UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. de Matemática Aplicada

LA PAPIROFLEXIA COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN E.S.O. Y BACHILLERATO

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumna: Celia Rodríguez Muñoz

Tutores: Víctor Gatón Bustillo

Ignacio Miguel Cantero

Valladolid, junio 2023

Contenido

Introducción

Motivación del uso de la papiroflexia como recurso didáctico en Matemáticas

En mi etapa educativa, los recursos didácticos en la asignatura de Matemáticas se reducían al libro de texto y a la pizarra. Gracias al Máster he podido conocer diferentes materiales y cómo estos se implementan en el aula. La papiroflexia fue el que más me llamó la atención por su facilidad para involucrarla en la asignatura con diversos contenidos.

En el periodo de prácticas he visto la necesidad de utilizar en el aula materiales manipulativos, sobre todo en los cursos inferiores. La asignatura de Matemáticas resulta para algunos de los estudiantes abstracta y frustrante. Los materiales manipulativos ayudan a acercar al alumno los conceptos y resultados matemáticos. Particularmente, con la papiroflexia los estudiantes pueden demostrar propiedades importantes con solo doblar el papel y construir ellos mismos las matemáticas. Los alumnos ven, tocan e investigan. Lo que crea un aprendizaje significativo y motiva a los estudiantes. Además, la papiroflexia solo requiere de una hoja para su implementación, por lo que es un recurso asequible para que se pueda utilizar en cualquier centro educativo.

Considero necesario elaborar propuestas didácticas con papiroflexia por la gran cantidad de ventajas que esta presenta. Por ello, en este trabajo se propone una para alumnos de 1º ESO.

Estructura del trabajo

El presente Trabajo de Fin de Máster pretende abordar la papiroflexia como un recurso didáctico en la Enseñanza de las Matemáticas en la E.S.O. y en Bachillerato. Para ello, en el documento se desarrollarán dos primeros capítulos sobre conceptos y resultados principales relativos a la papiroflexia y a la aplicación de esta en el ámbito educativo. Estos capítulos desembocarán en una propuesta didáctica contextualizada e interdisciplinar para alumnos de 1º E.S.O. con papiroflexia y otros materiales manipulativos.

El capítulo primero, *La papiroflexia*, comienza con un resumen breve de la historia de la papiroflexia hasta la actualidad. Sigue con una clasificación sobre los diferentes tipos de papiroflexia y la identificación de símbolos de pliegues más usados en este arte. En la última sección se enumeran los Axiomas de Hatori-Huzita y se describe la relación de la papiroflexia con las Matemáticas.

En el segundo capítulo titulado *La papiroflexia en la educación*, se exponen las ventajas y los inconvenientes que se encuentran a la hora de utilizar la papiroflexia como un recurso didáctico basadas en las investigaciones previas. También se muestran los materiales necesarios para implementar este recurso y la aportación de este al currículum, más concretamente a las materias y a las competencias clave de la nueva ley educativa, Ley Orgánica 3/2020, de

29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Finalmente se consideran nueve pautas a seguir por los docentes para trabajar de forma adecuada la papiroflexia en el aula.

El tercer capítulo, *Propuesta didáctica*, trata de una situación de aprendizaje para alumnos de 1º E.S.O. de un centro educativo de Castilla y León. Se sigue el esquema propuesto en el anexo II.C del Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. Las actividades están contextualizadas en el siglo XV y el objetivo final consiste en elaborar un traje para la reina. Para esto los alumnos deberán a lo largo de un trimestre trabajar contenidos tanto de la asignatura de Matemáticas como de la de Historia, Geografía, Tecnología o Plástica, y contenidos transversales de eficiencia, consumo y sostenibilidad. A partir de las construcciones con papiroflexia y regla y compás de las actividades los alumnos desarrollarán las competencias necesarias.

El trabajo concluye con un cuarto capítulo en el que se incluye una reflexión final sobre el uso de la papiroflexia como recurso didáctico en la Educación Secundaria.

Para completar el trabajo se incluyen cinco anexos relativos a las actividades de la situación de aprendizaje. El primero de ellos es un esquema del portafolio que deben completar los alumnos en la situación de aprendizaje. En el segundo se profundiza sobre la fundamentación curricular. Se exponen las competencias específicas, los criterios de evaluación y los descriptores operativos según el Decreto 39/2022. En el tercer y cuarto anexo se adjuntan dos materiales necesarios para las actividades. Por último, se anexan las rúbricas para evaluar las competencias de los alumnos a través de las actividades.

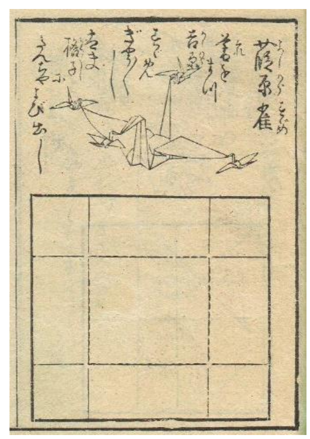
1. La papiroflexia

La palabra papiroflexia proviene del latín *papiro*, “papel”, y *flexus*, “doblado”. La Real Academia Española lo define como el “arte de dar a un trozo de papel, doblándolo convenientemente, la forma de determinadas figuras” (Real Academia Española, s.f., definición 1). Este arte es denominado también origami (orikami). Palabra de origen japonés donde *oru* significa “doblar” y *kami* significa “papel”. Sin embargo, algunos autores muestran algunas distinciones sobre estos dos términos. El origami se considera un arte más amplio que el simple doblado del papel. Conlleva un carácter religioso y espiritual. Esto se debe a la historia de esta tradición de doblado.

1.1. Historia de la papiroflexia

Según Royo Prieto (2002) y Hatori (s.f.), el origami tiene origen en China sobre el siglo I o II d.C. a raíz de la creación del papel. Sin embargo, donde más se desarrolló fue en Japón, donde se extendió este arte en el siglo VI d. C. El doblado del papel se usaba en ceremonias religiosas para decorar. Además, durante el periodo Heian (794-1185), la corte estableció un código de etiqueta con papel doblado para envolver regalos en las ceremonias. Debido al coste del papel en aquella época, este arte estaba reservado para la nobleza. No fue hasta el siglo XII cuando se popularizó y surgió el origami recreativo. Este plegado del papel lo reúne Satoshi Takaga en el documento *Senbazuru Orikata* que no fue publicado hasta 1993 por Nippon Origami Association (NOA).

En 1797, se publica el primer libro de origami *Hiden Senbazuru Orikata*. El libro contiene 49 figuras de origami creadas por Gidó, un monje budista. Muestra como plegar una serie de grullas enlazadas por sus picos o sus alas. Ese mismo año, se publica *The Chushingura Orikata*. Una obra de tan solo dos hojas con diagramas para doblar figuras. En 1850 se realiza una recopilación manuscrita de información de uso privado en el documento llamando *Kayaragusa* o “*kan no mado*”. En él se dedican dos volúmenes, el 27 y el 28, al origami ceremonial y recreativo. Por desgracia, no se tiene constancia de todos los documentos de origami japonés. De hecho, el *Kayaragusa* fue redescubierto gracias a Kosho Uniyama y a Akira Yoshizawa en la década de 1960.



Fuente: Wikipedia (CC) *https://commons.wikimedia.org*

A través de las rutas comerciales como la ruta de la Seda se trajo el papel a occidente en el siglo XI y XII. Este material no gustó en Europa y se siguió usando el pergamino a pesar de ser más difícil de almacenar y manipular. No obstante, finalmente se acabó utilizando el papel al ser este más económico.

Conviene señalar que el origami no llega a la vez que el papel. Se cree que los árabes lo aprendieron a través de los prisioneros chinos en el siglo VII. Sin embargo, no se puede asegurar que el plegado del papel de occidente viniera de oriente. Es posible que surgiera de forma independiente y se llegasen a desarrollar los mismos pliegues simples a raíz de los plisados de tela que ya conocían.

En los siglos XVI y XVII, surge la tradición del plegado de servilletas de tela. En las comidas de la realeza y de la nobleza europea era común encontrarse en la mesa las servilletas dobladas en forma de animales o elementos naturales. Estas servilletas tenían la misma función que el origami ceremonial japonés, ser un elemento de decoración. Las figuras que se realizaban con estas telas eran los plegados básicos de origami. Y no solo eso. Estas servilletas solían tener algún tipo de significado como el estatus de la persona o si se era un invitado en la boda por parte del novio o de la novia. Posiblemente, el plegado actual de servilletas en ceremonias provenga de esta tradición. Sin embargo, esta tradición fue desplazada en el siglo XVIII por la porcelana. Las figuras de este material se convirtieron en el símbolo de estatus social. Sin embargo, las técnicas asociadas al plegado de telas continuaron formando parte de la cultura europea.

Uno de los personajes europeos que destacó en el plegado de papel fue Friedrich Fröebel (1782-1852). En 1840 fundó el movimiento Kindergarten. Un sistema de enseñanza para niños basado en los juegos. Fröebel da importancia a la actividad de los alumnos en los procesos cognitivos de aprendizaje y establece el juego como herramienta clave para el aprendizaje. Friedrich introdujo el plegado de papel no solo como una actividad lúdica sino como un elemento para trabajar en la educación. Esta idea fue desarrollada principalmente por sus seguidores después de su muerte.

Las primeras evidencias de doblado de papel en España son del siglo XII. Se ubican en el sur y eran diagramas astrológicos. Los árabes solo construían figuras geométricas ya que la representación animal y humana estaba prohibida en su religión. Más tarde, fue cuando se incorporaron esas representaciones.

El máximo difusor de la papiroflexia en España fue Miguel de Unamuno (1864-1936). Unamuno se doctoró en Filosofía y Letras en la Universidad de Madrid, fue catedrático de griego y rector de la Universidad de Salamanca. Tocó todos los géneros literarios: poesía, novela, teatro y crítica literaria. Entre ellos escribe en 1902 *Apuntes para un tratado de cocotología*. Esta obra trata de forma irónica la papiroflexia como una ciencia, o como lo denominaba él, cocotología. Unamuno entendía el plegado del papel como una actividad lúdica, un entretenimiento de niños. A él se le atribuye la construcción de la pajarita, referente en la papiroflexia en España.


(Fuente: Elaboración propia)

El plegado de papel se desarrollaba simultáneamente en Europa y en Asia. No fue hasta 1854, fin del aislamiento de Japón, cuando este arte se compartió. Hasta entonces pocos japoneses conocían el origami europeo y viceversa. Estos origamis tenían alguna diferencia. Mientras que en Europa se realizaban pocos pliegues de 45º partiendo de un papel cuadrado o rectangular, en el origami japonés se realizaban pliegues de 22, 5º.

En el siglo XIX llegó a Europa el conocimiento del origami tradicional japonés y este se fusionó en los jardines de infancia (Kindergarten) con el origami tradicional europeo. De igual forma se importó el origami clásico occidental a Japón. Más concretamente, el movimiento Kindergarten de Fröebel. Este tuvo mucho éxito y se mezcló con el origami tradicional oriental. Además, pasó de ser una actividad que se realizaba en las casas como un ritual a ser una actividad en las escuelas infantiles. Se comenzó a promover el origami en la educación infantil.

Los japoneses adoptaron algunas reglas del origami occidental para poder implementar la educación de Fröebel. Se empezó a usar papeles cuadrados y bicolores, es decir, con colores diferentes en cada lado, para realizar las figuras de origami. Así como la prohibición de realizar cortes. Durante este periodo se añadieron nuevos modelos de origami mucho más adecuados y se desecharon otros.

El origami tradicional del siglo XIX hasta principios del siglo XX surgió y se desarrolló entre Europa y Japón. Aunque en Europa no usaba la palabra origami, en su lugar lo denominaban “papierfalten” (en alemán), “paper folding” (en inglés) o “pajarita” (en español). Este origami se trasmitía de generación en generación de forma oral en la mayoría de las ocasiones. Esto daba lugar a que se cambiasen los nombres y formas del origami que se conocía. Se permitían variaciones y, por tanto, se creaban improvisadamente nuevos modelos.

En el siglo XX surgió el origami moderno. Se pasó de crear figuras de papel anónimamente y de forma espontánea a elaborar modelos diseñados por especialistas. Se prioriza tanto la forma final como las secuencias o el procedimiento para llegar a ellas. Estas secuencias se representan mediante diagramas. Además, se considera que los modelos de origami deben elaborar solo con los dobleces de una hoja de papel de origami.

En el origami moderno, Kosho Uchiyama fue uno de los primeros que patentó sus modelos de origami y Akira Yoshizawa estandarizó la notación de diagramas e introdujo innovaciones en el origami como el plegado en húmedo. Entre los años 50 y 60 del siglo XX se creó un círculo internacional de origami que popularizó este arte en Europa, Japón, China y América.

En esos años se realizaron los primeros análisis de la geometría del origami. Se comenzaron a estudiar las propiedades y características que tenían los patrones de los pliegues de las figuras. Con ello, comenzó el origami matemático. Los primeros en desarrollarlo fueron Jun Maekawa y Peter Engels. Les siguieron Robert Lang y Kawahata Fumiaki, quienes profundizaron más. Estos entendían el papel marcado con los pliegues como un conjunto de áreas independientes. Distinguían los modelos en función de la longitud y disposición de dichas áreas. Esto llevó a aumentar la complejidad de los modelos de origami.

Actualmente, el origami no está relegado solo al ámbito artístico. Tiene aplicaciones en distintas áreas como la tecnología o la medicina. Por ejemplo, en los paneles solares de los satélites en el espacio y en los airbags de los coches se usa el plegado del papel. También se han desarrollado dispositivos médicos stent inspirados en la papiroflexia para poder introducir mejor estos aparatos dentro del cuerpo y desplegarse una vez dentro.

1.2. Tipos de papiroflexia

Debido a la popularización del origami por todo el mundo, se han desarrollado diferentes técnicas para el plegado del papel. Según las reglas establecidas para ese plegado se pueden identificar múltiples estilos. Estos son algunos de ellos:

- Papiroflexia tradicional: Es la forma más clásica de doblar el papel donde se parte de una hoja de papel cuadrada y no se permiten cortes ni pegamento.

- Papiroflexia pura (o Pureland): Fue desarrollado por John Smith en la década de 1970. Es similar al origami tradicional, pero con una condición más, solo se permiten dos tipos de pliegues, valle y montaña (definidos en la siguiente sección). En este tipo de origami los dobleces del papel son más sencillos y, por tanto, más accesibles a las personas con movilidad reducida o con pocas habilidades motrices (Smith, 1993).

- Papiroflexia de acción: Se caracteriza por contener plegados especiales que permiten el movimiento de las figuras creadas. Los modelos más conocidos son el pájaro volador (o flapping Bird), la rana saltarina o el clásico comecocos de papel.

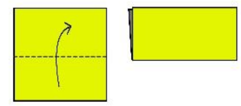
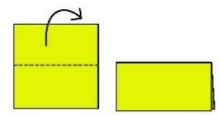
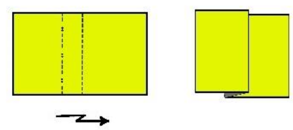
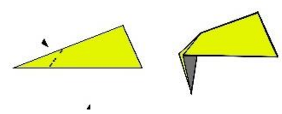
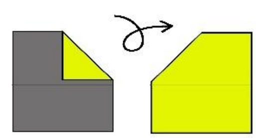
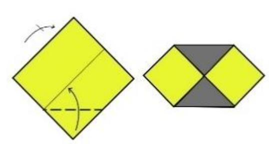
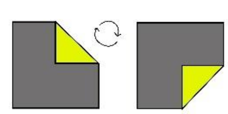
- Papiroflexia modular: Requiere más de una hoja de papel del mismo tamaño. Se construye con cada hoja un módulo y estos posteriormente se ensamblan sin necesidad de pegamento para formar la figura final. Con esta técnica se pueden construir diferentes poliedros. (Mukerji ,2020)

- Papiroflexia de plegado húmedo (o Wet-folding:): Las figuras se obtienen a partir de un papel humedecido. Esto permite deformar mejor el papel y crear curvas suaves. Esta técnica se usa principalmente en construcciones de animales o plantas. (Yoshizawa, 2016)

- Papiroflexia teselada: Comenzó en la década de 1970 con Fujimoto. Se define como una disección del plano con patrones geométricos donde los bordes están formados por dobleces del papel. (Lang ,2018). Para este tipo de origami es necesario realizar todos los pliegues y posteriormente plegarlos.

1.3. Símbolos y pliegues

En los textos de papiroflexia se utilizan símbolos para describir el plegado del papel. Estos fueron introducidos por Akira Yoshizawa y son aceptados por toda la comunidad internacional. De esta forma no es necesario describir con texto cada pliegue ni traducir esos textos.

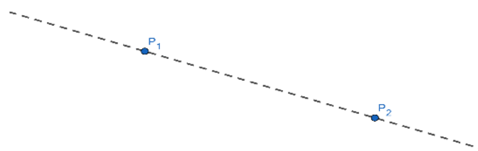
Símbolo	**Imagen**
Pliegue valle	 *(Fuente: Elaboración propia)*
Pliegue montaña	 *(Fuente: Elaboración propia)*
Plegue escalonado	 *(Fuente: Elaboración propia)*
Hundir	 *(Fuente: Elaboración propia)*
Dar la vuelta	 *(Fuente: Elaboración propia)*
Repetir el mismo paso	 *(Fuente: Elaboración propia))*
Girar	 *(Fuente: Elaboración propia)*

1.4. La papiroflexia y las matemáticas

1.4.1. Axiomas de Huzita-Hatori.

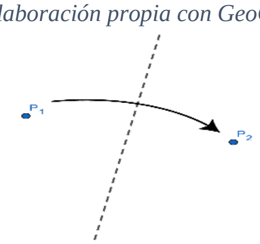
Según Budinski (2019) la idea de descubrir las matemáticas en los pliegues de un papel aparece en el libro *Geometrical Exercises in Paper Folding* en la India (Sundara Row, 1893). No fue hasta 1989 con Humiaki Huzita cuando se sistematizaron los procedimientos que permitían doblar el papel para resolver problemas matemáticos (Huzita, 1989). Huzita describió las operaciones elementales del plegado del papel en seis axiomas. En el mismo periodo, Jacques Justin publicó una lista de siete axiomas (Justin, 1991). Estos no tuvieron relevancia hasta que en 2001 Koshiro Hatori los recuperó y añadió a los axiomas de Huzita el séptimo axioma (Hatori, 2001). Estos siete axiomas son denominados Axiomas de Huzita-Hatori.

(O1) Dados dos puntos P_1 y P_2, $P_1 \neq P_2$, existe un único pliegue que pasa por ellos.



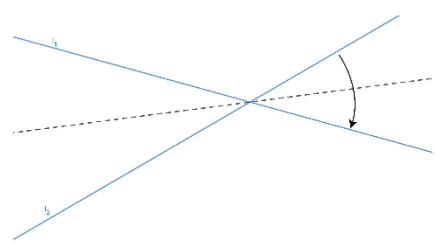
(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

(O2) Dados dos puntos P_1 y P_2, $P_1 \neq P_2$, existe un único pliegue que lleva P_1 sobre P_2.



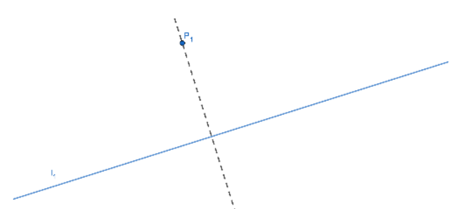
(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

(O3) Dados dos rectas l_1 y l_2, $l_1 \neq l_2$, existe uno o dos pliegues que llevan l_1 sobre l_2.



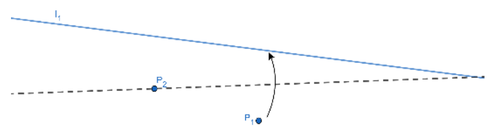
(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

(O4) Dados un punto P_1 y una recta l_1, existe un único pliegue perpendicular a l_1 que pasa por P_1.



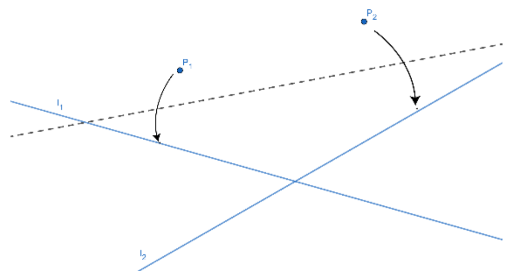
(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

(O5) Dados dos puntos P_1 y P_2, $P_1 \neq P_2$, y una recta l_1, existe como máximo dos pliegues que llevan P_1 a l_1 y que pasan por P_2.



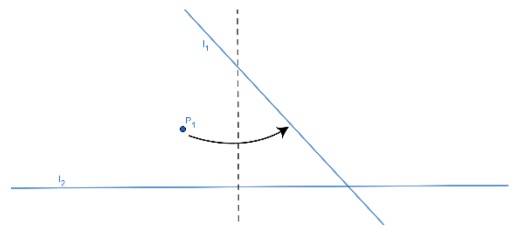
(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

(O6) Dados dos puntos P_1 y P_2, $P_1 \neq P_2$, y dos rectas l_1 y l_2, $l_1 \neq l_2$, existe como máximo tres pliegues que llevan P_1 a l_1 y que llevan P_2 a l_2.



(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

(O7) Dados un punto P_1,y dos rectas l_1 y l_2, $l_1 \neq l_2$, existe un pliegue perpendicular a l_2 que lleva P_1 a la recta l_1.



(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

Robert Lang probó la completitud de estos axiomas (Lang 2003; Alperin y Lang, 2006). Es decir, cualquier doblez se deduce de los siete Axiomas previos.

1.4.2. Geometrías con papiroflexia y con regla y compás.

La papiroflexia está relacionada principalmente con la geometría. En un modelo de papiroflexia cuando el papel se despliega por completo aparecen sus cicatrices o patrones. Estos son las marcas de los pliegues realizados para construir el modelo (Royo Prieto, 2002). Si se identifican los pliegues con rectas de la Geometría Euclídea y la intersección de dos pliegues como un punto, se tiene la siguiente relación entre los Axiomas de Huzita-Hatori y las construcciones de la geometría plana (Jaramillo y Santa, 2010).

(C1) Dados dos puntos existe una única recta que los une. (Construible mediante (O1)).

(C2) Mediatriz de un segmento que une dos puntos. (Construible mediante (O2)).

(C3) Bisectriz del ángulo que forman las dos rectas. (Construible mediante (O3)) Si los pliegues son paralelos, se identifica con la construcción de una recta equidistante paralela a las dos anteriores.

(C4) Perpendicular a una recta por un punto. (Construible mediante (O4)).

(C5) Tangente a una parábola. (Construible mediante (O5)).

(C6) Tangente común a dos parábolas, una con foco P_1.y directriz l_1, y otra con foco P_2.y directriz l_2. (Construible mediante (O6)). Según las posiciones, hay un distinto número de soluciones.

(C7) Tangente a una parábola con foco P_1 y directriz l_1, y perpendicular a la recta l_2. Si las rectas l_1 y l_2.son paralelas o $P_1 \in l_1$ no hay solución. (Construible mediante (O7)).

(C8) Punto medio de un segmento. (Construible mediante (O1) y (O2)).

Como consecuencia, las construcciones de Geometría Euclídea realizadas con regla y compás se pueden obtener también con papiroflexia aplicando los Axiomas de Huzita-Hatori. Sin embargo, la papiroflexia permite construir puntos que la regla y el compás no pueden gracias al Axioma (O6). A continuación, veremos varios ejemplos:

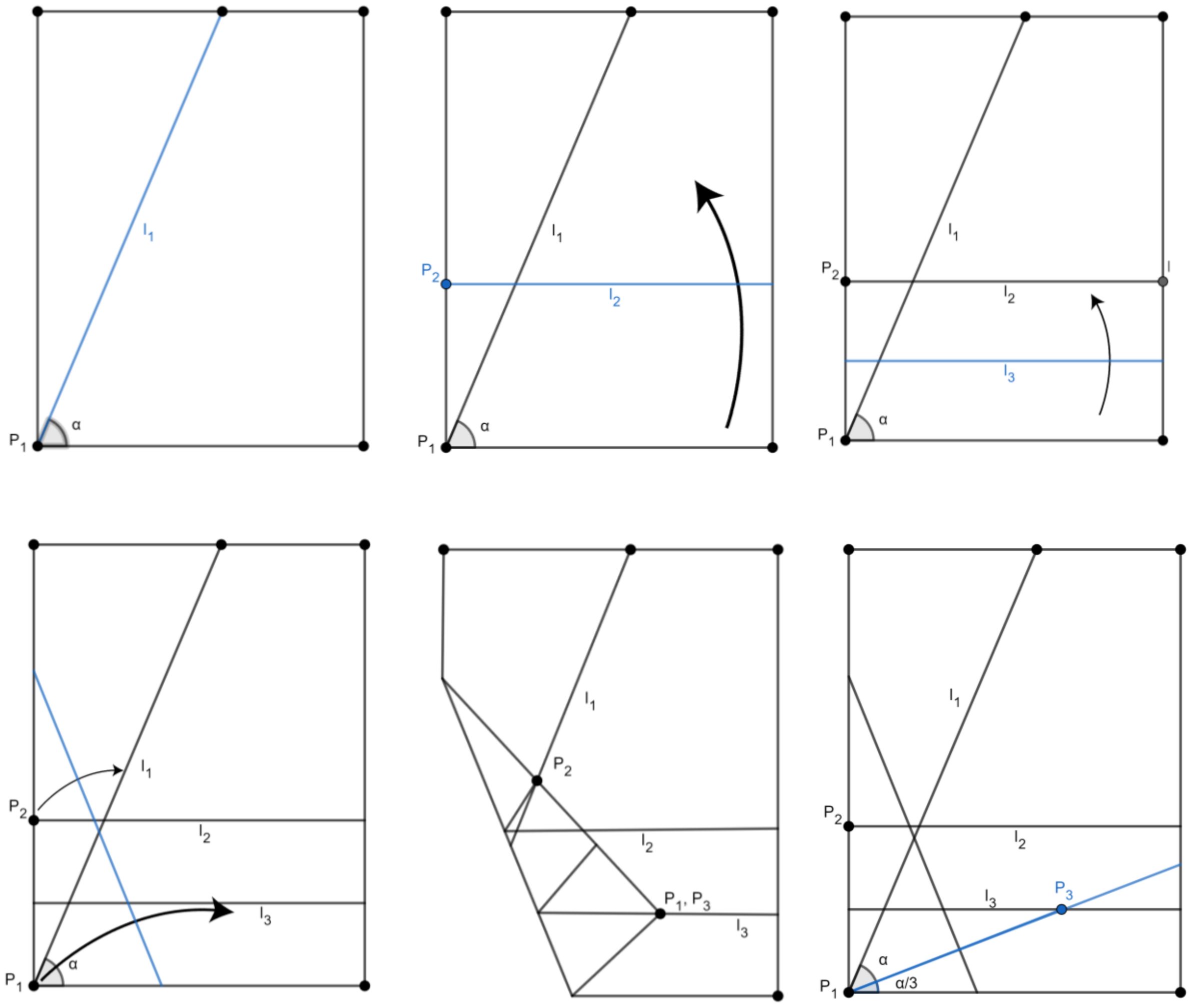
De los tres problemas clásicos de la geometría: trisección del ángulo, duplicación del cubo y cuadratura del círculo., Wantzel (1837) demuestra que dos de ellos (trisección del ángulo, y duplicación del cubo) no son posibles resolverlos mediante regla y compás. En cambio, la base matemática de la papiroflexia permite resolver de forma sencilla el problema de la duplicación del cubo y de la trisección de un ángulo con dobleces en un papel.

- Trisección del ángulo:

Dado un ángulo α se quiere construir un punto P tal que al unir el vértice del ángulo con el punto P se forme el ángulo $\frac{\alpha.}{3}$ (Contreras y del Pino, 2003a).

La construcción para un ángulo α menor de 90º con papiroflexia sería la siguiente

1. Sea P_1 el extremo inferior izquierdo de la hoja. Se realiza un pliegue (l_1) por el punto P_1 y por otro punto elegido del borde superior (O1) para crear el ángulo α.
2. Se elije un punto P_2 del lateral izquierdo de la hoja. Se realiza un pliegue (l_2) perpendicular al borde izquierdo y que pase por P_2 (O4).
3. Se realiza un pliegue (l_3) a igual distancia de la recta l_2 y del borde inferior de la hoja (O3).
4. Se lleva el punto P_2 sobre la recta l_1 y el punto P_1 sobre la recta l_3(O6).
5. Sea P_3 el punto de la recta l_3 donde va a parar el punto P_1 en el paso anterior. El ángulo formado por la recta que une P_1 y P_3 con el borde inferior de la hoja es exactamente $\frac{\alpha}{3}$.



(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

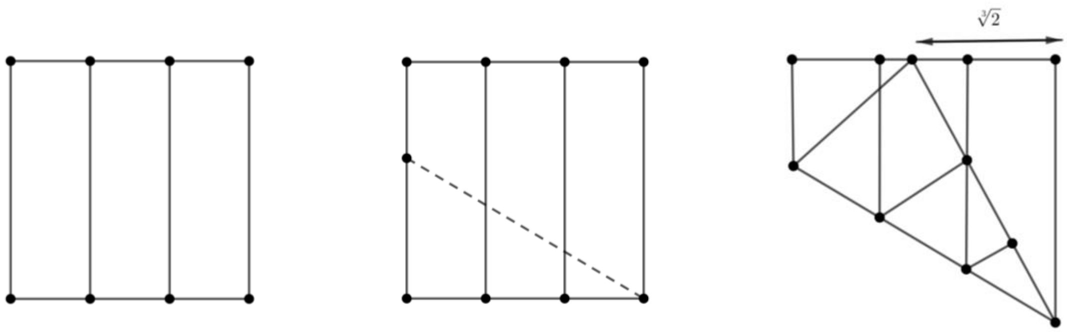
- Duplicación del cubo:

Dado un cubo de volumen una unidad, construir la arista l del cubo de volumen doble, es decir, encontrar la longitud de la arista l tal que $l^3 = 2$.

Por tanto, el problema de duplicar el volumen de un cubo es equivalente a construir $\sqrt[3]{2}$ (Contreras y del Pino, 2003b).

La construcción con papiroflexia sería la siguiente:

1. Se divide la hoja en tres tiras del mismo tamaño.
2. Se lleva la esquina inferior izquierda sobre el borde superior y se lleva el punto inferior que delimita la primera tira al pliegue que delimita la segunda y la tercera tira (O6).



(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

La demostración matemática de las construcciones viables, o no, con papiroflexia y con regla y compás es posible gracias a la Teoría de Galois.

A continuación, se muestran los teoremas relativos a los números y polígonos regulares que se pueden construir con regla y compás y con papiroflexia.

Números construibles con regla y compás

Definición: Un número real α se dice que es algebraico si es raíz de un polinomio de la forma $a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n$ con $a_1 \in \mathbb{Q}$. Los números reales que no son algebraicos se denominan trascendentes.

Teorema: Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es un número construible con regla y compás entonces

(1) α es algebraico.
(2) El polinomio mínimo de α es de grado 2^n con $n \in \mathbb{Z}$.

Como consecuencia, la cuadratura del círculo no se puede realizar ya que π es un número trascendente (Lindemann, 1882). Tampoco se puede realizar la duplicación del cubo porque el polinomio mínimo de $\sqrt[3]{2}$ es $x^3 - 2$, que no tiene grado 2^n con $n \in \mathbb{Z}$.

La trisección se puede realizar con regla y compás para ciertos ángulos, pero no para todos. Por ejemplo, el $cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ que tiene polinomio mínimo $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$, y por el teorema anterior, $cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ no es construible con regla y compás.

Números construibles con papiroflexia

Teorema (Cox, 2011): Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraico sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} \subset$ L el cuerpo de descomposición del poliniomio mínimio de α sobre $\mathbb{Q}$. Entonces α es construible con papiroflexia si y solo si

$$[L\colon \mathbb{Q}] = 2^a3^b$$

donde $a, b \geq 0$ con $a, b \in \mathbb{Z}$.

Teorema (Alperin, 2000): El cuerpo de los números construibles con origami $\mathcal{O}$ es el menor subconjunto de puntos construibles en $\mathbb{C}$ que contiene los números 0 y 1 y es cerrado para los siguiente axiomas:

(1) El punto de coincidencia de dos rectas construibles es un punto construible.
(2) La mediatriz del segmento que une dos puntos construibles es una línea construible.
(3) Dados dos puntos y una recta construibles se puede construir una recta que pase por uno de los puntos y lleve al otro en la recta.
(4) Dadas dos rectas y dos puntos construidos las rectas que llevan simultáneamente a cada uno de los puntos en las rectas es construible.

Polígonos construibles con regla y compás

Definición: Un primo de Fermat es un primo p de la forma

$$p = 2^{2^m} + 1$$

donde m en un entero no negativo.

Teorema (Nieto, 2018): Sea $n > 2$ un entero. Entonces un polígono regular de n lados es construible con regla y compás si y solo si

$$n = 2^a p_1 p_2 \dots p_s$$

donde $a \geq 0$ es un entero y $p_1, \dots, p_s$ con $s \geq 0$ son primos de Fermat distintos.

Polígonos construibles con papiroflexia

Definición: Un primo de Pierpont es un primo $p > 3$ de la forma

$$p = 2^a 3^b + 1$$

donde a, b son enteros no negativos.

Teorema (Nieto, 2018): Un polígono regular de n lados es construible con papiroflexia si y solo si

$$n = 2^a 3^b p_1 p_2 \dots p_s$$

donde $a, b \geq 0$ y $p_1, \dots, p_s$ son primos de Pierpont distintos.

Debido a estos teoremas se puede afirmar que todo polígono construible con regla y compás lo es con papiroflexia, pero no al revés. Por ejemplo, el heptágono es construible con papiroflexia por ser un primo de Pierpont, pero es imposible construirlo utilizando la regla y el compás. Esto limita el estudio de los polígonos con regla y compás en las aulas de los institutos. Si se quiere construir polígonos regulares hay que tener en cuenta que no todos se van a poder realizar con regla y compás. De hecho, hay polígonos que no se pueden construir ni con regla y compás ni con papiroflexia. Este es el caso del endecágono, polígono de once lados.

1.4.3. Métodos matemáticos de diseño

En una figura de papiroflexia cuando se despliega por completo el papel aparecen sus cicatrices o patrones. Estos son las marcas de los pliegues realizados para construir el modelo. Hay reglas matemáticas establecidas para reconocer si un mapa de cicatrices es un modelo de papiroflexia (Royo Prieto, 2002).

Si se realizan varios pliegues en el papel que pasan por un mismo punto, y se distingue entre los pliegues montaña y los pliegues valles se tiene que la diferencia entre el número de estos pliegues es siempre dos. A este resultado se le conoce como Teorema de Maekawa (Budinski, 2021).

<u>Teorema de Maekawa</u> (Justin, 1986): En un mapa de cicatrices de un modelo plano de papiroflexia

$$| M - V | = 2$$

donde M es el número de pliegues montañas y V es el número de pliegues valle en cada vértice.

Como consecuencia, el número total de pliegues en un vértice es par.

Además, si consideramos las cicatrices del papel como un grafo, se tiene que una figura plana de papiroflexia siempre es posible colorearla con dos colores distintos de forma que en los pliegues no se junten dos colores iguales.

En un mapa con cicatrices con un solo vértice se tiene la siguiente condición para ser plegable.

<u>Teorema Kawasaki–Justin–Robertson</u> (Robertson, 1978): Un modelo plano de papiroflexia con un solo vértice es plegable si y solo si la suma alterna de los ángulos que forman los pliegues es cero.

Se demostró la condición necesaria en 1978 por S.A: Robertson, pero quedó olvidada hasta 1980 cuando se redescubrió se forma independiente por J. Justin y T. Kawasaki. La condición suficiente la demostró Tom Hull (Hull, 1994).

2. La papiroflexia en la educación

2.1. Beneficios e inconvenientes del uso de la papiroflexia en Matemáticas

Una de las competencias más importantes en Matemáticas es la resolución de problemas. Esta permite aplicar los conceptos y habilidades matemáticas a situaciones de la vida real, desarrollar el pensamiento crítico analizando e interpretando los datos, fomentar la creatividad y trabajar la comunicación y argumentación. Es por ello que para trabajar la competencia en el aula es imprescindible una metodología y recursos adecuados.

Jones (2002) argumenta con su investigación que las actividades matemáticas con papiroflexia desarrollan las habilidades en resolución de problemas y la capacidad para trabajar en equipo. Propuso una serie de actividades para alumnos de 6 y 7 años en el aula usando las estrategias recomendadas por Wollring (2001).

- Solo se les presenta a los alumnos los pliegues más simples. Ellos investigan por su cuenta las formas resultantes y justifican sus hallazgos. Además, se les desafía para que desarrollen figuras más complejas.

- Los estudiantes trabajan en grupos. A cada uno de ellos se les proporcionan dos objetos doblados para que puedan desplegar uno de ellos, analizar su construcción y rehacer el modelo con ayuda de la construcción plegada.

- Se les pide a los estudiantes que comuniquen sus hallazgos y reflexionen sobre las matemáticas usadas.

Por otro lado, León (2018) usa la papiroflexia como recurso para la resolución de problemas de áreas y perímetros de las figuras planas. Concluye que la técnica de origami permite interpretar las figuras planas más fácilmente, estimula la creatividad y el razonamiento lógico de los estudiantes logrando un aprendizaje significativo. Además, en el estudio, la papiroflexia fomentó la motivación del alumnado atrayendo su atención y su participación.

A parte de la resolución de problemas, es necesario desarrollar las habilidades de visión espacial en Matemáticas. Pearl, (1993), Robichaux and Rodrigue (2003) y Boakes (2006) afirman que el arte del plegado del papel es efectivo como herramienta para mejorar la visión espacial en las clases de Matemáticas. Boakes (2008) también analiza el uso de la papiroflexia en clases de geometría como una herramienta para evaluar la estructura del aula y el ambiente de esta. Los docentes tienen la oportunidad de ver como los alumnos se acercan a nuevos problemas ellos solos y de observar la predisposición que tienen frente a las actividades.

Cabe destacar la capacidad de las actividades con papiroflexia para aplicarse en todos los grados complejidad y para representar de manera similar conceptos matemáticos apropiados (Kasahara, 1988). Una misma construcción con papiroflexia puede servir para trabajar tanto contenidos en los primeros cursos de la ESO como en 4º de la ESO. Además, se pueden realizar diferentes construcciones mediante plegado del papel para representar el mismo concepto. Por ejemplo, la representación de la fracción $\frac{1}{2}$ puede realizarse con un pliegue perpendicular a alguno de los lados del papel cuadrado o realizando un doblez por la diagonal.

En cuanto a los inconvenientes de este recurso, el más importante en un aula es el tiempo que requiere el plegado del papel. Tal y como está estructurado el horario de las asignaturas en los institutos y la cantidad de contenidos que se tienen que impartir en el curso, resulta escaso el tiempo para que los alumnos prueben e investiguen los dobleces del papel. Otra desventaja, que va ligada a la anterior, es la complejidad de los modelos. El docente tiene que ser capaz de proponer actividades que se adecuen a las capacidades motrices y cognitivas de los estudiantes.

En definitiva, el docente debe conocer los beneficios e inconvenientes al incorporar la papiroflexia en la enseñanza de las matemáticas.

2.2. Materiales

El tamaño y la forma del papel necesario dependerá del modelo que vayamos a realizar. Existen varios tipos de papel para plegar. El papel de origami, o "kami", es cuadrado y tiene diferentes tamaños, desde 2,5 cm a 25 cm. Generalmente, cada lado del papel tiene un color o estampado distinto. De esta manera, se hace más sencillo seguir los pasos de plegado.

El papel tradicional japonés, wahi, es más resistente que el papel común debido a que está hecho con pulpa de madera. Este tipo de papel se usa en ceremonias tradicionales, y no en el ámbito educativo. Para este contexto se pueden usar todo tipo de papeles, pero hay que tener en cuenta el gramaje de estos. Si nos interesa realizar un modelo muy rígido con pocos dobleces igual es más conveniente un papel de gramaje alto. En cambio, si hay alumnos con grandes dificultades motrices para plegar el papel es más conveniente que este sea más fino.

Un aspecto relevante en el panorama educativo son los recursos económicos que se destinan a los centros. El papel es un material muy económico y accesible para toda la población. Normalmente se parte de un cuadrado papel o de un rectángulo con proporción $\sqrt{2}$ (folio DIN A4). Esto hace que sea sencillo poner en práctica actividades de papiroflexia en cualquier centro.

A parte del papel, en las actividades con papiroflexia se pueden usar herramientas para realizar mejor los plegados. Es común utilizar una superficie plana, como puede ser una mesa o el suelo, para ayudarse. Otro de los recursos que se pueden usar para realizar pliegues afilados son las carpetas de huesos. Estas carpetas son huesos planos tallados y se pueden sustituir por pequeñas reglas en el aula.

2.3. LOMLOE y papiroflexia

La LOMLOE, Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, pone el foco en el desarrollo de las competencias claves y el carácter interdisciplinar de las situaciones de aprendizaje. La papiroflexia como herramienta didáctica contribuye al desarrollo de las competencias y a las diferentes áreas.

2.3.1. Aportación a las competencias clave

A través de la papiroflexia como recurso didáctico se trabajan las competencias clave de la siguiente forma:

- Competencia lingüística (CCL): Lectura de las instrucciones o diagramas para realizar el modelo plegado y comunicación verbal y escrita para describir los procesos seguidos.

- Competencia plurilingüe (CP): La papiroflexia es en sí un nuevo lenguaje con símbolos y procesos a seguir. Los alumnos lo tienen que conocer y saber usar ese lenguaje.

- Competencia matemática y en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM): La papiroflexia implica el uso de contenidos matemáticos como medidas, proporciones y geometría. Mejora el desarrollo de visión espacial y está ligada a la tecnología, ingeniería y a la física por sus aplicaciones en el día a día.

- Competencia digital (CD): Se pueden crear mapas de cicatrices de modelos de papiroflexia mediante aplicaciones como https://origamisimulator.org/

- Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA): La papiroflexia requiere paciencia, perseverancia y habilidades para seguir instrucciones paso a paso. Los estudiantes deben reflexionar sobre su proceso de aprendizaje, identificar errores y mejorar su técnica a medida que avanzan. La realización de modelos puede ser una actividad relajante y creativa que favorezca la gestión emocional y el bienestar.

- Competencia ciudadana (CC): Las actividades con papiroflexia pueden realizarse en colaboración con otros compañeros fomentando el trabajo en equipo, la comunicación efectiva y el respeto mutuo. Además, la papiroflexia puede usarse como una herramienta para promover la conciencia ambiental y el uso responsable de los recursos.

- Competencia emprendedora (CE): La papiroflexia fomenta la curiosidad y la originalidad de forma que los alumnos encuentren diferentes procesos y soluciones a un mismo problema.

- Competencia en conciencia y expresión cultural (CCEC): La papiroflexia es una forma de expresión artística y cultural, lo que permite a los estudiantes explorar diferentes estilos, tradiciones y formas de arte. Pueden crear diseños originales y apreciar la belleza de las formas y patrones en el papel.

2.3.2. Aplicación a diferentes áreas

En el primer capítulo de este trabajo se han descrito las diferentes facetas de la papiroflexia. El plegado del papel no está solo ligado al Arte o a las Matemáticas. Ese se puede usar como recurso didáctico en múltiples áreas o asignaturas. Esta diversidad permite realizar situaciones de aprendizaje multidisciplinares en las que intervenga más de una asignatura.

- Física y tecnología: Con las construcciones de papel se pueden explorar la resistencia del papel y como este se comporta ante diferentes fuerzas.

- Biología: Se pueden estudiar la naturaleza representándola con papiroflexia.

- Química: Muchas moléculas tienen la forma de poliedros, y estos se pueden construir con papiroflexia para estudiarlos mejor. También es posible crear un modelo del ADN.

- Matemáticas: La gran mayoría de los contenidos de la asignatura se pueden impartir usando la papiroflexia como recurso. En el Capítulo 3, se muestras diferentes actividades para trabajar los contenidos matemáticos.

- Dibujo técnico: Esta materia está íntimamente ligada a la geometría y, por tanto, se puede trabajar fácilmente mediante la papiroflexia.

2.4. Pautas para trabajar papiroflexia en el aula

Las prácticas docentes son claves para el aprendizaje del alumno. El uso la papiroflexia activa el conocimiento previo, un aprendizaje práctico, la construcción de esquemas, el razonamiento espacial y la lógica (Gadner, 1993). Los docentes pueden aplicar la papiroflexia para involucrar a un estudiante en un aprendizaje que mejore su capacidad para pensar críticamente, para crear un diálogo en clase y para plantear preguntas (Bruner, 1966).

Según Susan Sze, los profesores deberían tener en cuenta los siguientes puntos a la hora utilizar la papiroflexia como recurso didáctico.

1. El docente debe estar familiarizado con la secuencia de los pasos de plegado correctos. Como pauta general para una buena práctica docente, es conveniente realizar la actividad con antelación para anticipar cualquier área de dificultad que puedan encontrar los estudiantes.

2. Los estudiantes deben ver la figura completa terminada para tener éxito. Esto sirve como ayuda visual, motivador y hoja de ruta para los alumnos.

3. El profesor puede hacer una lista de conceptos matemáticos, vocabulario y leyes involucradas en la construcción del origami.

4. El docente puede generar preguntas específicas para provocar un pensamiento de orden superior.

5. El docente puede usar papel cuadrado delgado para obtener mejores resultados. Los tipos de papeles se pueden ampliar para incluir catálogos de papel de regalo, revistas, menús y calendarios.

6. El docente debe hacer una demostración de los pliegues con una hoja de papel más grande y asegurarse de que la hoja mire de la misma manera que la hoja de los estudiantes.

7. El docente debe apoyar a los estudiantes que necesitan más ayuda para seguir las instrucciones al realizar manipulaciones, marcando puntos de referencia en el papel con un lápiz mientras se mueve por el aula.

8. El docente puede marcar con un punto el lugar donde deben unirse dos esquinas.

9.El docente puede organizar la clase en grupos y dejar que los estudiantes que hayan completado un pliegue ayuden a otros que estén rezagados. Esto fomentará el aprendizaje cooperativo y ayudará al maestro a abordar las preguntas de todos los estudiantes. (Sze, S, 2005, p.3).

3. Propuesta didáctica

En este apartado se expone una propuesta didáctica para alumnos de primer curso de Educación Secundaria de la Comunidad de Castilla y León. Se propone una situación de aprendizaje donde la papiroflexia aparece como una herramienta para adquirir las competencias específicas en la asignatura de Matemáticas.

Teniendo en cuenta el Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, la situación de aprendizaje engloba varios contenidos de la asignatura de Matemáticas y de otras materias, está contextualizada para que sea un aprendizaje significativo y estimule el interés del alumnado, y es inclusiva ya que se adecua a la diversidad de los estudiantes.

3.1. Contextualización

Se propone esta situación de aprendizaje para alumnos de 1º ESO de un centro de secundaria público. La situación está planteada para realizarse a lo largo del segundo trimestre del curso escolar. En ella se trabajan las diferentes competencias específicas de la asignatura de Matemáticas usando la papiroflexia como recurso principal. Se utilizarán además otros materiales manipulativos y digitales para complementar y diversificar el aprendizaje.

La situación de aprendizaje se ambienta a principios del siglo XV. Los alumnos se convertirán en comerciantes y modistas de la época. El problema inicial con el que se parte es que la reina les ha encargado un traje para llevar en la boda de su hija, el evento más importante del año. Para elaborarlo tendrán que resolver diferentes problemas a través de las actividades que se proponen. Uno de ellos es conocer bien la ruta de la seda, importante para conseguir las telas.

3.2. Fundamentación curricular

Para la realización de esta situación de aprendizaje se han tenido en cuenta la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación y el Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

3.2.1. Objetivos

- Conocer la papiroflexia y su relación con las matemáticas.
- Desarrollar habilidades del plegado de papel.
- Identificar las propiedades de los elementos de la geometría plana.
- Manejar diferentes herramientas para resolver problemas.

- Conocer la industria del textil y oficios como diseñador o modista.
- Conocer el contexto histórico del siglo XV.
- Identificar los problemas del siglo XV y sus diferencias con la actualidad.
- Desarrollar estrategias de cálculo y resolución de problemas.
- Desarrollar habilidades y técnicas de estudio.
- Fomentar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad mediante el trabajo en equipo.
- Desarrollar la reflexión crítica y el espíritu emprendedor mediante la resolución de problemas.
- Comprender y expresarse utilizando lenguaje matemático.

3.2.2. Competencias

La finalidad principal de esta situación de aprendizaje es que los alumnos adquieran las competencias necesarias para su desarrollo integral como personas y para desenvolverse adecuadamente en la sociedad. Desde la educación primaria estos alumnos ya han ido desarrollando estas competencias. Ahora, en el primer curso de la educación secundaria se pretende que sigan adquiriendo esas competencias.

A lo largo de la situación de aprendizaje se desarrollan las siete competencias claves del currículum: lingüística (CCL), plurilingüe (CP), matemática y en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM), digital (CD), personal, social y de aprender a aprender (CPSAA), ciudadana (CC), emprendedora (CE) y en conciencia y expresión cultural (CCEC). Estas competencias tienen la misma jerarquía y se aplican a través de los descriptores operativos descritos en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. A partir de estos y del objetivos de etapa marcados por la ley educativa, se concretan las competencias específicas de Matemáticas. A su vez, las competencias específicas se desglosan en los criterios de evaluación para poder evaluarlas. Se relacionan mediante la siguiente tabla: (Decreto 39/2022, de 29 de septiembre)

Competencias específicas	Criterios de evaluación	Descriptores operativos
1	1.1., 1.2., 1.3.	CCL1, CCL2, CCL3, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4
2	2.1., 2.2	CCL1, STEM1, STEM2, STEM4, CD2, CPSAA4, CC3, CE3
3	3.1., 3.2., 3.3.	STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3
4	4.1., 4.2.	STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3
5	5.1., 5.2.	STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1
6	6.1., 6.2., 6.3.	CCL1, STEM1, STEM2, STEM3, STEM5, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1
7	7.1., 7.2.	STEM3, STEM4, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4
8	8.1., 8.2.	CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3
9	9.1., 9.2.	STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3
10	10.1., 10.2.	CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3

Tanto las competencias específicas, como los criterios de evaluación y los descriptores operativos se describen en el Anexo 2: Fundamentación curricular.

3.2.3. Indicadores de logro

Para evaluar el grado adquirido de cada competencia específica se consideran los siguientes indicadores de logro:

1.1.A. Identifica los datos del problema.
1.1.B Establece relaciones con los datos del problema.
1.2. Utiliza una estrategia correcta para resolver los problemas.
1.3. Obtiene soluciones del problema.
2.1. Corrige las soluciones inadecuadas.
2.2. Razona la validez de las soluciones en función del contexto.
3.1. Comprueba conjeturas de forma guiada.
3.2. Crea modificaciones del problema.
3.3. Comprueba adecuadamente las soluciones con herramientas tecnológicas.
4.1.A Descompone el problema en partes más simples.
4.1.B Organiza y relaciona las pequeñas partes del problema.
4.2. Identifica algoritmos para resolver problemas.
5.1. Relaciona los diferentes contenidos matemáticos.
5.2. Aplica los conocimientos previos.
6.1.A Identifica la relación de las matemáticas con el diseño y confección de trajes.

6.1.B Identifica la relación de las matemáticas con la compraventa de productos
6.2. Identifica la relación de las matemáticas con la historia y con la tecnología.
6.3. Reconoce la aportación de las matemáticas en el desarrollo humano.
7.1.A Representa conceptos o información de diferentes modos.
7.1.B Representa procesos de diferentes modos.
7.2. Utiliza la papiroflexia o material manipulativo para resolver problemas.
8.1. Explica de forma clara y concisa con lenguaje matemático los procesos.
8.2. Reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana.
9.1 Muestra interés y curiosidad por aprender y mejorar en matemáticas.
9.2. Desarrolla una actitud positiva y perseverante en el aprendizaje matemático.
10.1.A Participa activamente en el trabajo en equipo.
10.1.B Respeta las diferentes opiniones y propuestas de sus compañeros.
10.2. Asume su rol de equipo.

3.2.4. Contenidos

Para desarrollar las competencias específicas de Matemáticas en la situación de aprendizaje se trabajan los siguientes contenidos (o sentidos):

- Sentido numérico:
  - Realización de estimaciones.
  - Diferentes formas de representación de los números enteros, decimales y fracciones.
  - Operaciones con números, naturales, enteros, fracciones y decimales.
  - Sistema de numeración decimal y sexagesimal.
  - Razones y proporciones.
  - Porcentajes y su relación con las fracciones y razones.
  - Información numérica en contextos financieros.

- Sentido de la medida:
  - Magnitud de objetos físicos y matemáticos en el plano.
  - Estrategias de elección de unidades adecuadas a las medidas.
  - Medición de longitudes, ángulos y áreas de figuras planas.
  - Representación de figuras planas.
  - Estimación de las medidas y del grado de precisión de estas.

- Sentido espacial:
  - Descripción y clasificación de figuras geométricas en dos dimensiones.
  - Elementos característicos de las figuras geométricas en dos dimensiones.
  - Construcción de figuras planas.
  - Relaciones de congruencia y semejanza de figuras planas. Teorema de Tales.
  - Representación de puntos en el plano y coordenadas cartesianas.
  - Comprensión del uso de coordenadas en la historia.
  - Modelización geométrica.
  - Mosaicos.

- Sentido algebraico:
  - Patrones, pautas y regularidades.
  - Modelización de situaciones reales.
  - Estrategias de deducción de conclusiones de una situación modelizada.
  - Relaciones cuantitativas en situaciones reales.

- Sentido socioafectivo:
  - Estrategias de fomento de la curiosidad, iniciativa, perseverancia y resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.
  - Esfuerzo y motivación.
  - Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo.
  - Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad en la sociedad.
  - Contribución de las matemáticas a la sostenibilidad y el consumo responsable.

3.2.5. Relación con otras materias

El aprendizaje de las matemáticas no se puede dar de manera aislada. Esta se relaciona con diversas materias o áreas por su carácter instrumental. En particular, en esta situación de aprendizaje intervienen las materias de Geografía e Historia, Tecnología y Digitalización, Biología y Geología y Educación Plástica, Visual y Audiovisual.

El área de Geografía e Historia es el que está más vinculado a las actividades ya que se contextualizan en una época histórica diferente a la actual. Además, se trabaja con las coordenadas cartesianas y con los mapas.

El área de Tecnología y Digitalización está ligada al uso de la papiroflexia y de aplicaciones como GeoGebra, herramientas que se utilizan a lo largo de las actividades.

El área de Biología y Geología se relaciona con los temas que tratan la comida y la alimentación, así como los que tratan sobre los tejidos naturales como la seda.

El área de Educación Plástica, Visual y Audiovisual es clave para el desarrollo del sentido espacial. Y su parte artística está ligada a los mosaicos que se trabajan en una de las actividades de esta situación de aprendizaje.

3.3. Metodología

Los alumnos durante toda la situación de aprendizaje elaborarán un portafolio. En él recogerán toda la información de las actividades hechas en el aula, reflexionarán sobre los contenidos vistos y sobre su proceso de aprendizaje. Este método sirve de gran ayuda para reflejar el aprendizaje de los alumnos y para evaluarlo de manera sumativa y formativa. Además, es una herramienta para evaluar la propia situación de aprendizaje y la actividad docente.

El portafolio será guiado por parte del docente, es decir, será estructurado. De esta manera se pretende que los alumnos aprendan habilidades para organizarse y estudiar la asignatura de forma progresiva. Será una carpeta con un documento escrito que se elaborará a lo largo del trimestre. A esta se le añadirán las construcciones con papiroflexia que se elaboren en el aula. Estará ordenada cronológicamente y se elaborará un índice. En el documento reflejarán los resultados matemáticos vistos en clase, las dudas o problemas que les han surgido a la hora de trabajarlos, cómo las han resuelto y una reflexión acerca de su aprendizaje de cada día. A lo largo de las sesiones en el aula, los alumnos completarán su portafolio con las actividades que se realicen. Los últimos 5-10 minutos de la clase se reservarán para que completen la parte más reflexiva de este.

En cuanto a la disposición del aula, esta cambiará en función de las actividades o tareas. Estas serán tanto individuales como grupales. Las actividades individuales se centrarán en la reflexión de los contenidos vistos y las grupales en la construcción o elaboración de figuras con papiroflexia. De esta forma, los alumnos trabajan la competencia personal, social y de aprender a aprender, y la competencia ciudadana.

En las actividades o tareas grupales, el docente tendrá en cuenta las características del alumnado para elaborar dichos grupos. Se realizarán grupos mixtos donde haya alumnos con diferentes capacidades y de diferentes sexos. Se pretende crear un ambiente de aprendizaje inclusivo y participativo. Estas tareas favorecen la colaboración y el aprendizaje entre iguales. De esta manera, los alumnos se apoyan entre ellos. Aquellos con más habilidades y conocimientos en ciertas actividades complementan a sus compañeros que no los tienen y les ayuda a adquirirlos.

El recurso principal de esta propuesta didáctica es el papel para trabajar la papiroflexia, pero también se usará la pantalla digital, los ordenadores, la aplicación GeoGebra, un globo terráqueo, mapamundis, bolígrafos y rotuladores de colores.

En las actividades de la situación de aprendizaje se trabajará con diferentes metodologías:

Actividades	Metodología	Agrupamiento	Material	Tiempo
Vestido	Magistral participativa Aprendizaje cooperativo Debate	Individual y por parejas	Papel cuadrado Pizarra digital	4 sesiones
Ruta de la seda	Pequeña investigación Resolución de problemas Magistral participativa	Individual y por parejas	Pizarra digital Libro de texto Mapamundi Globo terráqueo Ordenadores y GeoGebra	5 sesiones
Vuelta al mundo	Aprendizaje basado en resolución de problemas	Grupal (3-4 alumnos)	Pizarra digital Internet Globo terráqueo Bastón Regla y compás	4 sesiones
Comida	Resolución de problemas Aprendizaje cooperativo	Parejas	Papel cuadrado y folios DINA4 Pizarra digital	4 sesiones
Diseño de las telas	Aprendizaje cooperativo Técnica puzle	Grupal (5 alumnos)	Papel cuadrado y folios DINA4 de diferentes colores	3 sesiones
Mercado de las telas	Aprendizaje cooperativo Resolución de problemas	Grupal (5 alumnos)	Papel cuadrado y folios DINA4 de diferentes colores	4 sesiones
Patrones	Resolución de problemas	Individual	Folios DINA4 Libro de texto Patrón vestido	5 sesiones
Entrega del vestido	Resolución de problemas	Individual	Papel Regla y compás	3 sesiones

3.4. Actividades y tareas

Las actividades giran en torno al contexto creado, el encargo del vestido de la reina. A través de las actividades se diseñará, elaborará y entregará el vestido. En el proceso surgirán tareas y problemas que los alumnos resolverán con ayuda de las matemáticas.

En este apartado se exponen los objetivos, los contenidos, la metodología y las construcciones de papiroflexia empleadas para cada una de las actividades. Las construcciones que se exponen son posibles soluciones a las tareas planteadas. Puede darse que un alumno encuentre otra forma de resolverlo con papiroflexia.

En el Anexo 1: Portafolio se encuentra el guion del portafolio que elaboran los alumnos para cada una de las actividades.

3.4.1. Actividad 1: Vestido

Objetivos:

- Conocer el contexto histórico de España en el siglo XV.
- Identificar las propiedades de los elementos del plano.
- Conocer la papiroflexia y su relación con las matemáticas.
- Desarrollar habilidades del plegado de papel
- Conocer la industria del textil y oficios como diseñador o modista.
- Comprobar conjeturas sencillas.
- Razonar la validez de soluciones.
- Participar activamente en el trabajo por parejas.
- Respetar las diferentes opiniones.

Contenidos:

- Puntos, rectas, segmentos y semirrectas.
- Rectas paralelas y perpendiculares.
- Clasificación de ángulos.
- Clasificación de triángulos según sus lados y sus ángulos.
- Mediatriz y bisectriz

Metodología:

Se comienza la actividad con una pequeña clase magistral participativa. En ella se exponen el contexto de la situación de aprendizaje y de esta actividad. Se recurre a la técnica de la pregunta y a la pizarra digital para investigar acerca de la situación en España en el siglo XV y sobre el trabajo de modista. Se introduce la geometría a través de un componente lúdico, la construcción de un vestido con papiroflexia.

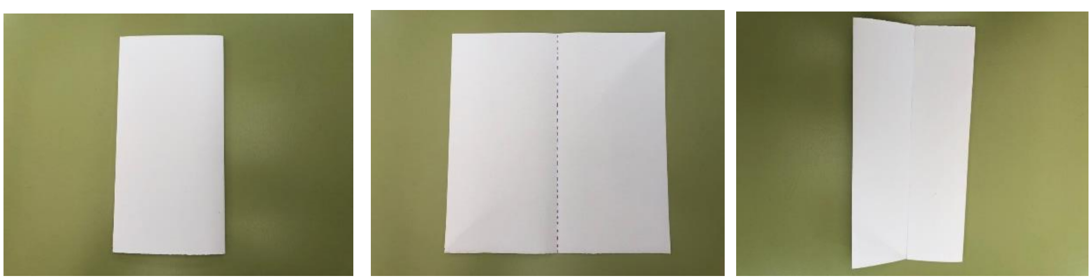
Por parejas, mediante aprendizaje cooperativo se construye un vestido con papiroflexia y ángulos de 30º, 45º, 60º y 90º siguiendo las indicaciones del docente. De forma individual analizan los pliegues de ese vestido y los elementos del plano implicados. De la misma manera analizan los ángulos, sus unidades de medida y los elementos del plano como la bisectriz y la mediatriz implicados en la construcción de estos ángulos. En este momento el profesor se muestra como un apoyo para guiar a los alumnos. Finalmente, se realiza un pequeño debate sobre otras posibles soluciones a las tareas planteadas y sobre los contenidos trabajados.

Para la construcción con papiroflexia el docente previamente introducirá a los alumnos el lenguaje apropiado. Se usará papel cuadrado bicolor para facilitar el plegado. Además, durante la actividad no se realizará un pliegue nuevo hasta que todos los alumnos no hayan realizado el anterior.

<u>Procedimiento con papiroflexia:</u>

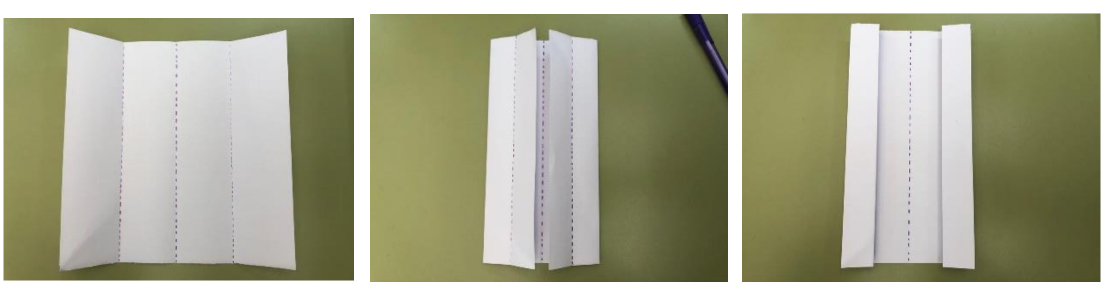
- Construcción del vestido:

1. Se parte de un cuadrado de papel. Se realiza un pliegue valle por la mitad y se vuelve a abrir la hoja.
2. Se doblan los dos lados paralelos al pliegue de forma que estos de junten en el pliegue.



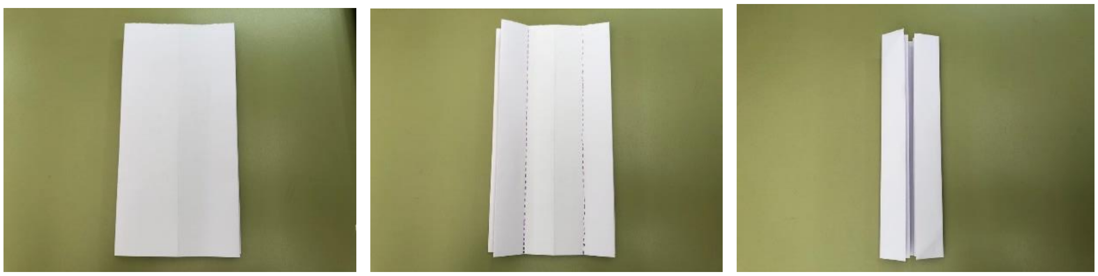
(Fuente: Elaboración propia)

3. Se doblan esos mismos lados hacia los pliegues anteriores.



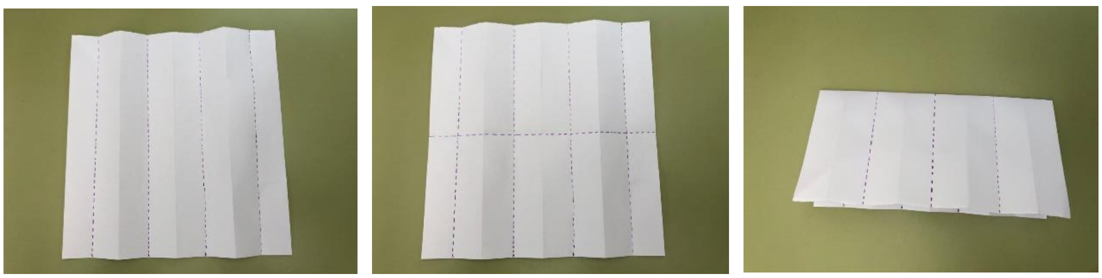
(Fuente: Elaboración propia)

4. Se da la vuelta al papel. Se doblan los lados hasta que coincidan con el doblez del centro.



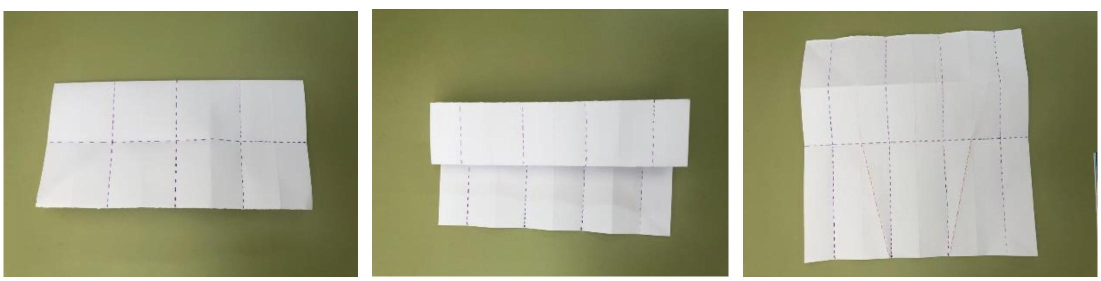
(Fuente: Elaboración propia)

5. Se desdobla el papel hasta llegar al cuadrado inicial. Se realiza un pliegue valle por la mitad de forma que sea perpendicular a los pliegues anteriores. Se dobla la parte superior sobre la inferior.



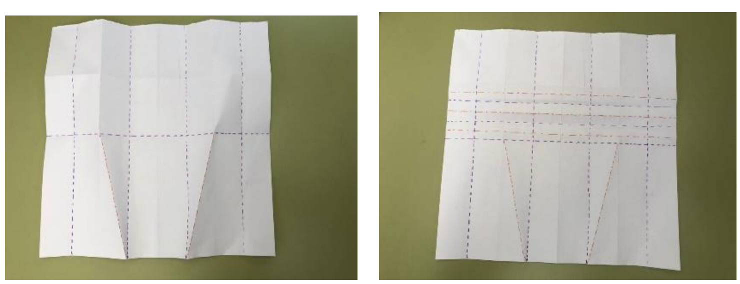
(Fuente: Elaboración propia)

6. Se pliega el borde inferior hasta el superior con un pliegue valle.



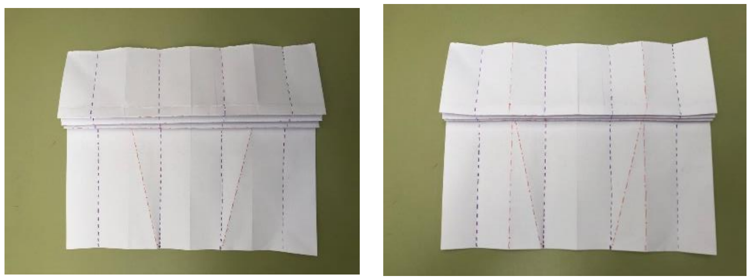
(Fuente: Elaboración propia)

7. Se desdobla en papel. Se realiza un pliegue montaña en dos diagonales de dos rectángulos.



(Fuente: Elaboración propia)

8. Se realizan tres pliegues escalonados comenzando con un pliegue valle en el pliegue central.



(Fuente: Elaboración propia))

9. Se realizan dos pliegues montaña por los pliegues verticales ya existentes y de dobla con unos pliegues escalonados.
10. Se doblan las solapas hacia fuera con un pliegue valle.

(Fuente: Elaboración propia)

11. De igual forma, se doblan las solapas de abajo hacia fuera. Se da la vuelta a la hoja.

(Fuente: Elaboración propia))

12. Se doblan las esquinas superiores y se hunden.

(Fuente: Elaboración propia)

13. Se dobla la esquina hacia abajo con un pliegue valle y se da la vuelta a la hoja.

(Fuente: Elaboración propia)

14. Se doblan hacia abajo las esquinas superiores con un pliegue valle y se introducen detrás de las capas.

(Fuente: Elaboración propia)

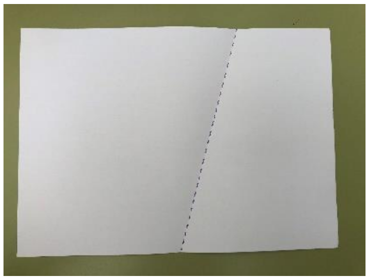
15. Desdoblar la falda por los pliegues montaña hechos anteriormente.
16. Se doblan las esquinas laterales para aplastar el modelo.
17. Se gira y se obtiene finalmente el vestido.

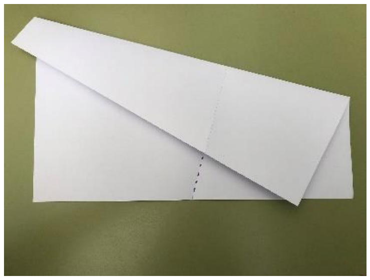
  

(Fuente: Elaboración propia)

- Construcción ángulos 45º y 90º:

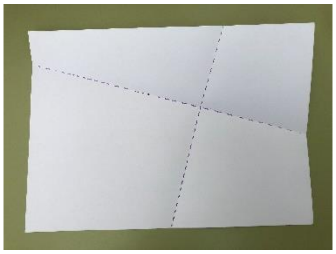
1. Se traza una recta mediante un doblez con el papel.
2. Se traza una recta perpendicular doblando la recta sobre sí misma. Es decir, haciendo coincidir los puntos de la recta sobre sí misma.





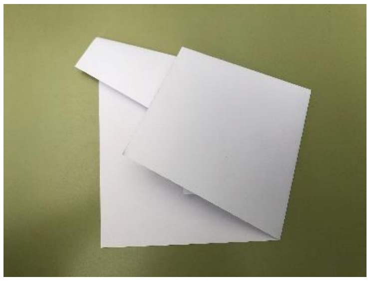
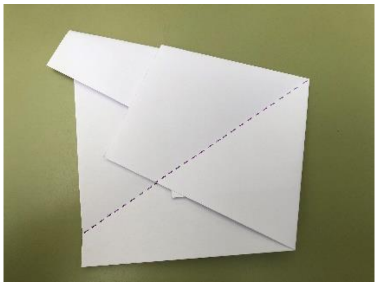
(Fuente: Elaboración propia)

3. En la intersección se obtienen cuatro ángulos de 90º.



(Fuente: Elaboración propia)

4. Se dobla del papel por los dos pliegues.
5. Se superponen las dos semirrectas que forman el ángulo de 90º (bisectriz). Se obtiene un ángulo de 45º.

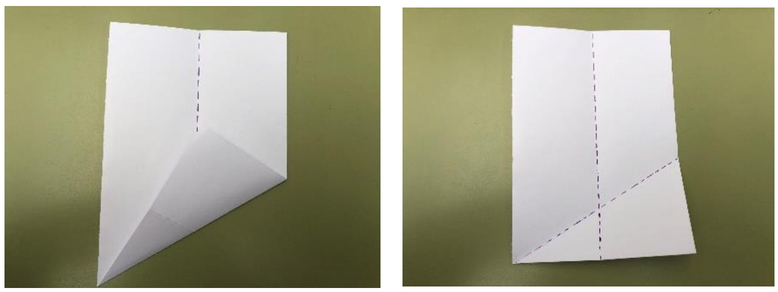
(Fuente: Elaboración propia)

- Construcción de ángulos 30º y 60º:

1. Se superponen los lados mayores de la hoja de papel realizando un pliegue valle (mediatriz del lado menor).

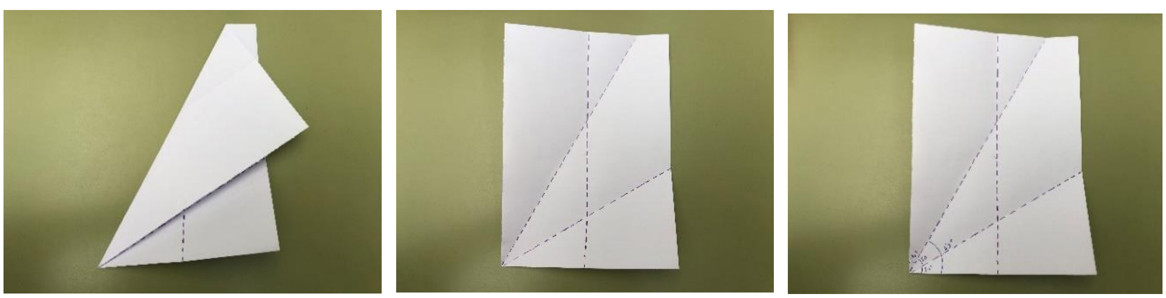
(Fuente: Elaboración propia)

2. Se lleva el vértice inferior derecho al pliegue anterior de forma que el nuevo pliegue pase por el vértice inferior izquierdo.
3. Se desdobla y se obtiene un ángulo de 30º.



(Fuente: Elaboración propia)

4. Se realiza un pliegue llevando el lado mayor izquierdo al pliegue último. Se obtiene un ángulo de 60º.



(Fuente: Elaboración propia)

Observación: En esta construcción, en el paso 2, se lleva un punto a una recta. Esta acción no cumple con ninguno de los Axiomas de Huzita-Hatori. Sin embargo, esta construcción es muy sencilla para obtener un ángulo de 60º trisecando el ángulo recto inferior izquierdo de la hoja, y para comprobarlo fácilmente doblando el papel.

La demostración de que realmente se obtiene un ángulo de 60º es debido a que se construye parcialmente un triángulo equilátero. Con el paso 2 se traslada la distancia del borde inferior de la hoja construyendo uno de los lados del triángulo. Como esa distancia se trasporta a la mediatriz del lado inferior, se obtiene un triángulo equilátero y equiángulo. Dado que los ángulos interiores en los vértices de un triángulo equiángulo son de 60º, se tiene la demostración de la construcción.

3.4.2. Actividad 2: Ruta de la Seda

Objetivos:

- Conocer la Ruta de la Seda.
- Identificar el camino más corto entre dos puntos de una esfera y de un plano.
- Reconocer e interpretar las escalas de los mapas.
- Localizar puntos del plano mediante coordenadas cartesianas.
- Identificar la relación funcional entre el espacio y el tiempo.
- Representar funciones mediante GeoGebra.
- Proponer conjeturas y comprobarlas mediante doblado de papel.
- Relacionar las matemáticas con la Geografía.
- Desarrollar estrategias de optimización.

Contenidos:

- Coordenadas cartesianas.
- Medidas de ángulos y distancias.
- Unidades de medida.
- Proporciones y escalas.
- Funciones y su representación.
- Optimización.

Metodología:

Se comienza realizando una pequeña investigación sobre la Ruta de la Seda y los países más importantes por donde pasaba. Esta investigación se realizará de forma individual con ayuda del libro de texto de Historia y de la pizarra digital. Posteriormente se les entregará un mapamundi donde tendrán que marcar la ruta con las ciudades más relevantes. A través de una pequeña clase magistral identificarán las coordenadas cartesianas de esas ciudades considerando como origen la ciudad donde se encuentran.

Por pequeños grupos de 3- 4 alumnos se les propone doblar ese mapa de forma que este entre en un bolsillo 12 x 6 cm y de grosor mínimo y, además, que se despliegue rápidamente (mapa de miura). El docente les guiará para que sigan los pasos de resolución de problemas propuestos por Pólya (2004). Se les da la oportunidad de realizar tantas pruebas como quieran. Cuando todos los grupos hayan terminado se exponen las diferentes propuestas y se comentan las ventajas de estas y las posibles mejoras.

Pasos para la resolución de problemas:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

A continuación, de forma individual, los alumnos trazarán los caminos más cortos a las diferentes ciudades. Medirán las distancias en el mapa y el globo terráqueo para comprobar las rutas más cortas. Finalmente, con las escalas calcularán las distancias reales en las unidades de medida más adecuadas.

La tarea final consiste en relacionar las distancias calculadas con el tiempo. Esta se realizará en la sala de ordenadores con la aplicación de GeoGebra. A través de esta, de forma individual y siguiendo las indicaciones del profesor, los alumnos elaborarán una tabla con las distancias a las ciudades y los tiempos en viajar a ellas y lo representarán. También representarán la función que describe los periodos de una estrella.

<u>Procedimiento con papiroflexia:</u>

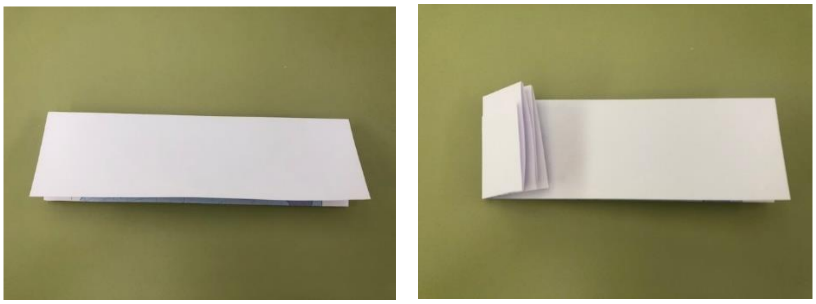
- Mapa de Miura:

1. Se realizan pliegues verticales escalonados. Se comienza con un pliegue valle de 8 cm o menos.

(Fuente imagen: Elaboración propia)

(Fuente del mapa: Wikipedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Political_World_%281938%29.svg)

2. Se dobla el mapa por los pliegues y se gira. Se realiza un pliegue valle de unos 4 - 5 cm con un ángulo pequeño (~10º).



(Fuente imagen: Elaboración propia)

(Fuente del mapa: Wikipedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Political_World_%281938%29.svg)

3. Se dobla el resto del mapa haciendo los pliegues paralelos al anterior.

(Fuente imagen: Elaboración propia)

(Fuente del mapa: Wikipedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Political_World_%281938%29.svg)

4. Se despliega el mapa. Se vuelve a doblar, pero cambiando algunos pliegues valle por pliegues montaña y viceversa. Los pliegues se alternan.

(Fuente imagen: Elaboración propia)

(Fuente del mapa: Wikipedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Political_World_%281938%29.svg)

5. Se vuelve a doblar por los nuevos pliegues.

(Fuente imagen: Elaboración propia)

(Fuente del mapa: Wikipedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Political_World_%281938%29.svg)

3.4.3. Actividad 3: Vuelta al mundo

Objetivos:

- Conocer las ventajas e inconvenientes de la papiroflexia.
- Demostrar el perímetro de la Tierra.
- Representar figuras geométricas planas con regla y compás.
- Relacionar las matemáticas con la Historia.
- Expresarse con lenguaje matemático.
- Adquirir habilidades de trabajo en grupo.
- Desarrollar capacidades de razonamiento y pensamiento crítico.

Contenidos:

- Número Π.
- Elementos de la circunferencia.
- Posiciones relativas de la circunferencia y la recta.
- Sector, segmento y corona circulares.
- Áreas y perímetros.
- Unidades de medida.

Metodología:

En primer lugar, se realizará un debate sobre si la Tierra es plana con el fin de que los alumnos den argumentos científicos. Posteriormente, se aplicará la metodología ABP (Aprendizaje Basado en Problemas) para calcular el perímetro de la Tierra. Los alumnos trabajarán en grupos pequeños de 3-4 alumnos y seguirán los ocho pasos del ABP (Journal of PBL, 2000):

1. Analizar el contexto del problema.
2. Intentar resolverlos con los conocimientos que ya se tienen.

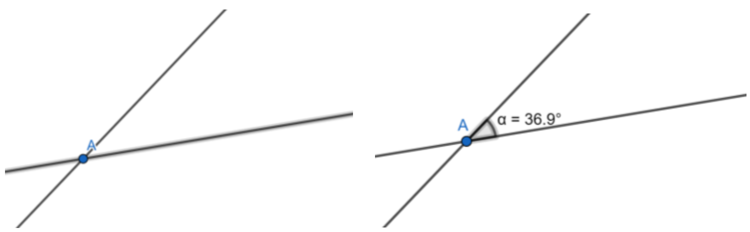
3. Elaborar una lista con los conocimientos que se saben y los que se necesitan conocer.
4. Distribuir las tareas con el grupo y marcar unos objetivos.
5. Obtener la información necesaria para resolverlo.
6. Compartir la información con el grupo.
7. Aplicar la información para la resolución del problema.
8. Presentar la solución y evaluarlo.

La actividad está enfocada a conocer y comprender la demostración del perímetro de la Tierra de Eratóstenes. Para ello, los alumnos necesitan experimentar y calcular el ángulo de los rayos solares en una determinada hora con ayuda de un bastón. Además, necesitarán otra referencia. Esta la conseguirán colaborando con otro instituto de otro país. En el quinto paso del ABP los alumnos necesitarán intercambiar información sobre el ángulo de los rayos solares. De esta forma los alumnos no solo desarrollarán capacidades de comunicación matemática, sino que también desarrollarán capacidades de comunicación en otro idioma.

En esta actividad no se realizarán construcciones con papiroflexia. En su lugar, se representarán los elementos del plano con regla y compás en el papel (o con la aplicación GeoGebra).

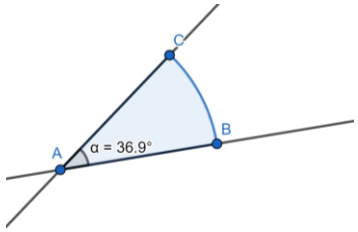
- <u>Procedimiento con regla y compás:</u>

1. Se trazan dos rectas secantes en A con ayuda de la regla.



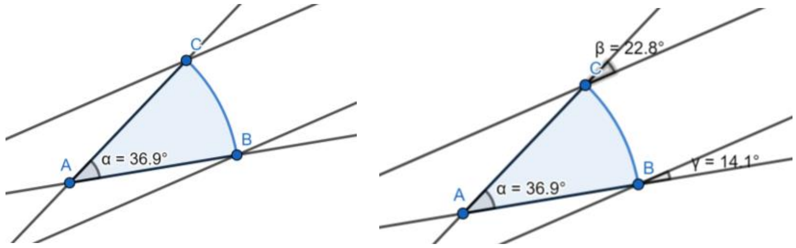
(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

2. Se traza un arco de circunferencia centrado en A con ayuda del compás.



(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

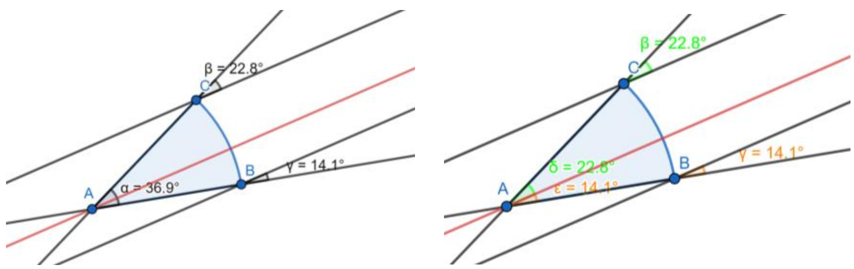
3. Se construyen dos rectas paralelas que pasen por los puntos C y B (trayectoria de los rayos solares).



(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

El ángulo β corresponde al ángulo de los rayos solares calculado por los alumnos, y el ángulo γ al calculado por los estudiantes de otro país. Los dos grupos de estudiantes constan de un bastón de 1m de longitud. A la misma hora y el mismo día posicionan el bastón perpendicular al suelo y miden su sombra para calcular el ángulo de los rayos solares. Una vez conocidos los ángulos calculan el ángulo α del sector circular, $\alpha = \beta + \gamma$. Esto lo comprueban primero experimentalmente variando los ángulos con ayuda de GeoGebra, y posteriormente lo demuestran:

4. Se traza una recta paralela a las anteriores que pase por A.
5. Se identifican los ángulos δ y ε que dividen el ángulo α. Trasladando el punto A al punto C según la recta que les une se comprueba que $\delta = \beta$, y trasladando el punto A al punto B según la recta que les une se comprueba que $\varepsilon = \gamma$.



(Fuente: Elaboración propia con GeoGebra)

Una vez conocido el ángulo α, se calcula el perímetro de la Tierra, a partir de la longitud del arco de circunferencia y α. Por definición, la longitud de la circunferencia es igual a $\mathrm{L_c} \coloneqq 2 \cdot \pi \cdot \mathrm{radio}$, y la longitud del arco de circunferencia es igual a $\mathrm{L_a} \coloneqq 2 \cdot \pi \cdot \mathrm{radio} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \mathrm{radio} \cdot \alpha$. Despejando el radio en $\mathrm{L_a}$ y sustituyendo en $\mathrm{L_c}$ se tiene que $\mathrm{L_c} \coloneqq 2 \cdot \pi \cdot \frac{\mathrm{L_a}}{\alpha}$. Puesto que $\mathrm{L_a}$ es la distancia entre los dos institutos y α es conocido, se calcula el perímetro de la Tierra, $\mathrm{L_c}$.

En esta actividad se obtiene meramente una aproximación de la medida real. Hay que tener en cuenta que la Tierra no es del todo esférica y que los rayos solares no inciden totalmente de forma paralela en las dos ciudades.

3.4.4. Actividad 4: Comida

Objetivos:

- Representar las fracciones con papiroflexia.
- Realizar operaciones de fracciones con papiroflexia.
- Identificar las propiedades de los alimentos.
- Relacionar los contenidos matemáticos con los biológicos para elaborar una dieta equilibrada.
- Comprobar las soluciones gráficamente.
- Descomponer un problema en cuestiones más pequeñas.
- Elaborar estrategias de resolución de problemas.
- Adquirir destrezas de trabajo en grupo.

Contenidos:

- Proporciones y semejanza. Teorema de Tales.
- Representación de fracciones con papiroflexia.
- Comparación de fracciones.
- Operaciones de fracciones con papiroflexia.
- Múltiplos, divisores, MCD (Máximo Común Divisor) y MCM (Mínimo Común Múltiplo).
- Pensamiento computacional.

Metodología:

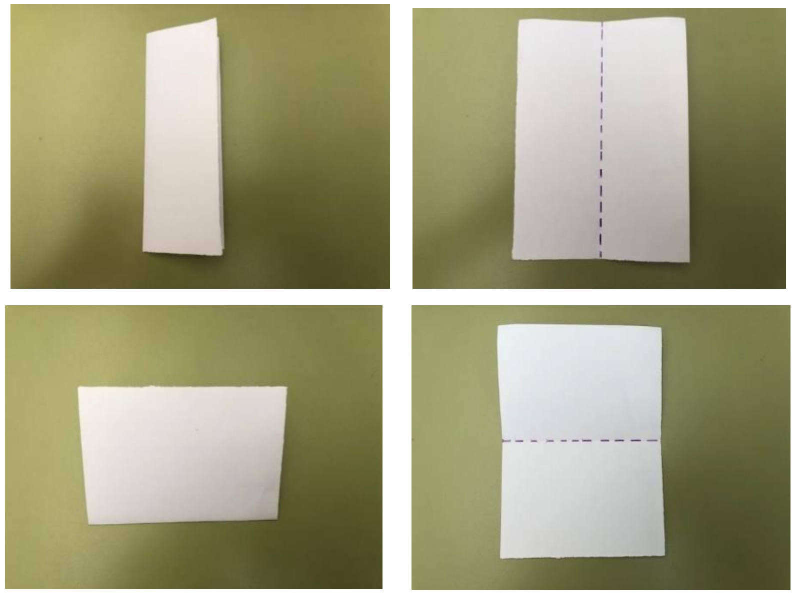
En esta actividad se trabaja con la metodología de resolución de problemas en parejas. Se proponen tres problemas sobre la comida durante el viaje en barco que se realiza para comprar las telas del vestido. Primero se les propone que elaboren por parejas una receta para comer en el viaje y que representen y comparen las fracciones de comida que necesitan en su receta con ayuda de la papiroflexia. Después se ponen en común las recetas en la pizarra y se calculan las cantidades de comida total necesarias operando con las fracciones. Finalmente se plantea el problema de repartir la comida entre los tripulantes del barco donde los alumnos representarán y operarán con fracciones.

La representación y el cálculo de las fracciones no está enfocado solo a realizarse con papiroflexia. Se realizarán diferentes tipos de representaciones para adecuarse a la diversidad de alumnado.

Procedimiento con papiroflexia:

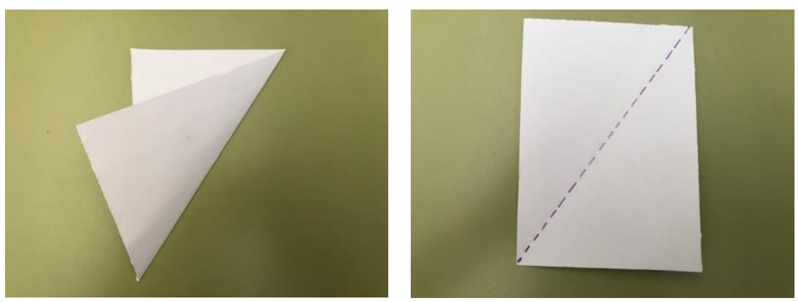
- Representación fracción $\frac{1}{2}$:

1. Opción 1: Se pliega juntado dos de los lados del folio.



(Fuente: Elaboración propia)

2. Opción 2: Se traza la diagonal del folio.

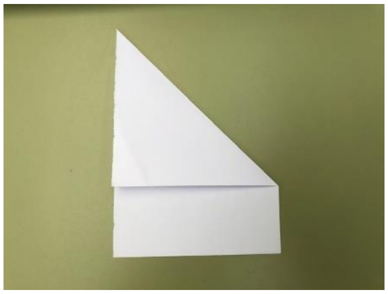
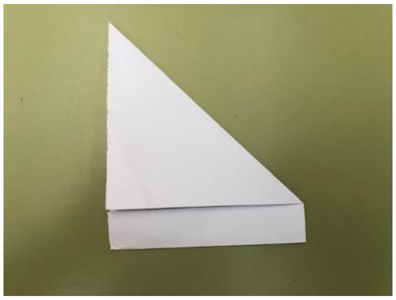
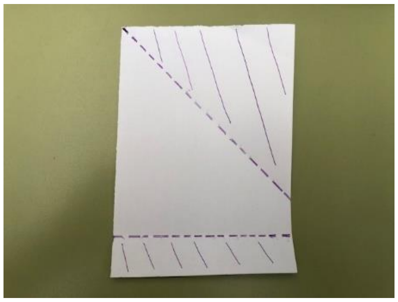


(Fuente: Elaboración propia)

3. Opción 3: Se realizan dos pliegues paralelos juntando dos de los lados del folio.

(Fuente: Elaboración propia)

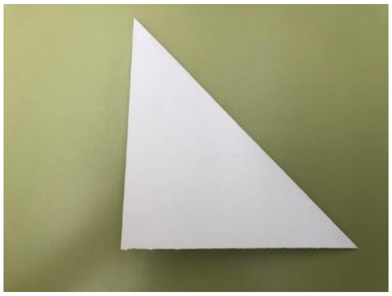
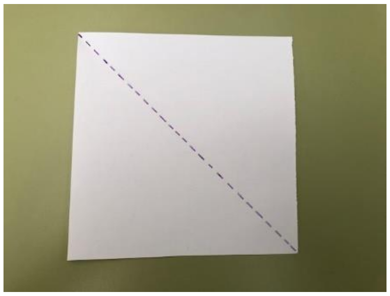
4. Opción 4: Se traza un pliegue llevando el lado menor superior a un lateral. Después, se lleva el lado menor inferior hasta doblez anterior.

(Fuente: Elaboración propia)

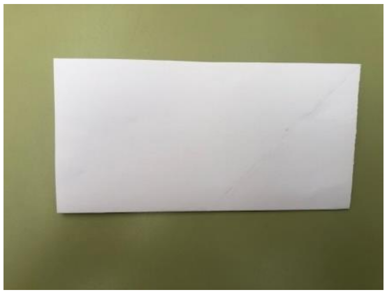
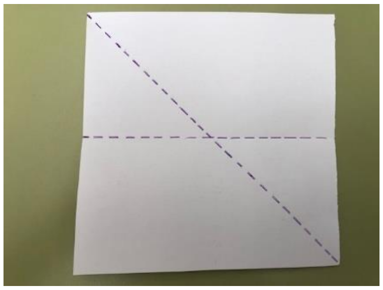
- Representación fracción $\frac{1}{3}$:

1. Se parte de una hoja cuadrada. Se traza una de sus diagonales juntando dos vértices opuestos.

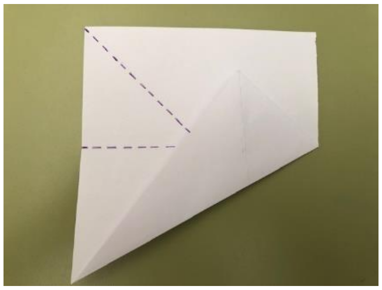
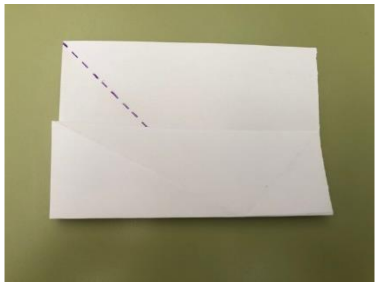
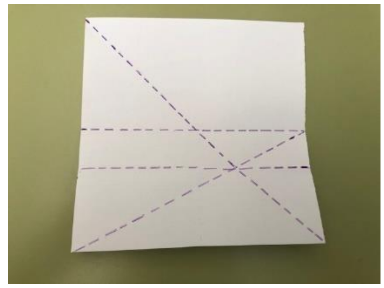
(Fuente: Elaboración propia)

2. Se divide el cuadrado en dos partes juntando dos lados.

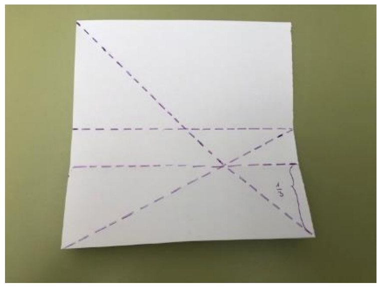
(Fuente: Elaboración propia)

3. Se realiza un pliegue pasando por la mitad de un lado y por un vértice.
4. Se traza la paralela a uno de los lados que pase por la intersección del pliegue anterior con la diagonal.

(Fuente: Elaboración propia)

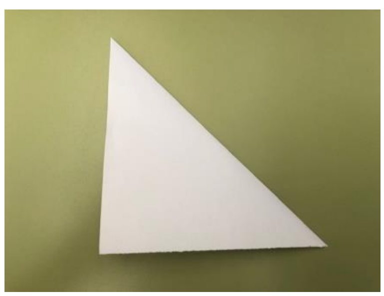
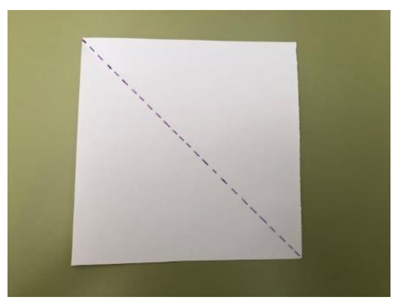
5. Esa distancia es $\frac{1}{3}$.



(Fuente: Elaboración propia)

- Representación fracción $\frac{1}{5}$:

1. Se parte de una hoja cuadrada. Se traza una de sus diagonales juntando dos vértices opuestos.

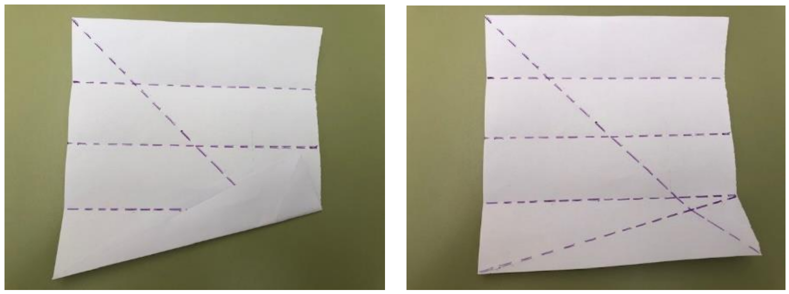
 

(Fuente: Elaboración propia)

2. Se divide el cuadrado en cuatro partes. Se realiza un pliegue a la mitad juntando dos lados. Se realizan otros dos pliegues llevando los dos lados al pliegue central.

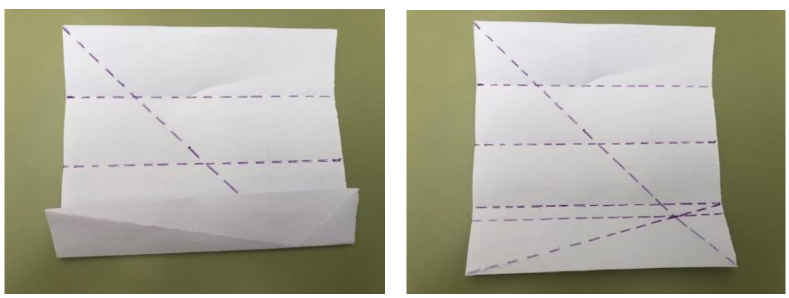
(Fuente: Elaboración propia)

3. Se realiza un pliegue pasando por un cuarto de un lado y por un vértice.



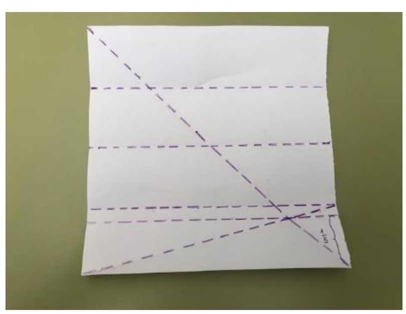
(Fuente: Elaboración propia)

4. Se traza la paralela a uno de los lados que pase por la intersección del pliegue anterior con la diagonal.



(Fuente: Elaboración propia)

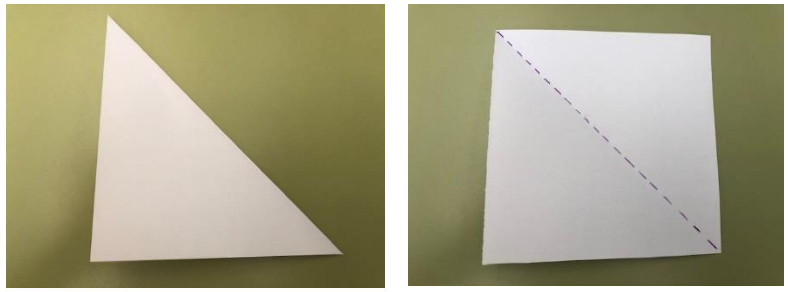
5. Esa distancia es $\frac{1}{5}$.



(Fuente: Elaboración propia)

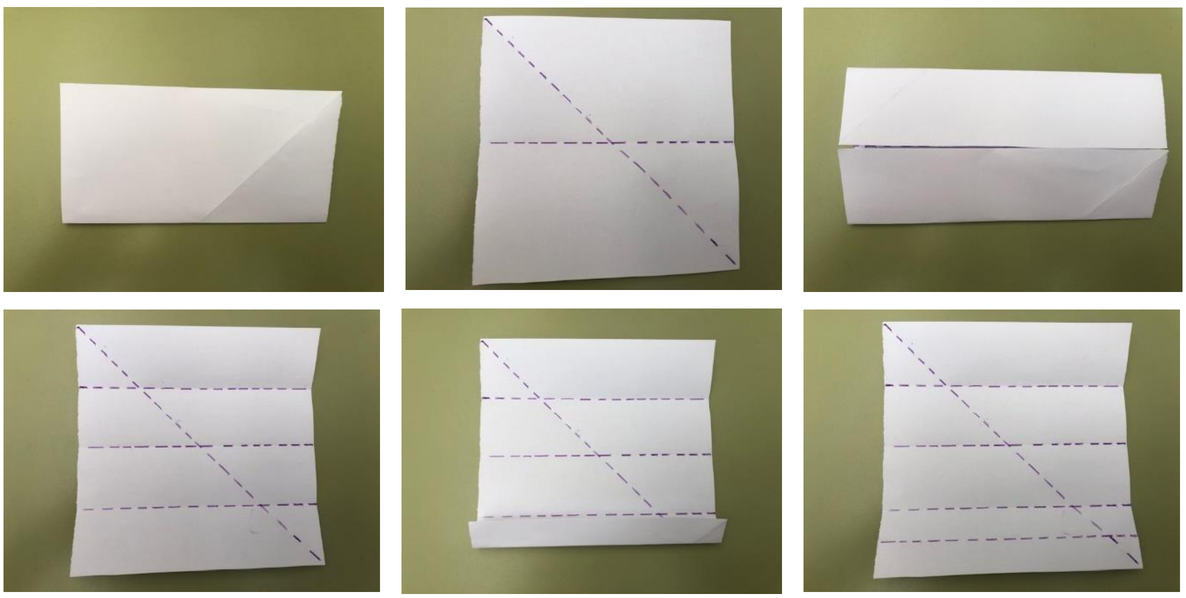
- Representación fracción $\frac{1}{9}$:

1. Se parte de una hoja cuadrada. Se traza una de sus diagonales juntando dos vértices opuestos.



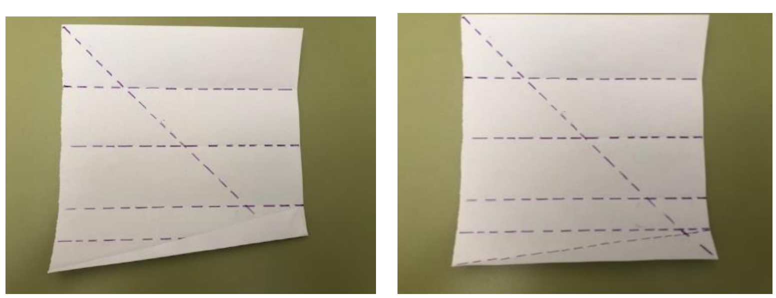
(Fuente: Elaboración propia))

2. Se divide el cuadrado en cuatro partes como en la construcción de $\frac{1}{5}$ y el cuarto inferior se divide a la mitad para obtener la octava parte.



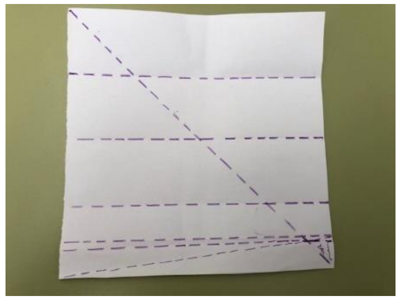
(Fuente: Elaboración propia)

3. Se realiza un pliegue pasando por la octava parte de un lado y por un vértice.



(Fuente: Elaboración propia)

4. Se traza la paralela a uno de los lados que pase por la intersección del pliegue anterior con la diagonal.
5. Esa distancia es $\frac{1}{9}$.

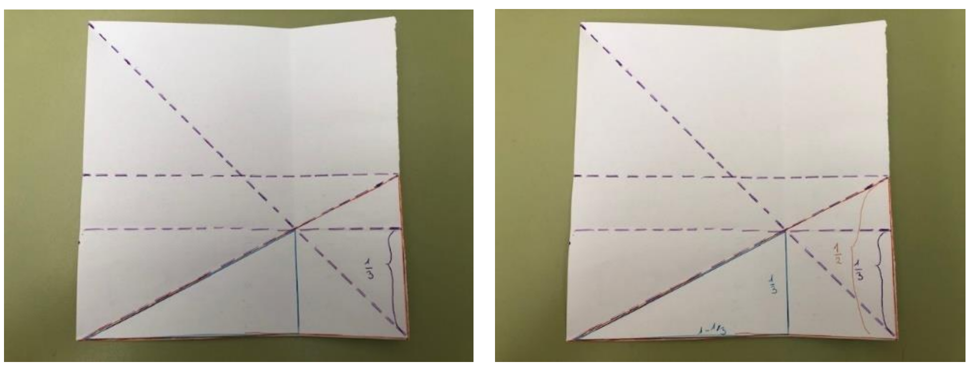


(Fuente: Elaboración propia)

- Aplicación Teorema de Tales:

En las construcciones anteriores que representan las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{9}$ se aplica el Teorema de Tales. A continuación, se demuestra la construcción para el caso de $\frac{1}{3}$.

Comenzamos suponiendo que la hoja cuadrada tiene lados de dimensión 1. Se consideran dos triángulos rectángulos. En primero de ellos (naranja) tiene catetos de dimensiones 1 y $\frac{1}{2}$. El segundo triángulo (azul) tiene un cateto de dimensión x y el otro de dimensión $1-x$. Los triángulos son semejantes al tener los mismos ángulos. Aplicando el Teorema de Tales se tiene que $\frac{1/2}{x} = \frac{1}{1-x}$. Luego $x = \frac{1}{3}$.



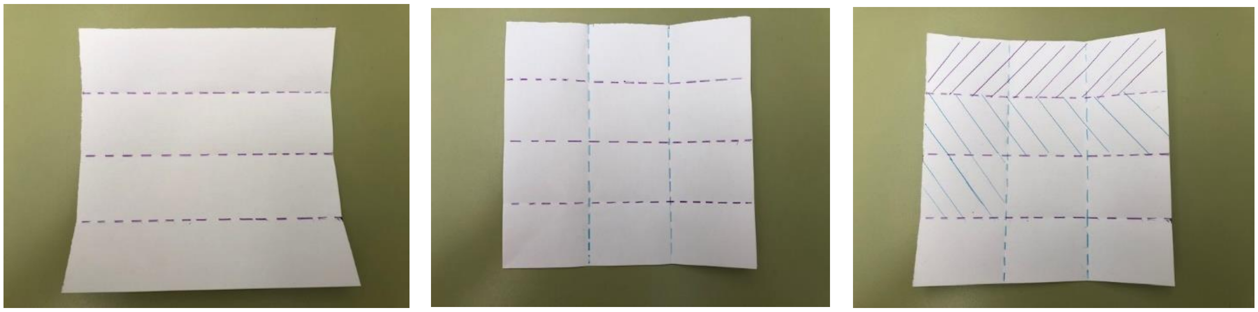
(Fuente: Elaboración propia)

- Suma y resta de fracciones propias:

1. Se parte de una o dos hojas cuadradas. Se divide la hoja con pliegues horizontales según la primera fracción de la operación.
2. Se divide la hoja con pliegues verticales la segunda fracción de la operación.
3. Se representan con los rectángulos generados las dos fracciones de la operación en función de la división de la hoja.
4. La suma será la unión de los rectángulos que representan las dos fracciones.
5. La resta será la diferencia de los rectángulos que representan las dos fracciones.

Con los pasos 1 y 2 se divide la hoja en el producto de los denominadores de las fracciones. Con el paso 3 se representan las fracciones equivalentes cuyo denominador es el producto de los denominadores iniciales. Por último, si estamos en el caso de la suma, con el paso 4 se suman los numeradores, y en la resta, con el paso 5 se restan los numeradores.

Ejemplo para sumar o restar $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$:



(Fuente: Elaboración propia)

$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$ (Se suman los cuadrados morados y azules)

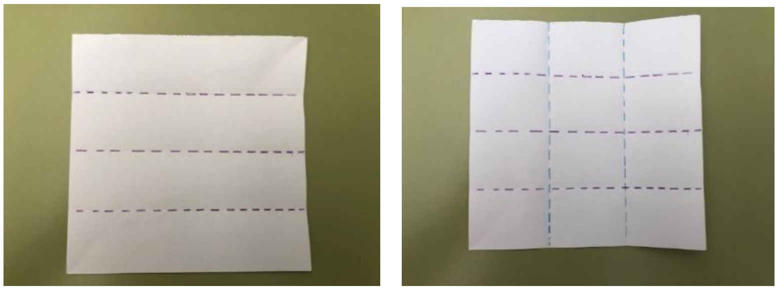
$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ (Se restan a los cuadrados azules los morados)

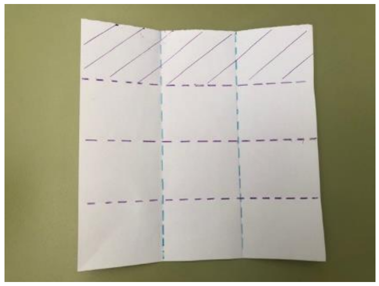
- Multiplicación y división de fracciones propias:

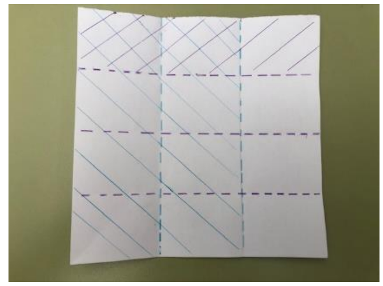
1. Se parte de una hoja cuadrada. Se representa con pliegues horizontales la primera fracción de la operación.
2. Se representa con pliegues verticales la segunda fracción de la operación.
3. El área de intersección de las dos fracciones en el resultado de la multiplicación.
4. Para dividir se multiplica por la fracción inversa.

Con los pasos 1 y 2 se representan las dos fracciones y se divide la hoja en el producto de los denominadores. La intersección de las dos fracciones en el paso 4 representa el producto de los dos numeradores.

Ejemplo para multiplicar $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{3}$:







(Fuente: Elaboración propia)

$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ (Se suman los cuadrados que son azules y morados)

$\frac{1}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

3.4.5. Actividad 5: Diseño de telas

Objetivos:

- Adquirir habilidades de trabajo en grupo.
- Comprobar conjeturas.
- Comprobar las soluciones mediante el plegado de papel.
- Descomponer un problema en partes más simples.
- Deducir el área de un polígono regular de n lados.
- Deducir la suma de ángulos interiores de polígonos regulares.
- Participar activamente en el trabajo por grupos.
- Respetar las diferentes opiniones.

Contenidos:

- Elementos de los polígonos.
- Construcción de polígonos regulares.
- Área de polígonos regulares.
- Suma de ángulos interiores de polígonos regulares.

Metodología:

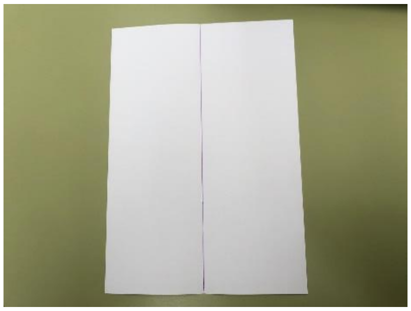
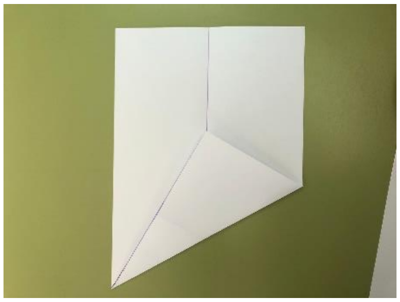
En esta actividad los alumnos construirán los polígonos necesarios para diseñar las telas del vestido. La metodología principal en esta actividad es la técnica puzle. Esta consiste en agrupar a los alumnos en equipos de 5 personas. Cada uno de ellos será el encargado de realizar la construcción de uno de los polígonos. Para realizarlo se agruparán a los alumnos con el mismo polígono asignado y trabajarán de forma cooperativa para construirlo. Una vez terminada esta primera fase los alumnos regresarán a los grupos iniciales. En ellos, los alumnos tendrán que explicar a sus compañeros la construcción de su polígono para que el resto sean también capaces de construirlo. De esta forma todos los integrantes del grupo conocerán todas las construcciones y serán capaces de realizarlas.

El profesor les guiará en los problemas propuestos con alguna pista, pero serán los alumnos los que prueben e investiguen con el papel las posibles soluciones. El objetivo es que ellos mismos construyan los polígonos.

<u>Procedimiento con papiroflexia:</u>

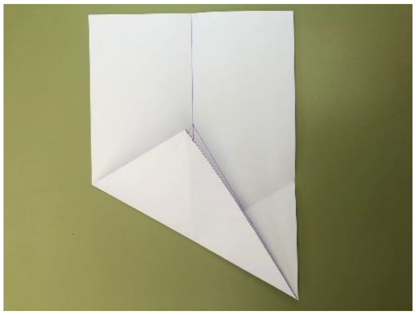
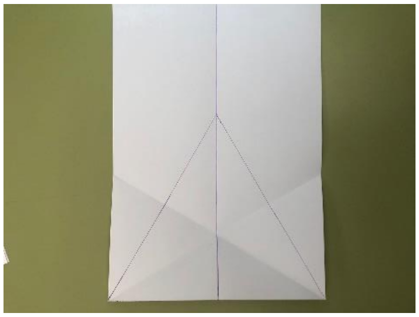
- Construcción de triángulo equilátero:

1. Se dobla a la mitad la hoja por el lado menor.
2. Se lleva uno de los vértices de la hoja al primer doblez de forma el doblez que se construya pase por el otro vértice.

(Fuente: Elaboración propia))

3. Se realiza el paso 2 con el otro vértice.

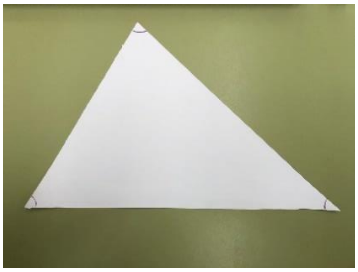
(Fuente: Elaboración propia)

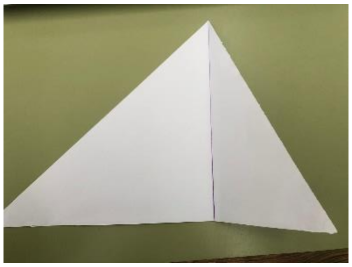
La justificación de que la construcción genera un triángulo equilátero es la siguiente. Partiendo de un lado conocido (borde inferior de la hoja) ya se tienen dos de los vértices. Para generar el tercer vértice se traslada la distancia del lado desde los dos vértices hasta la mediatriz del lado (pasos 2 y 3). De esta manera los lados tienen la misma longitud y, por tanto, el triángulo debe ser equilátero.

Observación: En esta construcción, al igual que en la de la actividad 1, el paso dos no cumple con ninguno de los Axiomas de Huzita-Hatori.

- Demostración de la suma de los ángulos interiores de un triángulo acutángulo:

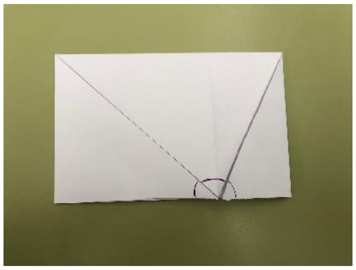
1. Se construye un triángulo. Se corta el papel sobrante para apreciar mejor la demostración y se marcan los ángulos del triángulo.
2. Se da la vuelta al triángulo. Se realiza un doblez por la altura de uno de sus lados.





(Fuente: Elaboración propia)

3. Se llevan los vértices del triángulo al punto donde interseca la altura con un lado.

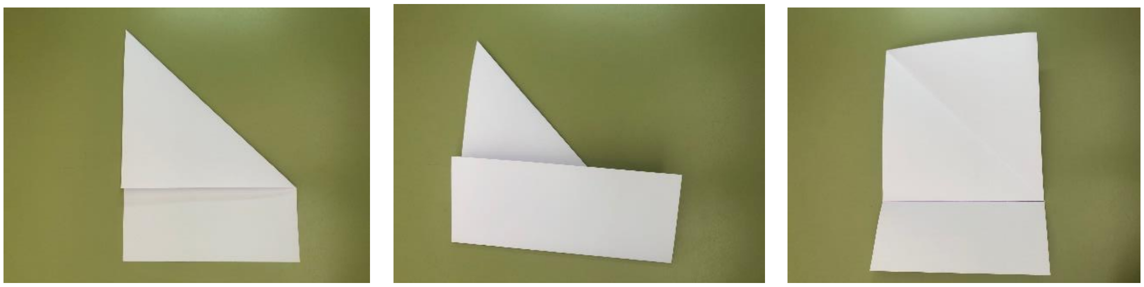


(Fuente: Elaboración propia)

Esta construcción aparte de demostrar la suma de los ángulos interiores de un triángulo demuestra la relación entre el área de un triángulo y de un cuadrado.

- Construcción de cuadrado con un DIN-A4:

1. Se lleva uno de los lados más pequeños de la hoja a uno de los lados de tamaño mayor. De esta forma el doblez que se produzca será una diagonal del cuadrado.
2. Se realiza un doblez para marcar un lado del cuadrado.

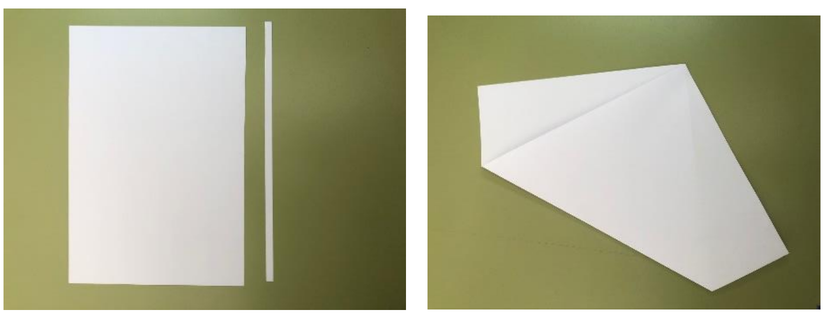


(Fuente: Elaboración propia)

La justificación de que la construcción genera un cuadrado es la siguiente: Al partir de un folio ya se tienen cuatro ángulos rectos, solo falta que las distancias de los lados midan lo mismo. Con el paso 1 se traslada la distancia de uno de los lados a otro y se genera la diagonal del cuadrado. Por lo que ya se conocen los vértices del cuadrado. Y con el paso 2 se genera el lado que faltaba.

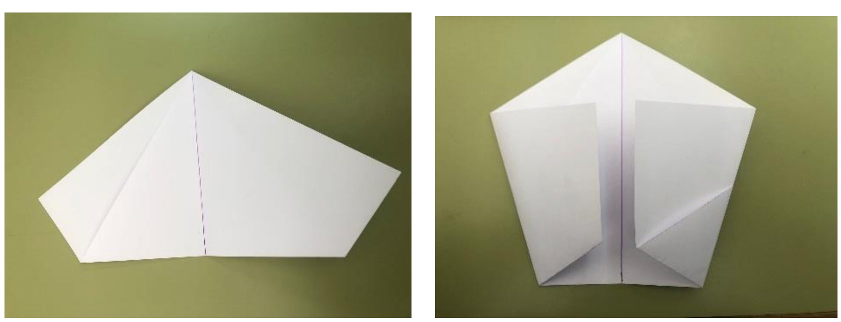
- Construcción de pentágono con un DIN-A4:

1. Se recorta una tira de 8 mm del lado mayor de la hoja para tener las proporciones adecuadas.
2. Se realiza un doblez uniendo dos vértices opuestos del rectángulo.



(Fuente: Elaboración propia)

3. Se gira el papel y de realiza un doblez por el eje de simetría.
4. Se doblan los lados menores para hacerlos coincidir con el eje de simetría.



(Fuente: Elaboración propia)

Para que el pentágono construido sea regular sus ángulos interiores deben ser de 108º. Veámoslo:

Dado que un folio DIN-A4 tiene proporción $\sqrt{2} = \frac{297\ mm}{210\ mm}$, al recortar $8mm$ de la hoja (paso 1) se tiene una proporción $\frac{289\ mm}{210\ mm}$.

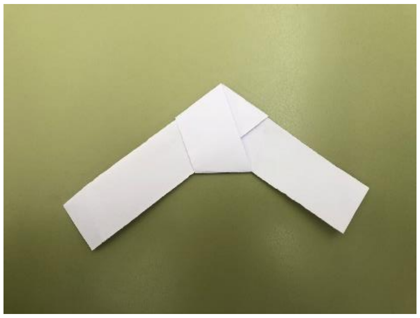
En el paso 2, se genera uno de los ángulos interiores del pentágono (vértice superior derecho). Este es 2α, siendo α el ángulo que forma el lado menor de la hoja con la diagonal de la hoja.

Por tanto, $tan\ \alpha = \frac{289}{210}$ y $\alpha \approx 54$º.

Finalmente, se tiene que el ángulo interior es igual a $2\alpha \approx 108$º. (Realmente habría que recortar algo más de papel para conseguir la regularidad, $tan\ 54$º$= \frac{x}{210} \Longrightarrow x = 210 \cdot tan\ 54$º$\approx 289{,}04\ mm$).

- Construcción de pentágono con una tira de papel:

1. Se realiza un nudo con la tira y aplasta cuidadosamente
2. Se doblan las tiras sobrantes.




(Fuente: Elaboración propia)

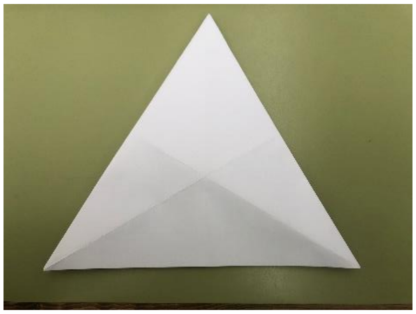
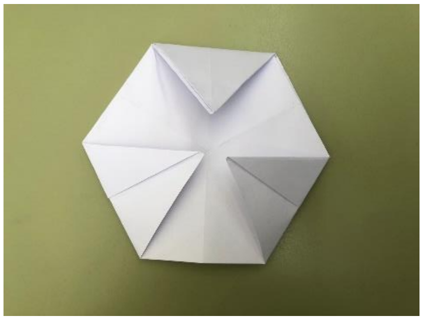
Al desdoblarse la tira se obtiene un paralelogramo formado por cuatro trapecios isósceles congruentes. Los trapecios tienen tres de sus lados con las mismas dimensiones y, además, estos forman parte de los lados del pentágono. Luego el pentágono es equilátero. También es equiángulo ya que los ángulos interiores del pentágono coinciden con el ángulo que forma la base menor de los trapecios con uno de sus lados adyacentes.

Observación: En esta construcción no cumple con ninguno de los Axiomas de Huzita-Hatori pero es una sencilla forma de obtener un pentágono regular.

- Construcción de un hexágono con un DIN-A4:

1. Se construye un triángulo equilátero.

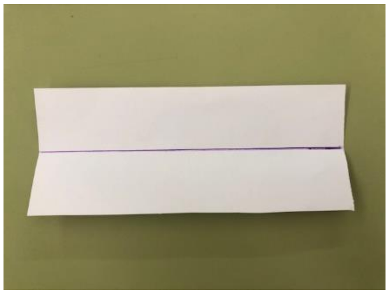
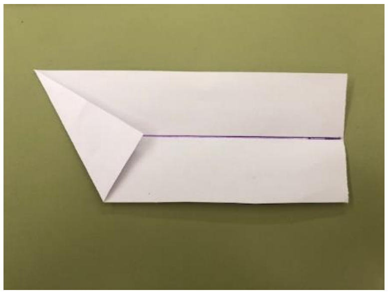
2. Se realizan dos dobleces por las alturas el triángulo.
3. Se llevan los tres vértices a la intersección de esas alturas.

(Fuente: Elaboración propia))

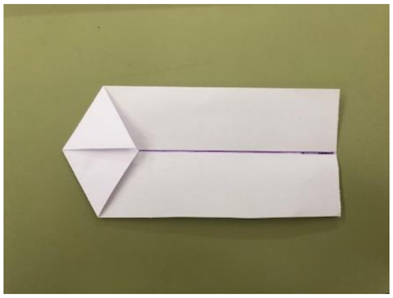
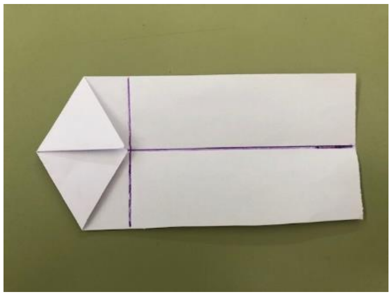
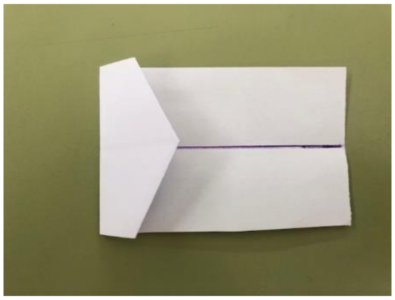
- Construcción de hexágono con una tira de papel:

1. Se dobla longitudinalmente la tira.
2. Se desplaza un vértice hasta el doblez primero.

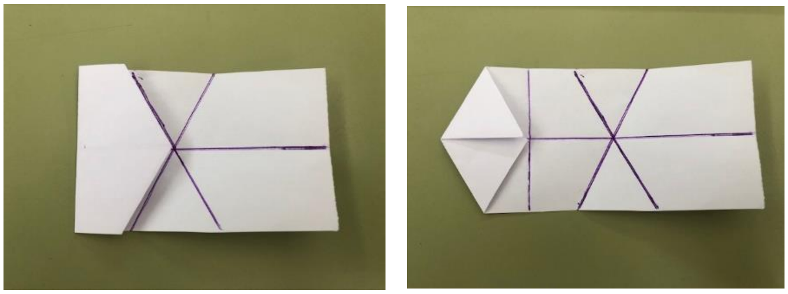
(Fuente: Elaboración propia)

3. Se desplaza el otro vértice hasta el punto donde se encontraba el primer vértice.
4. Se dobla por el punto de la intersección de los vértices perpendicular a la base de la tira.

(Fuente: Elaboración propia)

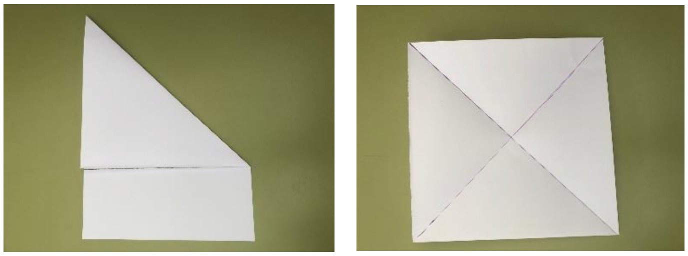
5. Se realizan los dobleces para marcar el hexágono.



(Fuente: Elaboración propia)

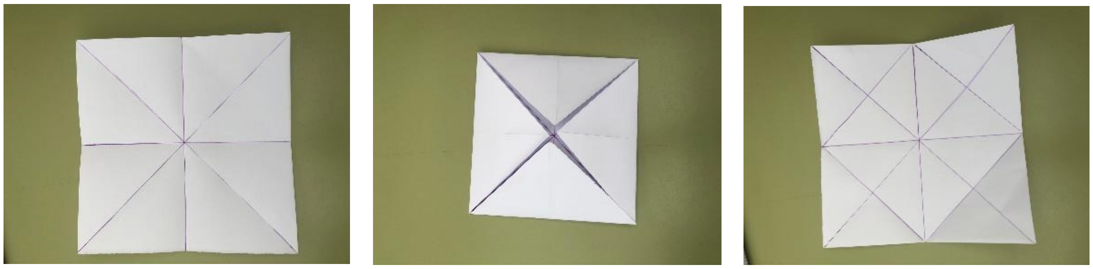
- Construcción de un octógono con un DIN-A4:

1. Se construye un cuadrado.
2. Se realizan los dobleces por las dos diagonales del cuadrado.



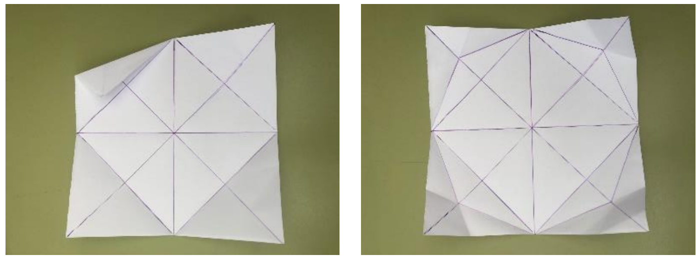
(Fuente: Elaboración propia)

3. Se realizan dos dobleces para conseguir los puntos medios de los lados del cuadrado.
4. Se doblan los vértices al punto medio del cuadrado y se construye otro cuadrado con los dobleces.



(Fuente: Elaboración propia)

5. Se hace la bisección del ángulo de 45º que forman los dos lados de los dos cuadrados en el vértice del cuadrado menor.
6. Se marcan los dobleces.



(Fuente: Elaboración propia))

3.4.6. Actividad 6: Mercado

<u>Objetivos:</u>

- Deducir los posibles polígonos regulares que teselan el plano.
- Relacionar las Matemáticas con el Arte y el diseño.
- Relacionar las Matemáticas con la Economía y el mercado.
- Comprobar conjeturas sencillas con material manipulativo.
- Desarrollar estrategias de cálculo.
- Razonar la validez de soluciones posibles de un problema.
- Participar activamente en el trabajo por grupos.
- Respetar las diferentes opiniones.

<u>Contenidos:</u>

- Mosaicos.
- Porcentajes.
- Números decimales.
- Pensamiento computacional.
- Teorema de los colores.

<u>Metodología</u>:

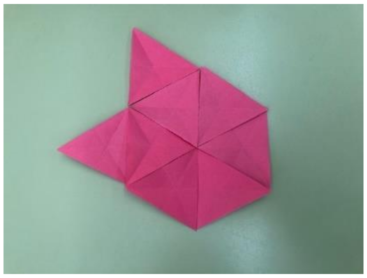
En esta actividad se agruparán a los alumnos de la misma forma que en la actividad anterior. A través de un aprendizaje cooperativo los estudiantes diseñaran los mosaicos posibles con los polígonos construidos anteriormente. Comenzarán comprobando experimentalmente con el papel y se pasará a demostrar las combinaciones posibles que existen con esos polígonos.

En segundo lugar, los alumnos investigarán sobre los posibles colores de diseño del teselado y mediante la resolución de problemas calcularán el mínimo de colores necesarios en el diseño con la condición de que no se encuentren adyacentes dos colores iguales. La resolución se realizará a partir de experimentar con las posibles soluciones.

Finalmente, mediante resolución de problemas se calculará el precio de esos diseños en función de las posibles rebajas u ofertas. Se delimitará $1m^2$ en el suelo del aula para que los grupos determinen el tamaño de los polígonos de su teselado y el número de estos.

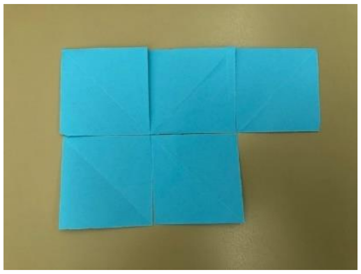
Procedimiento con papiroflexia:

- Teselado triángulos:



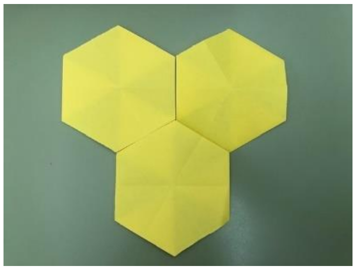
(Fuente: Elaboración propia)

- Teselado cuadrados:



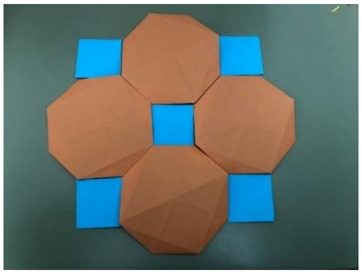
(Fuente: Elaboración propia)

- Teselado hexágonos:



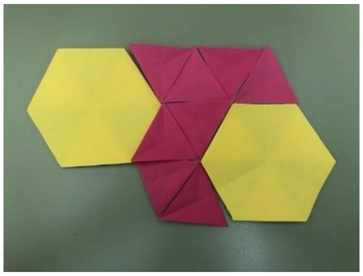
(Fuente: Elaboración propia)

- Teselado octógonos y cuadrados (4,8,8):



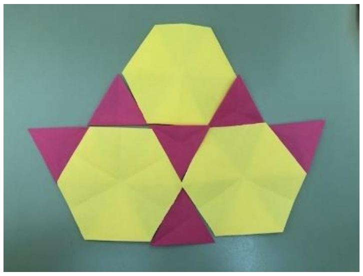
(Fuente: Elaboración propia)

- Teselado de hexágonos y triángulos (3,3,3,3,6):



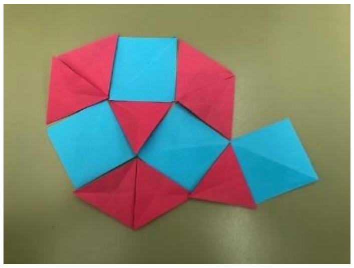
(Fuente: Elaboración propia)

- Teselado de hexágonos y triángulos (3,6,3,6):



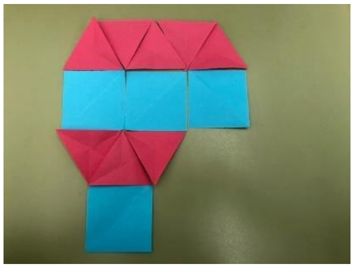
(Fuente: Elaboración propia)

- Teselado de triángulos y cuadrados (3,3,4,3,4):



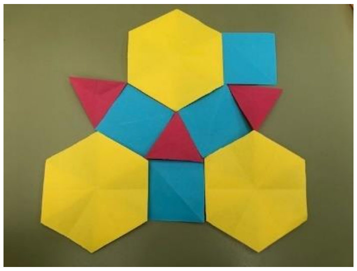
(Fuente: Elaboración propia))

- Teselado de triángulos y cuadrados (3,3,3,4,4):



(Fuente: Elaboración propia)

- Teselado de triángulos, cuadrados y hexágonos (3,4,6,4):



(Fuente: Elaboración propia)

A continuación, se muestra la demostración de los posibles polígonos regulares que teselan el plano:

Sea r el número de polígonos que hay alrededor del vértice del mosaico y $n_i, 1 \leq i \leq r$ el número de lados de cada polígono.

Para teselar el plano y que no se superpongan los polígonos, los ángulos interiores de los polígonos en el vértice tienen que sumar 360º.

Como el ángulo interior de un polígono de n_i lados es 180º$\left(\frac{n_i-2}{n_i}\right)$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{r} 180\left(\frac{n_i-2}{n_i}\right) = 360 \iff \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i-2}{n_i} = 2 \iff r-2 = 2\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} \iff \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} = \frac{r-2}{2}$$

Además, $3 \leq r \leq 6$. El número mínimo de polígonos que puede haber en un vértice es 3 ya que no existe ningún polígono con ángulo interior 180º$=\frac{360}{2}$ y $\frac{360}{3} = 120$º es la medida del ángulo interior del hexágono. El número máximo de polígonos que puede haber en un vértice es 6 ya que el polígono con menor ángulo interior es el triángulo con 60º y $\frac{360}{60} = 6$.

Si el mosaico es regular los únicos polígonos que satisfacen la igualdad son el triángulo, el cuadrado y el hexágono. No es posible teselar el plano con pentágonos regulares.

3.4.7. Actividad 7: Patrones

Objetivos:

- Desarrollar estrategias de cálculo y resolución de problemas.
- Identificar el impacto de la industria textil en el medio ambiente.
- Desarrollar habilidades de optimización.
- Aplicar los conocimientos previos.
- Representar figuras irregulares con papiroflexia.
- Comprobar soluciones mediante material manipulativo.

Contenidos:

- Clasificación de polígonos.
- Clasificación de cuadriláteros.
- Optimización.
- Áreas y perímetro de polígonos irregulares.
- Representación de figuras planas.
- Unidades de medidas.
- Operaciones con números, naturales, enteros y decimales.

Metodología:

La metodología empleada a lo largo de la actividad será la resolución de problemas. Se seguirán los pasos de resolución de problemas descritos por Pólya como en la actividad 2. Esto permitirá ver la evolución de las competencias de los alumnos de técnicas y habilidades de resolución de problemas. La actividad se realizará de forma individual y los alumnos tendrán el libro de texto como material de consulta.

En primer lugar, se realizarán las construcciones de los patrones del vestido (polígonos irregulares) con papiroflexia. El profesor les guiará y les proporcionará alguna pista para las construcciones, pero no les realizará todos los pasos. Cada alumno debe aplicar sus estrategias para llegar al patrón del vestido.

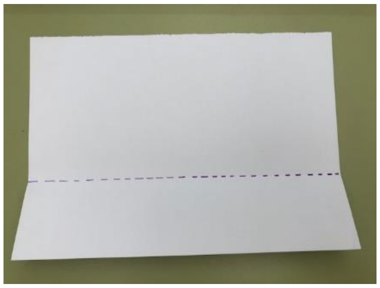
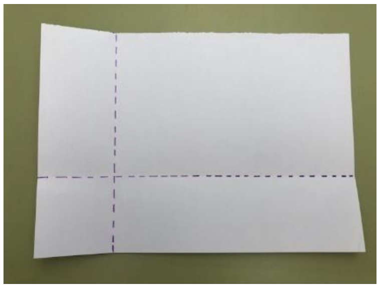
Posteriormente se propone un problema para optimizar el gasto de telas. Con ello, se plantea una reflexión acerca de los residuos textiles, el papel de la industria textil y como afecta al medio ambiente. También se propone como problema conjeturar la figura que necesita mayor área de tela y menor gasto de hilo. Esto se comprobará solo con los polígonos vistos a lo largo de la situación de aprendizaje.

Procedimiento con papiroflexia:

Se realizarán los polígonos implicados en el patrón del vestido que se encuentra en el Anexo 3: Patrón del vestido.

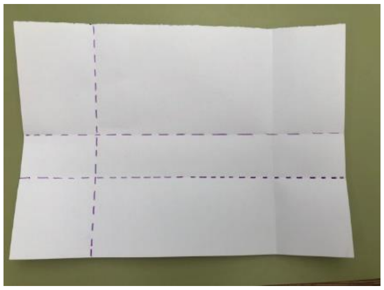
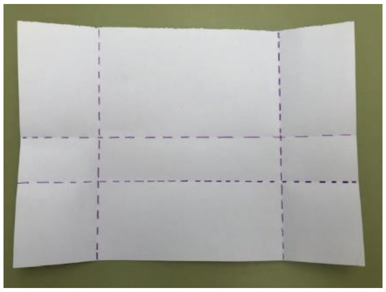
- Construcción 1 (rectángulo):

1. Se comienza con una recta con un pliegue valle.
2. Se realiza la recta perpendicular a la primera recta superponiendo el primer pliegue.

(Fuente: Elaboración propia)

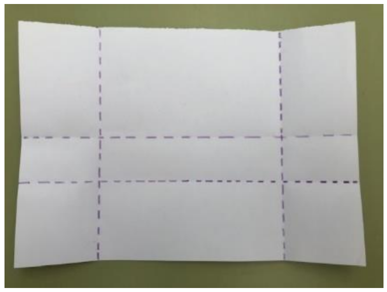
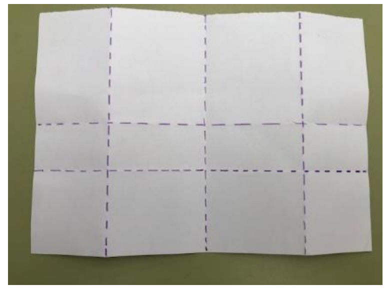
3. Se realiza un pliegue perpendicular al anterior (paralelo al primero) a la distancia requerida.
4. Se realiza un pliegue perpendicular al tercer pliegue a la distancia requerida de largo.

(Fuente: Elaboración propia)

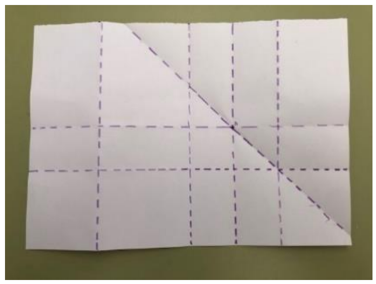
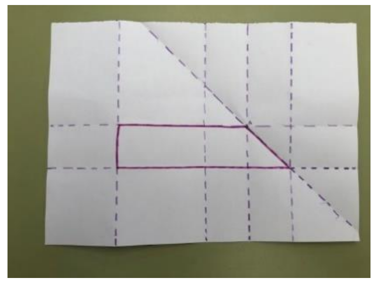
- Construcción 2 (trapecio):

1. Realiza un rectángulo.
2. Se dividen uno de los lados mayores a la mitad superponiendo los lados menores.

(Fuente: Elaboración propia)

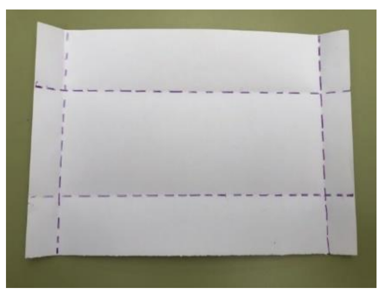
3. Se divide una de esas mitades de nuevo superponiendo los pliegues y se genera el punto A
4. Se realiza un pliegue por el vértice inferior derecho del rectángulo y por el punto A.

(Fuente: Elaboración propia)

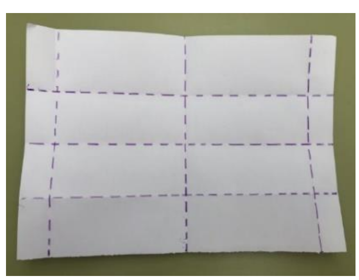
- Construcción 3 (heptágono):

1. Se realiza un rectángulo.



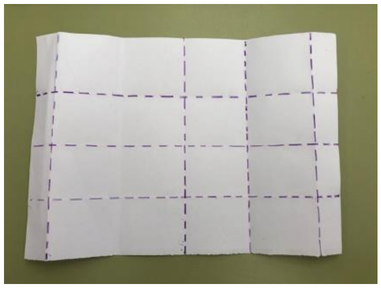
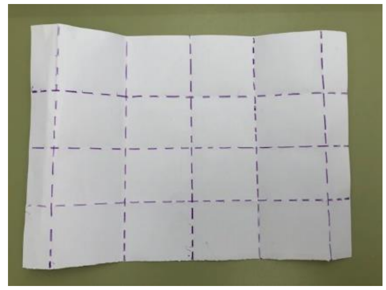
(Fuente: Elaboración propia)

2. Se traza la mediatriz de los lados menores juntando los lados mayores.
3. Se traza la mediatriz de los lados mayores juntando los lados menores.



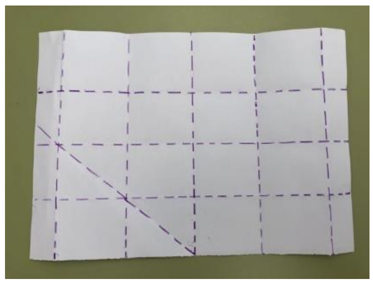
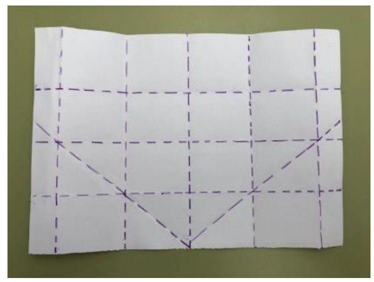
(Fuente: Elaboración propia)

4. Se divide en cuatro los lados mayores del rectángulo llevando los lados menores a la mediatriz de los lados mayores.

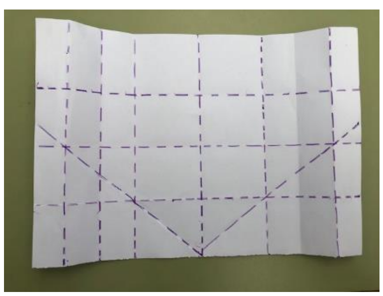
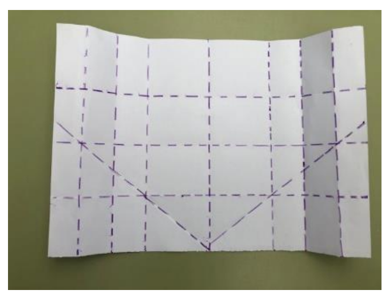
(Fuente: Elaboración propia)

5. Se realiza un pliegue por la mitad de uno de los lados menores y por un cuarto de uno los mayores. Se realiza el pliegue simétrico con el otro lado.

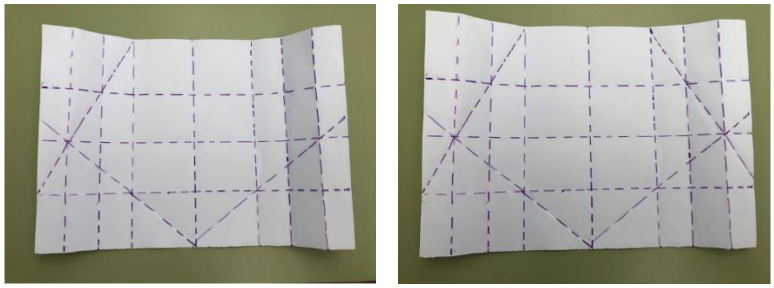
(Fuente: Elaboración propia)

6. Se realizan dos pliegues juntando los lados menores del rectángulo con los pliegues que dividen los lados mayores en cuatro partes.

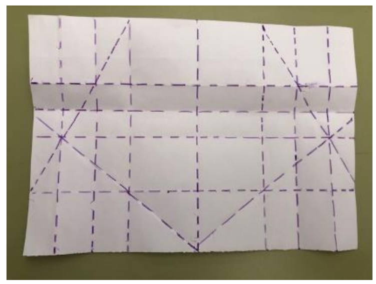
(Fuente: Elaboración propia)

7. Se dobla el papel por el punto medio de uno de los lados menores del rectángulo y por uno de los puntos del lado mayor generado en el paso anterior. Se repiten el pliegue simétrico con el otro lado.



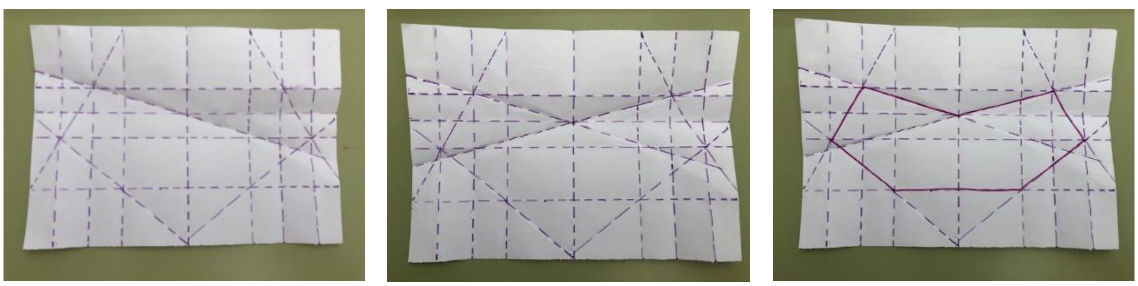
(Fuente: Elaboración propia)

8. Se pliega juntando el lado mayor superior con la mediatriz de los lados menores del rectángulo para generar un punto en la mediatriz de los lados mayores del rectángulo.



(Fuente: Elaboración propia)

9. Se realizan dos pliegues simétricos por el punto generado en el paso anterior.



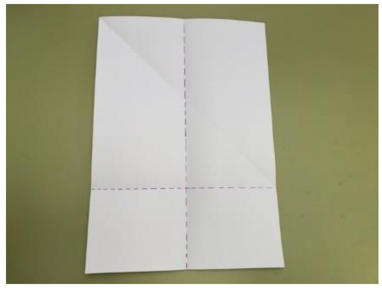
(Fuente: Elaboración propia)

- Construcción 4 (pentágono):

1. Se realiza un cuadrado.

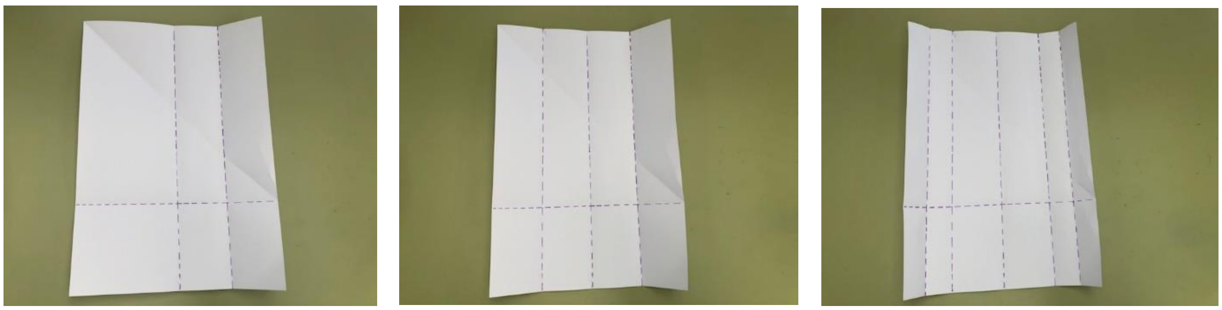
(Fuente: Elaboración propia)

2. Se divide a la mitad realizando la mediatriz de uno de sus lados.



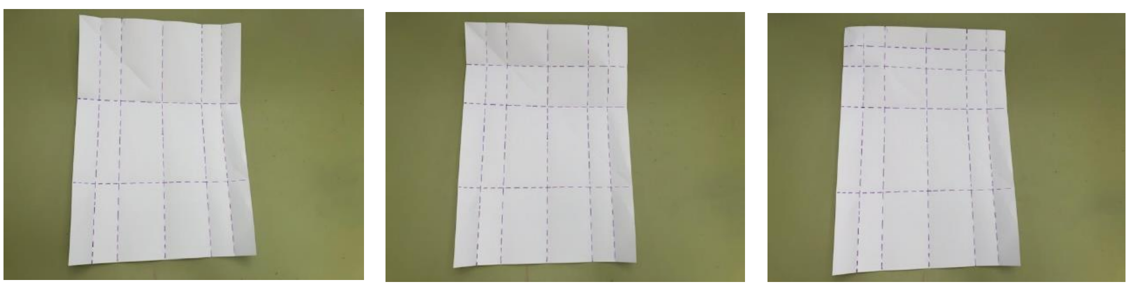
(Fuente: Elaboración propia))

3. Se repite el proceso otras cuatro veces para dividir el lado en ocho partes.



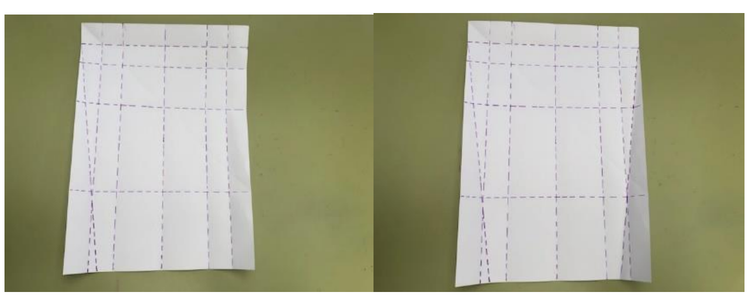
(Fuente: Elaboración propia)

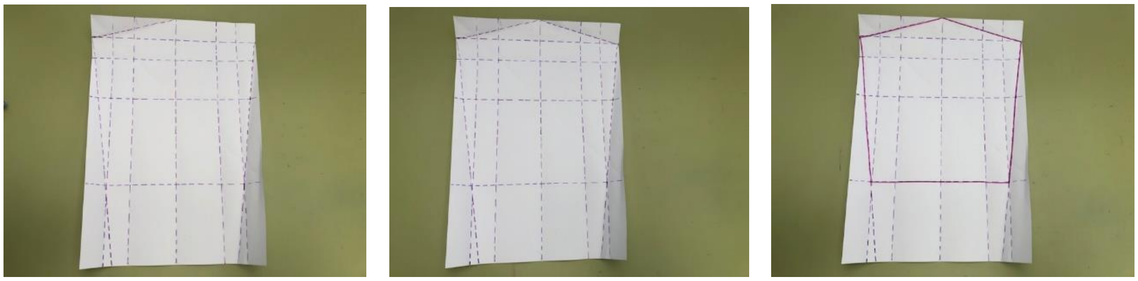
4. Se repite los pasos 2 para los otros lados y el paso 3 solo para la mitad.



(Fuente: Elaboración propia)

5. Se realizan los pliegues para obtener los lados del pentágono.

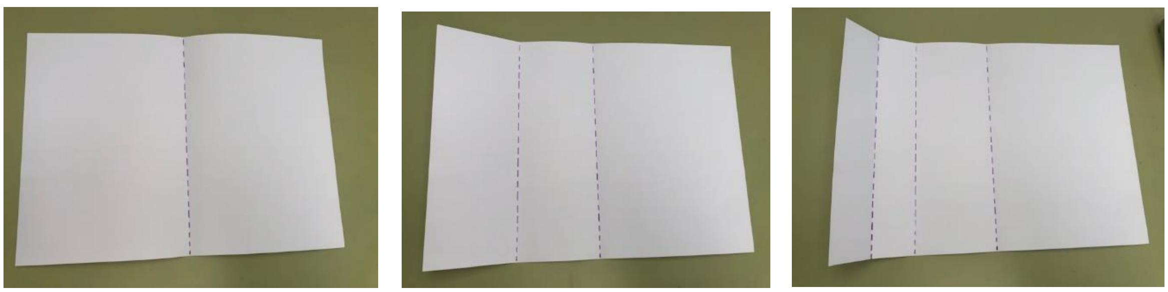




(Fuente: Elaboración propia)

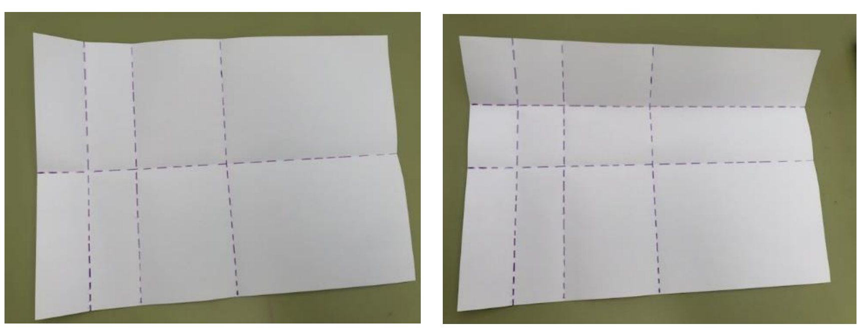
- Construcción 5 (hexágono):

1. Se divide el folio a la mitad por el lado mayor.
2. Se divide el dado izquierdo en dos partes llevando el lado izquierdo al pliegue anterior.
3. Se vuelve a dividir a la mitad de la misma forma.



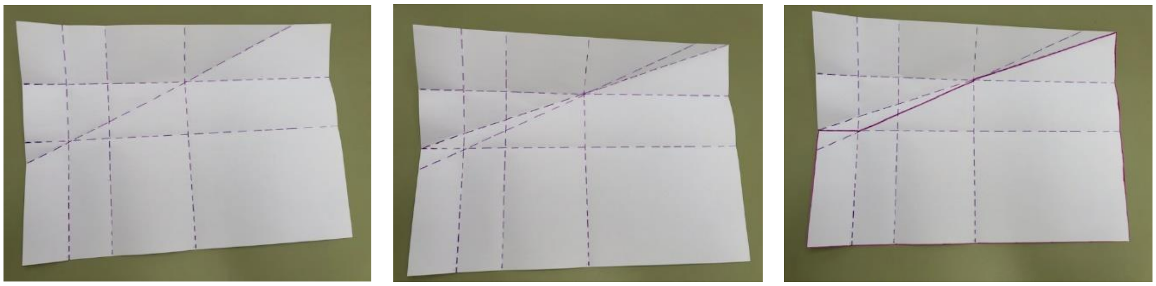
(Fuente: Elaboración propia)

4. Se divide el lado menor a la mitad realizando la mediatriz.
5. De las dos partes en las que queda dividida la hoja con el pliegue anterior, se divide otra ves en dos mediante un pliegue paralelo.



(Fuente: Elaboración propia)

6. Se pliegan los lados del hexágono.



(Fuente: Elaboración propia)

3.4.8. Actividad 8: Entrega del vestido

Objetivos:

- Utilizar la papiroflexia como herramienta para resolver problemas.
- Desarrollar estrategias de resolución de problemas.
- Aplicar los conocimientos previos
- Relacionar los diferentes contenidos matemáticos.
- Utilizar el lenguaje matemático para expresar los procedimientos.

Contenidos:

- Mediatriz y bisectriz.
- Alturas de un triángulo.
- Circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro.

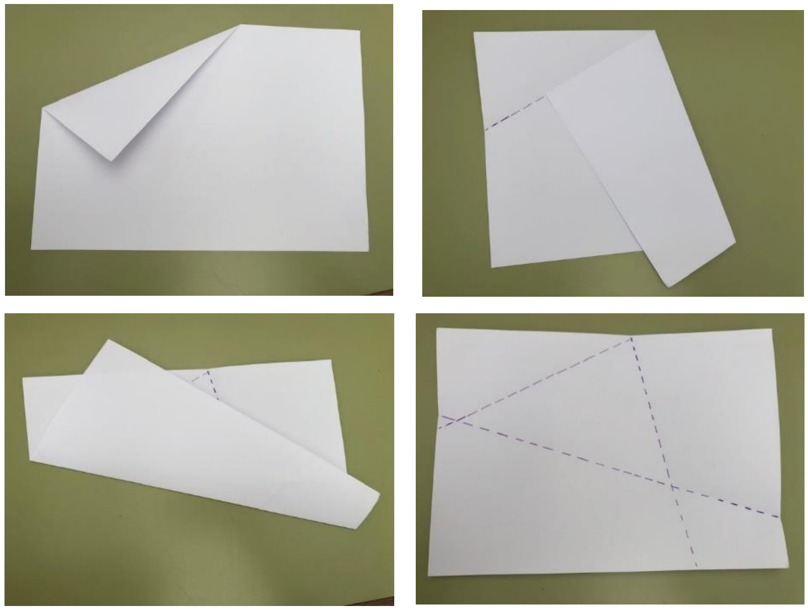
Metodología:

En esta actividad trabajarán de forma individual y se repasarán y ampliarán contenidos sobre elementos de los triángulos. Se les propone cuatro problemas contextualizados por lo que la metodología principal es la resolución de problemas. Los alumnos deberán resolverlos mediante doblado de papel o con ayuda de regla y compás. Para cada uno de los problemas tendrán tres pistas que se proporcionarán de forma progresiva si algún alumno las necesita. Los alumnos deberán plasmar todos los pasos del proceso de resolución de los problemas.

Procedimiento con papiroflexia:

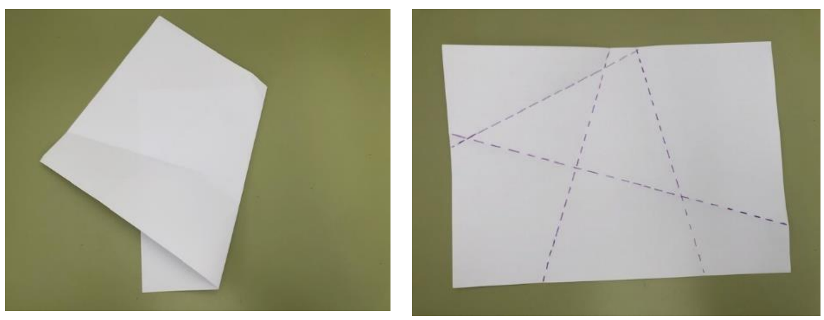
- Circuncentro:

1. Se construye un triángulo acutángulo.



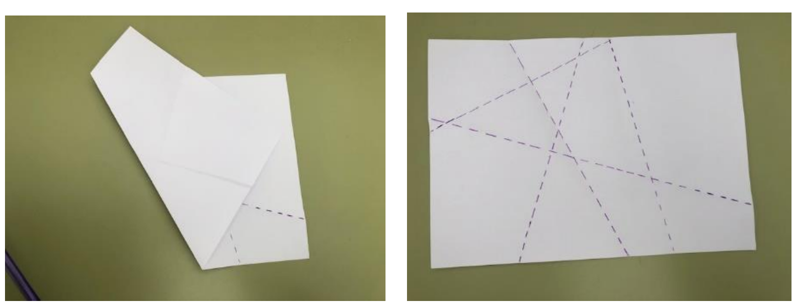
(Fuente: Elaboración propia)

2. Se traza la mediatriz de uno de los lados superponiendo el lado y los vértices.



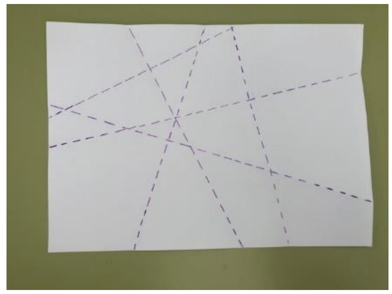
(Fuente: Elaboración propia)

3. Se pliegan las mediatrices de los lados restantes de la misma manera.



(Fuente: Elaboración propia)

4. El punto de intersección de las tres mediatrices es el circuncentro.

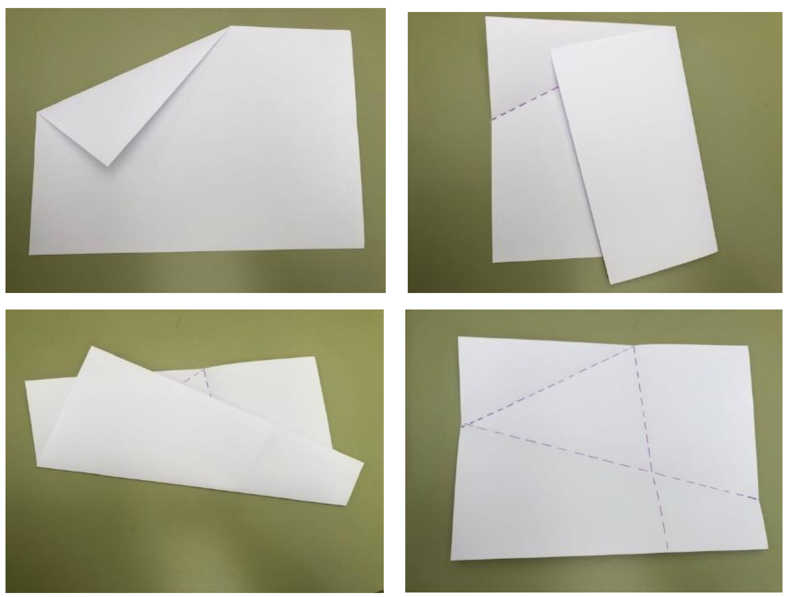


(Fuente: Elaboración propia)

Al trazar las mediatrices de los lados se obtienen los puntos que se encuentran a igual distancia de los vértices de cada lado. Por lo tanto, la intersección de las tres mediatrices será el punto que está a igual distancia de los tres vértices del triángulo. Es decir, el circuncentro.

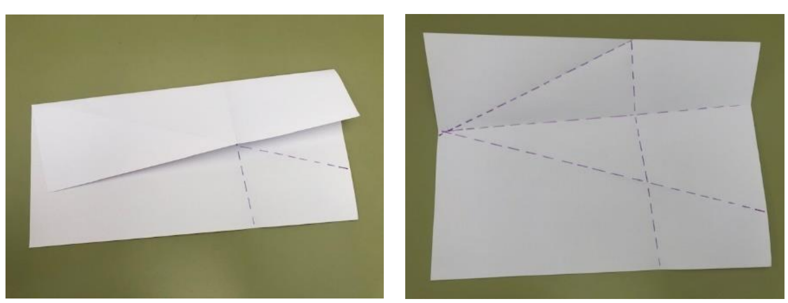
- Incentro:

1. Se construye un triángulo acutángulo.



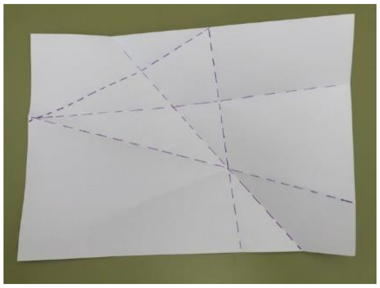
(Fuente: Elaboración propia)

2. Se traza la bisectriz de uno de los ángulos superponiendo los lados.



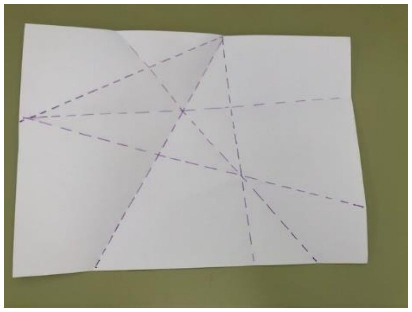
(Fuente: Elaboración propia)

3. Se pliegan las bisectrices de los ángulos restantes de la misma manera.

(Fuente: Elaboración propia)

4. El punto de intersección de las tres bisectrices es el incentro.

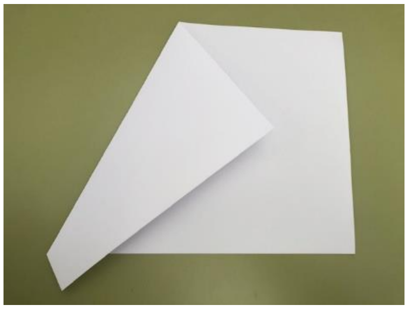
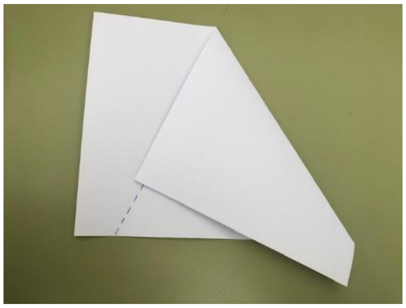
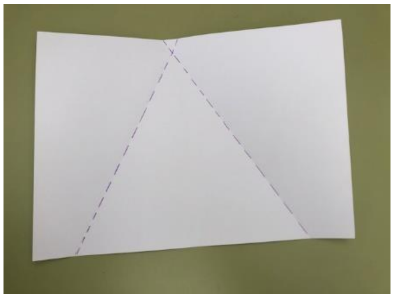


(Fuente: Elaboración propia)

Al superponer dos de los lados del triángulo para trazar la bisectriz se obtienen los puntos que se encuentran a igual distancia de los lados. Luego la intersección de las tres bisectrices es el punto que se encuentra a la misma distancia de los tres lados.

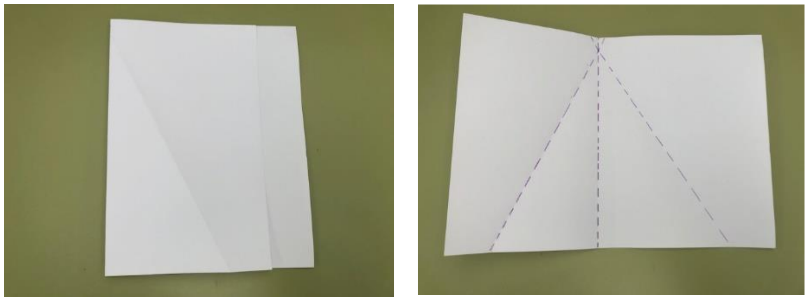
- Ortocentro:

1. Se construye un triángulo acutángulo.

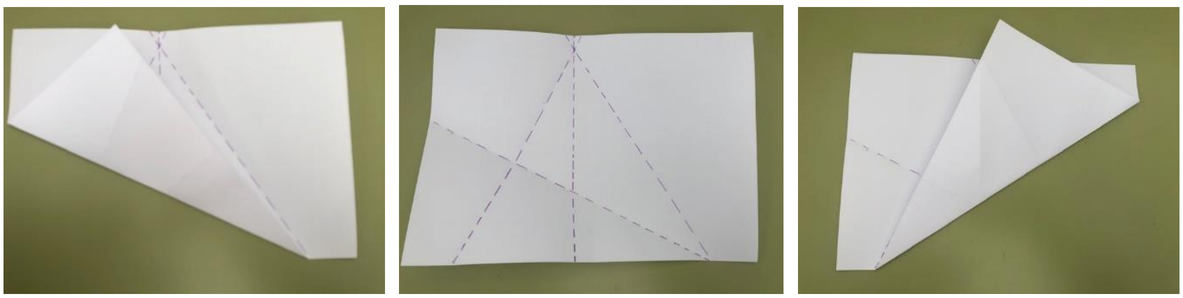
(Fuente: Elaboración propia)

2. Se traza la recta perpendicular a uno de los lados pasando por el vértice opuesto (altura). Se hacen coincidir uno de los lado del triángulo sobre sí mismo y se hace que pase por el vértice.



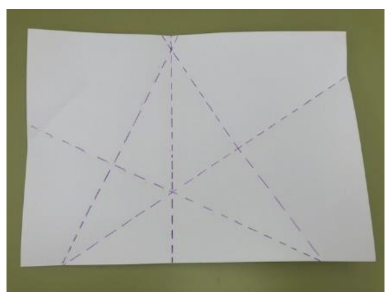
(Fuente: Elaboración propia)

3. Se pliegan las otras dos alturas del triángulo.



(Fuente: Elaboración propia)

4. El punto de intersección de las tres alturas es el ortocentro.

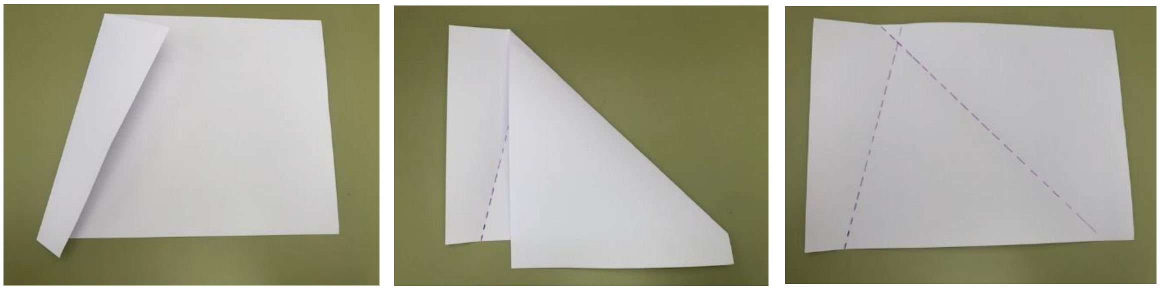


(Fuente: Elaboración propia)

Al trazar las alturas de los tres lados se obtienen rectas perpendiculares a cada lado y que pasan por el vértice opuesto. La intersección de estas es el ortocentro. Tiene la característica de que cualquier recta que pase por ese punto y por uno de los vértices del triángulo es perpendicular a uno de los lados.

- Baricentro:

1. Se construye un triángulo acutángulo.

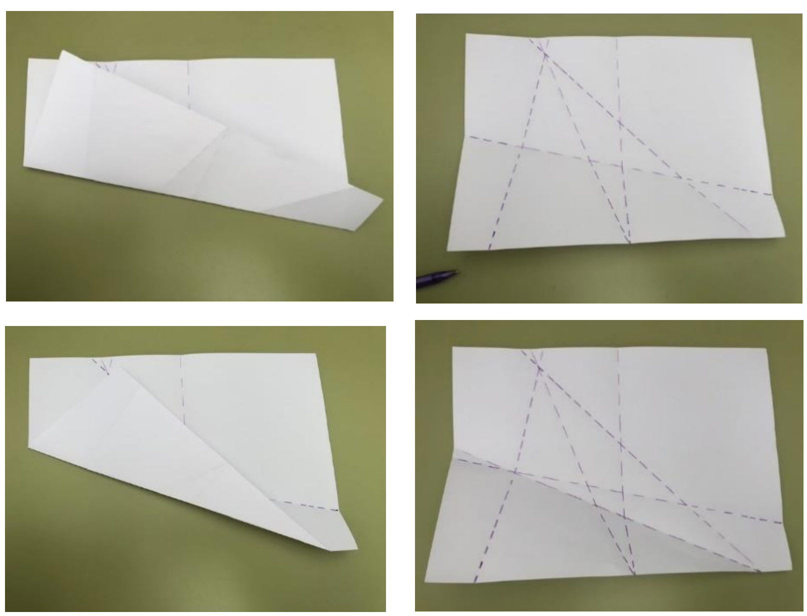


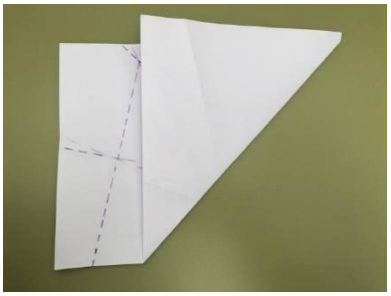
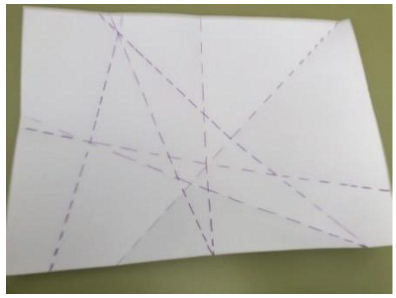
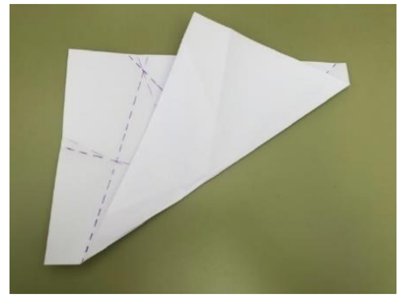
(Fuente: Elaboración propia))

2. Se traza la mediatriz de uno de los lados y se realiza un pliegue que una el vértice opuesto con la intersección del pliegue anterior con el lado (punto medio).

(Fuente: Elaboración propia)

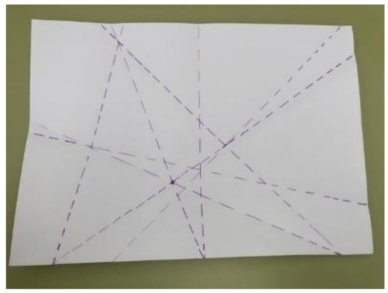
3. Se repiten el paso 2 para los otros dos lados para construir sus medianas.
4.



(Fuente: Elaboración propia)

5. La intersección de las tres medianas es el baricentro.



(Fuente: Elaboración propia))

En esta construcción, para obtener las medianas, primero es necesario calcular el punto medio de los lados. Este punto se halla trazando las mediatrices de los lados, ya que la intersección de estas con los lados dará un punto a igual distancia de los vértices de cada lado. Uniendo los puntos medios con los vértices se obtienen las medianas y la intersección de estas es el baricentro. Este punto se caracteriza por ser el centro de gravedad del triángulo.

3.5. Atención a las diferencias individuales

La situación de aprendizaje está pensada para abarcar los diferentes tipos de aprendizaje que pueda demandar el alumnado siguiendo los principios DUA (Diseño Universal del Aprendizaje). Una de las primeras formas de atender a la diversidad es la riqueza de los materiales. En la mayoría de actividades se recurre al uso de la papiroflexia, pero estas se pueden realizar de igual forma con regla y compás o con aplicaciones informáticas como GeoGebra.

Las construcciones con papiroflexia requieren un mínimo de destreza en la psicomotricidad fina. Pueden darse dificultades a la hora de manipular el papel y realizar los pliegues. Para evitarlo se pueden utilizar diferentes herramientas. Para realizar un doblez se puede usar una regla situándola justo por donde quieras que pase el doblez y realizar el pliegue. También se puede sujetar el papel entre varios alumnos para que este no de mueva. Los bolígrafos y rotuladores de colores son también herramientas muy útiles. Repasar los pliegues con estos materiales ayuda a seguir mejor el proceso del plegado del papel. Otro aspecto importante es considerar un tamaño adecuado del papel. Si este es demasiado pequeño los pliegues resultan más imprecisos y complejos de realizar. Si en cambio es demasiado grande, el papel resulta más difícil de manipular.

El portafolio, el material metodológico principal empleado en la situación de aprendizaje, contribuye a atender la diversidad. Los alumnos siguen el aprendizaje cada uno a su ritmo y eso lo plasman en el documento. El docente tiene la información de las dificultades que presenta cada alumno en las actividades y de esta forma puede adaptar las clases mejor en función de esa información.

La versatilidad de las actividades también beneficia a la atención a las diferencias individuales de los estudiantes. Las actividades se pueden adaptar a los diferentes niveles de conocimientos de los alumnos. Por ejemplo, en la actividad 5 del diseño de telas las construcciones de los polígonos no tienen la misma complejidad. Además, la metodología de resolución de problemas, que es la más predominante en la situación de aprendizaje, permite que los alumnos lleguen a la solución de los problemas usando cada uno diferentes estrategias o representaciones del problema.

En las actividades grupales, los equipos se crean de forma heterogénea para favorecer la colaboración y el aprendizaje entre iguales. Esta agrupación impulsa la motivación y el apoyo entre los compañeros. Aquellos alumnos con más habilidades y conocimientos en ciertas actividades complementan a sus compañeros que no los tienen y les ayuda a adquirirlos.

En cuanto a las diferencias de recursos económicos, la papiroflexia no supone un problema. Los papeles necesarios tienen un coste mínimo. Además, el centro educativo aportará a los estudiantes que lo necesiten acceso a los ordenadores y rotuladores para poder desarrollar adecuadamente las actividades.

3.6. Evaluación

La evaluación de los alumnos y de la propia situación de aprendizaje se realizará con las evidencias del portafolio educativo. El portafolio permite al docente seguir el proceso de aprendizaje de cada alumno y, por tanto, conocer el grado de competencias adquirido. Además, en él se plasma la valoración por parte de los alumnos de las actividades realizadas. Los alumnos se coevalúan y autoevalúan en el portafolio.

Las competencias adquiridas por los alumnos se evalúan a través de unas rúbricas elaboradas para cada actividad. De esta forma se tiene una evaluación de los estudiantes formativa y sumativa. En las rúbricas de las actividades se evalúan las competencias a través de los indicadores de logro descritos en el apartado de Fundamentación curricular. Estos indicadores se gradúan de 0 a 3 en función de las destrezas adquiridas del alumno, donde 0 significa que no lo ha logrado y 3 que lo ha logrado completamente. De esta manera se asocia una nota a cada indicador de logro. Ver Anexo 5: Rúbricas de evaluación.

La calificación de cada alumno asociada a cada competencia específica será la media de las calificaciones de los indicadores de logro asociados a esa competencia de todas las actividades de la situación de aprendizaje. La calificación final del alumno en la situación de aprendizaje será la media aritmética de las calificaciones de las competencias específicas. Y esa nota sobre 3 se pasa a sistema decimal. Por lo tanto, todas las competencias tienen el mismo peso en la evaluación.

3.7. Valoración de la situación de aprendizaje

La propia situación de aprendizaje se evaluará teniendo en cuenta las opiniones de los alumnos en el portafolio. Se sacarán conclusiones acerca de las actividades que más han motivado a los alumnos, cuáles han sido más efectivas para trabajar los contenidos involucrados, cuáles han sido más complicadas de implementar y por qué, si trabajan mejor en actividades individuales o grupales, y si ha sido buena la actuación del docente en las actividades.

En cuanto a la evaluación del diseño, se tendrá en cuenta la adecuación del tiempo de las actividades y la secuencia de estas, la eficiencia de las estrategias metodologías y recursos planteados, y la coherencia de las actividades con el DUA.

En la evaluación a la hora de implementar el diseño, se analizará si se ha cumplido la temporalización de las actividades correctamente, si se ha generado un ambiente de diálogo y cooperación en las actividades grupales, si los materiales utilizados han ayudado en el aprendizaje, y si las actividades han fomentado el desarrollo de las competencias matemáticas del alumnado.

Como propuesta de mejora, esta situación de aprendizaje se puede plantear para cursos superiores trabajando contenidos más elevados. Partiendo del mismo contexto, e incluso de las mismas construcciones con papiroflexia, se pueden generar problemas de diferentes niveles educativos y trabajando diferentes contenidos.

4. Conclusiones

Este trabajo muestra la posibilidad de utilizar la papiroflexia como recurso didáctico en Matemáticas en la Educación Secundaria, concretamente en 1º E.S.O. Por desgracia, no tuve la posibilidad de implantar la situación de aprendizaje en mi periodo de prácticas. Sin embargo, lo tuve en cuenta para terminar de elaborar este trabajo. Conocer de primera mano las dinámicas reales que hay en un aula, me ha ayudado a elegir las metodologías más adecuadas para alumnos que hace menos de un curso estaban en primaria. Este alumnado tan joven demanda materiales manipulativos, sobre todo en una asignatura como Matemáticas, donde se comienzan a ver conceptos más abstractos como pueden ser las ecuaciones. La papiroflexia es un recurso fantástico para estos estudiantes. Se pueden trabajar diferentes representaciones de un mismo concepto y comprobar soluciones mediante objetos físicos como el dolado del papel. Además, es mucho más sencillo vincular los problemas matemáticos con papiroflexia. Una hoja de papel muestra infinidad de posibilidades.

En la situación de aprendizaje se muestra como la papiroflexia se adapta a actividades en las que se trabajan contenidos multidisciplinares, es decir, de diferentes asignaturas. Además, permite crear actividades individuales como de grupos de diferentes tamaños. Por lo que podríamos decir que es un recurso versátil.

Por otro lado, no se puede recurrir a la papiroflexia en todas las actividades. Para atender a la diversidad del alumnado es conveniente que estos tengan a su disposición varios materiales y estudien con el que se adapte mejor a sus necesidades u objetivos. Es por eso por lo que en las actividades de la situación de aprendizaje se propone trabajar con regla y compás, GeoGebra y con papiroflexia.

La contextualización de las actividades junto con el plegado del papel hace que estas se acerquen al aprendizaje por gamificación. Los alumnos encuentran más motivadoras y atractivas las tareas. Y como consecuencia se enfrentarán a ellas con una mejor predisposición. Si además a esto le sumas que estén relacionadas con aspectos de la vida cotidiana que les importe, el ambiente en el aula mejora.

En definitiva, la papiroflexia en un aula de Matemáticas es imprescindible por todas las ventajas que conlleva.

5. Referencias

Abate, M. (2020). Geometric Origami. *Imagine Math 7: Between Culture and Mathematics*, 117-133.

Alperin R y Lang R (2006) One-, two-, and multi-fold origami axioms. *Origami*, 4, 371-393.

Alperin, R. C. *A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers*. New York J. Math. 6, 119-133, 2000.

Andersen, E. M. (2003). *Origami and Math*. Recuperado 06 de junio de 2023, de, http://www.paperfolding.com/math//

Asociación Española de Papiroflexia. Recuperado 06 de junio de 2023, de https://www.pajarita.org/

Boakes, N. (2006). *The effects of Origami lessons on students' spatial visualization skills and achievement levels in a seventh-grade classroom.* Temple University.

Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Budinski, N. (2019). Mathematics and Origami: The Art and Science of Folds. *Handbook of the Mathematics of the Arts and Sciences*. (pp. 317-348), Springer.

C. M. Jaramillo y Z. M. Santa (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual* Universidad Católica del Norte, No. 31, pp. 338-362, http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/download/48/105

Cañadas, María C. y Durán, Francisco y Gallardo, Sandra y Martínez-Santaolalla, Manuel José y Molina, Marta y Peñas, María y Villegas, José Luis (Eds.). (2009). *Geometría plana con papel*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Contreras, J., del Pino, C. (2003a). Acerca del problema de la trisección de un ángulo. *Revista del Instituto de Matemática y Física.* Universidad de Talca.

Contreras, J., del Pino, C. (2003b). El problema de la Duplicación del Cubo. *Revista del Instituto de Matemática y Física*. Universidad de Talca.

Cox, D. A. (2011). *Galois theory* . John Wiley & Sons.

Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. BOCyL (Boletín Oficial de Castilla y León), 190, 30 de Septiembre de 2022, 48850- 49542.

Esteban Sanz, L. (2021). *La papiroflexia, una herramienta didáctica para aprender matemáticas en Bachillerato*. (Trabajo de Fin de Máster). Universidad de Valladolid.

Fernández, I. y Reyes, E. (2003). *Geometría con el hexágono y el octógono: papiroflexia, proporciones, disecciones, cuadraturas, mosaicos, geometría Sagrada*. Proyecto Sur de Ediciones.

Fujimoto S (1976) *Twist origami*, Home print.

García Díaz, A. (2017). *Teoría de Galois tras el origami: Por qué el origami resuelve los problemas geométricos clásicos de la Antigua Grecia.* (Trabajo de Fin de Grado). Universidad La Laguna.

Gardner, H. (1993). *Multiple Intelligences: The Theory in Practice*. NY: Basic Books.

Garrido, B. G. (2016). *Orisangakus: desafíos matemáticos con papiroflexia*. Ediciones SM España.

GeoGebra. https://www.geogebra.org/calculator

Hatori, K. (2001). *Fractional Library*. K's Origami. Recuperado 06 de junio de 2023, de https://origami.ousaan.com/library/

Hatori, K. (s.f.). *History of Origami*. K's Origami. Recuperado 06 de junio de 2023, de https://origami.ousaan.com/library/historye.html

Hull, T. (1994). On the mathematics of flat origamis, *Congressus Numerantium*, 215-224.

Huzita H (1989) Axiomatic development of origami geometry.: Kawasaki, T. *Proceedings of the 1st international meeting of origami science and technology*, (pp 143–158) Università di Padova

Jones, K.: 2002, Issues in the Teaching and Learning of Geometry. Haggarty, L. (ed.) *Aspects of teaching Secondary Mathematics*, (pp. 121-139) London: RoutledgeFalmer .

Justin, J. (1986). Mathematics of origami, part 9. *British Origami*, *118*, 28-30.

Justin, J. (1991). Resolution par le pliage de l'equation du troisieme degre et applications geometriques. Huzita, H. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, (pp. 251–261),Università di Padova .

Kasahara, K. (1988). *Origami Omnibus: Paper-Folding for Everyone*. Tokyo: Japan Publications.

Kawasaki, T. (1989) On the relation between mountain-creases and valley-creases of a flat origami, Huzita, H. *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, (pp. 229–237) Università di Padova

Lang, R.J. (2018), *Twists, Tilings and Tessellations: Mathematical Methods for Geometric Origami*. CRC Press,

Lang,R. J. (2003) Origami and geometric constructions. Self Published.

León, E. A. (2018) *Iincidencia de la técnica origami en la resolución de problemas de área y perímetro de figuras planas con estudiantes de segundo básico.* (Tesis de grado). Universidad Rafael Landívar.

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE (Boletín Oficial del Estado), 349, de 30 de diciembre de 2020, 122868 -122953

Lindemann, F. (1882). Über die Zahl π. *Pi: A Source Book*.

Miura Koryo. *The Muira Map Fold* https://web.archive.org/web/20070928000952/http://www.merrimack.edu/~thull/combgeom05/handout7.pdf

Mukerji, M. (2020).*Marvelous modular origami*. CRC Press.

Pearl, B. (1993). Math in motion: A handson creative approach to teaching mathematics in elementary schools using Origami. Communicator, 23(1), 10-13.

Polya, G. (2004).*How to solve it: A new aspect of mathematical method*, 246. Princeton university press.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. BOE (Boletín Oficial del Estado), 76, 30 de marzo de 2022, 41571 – 41789.

Reyes, E., y Fernández, I. (2015) *Pentágonos: construcciones, mosaicos, geometría sagrada*. Ediciones Universidad de Valladolid.

Robertson, S. A. (1978). Isometric folding of Riemannian manifolds. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 79(3-4), 275-284.

Robichaux, R. R., y Rodrigue, P. R. (2003). Using Origami to Promote Geometric Communication. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9* (4), 222–229.

Royo Prieto, J. I. (2002, octubre). Matemáticas y Papiroflexia. *Sigma: revista de matemáticas*, 21, 175-192.

Rueda, F. N. (2018). *Números constructibles* (Trabajo de Fin de Grado). Universidad de Sevilla.

Sarmentero Medina, E. (2021). *La papiroflexia, una herramienta didáctica para aprender Matemáticas en la ESO.* (Trabajo de Fin de Máster). Universidad de Valladolid.

Smith J (1993) *Some thoughts of minimal folding*. British Origami.

Song, S. (2012). *Doblar y marcar. El arte de la papiroflexia para todos*. Ediciones Tutor.

Sundara Row, T. (1893) *Geometric exercises in paper folding*. The Open Court Publishing Company.

Sze, S. (2005). Math and Mind Mapping: Origami Construction.. *Online Submission*.

Verrill H (1998) Origami tessellation.: *Bridges: mathematical connections in art, music, and science*. Winfield, Kansas (pp 55–68).

Wantzel, L. (1837). Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de mathématiques pures et appliquées,* 2, 366-372.

Wollring, B.: 2001, Working environments for the geometry of paper folding in the primary grades in Novotna, J. Hejny, M (eds.) International Symposium Elementary Mathematics teaching (SEMT'01) p.177-8 Prague: Charles University

Yoshizawa, A. (2016). *Akira Yoshizawa, Japan's Greatest Origami Master: Featuring over 60 Models and 1000 Diagrams by the Master*. Tuttle Publishing.

6. Anexo 1: Portafolio

Actividad 1: Vestido

1. ¿Qué pasaba en esa época en España? ¿De qué reyes se habla?
2. Por parejas, elabora una lista con los materiales y recursos necesarios para elaborar el traje de la reina.
3. Antes de comenzar a construir el vestido es necesario realizar un boceto. En este caso se propone hacerlo mediante dobleces de un papel. Construye con una hoja cuadrada de papel un posible vestido.
4. Desdobla el vestido y observa su pliegues:
    a. ¿Cuándo puntos puedes apreciar? ¿Cómo los has identificado?
    b. Identifica las rectas, semirrectas y segmentos. ¿Qué diferencias encuentras? Marca con un rotulador azul una recta, con un rotulador rojo una semirrecta y con uno verde un segmento.
    c. Marca dos rectas paralelas que encuentres en el papel. ¿Sabrías construir una recta paralela a otra dada? ¿Cómo lo harías?
    d. Marca dos rectas perpendiculares que encuentres en el papel. ¿Sabrías construir una recta perpendicular a otra dada? ¿Cómo lo harías?
    e. ¿Qué figuras geométricas planas identificas en el papel?
    f. Clasifica los triángulos que se encuentran según sus lados y sus ángulos. Colorea un triángulo de cada tipo con colores diferentes. ¿Cómo diferencias los tipos de triángulos?
5. Describe las dificultades, si las has tenido, a la hora de construir el vestido.
6. ¿Tu pareja te ha ayudado en el proceso? ¿Cómo?
7. Con una hoja de papel construye un ángulo de 90º. ¿Qué procedimiento has seguido?
8. Con una hoja de papel construye un ángulo de 45º. ¿Qué procedimiento has seguido?
9. ¿Cómo construirías la bisectriz de un ángulo cualquiera?
10. Con una hoja de papel construye un ángulo de 30º. ¿Qué procedimiento has seguido? (Recuerda que 30º y 60º suman 90º)
11. Con una hoja de papel construye un ángulo de 60º. ¿Qué procedimiento has seguido?
12. ¿Cómo construirías la mediatriz de un segmento cualquiera?
13. Investiga por qué los ángulos se miden en grados.
14. ¿Qué instrumentos se usan para medir los ángulos?
15. ¿Por qué es necesario conocer los elementos del plano?
16. ¿Qué dificultades has encontrado en esta actividad? ¿Cómo lo has solventado?
17. ¿Qué cambiarías de la actividad y por qué?

Actividad 2: Ruta de la Seda

1. Es necesario obtener los materiales de los tejidos del vestido. ¿De dónde provienen?
2. Explica las principales características de la Ruta de la Seda.
3. Explica que son las coordenadas cartesianas. He identifica las coordenadas de las ciudades de la Ruta de la Seda.
4. ¿Para qué sirven la coordenadas? ¿Quién las inventó?
5. Identifica las diferencias entre los mapas actuales y los del siglo XV.
6. Dobla el mapa con tu grupo para que entre en un bolsillo 12 x 6 cm y que se despliegue rápidamente. Sigue los siguientes paso: identifica los datos necesarios antes de comenzar a plegar, pensar un plan para doblarlo, ejecutar el plan y comprobar que entra en el bolsillo.
   a. Explica el proceso que habéis seguido.
   b. ¿Sabríais encontrar otra forma de doblar el mapa?
   c. ¿Qué mejoraríais de las propuestas de vuestros compañeros de otros grupos?
   d. Después de conocer otras propuestas ¿Mejoraríais vuestro plegado del mapa? ¿Cómo?
   e. Investiga sobre el mapa de Miura y realízalo. ¿Para qué se utiliza actualmente? Propón un ejemplo de utilidad de este plegado.
7. Describe las dificultades, si las has tenido, a la hora de doblar el mapa.
8. ¿Tu grupo te ha ayudado en el proceso? ¿Cómo?
9. Traza en el mapa los caminos más cortos a las ciudades de la Ruta. ¿Cuánto miden?
10. Mide ahora en el globo terráqueo las distancias a esas ciudades. ¿Podrías encontrar un camino más corto? ¿Por qué?
11. Fíjate en la escala del mapa. ¿Qué significa?
12. Calcula las distancias reales de las ciudades con las unidades apropiadas. ¿Cómo lo has hecho?
13. Propón un ejemplo real donde sea necesario utilizar las escalas.
14. Calcula el tiempo en llegar a las ciudades si se tarda 1 hora en recorrer 73,5 km. Justifica los cálculos realizados.
15. Elabora una tabla en GeoGebra con los datos de las distancias a las ciudades y los tiempos. ¿Qué procedimiento has seguido?
16. Representa esa gráfica en GeoGebra. ¿Qué has obtenido? ¿Por qué tienen esa forma?
17. ¿Cómo lo representarías si no tuvieses GeoGebra?
18. Elige otra ciudad que no pertenezca a la ruta de la seda y calcula el tiempo que tardarías en llegar a ella.
19. En esa época para navegar se guiaban por las estrellas del firmamento. ¿Podríamos saber cuándos días hemos navegado mirando a las estrellas?

18\. ¿Qué dificultades has encontrado en esta actividad? ¿Cómo lo has solventado?

19\. ¿Qué cambiarías de la actividad y por qué?

Actividad 3: Vuelta al mundo

1. A mitad de siglo los otomanos bloquearon la Ruta de la Seda hacia Europa. ¿Cómo consigues las telas de Asia? ¿Rutas alternativas?
2. ¿La Tierra es plana? ¿Por qué?
3. ¿Cuánto mide el perímetro de la Tierra?
   a. Investiga sobre el conocimiento de las medidas de la Tierra en el siglo XV.
   b. ¿Qué es lo que se te ocurre para calcularlo?
   c. ¿Qué necesitar conocer? ¿Dónde vas a buscar esa información?
   d. Elabora una lista con tu grupo de lo que necesitáis saber y distribuir el trabajo.
   e. ¿Conoces a Eratóstenes de Cirene? Investiga que aportó a las Matemáticas.
   f. Elaborar un plan para resolver el problema con la información obtenida.
   g. Representar con regla y compás el problema. ¿Lo podrías representar con papiroflexia?
   h. Describe el proceso para resolverlo.
   i. Comprueba que el perímetro de la Tierra es correcto.
4. Describe las dificultades, si las has tenido, para obtener el perímetro de la Tierra.
5. ¿Tu grupo te ha ayudado en el proceso? ¿Cómo?
6. ¿Cómo se define el número Π? ¿Para qué se usa?
7. ¿Cuál es el perímetro del círculo? ¿Y el área del círculo?
8. Deduce el área y perímetro del sector circular, de la corona circular y del segmento circular.
9. ¿Qué dificultades has encontrado en esta actividad? ¿Cómo lo has solventado?
10. ¿Qué cambiarías de la actividad y por qué?

Actividad 4: Comida

1. Diseña con tu pareja una receta para el viaje a por las telas del vestido.
   a. ¿Qué tipo de alimentos habéis incluido? ¿Estos son perecederos?
   b. ¿Qué beneficios tienen esos alimentos?
   c. Representa con papiroflexia el porcentaje de cada ingrediente de la receta.
   d. ¿Cuál es la fracción de cada ingrediente?
   e. Ordena los ingredientes en la receta de mayor a menor según su cantidad.
2. Analiza todas las recetas del viaje de tus compañeros.
   a. ¿Qué fracción de cada alimento necesitáis llevar en el viaje?
   b. Sabiendo que en el viaje vais a poder parar en una ciudad el segundo día y conseguir $\frac{2}{5}$ de la fracción de cereales inicial, ¿Cuál es la fracción de cereales que conseguís el segundo día? ¿Cuántos cereales necesitáis llevar ahora?
   c. A mitad de camino os encontráis con unos piratas. Estos se llevan dos terceras partes del aceite que tenéis ¿Qué fracción de aceite os queda? ¿Cuál es la cantidad de aceite que os queda en relación con los demás ingredientes?
   d. Compara las soluciones con las demás parejas. ¿Son las mismas? ¿Has tenido que rectificar alguna operación? ¿Cómo lo has hecho?
3. Realiza un esquema para representar la cantidad de comida que asignarías a cada compañero.
   a. ¿Qué fracción de comida le asignas a cada compañero? Represéntalo.
   b. ¿Qué fracción de comida come cada pareja?
   c. ¿Qué fracción de comida se comerá cada día? ¿Y qué fracción se comerá cada compañero cada día?
   d. Comprueba que entre todos los compañeros os coméis toda la comida.
4. ¿Qué dificultades has encontrado en esta actividad? ¿Cómo lo has solventado?
5. Describe las dificultades de trabajar con tu pareja. ¿Cómo las habéis solucionado?
6. ¿Qué cambiarías de la actividad y por qué?

Actividad 5: Diseño de telas

1. Para diseñar el vestido es necesario conocer las algunas geométricas planas, en particular, los polígonos, y sus características. Explica los pasos que has seguido para construir el polígono asignado en tu equipo.
2. ¿Cuáles son las características del polígono?
3. Construye los polígonos restantes con las pautas de tus compañeros y explica el proceso.
4. ¿Cuál te ha resultado más complicado? ¿Por qué?
5. ¿Por qué no se ha construido el heptágono? ¿Sabrías construirlo?
6. Demuestra que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º con ayuda de la papiroflexia.
7. Observa esa construcción. ¿Cómo se relaciona el área de un triángulo con el de un rectángulo?
8. ¿Cuánto miden los ángulos interiores de un cuadrado? ¿Y la suma de estos? Compruébalo con un trasportador de ángulos.
9. ¿Cuánto miden la suma de los ángulos interiores de un pentágono? (Divídelo en triángulos). Compruébalo con un trasportador de ángulos.
10. ¿Cuánto miden la suma de los ángulos interiores de un hexágono y de un octógono? Compruébalo con un trasportador de ángulos.
11. ¿Cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados?
12. ¿Cómo se calcula el área de un polígono regular?
13. ¿Para qué sirve conocer el área de los polígonos del diseño del vestido?
14. ¿Qué dificultades has encontrado en esta actividad? ¿Cómo lo has solventado?
15. ¿Qué cambiarías de la actividad y por qué?

Actividad 6: Mercado

1. Una vez creados los polígonos diseña con tu grupo las telas para el vestido creando teselaciones.
    a. Crea los polígonos con la misma longitud de lado.
    b. ¿Cuántos mosaicos regulares diferentes podéis escoger?
    c. ¿Por qué algunos polígonos regulares no teselan el plano?
    d. ¿Qué mosaicos puedes formar con dos polígonos regulares?
    e. ¿Qué mosaicos puedes formar con tres polígonos regulares?
    f. ¿Qué mosaicos puedes formar con cuatro polígonos regulares?
    g. Cuál es la condición para poder teselar el plano.
    h. Describe las dificultades, si las has tenido.
    i. ¿Tu grupo te ha ayudado en el proceso? ¿Cómo?
    j. Busca alguno de estos mosaicos en tu entorno.
2. Para el diseño de tu grupo, escoge diferentes colores para los polígonos que lo forman.
    a. ¿Cuántos colores habéis utilizado?
    b. ¿Es posible escoger colores de forma que ningún polígono tenga el mismo color que uno adyacente?
    c. ¿Cuántos colores mínimos son necesarios?
    d. Describe las dificultades, si las has tenido.
    e. ¿Tu grupo te ha ayudado en el proceso? ¿Cómo?
3. Para el diseño de tu grupo, calcula el precio de la tela.
    a. Elige el tamaño de los polígonos para cubrir 1m^2 de tela. ¿Cuántos polígonos necesitas?
    b. Calcula el área de los polígonos del diseño del 1 m^2.
    c. Cada color tiene un precio diferente: el amarillo cuesta 35,7 euros el m^2, el magenta 43,2 euros el m^2, el cian 40,61 euros el m^2, el blanco 20,1 euros el m^2 y el negro 23 euros el m^2. El precio de los colores restantes es en función del porcentaje de colores primarios que contiene. Por ejemplo: el verde es la mezcla de amarillo y cian (50% amarillo y 50% cian). ¿Cuánto cuesta 1 m^2 de la tela de vuestro grupo?
    d. Cuando vais al mercado, veis una oferta. El precio del color blanco se reduce un 15% y el color cian en 10%. ¿Cuánto cuesta ahora la tela?
4. ¿Qué dificultades has encontrado en esta actividad? ¿Cómo lo has solventado?
5. ¿Qué cambiarías de la actividad y por qué?

Actividad 7: Patrones

1. Una vez diseñadas las telas, hay que elaborar los patrones para coser el vestido.
   a. ¿Todas las figuras del patrón son polígonos? ¿Por qué?
   b. Clasifica los diferentes polígonos según sus ángulos y lados y pon un ejemplo de cada uno.
   c. Dentro de los cuadriláteros existe otra clasificación, ¿cuál es?
   d. Construye con papiroflexia los patrones:
   e. ¿Cuál es el plan que vas a seguir para plegar las figuras?
   f. Explica el proceso que has seguido para cada una de las figuras.
   g. ¿Qué has tenido que cambiar o rectificar?
   h. ¿La figura que has construido es la misma que la que se pide?
   i. ¿Sabríais encontrar otra forma construirla?
2. Encuentra una disposición óptima de las figuras del patrón para gastar el mínimo de tela posible.
   a. ¿Cuál es esa disposición? ¿Cuánto ocupa?
   b. ¿Cómo has llegado a ella?
   c. ¿Existe otra disposición que ocupe el mismo espacio?
   d. Para las telas que diseño tu grupo, ¿cuánto cuesta el vestido?
3. Investiga sobre la industria textil.
   a. ¿Cuántos residuos genera al día en el mundo?
   b. ¿Cómo se podría evitar o reducir ese residuo?
   c. ¿Cómo afecta al medio ambiente?
4. En la elaboración de una prenda también hay que tener en cuenta la cantidad de hilo que se utilice para coser. ¿Cuál es la figura que has construido con papiroflexia a lo largo de estas actividades que necesite más tela y menor hilo?
5. ¿Qué dificultades has encontrado en esta actividad? ¿Cómo lo has solventado?
6. ¿Qué cambiarías de la actividad y por qué?

Actividad 8: Entrega del vestido

1. Una vez terminado el vestido la reina quiere que lo entreguéis en un lugar en concreto. Tiene que ser un lugar que se encuentre a la misma distancia de sus tres residencias. Las residencias forman un triángulo acutángulo. ¿Dónde entregarías el vestido?
   a. Identifica los datos necesarios.
   b. ¿Cuál es tu plan para resolverlo?
   c. ¿Cómo lo has ejecutado?
   d. Comprueba la solución. ¿Podrías dar otra solución?
   e. ¿Qué pasaría si esos puntos formasen un triángulo obtusángulo o rectángulo?
   f. ¿Cómo se le denomina a ese punto?
2. ¿Qué dificultades has encontrado en esta actividad? ¿Cómo lo has solventado?
3. ¿Qué cambiarías de la actividad y por qué?
4. Para transportar el vestido, el paquete hay que colocarlo de una cuerda. Si el paquete es triangular, ¿Qué punto de este es el más indicado para colgarlo?
   a. Identifica los datos necesarios.
   b. ¿Cuál es tu plan para resolverlo?
   c. ¿Cómo lo has ejecutado?
   d. Comprueba la solución. ¿Podrías dar otra solución?
   e. ¿Qué pasaría si el vestido se transportase con forma de triángulo obtusángulo o rectángulo?
   f. ¿Cómo se le denomina a ese punto?
5. ¿Qué dificultades has encontrado en esta actividad? ¿Cómo lo has solventado?
6. ¿Qué cambiarías de la actividad y por qué?
7. Por seguridad la reina quiere que en la boda el altar se encuentre el punto más seguro del castillo. Es decir, lo más alejado de las murallas. ¿Cuál será ese lugar si las murallas forman un triángulo acutángulo?
   a. Identifica los datos necesarios.
   b. ¿Cuál es tu plan para resolverlo?
   c. ¿Cómo lo has ejecutado?
   d. Comprueba la solución. ¿Podrías dar otra solución?
   e. ¿Qué pasaría si las murallas formasen un triángulo obtusángulo o rectángulo?
   f. ¿Cómo se le denomina a ese punto?
8. ¿Qué dificultades has encontrado en esta actividad? ¿Cómo lo has solventado?
9. ¿Qué cambiarías de la actividad y por qué?
10. En las tres intersecciones de las murallas se encuentran tres torres de vigilancia. Los puntos más visibles, y, por tanto, más seguros, son los que se encuentran en la recta perpendicular a la muralla opuesta y que pasa por la torre. ¿Cuál será entonces el punto más visible por las torres?

a. Identifica los datos necesarios.
b. ¿Cuál es tu plan para resolverlo?
c. ¿Cómo lo has ejecutado?
d. Comprueba la solución. ¿Podrías dar otra solución?
e. ¿Qué pasaría si las murallas formasen un triángulo obtusángulo o rectángulo?
f. ¿Cómo se le denomina a ese punto?

11. ¿Qué dificultades has encontrado en esta actividad? ¿Cómo lo has solventado?
12. ¿Qué cambiarías de la actividad y por qué?
13. Representa los cuatro puntos en un mismo triángulo y representa la recta de Euler con los tres adecuados.

7. Anexo 2: Fundamentación curricular

7.1. Competencias específicas

En la propuesta didáctica de este trabajo se implementan todas las competencias específicas descritas en el Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León:

1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las Matemáticas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. […]

2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. […]

3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento. […]

4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz. […]

5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos y procedimientos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado. […]

6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos para aplicarlos en situaciones diversas. […]

7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos. […]

8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas. […]

9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas. […]

10. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables. (Decreto 39/2022, pp. 49343- 49346).

7.2. Criterios de evaluación

Cada una de las competencias específicas en el primer curso de la ESO tiene asociados los siguientes criterios de evaluación descritos en el Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León:

1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana extrayendo los datos dados, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. […]

1.2 Aplicar algunas herramientas sencillas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas. […]

1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema por métodos sencillos activando los conocimientos necesarios. […]

2.1 Comprobar, de forma guiada, la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos necesarios. […]

2.2 Comprobar, de manera guiada, la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, conociendo el alcance y repercusión de desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, estas etc.). […]

3.1. Comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones y propiedades. […]

3.2. Plantear variantes de un problema dado de forma guiada modificando algún dato. […]

4.1 Organizar datos y descomponer un problema en partes más simples identificando los datos y los resultados de cada una de las partes. […]

4.2. Modelizar situaciones y resolver problemas interpretando algoritmos. […]

5.1. Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas apreciando un todo coherente. […]

5.2 Identificar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas. […]

6.1 Identificar situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: medir, comunicar y clasificar. […]

6.2 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados de manera guiada. […]

6.3 Conocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual. […]

7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos. […]

7.2 Utilizar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada, usando material manipulativo si es necesario. […]

8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, oralmente y por escrito, al describir y explicar razonamientos. […]

8.2 Reconocer el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión. […]

9.1 Reconocer las emociones propias, valorar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos. […]

9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje planteadas. […]

10.1 Colaborar activamente y construir relaciones con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva y pensando de forma creativa. […]

10.2 Participar en las tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa y asumiendo el rol asignado. (Decreto 39/2022, pp. 49347- 49348).

7.3. Descriptores operativos

Para concretar y contextualizar el grado de competencias claves adquiridas por el alumnado se definen los descriptores operativos de cada competencia descritos en el Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

7.3.1. Competencia en comunicación lingüística:

CCL1. Se expresa de forma oral, escrita, signada o multimodal con coherencia, corrección y adecuación a los diferentes contextos sociales, y participa en interacciones comunicativas con actitud cooperativa y respetuosa tanto para intercambiar información, crear conocimiento y transmitir opiniones, como para construir vínculos personales.

CCL2. Comprende, interpreta y valora con actitud crítica textos orales, escritos, signados o multimodales de los ámbitos personal, social, educativo y profesional para participar en diferentes contextos de manera activa e informada y para construir conocimiento.

CCL3. Localiza, selecciona y contrasta de manera progresivamente autónoma información procedente de diferentes fuentes, evaluando su fiabilidad y pertinencia en función de los objetivos de lectura y evitando los riesgos de manipulación y desinformación, y la integra y transforma en conocimiento para comunicarla adoptando un punto de vista creativo, crítico y personal a la par que respetuoso con la propiedad intelectual.

CCL4. Lee con autonomía obras diversas adecuadas a su edad, seleccionando las que mejor se ajustan a sus gustos e intereses; aprecia el patrimonio literario como cauce privilegiado de la experiencia individual y colectiva; y moviliza su propia experiencia biográfica y sus conocimientos literarios y culturales para construir y compartir su interpretación de las obras y para crear textos de intención literaria de progresiva complejidad.

CCL5. Pone sus prácticas comunicativas al servicio de la convivencia democrática, la resolución dialogada de los conflictos y la igualdad de derechos de todas las personas, evitando los usos discriminatorios, así como los abusos de poder, para favorecer la utilización no solo eficaz sino también ética de los diferentes sistemas de comunicación. (Decreto 39/2022, p. 48890).

7.3.2. Competencia plurilingüe:

CP1. Usa eficazmente una o más lenguas, además de la lengua o lenguas familiares, para responder a sus necesidades comunicativas, de manera apropiada y adecuada tanto a su desarrollo e intereses como a diferentes situaciones y contextos de los ámbitos personal, social, educativo y profesional.

CP2. A partir de sus experiencias, realiza transferencias entre distintas lenguas como estrategia para comunicarse y ampliar su repertorio lingüístico individual.

CP3. Conoce, valora y respeta la diversidad lingüística y cultural presente en la sociedad, integrándola en su desarrollo personal como factor de diálogo, para fomentar la cohesión social. (Decreto 39/2022, p. 48891).

7.3.3. Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería:

STEM1. Utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y emplea diferentes estrategias para resolver problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario.

STEM2. Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar los fenómenos que ocurren a su alrededor, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, planteándose preguntas y comprobando hipótesis mediante la experimentación y la indagación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y las limitaciones de la ciencia.

STEM3. Plantea y desarrolla proyectos diseñando, fabricando y evaluando diferentes prototipos o modelos para generar o utilizar productos que den solución a una necesidad o problema de forma creativa y en equipo, procurando la participación de todo el grupo, resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir, adaptándose ante la incertidumbre y valorando la importancia de la sostenibilidad.

STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de procesos, razonamientos, demostraciones, métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y precisa y en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos...), aprovechando de forma crítica la cultura digital e incluyendo el lenguaje matemático-formal con ética y responsabilidad, para compartir y construir nuevos conocimientos.

STEM5. Emprende acciones fundamentadas científicamente para promover la salud física, mental y social, y preservar el medio ambiente y los seres vivos; y aplica principios de ética y seguridad en la realización de proyectos para transformar su entorno próximo de forma sostenible, valorando su impacto global y practicando el consumo responsable. (Decreto 39/2022, p. 48891).

7.3.4. Competencia digital:

CD1. Realiza búsquedas en internet atendiendo a criterios de validez, calidad, actualidad y fiabilidad, seleccionando los resultados de manera crítica y archivándolos, para recuperarlos, referenciarlos y reutilizarlos, respetando la propiedad intelectual.

CD2. Gestiona y utiliza su entorno personal digital de aprendizaje para construir conocimiento y crear contenidos digitales, mediante estrategias de tratamiento de la información y el uso de diferentes herramientas digitales, seleccionando y configurando la más adecuada en función de la tarea y de sus necesidades de aprendizaje permanente.

CD3. Se comunica, participa, colabora e interactúa compartiendo contenidos, datos e información mediante herramientas o plataformas virtuales, y gestiona de manera responsable sus acciones, presencia y visibilidad en la red, para ejercer una ciudadanía digital activa, cívica y reflexiva.

CD4. Identifica riesgos y adopta medidas preventivas al usar las tecnologías digitales para proteger los dispositivos, los datos personales, la salud y el medioambiente, y para tomar conciencia de la importancia y necesidad de hacer un uso crítico, legal, seguro, saludable y sostenible de dichas tecnologías.

CD5. Desarrolla aplicaciones informáticas sencillas y soluciones tecnológicas creativas y sostenibles para resolver problemas concretos o responder a retos propuestos, mostrando interés y curiosidad por la evolución de las tecnologías digitales y por su desarrollo sostenible y uso ético. (Decreto 39/2022, p. 48892).

7.3.5. Competencia personal, social y de aprender a aprender:

CPSAA1. Regula y expresa sus emociones, fortaleciendo el optimismo, la resiliencia, la autoeficacia y la búsqueda de propósito y motivación hacia el aprendizaje, para gestionar los retos y cambios y armonizarlos con sus propios objetivos.

CPSAA2. Comprende los riesgos para la salud relacionados con factores sociales, consolida estilos de vida saludable a nivel físico y mental, reconoce conductas contrarias a la convivencia y aplica estrategias para abordarlas.

CPSAA3. Comprende proactivamente las perspectivas y las experiencias de las demás personas y las incorpora a su aprendizaje, para participar en el trabajo en grupo, distribuyendo y aceptando tareas y responsabilidades de manera equitativa y empleando estrategias cooperativas

CPSAA4. Realiza autoevaluaciones sobre su proceso de aprendizaje, buscando fuentes fiables para validar, sustentar y contrastar la información y para obtener conclusiones relevantes.

CPSAA5. Planea objetivos a medio plazo y desarrolla procesos metacognitivos de retroalimentación para aprender de sus errores en el proceso de construcción del conocimiento. (Decreto 39/2022, p. 48893).

7.3.6. Competencia ciudadana:

CC1. Analiza y comprende ideas relativas a la dimensión social y ciudadana de su propia identidad, así como a los hechos culturales, históricos y normativos que la determinan, demostrando respeto por las normas, empatía, equidad y espíritu constructivo en la interacción con los demás en cualquier contexto.

CC2. Analiza y asume fundadamente los principios y valores que emanan del proceso de integración europea, la Constitución española y los derechos humanos y de la infancia, participando en actividades comunitarias, como la toma de decisiones o la resolución de conflictos, con actitud democrática, respeto por la diversidad, y compromiso con la igualdad de género, la cohesión social, el desarrollo sostenible y el logro de la ciudadanía mundial.

CC3. Comprende y analiza problemas éticos fundamentales y de actualidad, considerando críticamente los valores propios y ajenos, y desarrollando juicios propios para afrontar la controversia moral con actitud dialogante, argumentativa, respetuosa y opuesta a cualquier tipo de discriminación o violencia.

CC4. Comprende las relaciones sistémicas de interdependencia, ecodependencia e interconexión entre actuaciones locales y globales, y adopta, de forma consciente y motivada, un estilo de vida sostenible y ecosocialmente responsable. (Decreto 39/2022, p. 48894).

7.3.7. Competencia emprendedora:

CE1. Analiza necesidades y oportunidades y afronta retos con sentido crítico, haciendo balance de su sostenibilidad, valorando el impacto que puedan suponer en el entorno, para presentar ideas y soluciones innovadoras, éticas y sostenibles, dirigidas a crear valor en el ámbito personal, social, educativo y profesional.

CE2. Evalúa las fortalezas y debilidades propias, haciendo uso de estrategias de autoconocimiento y autoeficacia, y comprende los elementos fundamentales de la economía y las finanzas, aplicando conocimientos económicos y financieros a actividades y situaciones concretas, utilizando destrezas que favorezcan el trabajo colaborativo y en equipo, para reunir y optimizar los recursos necesarios que lleven a la acción una experiencia emprendedora que genere valor.

CE3. Desarrolla el proceso de creación de ideas y soluciones valiosas y toma decisiones, de manera razonada, utilizando estrategias ágiles de planificación y gestión, y reflexiona sobre el proceso realizado y el resultado obtenido, para llevar a término el proceso de creación de prototipos innovadores y de valor, considerando la experiencia como una oportunidad para aprender. (Decreto 39/2022, p. 48895).

7.3.8. Competencia en conciencia y expresión culturales:

CCEC1. Conoce, aprecia críticamente y respeta el patrimonio cultural y artístico, implicándose en su conservación y valorando el enriquecimiento inherente a la diversidad cultural y artística.

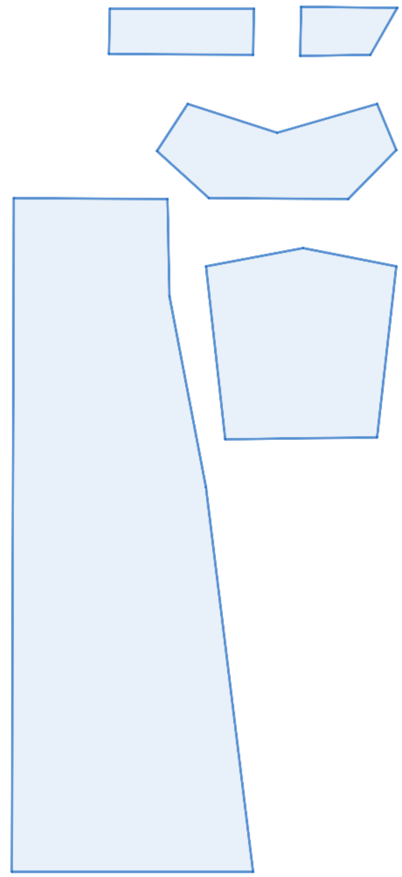
CCEC2. Disfruta, reconoce y analiza con autonomía las especificidades e intencionalidades de las manifestaciones artísticas y culturales más destacadas del patrimonio, distinguiendo los medios y soportes, así como los lenguajes y elementos técnicos que las caracterizan.

CCEC3. Expresa ideas, opiniones, sentimientos y emociones por medio de producciones culturales y artísticas, integrando su propio cuerpo y desarrollando la autoestima, la creatividad y el sentido del lugar que ocupa en la sociedad, con una actitud empática, abierta y colaborativa.

CCEC4. Conoce, selecciona y utiliza con creatividad diversos medios y soportes, así como técnicas plásticas, visuales, audiovisuales, sonoras o corporales, para la creación de productos artísticos y culturales, tanto de forma individual como colaborativa, identificando oportunidades de desarrollo personal, social y laboral, así como de emprendimiento. (Decreto 39/2022, p. 48896).

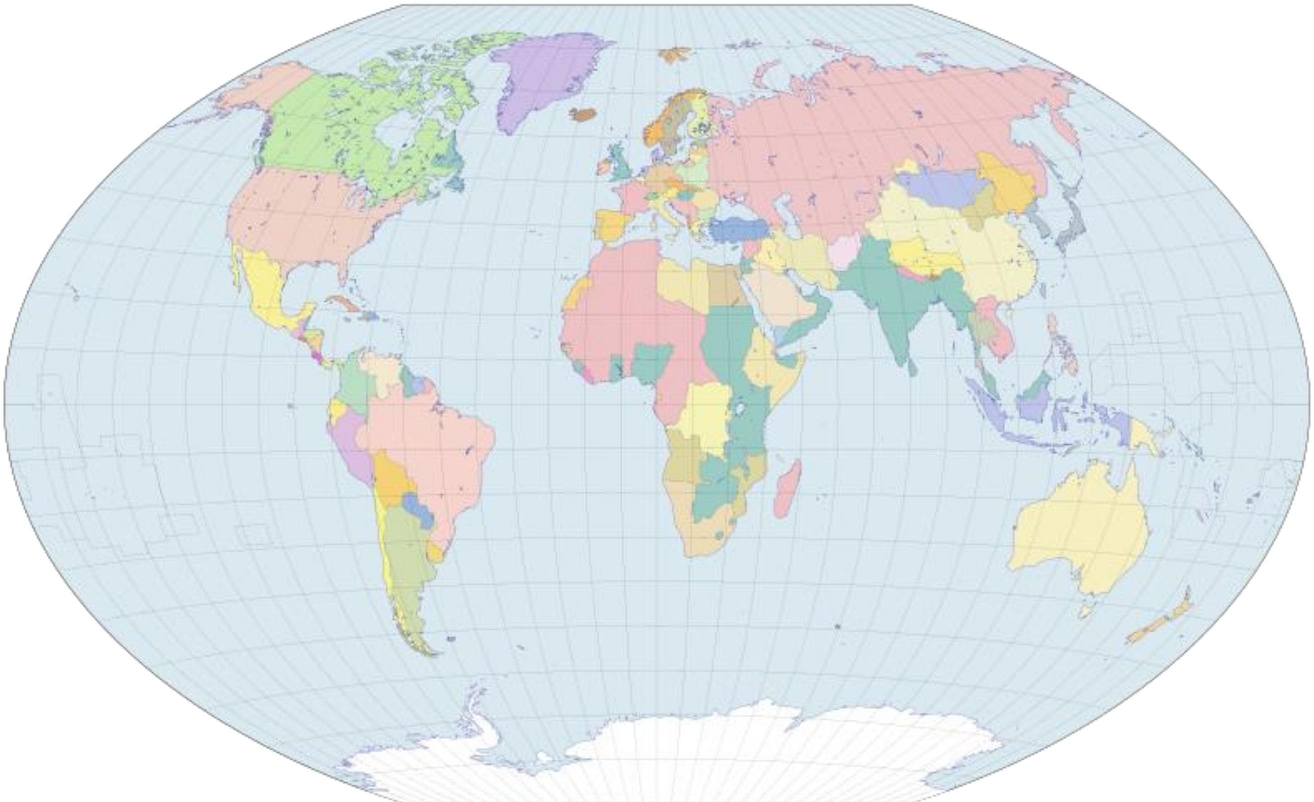
8. Anexo 3: Patrón del vestido

La actividad 7: Patrones necesita como material los patrones reales de un vestido de época en los cuales se trabaje con diferentes polígonos. En internet se pueden encontrar multitud de patrones de vestidos. En este caso, para este trabajo me he inspirado en el patrón de la página web https://www.modafacil.com/moldes-de-precioso-vestido-de-fiesta-strapless-mj1187v/



(Imagen de elaboración propia creada con GeoGebra)

9. Anexo 4: Mapa



Fuente: Wikipedia Commons. [*https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Political_World_%281938%29.svg*](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Political_World_%281938%29.svg)

10. Anexo 5: Rúbricas de evaluación

ACTIVIDAD 1					
Indicador de logro	**0 No conseguido**	**1 En proceso**	**2 Bien**	**3 Excelente**	**Criterio de evaluación**
3.2. Crea modificaciones del problema	No crea ninguna modificación del problema	Crea alguna modificación	Crea alguna modificación original del problema	Crea varias modificaciones originales del problema	3
4.2. Identifica algoritmos para resolver problemas	No identifica ningún algoritmo	Identifica algún algoritmo, aunque inadecuado	Identifica algún algoritmo adecuado	Identifica varios algoritmos adecuados	4
5.2. Aplica los conocimientos previos	No aplica los conocimientos previos	Aplica alguno de los conocimientos previos de manera errónea	Aplica alguno de los conocimientos previos adecuadamente	Aplica todos los conocimientos previos necesarios correctamente	5
6.1.A Identifica la relación de las matemáticas con el diseño y confección de trajes	No identifica ninguna relación	-	-	Identifica las relaciones	6
6.2. Identifica la relación de las matemáticas con la historia y con la tecnología	No identifica ninguna relación	-	Identifica la relación con la historia o con la tecnología	Identifica las relaciones con la historia y la tecnología	6
7.1.A Representa conceptos o información de diferentes modos	No representa los conceptos	Representa algunos conceptos del mismo modo	Representa algunos concepto de diferentes modos	Representa todos los conceptos de diferentes modos	7
7.2. Utiliza la papiroflexia o material manipulativo para resolver problemas	No utiliza ningún material	Utiliza algún material, pero no de forma correcta	Utiliza algún material forma correcta	Utiliza diferentes materiales correctamente	7
8.1. Explica de forma clara y concisa con lenguaje matemático los procesos	No explica los procesos	Explica los procesos sin usar lenguaje matemático	Explica la mayoría de los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	Explica todos los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	8
8.2. Reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana	No reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana	-	-	Reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana	8
9.1 Muestra interés y curiosidad por aprender y mejorar en matemáticas	No muestra ningún interés ni curiosidad en la actividad	Se implica lo mínimo y se interesa en momentos muy puntuales	Se implica en la mayoría del tiempo y muestra interés y curiosidad	Muestra interés e implicación durante toda la actividad	9
9.2. Desarrolla una actitud positiva y perseverante en el aprendizaje matemático	No muestra ningún interés y no se implica en la actividad	Se implica lo mínimo y muestra una actitud indiferente	Se implica en la mayoría del tiempo con buena actitud	Actitud positiva e implicación durante toda la actividad	9
10.1.A Participa activamente en el trabajo en equipo	No participa con su grupo	Participa esporádicamente con su grupo	Participa casi siempre con su grupo	Participa siempre con todos los miembros del grupo	10
10.1.B Respeta las diferentes opiniones y propuestas de sus compañeros	No respeta las propuestas y opiniones de sus compañeros	Respeta las opiniones y propuestas si son las mismas que las suyas	Respeta las opiniones y propuestas en algunas decisiones	Respeta las opiniones y propuestas de sus compañeros forma asertiva	10

ACTIVIDAD 2					
Indicador de logro	**0 No conseguido**	**1 En proceso**	**2 Bien**	**3 Excelente**	**Criterio de evaluación**
1.1. A Identifica los datos del problema	No identifica los datos del problema ni lo que se pide resolver	Identifica algunos datos, pero no lo que se pide resolver	Identifica adecuadamente la mayor parte de los datos	Identifica todos los datos del problema	1
1.1. B Establece relaciones con los datos del problema	No relaciona los datos del problema	Relaciona alguno de los datos y no todos de la manera correcta	Relaciona adecuadamente la mayor parte de los datos	Relaciona todos los datos del problema correctamente	1
1.2. Utiliza una estrategia correcta para resolver los problemas	No utiliza ninguna estrategia	Utiliza una estrategia escasa e inadecuada	Utiliza una estrategia correcta pero no la desarrolla correctamente	Utiliza una buena estrategia y la aplica correctamente	1
1.3. Obtiene soluciones del problema	No realiza ningún cálculo	Los cálculos realizados no están completos o contienen fallos	Los cálculos realizados son adecuados, pero contienen algún pequeño fallo	Los cálculos son adecuados y correctos.	1
2.1. Corrige las soluciones inadecuadas	No corrige las soluciones inadecuadas	Corrige alguna de las soluciones inadecuadas, pero no de forma correcta	Corrige alguna de las soluciones inadecuadas, de forma correcta	Corrige adecuadamente todas las soluciones inadecuadas	2
2.2. Razona la validez de las soluciones en función del contexto	No comprueba la validez de las soluciones	Razona la validez de alguna de las soluciones, pero no correctamente	Razona la validez de alguna de las soluciones de forma correcta	Razona la validez de todas la soluciones	2
3.1. Comprueba conjeturas de forma guiada	No comprueba las conjeturas	Comprueba alguna conjetura, pero no correctamente	Comprueba alguna conjetura correctamente	Comprueba todas las conjeturas correctamente	3
4.1.A Descompone el problema en partes más simples	No descompone el problema	Descompone alguna parte del problema, pero no lo simplifica	Descompone alguna parte del problema en partes más simples	Descompone todo problema en partes más simples	4
4.1.B Organiza y relaciona las pequeñas partes del problema	No relaciona ni organiza las partes del problema	Relaciona alguna parte del problema, pero no las organiza	Relaciona y organiza alguna parte del problema	Organiza y relaciona todas las partes del problema	4
6.3. Reconoce la aportación de las matemáticas en el desarrollo humano	No reconoce la aportación de las matemáticas	-	Reconoce alguna aportación de las matemáticas	Reconoce la aportación de las matemáticas en diferentes ámbitos	6
7.2. Utiliza la papiroflexia o material manipulativo para resolver problemas	No utiliza ningún material	Utiliza algún material, pero no de forma correcta	Utiliza algún material forma correcta	Utiliza diferentes materiales correctamente	7
8.1. Explica de forma clara y concisa con lenguaje matemático los procesos	No explica los procesos	Explica los procesos sin usar lenguaje matemático	Explica la mayoría de los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	Explica todos los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	8
8.2. Reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana	No reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana	-	-	Reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana	8
9.1 Muestra interés y curiosidad por aprender y mejorar en matemáticas	No muestra ningún interés ni curiosidad en la actividad	Se implica lo mínimo y se interesa en momentos muy puntuales	Se implica en la mayoría del tiempo y muestra interés y curiosidad	Muestra interés e implicación durante toda la actividad	9
9.2. Desarrolla una actitud positiva y perseverante en el aprendizaje matemático	No muestra ningún interés y no se implica en la actividad	Se implica lo mínimo y muestra una actitud indiferente	Se implica en la mayoría del tiempo con buena actitud	Actitud positiva e implicación durante toda la actividad	9

ACTIVIDAD 3					
Indicador de logro	**0 No conseguido**	**1 En proceso**	**2 Bien**	**3 Excelente**	**Criterio de evaluación**
1.2. Utiliza una estrategia correcta para resolver los problemas	No utiliza ninguna estrategia	Utiliza una estrategia escasa e inadecuada	Utiliza una estrategia correcta pero no la desarrolla correctamente	Utiliza una buena estrategia y la aplica correctamente	1
1.3. Obtiene soluciones del problema	No realiza ningún cálculo	Los cálculos realizados no están completos o contienen fallos	Los cálculos realizados son adecuados, pero contienen algún pequeño fallo	Los cálculos son adecuados y correctos.	1
2.2. Razona la validez de las soluciones en función del contexto	No comprueba la validez de las soluciones	Razona la validez de alguna de las soluciones, pero no correctamente	Razona la validez de alguna de las soluciones de forma correcta	Razona la validez de todas la soluciones	2
4.1.A Descompone el problema en partes más simples	No descompone el problema	Descompone alguna parte del problema, pero no lo simplifica	Descompone alguna parte del problema en partes más simples	Descompone todo problema en partes más simples	4
4.1.B Organiza y relaciona las pequeñas partes del problema	No relaciona ni organiza las partes del problema	Relaciona alguna parte del problema, pero no las organiza	Relaciona y organiza alguna parte del problema	Organiza y relaciona todas las partes del problema	4
4.2. Identifica algoritmos para resolver problemas	No identifica ningún algoritmo	Identifica algún algoritmo, aunque inadecuado	Identifica algún algoritmo adecuado	Identifica varios algoritmos adecuados	4
6.2. Identifica la relación de las matemáticas con la historia y con la tecnología	No identifica ninguna relación	-	Identifica la relación con la historia o con la tecnología	Identifica las relaciones con la historia y la tecnología	6
6.3. Reconoce la aportación de las matemáticas en el desarrollo humano	No reconoce la aportación de las matemáticas	-	Reconoce alguna aportación de las matemáticas	Reconoce la aportación de las matemáticas en diferentes ámbitos	6
7.2. Utiliza la papiroflexia o material manipulativo para resolver problemas	No utiliza ningún material	Utiliza algún material, pero no de forma correcta	Utiliza algún material forma correcta	Utiliza diferentes materiales correctamente	7
10.1.A Participa activamente en el trabajo en equipo	No participa con su grupo	Participa esporádicamente con su grupo	Participa casi siempre con su grupo	Participa siempre con todos los miembros del grupo	10
10.1.B Respeta las diferentes opiniones y propuestas de sus compañeros	No respeta las propuestas y opiniones de sus compañeros	Respeta las opiniones y propuestas si son las mismas que las suyas	Respeta las opiniones y propuestas en algunas decisiones	Respeta las opiniones y propuestas de sus compañeros forma asertiva	10
10.2. Asume su rol de equipo	No asume ni identifica su rol en el grupo	Identifica su rol en el grupo, pero no cumple sus funciones	Identifica y asume su rol en el equipo en casi toda la actividad	Identifica y asume su rol de grupo durante toda la actividad	10

ACTIVIDAD 4					
Indicador de logro	**0 No conseguido**	**1 En proceso**	**2 Bien**	**3 Excelente**	**Criterio de evaluación**
2.2. Razona la validez de las soluciones en función del contexto	No comprueba la validez de las soluciones	Razona la validez de alguna de las soluciones, pero no correctamente	Razona la validez de alguna de las soluciones de forma correcta	Razona la validez de todas la soluciones	2
3.1. Comprueba conjeturas de forma guiada	No comprueba las conjeturas	Comprueba alguna conjetura, pero no correctamente	Comprueba alguna conjetura correctamente	Comprueba todas las conjeturas correctamente	3
3.2. Crea modificaciones del problema	No crea ninguna modificación del problema	Crea alguna modificación	Crea alguna modificación original del problema	Crea varias modificaciones originales del problema	3
3.3. Comprueba adecuadamente las soluciones con herramientas tecnológicas	No comprueba las soluciones ni con papiroflexia ni con GeoGebra	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia o con GeoGebra, pero con algún error	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia o con GeoGebra correctamente	Comprueba las soluciones adecuadamente con papiroflexia o con GeoGebra	3
5.1. Relaciona los diferentes contenidos matemáticos	No relaciona los contenidos	Relaciona dos o tres contenidos implicados en la actividad	Relaciona más de tres contenidos implicados en la actividad	Relaciona todos los contenidos implicados en la actividad	5
5.2. Aplica los conocimientos previos	No aplica los conocimientos previos	Aplica alguno de los conocimientos previos de manera errónea	Aplica alguno de los conocimientos previos adecuadamente	Aplica todos los conocimientos previos necesarios correctamente	5
7.1.A Representa conceptos o información de diferentes modos	No representa los conceptos	Representa algunos conceptos del mismo modo	Representa algunos concepto de diferentes modos	Representa todos los conceptos de diferentes modos	7
7.1.B Representa procesos de diferentes modos	No representa los procesos	Representa algunos procesos del mismo modo	Representa algunos procesos de diferentes modos	Representa todos los procesos de diferentes modos	7
7.2. Utiliza la papiroflexia o material manipulativo para resolver problemas	No utiliza ningún material	Utiliza algún material, pero no de forma correcta	Utiliza algún material forma correcta	Utiliza diferentes materiales correctamente	7
8.1. Explica de forma clara y concisa con lenguaje matemático los procesos	No explica los procesos	Explica los procesos sin usar lenguaje matemático	Explica la mayoría de los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	Explica todos los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	8
8.2. Reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana	No reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana	-	-	Reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana	8
10.1.B Respeta las diferentes opiniones y propuestas de sus compañeros	No respeta las propuestas y opiniones de sus compañeros	Respeta las opiniones y propuestas si son las mismas que las suyas	Respeta las opiniones y propuestas en algunas decisiones	Respeta las opiniones y propuestas de sus compañeros forma asertiva	10

ACTIVIDAD 5					
Indicador de logro	**0 No conseguido**	**1 En proceso**	**2 Bien**	**3 Excelente**	**Criterio de evaluación**
3.1. Comprueba conjeturas de forma guiada	No comprueba las conjeturas	Comprueba alguna conjetura, pero no correctamente	Comprueba alguna conjetura correctamente	Comprueba todas las conjeturas correctamente	3
3.3. Comprueba adecuadamente las soluciones con herramientas tecnológicas	No comprueba las soluciones ni con papiroflexia ni con GeoGebra	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia o con GeoGebra, pero con algún error	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia o con GeoGebra correctamente	Comprueba las soluciones adecuadamente con papiroflexia o con GeoGebra	3
5.1. Relaciona los diferentes contenidos matemáticos	No relaciona los contenidos	Relaciona dos o tres contenidos implicados en la actividad	Relaciona más de tres contenidos implicados en la actividad	Relaciona todos los contenidos implicados en la actividad	5
5.2. Aplica los conocimientos previos	No aplica los conocimientos previos	Aplica alguno de los conocimientos previos de manera errónea	Aplica alguno de los conocimientos previos adecuadamente	Aplica todos los conocimientos previos necesarios correctamente	5
6.1.A Identifica la relación de las matemáticas con el diseño y confección de trajes	No identifica ninguna relación	-	-	Identifica las relaciones	6
7.2. Utiliza la papiroflexia o material manipulativo para resolver problemas	No utiliza ningún material	Utiliza algún material, pero no de forma correcta	Utiliza algún material forma correcta	Utiliza diferentes materiales correctamente	7
8.1. Explica de forma clara y concisa con lenguaje matemático los procesos	No explica los procesos	Explica los procesos sin usar lenguaje matemático	Explica la mayoría de los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	Explica todos los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	8
9.1 Muestra interés y curiosidad por aprender y mejorar en matemáticas	No muestra ningún interés ni curiosidad en la actividad	Se implica lo mínimo y se interesa en momentos muy puntuales	Se implica en la mayoría del tiempo y muestra interés y curiosidad	Muestra interés e implicación durante toda la actividad	9
9.2. Desarrolla una actitud positiva y perseverante en el aprendizaje matemático	No muestra ningún interés y no se implica en la actividad	Se implica lo mínimo y muestra una actitud indiferente	Se implica en la mayoría del tiempo con buena actitud	Actitud positiva e implicación durante toda la actividad	9
10.1.A Participa activamente en el trabajo en equipo	No participa con su grupo	Participa esporádicamente con su grupo	Participa casi siempre con su grupo	Participa siempre con todos los miembros del grupo	10
10.1.B Respeta las diferentes opiniones y propuestas de sus compañeros	No respeta las propuestas y opiniones de sus compañeros	Respeta las opiniones y propuestas si son las mismas que las suyas	Respeta las opiniones y propuestas en algunas decisiones	Respeta las opiniones y propuestas de sus compañeros forma asertiva	10
10.2. Asume su rol de equipo	No asume ni identifica su rol en el grupo	Identifica su rol en el grupo, pero no cumple sus funciones	Identifica y asume su rol en el equipo en casi toda la actividad	Identifica y asume su rol de grupo durante toda la actividad	10

ACTIVIDAD 6					
Indicador de logro	**0 No conseguido**	**1 En proceso**	**2 Bien**	**3 Excelente**	**Criterio de evaluación**
1.1. A Identifica los datos del problema	No identifica los datos del problema ni lo que se pide resolver	Identifica algunos datos, pero no lo que se pide resolver	Identifica adecuadamente la mayor parte de los datos	Identifica todos los datos del problema	1
1.3. Obtiene soluciones del problema	No realiza ningún cálculo	Los cálculos realizados no están completos o contienen fallos	Los cálculos realizados son adecuados, pero contienen algún pequeño fallo	Los cálculos son adecuados y correctos.	1
3.1. Comprueba conjeturas de forma guiada	No comprueba las conjeturas	Comprueba alguna conjetura, pero no correctamente	Comprueba alguna conjetura correctamente	Comprueba todas las conjeturas correctamente	3
3.3. Comprueba adecuadamente las soluciones con herramientas tecnológicas	No comprueba las soluciones ni con papiroflexia ni con GeoGebra	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia o con GeoGebra, pero con algún error	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia o con GeoGebra correctamente	Comprueba las soluciones adecuadamente con papiroflexia o con GeoGebra	3
5.2. Aplica los conocimientos previos	No aplica los conocimientos previos	Aplica alguno de los conocimientos previos de manera errónea	Aplica alguno de los conocimientos previos adecuadamente	Aplica todos los conocimientos previos necesarios correctamente	5
6.1.A Identifica la relación de las matemáticas con el diseño y confección de trajes	No identifica ninguna relación	-	-	Identifica las relaciones	6
6.1.B Identifica la relación de las matemáticas con la compraventa de productos	No identifica ninguna la relación	-	-	Identifica las relaciones	6
7.2. Utiliza la papiroflexia o material manipulativo para resolver problemas	No utiliza ningún material	Utiliza algún material, pero no de forma correcta	Utiliza algún material forma correcta	Utiliza diferentes materiales correctamente	7
8.1. Explica de forma clara y concisa con lenguaje matemático los procesos	No explica los procesos	Explica los procesos sin usar lenguaje matemático	Explica la mayoría de los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	Explica todos los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	8
10.1.A Participa activamente en el trabajo en equipo	No participa con su grupo	Participa esporádicamente con su grupo	Participa casi siempre con su grupo	Participa siempre con todos los miembros del grupo	10
10.2. Asume su rol de equipo	No asume ni identifica su rol en el grupo	Identifica su rol en el grupo, pero no cumple sus funciones	Identifica y asume su rol en el equipo en casi toda la actividad	Identifica y asume su rol de grupo durante toda la actividad	10

ACTIVIDAD 7					
Indicador de logro	**0 No conseguido**	**1 En proceso**	**2 Bien**	**3 Excelente**	**Criterio de evaluación**
1.1. A Identifica los datos del problema	No identifica los datos del problema ni lo que se pide resolver	Identifica algunos datos, pero no lo que se pide resolver	Identifica adecuadamente la mayor parte de los datos	Identifica todos los datos del problema	1
1.1. B Establece relaciones con los datos del problema	No relaciona los datos del problema	Relaciona alguno de los datos y no todos de la manera correcta	Relaciona adecuadamente la mayor parte de los datos	Relaciona todos los datos del problema correctamente	1
1.2. Utiliza una estrategia correcta para resolver los problemas	No utiliza ninguna estrategia	Utiliza una estrategia escasa e inadecuada	Utiliza una estrategia correcta pero no la desarrolla correctamente	Utiliza una buena estrategia y la aplica correctamente	1
1.3. Obtiene soluciones del problema	No realiza ningún cálculo	Los cálculos realizados no están completos o contienen fallos	Los cálculos realizados son adecuados, pero contienen algún pequeño fallo	Los cálculos son adecuados y correctos.	1
2.1. Corrige las soluciones inadecuadas	No corrige las soluciones inadecuadas	Corrige alguna de las soluciones inadecuadas, pero no de forma correcta	Corrige alguna de las soluciones inadecuadas, de forma correcta	Corrige adecuadamente todas las soluciones inadecuadas	2
2.2. Razona la validez de las soluciones en función del contexto	No comprueba la validez de las soluciones	Razona la validez de alguna de las soluciones, pero no correctamente	Razona la validez de alguna de las soluciones de forma correcta	Razona la validez de todas la soluciones	2
3.3. Comprueba adecuadamente las soluciones con herramientas tecnológicas	No comprueba las soluciones ni con papiroflexia ni con GeoGebra	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia o con GeoGebra, pero con algún error	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia o con GeoGebra correctamente	Comprueba las soluciones adecuadamente con papiroflexia o con GeoGebra	3
4.1.A Descompone el problema en partes más simples	No descompone el problema	Descompone alguna parte del problema, pero no lo simplifica	Descompone alguna parte del problema en partes más simples	Descompone todo problema en partes más simples	4
4.1.B Organiza y relaciona las pequeñas partes del problema	No relaciona ni organiza las partes del problema	Relaciona alguna parte del problema, pero no las organiza	Relaciona y organiza alguna parte del problema	Organiza y relaciona todas las partes del problema	4
4.2. Identifica algoritmos para resolver problemas	No identifica ningún algoritmo	Identifica algún algoritmo, aunque inadecuado	Identifica algún algoritmo adecuado	Identifica varios algoritmos adecuados	4
5.1. Relaciona los diferentes contenidos matemáticos	No relaciona los contenidos	Relaciona dos o tres contenidos implicados en la actividad	Relaciona más de tres contenidos implicados en la actividad	Relaciona todos los contenidos implicados en la actividad	5
5.2. Aplica los conocimientos previos	No aplica los conocimientos previos	Aplica alguno de los conocimientos previos de manera errónea	Aplica alguno de los conocimientos previos adecuadamente	Aplica todos los conocimientos previos necesarios correctamente	5
6.1.B Identifica la relación de las matemáticas con la compraventa de productos	No identifica ninguna la relación	-	-	Identifica las relaciones	6
7.2. Utiliza la papiroflexia o material manipulativo para resolver problemas	No utiliza ningún material	Utiliza algún material, pero no de forma correcta	Utiliza algún material forma correcta	Utiliza diferentes materiales correctamente	7
8.1. Explica de forma clara y concisa con lenguaje matemático los procesos	No explica los procesos	Explica los procesos sin usar lenguaje matemático	Explica la mayoría de los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	Explica todos los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	8
8.2. Reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana	No reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana	-	-	Reconoce el lenguaje matemático en aspectos de la vida cotidiana	8

ACTIVIDAD 8					
Indicador de logro	**0 No conseguido**	**1 En proceso**	**2 Bien**	**3 Excelente**	**Criterio de evaluación**
1.1. A Identifica los datos del problema	No identifica los datos del problema ni lo que se pide resolver	Identifica algunos datos, pero no lo que se pide resolver	Identifica adecuadamente la mayor parte de los datos	Identifica todos los datos del problema	1
1.1. B Establece relaciones con los datos del problema	No relaciona los datos del problema	Relaciona alguno de los datos y no todos de la manera correcta	Relaciona adecuadamente la mayor parte de los datos	Relaciona todos los datos del problema correctamente	1
1.2. Utiliza una estrategia correcta para resolver los problemas	No utiliza ninguna estrategia	Utiliza una estrategia escasa e inadecuada	Utiliza una estrategia correcta pero no la desarrolla correctamente	Utiliza una buena estrategia y la aplica correctamente	1
1.3. Obtiene soluciones del problema	No realiza ningún cálculo	Los cálculos realizados no están completos o contienen fallos	Los cálculos realizados son adecuados, pero contienen algún pequeño fallo	Los cálculos son adecuados y correctos.	1
3.1. Comprueba conjeturas de forma guiada	No comprueba las conjeturas	Comprueba alguna conjetura, pero no correctamente	Comprueba alguna conjetura correctamente	Comprueba todas las conjeturas correctamente	3
3.3. Comprueba adecuadamente las soluciones con herramientas tecnológicas	No comprueba las soluciones ni con papiroflexia ni con GeoGebra	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia o con GeoGebra, pero con algún error	Comprueba alguna de las soluciones con papiroflexia o con GeoGebra correctamente	Comprueba las soluciones adecuadamente con papiroflexia o con GeoGebra	3
4.1.A Descompone el problema en partes más simples	No descompone el problema	Descompone alguna parte del problema, pero no lo simplifica	Descompone alguna parte del problema en partes más simples	Descompone todo problema en partes más simples	4
4.1.B Organiza y relaciona las pequeñas partes del problema	No relaciona ni organiza las partes del problema	Relaciona alguna parte del problema, pero no las organiza	Relaciona y organiza alguna parte del problema	Organiza y relaciona todas las partes del problema	4
4.2. Identifica algoritmos para resolver problemas	No identifica ningún algoritmo	Identifica algún algoritmo, aunque inadecuado	Identifica algún algoritmo adecuado	Identifica varios algoritmos adecuados	4
5.2. Aplica los conocimientos previos	No aplica los conocimientos previos	Aplica alguno de los conocimientos previos de manera errónea	Aplica alguno de los conocimientos previos adecuadamente	Aplica todos los conocimientos previos necesarios correctamente	5
7.1.A Representa conceptos o información de diferentes modos	No representa los conceptos	Representa algunos conceptos del mismo modo	Representa algunos concepto de diferentes modos	Representa todos los conceptos de diferentes modos	7
7.1.B Representa procesos de diferentes modos	No representa los procesos	Representa algunos procesos del mismo modo	Representa algunos procesos de diferentes modos	Representa todos los procesos de diferentes modos	7
7.2. Utiliza la papiroflexia o material manipulativo para resolver problemas	No utiliza ningún material	Utiliza algún material, pero no de forma correcta	Utiliza algún material forma correcta	Utiliza diferentes materiales correctamente	7
8.1. Explica de forma clara y concisa con lenguaje matemático los procesos	No explica los procesos	Explica los procesos sin usar lenguaje matemático	Explica la mayoría de los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	Explica todos los procesos de forma clara y concisa con lenguaje matemático	8