



Universidad de Valladolid

**Dpto. de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la
Matemática**

DOMINIO AFECTIVO MATEMÁTICO EN CONTEXTOS PROPIOS DE AULAS DE PENSAMIENTO (THINKING CLASSROOMS)

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria
y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Especialidad en Matemáticas.

Alumno: Alazne Angulo Conde

Tutor: José María Marbán Prieto

Valladolid, junio de 2023

Resumen

Tradicionalmente, la educación matemática se ha basado en demasiadas ocasiones en la memorización de conceptos y procedimientos a partir de los cuales resolver cuestiones matemáticas; sin embargo, esta forma de adquirir conocimientos limita el desarrollo de las habilidades de comprensión y razonamiento por parte de los estudiantes. Es precisamente la preocupación por las habilidades asociadas al razonamiento matemático la principal motivación de este Trabajo Fin de Máster, a través del cual se plantea una propuesta que trata de fomentar dicho razonamiento en secundaria desde un enfoque basado en el aprendizaje significativo y equitativo de las matemáticas, atendiendo a su vez a diversidad presente en las aulas y, en particular, a las diferencias afectivas del alumnado en su relación con las matemáticas. La propuesta se centra en la puesta en práctica de una experiencia fundamentada en la idea de *Thinking Classrooms*, las cuales presentan un enfoque innovador a través del cual transformar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir del pensamiento crítico, la colaboración y la inclusión de todos los estudiantes. Esta propuesta incluye un conjunto de actividades diseñadas siguiendo algunas de las prácticas que plantean este tipo de aulas de pensamiento adaptadas al caso concreto del tratamiento curricular de los sistemas de ecuaciones en un curso de tercero de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), así como reflexiones y conclusiones obtenidas a partir de su puesta en práctica en un centro de Educación Secundaria de la provincia de Valladolid.

Palabras clave: Dominio afectivo, educación secundaria, inclusión, matemáticas, razonamiento matemático, *Thinking Classrooms*.

Abstract

Conventionally, mathematics education has been based on the memorization of concepts and procedures. These storing competencies should make possible to solve mathematical questions, however this way of acquiring knowledge restricts the development of comprehension and reasoning skills of the students. Precisely, the main motivation of this project (TFM) is about the concern on the abilities associated with the mathematical reasoning. Through this TFM a proposal that aims to promote mathematical reasoning in secondary school is presented. This didactic proposal is raised from an approach based on meaningful and equitable learning of mathematics, attending both the cultural diversity that exists in the classroom, and, particularly, the affective

differences of schoolchildren in their relationship with mathematics. This educational proposal is focused on the implementation of an informed experience on the *Thinking Classrooms* methodology, which presents an innovative approach to transform the education and learning of mathematics from the critical thinking, collaboration, and inclusiveness of all students. The proposal includes a set of activities designed following some practical lessons proposed in these kind of thinking classrooms which has been adapted to the following particular case: curricular treatment of the topic of systems of equations in a third year of Compulsory Secondary Education (ESO). The proposal also contains considerations and conclusions obtained from its practical implementation in a Secondary Education school in the province of Valladolid.

Key words: Affective domain, inclusion, mathematical reasoning, mathematics, *Thinking Classrooms*, secondary education.

Índice General

1. Introducción.....	7
2. Marco teórico.....	9
2.1. Competencia matemática.....	10
2.2. Razonamiento matemático.....	15
2.3. <i>Thinking classrooms</i>	20
2.4. Inclusión.....	29
2.5. Dominio afectivo.....	33
3. Desarrollo de la innovación.....	38
3.1. Contextualización.....	38
3.1.1. El barrio de Pajarillos.....	39
3.1.2. IES Galileo.....	40
3.2. Justificación y objetivos de la propuesta.....	43
3.3. Contribución a las competencias clave.....	44
3.4. Contribución a las competencias específicas.....	46
3.5. Contenidos.....	51
3.6. Descripción de la propuesta.....	53
3.7. Metodología empleada.....	57
3.8. Materiales y recursos didácticos.....	58
3.9. Puesta en práctica de la propuesta.....	58
3.10. Actividades de aprendizaje.....	67
3.11. Evaluación.....	69
3.12. Resultados de aprendizaje.....	74

4. Conclusión y reflexión final.....	77
5. Referencias.....	80
6. Anexos	86
Anexo I. Actividades secuenciales.....	86

Índice de Figuras

Figura 1. La competencia matemática en los informes PISA.	13
Figura 2. Criterios para la formación de grupos en el aula.	22
Figura 3. Esquema de las variables importantes a la hora de organizar la clase.	23
Figura 4. Esquema de la relación entre el reto y la habilidad para mantener el ritmo de la clase. ..	26
Figura 5. Alumnos resolviendo las secuencias de actividades por el método gráfico.	60
Figura 6. Resolución de actividades secuenciales mediante el método gráfico por parte del alumnado.	61
Figura 7. Resolución de actividades secuenciales mediante el método de sustitución por parte del alumnado.	62
Figura 8. Movilidad entre grupos durante la resolución de las secuencias de actividades sobre el método de sustitución.	63
Figura 9. Interacción entre dos grupos a la hora de resolver secuencia de ejercicios.	64
Figura 10. Ejemplo de resolución de secuencias de actividades por parte del alumnado.	65
Figura 11. Ejemplo de la interacción entre dos grupos al resolver las secuencias de ejercicios.	66
Figura 12. Gráfico recopilatorio de respuestas del alumnado a cerca de los aspectos que más han ayudado a su aprendizaje.	75
Figura 13. Gráfico recopilatorio de respuestas del alumnado a cerca de los aspectos que podrían dificultar la resolución de las actividades.	76

Índice de Tablas

Tabla 1. Instrumento de navegación en el aula.	28
Tabla 2. Relación entre objetivos didácticos y criterios de evaluación.	69
Tabla 3. Rúbrica de evaluación.	73

1. Introducción.

El presente Trabajo de Fin de Máster constituye una propuesta educativa que trata de fomentar el razonamiento matemático desde un enfoque propio del aprendizaje significativo y equitativo de las matemáticas. Dicha propuesta educativa se ha planteado atendiendo a la diversidad presente en las aulas y, en particular, a aquellas relacionadas con el dominio afectivo matemático, siempre bajo principios propios de una educación matemática inclusiva.

La educación matemática desempeña un papel esencial en el desarrollo cognitivo y académico de los estudiantes, sin embargo, tradicionalmente esta se basaba en la memorización de fórmulas y procedimientos mediante los cuales resolver cuestiones matemáticas. Es esta forma de asimilar los conceptos matemáticos lo que limitaba el desarrollo de las habilidades de comprensión y razonamiento matemático, los cuales tienen mucha importancia, ya que facilitan el entendimiento de los conceptos a partir de los que nacen estos procedimientos o fórmulas. En la actualidad, dentro de la educación matemática, se ha reconocido la importancia de promover el pensamiento crítico, la participación activa y la inclusión de todos los estudiantes en el aprendizaje, a partir de la puesta en práctica de metodologías y espacios de trabajo que permitan el desarrollo de estas habilidades en el alumnado.

La propuesta didáctica planteada en las siguientes páginas se centrará en la puesta en práctica de una experiencia que parte de la idea o concepto de *Thinking Classrooms*, las cuales representan un enfoque innovador a partir del cual transformar la enseñanza y el aprendizaje de la materia, teniendo en cuenta la necesidad de fomentar el pensamiento crítico, la colaboración y la participación de todos los estudiantes. Esta idea no se basa únicamente en la adquisición de conocimientos matemáticos, ya que, a través de la resolución de actividades desafiantes y relacionadas con situaciones de la vida cotidiana, se desarrollan habilidades y actitudes relacionadas con el razonamiento matemático, la resolución de problemas y la argumentación matemática que les permitirán aplicar dicha materia en contextos reales.

En el contexto de educación inclusiva, las *Thinking Classrooms* desempeñan un papel fundamental al promover la participación activa del alumnado, independientemente de sus habilidades o estilos de aprendizaje, ya que buscan crear un entorno de trabajo seguro y que proporcione un apoyo emocional. A su vez, las *Thinking Classrooms* logran permitir al alumnado el acceso a una educación de calidad, así como el desarrollo de su potencial al máximo. Estos objetivos se consiguen al permitir que cada estudiante participe plenamente en su propio proceso de aprendizaje, así como en el del resto de compañeros dándoles a su vez la oportunidad de expresar sus ideas y contribuciones con libertad.

Puesto que las emociones, la motivación y la autoestima pueden influir en la forma en la que los estudiantes abordan desafíos relacionados con la materia, actualmente el dominio afectivo está considerado como un aspecto fundamental en lo relacionado con el aprendizaje de las matemáticas. La propuesta didáctica que será presentada a lo largo de este trabajo busca promover un ambiente de apoyo emocional, donde los estudiantes se encuentren seguros para ser capaces de asumir riesgos, cometer errores y aprender de ellos, creando un entorno de aprendizaje en el que los propios estudiantes se sientan valorados y donde se les brinde una retroalimentación constructiva.

En este documento se muestran los detalles de la propuesta didáctica planteada para tratar el tema del currículo relacionado con los sistemas de ecuaciones lineales en un curso de tercero de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Para ello, pondré en práctica todos los conocimientos adquiridos en cada una de las asignaturas cursadas en el máster, implementándola durante el periodo de prácticas de dicha titulación en un centro de enseñanza pública situado en la ciudad de Valladolid, recogiendo consideraciones por parte del alumnado y el profesorado del centro permitiendo establecer puntos fuertes de la misma, así como aspectos a modificar en futuras implementaciones.

A la hora de desarrollar el presente trabajo me han resultado útiles los conocimientos adquiridos a lo largo del master; así, de la asignatura *Diseño curricular en matemáticas* he adquirido las técnicas de manejo y comprensión de los diferentes apartados que conforman la ley educativa, así como su implementación, tanto de forma práctica como teórica en diferentes contextos educativos. La asignatura de *Didáctica de las matemáticas* me ha resultado muy útil en el momento de diseñar las secuencias de ejercicios empleadas en las

sesiones, ya que, estas actividades aumentan el nivel cognitivo necesario para llevarlas a cabo según el alumnado va superando distintos retos con diferente demanda cognitiva; a su vez, dicha materia me ha ayudado con la puesta en práctica de la propuesta. *Metodología y evaluación en matemáticas* me ha permitido conocer diferentes metodologías y técnicas metodológicas a utilizar en la propuesta didáctica, así como diseñar e implementar diferentes técnicas de evaluación. En la comprensión del propio concepto de innovación y su importancia en la educación secundaria y, en especial, de las matemáticas ha sido especialmente relevante lo aprendido en la asignatura de *Innovación docente en matemáticas*. Aunque *Iniciación a la investigación educativa en matemáticas* consiste en una materia teórica de más difícil aplicación directa durante unas prácticas cortas, las técnicas de búsqueda y análisis trabajadas en la misma me han resultado de ayuda a la hora de crear el marco teórico del presente trabajo, así como en la toma de datos en el aula. Y, por último, las *Prácticas externas en matemáticas* me han servido para poner en práctica la propuesta didáctica en un contexto real, permitiéndome reconocer puntos fuertes y débiles de la misma a tener en cuenta en futuras implementaciones.

Tras realizar una exposición teórica sobre las características de lo que supone la competencia matemática de las *Thinking Classroom*, en el trabajo se expone la propuesta didáctica en sí. Dicha propuesta didáctica, que se ha diseñado teniendo en cuenta la información contemplada en la nueva ley de educación (LOMLOE), incluye apartados de contextualización, justificación, contenidos y descripción de su implementación. Para finalizar, se incluye un apartado final que recoge las conclusiones que emanan de la realización de este trabajo.

2. Marco teórico.

A lo largo de este apartado se realizará una descripción de teorías, artículos e investigaciones a cerca de cuestiones relacionadas con el propio Trabajo Fin de Master y, en particular, referidas tanto a la metodología de las *Thinking Clasrooms*, como a la educación secundaria. A partir de estos estudios, a través de este apartado iremos tratando los conceptos de competencia matemática, razonamiento matemático, *Thinking*

Classrooms, inclusión y dominio afectivo, así como su relación, tanto entre ellos como con la educación matemática.

2.1. Competencia matemática.

La educación matemática persigue, entre otros objetivos, el que busca capacitar a la ciudadanía para utilizar las matemáticas en sus vidas cotidianas de forma eficiente, incluyendo su participación crítica, reflexiva y constructiva en la sociedad a través de la toma de decisiones que permitan afrontar con garantías de éxito los retos y desafíos que la propia sociedad en su dinámica continua de cambio le plantee académicamente, personalmente y profesionalmente a lo largo de su vida. Esto, en particular, implica que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no deben centrarse únicamente en la transmisión de conocimiento conceptual o en el entrenamiento de habilidades procedimentales matemáticas, sino que debe ir más allá, incluyendo también el desarrollo de competencias como la de pensamiento crítico o la de resolución de problemas así como una debida atención a la dimensión emocional o afectiva del aprendizaje matemático, con especial atención a la percepción de utilidad de las matemáticas, el desarrollo de niveles altos de autorregulación, el fomento de actitudes positivas hacia las matemáticas, la consolidación de un autoconcepto matemático sano y la gestión de la ansiedad matemática así como de otras emociones epistémicas en matemáticas, entre otras cuestiones.

Tras todo lo anteriormente mencionado, subyace un concepto o constructo esencial y de amplio uso ya en la comunidad educativa y científica vinculada a la educación matemática, el que se denomina competencia matemática. En este sentido, debe señalarse que existe una amplia gama de definiciones del término, algunas más operativas que otras, algo natural teniendo en cuenta la complejidad de su semántica y de sus potenciales implicaciones educativas. Así, por un lado, esta puede ser considerada como “la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y especiales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana”

(Jiménez, 2009). Otra forma de referirnos a la misma es la dada por Niss (2002), quien establece que la competencia matemática puede considerarse como “la habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una gran variedad de situaciones y contextos en los cuales la matemática juega un papel importante”. Dicha competencia puede entenderse también como “la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente sus ideas al tiempo que se plantean, formulan, resuelven e interpretan tareas matemáticas en una variedad de contextos” (Lora Navarro, 2009).

Especialmente relevante es la definición dada por la OCDE a través de su programa Program for International Student Assessment (PISA), quien considera que la educación debe centrarse en la adquisición de competencias que muestran el modo en que los estudiantes actúan a la hora de hacer matemáticas, es decir, se centran en lo que el alumnado es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas más que en el dominio formal de conceptos. De hecho, este programa tiene entre sus objetivos la generación de instrumentos de intervención en el aula de matemáticas mediante los cuales fomentar el razonamiento, el análisis y una comunicación eficiente por parte de los estudiantes durante la formulación y resolución de problemas matemáticos relacionados con una gran variedad de situaciones vinculadas con el mundo natural y social y basándose en la vida cotidiana del alumnado.

En particular, ya en el programa PISA de 2003, en el que la competencia matemática ocupaba el eje central, se consideraba la competencia matemática como una parte primordial de la educación formal. A su vez, la evaluación de esta competencia en los marcos de dicho programa se centra en cómo los estudiantes son capaces de utilizar lo aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no simplemente en conocer los contenidos del currículo que han aprendido.

De esta forma, PISA busca establecer un conjunto de competencias vinculadas entre ellas y con las que trabajar de forma simultánea a la hora de realizar actividades relacionadas con las matemáticas, evitando evaluarlas individualmente. Por otra parte, el programa PISA considera que los logros adquiridos por los estudiantes durante la resolución de problemas matemáticos pueden expresarse mediante las siguientes competencias:

1. *Pensar y razonar*. Incluye la capacidad de plantear cuestiones propias de las matemáticas, distinguir entre diferentes tipos de enunciados, entender y utilizar los conceptos matemáticos.
2. *Argumentar*. Incluye la capacidad de sugerir, valorar, crear y expresar diferentes argumentos matemáticos.
3. *Comunicar*. Incluye la capacidad de expresarse en diferentes situaciones relacionadas con las matemáticas y entender enunciados de otras personas tanto de forma oral como escrita.
4. *Modelar*. Incluye la capacidad de traducir la realidad a una estructura matemática e interpretar los modelos matemáticos presentes en la vida cotidiana.
5. *Plantear y resolver problemas*. Incluye la capacidad de resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante diferentes técnicas.
6. *Representar*. Incluye la capacidad de interpretar y distinguir diferentes tipos de representación y relacionarlos entre sí.
7. *Utilizar el lenguaje simbólico, formar y técnico y las operaciones*. Incluye la capacidad de manejar enunciados y expresiones que contienen símbolos y fórmulas y traducir al lenguaje simbólico enunciados del lenguaje cotidiano.
8. *Uso de herramientas y recursos*. Utilización de los recursos y herramientas conocidas en diferentes contextos o situaciones.

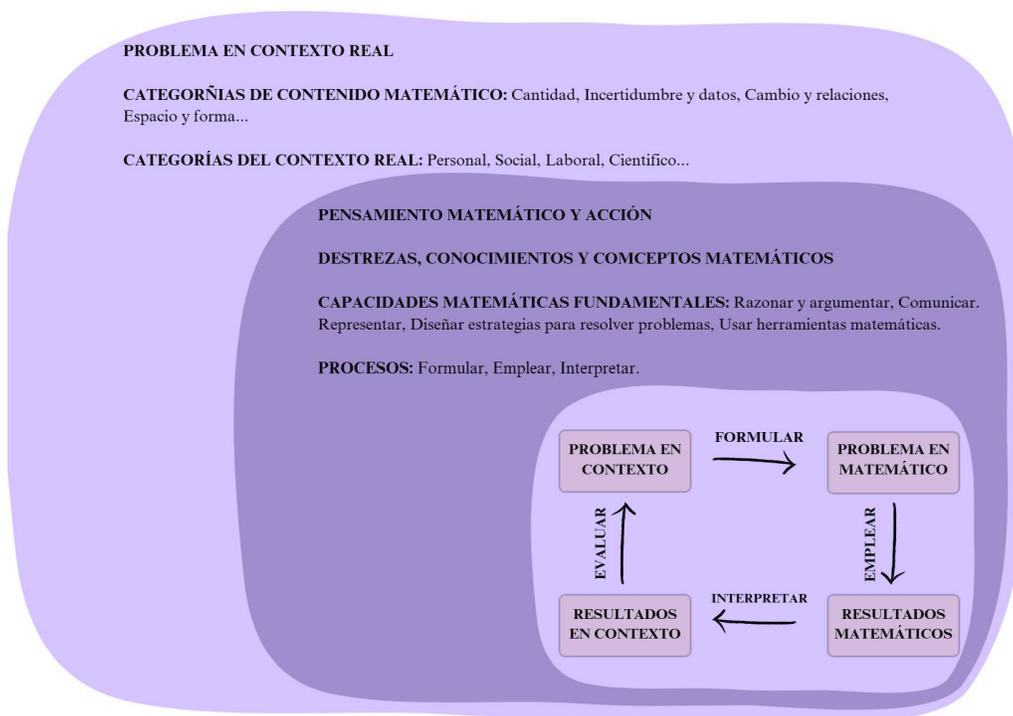
La conexión entre dichas competencias puede expresarse gráficamente como se muestra en la Figura 1.

La anterior ley de educación, la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) ya hablaba de competencia matemática como la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto, así, la competencia matemática requiere de conocimientos sobre los números, las medidas, las estructuras, las operaciones, las representaciones matemáticas y la comprensión de términos y conceptos matemáticos.

Tomando como base los informes presentados por PISA en relación con la educación en matemáticas, dentro de la Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE), ley educativa en vigor en España desde 2022, la competencia matemática es

considerada como la capacidad o habilidad de desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemático, junto a sus herramientas de pensamiento y representación, con el objetivo de describir, interpretar y predecir distintos fenómenos que permitan resolver problemas en situaciones cotidianas. Considerando dicha competencia como una de las siete competencias clave que deben promover en el sistema educativo.

Figura 1. *La competencia matemática en los informes PISA.*



Nota: Adaptado de “La competencia matemática en PISA” (p. 52), por L.Rico, 2007, *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 1(2).

Siguiendo, a su vez, las ideas presentadas en los informes y debido a que las competencias desempeñan un papel predominante en las expectativas de aprendizaje, en la LOMLOE se establece que se debe promover la enseñanza de las matemáticas de tal manera que se fomente el razonamiento lógico y crítico, la resolución de problemas y la creatividad, prestando especial atención a la diversidad de capacidades y ritmos de aprendizaje que pueden presentar los estudiantes. A su vez, se promueve el uso de las tecnologías de la

información de la comunicación (TIC), destacando la importancia de la colaboración y el trabajo en equipo para poder alcanzar el aprendizaje de esta competencia.

Siguiendo los aspectos mencionados anteriormente, la nueva ley educativa tiene como objetivo que la competencia matemática promueva el desarrollo de estrategias para entender y explicar el funcionamiento del entorno que rodea a los estudiantes, formando parte activa del mismo y contribuyendo al razonamiento y pensamiento científico. Para ello, los estudiantes deben utilizar el lenguaje matemático que les permitirá cuantificar variables de los fenómenos naturales, analizar causas, consecuencias y expresar conclusiones sobre el funcionamiento de la naturaleza. Es decir, tiene como objetivo la utilización de conocimientos para desarrollar un razonamiento crítico mediante el cual resolver problemas de la vida cotidiana y no simplemente la adquisición de conocimientos y procedimientos matemáticos.

Teniendo en cuenta dicha variedad de definiciones, para el presente trabajo tomaré como referencia la proporcionada por PISA, ya que se trata de la definición que más encaja en este trabajo, tanto por motivos normativos como en relación con mi propia visión de las matemáticas y su enseñanza, además de los estándares internacionales en este campo. Según esta definición, el razonamiento matemático puede considerarse como un componente clave de dicha competencia, ya que implica la capacidad de comprender y utilizar los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas en una gran variedad de contextos, así como aplicar el pensamiento lógico y deductivo para comprender y resolver problemas matemáticos en diferentes situaciones.

El presente trabajo persigue fomentar el pensamiento y la reflexión en matemáticas por parte del alumnado de Secundaria, por lo que, a la hora de diseñar tareas matemáticas que desarrollen este tipo de habilidades es sustancial centrarse en el tratamiento de dicho razonamiento matemático.

En el siguiente epígrafe se desarrollará en detalle el planteamiento que en este trabajo se hace en relación al razonamiento matemático, presentando los marcos teóricos en los que se apoya la propuesta de intervención descrita en este TFM, así como los marcos normativos de referencia.

2.2.Razonamiento matemático.

El razonamiento matemático es considerado como una habilidad esencial en la vida cotidiana y, por lo tanto, también en muchos campos profesionales y académicos; esto es así porque en una sociedad impulsada por la tecnología se considera cada vez más importante la capacidad de utilizar y comprender conceptos relacionados con las matemáticas para ser capaz de resolver problemas y tomar decisiones. Este razonamiento no implica únicamente la capacidad de realizar cálculos, sino que, al igual que en la competencia matemática, también la capacidad de analizar, interpretar y aplicar datos numéricos en diferentes contextos, principalmente relacionados con la vida cotidiana.

Existen múltiples definiciones sobre lo que se entiende por razonamiento matemático. Por una parte, algunos autores lo consideran como la habilidad de analizar, interpretar y aplicar conceptos matemáticos en diferentes situaciones y contextos (Rico,1997). Otros, sin embargo, lo definen como el proceso cognitivo que implica la identificación, análisis y evaluación de patrones y relaciones numéricas para resolver problemas (Quiceno Zuluaga, 2015). Así, también puede ser considerado como una forma de pensamiento crítico que implica la aplicación de principios y conceptos matemáticos para resolver problemas y tomar decisiones informadas en diferentes contextos (Alcívar y Concha, 2017).

En relación con los testimonios previos planteados en PISA 2003, el informe PISA 2021 considera que el razonamiento matemático involucra sopesar situaciones, elegir estrategias, sacar conclusiones lógicas, desarrollar y describir soluciones, y reconocer cómo esas soluciones pueden ser aplicadas. La capacidad de razonar lógicamente y de presentar argumentos de forma convincente es una habilidad que se está volviendo cada vez más importante. La Matemática es una ciencia a través de la cual los estudiantes aprenden que el razonamiento apropiado puede conducirles a resultados y conclusiones lógicas y objetivas, que no necesitan ser validadas por una autoridad externa; este tipo de razonamiento, que no es solamente útil en matemáticas, puede ser aprendido y practicado de modo efectivo en esta materia.

Existen dos aspectos del razonamiento matemático considerados especialmente importantes en el mundo y al plantear las preguntas que propone PISA en su evaluación. El primero de ellos es el razonamiento deductivo, el cual es una característica del proceso matemático; el segundo consiste en el razonamiento estadístico y probabilístico (inductivo), ya que, para entender la información presentada en la vida cotidiana, los estudiantes deben estar familiarizados con la naturaleza de los datos y tomar decisiones informadas teniendo en cuenta que los entornos son variables e incertidumbres.

Para desarrollar el razonamiento matemático, uno de los ejes centrales de la enseñanza matemática es necesaria la adquisición de conocimientos fundamentales ya adquiridos previamente. Entre estos conocimientos considerados fundamentales se encuentran:

- *Entender cantidades, sistemas numéricos y sus propiedades algebraicas.* Un amplio conocimiento de la cantidad y los sistemas numéricos ayuda al razonamiento de aplicaciones en la vida cotidiana de las matemáticas, ya que, en el mundo actual es cada vez más importante la capacidad de interpretación de patrones numérico, la comparación de patrones y otras habilidades numéricas.
- *Aplicar el poder de la abstracción y la representación simbólica.* Las ideas fundamentales de las matemáticas han surgido de la experiencia humana en el mundo y la necesidad de darle coherencia, orden y hacer posible dicha experiencia. En las matemáticas escolares, la abstracción forma relaciones entre objetos concretos, representaciones simbólicas y operaciones, incluyendo algoritmos y modelos mentales. Tener una apreciación de la abstracción y de la representación simbólica ayuda al razonamiento aplicando las matemáticas a la vida real, permitiendo a los estudiantes pasar de los detalles específicos de una situación a otros más generales.
- *Identificar las estructuras matemáticas y sus regularidades.* La identificación de estructuras está directamente relacionada con representación simbólica, ser capaz de identificar estructuras matemáticas ayuda al razonamiento en aplicaciones de la vida real de las matemáticas, ya que permiten a los estudiantes aplicar el conocimiento en

situaciones o problemas en un contexto a problemas en otro contexto con una estructura similar.

- *Reconocer las relaciones funcionales entre cantidades.* En aplicaciones de las matemáticas a situaciones de la vida cotidiana, reconocer las relaciones funcionales entre variables ayuda al razonamiento ya que permite a los estudiantes centrarse en cómo impactan la interdependencia e interacción entre las variables en la situación.
- *Usar la modelización matemática como una lente hacia la vida real.* El uso de modelos y en particular los modelos matemáticos ayuda al razonamiento sobre aplicaciones de las matemáticas a la vida real puesto que animan a los estudiantes a enfocarse en los elementos más significativos de las situaciones.
- *Entender la variación como el corazón de la estadística.* En una vida en constante cambio entender la variación como una característica central de la estadística ayuda al razonamiento en la aplicación de las matemáticas al mundo real puesto que incita a los estudiantes a trabajar argumentos basados en datos teniendo en cuenta las posibles limitaciones de las conclusiones obtenidas.

En la anterior ley educativa española, la LOMCE, se consideraba que el razonamiento matemático es una competencia básica a adquirir por los estudiantes durante su etapa educativa. A lo largo de la LOMCE se enfatizaba en la importancia del desarrollo de habilidades de resolución de problemas y pensamiento crítico en el aprendizaje y, más especialmente, en las matemáticas, estableciendo que los estudiantes deben ser capaces de analizar y evaluar información numérica, identificar patrones y relaciones, y utilizar estrategias efectivas para resolver dichos problemas matemático; señalaba a su vez, que es de suma importancia que los estudiantes sean capaces de comunicar y justificar procesos y soluciones matemáticas tanto de forma oral como escrita de manera clara y coherente. Por este motivo, esta ley consideraba que el razonamiento matemático tiene mucha importancia en la educación ya que implica la capacidad de comprender utilizar y aplicar conceptos matemáticos en situaciones cotidianas, así como en contextos académicos y profesionales

En la nueva ley educativa (LOMLOE), al igual que en la precedente, el razonamiento toma un papel muy importante dentro de la competencia matemática, ya que esta competencia es considerada como la habilidad de desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemático, junto a sus herramientas de pensamiento y representación, al objeto de describir, interpretar y predecir distintos fenómenos que permitan resolver problemas en situaciones matemáticas. Es decir, la LOMLOE enfatiza en la necesidad de enseñar matemáticas de manera que los estudiantes comprendan la utilidad y aplicación de los conceptos matemáticos en la resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana, además de considerar de suma importancia en el aprendizaje de las matemáticas la adquisición de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas, así como la comunicación de manera clara y coherente, tanto oral como escrita, de los procesos y soluciones llevados a cabo en cada momento. Estableciendo así, por lo tanto, el razonamiento matemático, como una habilidad esencial para los estudiantes y como objetivo común para todos los bloques de contenido.

A su vez el estudio PISA 2022 señala que el pensamiento matemático no consiste únicamente en la reproducción de procedimientos básicos de computación, sino en el razonamiento, así, la competencia matemática es considerada como la capacidad de razonar matemáticamente y de formular, emplear e interpretar las matemáticas para ser capaces de resolver problemas en una gran variedad de contextos de la vida real, proporcionando conceptos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos (Rico, 2007).

Ante esta situación, en 2003 la comunidad de Castilla y León se incorporó al Programa de Estimulación del Talento Matemático (ESTALMAT), creado por el profesor Miguel de Guzmán en 1988 (De Guzmán, 2002), en la Comunidad de Madrid, en colaboración con la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (RAC), con el objetivo de identificar, orientar y desarrollar el talento matemático en el alumnado de edades entre 12 y 16 años (Hernández, 2009). La idea de este programa surgió a partir de la idea de que existen estudiantes con grandes habilidades matemáticas, los cuales requieren un enfoque educativo específico y una atención específica para lograr su desarrollo académico.

Dicho programa, en Castilla y León busca proporcionar a los estudiantes una formación en matemáticas más profunda y desafiante, alejándose del currículo escolar de dicha comunidad. Para ello, se lleva a cabo un riguroso proceso de selección del alumnado que participará en dicho programa, los candidatos son evaluados mediante pruebas y exámenes matemáticos a partir de los cuales seleccionar aquellos alumnos que demuestren alto potencial en los mismos. Estos alumnos tienen la opción de formar parte del programa en el que participarán en clases impartidas por profesorado especializados en matemáticas y centradas en el razonamiento lógico, la resolución de problemas y el desarrollo de habilidades matemáticas avanzadas (Ramírez Uclés y Sánchez , 2020).

En apoyo al programa ESTALMAT, ha sido creado el Plan para el Desarrollo del Razonamiento Matemático en Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad de Castilla y León. Las medidas llevadas a cabo por este programa se centran en la formación del profesorado, así como en el diseño, la implementación y la evaluación de materiales didácticos para el área de matemáticas mediante los cuales impulsar propuestas metodológicas que potencien el razonamiento matemático y mejoren el aprendizaje del alumnado de Educación Secundaria obligatoria.

Un enfoque pedagógico que se centra en el desarrollo de este tipo de pensamiento crítico y en el fomento del razonamiento en el aula es el propuesto por las denominadas *Thinking Classrooms* (Lijedahl, 2020), entendidas como entornos concretos que se consideran propicios para el desarrollo del pensamiento matemático en el alumnado, fomentando la participación activa de los mismos, el diálogo y la colaboración. Al igual que el presente trabajo, las metodologías empleadas en las *Thinking Classrooms* se centra en que el alumnado adquiera un pensamiento más profundo y significativo, ayudando a los estudiantes a desarrollar habilidades de pensamiento matemático más sólidas y aplicarlas de manera efectiva en diversas situaciones matemáticas.

Durante la siguiente sección se desarrollará en detalle el concepto de dichas *Thinking Classrooms* y las prácticas que se desarrollaran a través del trabajo y sobre los cuales crearemos la propuesta de intervención planteada en el presente TFM.

2.3. *Thinking classrooms.*

La educación tradicional, durante estos años se ha centrado en transmitir ciertos conocimientos y habilidades básicas (Adler, 2017). Sin embargo, esta forma de impartir conocimiento no siempre es efectiva para fomentar el pensamiento crítico y creativo de los estudiantes, lo cual es esencial para que sean capaces de enfrentarse a los desafíos que se pueden encontrar a lo largo de su vida. Ante esta situación, numerosos educadores comenzaron a buscar formas de enseñar que fueran capaces de desarrollar en los estudiantes este tipo de habilidades de pensamiento profundo, surgiendo, en particular, las *Thinking Classrooms*.

Las *Thinking Classrooms* consisten en entornos educativos que tienen como principal objetivo estimular y mejorar el razonamiento matemático en las aulas de Secundaria. Este tipo de aulas buscan el desarrollo de habilidades de pensamiento de calidad y, para ello, utilizan métodos de aprendizaje que promueven la participación activa de los propios estudiantes en el proceso de aprendizaje.

El autor canadiense Peter Lijedahl sugiere que, para aprender matemáticas, en primer lugar, se debe “hacer matemáticas”, lo que lleva consigo el pensamiento y razonamiento (Lijedahl, 2020). Estas estrategias están relacionadas con la disposición de la clase, el material utilizado por el alumnado, la formación de grupos de colaboración óptimos, el uso de preguntas abiertas, la evaluación formativa, la toma de notas significativas por parte de los estudiantes, la interacción entre estudiantes e incluso con el profesor, etc., y se basan en la idea de que los estudiantes aprenden mejor cuando se enfrentan a desafíos intelectuales significativos y se les da la posibilidad de colaborar con otros para poder llegar a las soluciones.

El autor canadiense plantea, basándose en su experiencia personal, una serie de estrategias, organizadas en 14 prácticas educativas, mediante las cuales poder lograr que el alumnado mejore el razonamiento matemático dentro del aula. Las prácticas planteadas por el autor son las siguientes:

1. *Tipo de tarea.* El tipo de actividades que se realizan son un factor importante a la hora de crear una *Thinking Classroom*, ya que, si queremos que los estudiantes piensen

debemos darles algo en lo que pensar, es decir, lo que debe hacer una tarea es lograr que los estudiantes piensen durante su resolución.

La base de la competencia matemática se centra en la resolución de problemas, los cuales son beneficiosos para los estudiantes puesto que se ven involucrados en dicha resolución y no consisten en una aplicación precisa de procedimientos conocidos ni en la implementación de un algoritmo enseñado. Las buenas tareas de resolución de problemas requieren que los estudiantes se basen en una gran diversidad de conocimientos matemáticos, combinen diferentes maneras de resolver el problema, apliquen el conocimiento de forma novedosa y les hace pensar. Así, una tarea es considerada rica si es accesible, integrante, flexible y “abierta”, reta a pensar, alcanza diferentes niveles de complejidad, estimula la creatividad, etc.

Podemos identificar 3 tipos de tareas en relación con los contenidos que se tratan en ellas:

- No curriculares. Consisten en tareas atractivas para pensar sin una conexión explícita con el currículo.
- Curriculares programadas. Se tratan de tareas vinculadas al currículo planteadas antes de mostrar cómo se resuelven.
- Curriculares. Son aquellas tareas planteadas y resueltas bajo los principios propios de la instrucción directa.

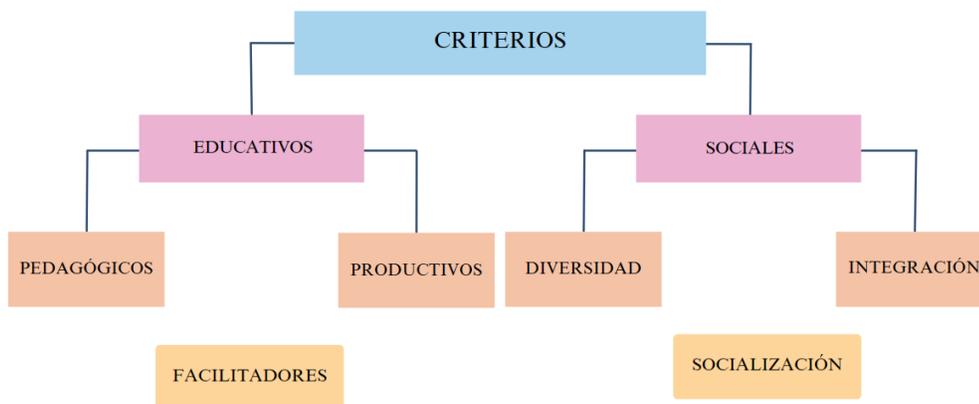
Lijedahl sugiere comenzar con tareas no curriculares para a continuación saltar a aquellas tareas curriculares programadas en las que se les demanda hacer algo sin indicar cómo.

2. *Agrupamientos*. Las *Thinking Classrooms* se basan en la teoría del aprendizaje cooperativo, la cual sostiene que el aprendizaje es más efectivo cuando los estudiantes trabajan juntos y comparten sus conocimientos.

A la hora de formar los grupos de cooperación hay que tener en cuenta que el objetivo consiste en que todos aprendan de todos para que finalmente todos los miembros del grupo logren finalizar el trabajo con éxito. Para formar los grupos podemos seguir diferentes criterios en función de los objetivos, pudiéndose formar una disonancia entre

los objetivos del profesor y los del estudiante. Los diferentes criterios para formar grupos pueden expresarse de forma esquemática como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Criterios para la formación de grupos en el aula.



El autor canadiense, para acabar con dicha disonancia, sugiere una formación aleatoria de los grupos, en la que se haga visible la aleatorización la cual se realice de forma frecuente y que esta misma debe indicar adónde deben ir. Además, estos grupos deben de optimizar redundancia y diversidad, por lo que sugiere que el tamaño óptimo de los grupos sea 3.

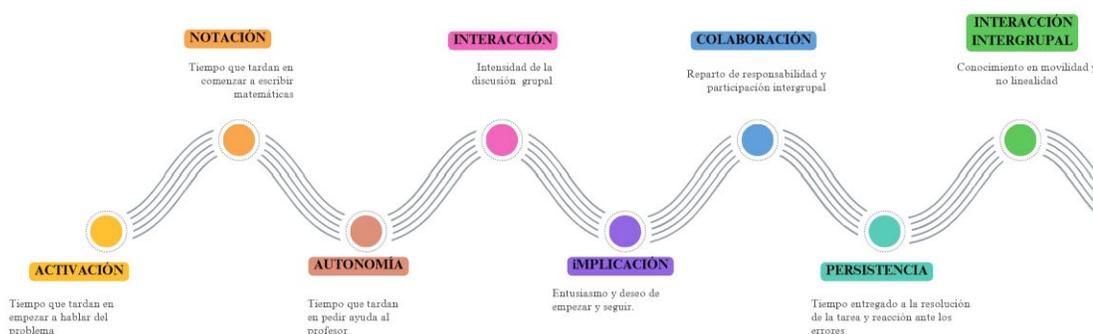
Estos grupos de trabajo tienen el objetivo de movilizar el conocimiento ya que, a mayor movilización del conocimiento menos dependencia del profesor, más seguridad, mayor colaboración y menor estrés social. Esto se consigue permitiendo que los miembros de un grupo pueden observar a otros grupos para tomar ideas, también que los miembros de un grupo pueden comparar sus respuestas con las proporcionadas por otro grupo y debatir sus soluciones entre dos o más grupos o incluso trabajar juntos.

3. *La zona de trabajo.* La disposición de los estudiantes a lo largo de la clase es un factor importante a tener en cuenta. En las clases tradicionales el alumnado trabaja sentados en mesas, sin embargo, este no es el lugar más adecuado para iniciar y sostener el

pensamiento, ya que, todo el alumnado tiene el mismo comportamiento, nivel de energía, compromiso y atención. A su vez, las clases muy ordenadas pueden generar una dificultad para generar el pensamiento.

Teniendo en cuenta lo mencionado, Peter Liljedahl identifica las variables importantes que deben considerarse en cuanto a la organización de la clase. Dichas variables pueden observarse de forma gráfica en la Figura 3.

Figura 3. Esquema de las variables importantes a la hora de organizar la clase.



En raíz a las variables mencionadas el autor sugiere trabajar separados en pizarras portátiles, en las que pueden borrar el error, lo que hace que se atrevan a intentar su resolución, situando a los grupos próximos entre ellos para que puedan movilizar el conocimiento y utilizando únicamente un marcador con pizarra, así, quien escribe no aporta ideas, valorando todas las ideas sin borrar el trabajo de los otros y otorgando una responsabilidad de aprendizaje mutuo, colocando dichas pizarras en vertical, les permite tener una mejor comunicación, perspectiva, autoconfianza y paciencia.

4. *Espacio físico.* Al entrar en un aula, su organización y disposición proporciona expectativas sobre lo que va a pasar y lo que se espera del alumnado y el profesor. Las *Thinking Classrooms* necesitan organizarse de tal manera que transmitan que se espera pensar, colaborar y asumir riesgos.

Esto se puede conseguir alejando al profesor de la posición frontal habitual y moviéndose alrededor de los estudiantes, colocando las mesas agrupadas lejos de las pizarras y creando distribuciones no simétricas y apuntando en todas las direcciones de la clase.

5. *Contestar preguntas.* El papel que toma el profesor es un factor importante dentro de la clase, habitualmente los estudiantes plantean al profesor una gran variedad de preguntas y el profesor debe decidir que preguntas responder. Entre las preguntas que pueden plantear los estudiantes podemos distinguir tres tipos:

- Cuestiones de proximidad. Son aquellas que se plantean cuando el profesor se encuentra cerca del alumnado para confirmar el rol de estudiante y normalmente son de poca utilidad y la información obtenida no se utiliza.
- Cuestiones para dejar de pensar. Al alumnado en muchas ocasiones le cuesta pensar y tiene miedo a seguir un camino “erróneo” por lo que pregunta al profesor para averiguar si lo que está haciendo es correcto en vez de averiguarlo por ellos mismos.
- Cuestiones para seguir pensando. Este tipo de cuestiones clarifican puntos de la tarea y les pueden ayudar a seguir trabajando y pensando en la tarea.

Las únicas preguntas que deben ser respondidas en una *Thinking Classroom* son aquellas del tercer tipo, ya que son las únicas que permiten al alumnado seguir pensando y trabajando en la actividad planteada, respondiéndolas únicamente de forma verbal, especificando algún detalle que les sirva para más adelante y no en ese momento.

En cuanto a las preguntas de los dos primeros tipos, el profesor debe responderla mediante otra pregunta que les incite a pensar, sin embargo, responder a una pregunta con otra solo es efectivo si inmediatamente el docente se aleja, pero sin antes dejar claro que se escuchó la pregunta.

6. *Gestión de tareas.* El profesor debe construir y mantener el ritmo en la clase, para ello, la secuencia de tareas es un factor a tener en cuenta para mantener el ritmo de la clase, es necesario crear una secuencia paralela de tareas que incrementen el desafío, comenzando con un desafío bajo mediante el cual asegurarse de que la clase empieza

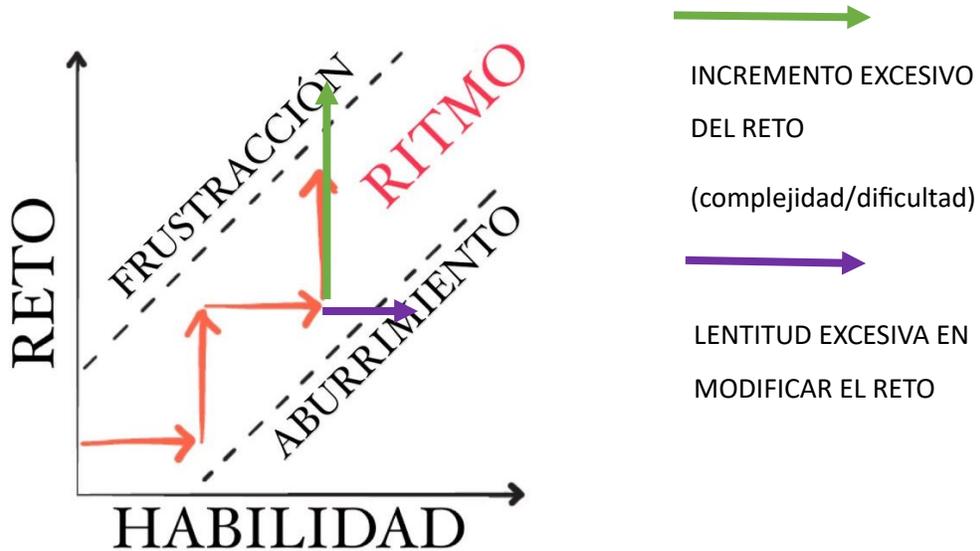
con buen ritmo. Si la clase comienza con una actividad de baja demanda cognitiva es más difícil entrar en una actividad que requiera pensar posteriormente. Si el alumnado está sentado en pupitres mientras se presenta la tarea se crea un entorno pasivo y de baja energía por lo que es mejor presentar la tarea verbalmente a través de narrativa, discusión, debate, etc, en pie junto a una de las pizarras.

7. *Los deberes.* Los deberes son considerados como una parte importante del proceso de aprendizaje, sin embargo, existe una desconexión entre lo que el profesorado y los estudiantes ven como deberes, lo que lleva a que gran parte del alumnado no los realizan, engañan copiándolos o piden ayuda para poder resolverlos. Así, deben reformularse los deberes hasta convertirlos en una actividad de pensamiento sin nota, mediante los cuales ellos mismos tengan la oportunidad de comprobar su propio entendimiento, dando la oportunidad de hablar acerca de las preguntas consideradas más importantes. Estos deberes no se califican, no se revisan y no se pregunta por ellos.
8. *La autonomía.* El objetivo de las Thinking Classrooms el docente pasa de ser la fuente de información a ser movilizador de conocimiento entre grupos. Existen dos tipos de movilizaciones consideradas las más efectivas, la primera de ellas, poner en contacto grupos sin identificar quién tiene o no tiene respuestas correctas a pesar de tener respuestas diferentes. La segunda movilización consiste en poner en contacto grupos con las mismas respuestas y pedir a cada uno que trate de deducir lo que el otro ha pensado y hecho.
9. *Pistas.* En una clase tradicional todos toman las mismas notas al mismo tiempo para las actividades deben ser asíncronas para atender la diversidad presente en el aula, una experiencia de aprendizaje óptima consiste en aquella que al alumno únicamente le importa la tarea, perseverando ante fracasos y perdiendo la noción del tiempo, esto es lo que se quiere conseguir con las *Thinking Classrooms*.

Para poder llegar a ello, deben tenerse los objetivos claros a cada paso; subdividiendo la tarea en subtarear que irán creciendo en complejidad o extendiéndose a los otros dominios, transmitiendo *feedback* inmediato y realizando un balance entre la habilidad y el reto,

considerando el ritmo como una composición de estos dos factores mantenido entre el aburrimiento y la frustración, sin llegar a ninguno de ellos. Esta relación puede entenderse gráficamente a partir de la Figura 4.

Figura 4. Esquema de la relación entre el reto y la habilidad para mantener el ritmo de la clase.



Nota: Adaptado de *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning* (p. 149), por P.Liljedahl, 2020, Corwin press.

Existen dos principios fundamentales mediante los cuales obtener este equilibrio, el primero de ellos es contextual, ya que, solo es posible percibir una variación al enfrentarla a una trayectoria previa y el segundo es unitario, es decir, solo se llevan a cabo una variación por cambio o lo que es lo mismo, una única variable didáctica cambia su valor.

10. *Consolidando.* Tradicionalmente la consolidación sucede a las tareas en las que deben probar por ellos mismos y se parte de los resultados óptimos antes de saltar al siguiente nivel. Por lo que se debe afianzar el conocimiento a partir del trabajo de los estudiantes e insistiendo en que los grupos expliquen su trabajo a otros grupos y así dar el paso de

hablar a pensar. Así, es muy importante afianzar el conocimiento desde la base y desde lo que todos comprenden así como la selección de una secuencia de tareas que incrementa el desafío.

11. *La toma de notas.* Tomar notas es algo habitual durante las clases de matemáticas, sin embargo, la mayoría del alumnado que toma notas no sigue al profesor en la clase ya que requiere una gran cantidad de esfuerzo cognitivo. La toma de notas tiene que servir para recordar lo aprendido en el futuro, por lo que el alumnado debe aprender a tomar notas significativas, usando organizadores gráficos, trabajando con ejemplos tanto correctos como incorrectos y seleccionando la información considerada útil o importante.

12. *Lo que debemos evaluar.* La parte final de toda situación de aprendizaje consiste en evaluar lo aprendido, hay que ser coherentes y evaluar lo que creemos y decimos que es de valor, si queremos evaluar competencias necesitamos instrumentos y métricas que lo permitan. La evaluación debe de ayudar a los estudiantes para ver dónde están, a dónde van y realizándose de forma observacional, es decir, mientras los estudiantes piensan y razonan no una vez acaban.

Para ello, se deben utilizar instrumentos como las rúbricas con encabezados que delimiten las preguntas en niveles de complejidad, menos de 5 indicadores, representando los resultados mediante flechas en lugar de utilizar una tabla de variables y evaluando una competencia por vez, utilizando un lenguaje que les permita identificar dónde están y a dónde van.

También es aconsejable la utilización de instrumentos que apoyen a los estudiantes en la mejora de las notas mediante *quizzes* o test de repaso, así como instrumentos que les ayuden a progresar y comprobar su comprensión.

13. *Evaluación formativa.* No se trata únicamente de comunicar solo lo que los estudiantes pueden hacer sino también determinar lo que aún no pueden hacer y por qué, también es importante ser preciso sobre los resultados de aprendizaje que proceden de una unidad de estudio y facilitar una lista bien definida de subtópicos y ejemplos de

indicadores para los resultados esperados. En la Tabla 1 se muestra un ejemplo de instrumento de navegación en el aula.

Tabla 1. *Instrumento de navegación en el aula.*

	BÁSICO	INTERMEDIO	AVANZADO
Resultado /Subtópico 1			
Resultado/ Suptópico 2			

Estos subtópicos van acompañados de un conjunto de símbolos utilizados para trazar la acción:

J Actividades intentadas y respondidas correctamente.

S Actividades intentadas y prácticamente respondidas correctamente salvo por algún fallo tonto.

H Actividades intentadas y respondidas correctamente con ayuda del profesor o de algún compañero.

G Actividades respondidas correctamente sin colaboración del grupo.

X Actividades intentadas y respondidas incorrectamente.

N Actividades no intentadas.

14. *Calificación.* Las calificaciones sirven para asegurarse de que los estudiantes colaboran día a día. Existe una necesidad real de evaluar a los estudiantes colaborativamente, así como a través de observaciones sistemáticas en el aula, para lograr ser objetivos, justos y precisos es necesario pasar de una evaluación basada en eventos a una evaluación basada en estándares y procesos, permitiendo a los estudiantes no hacer exámenes.

Las *Thinking Classrooms* fomentan la inclusión educativa al promover la participación activa, valorar la diversidad de alumnado, fomentar la colaboración y adaptarse a las necesidades individuales del propio alumnado. Este tipo de prácticas crean un entorno

educativo inclusivo en el que todos los estudiantes pueden participar plenamente, sentirse valorado y alcanzar su máximo potencial, lo que forma parte de los principales objetivos del presente trabajo.

En el siguiente epígrafe se desarrollará en detalle el marco teórico sobre el que nos apoyaremos a lo largo del trabajo en relación a la inclusión, así como los marcos normativos de referencia a tener en cuenta tanto en el diseño como desarrollo de la propuesta educativa.

2.4.Inclusión.

La inclusión educativa promueve la igualdad de oportunidades y el respeto por la diversidad en el ámbito educativo, a su vez, busca crear entornos educativos donde todos los estudiantes puedan desarrollarse plenamente y lograr el éxito académico y personal sin importar sus características individuales. Así, la tarea básica del sistema educativo consiste en asegurar que todo el alumnado adquiera los saberes y capacidades necesarios para poder desarrollarse adecuadamente como personas e insertarse y participar de forma activa, crítica y creativa en nuestra sociedad (Pastor C. A., 2018). Cuando hablamos de la escolaridad obligatoria, responder a la diversidad del alumnado de manera inclusiva se trata de una parte fundamental e irrenunciable.

En la práctica, esto significa que el profesorado, en nuestro caso de matemáticas, deben ser conscientes de las diferentes necesidades de aprendizaje que presentan sus estudiantes y adaptar la enseñanza para poder satisfacer todas ellas. La inclusión en matemáticas también implica la promoción de la cultura de aprendizaje cooperativo y de apoyo, donde todos los estudiantes se vean valorados y respetados dentro del aula; además, es importante que los estudiantes puedan ver cómo las matemáticas se aplican a diferentes contextos y, así, sentirse motivados en su propio aprendizaje.

Para la UNESCO, la inclusión educativa se esfuerza en identificar y eliminar todas las barreras que impiden acceder a la educación, ya que millones de personas siguen siendo excluidas de la educación por razones como el género, la orientación sexual, el origen étnico, la lengua, la religión, la situación económica o discapacidad, etc. (UNESCO, 2023).

Ante esta situación, la UNESCO trabaja en todos los ámbitos, desde el plan de estudio hasta la pedagogía y la enseñanza guiada por la Convención de la UNESCO relativa a la Lucha contra las Discriminaciones en la Esfera de la Enseñanza (UNESCO, 1960), el Objetivo de Desarrollo Sostenible 4 y el Marco de Acción Educación 2030 (Clark, 2015) con el objetivo de hacer hincapié en que la inclusión y la equidad son los cimientos de la educación de calidad.

El objetivo de la educación en el siglo XXI no se centra simplemente en el dominio de los contenidos del conocimiento o en el uso de nuevas tecnologías, sino en el dominio del propio proceso de aprendizaje (Pastor C. A., 2018). El Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) ayuda a los educadores a alcanzar estos objetivos, ayudando a identificar las barreras presentes en los currículos, reducirlas y optimizar los niveles de desafío y apoyo para poder atender a las necesidades educativas de todos los estudiantes desde el principio (Pastor C. A., 2023).

El Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) ayuda a tener en cuenta la variabilidad de los estudiantes buscando una flexibilidad en los objetivos, métodos, materiales y evaluación con el objetivo de atender las necesidades de todos los estudiantes. Para ello, hay tres principios fundamentales, basados en la investigación neurocientífica:

1. *Proporcionar múltiples formas de implicación (el porqué del aprendizaje)*. La componente emocional es un elemento importante en el aprendizaje, además, los estudiantes se diferencian en la forma en que se ven implicados o motivados para aprender. Son muchos los factores que influyen en la variabilidad afectiva de cada alumno, en algunas ocasiones es debido a factores neurológicos y culturales, al interés personal, a la subjetividad, al conocimiento previo, etc. No existe una forma de enseñanza óptima que sea útil para todo el alumnado en todos los contextos, por lo que es esencial proporcionar múltiples formas de implicación.
2. *Proporcionar múltiples formas de representación (el qué del aprendizaje)*. No todo el alumnado percibe y comprende la información que se les presenta de la misma manera. Esto puede deberse tanto a discapacidades sensoriales, dificultades de aprendizaje, diferencias lingüísticas o culturales, como diferencias en la forma de captar la

información, es decir, algunos estudiantes captan la información más rápidamente o de forma más eficiente mediante la utilización de medios visuales o auditivos, sin embargo, otros lo hacen mediante el texto escrito. La utilización de múltiples representaciones permite que el aprendizaje y la transferencia del mismo sea útil para todo tipo de estudiantes.

3. *Proporcionar múltiples formas de acción y expresión (el cómo del aprendizaje).* Los estudiantes no actúan de la misma manera en el mismo entorno de aprendizaje ni expresan su aprendizaje de la misma forma. Es decir, aquel alumnado que presenten alteraciones del movimiento, dificultades en las habilidades estrategias u organizativas, diferencias lingüísticas, etc, se movilizan de forma diferente en el entorno de aprendizaje, al igual que en el principio anterior tampoco es habitual encontrarse en un aula en la que todos los estudiantes son capaces de expresarse de la misma manera, algunos se expresan mejor mediante el uso de texto escrito, pero no de forma oral o viceversa. Al igual que los otros principios, no existe una forma óptima de acción y expresión que sea de utilizar para todo tipo de estudiantes, por lo que es muy importante proveer al alumnado de múltiples formas de acción y expresión.

Siguiendo estos principios, el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) tiene como objetivo guiar la práctica educativa para proporcionar flexibilidad en las diferentes formas en las que se presenta la información, en las posibles formas en que los estudiantes responder o demuestran sus conocimiento y habilidades y en las maneras en que los estudiantes son motivados y se ven comprometidos con su propio aprendizaje. Para poder reducir las barreras presentes en la enseñanza, proporcionar adaptaciones, apoyos y desafíos adecuados, y a través de altas expectativas de logro dirigidas a todos los estudiantes, incluyendo a aquellos con discapacidades per también a aquellos que se encuentran limitados tanto por cuestiones de idioma, interés personal, subjetividad, etc.

En resumen, la inclusión en matemáticas es fundamental para asegurar que todos los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar habilidades matemáticas que les ayude a alcanzar el éxito en la vida cotidiana, así como en su etapa educativa.

En el marco legislativo español, tanto la inclusión educativa como el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) están respaldados por las diferentes leyes educativas que promueven la igualdad de oportunidades y la educación inclusiva. La Ley Orgánica de Educación (LOE), promulgada en 2006, ya establece los principios fundamentales de la educación inclusiva y reconocer el derecho de todos los estudiantes a recibir una educación de calidad independientemente de las características individuales del propio alumnado, así como, la necesidad de proporcionar apoyos y adaptaciones razonables para garantizar la participación plena de los estudiantes en el proceso educativo. En 2013, la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) respalda la inclusión educativa, enfocándose en la personalización del aprendizaje y reconociendo la importancia de adaptar la educación a las necesidades individuales del alumnado. Además, busca proporcionar un marco pedagógico que permita diseñar entornos y materiales educativos que sean accesibles y significativos para todo el alumnado.

En relación con las leyes educativas mencionadas anteriormente, la LOMLOE, en vigor actualmente, establece el principio de inclusión como uno de los pilares fundamentales de la educación, reconociendo el derecho de todos los estudiantes a recibir una educación inclusiva y equitativa, sin discriminación por motivos de género, origen social cultural, lingüístico o cualquier otra condición o circunstancia personal. Esta ley establece a su vez la obligación de adoptar medidas de apoyo y refuerzo individuales que garanticen el éxito de todo el alumnado, especialmente aquellos que presenten dificultades en el aprendizaje, de la misma manera, la presente ley promueve la atención a la diversidad y la personalización del aprendizaje, ya que destaca la importancia de adaptar la enseñanza y los recursos educativos para responder a las necesidades individuales de los estudiantes, proporcionando apoyos y ajustes razonables, diseñando metodologías que sean accesibles y significativas para todo el alumnado.

La inclusión educativa se encuentra estrechamente relacionada con el dominio afectivo, puesto que esta reconoce la importancia de abordar el bienestar emocional y social del alumnado como parte integral de su desarrollo educativo. Así, el dominio afectivo considera la importancia de crear un ambiente seguro y respetuoso, donde los estudiantes se sientan emocionalmente seguros y puedan expresar sus emociones y opiniones,

fomentando actitudes positivas hacia el aprendizaje, la colaboración y la diversidad, lo cual forma parte de los principios fundamentales del DUA, así como es considerado uno de los principales objetivos tanto de la inclusión educativa como del presente trabajo y las leyes educativas españolas. La propuesta didáctica que desarrollaremos a lo largo de este Trabajo Fin de Master tendrá en cuenta los principios del DUA y la inclusión educativa para facilitar la comprensión y desarrollo de todos los estudiantes a partir del fomento del razonamiento matemático y las propuestas propias de las metodologías de las *Thinking Classrooms*.

A lo largo del siguiente epígrafe se desarrollará en detalle lo que entendemos en relación al dominio afectivo y a su vez presentaremos los marcos teóricos sobre los que se construye la propuesta de intervención descrita en este TFM, así como los marcos normativos de referencia para la misma.

2.5.Dominio afectivo.

La educación matemática no consiste únicamente en la adquisición de conocimientos y habilidades propios de la materia, sino también en desarrollar actitudes, valores y creencias positivas relacionadas con las mismas.

El papel del dominio afectivo es importante, puesto que promueve el desarrollo de habilidades socioemocionales, como la resolución de problemas, la comunicación matemática efectiva, la colaboración y la perseverancia, buscando crear un entorno de aprendizaje que promueva la participación activa, la exploración, el error como oportunidad de aprendizaje y el desarrollo de una mentalidad abierta frente a los desafíos planteados por las matemáticas (Gil Ignacio et al., 2006).

Ante esta situación, este dominio toma importancia en la educación, por lo que numerosos han sido los autores que plantean una definición sobre lo que se entiende por dominio afectivo. Así, en un principio, este fue considerado como un extenso rango de sentimientos y estados de ánimo que son considerados como algo diferente a la cognición, limitando en un primer momento el dominio afectivo en matemáticas a las actitudes (Mcleod, 1989). Sin embargo, en los últimos años se ha ampliado, quedando finalmente dividido en creencias,

actitudes y emociones (Mcleod, 1992). Este último enfoque pone de manifiesto que el aspecto afectivo toma un papel crucial en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, en algunas situaciones, estas cuestiones se encuentran fuertemente implantadas en el alumnado hasta el punto de no poder eliminarlas mediante los procesos de enseñanza (Mcleod, 1994).

Estas creencias en relación con las matemáticas y acerca de uno mismo como estudiante de las mismas condicionan al alumnado en la realización de tareas matemáticas pudiendo generar cierta tensión y reacciones positivas o negativas a cerca de todo aquello relacionado con las mismas. Siguiendo los estudios planteados por Mcleod en relación con los factores que influyen en el dominio afectivo concretamente vinculados con las matemáticas, consideramos los siguientes tres descriptores básicos:

- *Creencias*. Las creencias consiste en una de las componentes del conocimiento subjetivo implícito del individuo en relación con las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, a su vez, permiten al individuo organizar y filtrar la información recibida y construir su noción de realidad y su visión del mundo (Schoenfeld, 1992). Mcleod, pionero en el ámbito de dominio afectivo en matemáticas, diferencia cuatro ejes relacionados con las creencias: sobre las matemáticas (el objetivo), sobre uno mismo, sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre el contexto en el que se desarrolla la educación matemática (contexto social). A su vez, dicho autor destaca dos categorías de creencias las cuales influyen más al alumnado de matemáticas: *creencias acerca de las matemáticas*, son aquellas que generalmente involucran menos componente afectivo, sin embargo son consideradas como una parte importante del contexto en el que se desarrolla el afecto, y *creencias del alumnado (y del profesorado) acerca de sí mismo y su relación con las matemáticas*, estas poseen un alto componente afectivo ya que contribuyen a la confianza, el autoconcepto y la atribución casual del éxito y fracaso escolar (Mcleod, 1989).

Esta última es considerada una de las variables más influyentes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ya que, esta estrechamente relacionada con las actitudes, la perspectiva del mundo matemático y la identidad social. Los elementos importantes dentro de la misma son los conocimientos subjetivos y las emociones

relacionadas con el interés en matemáticas, la eficiencia en matemáticas, la motivación y el placer en matemáticas, la atribución causal del éxito o fracaso escolar y el autoconcepto como miembro de un determinado grupo social.

Los estudiantes con dificultades en matemáticas, debido a la repetitiva experiencia relacionada al fracaso, dudan de sus capacidades, exageran la magnitud de sus deficiencias tendiendo a atribuir sus fracasos a su falta de capacidad. Asimismo, muestran expectativas bajas de éxito y abandonan fácilmente ante las dificultades. Estas creencias negativas les impiden mejorar su rendimiento en matemáticas, condicionando las actitudes del alumnado en relación con las matemáticas debido a su autoimagen académica y la motivación de logro.

- *Actitudes.* Las actitudes son predisposiciones evaluativas, tanto positivas como negativas, que determinan las intenciones personales e influyen en el comportamiento del alumnado en relación con las matemáticas (Hart, 1989). Estas actitudes predisponen y dirigen al alumnado sobre hechos de la realidad, filtran las percepciones y orientan el pensamiento para adaptarlo al contexto, es decir, se establecen en una tendencia favorable o desfavorable en función de las intenciones personales del alumnado y es capaz de influirlos en sus comportamientos y decisiones en relación con las matemáticas (Martínez O. J., 2005).

En la concepción de McLeod, las actitudes forman una perspectiva multidimensional de diferentes clases de matemáticas y rango de sentimientos acerca de una de ellas. Otros investigadores de este campo opinan que el rechazo, la negación, la frustración, el pensamiento y la evitación son algunas de las manifestaciones actitudinales y comportamentales que el alumnado manifiesta cuando afrontan la actividad académica tanto en matemáticas como en otras materias (Guerrero et al., 2002).

Cabe destacar que aunque existen muchas investigaciones en relación con las actitudes en matemáticas, son escasos los estudios sobre la dimensión afectiva y el aprendizaje de dicha materia, siendo aun menos numerosos los estudios relacionados con las emociones.

- *Emociones.* Las emociones son entendidas por McLeod como respuestas afectivas caracterizadas por una alta intensidad y activación fisiológicas que experimenta el alumnado en relación con las matemáticas, en las cuales influyen lo fisiológico, cognitivo, motivacional y el sistema experimental y surgen en respuesta a un suceso, tanto interno como externo, que tiene una carga de significado positiva o negativa para el alumnado.

Las relaciones emocionales son el resultado del desacuerdo entre lo que el alumnado espera y lo que experimenta en el momento en el que se produce la reacción (Guerrero I. M., 2000). Al aprender matemáticas el alumnado recibe estímulos relacionados con ella de manera continua, ante estos, los estudiantes reaccionan emocionalmente de forma positiva o negativa, estando esta reacción condicionada por sus creencias sobre sí mismo y en relación con las matemáticas. Si estas reacciones afectivas se producen de forma repetitiva ante situaciones similares, la activación de dicha reacción emocional, como podría ser la satisfacción o la frustración, puede ser automatizada, de este modo, los afectos ejercen una influencia en el aprendizaje y en la manera en que el alumnado percibe y considera las matemáticas, así como la visión de ellos mismos como estudiantes influyendo en su conducta en relación con las mismas (Gil, 2003).

A raíz de estos primeros estudios, muchos han sido los investigadores interesados en la influencia del afecto y los sistemas de creencias en el aprendizaje de las matemáticas, incrementándose de forma notable en los últimos años los estudios sobre afecto y aprendizaje de las mismas, con el objetivo de impulsar su desarrollo teórico, a nivel de datos empíricos y a nivel de prácticas didácticas (Gómez Chacón I. , 2010).

Uno de estos autores puede considerarse la española Inés Gómez-Chacón, uno de los mayores referentes españoles en cuestiones de dominio afectivo en la educación matemática. Esta autora entiende la cognición desde dos puntos de vista; por una parte considera que no se pueden separar los sentimientos de las percepciones, puesto que, cuando el alumnado actúa en clase de matemáticas revela sus ideas y juicios a cerca de la

educación y concretamente de las matemáticas y, por otra parte, la acción de “hacer matemáticas” involucra una serie de procesos cognitivos que desarrollan el pensamiento matemático y el manejo de emociones relacionadas con estos procesos (Gómez Chacón I., 2010).

Otros investigadores sobre el dominio afectivo en la educación matemática consideran que para entender el comportamiento del propio alumnado en relación a las matemáticas es necesario conocer los motivos del mismo, lo que lleva al estudio de la motivación del alumnado (Hannula et al., 2019). Sin embargo, cuando la motivación es considerada como una estructura de necesidades, metas y medios, estos aspectos que describen la misma varía de una persona a otra y esto es debido a su relación con la autorregulación del alumnado. Centrándonos en la motivación del alumnado, podemos influir en lo que estos quieren hacer, para lograr la autonomía, competencia y el sentido de pertenencia del alumnado, el profesorado debe de fomentar la exploración, comprensión y comunicación, logrando así que todos se sientan seguros y perciban que pueden participar en su proceso de aprendizaje, así como en el del resto de compañeros. Esto se puede lograr a partir de un enfoque abierto y centrándose en los procesos matemáticos y no únicamente en los productos de estos (Hannula, 2006).

En el marco legislativo español existen leyes y normativas que respaldan la educación integral del alumnado, lo que incluye su desarrollo emocional y social. La anterior ley educativa, la LOMCE, ya hacía referencia a aspectos relacionados con el desarrollo emocional y social de los estudiantes, como por ejemplo, enfatizar en la formación integral del alumnado sin limitar la educación únicamente a aspectos cognitivos, sino teniendo en cuenta el desarrollo emocional, social y ético del alumnado. A su vez, aunque dicha ley no menciona específicamente las competencias socioafectivas, promueve el desarrollo de habilidades y competencias transversales que incluyen aspectos emocionales y sociales, abarcando la comunicación efectiva, el trabajo en equipo, la resolución de conflictos y la gestión de emociones.

Sin embargo, la ley educativa vigente en la actualidad, la LOMLOE, reconoce la importancia del dominio afectivo en la educación, haciendo referencia a aspectos relacionados con el desarrollo emocional y social del alumnado. En base a esta importancia,

la nueva ley incorpora el sentido socioafectivo, el cual tiene como objetivo reconocer el valor de atender al desarrollo emocional, social y afectivo del alumnado como parte integral de su educación, promoviendo valores, habilidades sociales y un clima de convivencia respetuoso y que permita al alumnado desarrollar al máximo sus capacidades.

Esta ley también promueve que los centros educativos adapten su enseñanza y organización para atender las necesidades de todos los estudiantes, considerando también sus aspectos emocionales y sociales. A su vez, destaca la importancia de la convivencia escolar y la formación en valores, buscando promover un ambiente seguro y respetuoso, fomentando el respeto, solidaridad, igualdad y justicia, contribuyendo así al bienestar de los estudiantes. En esta nueva ley se respalda la promoción de habilidades sociemocionales en los estudiantes, lo que implica trabajar aspectos relacionados con la gestión de las emociones, la empatía, la comunicación afectiva y el trabajo en equipo.

En conclusión, los procesos cognitivos implicados en la resolución de actividades relacionadas con las matemáticas van estrechamente relacionados con el ámbito afectivos, además, los estados emocionales que experimenta el alumnado durante el proceso de resolución de dichas actividades pueden provocar una influencia no deseada, acompañando negativamente a la actividad matemática y condicionando su posterior participación en actividades similares. El presente trabajo busca diseñar y poner en práctica una propuesta didáctica que tenga en cuenta la actividad afectiva y emocional del alumnado a la hora de resolver situaciones relacionadas con las matemáticas.

3. Desarrollo de la innovación.

3.1.Contextualización.

Se describirá una propuesta didáctica y su desarrollo real en un centro educativo de la Comunidad Autónoma de Castilla y León. Su objetivo final consiste en adaptar la docencia de las matemáticas a todos los estudiantes fomentando el razonamiento matemático en las aulas de Secundaria.

Se cuenta con la experiencia de su ejecución durante el periodo de prácticas de este máster en el Instituto de Educación Secundaria Galileo, ubicado en el barrio de Pajarillos dentro de la ciudad de Valladolid. Concretamente, la propuesta ha sido implementada en un curso de 3º de ESO, para mostrar la parte del currículo correspondiente a los sistemas de ecuaciones, y podría ser implementada en otras partes del currículo, así como en otros cursos o contextos educativos.

3.1.1. El barrio de Pajarillos.

El barrio de Pajarillos se encuentra situado al Este del área de Valladolid, en la Comunidad Autónoma de Castilla y León. Se trata de una zona que limita al Oeste con las vías del tren, al Norte con el canal del río Esgueva, al Este con la Ronda Este de Valladolid (VA-20) y al Sur con la Avenida de Soria. Dentro del mismo barrio. Actualmente podemos encontrar tres zonas diferentes:

- Pajarillos Bajos, situado al Oeste entre las vías del tren y el Paseo Juan Carlos I.
- Pajarillos Altos, situado al Noreste entre el Paseo Juan Carlos I y la Ronda Este de Valladolid.
- Páramo de San Isidro o también llamado Poblado de la Esperanza situado al Sureste.

La historia del barrio comienza entorno a la década de los años 60, formando parte del mismo las zonas correspondientes a Pajarillos Altos y Pajarillos Bajos, siendo éstas dos zonas muy diferentes. La primera de ellas surge de la reparcelación ilegal, es decir del alquiler de pequeños solares vacíos para construir o la venta de solares con pequeñas viviendas molineras destinadas a población inmigrante que procedía del campo con ingresos reducidos. La zona de Pajarillos Bajos surge de las promociones de vivienda pública de alta densidad que se construyeron durante esos años, estas primeras pequeñas viviendas formaban parte de edificios de tres alturas, sin la posibilidad de comercios y sin accesibilidad lo que produjo una segregación residencial socioeconómica.

En los años 70 se crea el Poblado de la Esperanza, que surge para acoger y concentrar a la población gitana que vivía en asentamientos de chabolas junto a la Gravera de San Isidro, aunque su objetivo era proporcionar la integración social de sus habitantes, que no sucedió, el Poblado de la Esperanza acabó convirtiéndose en un núcleo de exclusión, en el que abundaba la droga provocando grandes daños sociales en las década de los 80, además de la estigmación de la población gitana y convirtiendo al barrio de Pajarillos en un lugar señalado por el resto de la ciudad de Valladolid.

Sin embargo, en la actualidad, no se trata de un barrio conflictivo sino de un espacio diverso en relación con la población que lo habita además de muy activo cultural y socialmente, por lo que es muy importante acabar con esa imagen e intentar acercar el barrio a la gente ajena a él para finalizar con estos estereotipos que puede afectar de forma negativa a la relación y la convivencia.

A raíz de esta idea, en 2017, se creó la asociación PajarillosEduca, que es una de las asociaciones que están cambiando el barrio. Esta asociación tiene como principal objetivo reunir todos los recursos educativos de Pajarillos y, junto con los recursos sociales y asociaciones del barrio, fomentar el éxito socioeducativo y la participación de los vecinos del barrio para mejorar la convivencia. PajarillosEduca se integra dentro del proyecto Red Pajarillos, que potencia la coordinación e interrelación entre las asociaciones y entidades del barrio para desarrollar propuestas comunes.

3.1.2. IES Galileo

El centro IES Galileo está situado en la Calle Villabañez en la ciudad de Valladolid, por lo que está fuertemente marcado por la historia del barrio de Pajarillos sufriendo la misma estigmación que el propio barrio. Se considera como un centro problemático, aunque la realidad está muy alejada de esa situación. El IES Galileo es un centro abierto y dinámico que alberga una población multicultural, sobre la que destaca la población inmigrante y de etnia gitana, debido a las características demográficas del barrio. En los últimos años, debido a la pérdida de alumnado ha debido de ampliar la oferta de formación tanto de Educación Secundaria Obligatoria, así como Bachillerato y Formación Profesional.

Aunque el problema sigue presente, ahora mismo el centro consta de alrededor de 1000 matriculados, unos 400 alumnos en ESO, 60 en bachillerato y 500 en formación profesional. En cuanto al personal que trabaja en el centro, cerca de 125 profesores y 12 de personal docente, 2 administrativas, 3 ordenanzas y 6 empleados de limpieza.

Se trata de un instituto público que depende de la Junta de Castilla y León, su oferta educativa comprende la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), Bachillerato en dos modalidades: Ciencias Sociales y Humanidades y Ciencias y Tecnología; y grupos de Formación Profesional Básica, Grados Medios y Superiores de Administración y Gestión, Electricidad y Electrónica, Informática y Comunicaciones y Transporte y Mantenimiento de Vehículos. Además, cuenta con dos programas bilingües en inglés, el MEC-British Council y una sección bilingüe aplicada en bachillerato en colaboración con la Universidad de Valladolid, el Bachillerato de Investigación y Excelencia de idiomas.

Para hacer frente a la docencia además de las aulas polivalentes de clases, el centro dispone de aula multimedia, aula de plástica, aula de música, aulas de informática, aulas de audiovisuales con pizarra digital, aula ATECA, aula de emprendimiento, biblioteca y gimnasio. Además, todas las aulas constan de cañones de proyección, ordenadores portátiles, equipos de televisión vídeo y DVD y, gracias al reconocimiento CodiceTic 5, el centro ha recibido 18 pantallas táctiles interactivas instaladas en diferentes aulas.

Los recursos mencionados anteriormente buscan proporcionar diferentes técnicas educativas para tratar la gran diversidad de alumnado que podemos encontrar en el centro educativo. Su principal objetivo es facilitar el acceso y la comprensión de las diferentes materias por parte de todo tipo de alumnado, la tarea por parte del profesor consiste en fomentar la utilización de las nuevas tecnologías a la hora de impartir conocimientos. En particular, en matemáticas esta relación es especialmente importante, puesto que, tanto en la ley educativa (LOMLOE) como en aspectos relacionados con la vida cotidiana, esta materia va estrechamente ligada a la utilización de las nuevas tecnologías, ya que proporcionan herramientas mediante las cuales desarrollar el pensamiento matemático, así como representar conceptos teóricos de forma que el alumnado pueda sentirse más cercanos a ellos, para así, tratar esta diversidad.

A su vez, dado el complejo contexto social en el que se localiza el centro educativo, este propone diferentes programas especializados con el objetivo de dar respuesta a las necesidades del alumnado del centro, así como de sistemas de apoyo y flexibilidad para facilitar el proceso educativo. Para ello, el centro dispone de diferentes proyectos:

- *Proyecto de Autonomía.* Consiste en un programa orientado al alumnado de 1º y 2º de ESO en riesgo de exclusión y con necesidades de atención a la diversidad. Fue creado para hacer frente a la pérdida de alumnado y a los problemas disciplinarios que sufría el centro educativo. Este proyecto busca flexibilizar la jornada educativa y agrupar las materias en talleres para poder aplicar metodologías más activas.
- *Proyecto Lingüístico.* Se desarrollan diferentes actuaciones para facilitar el aprendizaje de idiomas, algunos ejemplos son el convenio con el British Council y la sección bilingüe desarrollada dentro del programa con la Junta de Castilla y León. Además, el centro fomenta programas de intercambio para el alumnado de Formación Profesional como Erasmus+ y, además, el centro tiene una modalidad de Bachillerato de Investigación y Excelencia de Idiomas.
- *Plan de atención a la diversidad.* Debido a la gran diversidad de alumnado que presenta el centro, este programa busca fomentar la tolerancia y la no discriminación. A causa de las diferencias económicas, sociales y culturales del alumnado es necesaria una enseñanza adaptada que facilite la igualdad de oportunidades del alumnado.
- *Próxima Estación: ODS 2030.* Este proyecto tiene como objetivo la incorporación de metodología activa a partir de la que tratar los Objetivos de Desarrollo Sostenible en cada nivel educativo, alejándose de los modelos rígidos y preestablecidos.

Estos proyectos desarrollados en el centro tienen como finalidad mejorar la calidad de la formación, de forma que como objetivo final se logre la adquisición y la mejora de las capacidades, actitudes y valores para enfrentarse a la vida por parte de los estudiantes del centro. En lugar de centrarse únicamente en la adquisición de nuevos conocimientos o la profundización y refuerzo de otros, proponer que el conocimiento sirva para concienciar y sensibilizar, “aprender a aprender” cómo funciona el mundo, cómo se relacionan las diferentes problemáticas de nuestro problema entre sí y buscar

soluciones para los mismos. Este aspecto va estrechamente ligado con los objetivos y propósitos de la propuesta educativa que describimos en el presente trabajo.

3.2. Justificación y objetivos de la propuesta.

El presente trabajo fin de máster, como hemos explicado anteriormente, tiene como objetivo principal el diseño de una propuesta educativa que fomente el pensamiento crítico, creativo y reflexivo de los estudiantes para que sean partícipes de su propio aprendizaje. Además, se pretende hacer hincapié en la inclusión educativa, promoviendo la colaboración y el trabajo en equipo entre todos los estudiantes, fomentando la participación activa de todos los estudiantes independientemente de sus habilidades y destrezas, así como de aspectos relacionados con el dominio afectivo, como pueden ser los gustos, emociones y sentimientos del alumnado en relación con las matemáticas.

Con esta intención se trata tanto de adaptar las actividades y estrategias de enseñanza para satisfacer las necesidades de cada estudiante, como de proporcionar un ambiente de aprendizaje dinámico y participativo que motive a los estudiantes a aprender y a participar.

Además, se pretende identificar los factores afectivos que el alumnado interpreta como más influyentes en el momento de realizar actividades relacionadas con las matemáticas. También, identificar perfiles afectivo-matemáticos que permiten diseñar tareas matemáticas adaptadas a todo tipo de estudiante, teniendo en cuenta sus características tanto físicas como de carácter afectivo y emocional. Finalmente, diseñar una propuesta instruccional que se adapte a los estados emocionales y el nivel afectivo de los estudiantes para apoyarlos en el proceso de aprendizaje y de resolución de tareas relacionadas con las matemáticas.

La propuesta presentada implica la capacidad de utilizar y aplicar los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas en diferentes situaciones, enfocándose en el fomento del razonamiento matemático ya que, los estudiantes serán desafiados a pensar de manera crítica, investigar, plantear preguntas y encontrar soluciones a situaciones matemáticas explorando diferentes enfoques y estrategias fomentando la colaboración y el

trabajo en equipo, lo que va estrechamente ligado a la idea de competencia matemática presentada anteriormente. A su vez, el enfoque metodológico empleado en la propuesta encaja en el centro educativo, ya que, como hemos indicado existe una gran diversidad de alumnado por lo que el profesorado que imparte docencia en este centro deben utilizar métodos didácticos que contribuyan al desarrollo emocional de los estudiantes estableciendo un vínculo equilibrado entre aprendizaje cognitivo y dominio afectivo, lo que es uno de los principales objetivos de la propuesta planteada.

De la misma manera encaja con mi forma de entender las matemáticas y, por lo tanto, su enseñanza, ya que considero que estas no se deben centrar únicamente en el aprendizaje de concepto o la implementación de procedimientos de forma repetitiva, sino que deben centrarse en el desarrollo de un pensamiento crítico y centrarse en el fomento del razonamiento matemático. A su vez considero que es importante establecer relaciones entre la materia y la vida cotidiana de los estudiantes para que estos sean conscientes de su importancia y participen de forma activa en el aprendizaje de la materia.

3.3. Contribución a las competencias clave.

En el Real Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, se describe la relación entre las competencias clave y los objetivos de etapa en la Educación Secundaria y Bachillerato. Dentro de este mismo documento podemos encontrar las competencias específicas del currículo. En este presente trabajo ocho de ellas han sido tratadas del siguiente modo en la propuesta didáctica planteada:

1. Competencia en comunicación lingüística (CCL).

El lenguaje es la forma de comprender las situaciones que se tratan en matemáticas. Durante la puesta en práctica de la propuesta será de suma importancia la utilización precisa de un lenguaje común (el matemático), así como la argumentación, puesto que será necesario para que tanto los miembros del grupo, como el alumnado procedente de otros grupos y el profesor sean capaces de entender, en todo momento, los conceptos, planteamientos y resoluciones propuestas por parte del alumnado.

2. *Competencia plurilingüe (CP).*

Las matemáticas forman un lenguaje universal que requiere adquirir destrezas de transferencia con el lenguaje habitual y facilita el intercambio de información. Así, dentro de la propuesta didáctica, para que la comunicación entre un mismo grupo, entre grupos y con el profesor, sea efectiva es de suma importancia utilizar de forma adecuada los diferentes lenguajes, tanto de forma oral como escrita, en función del contexto en el que se encuentren.

3. *Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM).*

La asignatura de matemáticas contribuye a esta competencia en gran medida. Uno de los principales objetivos de esta asignatura y en particular de nuestra propuesta es la utilización del razonamiento matemático, así como la utilización de herramientas para ser capaces de describir, interpretar y predecir situaciones de la vida cotidiana y de otras disciplinas científicas y tecnológicas. Esta competencia se trabajará de forma continua en la realización de las actividades de pensamiento en grupo, así como en los problemas que se les planteará, relacionados con la vida cotidiana del alumnado.

4. *Competencia digital (CD).*

Como apoyo al proceso de enseñanza, es de suma importancia proporcionar diversas herramientas tecnológicas mediante las cuales desarrollar el pensamiento crítico. En nuestro caso, mediante la utilización de recursos digitales, como la aplicación GeoGebra, mediante la cual puedan desarrollar de forma autónoma las habilidades de razonamiento matemático y de pensamiento computacional.

5. *Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA).*

Esta competencia se trabajará mediante la realización de las actividades en clase. El alumnado trabajará en grupos de tres personas en los que, mediante la participación de todos los miembros del grupo deben resolver las actividades propuestas, así como interactuar con otros grupos cuando sea preciso. Por lo que, el alumnado deberá ser capaz de debatir con el resto de los compañeros a cerca de las soluciones y

procedimientos planteados, durante esta puesta en común se promoverá el respeto entre compañeros.

6. *Competencia ciudadana (CC).*

Las matemáticas tienen diversas aplicaciones tanto en la vida cotidiana como en otras ciencias, mediante la propuesta didáctica el alumnado establecerá esta relación y será capaz de comprender ideas relacionadas con la sociedad y la ciudadanía, etc.

7. *Competencia emprendedora (CE).*

La metodología empleada en el aula, a través de paneles verticales y actividades mediante las cuales ellos sean capaces de descubrir los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, el alumnado deberá demostrar su sentido de iniciativa en cuanto al aprendizaje.

8. *Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC).*

La educación matemática debe favorecer en el alumnado el conocimiento y el respeto del entorno en el que viven, permitiendo a estos conocer el patrimonio natural y la estrecha relación de las matemáticas con el patrimonio cultural. Para ello, en la propuesta didáctica se plantearán problemas relacionados con el entorno de los estudiantes fomentando dicha relación y desarrollando la creatividad de los mismos, tanto individual como en grupo.

3.4. Contribución a las competencias específicas.

En el Real Decreto 39/2022, de 29 de septiembre, se describe la relación entre las competencias específicas, criterios de evaluación, perfiles de salida y contenidos de cada materia en la Educación Secundaria y Bachillerato. Dentro de este mismo documento podemos encontrar las ocho competencias específicas del currículo, que han sido integradas en la propuesta didáctica como aparece a continuación:

1. *Interpretar y resolver problemas de la vida cotidiana propios de las matemáticas aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para explorar distintas maneras de proceder y obtener soluciones posibles.*

La resolución de problemas forma la base de la competencia matemática ya que los estudiantes deben buscar y utilizar modelos adecuados a la situación, relacionar y emplear conocimientos matemáticos (e incluso de otras materias) con el fin de obtener herramientas mediante las cuales obtener una respuesta al mismo. A su vez, deben ser capaces de interpretar, seleccionar la información de interés y desarrollar destrezas y estrategias de resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana.

A través de la realización y resolución de los problemas y las actividades propuestas a lo largo de las sesiones, el alumnado pondrá en práctica las habilidades mencionadas anteriormente y será capaz de establecer una relación entre la educación matemática y su propio entorno.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, CCL2, CCL3, STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3 y CCEC4.

2. *Formular y comprender conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.*

La capacidad de utilizar y comprender conceptos relacionados con las matemáticas para ser capaz de resolver problemas y tomar decisiones es considerada de suma importancia en la sociedad actual. En la propuesta didáctica el alumnado será capaz de desarrollar la autonomía mediante las actividades planteadas, así como de formular sus propios problemas a partir de la solución final del mismo. A su vez, una vez resueltas las actividades, deberán revisar y analizar las soluciones obtenidas, comprobando su validez matemática y analizando los procedimientos seguidos.

A través de la puesta en práctica de dicha propuesta didáctica, en particular a partir de las actividades en las actividades en grupo, el alumnado será capaz de comprender los conceptos relacionados con los sistemas de ecuaciones y así poder utilizarlo en la

resolución de problemas y a la hora de tomar decisiones tanto en el propio ambiente educativo como en su vida cotidiana.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM4, CD2, CPSAA4, CE3 y CC3.

- 3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para generar nuevo conocimiento.*

El razonamiento y el pensamiento matemático son capaces de mejorar la percepción de estructuras o patrones en situaciones de la vida cotidiana, desarrollando la inquietud, lo que lleva a la generación de nuevos problemas y preguntas con el objetivo de explorar una situación y favoreciendo la formulación de conjeturas en relación con la naturaleza y el mundo que nos rodea.

El alumnado desarrollará esta competencia en la propuesta didáctica durante la resolución de las secuencias de ecuaciones relacionadas con los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, el alumnado deberá ser capaz de percibir patrones, los cuales les sirvan para ser resolver las siguientes actividades de la secuencia. A su vez, en la resolución de problemas inversos deberán generar problemas que correspondan a la solución planteada los cuales puedan servir al alumnado para formular futuras conjeturas relacionadas con el mundo que les rodea.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, CCL2, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5 y CE3.

- 4. Utilizar principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.*

Las matemáticas proporcionan al alumnado los principios del pensamiento computacional, ya que deben utilizar la abstracción para ser capaces de identificar aspectos relevantes a tener en cuenta y descomponer los problemas en otros más simples para poder llegar a una solución final. Las nuevas tecnologías pueden facilitar el desarrollo de esta habilidad.

Esta competencia estará incluida en la propuesta didáctica mediante la utilización de recursos digitales como la aplicación Geogebra. A su vez, desarrollaremos las técnicas relacionadas con el pensamiento computacional mencionadas anteriormente a partir de la resolución de las secuencias de actividades.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5 y CE3.

5. *Reconocer y establecer conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, entre las matemáticas y otras materias y en situaciones reales, interconectando conceptos y procedimientos para aplicarlos en situaciones diversas.*

El alumnado debe de relacionar los nuevos conceptos con todos los adquiridos previamente en matemáticas u otras materias para así comprender su utilidad tanto dentro de la misma materia como en otras áreas y en posibles situaciones o problemas que se les pueda plantear a lo largo de su vida.

En la propuesta educativa el alumnado deberá ser capaz de emplear los conocimientos previos adquiridos durante toda su educación matemática para generar nuevos conocimientos relacionados con los sistemas de ecuaciones y así comprender su utilidad para poder emplearlo en situaciones de su vida cotidiana.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM3, STEM5, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3 y CCEC1.

6. *Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos para aplicarlos en situaciones diversas.*

Las matemáticas están presentes en una gran variedad de situaciones de la vida cotidiana, el alumnado de esta materia deberá ser capaz de identificar estas situaciones y utilizar sus conocimientos de conceptos y técnicas matemáticas para aplicarlos a estos contextos.

Uno de los principales objetivos de la propuesta didáctica es que el alumnado sea capaz de reconocer y utilizar las matemáticas en la vida real o en relación con sus propias experiencias personales, aplicando procedimientos y actitudes de manera que los contenidos matemáticos sean transferidos y aplicados a diversos contextos y así facilitar la solución de posibles problemas.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, STEM3, STEM5, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3 y CCEC1.

- 7. Representar y comunicar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos usando lenguaje oral, escrito o gráfico, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.*

En la actualidad toma mucha importancia la correcta comunicación y representación de ideas tanto matemáticas como relacionadas con otras materias, para así facilitar la comprensión de estas por parte de uno mismo así como por el resto de individuos.

En la propuesta didáctica, a la hora de trabajar en grupo es de suma importancia ser capaz de comunicar al resto de compañeros dudas o reflexiones planteadas individualmente durante la realización de la actividad, facilitando así el aprendizaje tanto individual como grupal, ya que enriquece la imagen mental de conceptos y procedimientos tanto propios como ajenos, favoreciendo su comprensión.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM3, STEM4, CD1, CD2, CE3 y CCEC4.

- 8. Desarrollar destrezas personales y sociales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje, participando activa y reflexivamente en proyectos en grupos heterogéneos con roles asignados y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.*

Esta competencia se trabajará en la propuesta didáctica durante la resolución de problemas matemáticos relacionados con situaciones reales, el alumnado aprenderá a identificar y gestionar emociones para ser capaces de enfrentarse a la situación y poder obtener una respuesta satisfactoria. A través de la participación entre alumnos en grupos se favorece el intercambio de información, conocimiento y experiencias lo que lleva consigo cumplir los principios de respeto, tolerancia e igualdad de todas las personas ideas y culturas.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2 Y CE3.

3.5.Contenidos.

Los contenidos que serán abordados durante esta propuesta didáctica se encuentran incluidos dentro del sentido algebraico, el cual conlleva explorar y reconocer patrones y funciones, establecer generalidades a partir de casos particulares formalizándolas en el lenguaje simbólico apropiado. Este sentido incluye al pensamiento computacional, el cual es considerado un enfoque de resolución de problemas que involucra habilidades y conceptos fundamentales utilizados en la informática y la programación como el uso de procesos de pensamiento, el análisis, la descomposición, la abstracción, la generalización y la resolución de problemas. A partir del tratamiento y estudio de los contenidos que presentaremos a continuación, trataremos parte de los saberes básicos incluidos dentro de dicho sentido:

1. *Modelo matemático.* Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico. **Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.**
2. *Variable.* **Comprensión del concepto de variable** como incógnita en ecuaciones, como indeterminadas en identidades notables y como cantidades variables en fórmulas y funciones. **Polinomios en dos variables, operaciones básicas.**
3. *Igualdad y desigualdad.* **Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas. Estrategias y búsqueda de soluciones** en situaciones

de la vida cotidiana. **Resolución de sistemas mediante cálculo mental y métodos manuales.**

4. *Relaciones y funciones.* **Formas de representación funcional:** verbal, gráfica, tabular y algebraica. **Traducción de unas formas de representación a otras.**

Así, el orden de los contenidos que serán planteados durante la puesta en práctica de esta propuesta didáctica es el siguiente:

1. Ecuaciones lineales con dos incógnitas. Generalidades de los sistemas de ecuaciones lineales. Procesos de matematización y modelización. Comprensión de los posibles conceptos de variables. Saberes básicos 1, 2 y 3.
2. Sistemas de ecuaciones. Significado de un sistema de ecuaciones y análisis de la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Establecer conexiones entre los diferentes elementos matemáticos. Saberes básicos 1, 2 y 3.
3. Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales. Relación entre ecuación y función. Saberes básicos 1 y 2.
4. Resolución algebraica de un sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución. Saberes básicos 1 y 2.
5. Resolución algebraica de un sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación. Saberes básicos 1 y 2.
6. Resolución algebraica de un sistema de ecuaciones lineales por el método de reducción. Saberes básicos 1 y 2.
7. Sistemas de ecuaciones no lineales. Análisis de la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones no lineales. Implementación de técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones lineales a sistemas no lineales. Saberes básicos 1 y 2.
8. Aplicación de los sistemas de ecuaciones para la resolución de problemas. Modelización y matematización de problemas de la vida cotidiana. Traducción al lenguaje algebraico de situaciones de la vida cotidiana. Comprobación de la validez de los procesos y soluciones obtenidas. Saberes básicos 1 y 4.
9. Otros procesos e ideas relacionadas con el concepto de sistemas de ecuaciones.

3.6.Descripción de la propuesta.

La propuesta didáctica planteada en el siguiente trabajo emplea las propuestas y orientaciones de las *Thinking Classrooms* para tratar la parte del currículo correspondiente a los sistemas de ecuaciones, con el fin de estimular y mejorar el razonamiento matemático en una clase de tercero de ESO. Dicha propuesta está orientada a que el propio alumnado sea capaz de resolver razonadamente, utilizando métodos matemáticos ya adquiridos y obtener nuevos conocimientos a partir de la investigación y la experimentación propia. Para ello seguiremos como orientación las prácticas planteadas por el autor canadiense Peter Liljedahl, adaptadas a la situación y contexto del centro y aula en la que va a ser implementada:

1. *Tipo de tarea.* Teniendo en cuenta que el tipo de actividades planteadas al alumnado es un factor importante a la hora de crear una *Thinking Classrooms*, en la propuesta educativa plantearemos actividades de varios tipos:

- Actividades secuenciales en las que entre dos secuencias consecutivas solo se realiza una variación del enunciado, de manera que, la comprensión de la etapa previa es importante pero no necesaria para comprender las etapas posteriores. La secuencia de actividades será entregada a medida que el alumnado haya completado y comprendido la etapa anterior.

Así, por ejemplo en la sesión dedicada al método de igualación, los grupos comenzarían a trabajar cuando sea entregada la primera de las actividades, la cual tendría la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = -y \\ x = 7 \end{cases}$$

Una vez el alumnado haya completado dicha tarea y estén todos los miembros del grupo de acuerdo con el procedimiento y resultado final, se les será entregada la actividad siguiente, en la que únicamente una de las variables es modificada. Un ejemplo de la segunda actividad podría ser la siguiente:

$$\begin{cases} x = -y \\ 2x = 7 \end{cases}$$

De la misma manera, cambiando únicamente una de las variables iremos entregando al alumnado la secuencia de actividades, las cuales se pueden encontrar en el **Anexo I**, hasta llegar a la última de ellas, la cual requerirá un nivel de comprensión mayor que las demás. Un ejemplo de esta posible última actividad podría ser la siguiente:

$$\begin{cases} 3x + 8y = 5 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$$

- Actividades inversas, estas consisten en tareas en las que es presentada la solución del problema y serán los propios alumnos los que deban obtener, de forma razonada, el enunciado a partir del cual obtener dicha solución. Un ejemplo de este tipo de actividades son las empleadas en las sesiones de repaso de sistemas de ecuaciones, en las que los propios alumnos deben crear un sistema de ecuaciones para el cual las soluciones sean las demandadas. Así, una posible actividad inversa podría ser la siguiente:

Crea un sistema de ecuaciones cuyas soluciones sean $x=1$, $y=3$.

Ambos tipos de tareas requieren que los estudiantes se basen en una gran variedad de conocimientos matemáticos, combinen de forma adecuada estos conocimientos para obtener diversas maneras de resolución y así, hacer al alumnado pensar y finalmente adquirir el conocimiento de una forma novedosa.

2. *Agrupamientos.* Las Thinking Classrooms se basan en la teoría del aprendizaje cooperativo, Peter Liljedahl sugiere que el tamaño óptimo de los grupos sea 3, teniendo en cuenta la cantidad de alumnado que convive en el aula, la propuesta didáctica esta implementada para cinco grupos de tres y un grupo de cuatro. Dichos grupos serán formados de manera aleatoria mediante una baraja de cartas y construiremos nuevos grupos al comienzo de las diferentes sesiones.

La movilidad entre grupos moviliza, a su vez, el conocimiento, por lo que está permitido que los miembros de un grupo puedan observar a otros grupos para captar ideas, así como comparar resultados y debatir las soluciones obtenidas. Esta movilidad permite una mayor independencia del profesor, adquiriéndose una mayor seguridad, colaboración y reduciendo el estrés social.

3. *La zona de trabajo.* Un factor a tener en cuenta es la disposición de los estudiantes dentro del aula. Durante las sesiones el alumnado trabajará en pizarras portátiles, en las que puedan borrar el error, lo que evita el miedo a equivocarse y por lo tanto hace que los estudiantes se atrevan a intentarlo. Colocando dichas pizarras en forma vertical favorecemos la comunicación, la perspectiva, autoconfianza y paciencia de los miembros del grupo.

Utilizaremos a su vez un único marcador por grupo lo que hace que solo un miembro del grupo pueda escribir en ella, imponiendo las siguientes normas: el estudiante que escribe no aporta ideas y deben valorarse todas las ideas proporcionadas por los miembros del grupo sin borrar el trabajo del resto. De este modo se otorga una responsabilidad de aprendizaje mutuo.

4. *Espacio físico.* Para que la disposición del aula transmita que se espera que los alumnos piensen y colaboren, colocaremos las pizarras verticales alejadas de las agrupaciones de mesa, distribuidas de forma no simétrica y apuntando a todas las direcciones de la clase y el profesor se moverá alrededor de los alumnos en vez de encontrarse de frente a ellos.
5. *Contestar preguntas.* Dado que el profesor tiene un papel importante dentro de la clase para, permitir que los alumnos sigan pensando y trabajando en la actividad el profesor actuará únicamente proporcionando pistas sobre las que seguir pensando o respondiendo preguntas mediante otras preguntas que les permita seguir planteando posibles soluciones, es decir, simplemente guiando a los alumnos a seguir pensando sin obstaculizar el proceso de razonamiento de los propios alumnos.

6. *Gestión de tareas.* Para mantener el ritmo de la clase, como hemos indicado anteriormente, las actividades están diseñadas según una secuencia en la que se va incrementando la dificultad y por lo tanto el reto.
7. *Los deberes.* Las *Thinking Classrooms* deben ser considerados por los alumnos como una oportunidad de comprobar su propio entendimiento, para ello, los deberes no serán obligatorios en nuestra propuesta educativa y, además, no se calificarán ni revisarán, es decir, los alumnos realizarán los deberes por su propio interés y no por considerarse una obligación.
8. *La autonomía.* La independencia de los alumnos con respecto al profesor es un factor importante, para que esto ocurra es necesaria movilizar el conocimiento, para ello podremos en marcha dos tipos de movimientos:
 - Poner en contacto dos grupos con distintas soluciones sin decir que grupo tiene la correcta, así, los miembros del grupo contrario deberán analizar dicha solución comprobando su veracidad.
 - Poner contacto dos grupos con la misma respuesta pero con distinto planteamiento, los alumnos deberán indicar que es lo que el otro grupo ha pensado.
9. *Pistas.* Para mantener un equilibrio entre el ritmo y el reto, en la secuencia de tareas que serán planteadas únicamente se modifica de valor uno de los elementos del sistema.
10. *Consolidación.* Para afianzar el conocimiento se realizarán los movimientos entre grupos.
11. *La toma de notas.* Esta práctica no ha sido incluida en la propuesta educativa, puesto que, la técnica de toma de notas debe ser enseñada durante todo el curso para que sea efectiva a la hora de ejecutarse.

12. *Lo que debemos evaluar.* La evaluación debe ayudar a los estudiantes a ver dónde están y a dónde van, para ello se realizará una evaluación de forma observacional mientras los estudiantes piensan y razonan.
13. *Evaluación formativa.* Para determinar lo que los estudiantes saben hacer, pero también lo que aún no son capaces de hacer se diseñará un instrumento de evaluación, que puede encontrarse en la sección correspondiente.
14. *Calificación.* La calificación se basará en la evaluación realizada mediante el instrumento, utilizando los estándares y procesos permitiendo a los estudiantes la posibilidad de restar importancia a la realización de exámenes.

3.7. Metodología empleada.

La metodología utilizada debe centrarse en que los alumnos sean capaces de aprender de forma autónoma y, como principal objetivo, que los alumnos sean capaces de desarrollar habilidades de pensamiento y razonamiento, presentando una actitud activa y participativa a lo largo de las sesiones, consiguiéndose así un aumento de la motivación hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Como hemos indicado la presente propuesta educativa está basada en las 14 prácticas educativas planteadas por Peter Liljedahl para conseguir una Thinking Classroom, para ello, pondremos en práctica las siguientes metodologías:

- *Aprendizaje cooperativo.* Las Thinking Classrooms se basan en que el aprendizaje es más efectivo cuando los estudiantes trabajan juntos y comparten sus conocimientos. Para llevar esto a cabo, el grupo clase será dividido en subgrupos de 3 o 4 estudiantes, estos grupos serán elegidos de forma aleatoria mediante la utilización de una baraja de cartas e irán cambiando a lo largo de las diferentes sesiones. Siguiendo estas ideas, los estudiantes trabajaran de forma conjunta sobre

una pizarra colocada de forma vertical cumpliendo las normas mencionadas anteriormente.

- *Resolución de problemas y ejercicios.* Durante las sesiones, los alumnos deberán ser capaces de descubrir ellos mismos los conceptos y procedimientos relacionados con los sistemas de ecuaciones, para ello, resolverán una secuencia de ejercicios y problemas hasta obtener de forma razonada y consolidada dichos conceptos para poderlos aplicar de forma directa en otro tipo de cuestiones o problemas.

3.8. Materiales y recursos didácticos.

Las sesiones de clase se llevarán a cabo en el aula habitual, así los recursos que se utilizarán en el desarrollo de la propuesta didáctica son los siguientes:

- Libro de texto. Servirá como orientación para el diseño de la secuencia de tareas y a su vez, servirá para seleccionar actividades que los estudiantes pueden resolver de forma adicional para afianzar su aprendizaje.
- Web para el profesorado de la editorial del libro de texto.
- Documentos de actividades propuestas por el profesor para realizar durante las clases.
- Pizarra digital. Será utilizada para la puesta en común de las actividades resueltas, así como para aclarar cuestiones de forma común utilizando recursos informáticos.
- Pizarras verticales portátiles. Los grupos formados durante las sesiones trabajarán de forma conjunta en dichas pizarras para resolver las actividades propuestas.
- Rotuladores para las pizarras. Para poder escribir sobre las pizarras verticales es necesario un rotulador por grupo.

3.9. Puesta en práctica de la propuesta.

A la hora de poner en práctica la propuesta planteada, debemos tener en cuenta las condiciones de la clase y el centro en el que la vamos a llevar a cabo, por lo que, para

adaptarnos a ello, los ritmos han sido flexibles en función de cada actividad y las necesidades de los alumnos. Sin embargo, teniendo en cuenta que el curso consta aproximadamente de 32 semanas y que el tiempo dedicado a la lección de la asignatura de Matemáticas en el centro es de 4 horas a la semana, el tiempo estimado necesario para la enseñanza y aprendizaje la presente propuesta educativa ha sido aproximadamente de 2 semanas, es decir, de 8 o 9 sesiones.

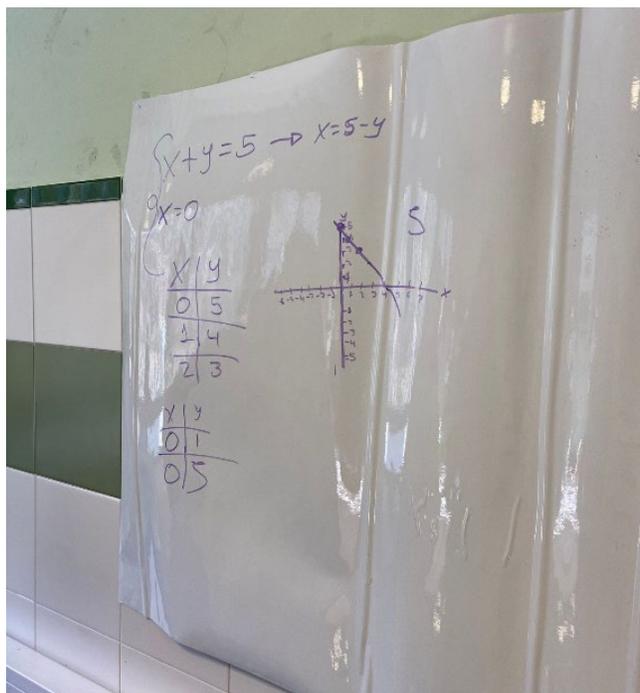
Teniendo en cuenta la información anterior, la distribución de las sesiones que han sido dedicadas a la propuesta didáctica referida a sistemas de ecuaciones son las siguientes:

- *Sesión 1.* Al inicio de la sesión informamos a los alumnos de la forma de trabajo en la que vamos a tratar los contenidos referidos a sistemas de ecuaciones, para ello, utilizamos una presentación PowerPoint en la que se plasma la forma de trabajo y las normas a seguir para llevarlas a cabo. En esta primera sesión trabajamos de forma colaborativa y posibilitando tiempo para reflexionar acerca de lo que se considera un sistema de ecuaciones y sus diversas soluciones.

- *Sesión 2.* Afianzamos las conclusiones obtenidas en la sesión anterior mediante un breve repaso en el que colaboran todos los miembros de la clase, a su vez, una vez realizado esto, recordamos las normas relacionadas con las pizarras y las actividades que se realizarán sobre ellas y formamos, mediante una baraja de cartas, los grupos de trabajo de esta sesión. En los grupos de trabajo aprenderán el método gráfico de resolución y razonarán sobre los resultados obtenidos en cuento a las posibles soluciones de los sistemas. En las Figuras 5 y 6 se pueden observar ejemplos de dichas resoluciones por parte del alumnado.

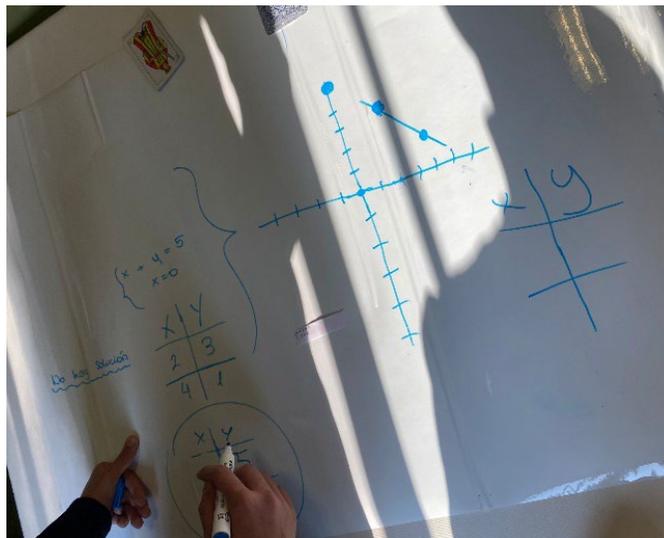
Una vez realizadas las actividades les presentamos el programa GeoGebra para que puedan trabajar de forma complementaria tanto de forma escrita como utilizando las nuevas tecnologías.

Figura 5. Alumnos resolviendo las secuencias de actividades por el método gráfico.



Durante esta sesión se utilizan las pizarras para que los alumnos comiencen a familiarizarse con su utilización y sus normas, sin embargo, no se usan las secuencias de actividades.

Figura 6. Resolución de actividades secuenciales mediante el método gráfico por parte del alumnado.



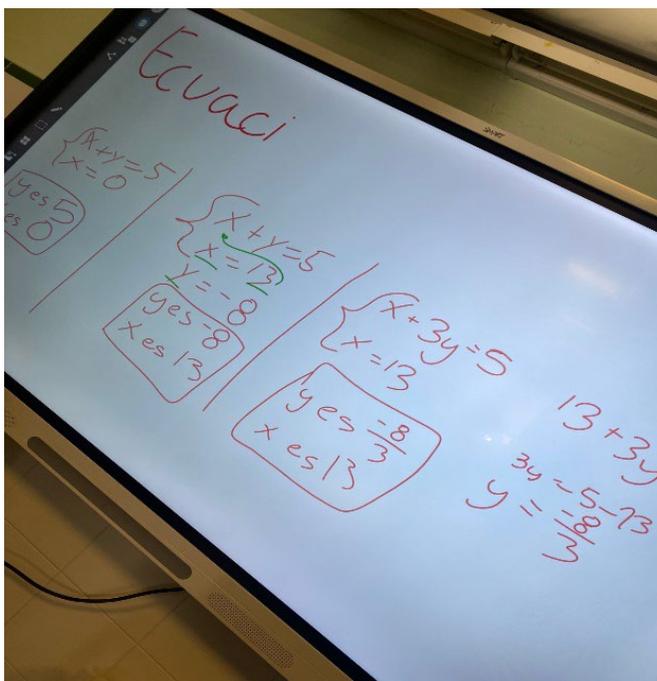
Mediante estas actividades los alumnos recuerdan las propiedades de las rectas, los métodos empleados para representar gráficamente las mismas y establecen una relación entre los puntos de corte de las mismas con las soluciones de sistema de ecuaciones.

- *Sesión 3.* Esta sesión consiste en la primera en la que se implementamos la secuencia de actividades en las pizarras. Al comienzo de la clase, en los primeros 5 minutos, son utilizados para repasar los resultados obtenidos en la sesión anterior, así como las normas a seguir durante las actividades en las pizarras. A continuación, formamos nuevos grupos de trabajo utilizando la baraja de cartas. Durante esta sesión, los alumnos tienen que deducir el método de sustitución mediante la resolución de una secuencia de ejercicios. En la Figura 7 se pueden observar ejemplos de resoluciones de estas actividades secuenciales por parte del alumnado.

En caso de que los ritmos entre grupos no sean semejantes pondremos en contacto grupos para que revisen los resultados obtenidos y así movilizar el conocimiento. Una vez realizada la secuencia completa se las plantean actividades complementarias mediante las

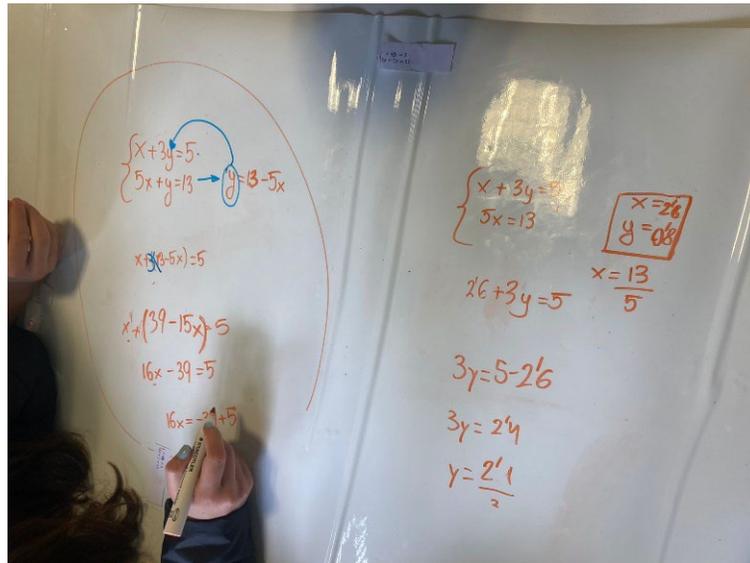
cuales afianzar lo aprendido durante la sesión. Pueden observarse ejemplos de dicha movilidad entre grupos en las Figuras 8 y 9.

Figura 7. Resolución de actividades secuenciales mediante el método de sustitución por parte del alumnado.



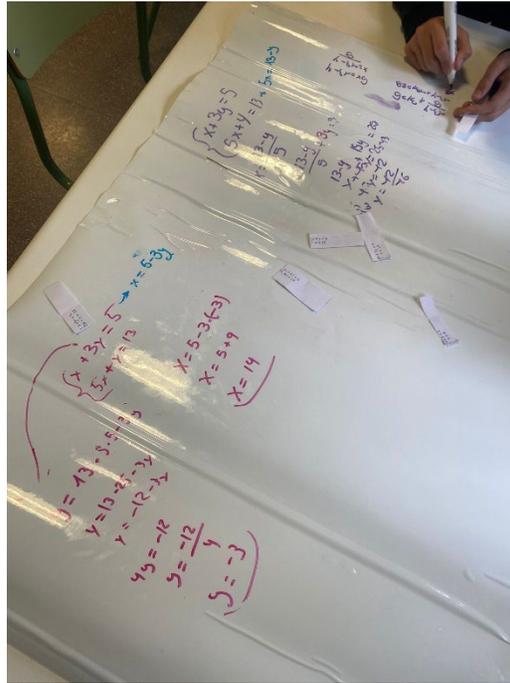
Al comienzo de dicha sesión los alumnos desearon aplicar el método gráfico empleado en la sesión anterior para resolver los sistemas en lugar de razonar a cerca de una nueva forma para resolver los sistemas. Sin embargo, tras conducirles hacia dicho razonamiento finalmente reconocían la eficiencia y mejora de la exactitud al emplear dicho método en lugar del gráfico, aunque el anterior resulte más visual y haya servido para comprender mejor lo que significa un sistema de ecuaciones y sus posibles soluciones.

Figura 8. Movilidad entre grupos durante la resolución de las secuencias de actividades sobre el método de sustitución.



- *Sesión 4.* Al igual que el resto de las sesiones comenzamos recordando en el grupo clase y de forma colaborativa lo realizado en la sesión anterior, así como recordando las normas de las pizarras y formando nuevos grupos de trabajo. Durante esta sesión los estudiantes deben deducir el método de igualación a partir de una secuencia de ejercicios y resolviéndolos en las pizarras verticales. Durante la sesión continuamos poniendo en contacto grupos para movilizar el movimiento. Una vez completada la secuencia de actividades se les ofrecen ejercicios complementarios con los que trabajar lo aprendido durante la sesión.

Figura 9. Interacción entre dos grupos a la hora de resolver secuencia de ejercicios.

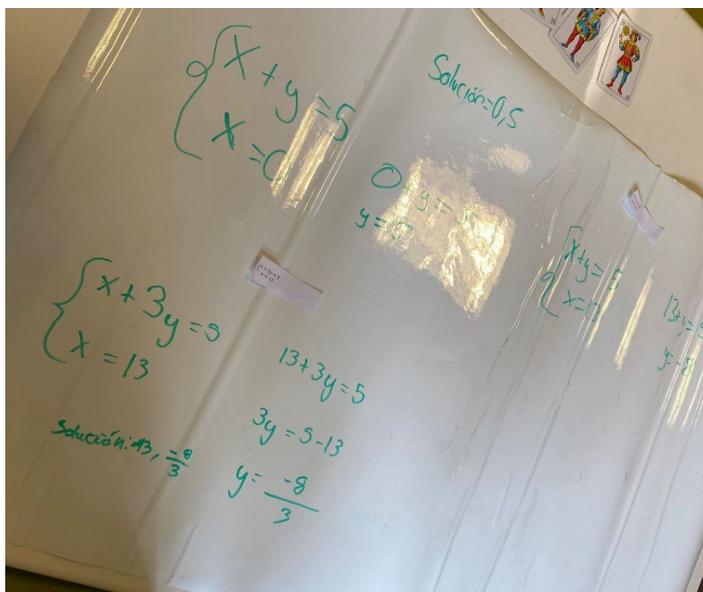


Durante esta sesión algunos alumnos se encontraban reacios a descubrir un nuevo método de resolución ya que consideraban que con aprender dos de ellos era suficiente. Ante esta situación es importante hacerles comprender la importancia de conocer los posibles métodos de resolución para que finalmente ellos sean capaces de elegir cuál de ellos utilizar en función del problema que se les plantee para resolver.

- *Sesión 5.* Siguiendo la dinámica del resto de sesiones, comenzamos recordando los métodos aprendidos previamente en el grupo clase. A diferencia del resto de sesiones, como el método de reducción puede resultar menos intuitivo comenzamos con una breve explicación de las operaciones que pueden realizarse entre las ecuaciones del sistema. Una vez realizada la explicación dividimos de nuevo el grupo en subgrupos diferentes de forma aleatoria y comienzan a trabajar en las pizarras verticales para obtener el método de reducción. La Figura 10 muestra un ejemplo de resolución de estas secuencias de actividades por parte del alumnado.

Al terminar la secuencia de actividades se presentan actividades complementarias mediante las cuales trabajar todos los métodos de resolución aprendidos durante las sesiones.

Figura 10. Ejemplo de resolución de secuencias de actividades por parte del alumnado.

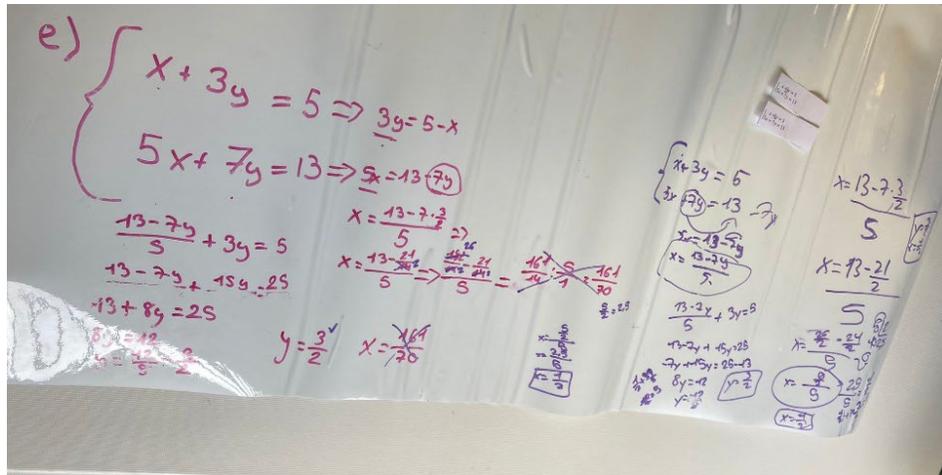


La comprensión de este método por parte de los alumnos resultó ser menos automático por lo que necesitaron una guía por parte del profesor ya que no comprendían (ni se les ocurría) la posibilidad de sumar o restar ecuaciones.

- *Sesión 6.* Del mismo modo, en esta sesión repasamos los métodos adquiridos en las anteriores sesiones, respondiendo dudas y cuestiones de forma cooperativa en relación con cualquiera de ellos, es decir tanto el profesor como los propios alumnos pueden responder las dudas del resto de compañeros. Tras realizar esta actividad dividimos de nuevo al grupo clase en grupos aleatorios de 3 o 4 alumnos para trabajar sobre las pizarras verticales. La secuencia de actividades de esta sesión busca repasar los métodos aprendidos anteriormente, así como el concepto de sistemas de ecuaciones. Para ello, utilizamos actividades con operaciones más complejas, tareas en las que a partir de la solución deban construir el sistema de ecuaciones y

finalmente, sistemas de ecuaciones no lineales que deben deducir como resolverlos utilizando las técnicas aprendidas. La Figura 11 muestra un ejemplo de interacción entre grupos llevada a cabo a lo largo de las secuencias de actividades.

Figura 11. Ejemplo de la interacción entre dos grupos al resolver las secuencias de ejercicios.



Cabe destacar que en el momento en que los alumnos debían de crear un sistema de ecuaciones cuya solución sea la planteada uno de los grupos se adelantó a la sesión anterior planteando un sistema de ecuaciones no lineal. Esta respuesta puede servir para explicar la diferencia entre sistema de ecuaciones lineales y no lineales y plantearles reflexionar acerca de las diferentes soluciones que podría tener dicho problema.

- *Sesión 7.* Considerando el grupo clase, afianzamos los conocimientos del día anterior relacionados con los sistemas de ecuaciones no lineales comprendiendo su significado y las posibles soluciones que podemos obtener a partir de ellos. Durante la segunda mitad de la clase, formamos de nuevo grupos aleatorios para trabajar actividades relacionadas con la resolución de problemas utilizando sistemas de ecuaciones, permitiendo la movilidad entre grupos para movilizar también el conocimiento. Al final de la sesión se proponen problemas para resolver de forma complementaria para afianzar lo aprendido durante todas las sesiones.

- *Sesión 8.* Los alumnos trabajan en la resolución de problemas relacionados con el viaje de fin de curso. Para ello, al igual que en el resto de las sesiones, dividimos el grupo clase en subgrupos utilizando una baraja de cartas. Estos grupos, en las pizarras verticales, deben resolver una sucesión de problemas relacionados con el viaje de fin de curso a Barcelona, para ello deben utilizar las técnicas y procedimientos adquiridos durante las sesiones de clases anteriores.

Durante la puesta en práctica de la presente sesión he percibido las muchas dificultades que encuentran los alumnos al resolver problemas matemáticos, puesto que muchos de ellos se encuentran con dificultades para comprender los enunciados o lo que deben realizar para obtener la solución. Ante esta problemática les planteo una técnica de resolución de problemas basada en las fases de resolución empleadas en la metodología de resolución de problemas, logrando así una mayor comprensión y por lo tanto mejores resultados en la resolución de dichas actividades.

- *Sesión 9.* Esta última sesión se emplea para, en el caso que fuera necesario, la realización de un examen relacionado con todo aquello visto en clase. Si este no fuera necesario, empleamos la sesión para realizar un repaso de lo aprendido.

3.10. Actividades de aprendizaje.

Las actividades propuestas para realizarse a lo largo de las sesiones de clase se encuentran incluidas en el **Anexo I**. Estas actividades consisten en las secuencias de tareas que serán realizadas por los grupos de alumnos a través de las pizarras verticales y siguen las características adecuadas de una Thinking Classroom, puesto que su principal objetivo es provocar el pensamiento y razonamiento de los alumnos durante su realización.

Dentro de las mismas podemos distinguir varios tipos:

- Secuencias de actividades en las que únicamente se varía una de componentes del paso de una a otra. Esta secuencia de tareas está ordenada según su dificultad, de

manera que las primeras de ellas son tareas inmediatas y fáciles de resolver y, sin embargo, las últimas requieren haber comprendido los pasos llevados a cabo durante la resolución de las precedentes y, por lo tanto, requieren de un nivel cognitivo más alto. Este tipo de tareas han sido empleadas principalmente durante las sesiones en las que los alumnos obtienen los diferentes métodos de resolución a partir de la resolución de la misma, por lo que su principal objetivo es desarrollar el pensamiento hasta obtener razonadamente y, por lo tanto, comprendiendo en todo momento la fundamentación del método de resolución que se está utilizando. A su vez, la abundancia de elementos que forman la propia sucesión permite que el ritmo de los grupos, y por lo tanto del grupo clase esté adaptado a todos y cada uno de los alumnos que lo forman.

- Actividades de creación. Los alumnos están acostumbrados a resolver tareas en las que en los que a partir de un enunciado o problema deben utilizar técnicas de resolución para obtener una respuesta al mismo, sin embargo, este tipo de tareas consisten en realizar la actividad de forma inversa. A los estudiantes se les plantea una solución de un sistema de ecuaciones y serán ellos mismos los que deberán de formular una situación y escribir un sistema cuya solución sea la presentada por el profesor inicialmente. Mediante la realización de este tipo de tareas podemos comprobar si los alumnos han comprendido correctamente los conceptos impartidos durante el resto de las sesiones.
- Actividades de repaso. Este tipo de actividades consisten en tareas complejas en las que, para llegar a la solución deben aplicarse conocimientos previos presentados en las propias sesiones de la propia propuesta didáctica combinados con otros conocimientos previos ya adquiridos, tanto en la asignatura de matemáticas como en cualquier otra materia.
- Problemas. Los problemas matemáticos consisten en situaciones o cuestiones que requieren una solución mediante la utilización de conceptos, herramientas y procedimientos matemáticos. Estos problemas están estrechamente relacionados con la vida cotidiana y tienen como objetivo principal la aplicación y desarrollo de técnicas de razonamiento en diferentes campos. Mediante la resolución de este tipo de tareas buscamos que los estudiantes sean capaces de establecer una conexión

con la vida cotidiana, de aquello que han adquirido tanto a través de la presente propuesta como a lo largo de toda su trayectoria educativa, facilitando técnicas de resolución para abordar aquellos problemas y situaciones que puedan presentar en el futuro tanto dentro como fuera del sistema educativo.

3.11. Evaluación.

Como hemos indicado anteriormente, la evaluación debe ser formativa y basada en la observación, es decir, reduciendo la importancia de la realización de un examen y dándosela a las actividades de clase. Al ser una evaluación formativa es imprescindible comunicar lo que los estudiantes pueden hacer y, además, determinar lo que aún no pueden hacer y porqué, para ello hay que facilitar una lista bien definida de ejemplos de indicadores para los resultados esperados.

La evaluación, además, debe estar de acuerdo con las directrices que marca la orden educativa, en la que atenderemos a los siguientes criterios de evaluación correspondientes a las competencias específicas que marca la legislación.

Para realizar esta adecuación de los criterios de evaluación, estableceremos, a continuación, una relación entre los objetivos de didácticos planteados por el profesor para ser evaluados y los criterios de evaluación proporcionados por la ley educativa. La Tabla 2 muestra la relación entre dichos objetivos didácticos y los criterios de evaluación.

Tabla 2. *Relación entre objetivos didácticos y criterios de evaluación.*

OBJETIVO DIDÁCTICO	CRITERIOS DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE
1. Comprender en qué consisten los sistemas de ecuaciones, estableciendo conexiones entre los diferentes elementos matemáticos.	3.1 Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.
	3.2 Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas,

	estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación.	
	3.3 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas sencillos.	
2. Entender los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante resolución progresiva de ejercicios.	4.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información.	
	4.2 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, oralmente y por escrito, para describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.	
	4.3 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicándolo con precisión.	
	5.1 Gestionar las emociones propias y reconocer las ajenas, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.	
	5.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.	
	5.3 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva.	
	5.4 Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa y asumiendo el rol asignado.	
		2.1. Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un

3. Comprobar la validez de las soluciones obtenidas utilizando procesos necesarios.	problema realizando los procesos necesarios.
	2.2. Comprobar la validez de las soluciones de un problema y elaborar las respuestas comprobando su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas
	5.1 Gestionar las emociones propias y reconocer las ajenas, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.
	5.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.
	5.3 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva.
4. Interpretar y resolver problemas y situaciones de la vida cotidiana utilizando sistemas de ecuaciones y los métodos de resolución adecuados.	5.4 Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa y asumiendo el rol asignado.
	1.1 Interpretar problemas matemáticos y de la vida cotidiana, organizando los datos dados y/o localizando y seleccionando información, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
	1.2 Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
	1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema movilizando los conocimientos necesarios.
	5.1 Gestionar las emociones propias y reconocer las ajenas, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.

	5.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.
	5.3 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva.
	5.4 Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa y asumiendo el rol asignado.
5. Reconocer la validez de las soluciones de un problema comprobando con coherencia el contexto implicado.	2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema realizando los procesos necesarios.
	2.2 Comprobar la validez de las soluciones de un problema y elaborar las respuestas comprobando su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas.

Sin embargo, para que los estudiantes sean capaces de ver dónde están y a dónde van se deben utilizar instrumentos como las rúbricas, con encabezados que delimiten las preguntas en niveles de dificultad, con menos de 5 indicadores y utilizando un lenguaje que les permita comprenderla. Para conseguir esto, reescribiremos los objetivos didácticos y los desglosaremos a la hora de crear la rúbrica con la que evaluaremos a los estudiantes y dividiéndolos en tres diferentes niveles de dificultad superados durante la realización de las actividades. En la Tabla 3 se muestra la rúbrica de evaluación diseñada para la puesta en práctica de la presente propuesta didáctica.

Tabla 3. Rúbrica de evaluación.

Sistemas de ecuaciones	Básico	Intermedio	Avanzado	Puntuación Máxima	Puntuación
Resolver actividades con el método de sustitución				4	
Resolver actividades con el método de igualación				4	
Resolver actividades con el método de reducción				4	
Utilización de los métodos conocidos para resolver sistemas no lineales				4	
Creación de sistemas de ecuaciones a partir de la solución.				3	
Resolución de sistemas de ecuaciones con denominadores				3	
Resolver problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones				3	
				25	

Para evaluar de forma observacional, es decir, una evaluación basada en que los estudiantes logren sus objetivos de manera colaborativa, debemos utilizar un conjunto de símbolos para trazar la acción que queremos evaluar, por ejemplo, los siguientes:

- **J**, Para cuestiones intentadas y respondidas con éxito.
- **S**, Para cuestiones intentadas y casi respondidas con éxito con algún fallo tonto.
- **H**, Para cuestiones intentadas y respondidas con éxito, pero con algo de ayuda.
- **G**, Para cuestiones respondidas con éxito sin colaboración del grupo.
- **X**, Para cuestiones intentadas y respondidas incorrectamente.
- **N**, Para cuestiones no intentadas.

3.12. Resultados de aprendizaje.

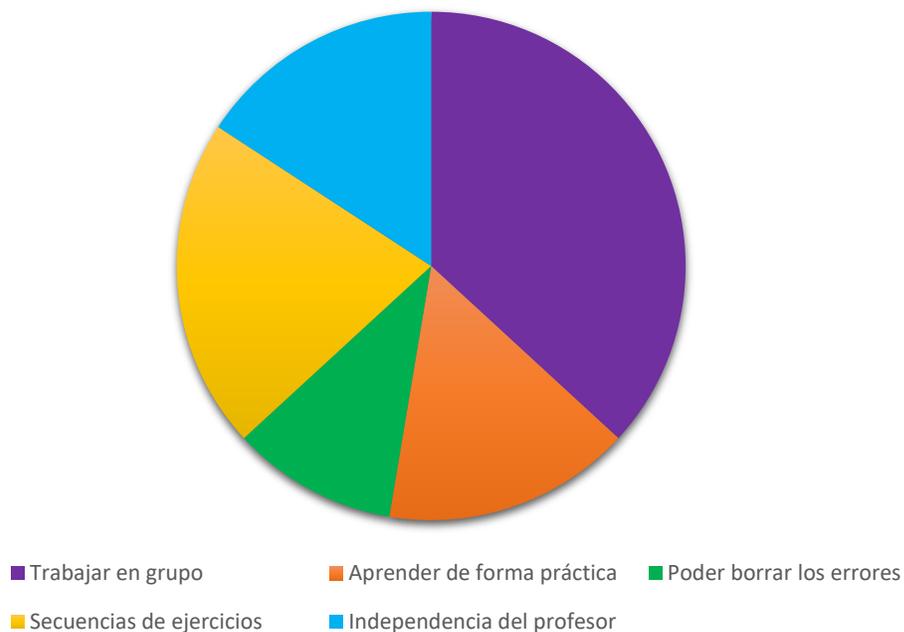
Tras haber completado la propuesta didáctica es momento de analizar los resultados obtenidos, para ello, hemos dedicado una sesión adicional para realizar reflexión conjunta en forma de *Focus Group* para identificar los puntos fuertes de la misma, así como las barreras o dificultades detectadas tanto por parte del profesor como por los propios alumnos. Durante este *Focus Group*, realizaremos diversas preguntas a los estudiantes, los cuales deben responder con una o dos palabras que irán escribiendo en la pizarra, una vez planteadas las respuestas reflexionaremos en el grupo clase sobre ellas y otras posibles consideraciones que surjan a partir de las mismas.

Para el posterior análisis de los datos obtenidos durante la puesta en práctica de este *Focus Group* es importante centrar el foco sobre las preguntas relacionadas con las mejoras en el aprendizaje, al igual que los aspectos negativos a tener en cuenta para posibles implementaciones en el futuro. En este apartado analizaremos los resultados obtenidos durante la sesión de *Focus Group*.

Al preguntar a los estudiantes acerca de si esta forma de dar clase ha sido satisfactoria a la hora de comprender mejor la materia, la totalidad de la clase consideró que este método les ha ayudado a entender mejor la parte de la materia correspondiente a los sistemas de ecuaciones. Sin embargo, alguno de ellos planteaba la posibilidad de mejorar el aprendizaje de dicha propuesta mediante una explicación previa sobre lo que se iba a realizar a lo largo de la clase.

Al preguntar a los estudiantes sobre qué es lo que más les ha ayudado a aprender dentro de la propuesta didáctica, hemos obtenidos una gran variedad de respuestas. La Figura 12 muestra a través de un gráfico de sectores las respuestas proporcionadas por el alumnado.

Figura 12. Gráfico recopilatorio de respuestas del alumnado a cerca de los aspectos que más han ayudado a su aprendizaje.



Como podemos ver, una gran parte de los alumnos destaca que ha influido positivamente en el aprendizaje el trabajar en grupo, sin embargo, también consideran muy influyente la independencia del profesor, aprender de forma práctica y la secuencia de ejercicios.

Aunque muchos destacaban como inconveniente que al crear los grupos de forma aleatoria en muchas ocasiones ocurría que algunos participantes de los mismos no realizaban la actividad, lo que impedía que el grupo pudiera resolver las secuencias de ejercicios propuestos.

Otra de las preguntas tratadas durante la reflexión grupal y que puede resultar interesante para futuras implementaciones de la propuesta didáctica consiste en plantear qué podría haber hecho el profesor para dificultar la realización de estas actividades. Las respuestas proporcionadas por el alumnado vienen representadas en la Figura 13 a través de un gráfico de sectores.

Figura 13. Gráfico recopilatorio de respuestas del alumnado a cerca de los aspectos que podrían dificultar la resolución de las actividades.



El gráfico anterior podemos ver que la mayor parte de los alumnos considera que podría crear una mayor dificultad en la realización de las actividades el limitar el tiempo que los grupos pueden dedicar a resolución de cada secuencia de ejercicios. Sin embargo, otra gran mayoría de estudiantes planteaban que la eliminación de las pistas proporcionadas por el profesor en las ocasiones en que los estudiantes se encontraban atascados podría dificultar la realización de los ejercicios. A su vez, una parte pequeña de alumnos consideraban que limitar el contacto entre grupos podría ser un factor que aumentara la dificultad de la realización de las pruebas.

En general, la propuesta educativa ha sido bien acogida por los alumnos considerándola como rica y beneficiosa para comprender mejor la materia que estábamos tratando en ella, destacando especialmente la autonomía mediante la cual llevaban a cabo las actividades propuestas, lo cual les ha permitido formar parte de su propio aprendizaje, así como el del resto de compañeros. A su vez, alguno de los mismos consideraba la implicación y participación por parte de los alumnos ya que se encontraban plenamente centrados en la resolución de las actividades y, por tanto en el aprendizaje.

4. Conclusión y reflexión final.

La propuesta didáctica planteada en el presente trabajo tiene, como hemos mencionado, el objetivo de fomentar y desarrollar un pensamiento matemático profundo, buscando a su vez tener en consideración los aspectos relacionados con el dominio afectivo que pueden presentar los alumnos en el aula de matemáticas. Estos objetivos serán adquiridos mediante la puesta en práctica de la propuesta didáctica diseñada en dicho trabajo, aplicada concretamente al tema de sistemas de ecuaciones en un curso de tercero de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

Tras la puesta en práctica de la misma es conveniente establecer una relación entre los objetivos iniciales de la propuesta y aquellos que han sido adquiridos finalmente por el alumnado tanto total como parcialmente:

- Cómo hemos indicado, el objetivo principal de la propuesta era fomentar el pensamiento crítico, creativo y reflexivo del alumnado, lo que finalmente fue conseguido gracias tanto a las metodologías empleadas en la propuesta como por las agrupaciones, las cuales permitieron a estos ser partícipes de su propio aprendizaje como del del resto de compañeros.
- Un objetivo inicial consistía en la identificación de perfiles afecto-matemáticos en el alumnado, mediante los cuales adaptar las tareas a todo tipo de estudiante. El reconocimiento de estos perfiles en los alumnos ha resultado ser una tarea complicada, ya que en ciertas ocasiones, a partir de la metodología empleada durante las sesiones y las técnicas de aprendizajes llevadas a cabo en las mismas he sido capaz de identificarlos para tenerlos en cuenta a la hora de diseñar las próximas actividades, sin embargo, en muchas ocasiones esta identificación ha resultado imposible y por lo tanto también la adaptación de las actividades a los mismos, por lo que este objetivo no ha sido cumplido plenamente.
- La utilización de agrupaciones reducidas formadas por 3 o 4 alumnos elegidos de forma aleatoria, junto con las secuencias de actividades permitieron satisfacer las necesidades de todo el alumnado que formaba la clase, independiente de sus destrezas, habilidades o afecto hacia las matemáticas, ya que proporcionaban un

ambiente de aprendizaje dinámico y participativo que motivaba a todo tipo de alumnos a aprender y participar en las mismas; lo que formaba parte de varios de los objetivos iniciales de la propuesta ya que, como hemos mencionado esto fomenta la inclusión educativa.

- Otro de los objetivos iniciales consistía en identificar los factores que el alumnado consideraba influyente en la realización de tareas matemáticas, este lo hemos obtenido a partir del *Focus Group*, realizado en la última sesión en la que estos podían dar su opinión sobre la propuesta y sobre su aprendizaje a partir de la misma.

A través del cumplimiento tanto parcial como total de los objetivos anteriores el alumnado ha logrado adquirir todos los objetivos didácticos asociados a los sistemas de ecuaciones en un curso de tercero de ESO, obteniendo así una comprensión plena de los conceptos y procedimientos incluidos dentro de esta parte del currículo.

La metodología empleada en las sesiones puede considerarse “demasiado innovadora” o incluso “fantasiosa”. Esto se puede deber a que en muchas ocasiones la visión que la sociedad tiene de la escuela consiste en clases formadas por alumnos sentados de forma ordenada en pupitres colocados de forma simétrica en dirección a la mesa del profesor, normalmente el alumnado atiende a las directrices establecidas por el docente y trabaja de forma individual en sus propios cuadernos de aprendizaje. Sin embargo, como hemos indicado, la metodología empleada en la propuesta didáctica planteada en dicho trabajo rompe con todo lo anterior y, por lo tanto, es entendible que pueda considerarse como rompedora.

Los estudiantes que han podido participar en la puesta en práctica de ésta la han considerado como interesante, ya que el modo de trabajar les brinda la posibilidad de deducir ellos mismos los contenidos y procedimientos relacionados con el tema que se quiere abordar, lo que les permite sentirse partícipes en su propio aprendizaje y obtener cierta autonomía del profesor. De la misma manera, el aprendizaje cooperativo en grupos de tres o cuatro personas les ha permitido contribuir en el aprendizaje del resto de sus compañeros, así como comprender diferentes puntos de vista. Aunque la mayoría de las opiniones acerca de la presente metodología eran positivas, algunos de ellos se presentaban reacios a trabajar en grupo, en algunas situaciones se pudo deber a que no se trataba de la

metodología empleada habitualmente en las clases de matemáticas, por lo que consideraban que usando esta metodología aprenderían menos, sin embargo, en otras situaciones se debía a la propia relación que tenían con el resto del grupo de trabajo. Ambas situaciones pudieron impedir el desarrollo de la propuesta, aunque esto ocurrió únicamente al comenzar con esta nueva metodología ya que, tanto unos como otros llegaron a adaptarse a la misma hasta encontrarse plenamente involucrados en su ejecución.

A la hora de poner en práctica la propuesta nos encontramos con ciertas dificultades que nos obligaron a modificar ciertos aspectos de ésta para poder llevarla a cabo. En primer lugar, nos encontramos con un impedimento a la hora de colocar los paneles de forma vertical. Debido al material con el que estaban construidas las paredes de la clase resultaba imposible colocarlos mediante chinchetas, por lo que tuvimos que intentar otros métodos para lograr mantener las pizarras pegadas en la pared, como la masilla adhesiva, sin embargo, estos métodos no lograron mantenerlas verticalmente. Ante esta problemática tuvimos que renunciar a la variable de verticalidad y decidimos colocar las pizarras de forma horizontal en estructuras que permitieran la accesibilidad a las mismas por parte de todos los alumnos que formaban los grupos. Otra dificultad que tuvimos que abordar a raíz de la solución anterior consistió en la colocación de la clase al comienzo y al terminar la clase, esto se debe a que el resto de los docentes que impartían clase al grupo no estaban de acuerdo con emplear esta nueva disposición, por lo que tuvimos que emplear 10 minutos de la propia sesión en desordenar y volver a ordenar la clase, lo que hizo que tuviera que acelerarse el ritmo de la clase.

Personalmente, esta propuesta encaja en mi visión de las matemáticas y más concretamente en como considero que debería ser su docencia, centrándose en el razonamiento y la comprensión de los conceptos matemáticos y, aunque esta nueva forma de impartir conocimientos pueda resultar más compleja o pueda requerir un mayor esfuerzo y dedicación, considero que es importante enseñar a las nuevas generaciones esta forma de pensar, que les servirá para abordar problemas futuros tanto relacionados con las matemáticas como ajenos a ella y, así, reconocer la importancia de esta materia más allá del aula. Además, considero que se adapta correctamente a las innovaciones que plantea la nueva ley educativa, la LOMLOE, la cual otorga importancia a la reflexión y al

pensamiento matemático más allá de la adquisición de conocimientos sin comprender a que se deben los mismos. En definitiva, considero que, aunque estas metodologías suponen un desafío tanto por el profesorado como por el alumnado, resulta necesario para que el sistema educativo evolucione y se adapte a una sociedad en continuo cambio.

5. Referencias.

- Adler, A. (2017). Educación positiva: Educando para el éxito académico y para la vida plena. *Papeles del psicólogo*, 38(1), 50-57.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=7784997201>
- Alcívar, A. M. y Concha, A. C. (2017). Programa de estrategias didácticas cognitivas para el desarrollo del razonamiento matemático. *Revista boletín redipe*, 6(4), 99-111.
- Asociación Pajarillos Educa. (5 de Marzo de 2023). *PajarillosEduca*. Obtenido de <https://www.pajarilloseduca.com/>
- Berzal, E. (2019). De salvación de chabolistas a supermercado de la droga. *El Norte de Castilla*. Obtenido de <https://www.elnortedecastilla.es/valladolid/salvacion-chabolistas-supermercado-20190121104314-nt.html>
- Blanco, A. (2019). Estos son los barrios con más y menos renta de Valladolid. *El Norte de Castilla*. Obtenido de <https://www.elnortedecastilla.es/valladolid/barrios-renta-valladolid-20190117171215-nt.html?ref=https://www.google.com/>
- CAST. (2018). Universal Design for Learning Guidelines version 2.0. *Traducción al español version 2.0 (2013)*. (C. Alba Pastor, P. Sánchez Hípola, J. M. Sánchez Serrano, & A. Zubillaga del Río, Trads.) Wakefield.
http://www.educadua.es/doc/dua/dua_pautas_2_0.docx
- Clark, H. (2015). *Educación 2030. Declaración de Incheon y Marco de Acción para la realización del objetivo de Desarrollo Sostenible 4*.
https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000245656_spa

De Guzmán, M. (2002). Un programa para detectar y estimular el talento matemático precoz en la Comunidad de Madrid. *La Gaceta de la RSME*, 5(1), 131-144.

Gil Ignacio, N., Guerrero Barona, E., y Blanco Nieto, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. *Electronic Journal of Reseach in Educational Psychology*, 4(1), 47-72.

<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=293123488003>

Gil, N. (2003). Creencias, actitudes y emociones en el aprendizaje matemático. *Memoria de investigación de Doctorado no publicada*.

Gobierno de España. (3 de Mayo de 2023). *educagob*. Obtenido de

<https://educagob.educacionyfp.gob.es/curriculo/curriculo-lomce/competencias-clave/ciencias.html>

Gómez Chacón, I. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. *Investigación en educación matemática: actas del XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, (págs. 121-140).

<http://hdl.handle.net/11162/47172>

Gómez Chacón, I. M. (2002). *Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas: una perspectiva para el profesor*.

<http://www.mat.ucm.es/~imgomez/vieja/gomez-ghacon-caceres.pdf>

Guerrero, E., Blanco, L. J. y Vicente, F. (2002). El tratamiento de la ansiedad hacia las matemáticas. *Aplicaciones de intervención psicopedagógica*, págs. 229-237.

Guerrero, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.

Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematical thinking and learning: Towards integration of emotion, motivation, and cognition. *New mathematics education research and practice*, 209-232.

https://doi.org/10.1163/9789087903510_019

- Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational studies in mathematics*, 165-178.
https://doi.org/10.1163/9789087903510_019
- Hannula, M. S., Leder, G. C., Morselli, F. y Vollstedt, M. (s.f.). *Affect and mathematics education: Fresh perspectives on motivation, engagement, and identity*. Springer Nature.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-13761-8_1
- Hart, L. (1989). Classroom processes, sex of student and confidence in learning mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), págs. 242-260.
<https://doi.org/10.5951/jresematheduc.20.3.0242>
- Hernández Aja, B., de la Madrid Heitzmann, L., Ramos Pérez, A., Robles Montes, C. y Serrano de Haro Martínez, A. (2013). Metodologías innovadoras e inclusivas en educación secundaria: los grupos interactivos y la asamblea de aula. *Tendencias pedagógicas*, 63-78.
- Hernández, E. (2009). Talento precoz en matemáticas: Modelos de detección y programas de estímulo. En A. Pérez y M. Sánchez, *Matemáticas para estimular el talento* (págs. 9-17). Sociedad Andaluza de Educación Matemática. THALES.
- Hernández, E. y Sánchez, M. (2008). Hernández, E. y Sánchez, M. (2008). ESTALMAT: Un programa para detectar y estimular el talento matemático precoz. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16, 113-112.
- ICFES. (2019). *Marco para prueba de matemáticas pisa 2021*. OECD.
- IES Galileo. (2023). *Proyecto Educativo IES Galileo, curso 2022-2023*. Obtenido de http://iesgalileo.centros.educa.jcyl.es/sitio/upload/22-23_Proyecto_educativo_de_centro.pdf
- IES Galileo. (2023). *Compromisos Familias-Centros*. Obtenido de http://iesgalileo.centros.educa.jcyl.es/sitio/upload/Compromisos_familias_centro.pdf

- IES Galileo. (2023). *Reglamento de Régimen Interior*. Obtenido de http://iesgalileo.centros.educa.jcyl.es/sitio/upload/22-23-Reglamento_de_Regimen_Interior.pdf
- Jiménez, I. (2009). *Conocimiento del profesor para la enseñanza de las Matemáticas. Contribución teórica al conocimiento del contenido y estudiantes*.
- Lijedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin press.
- Lora Navarro, J. A. (Abril de 2009). Mejora de la competencia matemática. *CSIF*(17), 1-8.
- Martínez, G., García, M., Lemus, M., Rivera, M. y Juárez, J. A. (2013). Invitación al estudio del dominio afectivo en matemática educativa. *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 429-435.
<http://redcimates.org/test/>
- Martínez, O. J. (2005). Dominio afectivo en educación matemática. *Paradigma*(26), págs. 7-34.
<http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/>
- McLeod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: new view of affect in mathematics education. En D. B. McLeod, & V. M. Adams, *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (págs. 245-258). New York: Springer-Verlang.
https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_17
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning*, 575-598.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_174
- McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 637-647.
<https://doi.org/10.5951/jresematheduc.25.6.0637>
- Menéndez, P. P. (Marzo de 2013). Las competencias matemáticas en el aprendizaje a lo largo de la vida. *suma*, 9-15.
<https://revistasuma.fespm.es>

- Nieto, L. B., Carrasco, A. C., Piedehierro, A., Barona, E. G. y del Almo, R. G. (2010). El Dominio afectivo en la Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. *Campo Abierto*, 29(1), 13-31.
- <https://tejuelo.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1879>
- Niss, M. (2002). Competencias matemáticas y el aprendizaje de las matemáticas: El proyecto KOM danés. *3ra conferencia sobre educación matemática*, (págs. 115-124).
- Onrubia, J., Fillat, M. T., Martínez, M. D., & Udina, M. (2004). *Criterios psicopedagógicos y recursos para atender la diversidad en secundaria* (Vol. 201). Graó.
- Pastor, C. A. (2018). *El Diseño Universal para el Aprendizaje: Educación para todos y prácticas de enseñanza inclusivas*. Ediciones Morata.
- <http://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:c8e7d35c-c3aa-483d-ba2e-68c22fad7e42/pe-n9-art04-carmen-alba.pdf>
- Pastor, C. A. (7 de Junio de 2023). *educaDUA*. Obtenido de <http://educadua.es/>
- Quiceno Zuluaga, Y. M. (2015). El Fortalecimiento del Razonamiento Matemático. *Departamento de Matemáticas y Estadística*.
- Ramírez Uclés, R., & Sánchez, M. (2020). *El proyecto ESTALMAT. Más de 20 años estimulando el talento matemático*.
- Red Pajarillos. (2023). Obtenido de <https://redpajarillos.wordpress.com/2016/03/13/comision-gitana/>
- Red Pajarillos de Asociaciones y entidades. (2007). *Estudio sobre la realidad del barrio*. Obtenido de http://vecinosvalladolid.org/IMG/pdf/Estudio_barrio_Pajarillos_Red_Pajarillos_.pdf
- Resolución 39 de 2022 [Consejería de Educación]. Por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. 29 de septiembre de 2022.
- Rico Romero, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas: proyecto PISA/OCDE 2003. *Investigación en educación matemática: Octavo Simposio de la Sociedad Española de*

- Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (págs. 89-102). A Coruña: Servizo de Publicacións.
- Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig y M. Sierra, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 15-38). Ice-Horsori.
- Rico, L. (Enero de 2007). La competencia matemática en PISA. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 1(2), 47-66.
<https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6215>
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En *Handbook of research on Mathematics teaching and learning* (págs. 334-3370). New York: Macmillan Publishing Company .
<https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Schukajlow, S., Rakoczy, K. y Pekrun, R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: Theoretical considerations and empirical contributions. *49*, 307-322. ZDM.
<https://doi.org/10.1007/s11858-017-0864-6>
- UNESCO. (1960). *Convención relativa a la Lucha contra las Discriminaciones en la Esfera de la Enseñanza*.
- UNESCO. (25 de abril de 2023). *La inclusión en la educación*. Obtenido de <https://www.unesco.org/es/education/inclusion>

6. Anexos

Anexo I. Actividades secuenciales.

MÉTODO GRÁFICO

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + 2x = 8 \\ y + x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 3y = 12 \\ 7 - 3y = -x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -2y + 5 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

$$\begin{cases} x = -y \\ x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ 2x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = -y \\ 2x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 8y = 5 \\ 2x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 8y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 8y = 5 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 5x + y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 5x + 7y = 13 \end{cases}$$

ACTIVIDADES DE CREACIÓN

Crea un sistema de ecuaciones cuyas soluciones sean $x=1$, $y=3$.

Crea un sistema de ecuaciones sin solución.

Crea un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones.

Crea un sistema de ecuaciones cuyas soluciones sean $x=-1$, $y=3$.

SISTEMAS CON DENOMINADORES Y NO LINEALES

$$\begin{cases} 5(x + 3) - 2(y - 1) = 3(5x - y) - 8x \\ \frac{x + 1}{7} - \frac{y}{5} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 - y^2 = -25 \end{cases}$$

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Dos números naturales, su suma es 17 y el doble de uno de ellos es 14. ¿Qué números son?

Bea tiene el doble de camisetas que Claudia, y le regala dos de ellas a Claudia para quedarse con la misma cantidad de camisetas. ¿Cuántas camisetas tenían inicialmente cada una?

Una empresa de videojuegos tiene que enviar 3000 videojuegos, solo puede enviar los videojuegos en paquetes de 2 o de 5. Si la empresa solamente tiene 1200 paquetes en total. ¿Cuántos paquetes de 2 y cuántos de 5 ha utilizado?

Halla las edades de Fernando y Erick, sabiendo que hace 10 años la edad de Fernando era 4 veces la de Erick y dentro de 20 años la edad de Fernando será el doble de la de Erick.

Calcula las dimensiones de un rectángulo de perímetro 65cm y área 240 cm².

El producto de dos números es -15 y su diferencia es 8. ¿De qué números estoy hablando?

El cociente (exacto) entre dos números es 3 y su producto es 48. ¿Qué números son?

Calcula las medidas de los tres lados de un triángulo rectángulo, si sabemos que su área es 30 cm² y sus catetos suman 17.