EdMa06 — Ediciones Universidad de Valladolid

Conocimientos esenciales sobre los procesos, habilidades o competencias matemáticas: orientaciones para implementar situaciones de aprendizaje

Essential knowledge on processes, skills or mathematical competencies: guidelines for implementing learning situations

ÁNGEL ALSINA
Universidad de Girona
angel.alsina@udg.edu
https://orcid.org/0000-0001-8506-1838
Recibido/Received: Octubre de 2023. Aceptado/Accepted: Diciembre de 2023.
Cómo citar/How to cite: Alsina, Á. (2023). Conocimientos esenciales sobre los procesos, habilidades o competencias matemáticas: orientaciones para implementar situaciones de aprendizaje. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *12*(2), 65-108. DOI: https://doi.org/10.24197/edmain.2.2023.65-108

Artículo de acceso abierto distribuido bajo una Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional (CC-BY 4.0). / Open access article under a Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Resumen: Los currículos de matemáticas contemporáneos hacen referencia a la competencia matemática, pero las orientaciones que se han ofrecido hasta hace poco tiempo para promover su desarrollo han tendido a ser escasas o muy generales. Desde esta perspectiva, el propósito de este artículo es presentar los conocimientos esenciales sobre los procesos, habilidades o competencias matemáticas del S. XXI, que son la base para poder implementar prácticas de enseñanza competenciales y productivas. En concreto, se describen conocimientos esenciales de la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones, la representación, la modelización matemática y el pensamiento computacional. Adicionalmente, se ofrecen preguntas guía de cada conocimiento para orientar al profesorado de infantil y primaria en el diseño y la implementación de situaciones de aprendizaje de las matemáticas cuyo propósito sea desarrollar la competencia matemática.
Palabras clave: Conocimientos del profesorado de matemáticas; procesos matemáticos; competencia matemática; prácticas de enseñanza; situaciones de aprendizaje; Educación Infantil; Educación Primaria.

Abstract: Contemporary mathematics curricula refer to mathematical competence, but the guidelines offered until recently to promote its development have tended to be limited or very

general. From this perspective, the purpose of this article is to present the essential knowledge about 21st century mathematical processes, skills or competences, which are the basis for implementing productive and competent teaching practices. Specifically, essential knowledge of problem solving, reasoning and proof, communication, connections, representation, mathematical modelling, and computational thinking are described. In addition, for each knowledge, guiding questions are provided to guide early childhood and primary school teachers in the design and implementation of mathematical learning situations aimed at developing mathematical competence.
Keywords: Mathematics teacher knowledge; mathematical processes; mathematical literacy; teaching practice; learning situations; Early childhood Education; Primary Education.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la forma de entender las matemáticas y su enseñanza se ha ido transformando paulatinamente a partir de las aportaciones de organizaciones internacionales de carácter intergubernamental encargadas de diseñar mejores políticas educativas; administraciones educativas responsables de impulsar y dinamizar la innovación y el cambio para la mejora de la calidad educativa; y, por supuesto, asociaciones de profesorado y autores de todo el mundo dedicados a la mejora de la educación matemática. Desde una visión de la enseñanza de las matemáticas estrictamente académica, cuya meta era que el alumnado hiciera bien los ejercicios y tuviera buenas notas en los exámenes finales, se ha ido avanzando paulatinamente hacia un enfoque cuyo propósito es que el alumnado adquiera conocimientos y habilidades matemáticas para desenvolverse mejor en su vida (Alsina, 2019).

Esta transformación de fondo, lógicamente, no es nada fácil. Son más los factores que obstaculizan que los que contribuyen a avanzar: currículos que no consideran suficientemente los avances de la investigación en educación matemática; sistemas de creencias del profesorado de matemáticas muy arraigadas en torno a prácticas de enseñanza fundamentadas en la mecanización, la memorización y la ejercitación; o la aparición de editoriales con excelentes equipos de marketing que, desde la apropiación de contribuciones de organismos y autores de prestigio, pautan excesivamente la práctica del profesorado y dinamitan que pueda llevar a cabo su desarrollo profesional de forma autónoma; entre otros.

La intención de este artículo no es analizar estas amenazas ni sus consecuencias, sino únicamente mencionarlas para tener consciencia de que están ahí. El propósito es más proactivo, ofreciendo algunas ayudas y orientaciones al profesorado de matemáticas que desea avanzar hacia la implementación de prácticas competenciales y productivas, asumiendo que una práctica productiva en educación matemática "es una acción o destreza educativa útil y provechosa para promover el aprendizaje de las matemáticas con sentido en todos los niveles escolares" (Alsina, 2020a, p. 2). Esto requiere, en primer lugar, situarse en el marco de los procesos matemáticos, que en algunos currículos se han denominado habilidades (p. ej., el currículo chileno vigente) o competencias matemáticas (p. ej., el currículo español vigente); y, en segundo lugar, aventurarse a diseñar, implementar y evaluar prácticas de enseñanza de los saberes matemáticos a través de estos procesos, habilidades o competencias. Desde esta perspectiva, se amplían -principalmente para el profesorado de infantil y primaria- dos subtipos de conocimiento de la caracterización *Conocimientos del Profesorado para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil (CPEM-EI)* propuesta por Alsina y Delgado-Rebolledo (2022): por un lado, el *Conocimiento de los Procesos Matemáticos (C-PM)*, que es uno de los subtipos del conocimiento matemático; y, por otro lado, el *Conocimiento sobre la Planificación y Gestión de Actividades de enseñanza de las matemáticas (C-PGA)*, que forma parte del conocimiento didáctico.

Con este propósito, el artículo se estructura en dos partes: en la primera, se describe un breve marco general de los procesos, habilidades o competencias matemáticas desde una perspectiva tanto internacional como estatal, considerando la legislación actual (e.g., MEFP, 2022a, 2022b; NCTM, 2003; Niss, 2002; OECD, 2004); y, en la segunda, se presentan los conocimientos esenciales para llevar a cabo prácticas de enseñanza competenciales y productivas, a partir de las aportaciones preliminares de otros organismos y autores (e.g., Alsina, 2014, 2020a; Alsina et al., 2021; Alsina et al., en revisión; NCTM, 2003; Niss, 2002; OECD, 2004, 2005).

1. BREVE MARCO GENERAL DE LOS PROCESOS, HABILIDADES O COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

A finales de 1997, la OCDE inició el Proyecto DeSeCo para ofrecer un marco conceptual que sirviera de base para identificar las competencias clave y el fortalecimiento de las encuestas internacionales que miden el nivel de competencia de jóvenes y adultos. Este proyecto, realizado bajo el liderazgo de Suiza y conectado con PISA, reunió a expertos de una

ISSN 2254-8351

amplia gama de disciplinas y países para que trabajaran con actores y analistas políticos para producir un marco relevante. El proyecto reconoció la diversidad de valores y prioridades a lo largo de países y culturas, pero identificó también desafíos universales de la economía global y la cultura, así como valores comunes que informan la selección de las competencias más importantes (OECD, 2005). En la Figura 1 se ilustra el proceso que se siguió:

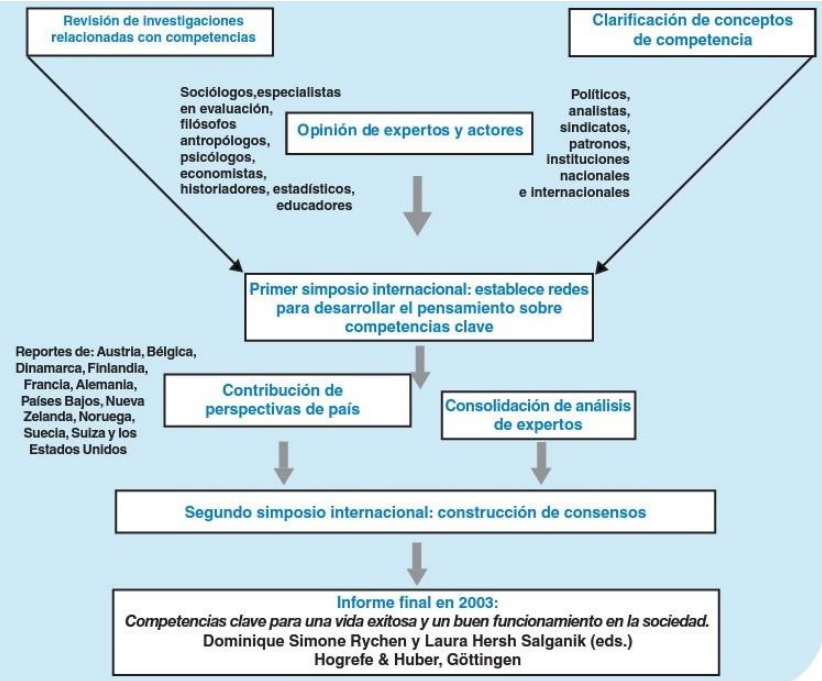


Figura 1. Secuencia de actividades del Proyecto DeSeCo. Fuente: OECD (2005, p. 18).

De manera prácticamente simultánea, empezaron a publicarse marcos conceptuales para caracterizar los componentes de la *competencia matemática*, denominados también *procesos*, *habilidades* o incluso *dimensiones* en distintas propuestas curriculares. En la Figura 2 se ofrece una síntesis de las principales contribuciones (NCTM, 2003; Niss, 2002; OECD, 2004):

Estándares de procesos matemáticos (NCTM, 2003)	Competencias matemáticas (Niss, 2002)	Competencias matemáticas en PISA 2003 (OECD, 2004)
Resolución de problemas	Planteamiento y resolución de problemas matemáticos	Planteamiento y resolución de problemas
	Uso de recursos y herramientas	Uso de herramientas y recursos
Razonamiento y prueba	Dominio de modos de pensamiento matemático	Pensamiento y razonamiento
	Razonamiento matemático	Argumentación
Comunicación	Comunicación en, con y acerca de las matemáticas	Comunicación
Conexiones	-	-
Representación	Representación de entidades matemáticas	Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal.
	Manejo de símbolos matemáticos y formalismos	Utilización del lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.
-	Análisis y construcción de modelos	Construcción de modelos

Figura 2. Procesos y competencias matemáticas. Fuente: Alsina (2019, p. 25)

Como se observa en la Figura 2, los procesos matemáticos (NCTM, 2003) y las competencias matemáticas (Niss, 2002, OECD, 2004) enfatizan una misma idea: la capacidad de usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos, además del escolar, reforzando de esta forma un enfoque social en torno al diseño, aplicación y evaluación de situaciones de aprendizaje que fomenten el desarrollo de la competencia matemática. A partir de una comparación horizontal se observa que, si bien no todos los organismos y autores coinciden, todos ellos consideran de un modo u otro que es imprescindible que, desde la educación infantil y a lo largo de la escolaridad, el alumnado aprenda a:

- Plantearse y resolver problemas: comprender el enunciado, generar preguntas relacionadas con las situaciones problemáticas, planificar y desarrollar estrategias de resolución y verificar la validez de las soluciones;
- Razonar y probar: realizar inducciones y/o deducciones, particularizar y generalizar; argumentar las decisiones tomadas, así como la descripción de los procesos seguidos y de las técnicas usadas;
- Comunicar: expresar oralmente y por escrito las ideas matemáticas, usando lenguaje matemático;

- Conectar: vincular saberes dentro y fuera de las matemáticas;
- Representar: usar materiales, palabras, dibujos, signos y símbolos;
- Crear modelos: analizar, explicar y comprender la realidad, a partir de un proceso de reflexión que implique idas y venidas entre los contextos reales y las matemáticas.

Adicionalmente, desde una perspectiva más contemporánea, los currículos de matemáticas han empezado a añadir otra competencia que no se contempló en las caracterizaciones de inicios del siglo XXI:

- Pensar computacionalmente: resolver problemas aplicando algunos componentes fundamentales de la informática como los patrones, los algoritmos, la descomposición o la abstracción.

En el currículo español, la competencia matemática aparece en diferentes momentos. En educación primaria y secundaria está presente desde 2006, aunque de diversas formas en función de su conceptualización: desde considerarse una competencia básica hasta integrarse dentro de una competencia clave STEM, junto con las ciencias, la tecnología y la ingeniería (Beltrán-Pellicer y Alsina, 2022). En infantil, en cambio, la competencia matemática aparece en el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil (MEFP, 2022a), integrada también dentro de la competencia clave STEM.

Una de las principales novedades de la legislación educativa española vigente es que, por primera vez, se definen competencias específicas que aportan funcionalidad, pues la generalidad de las competencias clave no resultaba práctica (Beltrán-Pellicer y Alsina, 2022). Sin embargo, el problema principal radica en que desde el punto de vista del horizonte matemático, sorprenden algunas divergencias relevantes en torno a la competencia matemática, como la distinta conceptualización en infantil y primaria. Por ejemplo, Alsina (2022) expone que, en infantil, el enfoque de la competencia matemática es de influencia piagetiana y focalizado exclusivamente en las habilidades numéricas, sin explicitar suficientemente los procesos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación; en primaria, en cambio, la visión es más amplia y se ofrecen indicaciones mucho más precisas sobre todos estos procesos (Beltrán-Pellicer y Alsina, 2022).

Al margen de estas discrepancias entre etapas, la principal meta del desarrollo progresivo de la competencia matemática es que la ciudadanía movilice de manera comprensiva y eficaz conocimientos, habilidades y actitudes que le permitan obtener, interpretar y generar información de naturaleza matemática; usar las técnicas matemáticas elementales (contar, operar, medir, situarse en el espacio, organizar y analizar datos) y los instrumentos (calculadoras y TIC, de dibujo y de medida) para hacer matemáticas; y, sobre todo, poner en juego su pensamiento matemático y computacional para construir y usar conocimientos en situaciones en las que tengan sentido, experimentar, intuir, relacionar conceptos y realizar abstracciones. Desde este marco, en la segunda parte de este artículo se describen los conocimientos esenciales que debería movilizar el profesorado para diseñar e implementar prácticas de enseñanza de las matemáticas productivas y competenciales.

2. Conocimientos esenciales sobre los procesos, habilidades o competencias matemáticas

Esta sección es la ampliación de diversas publicaciones previas (e.g., Alsina, 2014, 2020a; Alsina et al., 2021; Alsina et al., en revisión; NCTM, 2003; OECD, 2004, 2005), en las que se han descrito algunos conocimientos y orientaciones para la incorporación de los procesos, habilidades o competencias matemáticas en las prácticas de enseñanza de las matemáticas durante las etapas de infantil y primaria, principalmente. Para Alsina (2020a), estas prácticas enriquecidas son una oportunidad y un desafío para transformar prácticas centradas en los saberes, basadas en memorizar definiciones y procedimientos, en prácticas cuyo propósito sea interpretar y trabajar matemáticamente con el entorno. Desde este marco, en los próximos apartados se describen tres conocimientos esenciales para cada uno de los procesos, habilidades o competencias matemáticas siguientes: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones, representación, modelización matemática y, adicionalmente, el pensamiento computacional por sus vínculos estrechos con el pensamiento matemático. Adicionalmente, se ofrecen preguntas guía de cada conocimiento para orientar al profesorado de infantil y primaria en el diseño y la implementación de situaciones de aprendizaje de las matemáticas cuyo propósito sea desarrollar la competencia matemática.

2. 1. La resolución de problemas

Introducir la resolución de problemas matemáticos en el aula no implica proponer al alumnado un listado hipotético de *problemas de suma*, *problemas de multiplicación* o *problemas de divisiones de dos cifras*..., por mencionar algunas prácticas todavía muy presentes. Esto son ejercicios de aplicación, en los que el alumnado pone en práctica saberes que se han introducido previamente.

Plantear problemas requiere presentar al alumnado una situación o un reto nuevo para ellos del que no conocen de antemano las estrategias o técnicas para llegar a la solución, por lo que implica primero pensar y luego hacer. Este escenario, lógicamente, requiere unos conocimientos profesionales que no tienen nada que ver con la presentación de ejercicios de aplicación. En la Tabla 1 se presentan, de forma muy sintética, estos conocimientos:

Tabla 1. Resolución de problemas: conocimientos esenciales y preguntas guía

Conocimiento del tipo de situación o reto.	¿Qué situación/reto planteo?
Conocimiento de las técnicas y estrategias de resolución.	¿Qué técnica/estrategia para resolver problemas introduzco?
Conocimiento de las fases de resolución	¿Qué pasos tengo en cuenta cuando planteo una situación/un reto?

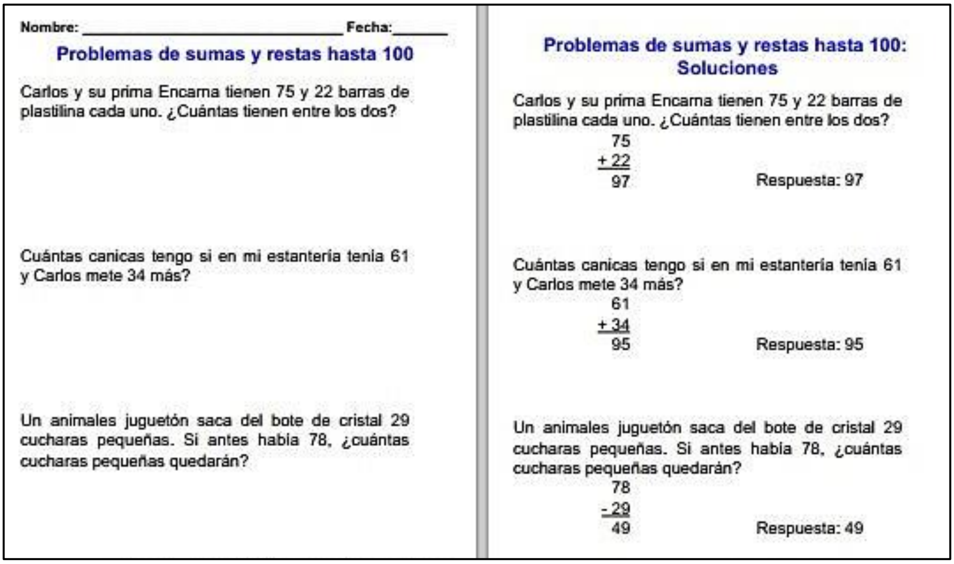
Conocimiento del tipo de situación o reto

Como ya se ha señalado, no todas las situaciones pueden considerarse problemas. Veamos, a modo de ejemplo, las tareas de la Figura 3.

El encabezado de la Figura 3 ya está indicando que se trata de “Problemas de sumas y restas hasta 100”; entonces: ¿cuál es el problema?, ¿qué actividad heurística realiza el alumnado?, ¿debe pensar alguna estrategia o técnica de resolución, si el encabezado ya lo está indicando? La respuesta a estos interrogantes nos indica muy claramente que el único problema que puede tener el alumnado ante esta tarea es no saber hacer sumas y restas, pero este es otro tema distinto.

Así pues, el conocimiento profesional asociado a la resolución de problemas de matemáticas implica saber planificar adecuadamente un contexto de enseñanza que permita plantear un reto al alumnado. Para ello, hay que tener muy presente que *contexto* no es sinónimo únicamente de *contexto real*. Considerando los planteamientos del Enfoque de los

Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), efectivamente un contexto puede ser una situación de vida cotidiana, pero también puede ser un material manipulativo, un juego, un recurso literario, tecnológico o incluso gráfico (Alsina, 2020b). A partir de todos estos contextos puede plantearse un reto que dé lugar a una situación de aprendizaje en la hay involucrados distintos saberes matemáticos que se trabajan a través de diversos procesos, habilidades o competencias.



Nombre: ______________________ Fecha: ______

Problemas de sumas y restas hasta 100

Carlos y su prima Encarna tienen 75 y 22 barras de plastilina cada uno. ¿Cuántas tienen entre los dos?

Cuántas canicas tengo si en mi estantería tenía 61 y Carlos mete 34 más?

Un animales juguetón saca del bote de cristal 29 cucharas pequeñas. Si antes había 78, ¿cuántas cucharas pequeñas quedarán?

Problemas de sumas y restas hasta 100: Soluciones

Carlos y su prima Encarna tienen 75 y 22 barras de plastilina cada uno. ¿Cuántas tienen entre los dos?

$$\begin{array}{r} 75 \\ \underline{+\,22} \\ 97 \end{array}$$

Respuesta: 97

Cuántas canicas tengo si en mi estantería tenía 61 y Carlos mete 34 más?

$$\begin{array}{r} 61 \\ \underline{+\,34} \\ 95 \end{array}$$

Respuesta: 95

Un animales juguetón saca del bote de cristal 29 cucharas pequeñas. Si antes había 78, ¿cuántas cucharas pequeñas quedarán?

$$\begin{array}{r} 78 \\ \underline{-\,29} \\ 49 \end{array}$$

Respuesta: 49

Figura 3. Problemas de sumas y restas hasta 100. Fuente: https://www.pinterest.es/pin/835628905831987659/

Conocimiento de las técnicas y estrategias de resolución

Otro conocimiento imprescindible en torno a la resolución de problemas de matemáticas son las técnicas y estrategias que se ponen en juego: un material manipulativo para encontrar a representar una solución; una explicación oral del proceso de resolución, sin necesidad de representarlo en el papel; un esquema o un dibujo; una operación aritmética; resolver la situación por partes o empezando por el final; etc.

Se ha escrito mucho sobre estas cuestiones, pero en la práctica todavía existe cierta inseguridad acerca de la introducción y la gestión de estas distintas técnicas y estrategias para resolver problemas, lo que lamentablemente conduce algunas veces a aceptar una única técnica o estrategia como válida: la que la maestra o el maestro conoce. Para subsanar estas lagunas, en los últimos años se vienen realizando diversas aportaciones en torno a la fluidez en las matemáticas (Bay-Williams y SanGiovanni, 2021; NCTM, 2023). Estos organismos y autores tratan de describir técnicas para desarrollar la capacidad para resolver problemas de forma creativa y eficiente. Bay-Williams y SanGiovanni (2021), por ejemplo, plantean tres tipos de fluidez: a) factual: para evocar hechos conocidos; b) computacional: para hacer operaciones más allá de las operaciones simples con soltura; y c) procedimental: para seleccionar estrategias adecuadas; resolver en un tiempo razonable; adaptar la estrategia; aplicar una estrategia a un nuevo tipo de problema; hallar la respuesta correcta; completar los pasos con precisión, etc. De acuerdo con el NCTM (2023), la fluidez procedimental es un componente esencial de la enseñanza equitativa y es necesaria para desarrollar la competencia matemática. Todo el alumnado debería tener acceso a una enseñanza que conecte los conceptos con los procedimientos, desarrolle explícitamente un repertorio razonable de estrategias y algoritmos y ofrezca oportunidades sustanciales para aprender a utilizarlos.

Conocimiento de las fases de resolución

Un tercer conocimiento imprescindible tiene que ver con los aspectos que deberían considerarse desde que se plantea una situación/un reto hasta que se llega a la solución. A continuación, se transcribe una situación vivida en el marco de una visita a un centro escolar, en la que una maestra de 4.º de primaria (9-10 años) había planteado al alumnado que resolvieran un listado de problemas, que en realidad eran ejercicios de aplicación. Un alumno que no entendía uno de los enunciados se levantó para preguntar a la maestra y ocurrió lo siguiente (Figura 4):

Alumno: *Seño, no lo entiendo.*
Maestra: *Siéntate y vuélvelo a leer.*
(al cabo de un rato el alumno se vuelve a levantar)
Alumno: *Seño, es que no lo entiendo.*
Maestra: *Siéntate y léelo más despacio.*

Figura 4. Interacción maestra-alumno frente a la resolución de un problema.
Fuente: elaboración propia.

Está claro que, en esta ocasión por lo menos, la ayuda de la maestra no fue la adecuada, por lo que se requiere que el profesorado tenga un buen conocimiento de las distintas fases de resolución de una situación y cómo hay que actuar en cada una de ellas. El proceso de resolución, como ya señalaron Pólya (1945) o Schoenfeld (1985), se refiere a la actividad heurística que lleva a cabo el alumnado desde el momento en que se presenta una situación problemática hasta que se comunica una solución. Pólya (1945), por ejemplo, estableció cuatro fases que desarrolló más adelante en otros trabajos (Pólya, 1954, 1968):

- Comprensión del problema: ¿cuáles son las incógnitas?; ¿qué datos hay?; ¿son relevantes, necesarios o contradictorios?
- Planificación: ¿se conoce algún problema parecido?; ¿podemos convertirlo en un problema más simple?; ¿se pueden introducir otros elementos o datos auxiliares?
- Ejecución de un plan: ¿qué estrategias se pueden aplicar las estrategias?
- Supervisión: ¿qué proceso de resolución se ha seguido?; ¿qué resultados se han obtenido?; ¿cuáles son los resultados más adecuados?

En la Figura 5 se detallan algunos aspectos que deberían considerarse en cada fase:

Fase	¿Qué aspectos considerar?	¿Cómo ayudar a los alumnos?
Comprensión del problema	Comprensión del sentido global de la situación. Retención de datos relevantes.	Uso de imágenes de apoyo. Planteamiento de buenas preguntas. Descripción del problema con palabras más sencillas, por parte del docente o de un alumno.
Planificación	Establecimiento de un orden temporal entre los hechos.	Dibujo del problema o situación (visión global). Escenificación del problema. Planteamiento de buenas preguntas, más que explicaciones. Descripción de las partes del problema con palabras más sencillas.
Ejecución de un plan	Selección de técnicas y/o estrategias para resolver la situación.	Trabajo colaborativo para valorar posibles técnicas o estrategias: por parejas, en pequeño grupo. Interacción, negociación y diálogo para decidir la técnica o estrategia más eficaz. Planteamiento de buenas preguntas, más que explicaciones.
Supervisión	Expresión oral del proceso de resolución y de la solución. Verificación de la solución. Comparación de varias soluciones, si es el caso.	Escucha atenta. Interacción, negociación y diálogo para decidir la técnica o estrategia más eficaz.

Figura 5. Orientaciones en torno a las fases de resolución de un problema.
Fuente: Alsina (2011).

2. 2. El razonamiento y la prueba

A través de las prácticas de enseñanza de las matemáticas se debería lograr que, progresivamente, el alumnado desarrolle su pensamiento matemático crítico:

> Pensamos críticamente cuándo cuestionamos la información que se nos proporciona, tomamos la iniciativa de buscar más información y desarrollamos un interés por ser precisos en el contraste de puntos de vista. Estas habilidades deben ponerse en práctica en los cuatro momentos comunicativos por excelencia: hablar, escuchar, leer y escribir. Pensar críticamente es, en resumen, ser capaz de hablar, escuchar, leer y escribir críticamente (Alsina y Planas, 2008, p. 17-18).

Hablar escuchar, leer y escribir críticamente implica múltiples acciones como pensar, conjeturar, explicar, argumentar, justificar, razonar inductiva y/o deductivamente, descubrir, probar, comprobar… que de un modo u otro están presentes en los procesos de *razonamiento* y *prueba*, razón por la que su usan estos dos términos para aglutinar todas estas acciones.

Para desarrollar el pensamiento matemático crítico, tan necesario para el progreso personal y social, no todas las prácticas de enseñanza de las matemáticas sirven: la repetición, la memorización, la mecanización o la ejercitación, entre otras, pueden entorpecer profundamente que el alumnado razone y pruebe las acciones que realiza y las soluciones que propone. Al respecto, por ejemplo, Santaló (1981, p. 21) afirmó que:

> Aprender una demostración de memoria no tiene ningún valor. Mejor dicho, tiene un valor altamente negativo, ya que significa que el alumno no solo ignora tal demostración, sino que desconoce totalmente lo que es la matemática y que ha malgastado el uso de la memoria en un objetivo inútil y nada educativo.

Esta afirmación se podría extrapolar al aprendizaje memorístico de muchos saberes matemáticos, como por ejemplo: los nombres de las figuras geométricas, sin *justificar* las propiedades que las definen; la mecánica de los algoritmos, sin *argumentar* el porqué de los pasos finitos que sirven para resolver el problema; las propiedades básicas de las operaciones, sin *indagar* de dónde emergen dichas formulaciones; o bien los criterios de divisibilidad, sin *razonar* qué implicaciones tienen o con qué otros saberes están relacionados… El foco, en todos estos ejemplos y muchos otros, tiende a ponerse en la aplicación y, sobre todo, en determinar si el resultado es correcto o no, sin valorar el proceso. Está claro, pues, que aprender de memoria y aplicar no son el camino más idóneo para formar personas matemáticamente competentes. La clave está en ofrecer oportunidades en el aula para que el alumnado ponga en juego acciones asociadas al razonamiento y la prueba. En la Tabla 2 se presentan, de forma muy sintética, diversos conocimientos que debería movilizar el profesorado para promover estas acciones:

Tabla 2. Razonamiento y prueba: conocimientos esenciales y pregunta guía

Conocimiento de estrategias y técnicas para promover explicaciones, argumentos y justificaciones.	¿Qué buenas preguntas, preguntas efectivas o preguntas deliberadas planteo?
Conocimiento de estrategias y técnicas para comprobar acciones y respuestas.	
Conocimiento de los métodos de razonamiento (inductivo, deductivo).	¿Cuándo promuevo razonamientos inductivos, deductivos?; ¿qué pasos sigo?

Conocimiento de estrategias y técnicas para promover explicaciones, argumentos y justificaciones; Conocimiento de estrategias y técnicas para comprobar acciones y respuestas

Estos dos conocimientos se abordan conjuntamente ya que mantienen muchos paralelismos entre sí. La estrategia por excelencia en ambos casos consiste en saber plantear preguntas, por lo que está fuertemente relacionado con el proceso de comunicación que se describe en el próximo apartado, pues el planteamiento de preguntas promueve la interacción. Sobre el planteamiento de preguntas en la clase de matemáticas, Reinhart (2000, p. 480) afirma:

> ¡Nunca digas nada que un niño pueda decir! Esta declaración me mantiene enfocado. A pesar de que no considero que haya logrado siempre este propósito por completo durante una clase o un periodo de clases me ha obligado a desarrollar y mejorar mis habilidades para plantear preguntas. También envía un mensaje a los alumnos de que su participación es esencial.

Cada vez que estoy tentado de decirles algo a los alumnos, intento hacer una pregunta en su lugar.

Existe abundante literatura sobre cómo plantear buenas preguntas, preguntas efectivas o preguntas deliberadas en el aula de matemáticas. Sullivan y Lilburn (2002), por ejemplo, en su libro *Good Questions for Math Teaching*, proponen tres características: 1) requieren comprensión de la tarea, aplicación de los conceptos y apropiación de estrategias, así como análisis y síntesis de los conceptos implicados; 2) favorecen que los alumnos sean conscientes de lo que saben y de lo que no saben y muestran al docente si los alumnos entienden bien los conceptos o necesitan ayudas complementarias; y 3) permiten varias respuestas aceptables. EduGAINS (2011) propone ocho orientaciones para plantear preguntas efectivas en la clase de matemáticas: 1) anticipar el pensamiento de los alumnos; 2) vincular con los objetivos de aprendizaje; 3) plantear preguntas abiertas; 4) plantear preguntas que realmente necesitan ser contestadas; 5) incorporar verbos que estimulan el pensamiento y la comprensión, como conectar, elaborar, evaluar y justificar; 6) plantear preguntas que abren una conversación para incluir a todos (en el marco de una comunidad de aprendizaje); 7) mantener las preguntas neutrales (evitar calificativos como 'fácil' o 'difícil' ya que pueden condicionar las respuestas de los alumnos); y 8) proporcionar tiempo de espera (entre las preguntas y las respuestas de los alumnos). Más adelante, el NCTM (2014) ofrece una síntesis de tipos de preguntas deliberadas en el marco de las interacciones entre estudiantes y docentes, a partir de la revisión de diversos marcos teóricos (Figura 6).

La estrategia de plantear buenas preguntas, efectivas o deliberadas se puede utilizar en el marco de diversas técnicas que contribuyen eficazmente a promover que el alumnado razone y pruebe sus acciones y soluciones. A modo de ejemplo, se describen sintéticamente dos:

- *¿Cuál no pertenece?* Se trata de una técnica o recurso del profesor de matemáticas C. Danielson para promover que el alumnado argumente y comunique en la clase de matemáticas. Este recurso, que se conoce con el acrónimo WODB (*¿Which One Doesn't Belong?*), consiste en presentar cuatro situaciones distintas y argumentar cuál de las situaciones no comparte con las otras un atributo que sí que tienen en común las otras tres. La característica fundamental de estas propuestas es que las cuatro situaciones pueden ser susceptibles de ser

ISSN 2254-8351

consideradas intrusas, dependiendo de ciertos criterios que hay que explicitar. Se pueden consultar muchos ejemplos en https://wodb.ca/

- *¿Qué ves?, ¿de qué te das cuenta?, ¿qué te preguntas?*: se trata de una técnica utilizada en el proyecto NRICH (https://nrich.maths.org/), cuya principal finalidad es enriquecer las experiencias matemáticas. En concreto, esta técnica, que en NRICH se plantea a partir de dos preguntas (*¿what do you notice?; what do you wonder?*), sirve sobre todo para que el alumnado incorpore la habilidad de hacerse preguntas, es decir, de ir desarrollando su pensamiento matemático crítico. Primero, a partir de una situación, un material… escriben lo que ven y de qué se dan cuenta y, seguidamente, se formulan preguntas que sirven para discernir qué es importante preguntarse sobre lo observado. Pueden consultarse un ejemplo en https://nrich.maths.org/13212?utm_source=primary-map

Tipo de pregunta	Descripción	Ejemplos
Recopila información	Los estudiantes recuerdan hechos, definiciones o procedimientos.	Cuando escribes una ecuación, ¿qué significa para ti el signo igual? ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un rectángulo? ¿Qué muestra el rango intercuartil en un conjunto de datos?
Explora el razonamiento	Los alumnos explican, elaboran o clarifican su razonamiento, lo cual incluye articular los pasos de los métodos de solución o completar una tarea.	Mientras trazabas esa recta numérica, ¿qué decisiones tomaste para que pudieras representar 7/4 en ella? ¿Puedes mostrar y explicar un poco más cómo utilizaste una tabla para obtener la respuesta a la tarea de las tarifas de teléfonos celulares? Todavía no es clara la forma en que supiste que 20 era el factor de escala así que, ¿podrías explicarlo de otra forma?
Hace evidente las matemáticas	Los alumnos analizan estructuras matemáticas y establecen conexiones entre las ideas y las relaciones matemáticas.	¿Cómo se relaciona tu ecuación con el problema del concierto de la banda? ¿Cómo se relaciona ese arreglo con la multiplicación y la división? ¿De qué maneras pudiera aplicarse la distribución normal a esta situación?
Alienta la reflexión y la justificación	Los estudiantes muestran un conocimiento más profundo de sus relaciones y acciones, lo cual incluye construir un argumento para validar su trabajo.	¿Cómo demostrarías que 51 es la solución? ¿Cómo sabes que la suma de dos números impares siempre será par? ¿Por qué el plan A en la tarea de las tarifas telefónicas empieza siendo más barato, pero a la larga resulta ser más caro?

Figura 6. Un marco teórico para los tipos de preguntas utilizadas en la enseñanza de las matemáticas. Fuente: NCTM (2014, pp. 37-38).

Conocimiento de los métodos de razonamiento (inductivo, deductivo)

El razonamiento inductivo permite obtener reglas a partir de un comportamiento común observado en algunos casos particulares y concretos (Pólya, 1945). Para obtener dichas reglas, según este autor, deben seguirse las siguientes fases: el trabajo con casos particulares; la búsqueda de patrones basados en la regularidad observada en los casos particulares; la formulación de una conjetura de acuerdo con el patrón; y la comprobación. Más adelante, Castro et al. (2010, p. 57) proponen siete fases: 1) trabajo con casos particulares, sencillos y fácilmente observables; 2) organización de los datos obtenidos (en una tabla, en filas y columnas, etc.) para percibir patrones; 3) identificación de patrones, reconociendo lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse; 4) formulación de conjeturas, es decir, proposiciones que se suponen verdaderas, pero que no han sido sometidas a exploración; 5) justificación de las conjeturas, dando razones para convencer de la verdad de una afirmación; 6) generalización, expresando la conjetura de tal manera que se refiera a todos los casos, más allá de los particulares; y 7) demostración, validando formalmente la conjetura que se trata de probar y que la determina inequívocamente.

El razonamiento deductivo se usa para hacer demostraciones matemáticas de manera formal. Muy sintéticamente, como señalan Álvarez et al. (2019), en el proceso de razonar deductivamente es necesario: comprender la necesidad de modificar la conjetura que se obtiene inicialmente en el proceso de razonamiento inductivo y de no considerarla legítima, hasta que se encuentre validada y reforzada por otros casos; aprender a argumentar cada uno de los pasos que se dan en la validación y a seleccionar o construir casos particulares para comprobar la validez o falsedad de una conjetura; no conformarse con la comprobación de la conjetura para tres o cuatro casos, sino aplicarla a un número mayor, siempre que sea posible; mantener cierto grado de escepticismo con respecto a sus razonamientos y el de los demás, hasta que se logre validar la conjetura bajo análisis; aprender a observar, comparar y buscar analogías para rechazar o reforzar una conjetura, o bien a modificar la situación problemática original y buscar analogías con otros resueltos anteriormente; dominar métodos útiles para validar una conjetura: contraejemplos, uso de casos particulares, de casos generales, de casos extremos, entre otros; y, finalmente, apropiarse de estrategias de autocontrol que orienten el modo de actuar para validar el grado de generalidad y veracidad de una conjetura.

En relación con la articulación de los modos de razonamiento inductivo y deductivo en el aula, Alsina (2014) señala que los primeros razonamientos que se realizan en infantil y primaria son principalmente de naturaleza inductiva, mientras que los razonamientos deductivos son propios de las etapas posteriores (Álvarez et al., 2019).

2. 3. La comunicación

En la escuela de hace varias décadas predominaba el silencio. Maestros y maestras empeñados en imponer disciplina mantenían a las niñas y los niños callados en sus pupitres, con listados inacabables de ejercicios a menudo mal denominados problemas (Figura 7).

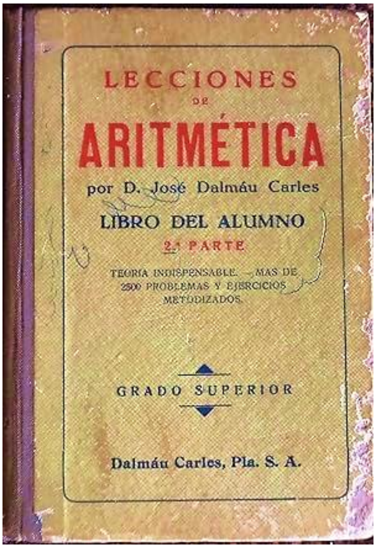


Figura 7. Ejemplo de manual de aritmética con 2500 problemas y ejercicios metodizados. Fuente: Dalmáu Carles (1954).

Este escenario impregnado de autoritarismo, en el que existía una obediencia total a la figura del maestro por temor o por respeto, era la antítesis de la comunicación. Como reacción a esta situación, empezaron a surgir voces que enfatizaban el importante papel de la expresión del alumnado en el aula de matemáticas. Al respecto, por ejemplo, en el

Decálogo de la Didáctica de la Matemática, Puig Adam (1955, p. 5) señaló que:

> El enunciado de las reglas y definiciones, hecho con posterioridad al dominio del proceso o del concepto, tiene que ser siempre producto de una elaboración expresiva del propio alumno como resultado de tal dominio. No tiene que impacientarnos que este enunciado resulte al principio defectuoso. Solo exigiendo que la expresión del alumno siga fielmente su pensamiento, solo invitándolo al hecho que enuncie pensando en voz alta, tendremos la garantía que el enunciado tiene un contenido y no es pura repetición de un cliché estereotipado.

Considerando este planteamiento, en este apartado se incide principalmente en la expresión y la escucha de las ideas matemáticas como herramientas para la deconstrucción, co-construcción y reconstrucción de conocimiento matemático.

En la Tabla 3 se enuncian los conocimientos que debería activar el profesorado en torno a la comunicación en el aula de matemáticas:

Tabla 3. Comunicación: conocimientos esenciales y preguntas guía

Conocimiento de las interacciones entre alumnado y entre el alumnado y el profesorado.	¿Qué tipo de interacción fomento para deconstruir, co-construir o reconstruir el conocimiento matemático?; ¿cuál es la función de cada tipo?
Conocimiento de los diferentes tipos de lenguaje (oral, gestual, gráfico, concreto y/o simbólico).	¿Qué tipo de lenguaje planifico que se use prioritariamente en una tarea para comunicar ideas matemáticas?
Conocimiento del vocabulario matemático.	¿Qué vocabulario matemático específico incorporo a lo largo de una tarea?

Conocimiento de las interacciones entre el alumnado y entre el alumnado y el profesorado

Cuando el alumnado verbaliza en voz alta las ideas matemáticas se favorece la comprensión del conocimiento (no se puede comunicar nada que no haya sido comprendido) y la estructuración del pensamiento (para comunicar se tienen que organizar las ideas). Desde la perspectiva del profesorado, el hecho de verbalizar es una ventana abierta que permite *mirar* qué hay dentro de la mente del alumnado. Y, en cuanto al resto de compañeros y compañeras del aula, escuchar las explicaciones de los demás les da la oportunidad también de desarrollar su comprensión. Así, pues, el alumnado que tiene oportunidades, incentivo y apoyo para hablar y escuchar en las clases de matemáticas se beneficia doblemente: comunica para aprender matemáticas y aprende a comunicar matemáticamente (Alsina, 2011).

Si se asume este planteamiento, es necesario distinguir distintos tipos de interacción y cuál es la principal función de cada uno. Al respecto, desde la psicología sociocultural se han caracterizado los modos de interacción que se muestran en la Figura 8:

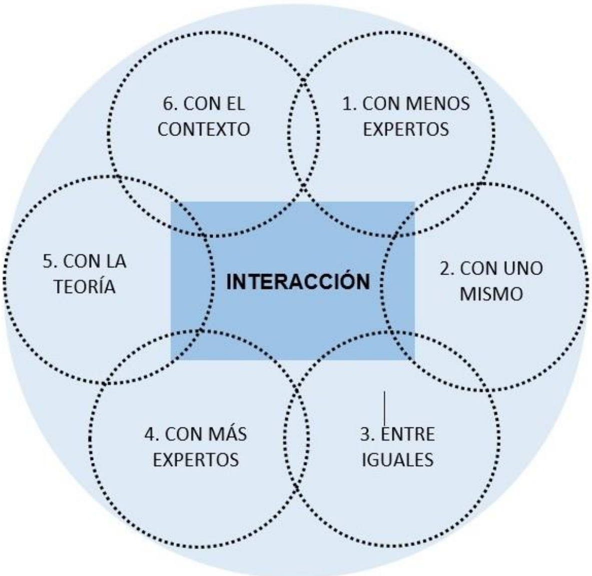


Figura 8. Distintos tipos de interacciones como herramientas de mediación en el aula. Fuente: Alsina et al. (2019, p. 59).

Las interacciones *entre iguales* (entre alumnado) y *con más expertos* (entre alumnado y profesorado) conforman la base de la Figura 8: por un lado, es recomendable promover que el alumnado dialogue entre sí en torno a estrategias y técnicas de resolución de problemas, tome decisiones sobre las que son más eficaces, etc.; y, por otro lado, el papel del profesorado como guía planteando buenas preguntas es también esencial. A partir de estos dos modos de interacción emergen los demás: la interacción *con uno mismo* y con conceptos (*con la teoría*). Efectivamente, cuando se promueve la interacción entre el alumnado y entre el alumnado y el profesorado, el alumnado lleva a cabo el siguiente proceso: escucha lo que expresan los demás; interactúa con uno mismo (toma conciencia de lo que sabe); contrasta lo externo con lo interno (deconstruye, si es preciso, lo que sabe para construir nuevo conocimiento); y, finalmente, expresa a los demás lo que construye o reconstruye, a través de procesos de co-construcción y reconstrucción.

En este proceso hay que tener en cuenta que, en la interacción entre el alumnado, se pueden producir interacciones *con menos expertos*, convirtiéndose el alumno "más experto" en alumno-tutor. Utilizar este rol en el aula de matemáticas es fundamental, pues el lenguaje usado por el alumno-tutor para expresar lo que sabe puede ser más comprensible para el menos experto y, de este modo, ayudarle a construir nuevo conocimiento matemático. Adicionalmente, sea cual sea el tipo de interacción, *el contexto* también juega un papel relevante: por ejemplo, un aula donde fácilmente se puede salir a explorar el entorno, o bien con fácil acceso a materiales manipulativos, etc.

Conocimiento de los diferentes tipos de lenguaje (oral, gestual, gráfico, concreto y/o simbólico)

Cuando se piensa en las matemáticas como un lenguaje, se tiende a asociarlas solo a objetos semióticos transmitidos culturalmente, en especial símbolos (Alsina, 2011). Sin embargo, ya se ha puesto de manifiesto la importancia del lenguaje oral (escuchar y expresar) para construir conocimiento matemático; además, hay que considerar también otros múltiples lenguajes que tienen un papel fundamental en la construcción de conocimiento matemático. A continuación, se describen algunos de los más representativos:

- Lenguaje gestual (o no verbal): implica todos los movimientos que se realizan durante una conversación, ya sea con los brazos, los hombros, las manos o la cabeza. Por ejemplo, usamos los dedos de las manos para enumerar elementos, asentimos con la cabeza cuando estamos de acuerdo y subimos los hombros para mostrar confusión o duda. Tienen, en general, una conexión importante con el sentido socioafectivo, por lo que es muy importante considerarlos en el aula de matemáticas ya que dan información importante sobre cuestiones fundamentales como el interés, la motivación, la ansiedad, etc.

- Lenguaje concreto, pictórico y simbólico: en el contexto del lenguaje escrito, se pueden usar dibujos, signos y símbolos respectivamente para representar ideas matemáticas. Estos modos de lenguaje escrito, por sus vínculos con la representación en matemáticas, se desarrollarán más en el apartado dedicado a este proceso.
- Lenguaje tabular y gráfico: se refiere al uso de tablas para organizar información y gráficos para representarla, por lo que se abordarán también durante la descripción de los conocimientos asociados a la representación.

Conocimiento del vocabulario matemático que se incorpora a lo largo de la tarea

El profesorado de matemáticas debería planificar claramente el vocabulario matemático (las palabras) que quiere introducir y/o consolidar durante una situación de aprendizaje y tener un amplio conocimiento de los conceptos asociados.

En este sentido, hay que tener en cuenta que, según Vygotsky (1978), un concepto es una idea organizadora del conocimiento, un constructo mental que es atemporal, universal, abstracto y que está representado por una o dos palabras. El conocimiento conceptual permite describir cómo es el mundo en términos genéricos, puesto que se trata de un conocimiento global sobre las regularidades que se producen en el entorno. Así, con el tiempo, los contenidos o saberes tienen que convertirse en conceptos reguladores de la propia actuación docente, o sea, en principios que la orienten y la guíen. De acuerdo con Esteve y Alsina (en prensa), esto no se consigue a través de largas explicaciones teóricas que los alumnos tienen que memorizar y reproducir en un examen -que es lo que se hace cuando se trabajan contenidos- sino ayudándoles a comprender lo que se esconde detrás de los conceptos. De modo general, pues, estos autores describen un proceso gradual que denominan de *expansión conceptual*, que Alsina y Vásquez (2022) han ejemplificado para el caso concreto de una tarea de probabilidad sobre la importancia de usar mascarilla en una pandemia (Figura 9):

ISSN 2254-8351

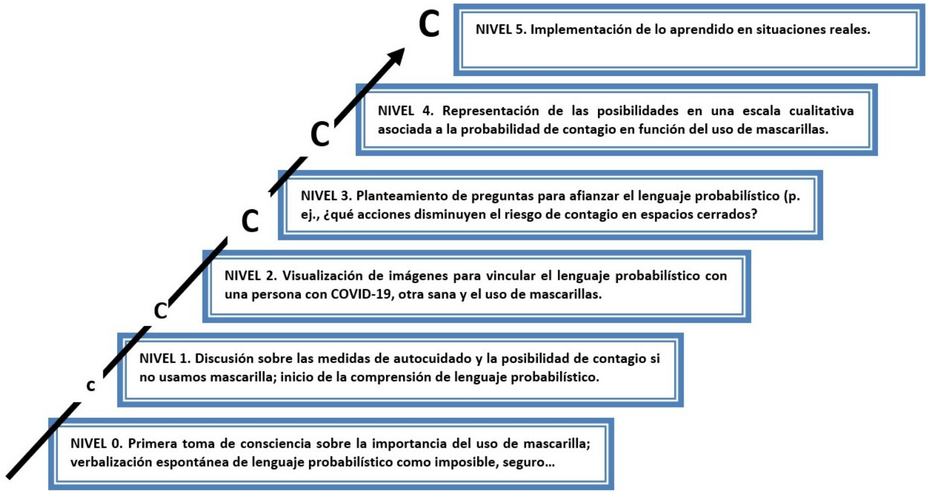


Figura 9. Proceso de expansión conceptual. Fuente: Alsina y Vásquez (2022, p. 11).

Como se aprecia en la Figura 9, a través de los distintos niveles se pasa de tener conocimientos poco precisos acerca del vocabulario probabilístico asociado al uso de la mascarilla a usarlo con base en el conocimiento.

2. 4. Las conexiones

Las matemáticas se han presentado durante muchas décadas de forma aislada. Internamente, las lecciones de matemáticas se enseñaban de manera lineal, según los diferentes bloques de contenido (números y operaciones, geometría, medida…); adicionalmente, los procesos, habilidades o competencias se hacían presentes en alguno de estos ejes, pero no en los demás (p. ej., problemas aritméticos, pero no estocásticos). Externamente, quizás por temor a verse diluidas, las matemáticas se mostraban separadamente de cualquier otra disciplina, ya fuera científica o del ámbito de las ciencias sociales y humanidades.

En la actualidad, esta visión ha cambiado radicalmente, de manera que en los currículos de matemáticas de la mayoría de los países se enfatizan las conexiones tanto intradisciplinares como interdisciplinares. Este planteamiento más ajustado a la realidad requiere diversos conocimientos, que se describen en la Tabla 4.

ISSN 2254-8351

Tabla 4. Conexiones: conocimientos esenciales y preguntas guía

Conocimiento de las conexiones intradisciplinares.	¿Qué conexiones internas planifico en una tarea?
Conocimiento de las conexiones interdisciplinares.	¿Desde qué asignatura/s planifico la tarea para que todas se enriquezcan mutuamente?
Conocimiento de las conexiones con el entorno, tanto local como global.	¿Desde qué contexto real planifico la tarea?

Conocimiento de las conexiones intradisciplinares

Con el propósito de poner de manifiesto la conexiones entre las diversas ideas matemáticas, algunos organismos y autores han señalado la necesidad de concretar las *ideas matemáticas centrales* o *grandes ideas matemáticas*. La noción de idea central o de gran idea en matemáticas se refiere a "una declaración de una idea que es central para el aprendizaje de las matemáticas, una idea que vincula numerosos conocimientos matemáticos en un todo coherente" (Charles, 2005, p. 10). Para Toh y Yeo (2019), el énfasis de las grandes ideas en matemáticas puede traducirse en un esfuerzo consciente por conseguir que el alumnado vea las matemáticas como un sistema altamente conectado de pensamiento y conceptos a través de varios temas, en lugar de verlos como conceptos aislados. En este sentido, pues, las ideas centrales se refieren a las conexiones de varias ideas a través de las matemáticas y, desde este punto de vista, son una base para el profesorado de matemáticas. Esta idea se ha recogido, por ejemplo, en el currículo de matemáticas de Singapur (Singapore Ministry of Education, 2018), que destaca que es necesario "desarrollar una mayor conciencia de la naturaleza de las matemáticas y las grandes ideas que son centrales de la disciplina" (p. 9), con el fin de lograr la coherencia entre los diferentes temas.

Considerando estos antecedentes, a modo de ejemplo, el *Centre de Recursos pedagògics específics de Suport a la Innovació i la Recerca Educativa* (CESIRE) del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya ha trabajado en la definición de las ideas centrales correspondientes a los distintos sentidos matemáticos: numérico, algebraico, geométrico, de la medida y estocástico. Dichas ideas centrales pueden consultarse íntegramente en https://sites.google.com/xtec.cat/idees-centrals-matematiques-ip/inici.

Conocimiento de las conexiones interdisciplinares

Desde una perspectiva contemporánea, las conexiones entre disciplinas se han desarrollado principalmente desde la educación integrada STEM o STEAM, según se consideren o no las artes y humanidades. Beltrán-Pellicer y Alsina (2022) señalan que este enfoque, que ya se puso de manifiesto en Europa con la publicación del informe *Europe needs more Scientists* en el inicio del siglo XXI (European Comission, 2004), responde a una reclamación que desde hace muchos años vienen realizando investigadores, formadores y docentes en educación científico-tecnológica y matemática con una postura crítica. Este colectivo lamenta que la atención por la educación STE(A)M se ha focalizado en el interés gubernamental, empresarial y social en mejorar la cantidad, la calidad y diversidad de los profesionales para garantizar el progreso económico y social deseable, dejando de lado la alfabetización científico-tecnológica y matemática de toda la ciudadanía. Desde este punto de vista, el profesorado debe conocer que la incorporación de este enfoque integrado contribuye a promover la alfabetización en el ámbito STEAM para todo el alumnado como un valor personal en sí mismo, con el propósito de proporcionarles herramientas que les permitan identificar y aplicar, tanto los conocimientos clave como las formas de hacer, pensar, hablar y sentir de la ciencia, la ingeniería, la tecnología, las artes y la matemática, de forma más o menos integrada, para comprender, decidir y/o actuar ante problemas complejos y para construir soluciones creativas e innovadoras, aprovechando las sinergias personales y las tecnologías disponibles, y de forma crítica, reflexiva y con valores (Couso, 2017). Atendiendo a esta demanda, el currículo español de matemáticas vigente (MEFP, 2022a, 2022b) menciona, entre las competencias clave, la competencia STEM, que "entraña la comprensión del mundo utilizando los métodos científicos, el pensamiento y representación matemáticos, la tecnología y los métodos de la ingeniería para transformar el entorno de forma comprensible, responsable y sostenible" (p. 21), incorporando como principal novedad la ingeniería desde educación infantil.

De forma muy sintética, a continuación se mencionan algunos aspectos clave a considerar en las prácticas de enseñanza que promuevan las conexiones interdisciplinares a través de actividades STEAM: 1) la competencia STEAM se desarrolla a partir de un conjunto de actividades que se complementan; 2) las actividades STEAM tratan integradamente saberes de distintas disciplinas, de manera que ambas se enriquecen mutuamente, más que estar una al servicio de las otras; 3) las actividades STEAM deben incorporar las áreas que son significativas en el planteamiento didáctico; 4) falta todavía consenso acerca de si en las actividades STEAM deben considerarse todas o al menos dos disciplinas del acrónimo. Para el profesorado interesado en conocer actividades STEAM, existen diversas publicaciones recientes en las que se pueden consultar experiencias de implementación de esta visión integrada en el aula: por ejemplo, la revista Aula de Innovación Educativa tiene una sección dedicada a experiencias STEM y/o STEAM; asimismo, en diversos artículos de divulgación de Alsina y su equipo pueden consultarse experiencias implementadas en aula, con foco en la integración entre matemáticas, ciencias, ingeniería y arte, principalmente (e.g., Alsina, 2020c; Silva-Hormazábal et al, 2022).

Conocimiento de las conexiones con el entorno, tanto local como global

Junto con el conocimiento acerca de las conexiones intradisciplinares e interdisciplinares, es necesario también ser consciente de los estrechos vínculos entre las matemáticas y el entorno: por ejemplo, las matemáticas que se necesitan para comprar, negociar una hipoteca en el banco, revisar las facturas de consumo de electricidad, distribuir los muebles en una habitación o para leer gráficos estadísticos en la prensa. Si estas matemáticas conectadas con el entorno se abordan de forma sistemática en las prácticas de enseñanza desde edades tempranas, ya sea en el marco de proyectos, actividades STEAM, etc…, se favorece que el alumnado conciba las matemáticas como una disciplina útil para poder desenvolverse mejor. Reeuwijk (1997), investigador y educador del Instituto Freudenthal, expone cinco motivos para promover este tipo de conexiones:

- Motivan y ayudan a comprender por qué las matemáticas son útiles y necesarias. Asimismo, aclaran por qué ciertos ámbitos de las matemáticas revisten importancia y contribuyen a entender el modo en que se emplean las matemáticas en la sociedad y en la vida cotidiana.
- Favorecen el uso de las matemáticas en la sociedad, además de descubrir qué matemáticas son relevantes para la educación y profesión posteriores.
- Incrementan el interés por las matemáticas y la ciencia en general.

- Despiertan la creatividad y el uso de estrategias informales y de sentido común al afrontar, por ejemplo, la resolución de una situación problemática o de un juego.
- Actúan como mediadores entre la situación concreta y las matemáticas abstractas.

2. 5. La representación

En las prácticas de enseñanza de las matemáticas cuyo foco era ejercitar y/o memorizar técnicas y procedimientos, la representación estaba muy poco presente, puesto que estas prácticas implicaban mecanizar, más que comprender. El enfoque competencial, en cambio, persigue que el alumnado encuentre sentido a las matemáticas que se aprenden para usarlas de manera eficaz cuando se necesitan. Desde esta perspectiva, introducir la representación de las ideas matemáticas desde las primeras edades y promover que se vaya desarrollando a lo largo de la escolaridad, considerando las posibilidades de cada momento evolutivo, contribuye eficazmente a comprender las matemáticas. Paralelamente, promover que el alumnado represente las ideas matemáticas, permite tener información de primera mano sobre lo que se ha aprendido realmente, ya que tal como ya se ha señalado en el proceso de comunicación, una representación también es una ventana abierta de lo que hay en las mentes del alumnado. Por esta razón, comunicación y representación son dos procesos matemáticos estrechamente relacionados, de modo que en algunos currículos se tratan conjuntamente.

Pero ¿qué conocimientos profesionales se requieren para promover la representación en el aula de matemáticas? En la Tabla 5 se exponen los conocimientos esenciales:

Tabla 5. Representación: conocimientos esenciales y preguntas guía

Conocimiento de qué ideas matemáticas se representan y de qué manera.	¿Qué representación/representaciones promuevo que se usen de forma prioritaria en una tarea? Concreta, pictórica, simbólica, tabular, gráfica…
Conocimiento de materiales manipulativos para representar ideas matemáticas.	¿Qué material manipulativo introduzco para representar una idea matemática de manera concreta?

Conocimiento de múltiples representaciones de una misma idea matemática.	¿Qué representaciones de una misma idea matemática presento?

Conocimiento de qué ideas matemáticas se representan y de qué manera

A pesar de que, desde la perspectiva de la investigación en educación matemática, existe cierta controversia en torno a qué matemáticas se representan y de qué manera (Font et al., 2007), a efectos de la práctica escolar el profesorado debe ser consciente tanto de que el alumnado puede representar ideas matemáticas de diferente naturaleza como de que existe una diversidad de maneras de representarlas.

Por un lado, durante las prácticas de enseñanza de las matemáticas y, en función del momento evolutivo, el alumnado puede representar nociones, conceptos, técnicas, estrategias, argumentos, problemas…; y, por otro lado, hay que tener presente que todas estas ideas matemáticas se pueden representar de manera oral, gestual, escrita…; a su vez, estas representaciones pueden ser de formas diversas. Por ejemplo, una representación escrita puede ser concreta, pictórica, simbólica, tabular, gráfica…

En todos estos casos, es muy recomendable que el profesorado tenga una visión amplia del horizonte matemático, es decir, que una determinada representación de una misma idea matemática está precedida por otras representaciones más simples y antecede otras más complejas o abstractas. Algunos ejemplos en esta línea son los siguientes:

- La idea matemática "tres": un alumno de infantil puede usar una *representación oral* de esta idea diciendo en voz alta la palabra "tres"; una *representación gestual*, mostrando por ejemplo tres dedos; o una *representación escrita*. Las primeras representaciones escritas, según Alsina (2011), son representaciones de naturaleza *concreta*, a través de dibujos que permiten hacer una correspondencia término a término; después, los dibujos pasan a ser signos (cruces, palitos, etc.) y la representación es *pictórica*; finalmente, se usan ya notaciones convencionales (el número 3), de modo que la representación es *simbólica*. Más adelante, ya en primaria e incluso en etapas posteriores, la representación simbólica de "tres" se puede sofisticar mucho más (p. ej., 12/4).

ISSN 2254-8351

- La unidad de repetición de una serie: para que una alumna de infantil amplíe la secuencia de una serie formada, por ejemplo, por un cuadrado rojo y dos triángulos amarillos, es necesario que reconozca la unidad de repetición, es decir, el patrón. Este patrón lo puede representar de forma *oral* (por ejemplo, diciendo en voz alta "uno rojo-dos amarillos", "uno-dos" …); o usando una representación *escrita*, utilizando diversos tipos de notaciones que tienden a evolucionar de lo concreto a lo simbólico: dibujos, signos o letras (ABB).
- La organización y representación de datos en una investigación estadística: ya desde los primeros niveles, el alumnado empieza a recolectar datos, clasificándolos según las categorías de la variable. Las primeras representaciones de los datos clasificados para hacer el recuento tienden a ser con el propio alumnado, que se organiza a partir de una *representación tabular*; progresivamente, utilizan otras tablas estadísticas de recuento: concreta (objetos, dibujos…); con signos (cruces, palitos...); con símbolos (números), pasando a ser tablas de frecuencias. Algo similar ocurre con la *representación gráfica*: los primeros gráficos para representar los datos del recuento tienden a ser gráficos de barras simples, que se elaboran con objetos o dibujos, por lo que se denominan gráficos concretos, y progresivamente las representaciones se van sofisticando y se utilizan otros tipos de gráfico.

Todos estos ejemplos muestran la misma idea: la necesidad de promover la representación de ideas matemáticas desde los primeros niveles de escolarización, respetando las posibilidades del alumnado en función del conocimiento matemático que pueden movilizar, pero tratando de impulsar que avancen progresivamente hacia representaciones más simbólicas o abstractas, siempre acompañadas de una lectura comprensiva de dichas representaciones.

Conocimiento de materiales manipulativos para representar ideas matemáticas

Al describir la diversidad de maneras de representar ideas matemáticas, se ha hecho hincapié en las representaciones a partir de objetos, es decir, con materiales manipulativos diversos. Esto requiere que el profesorado conozca, por un lado, que una de las principales funciones de los materiales manipulativos es, precisamente, mostrar representaciones concretas de ideas matemáticas complejas para que los alumnos puedan visualizarlas y, de este modo, favorecer la comprensión de dichas ideas; por otro lado, es necesario conocer una amplia diversidad de materiales manipulativos que representan ideas matemáticas de manera concreta.

Son muchos los autores del ámbito de la Didáctica de la Matemática que a lo largo de su trayectoria profesional han diseñado y/o recopilado una gran diversidad de materiales manipulativos que persiguen esta función. A modo de ejemplo, se destaca la labor de M. Antònia Canals, que dedicó gran parte de su productiva carrera a los materiales manipulativos. Todos los materiales que recopiló, y otros que se han ido añadiendo, se pueden consultar actualmente en la página web de la Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M. Antònia Canals de la Universidad de Girona:

https://www.udg.edu/es/catedres/didactica-de-les-matematiques/gamar

En el marco de esta misma Cátedra, se pueden consultar también algunas recopilaciones de materiales manipulativos esenciales para infantil y primaria organizados por edades (3-6, 6-8, 8-10 y 10-12 años), de momento sobre el sentido numérico (Alsina y Bosch, 2022) y sobre el sentido estocástico (Alsina y Bosch, 2023).

Conocimiento de múltiples representaciones de una misma idea matemática

Representaciones diferentes inciden en aspectos diferentes de una misma idea matemática compleja, por lo que complementan y amplían la comprensión de dicha idea. Este es un conocimiento muy relevante, que pone de manifiesto que no es suficiente con promover una sola manera de representar en matemáticas.

Unas décadas atrás, el modo de representación por excelencia era el simbólico: se presentaban a los alumnos representaciones simbólicas sin considerar otras representaciones, a menudo previas, imprescindibles para comprender dichas ideas. Por ejemplo, para mostrar la descomposición polinómica de los números, el alumnado debía expresarlo algebraicamente:

$$243 = 2 \times 100 + 4 \times 10 + 3$$

A pesar de repetir muchas veces la misma mecánica con casos diferentes, al preguntarles qué valor representaba una determinada cifra, por ejemplo, la cifra 4 en el número 243, se respondía que el valor era 4, poniendo de manifiesto que no comprendían lo que estaban ejercitando. Otras representaciones previas, usando por ejemplo materiales como el ábaco, los cartones Montessori para la base 10 o las regletas, placas y cubos entre otros, podrían haber ayudado a la comprensión (Figura 10).

Figura 10. Diversos materiales para representar la descomposición polinómica de un número. Fuente: https://www.udg.edu/ca/catedres/didactica-de-les-matematiques/gamar

2. 6. La modelización temática

En la escuela, a raíz de las conversaciones como muchos docentes anónimos de las etapas de infantil y primaria, se ha podido identificar que el término *modelización* se ha asociado habitualmente a *imitación*. Erróneamente, se ha interpretado que las prácticas de enseñanza basadas en la modelización consistían en enseñar modelos (p. ej., para resolver problemas) que después el alumnado debía imitar.

Cuando el NCTM (2003) propuso los cinco estándares de procesos para poner de relieve las formas de adquisición y uso de los contenidos matemáticos, incluyó ligeramente la modelización matemática dentro del proceso de representación, apoyando la visión predominante en la escuela al afirmar, por ejemplo, que "se emplea para sugerir ejemplificación o simulación, como cuando un profesor modeliza el proceso de resolución de problemas para sus alumnos" (p. 74); adicionalmente, se asoció a los modelos físicos (materiales manipulativos) y a la representación. Esta visión superficial de la modelización matemática mejoró substancialmente en la conceptualización de las competencias matemáticas tanto de Niss (2002) como de la OECD (2004), presentando la modelización matemática como una competencia cuya finalidad es construir modelos para interpretar la realidad.

Para impulsar este enfoque de la modelización matemática en las prácticas de enseñanza desde las primeras edades, el profesorado de las primeras etapas debe poseer diversos conocimientos que se presentan en la Tabla 6.

Tabla 6. Modelización matemática: conocimientos esenciales y preguntas guía

Conocimiento del propósito de la modelización matemática.	¿Qué problema real planteo para que los grupos de trabajo creen un modelo (concreto)?
Conocimiento de las fases de un ciclo de modelización matemática.	¿Cómo gestiono los grupos de trabajo para que pasen por las distintas fases del ciclo?
Conocimiento de las aplicaciones de la modelización matemática.	¿Para qué propongo una tarea de modelización matemática (temprana)?

Conocimiento del propósito de la modelización matemática

Adentrarse en el propósito de la modelización matemática implica necesariamente posicionarse sobre la naturaleza de las matemáticas, las matemáticas escolares, el mundo real y la resolución de problemas.

Si se asume que las matemáticas son un conjunto de técnicas y procedimientos para aprender contenidos o saberes de manera descontextualizada, la modelización matemática no tiene cabida; en cambio, si se asume que las matemáticas implican interpretar y trabajar matemáticamente con el entorno, entonces la modelización matemática juega un papel relevante (Alsina y Salgado, 2022a). Considerando esta segunda visión, que conlleva un ambiente de aprendizaje enriquecido, la matemática escolar debería ayudar a responder los cuestionamientos del alumnado sobre la utilidad de las matemáticas y sus conexiones con el mundo real. Desde este marco, la resolución de problemas reales adquiere un protagonismo muy relevante, pues a través de ellos se puede modelizar la realidad, es decir, crear modelos que permitan comprender el mundo que nos rodea. Este es el principal propósito de la modelización matemática, razón por la cual se define como un proceso que utiliza las matemáticas para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre los fenómenos del mundo real (Blum y Borromeo-Ferri, 2009). Atendiendo a este propósito, Alsina y Salgado (2022b) han acuñado el término Modelización Matemática Temprana (MMT), que conceptualizan como:

> Un proceso o ciclo que, en el marco de la resolución de problemas reales, ayuda a crear los primeros modelos para analizar, explicar y comprender la realidad, basado en un proceso de reflexión que implica constantes idas y venidas entre los contextos reales y las matemáticas que moviliza el alumnado de las primeras edades (Alsina y Salgado, 2022b, p. 2)

Como puede apreciarse a partir de esta caracterización, la MMT es el escenario idóneo para que el alumnado de las primeras edades empiece a trabajar matemáticamente con el entorno para crear los primeros modelos que permitan interpretar la realidad, teniendo muy presente las matemáticas que pueden movilizar. Desde esta perspectiva, como señalan Alsina y Salgado (2022a), hay que tener muy presente que el pensamiento del alumnado es eminentemente concreto y, por lo tanto, los modelos que son capaces de crear también lo son, razón por la cual los denominan *modelos concretos*, no generalizables todavía.

Conocimiento de las fases de un ciclo de modelización matemática

Para crear un modelo es necesario un ciclo de modelización matemática. Actualmente, no existe todavía consenso en la literatura sobre las fases que intervienen en un ciclo de modelización, por lo que coexisten diversos modelos (Figura 11).

Para implementar actividades de MMT en las primeras edades y ayudar al alumnado a crear sus primeros modelos concretos, se asume el ciclo de modelización de Blum y Leiβ (2007), principalmente por dos motivos: a) porque se puede partir de un punto del ciclo sin necesidad de seguir un orden establecido; este ir y venir es lo que permite perfeccionar progresivamente el modelo buscado; b) al finalizar el ciclo, se socializa el modelo para recoger las observaciones pertinentes y realizar los ajustes necesarios con el objetivo de mejorar/afinar progresivamente el modelo.

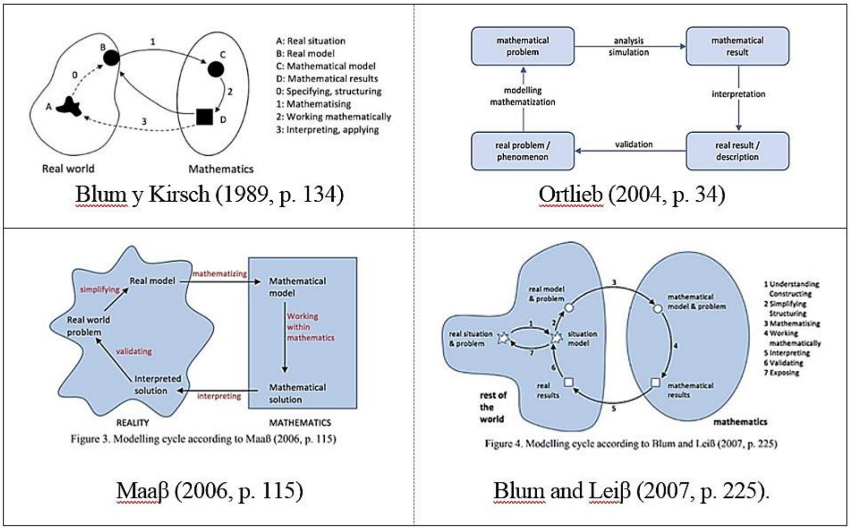


Figura 11. Distintos ciclos de modelización matemática. Fuente: Greefrath (2019).

A continuación, se describen sintéticamente las fases del ciclo de modelización después de la presentación de un problema real:

- Comprensión: por un lado, el alumnado relaciona sus conocimientos previos con el contenido del problema; además, son capaces de plantear algunas preguntas para comprender mejor el problema y/o buscar una posible solución.
- Estructuración: identifican los principales elementos del problema y proponen ideas y supuestos que contribuyen a su simplificación.
- Matematización: substituyen elementos reales por objetos matemáticos.
- Trabajo Matemático: emplean diversas estrategias y objetos matemáticos acordes a su edad para proponer soluciones.
- Interpretación: argumentan la validez de los resultados obtenidos.
- Validación: justifican el modelo propuesto mediante argumentos válidos.
- Exposición/Presentación: explican algunas de las decisiones tomadas y escuchan observaciones y/o sugerencias planteadas por otros compañeros o el docente para afinar el modelo; además, registran sus datos a través de números, dibujos de balanzas, etc.

ISSN 2254-8351

Conocimiento de las aplicaciones de la modelización matemática

La incorporación de la modelización matemática en las prácticas de enseñanza desde las primeras edades va cobrando cada vez mayor protagonismo, debido principalmente al papel cada vez más importante que juega tanto en aplicaciones de la vida real (ingeniería, informática, medicina, negocios, ciencias sociales, cambio climático, diseño avanzado, etc.) como dentro de la propia educación matemática.

Como ya se ha señalado, desde la perspectiva de la educación matemática, la MMT juega un papel relevante para que el alumnado de las primeras edades empiece a interpretar y trabajar matemáticamente con el entorno para elaborar los primeros modelos que permitan comprender mejor el mundo que nos rodea. Desde este punto de vista, en Alsina y Salgado (2022a) se ofrecen orientaciones específicas para incorporar la MMT en las prácticas de enseñanza, mientras que en otros estudios de estos mismos autores pueden consultarse múltiples ejemplos de implementación y análisis de actividades de modelización matemática implementadas en las aulas de infantil, principalmente.

2. 7. El pensamiento computacional

Desde que el pensamiento computacional ha entrado en las aulas de infantil y primaria, se ha producido una tendencia errónea de considerar únicamente actividades triviales con robots o tecnología educativa para promoverlo, pero va mucho más allá. A partir de una revisión de la literatura, Beltrán-Pellicer y Alsina (2022) señalan que, por un lado, las ciencias de la computación permiten abordar problemas propios de las matemáticas y, por otro lado, desde el pensamiento computacional es posible revisitar ciertos conceptos de las matemáticas desde otro punto de vista. De este modo, sin ser lo mismo ni subordinarse uno al otro, el proceso de resolución de problemas en matemáticas y el proceso de resolución computacional a partir o sobre unos datos determinados presentan ciertas semejanzas: el reconocimiento de *patrones* o secuencias; la *descomposición* del problema en otros más simples; la búsqueda de estructuras, generalizaciones y *abstracciones*; la creación, modificación y comprensión de *algoritmos*; o la importancia de la *modelización.* Lo que cambia en estos procesos es, principalmente, la forma de pensar o de razonar.

Al margen de que el currículo español de matemáticas vigente haya considerado el pensamiento computacional como una competencia específica de la competencia STEM y como un saber dentro del sentido algebraico, lo que interesa aquí es concretar algunos conocimientos esenciales del profesorado de matemáticas para promover este modo de pensamiento (Tabla 7). Para concretar estos conocimientos, se parte del documento *Formación del profesorado en pensamiento computacional. Guía didáctica* (https://pecofim.wixsite.com/pecofim-cs/guia-didactica), elaborado dentro del proyecto PeCoFiM de la Universidad de Girona (Estebanell et al., 2018).

Tabla 7. Pensamiento computacional: conocimientos esenciales y preguntas guía

Conocimiento de los componentes esenciales del pensamiento computacional.	¿Qué componentes pongo en juego durante la resolución de un problema computacional?
Conocimiento de las estrategias para resolver problemas computacionales.	¿Qué estrategias de resolución considero?
Conocimiento de habilidades transversales en contextos computacionales.	¿Qué habilidades transversales promuevo a través de la resolución del problema?

Conocimiento sobre los componentes esenciales del pensamiento computacional

En el pensamiento computacional se utilizan diversos lenguajes (de código, por bloques, con iconos, mixtos, etc.), con algunos elementos comunes:

- Uso de datos y de variables: entender de dónde proceden, cuál es su significado y cómo pueden usarse para generar nuevos datos, así como reconocer patrones para organizar estos datos. Los retos computacionales a los que se enfrenta el alumnado en la escuela a menudo requieren un trabajo con datos numéricos y su tratamiento sistemático, la identificación de las variables que permiten describir y controlar un proceso computacional y la relación entre estas variables.
- Búsqueda y representación de abstracciones: explorar condiciones, patrones, relaciones geométricas, relaciones algebraicas, etc., que se expresan a través del código. De hecho, antes de programar con código,

es conveniente que los alumnos representen sus ideas empleando papel y lápiz, así como a través de juegos vivenciales (pensamiento computacional desenchufado), para después traducirlo al lenguaje computacional.

- Automatización de algoritmos: motorizar el funcionamiento de un programa informático o el comportamiento de un robot, usando bucles, condicionales, operadores, variables y parámetros formando un algoritmo para resolver casos particulares de un problema general.
- Secuenciación de pasos: ordenar de forma óptima las instrucciones que configuran un programa, usando secuencias, repeticiones o paralelismos.

Conocimiento sobre las estrategias para resolver problemas computacionales

La resolución de problemas computacionales implica el desarrollo de diversas estrategias, entre las que pueden destacarse las siguientes:

- Identificación y delimitación de un reto por resolver, analizando sus posibles soluciones, optimizando los pasos y recursos.
- Consideración de diversas vías, entendiendo, también, que puede haber varios caminos o soluciones válidas.
- Descomposición o simplificación, modularizando y fragmentando situaciones complejas en otras más sencillas.
- Comprobación, validación y depuración de las posibles soluciones de forma iterativa, aprendiendo de los errores identificados, puesto que, en computación, depurar implica buscar el error entendiendo qué es lo que no funciona.

Conocimiento sobre habilidades transversales en contextos computacionales

En el marco de la proposición de competencias transversales o competencias del siglo XXI, denominadas *soft skills*, es importante también tener presente que las competencias se desarrollan y expresan de una forma determinada según el contexto; por lo tanto, la cuestión no es tanto caracterizar cuáles son las habilidades transversales en abstracto, o desvinculadas de los saberes matemáticos, sino qué sentido adquieren en contextos computacionales. Así, Estebanell et al. (2018) se refieren a habilidades transversales como la creatividad, el trabajo en equipo, la autonomía e iniciativa personales o la interacción y la comunicación no como competencias transversales a desarrollar aparte del pensamiento computacional, sino dentro de él. Es decir, no se trata de enseñar la creatividad o el trabajo en equipo en sí mismo, sino conseguir enseñar computación desarrollando la creatividad y el trabajo en equipo.

2. 8. ¿Y las destrezas socioafectivas, qué?

Para cerrar esta segunda sección en la que se han presentado los conocimientos esenciales que debe movilizar el profesorado sobre los procesos, habilidades o competencias matemáticas del S. XXI, se hace una mención diferenciada a las destrezas socioafectivas, que en el currículo español de matemáticas se consideran un sentido matemático y una competencia específica. Las destrezas socioafectivas, de acuerdo con dicho currículo, “orientan sobre los procesos y principios metodológicos que deben dirigir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y favorecen el enfoque interdisciplinar y la innovación” (p. 92). Beltrán-Pellicer y Alsina (2022) indican que, el hecho de que uno de los ejes competenciales esté dedicado al dominio socioafectivo no hace sino reconocer la importancia que este tiene en el aprendizaje. Simplificando mucho la cuestión, estos autores subrayan que es imprescindible visibilizar qué ocurre en el plano emocional, así como diseñar e implementar situaciones de aprendizaje que favorezcan la formación de actitudes y creencias coherentes con las matemáticas que se pretenden construir. Desde este punto de vista, estas destrezas socioafectivas deben permear todos los procesos, habilidades y competencias descritas en esta sección, razón por la cual es imprescindible hacerse la pregunta guía siguiente: ¿cómo promuevo creencias, actitudes y emociones positivas hacia las matemáticas en todas las situaciones de aprendizaje que implemento? Diversos autores han hecho interesantes aportaciones sobre estas cuestiones, como por ejemplo Gómez-Chacón (2000) o Marbán et al. (2020), entre otros.

3. CONCLUSIONES

En este artículo se han descrito de forma sencilla, pero no por ello menos rigurosa, los conocimientos esenciales sobre los procesos, habilidades o competencias matemáticas del S. XXI, que son la base para poder implementar prácticas de enseñanza competenciales y productivas (Alsina, 2020a). Este tipo de prácticas, que rompen radicalmente con una visión de la enseñanza de las matemáticas basada en la mecanización, la memorización y la ejercitación, son imprescindibles para promover que progresivamente el alumnado desarrolle habilidades útiles que les permitan desenvolverse de manera más compresiva y eficaz en todas las situaciones en las que las matemáticas son necesarias.

Como se ha señalado, los conocimientos descritos son una ampliación, para el profesorado de las etapas de infantil y primaria principalmente, de dos subtipos de conocimiento de la caracterización *Conocimientos del Profesorado para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil (CPEM-EI)* propuesta por Alsina y Delgado (2022): por un lado, el *Conocimiento de los Procesos Matemáticos (C-PM)*, que es uno de los subtipos de conocimiento matemático; y, por otro lado, el *Conocimiento sobre la Planificación y Gestión de Actividades de enseñanza de las matemáticas (C-PGA)*, que forma parte del conocimiento didáctico.

Estos conocimientos se han presentado en torno a la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones, la representación, la modelización matemática y el pensamiento computacional. Ya desde la entrada del siglo XXI, diversos organismos y autores de prestigio como el NCTM (2003), Niss (2002) y la OECD (2004) se refirieron a los seis primeros, mientras que el pensamiento computacional se ha incorporado en los currículos de matemáticas más recientemente, como es el caso de España (MEFP, 2022a, 2022b). Lógicamente, para la concreción de estos conocimientos esenciales sobre los distintos procesos, habilidades o competencias matemáticas se han tenido muy presentes estas fuentes, junto con las contribuciones realizadas en trabajos preliminares sobre la enseñanza de las matemáticas a través de los procesos (e.g., Alsina, 2014, 2020a; Alsina et al., 2021; Alsina et al., en revisión; Niss, 2002; OECD, 2004).

Se han presentado de manera sintética tres conocimientos esenciales para cada proceso, habilidad o competencia matemática y, adicionalmente, se han proporcionado unas preguntas guía con la voluntad de ayudar al profesorado en el diseño y la implementación de situaciones de aprendizaje de las matemáticas cuyo propósito sea desarrollar la competencia matemática del alumnado de infantil y primaria. Sobre todo, porque la mayoría de los currículos de matemáticas contemporáneos hacen referencia a la implementación de prácticas de enseñanza competenciales, pero las orientaciones que se han ofrecido hasta hace poco han tendido a ser escasas y muy generales, salvo contadas excepciones (consultar, por ejemplo, la concreción de los saberes básicos del currículo de matemáticas de Aragón).

Teniendo en cuenta que se han descrito una amplia diversidad de conocimientos para profesorado generalista que no sólo enseña matemáticas, sería poco eficaz tratar de incorporarlos todos de golpe y transformar la práctica docente de la noche a la mañana; al contrario, como cualquier transformación bien hecha, requiere tiempo. En este sentido, sería recomendable una lectura pausada de cada conocimiento para reflexionar acerca de si está integrado o no en la propia práctica y, en el caso de que no lo esté, buscar formación complementaria que permita ir incorporándolo poco a poco. A paso lento, pero firme, se conseguirá mejorar la educación matemática del alumnado de hoy, que será la ciudadanía del mañana.

BIBLIOGRAFÍA

Alsina, Á. (2011). *Aprendre a usar les matemàtiques. Els processos matemàtics: propostes didàctiques per a l'Educació Infantil.* Eumo Editorial.

Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números, 86*, 5-28.

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas de 6 a 12 años.* Graó.

Alsina, Á. (2020a). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar*, *28*, 1-13.

Alsina, Á. (2020b). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática*, *3*(2), 127-159. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018

Alsina, Á. (2020c). Conexiones matemáticas a través de actividades STEAM en Educación Infantil. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 58*, 168-190.

Alsina, Á. (2022). Transformando el currículo español de Educación Infantil: la presencia de la competencia matemática y los procesos matemáticos. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 111*, 33-48.

Alsina, Á., Batllori, R., Falgàs, M. y Vidal, I. (2019). Marcas de autorregulación para la construcción del perfil docente durante la formación de maestros. *Revista Complutense de Educación, 30*(1), 55-74. https://doi.org/10.5209/RCED.55466

Alsina, Á. y Bosch, E. (2022). Numeración y cálculo en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido numérico. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática, 5*(3), 132–167. https://doi.org/10.30612/tangram.v5i3.16420

Alsina, Á. y Bosch, E. (2023). Estadística y probabilidad en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido estocástico. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática, 6*(3), 24-59. https://doi.org/10.30612/tangram.v6i3.17587

Alsina, Á. y Delgado-Rebolledo, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad, 5*(1), 18-37.

Alsina, Á., Maurandi, A., Ferre, E. y Coronata, C. (2021). Validating an Instrument to Evaluate the Teaching of Mathematics Through Processes. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19,* 559–577. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10064-y.

Alsina, Á., Pincheira, N. y Delgado-Rebolledo, R. (en revisión). Pre-service early childhood teachers' knowledge of mathematical processes through the design of early algebra tasks.

Alsina, Á. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea S.A. de Ediciones.

Alsina, Á. y Salgado, M. (2022a). Orientaciones didácticas para introducir la modelización matemática temprana en Educación Infantil.

Modelling in Science Education and Learning, *15*(2), 83-110. https://doi.org/10.4995/msel.2022.17226

Alsina, Á. y Salgado, M. (2022b). Understanding Early Mathematical Modelling: First Steps in the Process of Translation Between Real-world Contexts and Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20,* 1719–1742. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10232-8

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2022). De la investigación al aula: orientaciones didácticas para diseñar e implementar tareas probabilísticas en Educación Primaria. *Revista digital Matematica, Educación e Internet*, *23*(1), 1-23. https://doi.org/10.18845/rdmei.v23i1.6290

Álvarez, J., Alonso, I. y Gorina, A. (2019). Enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración. *Revista Conrado*, *15*(68), 249-258.

Bay-Williams, J.M. y SanGiovanni, J.J. (2021). *Figuring out fluency in mathematics teaching and learning.* Corwin.

Beltrán-Pellicer, P. y Alsina, Á. (2022). La competencia matemática en el currículo español de Educación Primaria. *Márgenes, Revista de Educación de la Universidad de Málaga*, *3*(2), 31-58. http://dx.doi.org10.24310/mgnmar.v3i2.14693

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can I Be Taught and Learn? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, *1*(1), 45-58.

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12). Education, engineering, and economics* (pp. 222–231). Ellis Horwood.

Castro, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, *54*, 55-67.

Charles, R. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Education Leadership, 7*, 9-24.

Couso, D. (2017). Per a què estem a STEM? Un intent de definir l'alfabetització STEM per a tothom i amb valors. *Ciències, 34*, 22-30. https://doi.org/10.5565/rev/ciencies.403

Dalmáu Carles, J. (1954). *Lecciones de aritmética*. Dalmáu Carles, Pla S. A.

EduGAINS (2011). Asking effective questions. http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/cbs_askingeffectivequestions.pdf

Estebanell, M., López, V., Peracaula, M., Simarro, C., Cornellà, P., Couso, D., González, J., Alsina, Á., Badillo, E. y Heras, R. (2018). *Pensamiento Computacional en la formación de maestros. Guía didáctica.* Servei de Publicacions UdG.

Esteve, O. y Alsina, Á. (en prensa) (Eds.). *Hacia una formación transformadora de docentes. Estrategias eficaces para formadores.* Narcea, S.A. de Ediciones.

European Comission (2004). *Europe needs more Scientists*. Autor.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 2-7.

Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Narcea S.A. de Ediciones.

Greefrath, G. (2019). Mathematical modelling – Background and current projects in Germany. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 23-41). SEIEM.

Marbán, J. M., Palacios, A. y Maroto, A. (2020). Desarrollo del domino afectivo matemático en la formación inicial de maestros de primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *18*, 73–86. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.286

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022a). *Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil.* Autor.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022b). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Autor.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Traducción de la SAEM Thales.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2014). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos.* Autor.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2023). *Procedural Fluency.* Autor.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project.* Roskilde University.

Pólya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas*. Reedición de la Editorial Trillas, 2002.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Volume II Patterns of plausible inference*. Princeton University Press.

Pólya, G. (1968). *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.* Wiley.

Puig Adam, P. (1955). Decálogo de la didáctica de la matemática media. *La Gaceta Matemática, 1ª Serie, Tomo VII, números 5 y 6*, 2-6.

Reeuwijk, M. V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO, 12,* 9-16.

Reinhart, S. D. (2000). Never say anything a kid can say. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*(8), 478–483.

Santaló, L. (1981). *La enseñanza de la matemática en la escuela media.* Proyecto CINAE.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Silva-Hormazábal, M., Rodrigues-Silva, J., Alsina, Á. y Salgado, M. (2022). Integrando matemáticas y ciencias: una actividad STEAM en Educación Primaria. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 66*, 1-20.

Singapore Ministry of Education (2018). *2020 secondary mathematics syllabuses.* MOE.

Sullivan, P. y Lilburn, P. (2002). *Good questions for Math Teaching*. Oxford University Press.

The Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003.* Autor.

The Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2005). *La definición y selección de competencias clave. Resumen ejecutivo.* Autor.

Toh, T. L. y Yeo, J. B. W. (2019). *Big Ideas in Mathematics: Yearbook 2019, Association of Mathematics Educators.* WSPC.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Harvard University Press.