposible alcanzar el destino. Por cada paso, quedan siempre una infinidad de pasos por dar. Sin embargo, si tomamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$, con $t_n = \frac{1}{2^n}$, tenemos que converge a 1.

- La paradoja de la cuerda elástica. Para esta paradoja consideramos una oruga en el extremo de una cuerda elástica de 1 km de longitud. La oruga avanza por la cuerda a una velocidad de 1 cm por segundo. Sin embargo, cada vez que pasa un segundo, la cuerda elástica es estirada 1 km más. Parece que la oruga nunca va a alcanzar el extremo opuesto de la cuerda, y sin embargo, sí lo hace. Es clave para comprender esto el hecho de que la cuerda se alarga de forma uniforme, de manera que la oruga es “arrastrada” con el estiramiento.

  Si expresamos en cada segundo el avance de la oruga como una fracción de la longitud de la cuerda, la oruga habrá acanzado el final cuando la suma de estas fracciones sea 1. La longitud inicial de la cuerda es de 1 km, es decir, 100000 cm. Por tanto, durante el primer segundo, la oruga avanza $\frac{1}{100000}$ de la cuerda. Análogamente, en el siguiente segundo avanzará $\frac{1}{200000}$, y en el segundo n, $\frac{1}{n \cdot 100000}$. En este segundo n el avance total será:

  $$100000 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right).$$

  En esta expresión tenemos una suma parcial de la serie armónica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Esta serie diverge, por lo que sus sumas parciales alcanzarán 1 para algún n natural. Es decir, la oruga alcanzará el extremo de la cuerda. Podríamos plantear varios problemas variando el avance por segundo de la oruga o el estiramiento de la cuerda. Por ejemplo, si la cuerda duplica su longitud en cada segundo, la oruga no alcanzaría el extremo con una velocidad de 1 cm por segundo.

- La flecha. Esta paradoja, como la primera, también está atribuida a Zenón y es similar al *principio de incertidumbre de Heisenberg.* Veamos cómo argumenta Zenón. Consideramos primero que un intervalo de tiempo está compuesto de instantes, como la menor medida posible de tiempo, y en consecuencia, indivisibles en otra unidad más pequeña. Por otra parte, en cada instante, una flecha no se mueve. En consecuencia, si tenemos el trayecto de una flecha y nos fijamos en un instante, en ese punto el movimiento es nulo. Dividiendo todo el intervalo de tiempo en el que se da la trayectoria en estos instantes y observando que en cada uno de ellos no se da movimiento, tenemos que el movimiento total de la trayectoria de la flecha es una suma de ceros. Es decir, la flecha no se ha movido nada.

  Tanto esta paradoja como las que veíamos anteriormente surgen de considerar el tiempo como una sucesión de instantes. Una solución es reconocer que la flecha está en reposo en cada instante sin admitir que eso signifique que la flecha no se mueve. La flecha no está en reposo si no se mueve en un instante, sino si está en el mismo sitio tras una sucesión de instantes. Puesto que la flecha está en posiciones distintas en instantes cercanos, esta sí se mueve. El argumento de Zenón es incorrecto.

Este tipo de paradojas son ilustrativas como un primer acercamiento a series sencillas y a sus comportamientos, difíciles de imaginar. También nos acercar a otros conceptos, como el tiempo o el movimiento, mostrando las aplicaciones de las matemáticas en otras ciencias, como la física.

Conjuntos de cardinal infinito

En este otro grupo de paradojas sobre el infinito vamos a acercarnos a conjuntos de cardinal infinito. En este caso el infinito nos habla de un tamaño, y tenemos que hay distintos tamaños de infinito: numerable (como los números naturales), no numerable (como los números reales). Todas las paradojas que vamos a ver en este apartado son resultados verídicos que resultan profundamente contrarios al sentido común. Esto se debe, como ya hemos dicho anteriormente, a nuestra inexperiencia real con realidades infinitas, en este caso, realidades infinitamente grandes.

La primera idea que vamos a tratar de comprender es que los elementos de un conjunto infinito se pueden poner en correspondencia biunívoca con los elementos de subconjuntos suyos distintos de él mismo. Por ejemplo, podemos afirmar que hay tantos números pares como naturales. Para ilustrar esto vamos a acercarnos a la pardoja del hotel de Hilbert.

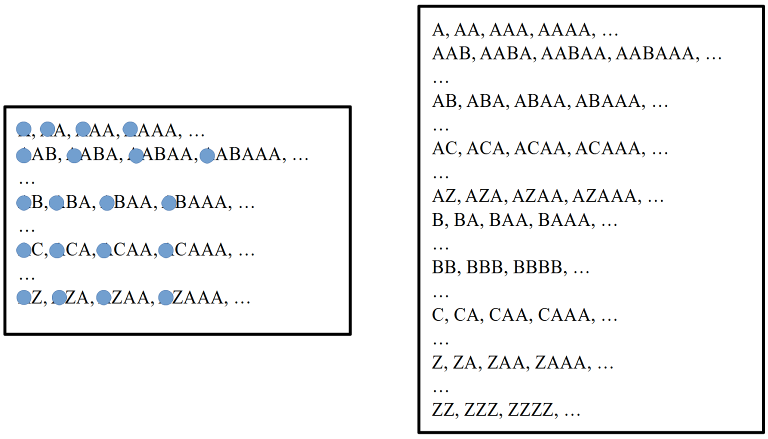
En esta paradoja, se tiene un hotel con infinitas habitaciones numeradas, comenzando en el 1. Es decir, tenemos que el número de habitaciones es infinito numerable. Un día, se da la situación de que todas las habitaciones están ocupadas. Entonces, llega una persona que busca alojamiento, y aunque todas las habitaciones están ocupadas, el recepcionista le garantiza que puede dejar una libre sin echar a nadie. En efecto, pide a cada huésped que se mueva a la habitación siguiente, quedando libre la primera para el recién llegado. ¿Y el huésped de la última habitación? Simplemente, resulta que no hay última habitación. Con esto hemos visto que si sumamos 1 a los números naturales, sigue habiendo los mismos. De hecho, lo mismo ocurrirá si restamos 1, o si sumamos 5, etc. En definitiva, si sumamos o restamos una cantidad finita, podemos reagrupar a los huéspedes para que todas las habitaciones estén llenas.

Por otra parte, ¿y si llega un número infinito numerable de personas buscando alojamiento? Entonces, el recibidor pide a cada huésped que se reinstale en la habitación de número doble del que tenía. De esta manera, pasarán a estar ocupadas tan solo las habitaciones pares, quedando las impares libres para los nuevos inquilinos. Es decir, hay tantos números impares o pares como naturales.

Vamos a pasar a la paradoja del diccionario con todas las palabras posibles. Este diccionario, propuesto por el matemático I. Stewart, contiene todas las palabras posibles, tengan o no significado, de la siguiente manera:

A, AA, AAA, AAAA, ...
AAB, AABA, AABAA, AABAAA, ...
...
AB, ABA, ABAA, ABAAA, ...
...
AC, ACA, ACAA, ACAAA, ...
...
AZ, AZA, AZAA, AZAAA, ...
B, BA, BAA, BAAA, ...
...
BB, BBB, BBBB, ...
...
C, CA, CAA, CAAA, ...
...
Z, ZA, ZAA, ZAAA, ...
...
ZZ, ZZZ, ZZZZ, ...

El número de palabras que podemos encontrar en esta obra es infinito no numerable. Los editores, dado el grosor de este diccionario, deciden publicarlo en 27 volúmenes, cada uno dedicado a las palabras posibles que empiezan por una letra del abecedario. Así, toman todas las palabras que empiezan por A y las incluyen en un primer volumen. Pero, puesto que todas las palabras de este volumen empiezan por A, optan por poner una nota indicándolo al principio y quitan la A inicial de todas las palabras del volumen:



Pero entonces, aparecen todas las palabras posibles que teníamos al principio en un solo volumen. ¿Cómo puede ser que un solo volumen contenga las mismas palabras que los 27 volúmenes juntos? Hemos visto con esta paradoja que podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los números reales y un subconjunto de estos, por ejemplo los números del intervalo $(0, 1)$.

Utilizando estas ideas, tenemos el teorema de Banach-Tarski, demostrado en 1924 y conocido como paradoja por lo antiintuitivo que resulta. Esta paradoja indica que, partiendo de una esfera llena de radio 1, podemos conseguir dos exactamente iguales sin añadir ni quitar ningún punto.

Para ello, tomamos la esfera y la dividimos en 5 piezas determinadas disjuntas dos a dos. Simplemente aplicando algunos movimientos a tres de ellas y volviéndolas a juntar, tendremos una esfera como la inicial. A las dos piezas sobrantes podremos aplicarles también algunos movimientos y unirlas resultando también una esfera como la inicial.

Aunque matemáticamente, este sea un teorema válido y demostrado, desde el punto de vista físico, es imposible dividir la esfera en estas cinco partes. Esto se debe a que el concepto geométrico de punto no tiene realidad física. No es posible tomar un punto solamente o separar la esfera en conjuntos de puntos que cumplan una determinada propiedad.

Estas paradojas, en particular la última, nos hace ver lo poco que comprendemos de los conjuntos infinitos de puntos y las posibilidades de su reagrupamiento.

A lo largo de este marco teórico, hemos visto multitud de paradojas que pueden servir de estímulo para el razonamiento, y en particular, para el razonamiento matemático. En el segundo capítulo de este TFM, vamos a tratar de profundizar en los beneficios que puede aportar la introducción de algunas de ellas en el aula.

Capítulo 2

Las paradojas en la educación

En este segundo capítulo vamos a presentar algunos beneficios de introducir actividades con paradojas en las aulas de secundaria y bachillerato. Trataremos de establecer conexiones con las propuestas y direcctrices de la nueva ley educativa vigente en España: la LOMLOE. De esta manera, buscamos una fundamentación curricular para las actividades concretas que vamos a proponer en el Capítulo 3.

2.1. Las paradojas como herramienta didáctica

El principal reto de los profesores de secundaria y bachillerato es encontrar recursos y desarrollar capacidades para lograr transmitir unos conocimientos y competencias a sus alumnos. La mayor complicación se deriva de la diferencia de nivel entre profesor y alumno. Es fácil enseñar a resolver ecuaciones de segundo grado sin que el alumno tenga demasiado claro qué es una ecuación, o presentar un esquema y análisis de una obra literaria sin leer un solo fragmento de ella por suponerla conocida. A medida que uno avanza en los estudios tiende a dar por obvias muchas cosas que en realidad no lo son.

Recordar los procesos históricos en los que se han dado los desarrollos de determinados conocimientos, ayuda a encontrar pistas para el aprendizaje. En efecto, las dinámicas del descubrimiento de un hecho o la propuesta de una idea o una teoría revelan modos naturales de adquisición de conocimientos. Acercándonos a los desarrollos históricos podemos encontrar propuestas de aprendizaje más naturales y también más vinculados a contextos reales. En el caso de las matemáticas, es muy iluminador comprender los problemas que han provocado el avance de las matemáticas.

Además, como docentes, conocer la historia de las ideas y del conocimiento puede servirnos también para tomar conciencia de qué ideas pueden ser realmente más intuitivas y cuáles no, y por tanto, en qué ha de ser necesario incidir más. Por ejemplo, es más intuitiva la geometría que el álgebra, y por ello se han dado históricamente en este orden. En consecuencia, parece más razonable presentar el Teorema de Pitágoras en primer lugar como resultado geométrico que algebraico.

Ahora bien, un acercamiento a las paradojas es una aproximación a este desarrollo histórico del conocimiento. La primera utilidad de las paradojas como herramienta didáctica es, por tanto, facilitar la distintición de ideas más o menos intuitivas. Además, las paradojas también muestran la complejidad del conocimiento, y pueden generar también un gran asombro e interés. Es bueno que los alumnos sepan que aún queda mucho por conocer, por investigar y por descubrir. De este modo pueden verse inclinados a profundizar cada vez más en lo que se les va enseñando.

Relacionado con el asombro y el interés que pueden provocar las paradojas, aparece una segunda utilidad: la dinamización de las clases. Los docentes han de ser capaces de motivar a sus alumnos y de mantener su atención. La inclusión en el aula de recursos dinámicos y atípicos puede facilitar el que las clases sean amenas y agradables, y en consecuencia, más aprovechables. Las paradojas pueden ser también un elemento que dé más protagonismo a los alumnos en su proceso de aprendizaje, sobre todo si son propuestas como retos.

Por otra parte, como hemos visto en el primer capítulo, las paradojas son estímulo del razonamiento. Es decir, acercarnos a las paradojas puede mejorar la capacidad de analizar correctamente los argumentos. En un estado democrático, donde el debate público ha de tener gran peso, esto es particularmente importante. Esto aparece reflejado en el primero de los Objetivos de Etapa de la ESO presentados en la LOMLOE:

Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto de los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía demócrática.

Análogamente, el primero de los Objetivos de Etapa de bachillerato es el siguiente:

Ejercer la cuidadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española, así como por los *derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.*

El ejercicio responsable de la ciudadanía implica prestar atención a lo que se propone en la plaza pública y ser capaz de valorarlo con veracidad y coherencia. Esta valoración implica una comprensión de los argumentos y un análisis de su consistencia. Las paradojas pueden poner a prueba la capacidad de argumentación de nuestros alumnos. Utilizarlas en el aula puede incluir dinámicas de entrenamiento del razonamiento y la argumentación, además de ser un estímulo provocador para el desarrollo y propuesta de nuevas argumentaciones.

Una vez valoradas las utilidades genéricas de las paradojas en un contexto educativo, vamos a ver en el siguiente apartado los beneficios particulares relativos a las matemáticas.

2.2. Las paradojas, estímulo del razonamiento matemático

Todo lo expresado en el apartado anterior es válido para el aula de matemáticas. Las paradojas pueden servir de acercamiento a la historia de las matemáticas, y en consecuencia, ofrecer dinámicas de aprendizaje más naturales para la intuición de los alumnos. También añaden a las clases de matemáticas cierta amenidad y eficacia. Por último, pueden favorecer notablemente el razonamiento y la argumentación. En particular, el razonamiento matemático.

Al principio, las paradojas pueden parecer un estorbo para el razonamiento, pero con el efecto de perplejidad que generan, sirven de estímulo para profundizar en los temas que abarcan. Pueden mostrar a los alumnos que las matemáticas son mucho más que meros algoritmos o una serie de técnicas para resolver un problema. Es cierto que esto está incluido en las matemáticas, pero lo central es comprender esos algoritmos, de manera que es más o menos inmediata su reproducción. Además, dado el desarrollo de la computación, cada vez es más relevante saber programar algoritmos, y por tanto entenderlos y saber desarrollarlos, más que tener paciencia y habilidad para hacer una serie de procesos mecánicos.

En la asignatura de matemáticas en secuendaria y en bachillerato, lo fundamental es lograr un razonamiento matemático. Es decir, que los alumnos sean capaces de comprender los conceptos y las ideas abstractas de las matemáticas y de hacer deducciones a partir de ellos. El desarrollo de este tipo de razonamiento les permite, además, hacer conexiones entre distintos conocimientos y progresar de forma más autónoma en su aprendizaje. Comprender los significados profundos de las matemáticas puede ayudar también a su aplicación en otras disciplinas científicas, como la física, la química o la tecnología.

Por otra parte, las paradojas pueden ser un estímulo para comprender los significados profundos de ideas y conceptos matemáticos. Proponemos en la siguiente tabla algunos de los contenidos matemáticos de los currículo de secundaria y bachillerato a los que podemos asociar las paradojas que hemos visto en el Capítulo 1 de este TFM. Presentamos el bloque al que pertenece cada contenido, llamados sentidos en la LOMLOE (término que destaca su funcionalidad), así como los cursos en los que aparecen dichos contenidos en la legislación.

Tipo de paradojas	**Sentido**	**Contenido**	**Curso**
Figuras ambiguas	Socioafectivo	Toma de decisiones	Todos los cursos
Ilusiones ópticas	Espacial	Figuras geométricas en dos dimensiones	1º ESO
Desapariciones o ampliaciones geom.	Espacial	Visualización, razonamiento y modelización geom.	2º ESO y 3º ESO
	Algebraico	Patrones	3º y 4º ESO y 1º y 2º Bach.
Anamorfosis	Espacial	Formas geométricas de dos y tres dimensiones	2º Bach.
Paradojas semánticas	Socioafectivo	Toma de decisiones	Todos los cursos
Paradojas de teoría de conjuntos	Numérico	Relaciones: diferentes conjuntos numéricos	1º Bach.
Paradojas de vaguedad	Socioafectivo	Toma de decisiones	Todos los cursos
Paradojas de predicción	Socioafectivo	Toma de decisiones	Todos los cursos
Paradojas de probabilidad	Estocástico	Incertitumbre	2º y 4º ESO, 1º y 2º Bach.
Paradojas de estadística	Estocástico	Organización y análisis de datos Inferencia	3º y 4º ESO, 1º Bach.
Sumas infinitas	De la medida	Cambio: límites	1º y 2º Bach.
Conjuntos de cardinal infinito	Numérico	Relaciones: diferentes conjuntos numéricos	1º Bach.

Estas paradojas también pueden servir para relacionar los contenidos y las ideas de la asignatura de matemáticas con otras materias. Por ejemplo, las paradojas visuales pueden ser relacionadas con las asignaturas *Educación Plástica, Visual y Audiovisual* o *Dibujo Técnico I* y *II*, y las paradojas lógicas pueden relacionarse con las materias de filosofía: *Filosofía* e *Historia de la Filosofía*. Las paradojas también facilitan, por tanto, la comprensión de la relación o los elementos comunes de las matemáticas con otras materias.

En definitiva, hemos visto cómo las paradojas pueden servir de estímulo para el razonamiento matemático en el aula. En particular, cómo se pueden relacionar con algunos de los contenidos de matemáticas presentes en los currículo de secundaria y bachillerato. La propia dinámica que ofrecen las paradojas puede obligar a los alumnos a expresar argumentos y a valorarlos, de manera que puedan diferenciar un buen razonamiento de una falacia. En el siguiente apartado de este capítulo, vamos a preguntarnos por la contribución competencial de las paradojas en el aula de matemáticas.

2.3. Contribución competencial

Vamos a estudiar ahora las aportaciones al desarrollo de las competencias en la enseñanza de las matemáticas incluyendo el recurso de las paradojas. Comenzaremos con las competencias clave y, posteriormente seguiremos con las competencias específicas de la asignatura de matemáticas en secundaria y bachillerato. Mencionaremos tan solo aquellas competencias en las que las paradojas hacen aportaciones significativas. Dada la amplitud de las competencias, en ningún caso las aportaciones de las paradojas agotan su riqueza. Con esto queremos decir que la propuesta de las paradojas no es exclusivista, no significa el rechazo de otro tipo de recursos didácticos.

Competencias clave

- *Competencia en comunicación lingüística (CCL)*

  En esta competencia está incluida la capacidad de identificar, comprender, expresar, formular e interpretar conceptos. Las paradojas, como exigen argumentación, favorecen el desarrollo de esta habilidad de comprensión y expresión. En efecto, proponer una solución a una paradoja o explicarla, requiere esta competencia lingüística, sobre todo por la sutileza de algunos de los razonamientos que pueden aparecer.

- *Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)*

  Puesto que las paradojas, como hemos visto, son un estímulo para el razonamiento matemático, es evidente su contribución al desarrollo de esta competencia. Las matemáticas son la base de las disciplinas ciencíficas, por lo que un desarrollo del razonamiento matemático contribuirá al desarrollo de la mentalidad científica general del alumno. La obtención de un “sentido común científico” puede verse muy favorecida por las paradojas.

- *Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA)*

Esta competencia incluye la gestión eficaz del tiempo y de la información, así como la capacidad de ordenar el propio aprendizage y superar las situaciones de incertidumbre y complejidad. La propuesta de paradojas como un reto favorece la autonomía del alumno en relación con su aprendizaje, es decir, mejora su habilidad de aprender a aprender. Además, el hecho de que las paradojas muestren situaciones de incomprensión a lo largo de la historia que han derivado después en el desarrollo de la ciencia, puede ayudar a los alumnos a relativizar sus dificultades en el aprendizaje o a entenderlas como un paso previo necesario para la comprensión de lo que se les enseña. En efecto, las estrategias de aceptación del error son de gran relevancia para el adquisición de conocimientos y para el avance de la investigación.

- *Competencia ciudadana (CC)*

  Ya hemos comentado con anterioridad que las paradojas sirvieron históricamente como medio por el que se identificaron los elementos de una buena argumentación para diferenciarlos de un argumento falaz. Las paradojas contribuyen, por tanto, a la comprensión y el análisis de los argumentos. Esto es relevante para el ejercicio de la responsabilidad plena como ciudadados. En efecto, el debate público es un elemento de gran importancia en la democracia, y su comprensión y las aportaciones valiosas al mismo dependen de esta habilidad de pensamiento crítico.

- *Competencia emprendedora (CE)*

  La creatividad, el pensamiento crítico y la habilidad para la resolución de problemas son cualidades que aportan las paradojas y que resultan centrales para esta competencia emprendedora. La presentación de contenidos matemáticos a través de un elemento diferente, como son las paradojas, puede estimular la creatividad de los alumnos o su capacidad de interconectar ideas. Además, el desarrollo del razonamiento y la argumentación son elementos muy vinculados al pensamiento crítico y a la resolución de problemas, necesarios para que los actos emprendedores sean coherentes y razonados.

- *Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC)*

  Podemos comprender las matemáticas como un contenido cultural y creativo de nuestra sociedad. Las paradojas pueden ayudar a ver este lado creativo de las matemáticas. Esto es cierto, sobre todo, en algunas de las paradojas visuales que hemos visto, como las anamorfosis, que tienen una fuerte presencia en el arte. Las paradojas contribuyen, por tanto, a la apreciación de la cultura, además de ofrecer algunos vínculos entre matemáticas y arte.

Competencias específicas en secundaria

- *Competencia específica 1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las Matemáticas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.*

  Proponer a los alumnos algunas paradojas como un reto que tienen que explicar, fortalece la habilidad de resolución de problemas. En efecto, ayuda a identificar los elementos problemáticos en una situación para poder abordarlos. El hecho de que algunas paradojas tengan distintas propuestas de solución o el que estén presentes diversas formas de razonamiento, también puede ampliar el horizonte de los alumnos a la hora de explorar y analizar opciones de resolución de un problema.

- *Competencia específica 2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.*

  En las paradojas que hemos presentado en el Capítulo 1, había tanto resultados verídicos que parecen falsos como sentencias o argumentos falsos que parecen verdaderos. Este tipo de resultados fuerzan a los alumnos a evaluar de forma razonada, y no meramente intuitiva, las afirmaciones que les presentamos. Esto ofrece técnicas para analizar la validez de las soluciones de un problema. Esta contribución de las paradojas a la enseñanza en secundaria es particularmente importante, pues identificar los propios errores es una de las dificultades más grandes con las que se encuentran los estudiantes.

- *Competencia específica 3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.*

  Como ya hemos indicado en varias ocasiones, las paradojas proporcionan un gran estímulo para el razonamiento y la argumentación. Su relevancia en la investigación a lo largo de la historia es muestra de los beneficios que pueden aportar a los alumnos en este sentido.

- *Competencia específica 5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.*

  Las paradojas son un elemento que nos acerca a la historia de las matemáticas. En su desarrollo histórico, se comprenden con mayor facilidad los elementos de conexión entre sus distintas áreas de conocimiento. Por tanto, las paradojas pueden ayudar a entender las matemáticas como un todo integrado, y no como un conjunto de compartimentos estancos, sin ninguna relación entre sí. También algunas paradojas presentan claramente cierta relación entre varias áreas de las matemáticas. Por ejemplo, las desapariciones o apariciones geométricas presentan una vinculación entre sucesiones y elementos geométricos como el área de un rectángulo.

- *Competencia específica 6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos para aplicarlos en situaciones diversas.*

  Hemos mencionado ya como algunas paradojas visuales pueden ayudar a apreciar la componente matemática en elementos del arte, como la perspectiva. También las paradojas de estadística pueden servir de acercamiento a problemas de análisis de datos reales. En cualquier caso, vemos que aprecen elementos de interconexión entre las matemáticas y otras materias al presentar algunas paradojas.

- *Competencia específica 8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.*

  Es esencial, además de comprender argumentos, la capacidad de expresar o comunicar lo que se ha comprendido. Si se pide a los alumnos que expliquen o resuelvan una paradoja estarán entrenando estas habilidades.

- *Competencia específica 9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las ma-*

temáticas.

Las paradojas presentan elementos o situaciones de contradicción. Nos muestran cómo históricamente los momentos en los que aparecen contradicciones que generan confusión son también momentos de gran creatividad y desarrollo científico. Esto puede ser una motivación para la perseverancia cuando los alumnos se encuentren ante dificultades o con elementos que no comprenden en el estudio de las matemáticas. El error se puede convertir en un paso más que les lleva a progresar en su aprendizaje.

Competencias específicas en bachillerato

Dado el carácter análogo de las competencias específicas de bachillerato respecto de las de secundaria, no incluiremos en este caso una justificación de las aportaciones de las paradojas a las diferentes competencias. Nos limitamos a enunciar las competencias.

- *Competencia específica 1. Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para obtener posibles soluciones.*
- *Competencia específica 2. Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad.*
- *Competencia específica 3. Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento, la argumentación, la creatividad y el uso de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.*
- *Competencia específica 5. Establecer, investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para dar significado y estructurar el aprendizaje matemático.*
- *Competencia específica 6. Descubrir los vínculos de las Matemáticas con otras áreas de conocimiento y profundizar en sus conexiones, interrelacionando conceptos y procedimientos, para modelizar, resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.*
- *Competencia específica 8. Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.*

- *Competencia específica 9. Utilizar destrezas personales y sociales, identificando y gestionando las propias emociones, respetando las de los demás y organizando activamente el trabajo en equipos heterogéneos, aprendiendo del error como parte del proceso de aprendizaje y afrontando situaciones de incertidumbre, para perseverar en la consecución de objetivos en el aprendizaje de las matemáticas.*

Con este Capítulo hemos podido acercarnos a algunos de los beneficios de introducir las paradojas en el aula de matemáticas. Aparece como punto fuerte especialmente el estímulo del razonamiento matemático, así como la habilidad para identificar los argumentos falaces y diferenciarlos de los razonamientos correctos. También el acercamiento a la historia de las matemáticas a través de las paradojas es un elemento valioso, tanto para alumnos como para profesores, para tener una comprensión más global y coherente de las matemáticas.

Pasamos ya al último capítulo de este TFM, en el que presentamos algunas actividades concretas que pueden servir para la implementación en el aula de todo lo que hemos expuesto hasta ahora.

Capítulo 3

Implementación el aula

Proponemos en este capítulo algunos ejemplos de implementación en el aula. Las actividades que proponemos buscan abarcar un espectro amplio tanto de cuestiones matemáticas como de cursos de secundaria y bachillerato. Son actividades sencillas, lo cual es también una ventaja para su implementación en todo tipo de centros y con diversidad en el alumnado.

Se han seleccionado para cada actividad una paradoja o un tipo de paradojas, para poder abordar aspectos concretos en el aula. En todos los casos será un objetivo el estímulo del razonamiento matemático concretizado en distintos temas y cuestiones. La argumentación será un elemento relevante en todas las actividades.

Por otra parte, consideramos que ninguna de estas actividades es por sí misma suficiente para el aprendizaje de los contenidos y competencias a las que van asociadas. Son un recurso añadido a otro tipo de recursos más generales. Se pueden plantear como introducción a un determinado tema, buscando generar preguntas de carácter matemático que se desarrollarán más adelante. O, por el contrario, pueden ser un recurso de profundización de conceptos o ideas ya explicados.

Presentamos en primer lugar actividades propuestas en cursos de secundaria y posteriormente actividades para bachillerato.

3.1. Actividades para secundaria

Consideramos que las actividades que proponemos para secundaria abarcan conceptos más sencillos, adecuados al nivel académico de los alumnos. También las dinámicas pretenden ser más dirigidas, debido a que puede que los alumnos no estén acostumbrados a razonar adecuadamente. Esperamos que estas actividades puedan ser un estímulo y un comienzo para posteriores profundizaciones.

Actividad 1 Desapariciones o ampliaciones geométricas.

- Contextualización y descripción.

  Esta actividad se propondrá en 2º ESO. El principal objetivo es que los alumnos entiendan de una manera más profunda las conexiones entre álgebra y geometría. En concreto, con esta actividad se les va a mostrar una visualización geométrica de una propiedad de la sucesión de Fibonacci.

- Metodología

  La metodología principal será la clase magistral participativa. Se pedirá a los alumnos que intervengan y argumenten de forma continua. Será clave el recurso al diálogo y a las preguntas para ir guiando el razonamiento de los alumnos. Esta actividad se podrá incluir mientras se están impartiendo los conocimientos de sucesiones. También se incluirán recursos manipulativos para que los alumnos tengan una mejor visualización de la paradoja. Por ello, serán necesarios papel y tijeras para el desarrollo de la actividad.

- Desarrollo y planificación

  Se propondrá a los alumnos uno de los ejemplos de desapariciones geométricas. Puede plantearse, como recurso de motivación, como una tableta de chocolate a la que le quitas onzas, pero no disminuye. Mediante preguntas se cuestionará a los alumnos cómo se ha logrado esto.

  En este momento se pedirá a los alumnos que tomen dos folios y dibujen en cada uno de ellos con gran precisión una "tableta de chocolate" lo más grande posible con las proporciones que les indicarán. Los alumnos deberán recortar ambas y aplicar el procedimiento de desaparición geométrica a uno de ellos. Comparando ambos se darán cuenta de la trampa.

  Se pondrán otros ejemplos variando las longitudes de los lados y si no se les ocurre a los alumnos, el docente centrará la atención en dichas longitudes. Se pedirá a los alumnos que se pregunten si estos números les recuerdan a algo, recordando que son las sucesiones lo que se está impartiendo en ese momento del curso. Así, se llegará a la conclusión de que forman parte de la sucesión de Fibonacci.

El docente hará entonces una exposición de la propiedad de la sucesión de Fibonacci que ya vimos en el Capítulo 1. Podrá explicar después que la paradoja no es más que una representación geométrica de una propiedad algebraica. Se reflexionará con el grupo acerca de las relaciones entre ambas áreas de las matemáticas.

Se espera que toda la actividad pueda llevarse a cabo a lo largo de dos sesiones de 50 minutos cada una.

- Evaluación Se tendrán en cuenta los siguientes elementos para evaluar esta actividad:
  - Participación activa y motivación de los alumnos.
  - En cuanto al trabajo manipulativo, interés y cuidado por realizarlo de forma limpia y precisa.
  - Argumentación correcta, así como identificación de argumentos erróneos de compañeros.
  - Toma de conciencia de la relación entre distintas áreas de las matemáticas, particularmente en este caso entre geometría y álgebra.
  - Valoración positiva de la actividad.

Actividad 2 Comprender elementos de estadística con la Paradoja de Simpson

- Contextualización y descripción.

  La actividad se propondrá a alumnos de 3º ESO. Los objetivos serán un acercamiento a ejemplos reales de estadísitca y la comprensión de elementos estadísticos como “muestra” o “variables estadísticas”. Se proporcionarán a los estudiantes diferentes ejemplos, de manera que en algunos de ellos se dé la paradoja de Simpson y en otros no. Esta paradoja la hemos visto con detalle anteriormente en el Capítulo 1. Con el análisis de estos casos esperamos que puedan comprender mejor algunos conceptos estadísticos.

- Metodología

  Como metodologías principales tendremos la clase magistral participativa y la resolución de problemas. Con estas metodologías podremos proponer los ejemplos y luego profundizar en ellos. No necesitaremos ningún recurso especial aparte de proyector, pizarra, etc.

- Desarrollo y planificación

  Habiendo explicado previamente los conceptos estadísticos básicos, se propondrán diferentes ejemplos a los alumnos. Estos irán acompañados de preguntas sencillas que los alumnos tendrán que contestar razonadamente. Por ejemplo, tomando el ejemplo que hemos propuesto al presentar la paradoja de Simpson en el Marco Teórico, podríamos preguntar cuál es la probabilidad de extraer una carta roja entre las marcadas en el Grupo 1.

  Los ejemplos se presentarán sin hacer notar ninguna diferencia entre ellos, pues esperamos que las descubran los alumnos. Mediante el recurso del diálogo, se irá preguntando a los alumnos qué diferencias observan entre los ejemplos con paradoja y los ejemplos sin paradoja. Se podrán realizar, por ejemplo, preguntas que hagan brotar su intuición, como preguntales qué creen que pasaría si juntamos las muestras.

  Comentando grupalmente estos ejemplos y profundizando en ellos realizando algunos cálculos, esperamos que surja de los alumnos la paradoja y el cuestionarse qué es lo que ocurre en estos ejemplos. De nuevo guiando a los alumnos con preguntas podemos ir profundizando en los motivos de la paradoja, identificando por qué se da en unos ejemplos y en otros no. Insistiremos después en el concepto de “variable estadística” y repasaremos la importancia de la muestra y de su selección.

  En cuanto a la temporalización, esperamos que esta actividad se lleve a cabo durante dos sesiones de 50 minutos.

- Evaluación

  Se tendrán en cuenta los siguientes elementos para evaluar esta actividad:

  - Participación activa en el aula.
  - Motivación de los alumnos por entender la paradoja.
  - Argumentación correcta, así como identificación de argumentos erróneos de compañeros.
  - Comprensión de los contenidos estadísticos asociados.

- Valoración positiva de la actividad.

Actividad 3 Probabilidades antiintuitivas

- Contextualización y descripción.

  Esta actividad será propuesta a alumnos de 4º ESO. Los objetivos serán la práctica de conceptos de probabilidad y la capacidad de justificar los resultados, aunque resulten antiintuitivos. Trataremos de generar a lo largo de esta actividad una nueva intuición probabilística, que esté bien fundamentada.

- Metodología

  La metodología será principalmente Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). También utilizaremos en alguna sesión la clase magistral participativa, para elaborar correcciones y dar unas conclusiones claras.

- Desarrollo y planificación

  Se propondrá a los alumnos una lista de problemas, que incluirán lo que hemos visto en este TFM como paradojas de probabilidad. Se reformularán como un enunciado que pide calcular una probabilidad o justificar cuál de dos sucesos en más probable. Presentamos algunos ejemplos:

  - Hemos lanzado una moneda 4 veces, resultando cara en las cuatro ocasiones. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cruz en el quinto lanzamiento?
  - Calcula la probabilidad de que en una clase de 30 alumnos, al menos dos personas cumplan años el mismo día.

  Los alumnos tendrán un tiempo en clase para resolver de forma individual los problemas. Podrán ayudarse de dos en dos, pero la redacción de las soluciones debe ser personal. Los alumnos deberán entregar al profesor las soluciones, donde todo ha de estar debidamente justificado.

  Posteriormente, el profesor elegirá un alumno por cada problema, que saldrá a resolverlo y explicarlo a los compañeros. Estos podrán intervenir preguntando dudas o ayudando al alumno que está exponiendo en caso de que no sepa continuar. Estas intervenciones pueden ser pedidas por el profesor a un alumno que aún no haya intervenido. De esta manera se busca garantizar el que los alumnos han profundizado realmente en los problemas. Tras cada problema el docente hará incisos o explicará de nuevo lo que considere más relevante o lo que ha podido entenderse peor.

Una vez realizadas las correcciones en la pizarra se dará la oportunidad a los alumnos de volver a redactar y entregar las soluciones de los problemas que consideren que pueden explicar mejor que en la primera entrega. Esto les obligará a analizar los razonamientos de sus propias respuestas, buscando las posibles mejoras.

Toda la actividad se llevará a cabo en 4 sesiones de 50 minutos. Las dos primeras serán para la resolución de los problemas de forma individual. Las otras dos serán dedicadas a la corrección y a la exposición de conclusiones por parte del profesor. Es obligatorio volver a escribir al menos dos de los problemas.

- Evaluación

  Se tendrán en cuenta los siguientes elementos para evaluar esta actividad:

  - Implicación activa en la actividad. Esto incluye la motivación para profundizar en los problemas.
  - Orden y claridad en ambas entregas.
  - Buena argumentación y corrección de argumentos erróneos durante las sesiones de corrección de los problemas. Se valorará especialmente la participación activa de los compañeros que no exponen ningún ejercicio.
  - Comprensión de los conceptos de probabilidad asociados a la actividad.
  - Mejora de las explicaciones de la primera entrega a la segunda, lo cual demuestra un progreso. También se tendrá en cuenta los problemas que el alumno ha considerado repetir, pues muestra su capacidad de reconocer el error o la explicación que es mejorable. No será positivo que no haya cambios de una redacción a otra o que se elija repetir problemas ya explicados adecuadamente en la primera redacción.
  - Valoración positiva de la actividad.

3.2. Actividades para bachillerato

Ahora proponemos algunas actividades pensadas para los cursos de bachillerato. En este caso damos por adquirida una mayor capacidad y costumbre de razonamiento. Por ello, las actividades están más orientadas a profundizar en ideas más complejas. Se espera de los alumnos una mayor capacidad de argumentación y de conexión de ideas. En cualquier caso, con las paradojas se pretende también generar el estímulo necesario para estos objetivos.

Actividad 4 Paradoja del mentiroso y paradojas de teoría de conjuntos.

- Contextualización y descripción.

  Esta actividad será propuesta en 1º de bachillerato. Es una actividad conjunta de las asignaturas de *Matemáticas* y *Filosofía*. Por tanto, la implementación se dará de forma repartida entre sesiones de ambas asginaturas. El objetivo principal es provocar una reflexión sobre la lógica y su implicación en las matemáticas. La presentación de la paradoja del mentiroso se hará en el aula de filosofía y la paradoja del barbero se explicará en matemáticas. Posteriormente, se hará una reflexión conjunta que vincule ambos tipos de paradojas.

- Metodología

  La metodología que emplearemos es la clase magistral participativa. Se tratará de provocar el diálogo entre los alumnos, de forma que la actividad sirva como estímulo a su razonamiento.

- Desarrollo y planificación

  La actividad está planteada con previa coordinación con el profesor de filosofía. Se hará coindidir su implementación durante la docencia de la lógica, como parte de los contenidos de la aginatura de *Filosofía*.

  Dentro del aula de filosofía, en una primera sesión se propodrá como un reto la paradoja del mentiroso. Se pedirá a los alumnos que argumenten una solución para la paradoja. De este modo, se espera que profundicen en la paradoja e identifiquen los elementos que la generan.

  En un segundo momento, en el aula de matemáticas se propondrá a los alumnos la paradoja del barbero, expresándola con la el lenguaje de teoría de conjuntos. Se buscará que lo relacionen con la paradoja del mentiroso sobre la que han reflexionado en clase de filosofía. Se puede aprovechar además para insistir en algunos conceptos importantes de teoría de conjuntos, como la diferencia entre "perteneciente" y "contenido".

En una tercera sesión se reunirán ambos profesores y estimularán la reflexión sobre los dos problemas que se han propuesto en las dos aulas y sus conexiones. En este momento, se pueden exponer las soluciones que han sido propuestas para esta paradoja, como la Teoría de Tipos de Russell.

La actividad se llevará a cabo durante tres sesiones de 50 minutos. La primera de las sesiones será impartida por el profesor de filosofía, la segunda por el profesor de matemáticas y la tercera por ambos.

- Evaluación

  Se tendrán en cuenta los siguientes elementos para evaluar esta actividad:

  - Participación activa en los ejercicios, escuchando y haciendo propuestas.
  - Buena argumenteación y corrección de argumentos erróneos expuestos por alguno de los compañeros.
  - Comprensión de ambas paradojas y su relación.
  - Comprensión de las posibles soluciones a las paradojas, así como de su importancia como fundamento de la lógica y las matemáticas.
  - Conciencia de la relación entre lógica y matemáticas.
  - Valoración positiva de la actividad.

Actividad 5 Razonamientos sobre los conjuntos de cardinal infinito.

- Contextualización y descripción.

  Esta actividad será propuesta para alumos de 1º de bachillerato. Su implementación irá asociada a la explicación de los diferentes conjuntos numéricos (naturales, enteros, etc.) y la comprensión de que hay infinitos de diferentes tamaños. Los objetivos serán la comprensión de estos conceptos relacionados con los conjuntos numéricos de cardinal infinito, así como estimular un razonamiento con estos nuevos conceptos e ideas. Se les propondrán las paradojas del hotel infinito y del diccionario con todas las palabras posibles como un reto que deben explicar.

- Metodología

La metodología será aprendizaje basado en problemas y aprendizaje colaborativo, además de la clase magistral participativa. Con el ABP y el aprendizaje colaborativo se busca la implicación de los alumnos en las paradojas. Por otra parte, la clase magistral sirve para recoger las conclusiones.

- Desarrollo y planificación

  Se expondrán las paradojas del hotel infinito y del diccionario con todas las palabras posibles como retos. Los alumnos, repartidos en pequeños grupos de un máximo de cuatro personas, discutirán y reflexionarán sobre las paradojas. Redactarán como grupo una explicación de las mismas, defendiendo su lógica o buscando sus falacias. Deberán entregar al profesor lo que hayan concluído.

  Posteriormente, con la clase magistral participativa, se generará un espacio de diálogo en el que los alumnos pueden explicar a los demás las paradojas. El profesor, guiando con preguntas, dará las explicaciones, si no se han dado ya, de cómo es posible alojar a los que llegan al hotel infinito y cómo puede ser que un tomo del diccionario tenga tantas palabras como el diccionario completo.

  A partir de aquí se podrá reflexionar sobre los conjuntos de cardinal infinito como aquellos que se pueden poner en correspondencia biunívoca con uno de sus subconjuntos. Reflexionaremos además sobre los diferentes tamaños de infinito: numerable y no numerable.

  La actividad se llevará a cabo durante dos sesiones de 50 minutos. La primera se empleará en el aprendizaje por grupos, tratando de explicar las paradojas como retos o problemas. La segunda será la clase magistral participativa, donde se llegarán a conclusiones a partir de lo trabajado por los alumnos el día anterior.

- Evaluación

  Se tendrán en cuenta los siguientes elementos para evaluar esta actividad:

  - Participación activa e implicación.
  - Colaboración en los grupos de trabajo.
  - Orden y claridad en la entrega.
  - Exposición oral clara.

- Buena argumentación e identificación y corrección de los argumentos erróneos, tanto en la entrega como en el diálogo de la clase magistral participativa.
- Comprensión de las paradojas y de los contenidos matemáticos asociados.
- Valoración positiva de la actividad.

Actividad 6 Las paradojas de Zenón y la convergencia

- Contextualización y descripción.

  Esta paradoja estará dirigida a alumnos de 2º de bachillerato. Sus objetivos son la reflexión sobre la convergencia en el infinito, así como el asentamiento de una cierta intuición al respecto. Para ello, se ofrecerán las paradojas de Zenón, que servirán de marco para el razonamiento.

- Metodología

  Las metodologías que se emplearán son el aprendizaje basado en problemas, dado que se les propondrán las paradojas como un reto que han de explicar, y la clase magistral participativa, gracias a la cual se orientarán el aprendizaje de la resolución de problemas hacia unas conclusiones concretas.

- Desarrollo y planificación

  En primer lugar, se propondrán a los alumnos las paradojas de Zenón. Durante una sesión tendrán tiempo para estudiar las paradojas y analizarlas. Se les permitirá tener acceso a internet para buscar más información sobre las paradojas, así como algunas pistas sobre su relación con las matemáticas.

  Cada alumno entregará al profesor una explicación sobre lo que ha comprendido de las paradojas. Será especialmente importante la presencia del razonamiento en esta entrega.

  En una segunda sesión, por medio de la clase magistral participativa, se invitará a los alumnos a explicar libremente en voz alta las paradojas. Así, por medio de lo que hayan entendido unos y otros, y dirigiendo el diálogo con preguntas y puntualizaciones, el docente explicará las paradojas y su relación con la convergencia en el infinito.

  En cuanto a la temporalización, serán necesarias dos sesiones de 50 minutos cada una. Como ya hemos visto, primera sesión estará dedicada al trabajo personal de cada alumno para comprender las paradojas. La segunda, por otra parte, estará dirigida a orientar las conclusiones de los alumnos y terminar de asentar su aprendizaje.

Esta actividad puede ser de gran utilidad, además, para relajar las tensiones y la carga académica de los alumnos de 2º de bachillerato. Se puede colocar como actividad de profundización entre la finalización de un tema y el comienzo de otro.

- Evaluación

  Se tendrán en cuenta los siguientes elementos para evaluar esta actividad:

  - Participación activa e implicación.
  - Claridad y orden en la entrega.
  - Buena expresión en las intervenciones orales.
  - Buenos razonamientos matemáticos e identificación y corrección de las argumentaciones incorrectas.
  - Comprensión de las paradojas y de los contenidos matemáticos asociados.
  - Valoración positiva de la actividad.

Hemos propuesto en este tercer capítulo del TFM una serie de actividades para la implementación en el aula de las paradojas. En efecto, es necesario planificar las intervenciones para poder transformar ideas o beneficios abstractos en recursos y actuaciones concretas.

Las propuestas que hemos realizado pretenden ser variadas y abiertas, de forma que es sencillo hacer modificaciones según las particularidades de los alumnos a los que se vaya a impartir. La elección de las paradojas es amplia, pero no todas están incluidas. Debido a que buscábamos actividades sencillas, no hemos mezclado demasiadas paradojas en una misma actividad, pero esto podría ser otra propuesta válida y útil en ciertas situaciones.

Tras estas actividades pasamos a una reflexión final con algunas conclusiones para el trabajo realizado en estas páginas.

Conclusiones

Terminamos este TFM recogiendo algunas conclusiones. En primer lugar, hemos visto cómo las paradojas pueden abarcar una gran diversidad de temas de matemáticas. Además, hemos desarrollado su valor como estímulo del razonamiento matemático, de gran importancia para la educación y el desarrollo integral de los estudiantes.

Las paradojas pueden ser, por tanto, un recurso valioso para el aula de matemáticas de secundaria y bachillerato. Unidas a otros elementos didácticos, ofrecen dinamismo y asombro, motivación y curiosidad, y ayudan a identificar y comprender cuándo un argumento o un razonamiento es correcto.

Hemos presentado además en el último capítulo algunas actividades como proupuesta de implementación de las paradojas en el aula. Estas actividades son un ofrecimiento que busca establecer conexiones entre este trabajo y los conocimientos expuestos en él y las aulas concretas.

En resumen, podemos reafirmar la propuesta de las paradojas como recurso didáctico para el desarrollo de las competencias clave y específicas de matemáticas, especialemente las que tienen relación con el razonamiento y la argumentación. Las paradojas abren horizontes para la mejora de la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato.

Bibliografía

[1] Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, C., Gea, M. M. (2012). *Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad.* Novedades educativas, (261), 78-84.

[2] Gardner, M. (2009). *¡Ajá! Paradojas que hacen pensar.* RBA Libros.

[3] Stadler, M. M. (2003). *Algunos ejemplos de paradoja*s. Sigma: revista de matemáticas , (22), 127-138.

Sitios web:

[4] *Fractales: ¿qué son y dónde están?* (18 mayo 2023) `https://www.misenal.tv/fractales`

[5] *Les anamorphoses. Étude optique des anamorphoses avec macros PSTricks.* (18 mayo 2023) `https://melusine.eu.org/syracuse/G/pstricks/Anamorphoses/`

[6] *Matemáticas y fenómenos contra-intuitivos.* (18 mayo 2023) `https://www.superprof.es/blog/paradojas-matematicas-famosas/`

[7] *Paradojas Matemáticas (Marta Macho Stadler)* (18 mayo 2023) `https://www.youtube.com/watch?v=t4iUWht98mg`

[8] *The Banach-Tarski Paradox.* (18 mayo 2023) `https://www.youtube.com/watch?v=s86-Z-CbaHA`

[9] Del Río, J.C. *Las paradojas, estímulo del pensamiento.* (18 mayo 2023) `http://oyeborges.blogspot.com/2010/05/las-paradojas-estimulo-del-pensamiento.html`

[10] Iborra, C. *La Paradoja de Banach-Tarski.* (18 mayo 2023) `https://www.uv.es/~ivorra/Libros/Banach_Tarski.pdf`

[11] Serrano, S. *Paradojas y argumentación.* (18 mayo 2023) `https://metode.es/revistas-metode/monograficos/paradojas-y-argumentacion.html`

Legislación:

[12] *Boletín Oficial de Castilla y León*, 190, de 30 de septiembre de 2022.

Repositorio UVa (consultas realizadas para la estructura y el planteamiento):

[13] Marcos Lomo, F., *Grupos de simetría en la enseñanza secundaria.* Trabajo Fin de Máster, Universidad de Valladolid, 2022.

[14] Martín San José, P., *SCRATCH para fomentar el razonamiento matemático.* Trabajo Fin de Máster, Universidad de Valladolid, 2022.

[15] Matilla Mayo, S., *Jugar con las matemáticas.*Trabajo Fin de Máster, Universidad de Valladolid, 2022.