Notas sobre el curso

"Dinámica local de campos de vectores reales"
V ESCUELA DOCTORAL ECSING
24-27 abril de 2012

Fernando Sanz Sánchez

1. Introducción

El texto que aquí se incluye contiene unas notas introductorias al estudio de la dinámica local de campos de vectores. Se corresponden con el curso ofrecido por el autor durante la V Escuela Doctoral ECSING celebrada en Valladolid en abril de 2012. Para mantener una extensión razonable de las notas y que su lectura sea ágil, la mayor parte de las veces, no hemos incluido demostraciones completas y detalladas de los resultados y técnicas que exponemos. Hemos intentado, sin embargo, dar las indicaciones esenciales para que el alumno pueda acceder con mayor facilidad a las demostraciones que aparecen en las referencias bibliográficas sugeridas.

Se acompaña una relación de ejercicios y problemas para auto-evaluación del alumno.

El plan de las notas es el siguiente. Hay dos unidades temáticas diferenciadas que hemos organizado en dos capítulos distintos. El primer capítulo se refiere a ciertos aspectos generales de campos de vectores en cualquier dimensión, centrándonos en los resultados relativos a existencia de variedades invariantes y el teorema de Hartman-Grobman en el caso de singularidad hiperbólica. El segundo capítulo se refiere a aspectos más específicos de campos de vectores en el plano (dimensión 2), que son, con mucho, los más estudiados y conocidos en la literatura. Ello se debe, en parte, y en lo relativo al estudio local en el que estamos interesados aquí, al resultado de reducción de singularidades mediante explosiones o transformaciones cuadráticas. Este es el resultado central en torno al cual está desarrollado el segundo capítulo.

El libro de cabecera en el que más nos hemos apoyado para estas notas (excepto para el problema de reducción de singularidades) es el libro de Perko [22]; también a veces el libro de Palis y de Melo [19], que presenta un tratamiento más geométrico. Estos libros puede y deben completarse con las referencias más clásicas sobre ecuaciones diferenciales y campos de vectores como [12, 9, 17, 2, 1, 14]. La referencia clásica para la reducción de singularidades es el artículo de Seidenberg [24], si bien nos hemos basado en textos con un lenguaje más moderno y más cercano a los contenidos aquí expuestos, como el libro en preparación de Cano, Cerveau y Désertie [4] o el texto de Camacho y Sad [6].

Queremos señalar que estas notas son bastante introductorias y que se dispone de bastantes trabajos sobre su continuación natural, concretamente sobre la dinámica local de campos de vectores en dimensión tres. Entre ellos, se encuentran varios teoremas de reducción de singularidades que generalizan el caso de dimensión dos [21, 5]. Por otro lado, existen trabajos relativos a la descripción de dinámicas de oscilación, enlazamiento y separación de trayectorias de campos de vectores en dimensión tres, obtenidos por el autor de estas notas en colaboración con otros investigadores. En ellos intervienen herramientas y técnicas matemáticas diferentes a las expuestas o sugeridas en estas notas. Un compendio de estos resultados aparece en [23], texto que puede muy bien servir como continuación a las presentes notas.

2. Variedades invariantes. Teorema de Hartman-Grobman

Repasamos las nociones más básicas para fijar las notaciones, así como el teorema del flujo, obtenido como avatar del teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Analizamos la familia de campos de vectores lineales, campos para los que se puede obtener explícitamente la expresión del flujo y obtenemos la clasificación de aquellos que tienen singularidad hiperbólica por el número de autovalores con parte real positiva o negativa del campo lineal.

Finalmente, haremos un rápido recorrido describiendo cómo pueden generalizarse estos resultados a campos de vectores no lineales en un entorno de una singularidad hiperbólica: la existencia de variedades invariantes locales y el teorema de

resultados presentados no podrán ser exhaustivas, pero si indicativas de los métodos, técnicas y argumentos que se usan en ellas.

2.1. Nociones básicas.

2.1.1. ***Campos de vectores y curvas integrales***. Implícitamente, suponemos al alumno familiarizado con los conceptos básicos de la geometría diferencial: variedades diferenciales, espacio tangente, campos de vectores, formas diferenciales, etc. Un libro de referencia muy recomendable es el libro de Warner [27]. No obstante, como la mayor parte de nuestro estudio es local, es decir, en el entorno de un punto, esencialmente nos bastará con el conocimiento del cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$.

Así pues, el espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en cada punto p se identificará de manera estándar con el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ donde la base estándar se denota con las derivadas parciales

$$T_p\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n =< \frac{\partial}{\partial x_1} |_p, \frac{\partial}{\partial x_2} |_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} |_p\}$$

(incluso sin explicitar el punto p) siendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ las coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^n$. Un *campo de vectores* X en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ es una aplicación que asigna a cada punto p de U un vector en $T_p\mathbb{R}^n$ y puede, por tanto escribirse como

$$X = A_1(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_1} + A_2(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + A_n(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_n}$$

donde las A_j son funciones de U en $\mathbb{R}$. El campo se dirá que es de clase C^r con $r \in \mathbb{N}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ o analítico (lo que denotamos para incluirlo conjuntamente con la notación anterior como de clase C^ω) si así lo son las funciones coeficientes A_j. Recuérdese que una función real se dice que es *analítica* si es de clase C^∞ y en cada punto de su dominio su serie de Taylor es una serie de potencias convergente cuya suma coincide con la función de partida en un entorno del punto. La mayor parte del tiempo sólo consideraremos campos de vectores analíticos, esto es, $r = \omega$.

Una *solución* o *curva interal* del campo X es cualquier curva parametrizada diferenciable $\gamma : I \to U$, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$ de modo que su derivada $\dot{\gamma}$ satisfaga

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

para cada $t \in I$. Equivalentemente, usando la escritura anterior para el campo X, las componentes $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))$ satisfacen el *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias* (sistema EDOs)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Un conocido teorema en teoría de ecuaciones diferenciales afirma la existencia y unicidad local de soluciones de sistemas de EDOs como el anterior, soluciones que tienen la misma clase de diferenciablididad que los coeficientes A_j, o que son analíticas si lo son éstos.

Traducido en términos de campos de vectores, este resultado nos dice que por cada punto $p \in U$ existe una curva integral $\gamma : I \to U$ con $0 \in I$ y $\gamma(0) = p$ de modo que si $\widetilde{\gamma} : J \to U$ es otra curva integral satisfaciendo $0 \in J$ y $\widetilde{\gamma}(0) = p$, entonces γ y $\widetilde{\gamma}$ coinciden en la intersección $I \cap J$. Esta unicidad local de las curvas integrales por un punto dado nos permite construir la *curva integral maximal del campo X en U por el punto p*: es la curva integral $\gamma_p : I_p \to U$ tal que I_p es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a 0 y $\gamma_p(0) = p$ y tal que cualquier otra curva integral $\sigma : I \to U$ con las mismas propiedades verifica que $I \subset I_p$ y $\sigma = \gamma_p\,|_I$.

Un punto $p \in U$ se dice que es un *punto singular* o un *punto de equilibrio* para el campo X si el valor $X(p)$ de X en p es el vector nulo. Esto equivale a que la curva integral maximal γ_p está definida en todo $\mathbb{R}$ y es constante, igual a p.

Una *curva integral cerrada, o periódica o ciclo* es una curva integral maximal γ_p tal que $\gamma_p(T) = \gamma_p(0)$ para algún $T > 0$. Por la unicidad local de curvas integrales, esto equivale a que γ_p es una aplicación periódica y entonces $I_p = \mathbb{R}$.

Un subconjunto A de U se dice que es *invariante por el campo X* si por cada punto $p \in A$, la trayectoria por el punto p está enteramente contenida en A. Diremos que A es *localmente invariante por X* si para cada punto $p \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que la curva integral $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ con $\gamma(0) = p$ tiene imagen dentro de A. Si A es una subvariedad diferenciable de U, A es localmente invariante si y sólo si para cada $p \in A$, el vector $X(p)$ es tangente a A en p.

También podemos hablar de *curva integral positiva* (resp. *negativa*) por p como la curva integral

$$\gamma_p^+ = \gamma_p \mid_{I_p \cap \mathbb{R}_{\geq 0}} \to U, \text{ (resp. } \gamma_p^- = \gamma_p \mid_{I_p \cap \mathbb{R}_{\leq 0}} \to U \text{).}$$

Usando las curvas integrales positiva o negativa, tenemos asociados los conceptos de conjunto positiva o negativamente invariante: $A \subset U$ se dice que es *positivamente invariante* (respectivamente *negativamente invariante*) si para cada $p \in A$, la curva integral positiva γ_p^+ (resp. negativa γ_p^-) por p tiene imagen en A.

2.1.2. ***Teorema del flujo***. El teorema del flujo de un campo de vectores, que pasamos a enunciar ahora, es una reformulación del resultado sobre la existencia y unicidad de curvas integrales, considerando todas las curvas integrales maximales por cada punto en un enunciado que da una interpretación geométrica de X como sistema dinámico en el que el espacio total evoluciona de una cierta manera por la acción del campo en función del tiempo.

Teorema 1. *Sea $\mathcal{D} = \mathcal{D}_X$ el subconjunto de $\mathbb{R} \times U$ formado por los pares (t, p) tales que $t \in I_p$, siendo I_p el intervalo de definición de la curva integral maximal γ_p de X por el punto p. Sea*

$$\Phi = \Phi^X : \mathcal{D} \to U$$

la aplicación definida por $\Phi(t, p) = \gamma_p(t)$. Entonces se tiene:

1. *El conjunto $\mathcal{D}$ es un entorno abierto de $\{0\} \times U \subset \mathbb{R} \times U$.*
2. *La aplicación Φ es una aplicación con la misma clase de diferenciabilidad que X (analítica si X es analítico).*
3. *Fijado $t \in \mathbb{R}$, denotamos por $\mathcal{D}_t = \mathcal{D} \cap \{t\} \times U$ y por Φ_t la restricción de Φ a $\mathcal{D}_t$. Entonces $\Phi_t : \mathcal{D}_t \to \mathcal{D}_{-t}$ es un difeomorfismo de inversa Φ_{-t}.*
4. *Sean $s, t \in \mathbb{R}$. Entonces el dominio de la composición $\Phi_s \circ \Phi_t$ está contenido en $\mathcal{D}_{t+s}$ (la contención puede ser estricta) y en tal dominio se tiene*
$$\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}.$$
5. *El campo X es completo si y sólo si $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times U$ y, en tal caso, Φ_t está definido en todo U para todo t y la fórmula anterior es válida para todos s, t. Equivalentemente, la aplicación $t \mapsto \Phi_t$ define un homomorfismo de grupos entre el grupo aditivo de $\mathbb{R}$ y el grupo de automorfismos de U por composición. Se dirá que $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es una* familia uniparamétrica de diffeomorfismos de U.

El enunciado que presentamos está tomado de [27], pero cualquier libro de ecuaciones diferenciales contiene formulaciones equivalentes.

Conviene comentar que el teorema del flujo es fácilmente trasladable a campos de vectores en variedades diferenciables M de clase C^r con $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Simplemente hay que substituir U por M en el enunciado, una vez que tenemos correctamente definido lo que es un campo de vectores sobre una variedad M y la noción de curva integral. Las expresiones en coordenadas locales de un tal campo de vectores dan lugar a campos de vectores en abiertos de $\mathbb{R}^n$ como los que hemos considerado hasta ahora, por lo que los teoremas de existencia y unicidad local de curvas integrales es consecuencia del mismo teorema ya mencionado de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de EDOs. No abordaremos aquí los detalles necesarios para el correcto traspaso de estas nociones y resultados al contexto global de variedades diferenciales, pero invitamos al lector poco acostumbrado a ello que se tome su tiempo para hacerlo, por ejemplo con la ayuda del libro de Warner [27].

La consideración de campos de vectores en el contexto más general de variedades diferenciables se hace necesaria, y resulta más adecuada, cuando se quieren abordar aspectos más globales sobre la dinámica. Aunque nuestro propósito es limitarnos al estudio local, como hemos comentado, a veces acabamos necesitando algunos aspectos globales (en el capítulo siguiente nos encontraremos con esta situación al introducir la herramienta de la explosión en un punto).

Otro ejemplo sencillo de situación en que el contexto adecuado es global es si queremos estudiar si el campo es completo o no. Por definición, un campo X en una variedad M se dirá que es *completo* si $I_p = \mathbb{R}$ para cada $p \in M$. Equivalentemente, la aplicación Φ^X en el teorema del flujo está definida en todo $\mathbb{R} \times M$. Conviene observar que si $M = U$ es un abierto propio de $\mathbb{R}^n$ entonces usualmente el campo X no será completo, a menos que no sea posible extenderlo a la frontera. Por ejemplo, el campo constante $X = \partial/\partial x$ en $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es completo. Aún tomando $U = \mathbb{R}^n$, es fácil construir ejemplos de campos de vectores analíticos que no son completos, como por ejemplo el campo

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$$

en $\mathbb{R}$. Sin embargo, un resultado interesante afirma que si la variedad M es compacta entonces cualquier campo de vectores en ella es completo (ver [27]).

2.1.3. ***Foliación asociada a un campo de vectores.*** Muchas veces, no estamos interesados en conocer la parametrización concreta de las curvas integrales $\gamma : I \to U$ de X dada por el flujo del campo. Podemos, por contra, interesarnos sólo en la imagen de dichas curvas integrales

$$|\gamma| := \{\gamma(t) \ / \ t \in I\} \subset U,$$

a las que llamaremos *trayectorias* del campo X, independientemente de cómo se parametricen. A la imagen $|\gamma|$ de una curva integral maximal γ de X le llamaremos *trayectoria maximal* o también *órbita* de X. Hay que tener en cuenta que esta terminología no es totalmente estándar en todos los libros de ecuaciones diferenciales o sistemas dinámicos que hemos sugerido en la bibliografía (máxime teniendo en cuenta que la mayoría están escritos en inglés o francés).

Una trayectoria $|\gamma|$ es, o bien un único punto (en el caso en que $|\gamma|$ contenga un punto singular) o bien un objeto 1-dimensional (de hecho una subvariedad inmersa de dimensión uno en U, ya que en tal caso $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t en el domino de definición de γ). Debido a la unicidad, dos trayectorias de un campo de vectores coinciden por completo o son disjuntas.

En libros clásicos de ecuaciones diferenciales, "dibujar el mapa de fases" consiste en considerar la partición del dominio U por las órbitas del campo. A esta partición del espacio en trayectorias nosotros lo llamaremos aquí la *foliación generada por el campo* X y la denotaremos por $\mathcal{F}_X$.

No presentamos la noción general de foliación en una variedad diferenciable M, que puede verse en el libro [3]. Para nuestros propósitos, nos bastará con decir que una *foliación (singular) de dimensión uno* en M es una partición $\mathcal{F}$ de M en subconjuntos, que se llamarán *hojas de la foliación*, cada uno de los cuales es, o bien un punto (que se llamará entonces *hoja o punto singular*) o una subvariedad inmersa en M de dimensión uno (que se llamará entonces *hoja regular*), de modo que:

1. El *conjunto singular* $Sing\mathcal{F}$ formado por los puntos singulares de $\mathcal{F}$ es un conjunto discreto de M,
2. Para cada $p \in M$, existe un campo de vectores X_p definido en un entorno U de p de modo que la restricción de $\mathcal{F}$ a U es la foliación generada por X_p.

La foliación $\mathcal{F}$ se dirá que es de clase C^r con $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ si el campo X_p en la definición anterior se puede elegir de clase C^r para cada punto $p \in M$.

2.1.4. ***Equivalencias y conjugaciones***. En general, no pueden darse expresiones explícitas para el flujo de un campo de vectores en términos de funciones conocidas (en el apartado siguiente repasamos una de las pocas familias en que ésto si es posible, los campos de vectores lineales). Así pues, debemos contentarnos con estudiar propiedades cualitativas del flujo o, en contextos en los que se requiera (aunque no es nuestro cometido aquí), con una resolución numérica.

Para tal fin, resulta útil saber si los flujos de dos campos tienen un aspecto cualitativo semejante. Surge así la noción de conjugación (cuando estamos interesados por la parametrización) y de equivalencia (cuando no estamos interesados en la parametrización, sólo en las trayectorias).

Definición 2. *Sean U, V abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sean X, Y campos de vectores sobre U y V respectivamente. Sea $r \in \mathbb{N}_{\geq 0} \cup \{\infty, \omega\}$. Diremos que X e Y son C^r-*conjugados *(respectivamente C^r-*equivalentes*) si existe un difeomorfismo $\varphi : U \to V$ de clase C^r tal que para cada $(t, p) \in \mathcal{D}_X$ se tiene que $(t, \varphi(p)) \in \mathcal{D}_Y$ y*

$$\Phi^Y(t, \varphi(p)) = \varphi(\Phi^X(t, p))$$

(respectivamente, si para cada $(t, p) \in \mathcal{D}_X$ existe un $t' \in \mathbb{R}$ con $(t', \varphi(p)) \in \mathcal{D}_Y$ y

$$\Phi^Y(t', \varphi(p)) = \varphi(\Phi^X(t, p)).)$$

*Una tal aplicación φ se llama C^r-*conjugación *(respectivamente C^r-*equivalencia*).*

En el caso particular $r = 0$, también hablamos de *conjugación topológica* (respectivamente *equivalencia topológica*).

El concepto de equivalencia es más débil que el de conjugación y equivale a tener un difeomorfismo $\varphi : U \to V$ de clase C^r que envía trayectorias de X en trayectorias de Y o, lo que es lo mismo, que preserva las foliaciones $\mathcal{F}_X$ y $\mathcal{F}_Y$ asociadas a los campos X e Y respectivamente. Conviene señalar que en la mayor parte de los textos sobre ecuaciones diferenciales, a la equivalencia se le exige además que conserve el "sentido" del campo; esto es, que en la definición anterior de equivalencia, para cada $(t, p) \in \mathcal{D}_X$ con $t \geq 0$, existe un $t' \geq 0$ con $(t', \varphi(p)) \in \mathcal{D}_Y$ y $\Phi^Y(t', \varphi(p)) = \varphi(\Phi^X(t, p))$. Una tal equivalencia que respeta el sentido enviará trayectorias positivas de X en trayectorias positivas de Y.

En la práctica, rara vez dos campos son conjugados o equivalentes, ni siquiera topológicamente, independientemente de la clase de diferenciabilidad a priori de los campos. Tradicionalmente, como haremos aquí, uno se restringe al problema local; esto es, al problema de saber decidir cuándo dos campos de vectores, restringidos a entornos suficientemente pequeños de un punto dado, tienen un aspecto cualitativo parecido.

Más precisamente, con las mismas notaciones que en la definición anterior, si $p \in U$ y $q \in V$, diremos que X *(en p)* es *localmente C^r-conjugado* (resp. *localmente C^r-equivalente*) *a Y (en q)* si existen entornos U_1 de p en U y V_1 de q en V tal que los campos restringidos $X\mid_{U_1}$, $Y\mid_{V_1}$ son C^r-conjugados (resp. C^r-equivalentes).

Para este problema local, sólo los puntos singulares presentan interés, gracias al teorema de rectificación de campos que recordamos aquí.

Teorema 3 (Rectificación de campos)**.** *Sea X un campo de vectores de clase C^r en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, con $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Sea $p \in U$ un punto tal que $X(p) \neq 0$. Entonces X es localmente C^r-conjugado al campo "constante" $Y = \frac{\partial}{\partial x_1}$, definido en $\mathbb{R}^n$, en el origen (o en cualquier punto).*

Esto es, en un entorno de un punto no singular, todos los campos presentan el mismo aspecto, el más sencillo posible, donde las curvas integrales, si se eligen bien las coordenadas, son rectas afines paralelas, parametrizadas a velocidad constante. Una demostración elegante de este resultado puede verse en [27]. Básicamente consiste en lo siguiente: suponemos inicialmente unas coordenadas locales $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ en el punto p de modo que el valor de X en p es el primer vector, $\frac{\partial}{\partial y_1}\mid_p$, de la base de las parciales; después, utilizamos nuevas coordenadas $\mathbf{x}$ haciendo uso del flujo Φ^X del campo X mediante la fórmula

$$\mathbf{x}^{-1}(a_1, ..., a_n) = \Phi^X_{a_1}(0, a_2, ..., a_n),$$

(es decir, el tiempo t pasa a ser la primera componente x_1 de las nuevas coordenadas). La expresión de X en las coordenadas x da lugar al campo constante del enunciado.

En un punto singular, sin embargo, pueden aparecer muchos tipos diferentes de comportamiento cualitativo local, incluso para campos de vectores analícos. De hecho, las presentes notas están concebidas como una introducción al problema de la geometría local de campos de vectores analíticos. No podremos llegar muy lejos: no se conocen resultados generales de cómo puede ser la geometría local de las órbitas de un campo de vectores en el entorno de un punto singular en $\mathbb{R}^n$. Sólo se dispone de una descripción razonable para campos planos $n = 2$, resultados que pretendemos presentar en el capítulo siguiente, y de resultados parciales sobre la descripción de algunos comportamientos cualitativos en dimensión tres, como giro en espiral, enlazamiento, separación, estudio al que está dedicado el texto [23], que ya hemos mencionado en la introducción.

2.2. Campos de vectores lineales. Clasificación de campos hiperbólicos. Para motivar el Teorema de Hartman-Grobman, que permite una descripción cualitativa local de campos en un entorno de las singularidades más sencillas posibles (singularidades hiperbólicas), recordamos primero cómo obtener los flujos de *campos de vectores lineales*: campos X en $\mathbb{R}^n$ que se escriben como

$$X = A_1(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_1} + A_2(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + A_n(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_n}$$

donde las $A_i(\mathbf{x}) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ son funciones lineales. Identificamos X con el endomorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$ dado por la matriz $A = (a_{ij})$. Nótese que los puntos singulares de X son precisamente los vectores (vistos éstos como puntos de $\mathbb{R}^n$) del núcleo del endomorfismo asociado.

Para hallar el flujo de un campo lineal, recordamos lo que es la *exponencial de una matriz*. Dada una matriz cuadrada $n \times n$, A, con coeficientes reales (o complejos), la serie

$$e^A = I_n + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots$$

es absolutamente convergente y da lugar a una matriz no singular (con determinante no nulo). De hecho, considerando los coeficientes de A como variables en $\mathbb{R}^{n^2}$, la serie anterior tiene radio de convergencia infinito y define una aplicación analítica $exp : A \mapsto e^A$.

Algunas de las propiedades más importantes de la aplicación exponencial son:

$$\begin{array}{l} e^{A+B} = e^A e^B \text{ si } AB = BA, \\ P^{-1}e^A P = e^{P^{-1}AP} \text{ si } P \text{ es invertible }, \\ \frac{d}{dt}(t \mapsto e^{tA}) = Ae^{tA}. \end{array}$$

La tercera de estas propiedades nos da por definición el flujo Φ^X de un campo lineal X, está dado simplemente por

$$\Phi^X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ \Phi^X(t, v) = e^{tA}v,$$

donde se están considerando los puntos de $\mathbb{R}^n$ como vectores v. Observamos que el campo es completo y que la familia uniparamétrica de difeomorfismos $\{\Phi_t^X = e^{tA}\}$ es una familia de isomorfismos lineales. Por otro lado, se ve inmediatamente que si L es un subespacio lineal de $\mathbb{R}^n$ invariante por el endomorfismo lineal asociado a X, entonces L es *invariante* para el campo de vectores, en el sentido de que para cada $v \in L$, la curva integral por v está incluida en L, o, lo que es lo mismo, L es inavariante para el difeomorfismo Φ_t^X, flujo del campo a tiempo t, para cada $t \in \mathbb{R}$.

En particular, los subespacios propios de la matriz A asociados a los autovalores serán invariantes para el campo lineal. Es esta idea de la que nos servimos para calcular explícitamente el flujo. Más exactamente, escribimos la matriz en su forma normal de Jordan (real); esto es, existe una matriz inversible P tal que

$$P^{-1}AP = D + N$$

donde N y D conmutan, N es una matriz nilpotente (esto es, $N^m = 0$ para cierto entero m) y D es una matriz diagonal por bloques donde, o bien los bloques son de dimensión uno formados por los autovalores reales λ_j de A, o bien bloques de dimensión dos de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ si $a \pm \sqrt{-1}b$ son autovalores complejos conjugados de A con $b \neq 0$. Entonces, usando las propiedades antes mencionadas, tendremos

$$e^{tA} = Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}$$

y bastará con calcular la exponencial de la matriz diagonal por bloques tD y la de una matriz nilpotente tN. Para ésta última, por definición de matriz nilpotente, las entradas de la matriz resultante son polinomios en t de grado acotado por el orden de nilpotencia (máximo m tal que $N^m = 0$), que a su vez siempre en menor o igual a la dimensión n de la matriz.

Por otro lado, e^{tD} es una matriz diagonal por bloques con la misma estructura de bloques: al bloque (λ) de D le corresponde el bloque $(e^{t\lambda})$ y al bloque $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ le corresponde el bloque $e^{ta}\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt)b & cos(bt) \end{pmatrix}$.

El comportamiento asintótico de estos bloques cuando t tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ puede determinarse cuando $\lambda \neq 0$ o $a \neq 0$: por ejemplo si $\lambda < 0$ (resp. $a < 0$), entonces $e^{t\lambda}$ (resp. las entradas de $e^{ta}\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & cos(bt) \end{pmatrix}$) decrecen exponencialmente a 0 cuando t va a infinito, y lo mismo podemos decir cuando t va a menos infinito si $\lambda > 0$ (resp. $a > 0$). Al multiplicar por la matriz e^{tN}, con entradas polinómicas, este comportamiento no se ve alterado. Recopilando todos estos argumentos y teniendo en cuenta la expresión del flujo de un campo lineal, se justifica la siguiente definición y se prueba el teorema que sigue.

Definición 4. *El campo lineal X con matriz asociada A se dice que es* hiperbólico *si todos los autovalores de A tienen parte real distinta de cero.*

Teorema 5. *Sea X un campo de vectores lineal hiperbólico en $\mathbb{R}^n$. Sean E^s, E^u los subespacios lineales, invariantes por X, asociados respectivamente a los autovalores con parte real negativa y a los autovalores con parte real positiva de X. Entonces $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ y se tiene:*

1. *Para todo $v \in E^s$, la curva integral $t \mapsto \Phi_t^X(v)$ de X por v está contenida en E^s, converge exponencialmente al origen cuando $t \to +\infty$ (esto es, $\| \Phi_t^X(v) \| \leq Ce^{-t\alpha}$ para ciertos $C, \alpha > 0$ y $t \geq 0$) y diverge cuando $t \to -\infty$ (esto es $\lim_{t\to-\infty} \| \Phi_t^X(v) \| = +\infty$).*
2. *Para todo $v \in E^u$, la curva integral $t \mapsto \Phi_t^X(v)$ de X por v está contenida en E^u, converge exponencialmente al origen cuando $t \to -\infty$ (esto es, $\| \Phi_t^X(v) \| \leq Ce^{t\alpha}$ para ciertos $C, \alpha > 0$ y $t \leq 0$) y diverge cuando $t \to +\infty$ (esto es $\lim_{t\to+\infty} \| \Phi_t^X(v) \| = +\infty$).*
3. *Si $v \notin E^s \cup E^u$ entonces $\lim_{t\to\pm\infty} \| \Phi_t^X(v) \| = +\infty$.*

Los subespacios E^s, E^u se denominan respectivamente subespacio estable y subespacio inestable *del campo X.*

El ejemplo más sencillo de campo lineal hiperbólico está dado eligiendo un número k entre 0 y n como dimensión del espacio estable y poniendo

$$X_{k,n-k} = -(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_k \frac{\partial}{\partial x_k}) + x_{k+1} \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{1}$$

Para un tal campo, si escribimos los vectores $v = v_s + v_u$ donde v_s tiene las últimas $n-k$ componentes nulas y v_u tiene las primeras k componentes nulas, entonces

$$\Phi_t^{X_{k,n-k}}(v) = e^{-t} v_s + e^t v_u.$$

Podemos comprobar el teorema anteror para este ejemplo sin mayor dificultad, como ilustración. Este ejemplo nos sirve también como modelo para clasificar todos los campos lineales hiperbólicos desde el punto de vista cualitativo. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado de clasificación topológica.

Teorema 6. *Sea X un campo lineal hiperbólico y sea k la dimensión de su espacio estable E^s. Entonces X es topológicamente conjugado al campo $X_{k,n-k}$ definido en (1).*

Una demostración elegante de este teorema puede verse en el libro de Palis y de Melo [19]. A grandes rasgos, los argumentos son los siguientes:

1. Bastará demostrar el teorema en el caso en que uno de los subespacios estable o inestable se reduce a 0 (por ejemplo $E^u = 0$ o, lo que es lo mismo, $k = n$). En efecto, si conseguimos conjugaciones topológicas $h_s : E^s \to \mathbb{R}^k$ (respectivamente $h_s : E^u \to \mathbb{R}^{n-k}$) entre $X \mid_{E^s}$ y $X_{k,0}$ (respectivamente entre $X \mid_{E^u}$ y $X_{0,n-k}$), entonces $h = (h_s, h_u) : E^s \oplus E^u \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ es una conjugación topológica entre X y $X_{k,n-k}$.

2. Suponiendo que $E^u = 0$, usando el álgebra lineal se demuestra que existen coordenadas lineales $y = (y_1, ..., y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ tal que X es transversal a la esfera unidad en dichas coordenadas, $\mathbb{S}_y = \{y : y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1\}$, en cada punto de ésta. Esta propiedad, junto con la propiedad 1 del Teorema 5, garantizará que cada órbita no singular (todas salvo el origen como único punto singular) corta una única vez a $\mathbb{S}_y$.
3. Fijamos ahora un homeomorfismo $\overline{h}$ entre la esfera $\mathbb{S}_y$ en las coordenadas y y la esfera $\mathbb{S}_x$ en las coordenads usuales x de $\mathbb{R}^n$ que usamos para la escritura de $X_{n,0}$ ($\overline{h}$ puede ser tomado como la restricción de un isomorfismo lineal). Una conjugación topológica h entre X y $X_{n,0}$ puede venir entonces descrita por la siguiente construcción: dado $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sea $t(p) \in \mathbb{R}$ el (único) valor real para el cual $\Phi^X_{t(p)}(p) \in \mathbb{S}_y$; entonces definimos
$$h(p) := \Phi^{X_{n,0}}_{-t(p)} \left(\overline{h}(\Phi^X_{t(p)}(p))\right).$$
Se demuestra entonces con argumentos típicos de topología y análisis matemático que h así definido extiende por continuidad a un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ si ponemos $h(0) = 0$. Por construcción nos da una conjugación topológica entre X y $X_{n,0}$ como requeríamos.

2.3. Singularidades hiperbólicas. Teorema de la variedad estable. Consideremos ahora un campo de vectores en un entorno de un punto singular p en $\mathbb{R}^n$. Podemos hablar de la *parte lineal de X en el origen*: es el campo lineal L_pX en $\mathbb{R}^n$ cuya matriz es la matriz jacobiana de las componentes de X en el punto p. La parte lineal es el campo lineal que mejor aproxima a X en el punto p. Conviene señalar, aunque no vamos a utilizarlo, que existe una noción más intrínseca (y más propia) de parte lineal que no hace uso de las coordenadas en las que se escribe el campo, sino del carácter algebraico que tiene un campo de vectores de proporcionar una *derivación* sobre el anillo de gérmenes de funciones C^∞ en el punto p.

Vamos a intentar valernos de lo aprendido sobre campos lineales para ver si podemos obtener propiedades de X a partir de su parte lineal.

Definición 7. *El campo X se dirá que tiene una singularidad hiperbólica en p si su parte lineal L_pX es un campo (lineal) hiperbólico.*

En el Teorema 5, hemos visto cómo es el comportamiento asintótico de las curvas integrales de un campo lineal hiperbólico, dependiendo de si la curva está o no en alguno de los espacios estable e inestable del campo. El teorema que sigue es una versión local de dicho resultado para singularidades hiperbólicas: establece la existencia de variedades invariantes de X en p "próximas" a los espacios estable e inestable de la parte lineal L_pX que contienen curvas integrales cuyo comportamiento asintótico es el esperado. Hay que tener en cuenta que, siendo L_pX una aproximación lineal a X, el resultado es puramente local, allá donde dicha aproximación es buena, no puede en principio compararse el comportamiento de las curvas integrales de X y las de L_pX cuando éstas se alejan de la singularidad p.

Teorema 8 (Teorema de la variedad estable)**.** *Sea X un campo de vectores de clase C^r con $r \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty, \omega\}$, que tiene una singularidad hiperbólica en un punto $p \in U \subset \mathbb{R}^n$. Existe un entorno V de p en U y variedades diferenciables no singulares W^s, W^u en V que pasan por el punto p, de clase C^r, que son localmente invariantes, tales que sus espacios tangentes en p son respectivamente el espacio lineal estable e inestable de la parte lineal L_pX y que verifican además:*

1. *Si $q \in W^s$, la curva integral $t \mapsto \Phi_t^X(v)$ de X por q está definida para todo $t \geq 0$, contenida en W^s y converge exponencialmente al punto p cuando $t \to +\infty$ (esto es, $|| \Phi_t^X(q) - p || \leq Ce^{-t\alpha}$ para ciertos $C, \alpha > 0$ y $t \geq 0$).*
2. *Si $q \in W^u$, la curva integral $t \mapsto \Phi_t^X(v)$ de X por q está definida para todo $t \leq 0$, contenida en W^u y converge exponencialmente al punto p cuando $t \to -\infty$ (esto es, $|| \Phi_t^X(q) - p || \leq Ce^{t\alpha}$ para ciertos $C, \alpha > 0$ y $t \leq 0$).*
3. *Si $q \notin W^s \cup W^u$ entonces la curva integral de X por el punto q se sale del entorno V tanto para tiempo positivo como para tiempo negativo (esto es, la curva integral maximal de la restricción $X \mid_V$ por q está definida en un intervalo $I_q = (a, b)$ con $-\infty < a < 0 < b < +\infty$).*

Las variedades W^s, W^u se denominan respectivamente *variedades estable y variedad inestable local (del campo X en el punto p).*

Es claro, por las propiedades enunciadas en el teorema anterior, que las variedades estable e inestable de X en una singularidad hiperbólica son "únicas" en el siguiente sentido: si V' es otro entorno de p en U y $W^{s'}$, $W^{u'}$ son variedades en V' cumpliendo las mismas propiedades que cumplen W^s, W^u en el enunciado, entonces se tiene

$$W^s \cap V \cap V' = W^{s'} \cap V \cap V', \; W^u \cap V \cap V' = W^{u'} \cap V \cap V'.$$

Idea de la demostración.- La prueba del Teorema 8 es bastante tediosa, la comprobación de muchos de los detalles técnicos suele exigir tiempo y dedicación. El enunciado que hemos presentado aquí, que incluye los casos de diferenciabilidad finita ($r \in \mathbb{N}$), diferenciabilidad infinita ($r = \infty$) y analítico ($r = \omega$), no suele incluirse como tal ni aparecer con todos los detalles pormenorizados en las referencias bibliográficas que hemos mencionado. Quizá una de las referencias que contenga un mayor nivel de detalle sobre el caso de diferenciabilidad finita es el artículo de Kelley [16], aparte de los libros de Hirsch, Pugh, Shub [13, 25] en los que se trata una situación más general (tratan el caso de conjuntos normalmente hiperbólicos y presentan, por tanto, pruebas más complicadas y elaboradas). El caso $r = \infty$ se deduce del caso de clase C^r para todo r finito teniendo en cuenta la unicidad. Por otro lado, el caso analítico no está muy tratado en la literatura (hasta donde nosotros sabemos). Referencias parciales sobre el caso analítico pueden ser el artículo de Hadamard [11], o también la situación tratada en el artículo de Moussu sobre gradientes [18]. Una referencia moderna en la que aparece un resultado un poco más general del que puede deducirse que las variedades estable e inestable son analíticas si lo es el campo de vectores es [15]. En preparación se encuentra el trabajo [7] que da una demostración alternativa más elemental de este caso.

Siguiendo el libro de Perko [22] (que a su vez sirve de explicación de una gran parte de la demostración contenida en Coddington-Levinson [9]) vamos a proponer a continuación unas líneas argumentales sobre la existencia de la variedad estable W^s y su carácter diferenciable (C^1). Así tendremos una primera impresión del tipo de técnicas que se precisan para demostrar este tipo de resultados.

Primero elegimos coordenadas lineales $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en el origen asociadas a la descomposición $E^s \oplus E^u$ en subespacio estable e inestable de $\mathbb{R}^n$. De esta manera podemos escribir el campo en X localmente como el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = P\mathbf{x} + F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} = Q\mathbf{y} + F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases}$$

donde $Spec(P) \subset \{Re < 0\}$, $Spec(Q) \subset \{Re > 0\}$ y $F_j = o(\| (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \|)$ para $j = 1, 2$.

Si $\gamma(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ es una curva integral con condición inicial $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{tP} \left(\mathbf{x}_0 + \textstyle\int_0^t e^{-sP} F_1(\gamma(s)) ds \right) \\ \mathbf{y}(t) &= e^{tQ} \left(\mathbf{y}_0 + \textstyle\int_0^t e^{-sP} F_2(\gamma(s)) ds \right). \end{aligned}$$

Si la condición inicial de la curva integral γ está en la variedad estable buscada W^s entonces queremos obtener en particular como resultado que γ está definida para todo $t \geq 0$. En este caso, podemos poner para las $\mathbf{y}$-componentes de γ:

$$\mathbf{y}(t) = e^{tQ} \left(\mathbf{y}_0 + \int_0^\infty e^{-sP} F_2(\gamma(s)) ds \right) - \int_t^\infty e^{(t-s)Q} F_2(\gamma(s)) ds. \tag{2}$$

Teniendo en cuenta el cálculo de la exponencial de una matriz del párrafo anterior, podemos observar que e^{tQ} tiene un crecimiento exponencial cuando $t \to \infty$ (pues los autovalores de Q son todos con parte real positiva). Si pretendemos además que γ esté contenida en γ y permanezca, por tanto, acotada, entonces el primer sumando en la ecuación (2) debe ser nulo y deberá tenerse la condición

$$\mathbf{y}_0 = -\int_0^\infty e^{-sP} F_2(\gamma(s)) ds. \tag{3}$$

Buscamos entonces W^s como un grafo sobre las variables $\mathbf{x}$: el conjunto de condiciones iniciales $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ de modo que la componente $\mathbf{y}_0$ dependa de $\mathbf{x}_0$ y verifique (3) cuando γ es la curva integral con la condición inicial $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.

Para materializar esta idea, se considera entonces, para cada $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ en coordenadas $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, la ecuación integral

$$\Psi(t, \mathbf{a}) = \left(e^{tP} \left(\mathbf{a}_1 + \int_0^t e^{-sP} F_1(\Psi(s, \mathbf{a})) ds \right) - \int_t^\infty e^{(t-s)Q} F_2(\Psi(s, \mathbf{a})) ds \right).$$

Esta ecuación se resuelve iterativamente poniendo

$$\Psi_0(t,\mathbf{a}) \equiv 0$$
$$\Psi_j(t,\mathbf{a}) = \left(e^{tP}\left(\mathbf{a}_1 + \int_0^t e^{-sP}F_1(\Psi_{j-1}(s,\mathbf{a}))ds\right) - \int_t^\infty e^{(t-s)Q}F_2(\Psi_{j-1}(s,\mathbf{a}))ds\right)$$

para $j \geq 1$. Usamos una *constante de Lipschitz* pequeña para los términos no lineales:

$$\| F_i(\mathbf{a}) - F_i(\mathbf{b}) \| \leq \varepsilon \| \mathbf{a} - \mathbf{b} \|, \quad \text{si } \| \mathbf{a} \|, \| \mathbf{b} \| \leq \delta, i = 1,2$$

y una estimación de los flujos lineales asociados a las matrices P y Q

$$\| e^{tP} \| \leq K e^{-\alpha t}, \forall t \geq 0,$$
$$\| e^{tQ} \| \leq K e^{\alpha t}, \forall t \leq 0,$$

para cierto $\alpha > 0$ con

$$Re(\lambda_j) < -\alpha < 0 < \alpha < Re(\mu_l), \forall \lambda_j \in Spec(P), \mu_l \in Spec(Q).$$

Obtenemos entonces inductivamente las estimaciones (si $\| \mathbf{a} \| \leq \delta/2K$ muy pequeño)

$$\| \Psi_j(t,\mathbf{a}) \| \leq \delta, \ \ \| \Psi_j(t,\mathbf{a}) - \Psi_{j-1}(t,\mathbf{a}) \| \leq \frac{K \| \mathbf{a} \| e^{-\alpha t}}{2^{j-1}} \forall t \geq 0, \forall j \geq 1$$

Entonces $\{\Psi_j(t,\mathbf{a})\}_{j\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy de funciones diferenciables y tiene por tanto límite

$$\Psi(t,\mathbf{a}) := \lim_{j\to\infty} \Psi_j(t,\mathbf{a}) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u.$$

Escribiendo $\Psi = (\Psi^1, \Psi^2)$ en componentes $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, definimos finalmente

$$W^s = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ / \ \mathbf{y} = \Psi^2(0,(\mathbf{x},0)), \| \mathbf{x} \| \leq \delta/2K\}.$$

Se requiere ahora un cierto trabajo para concluir que W^s es invariante y verifica las propiedades enunciadas en el Teorema 8 para ser la variedad estable del campo X en p, así como para probar que Ψ es de clase C^r si el campo X es de clase C^r (cuando r es finito, el caso analítico $r = \omega$ tiene puede hacerse de otra manera, como sugeriremos dentro de un momento).

2.4. Singularidades hiperbólicas. Teorema de Hartman-Grobman. El Teorema 8, como hemos dicho, es la versión local del Teorema 5 para singularidades hiperbólicas. Asimismo, existe una versión local del Teorema 6 sobre clasificación topológica. Se conoce con el nombre de teorema de Hartman-Grobman por ser ambos matemáticos P. Hartman y M. D. Grobman quienes lo establecieron de manera independiente. Establece que en un entorno de una singularidad hiperbólica el campo es topológicamente conjugado a su parte lineal, por lo que basta conocer ésta para describir cualitativamente la dinámica local.

Teorema 9 (Teorema de Hartman-Grobman)**.** *Sea X un campo con una singularidad hiperbólica en $p \in U$. Sea L_pX la parte lineal de X en p, considerado como un campo lineal en $\mathbb{R}^n$. Entonces existen un entorno V de p en U y un entorno V_1*

del origen de $\mathbb{R}^n$ tal que los campos restricción $X\mid_V$ y $L_pX\mid_{V_1}$ son topológicamente conjugados.

En el libro de Perko [22] puede verse una demostración fácil de leer (salvo la verificación de algunos detalles técnicos). Comentamos a continuación los pasos principales de dicha demostración:

1. Se substituye el problema de linealizar campos de vectores hiperbólicos por el de linealizar difeomorfismos hiperbólicos. Más concretamente, sea $T = \Phi_1^X$ el difeomorfismo dado por el flujo de X a tiempo 1. Por ser p una singularidad, $T(p) = p$ y T es un difeomorfismo local en el punto p. Además, la diferencial de T en p es el difeomorfismo lineal $L = exp(L_pX)$ de $\mathbb{R}^n$, flujo del campo lineal L_pX a tiempo 1. Bastará ver que T es topológicamente conjugado a L; esto es, que existen entornos U de p y V del origen de $\mathbb{R}^n$ y un homeomorfismo $H : U \to V$ de modo que se tenga la igualdad

$$H \circ T = L \circ H \tag{4}$$

en un entorno $U_1 \subset U$ de p (el entorno U_1 debe ser elegido tal que esta composición tenga setido, esto es, de modo que T esté definido en U_1 y $T(U_1) \subset U$). En efecto, una vez que tenemos (4), consideramos un entorno aún más pequeño $U_2 \subset U_1$ de modo que el flujo, Φ_s^X, de X a tiempo s esté definido en U_2 y verifique $\Phi_s^X(U_2) \subset U_1$ para cada $s \in [0,1]$ (existe, por compacidad) y definimos

$$h(q) = \int_0^1 \exp(-sL_pX) \circ H \circ \Phi_s^X(q)ds.$$

Esto nos da una aplicación $h : U_2 \to \mathbb{R}^n$ que restringe a una conjugación topológica local entre el campo X en p y su parte lineal L_pX en el origen.

2. Para buscar H verificando (4), consideramos coordenadas $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de modo que E^u es el espacio tangente de $\{\mathbf{x} = 0\}$ y E^s es el espacio tangente de $\{\mathbf{y} = 0\}$. Sean P, Q las matrices de $L_pX\mid_{E^s}, L_pX\mid_{E^u}$ en las coordenadas $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ respectivamente y denotemos por $B = \exp(P), C = \exp(Q)$. Se tiene que los autovalores de B son todos de módulo menor que 1 y los de C de módulo mayor que 1. Tenemos que L es el isomorfismo lineal

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (B\mathbf{x}, C\mathbf{y})$$

y T se escribe en estas coordenadas como

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (B\mathbf{x} + F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), C\mathbf{y} + G(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

donde F, G tienen orden mayor o igual a dos en todas las variables. Entonces, si escribimos el homeomorfismo buscado H como $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, la ecuación (4) se traduce en las siguientes

$$\begin{aligned} B\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \phi(B\mathbf{x} + F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), C\mathbf{y} + G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \\ B\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \psi(B\mathbf{x} + F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), C\mathbf{y} + G(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \end{aligned} \tag{5}$$

La segunda de estas ecuaciones se resuelve por el método de aproximaciones sucesivas poniendo $\psi_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ e, iterativamente para $j \geq 1$,

$$\psi_j(\mathbf{x},\mathbf{y}) = C^{-1}\psi_k(B\mathbf{x} + F(\mathbf{x},\mathbf{y}), C\mathbf{y} + G(\mathbf{x},\mathbf{y})).$$

Teniendo cuidado de elegir suficientemente pequeño el entorno como para que los términos no lineales F, G no intervengan y teniendo en cuenta que los autovalores de C^{-1} son todos de módulo menor que 1, se prueba que la sucesión $\{\psi_j\}$ es una sucesión de Cauchy de aplicaciones continuas y que converge uniformemente a una solución ψ continua de la segunda ecuación en (5).

3. La primera ecuación para ϕ en (5) no puede resolverse exactamente igual que la segunda (pues los autovalores de B^{-1} son de módulo mayor que uno. Por el contrario, consideramos el inverso T^{-1} de T que se escribe como

$$T^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (B^{-1}\mathbf{x} + \tilde{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}), C^{-1}\mathbf{y} + \tilde{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

donde $\tilde{F}, \tilde{G}$, como antes, tienen orden mayor o igual a dos. De esta forma, la primera ecuación en (5) se convierte en la ecuación

$$B^{-1}\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \phi(B^{-1}\mathbf{x} + \tilde{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}), C^{-1}\mathbf{y} + \tilde{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$

que se resuelve para cierta aplicación ϕ igual que hemos resuelto la segunda ecuación para ψ.

4. Para terminar, es necesario probar que la aplicación $H = (\phi, \psi)$ así obtenida es un homeomorfismo local en el origen. Por construcción, H verifica la ecuación (4).

2.5. Variedades invariantes en el caso semi-hiperbólico. Tanto el teorema de la variedad estable como el teorema de Hartman-Grobman que hemos presentado en los párrafos anteriores se refieren a singularidades hiperbólicas. Éstas son las singularidades menos degeneradas posibles en el sentido de que la parte lineal del campo (su mejor aproximación lineal) tiene todos los autovalores con parte real no nula; en particular es un difeomorfismo. Moralmente, la dinámica local de X no difiere de la de un campo lineal en esta situación. Sin embargo, a medida que la parte lineal es más degenerada, la dinámica local del campo no se ve "representada" por la de su parte lineal. Piénsese en el peor de los casos, en la situación en la que la parte lineal es idénticamente nula: todos los puntos son de equilibrio para dicha parte lineal, con lo que se tiene una dinámica trivial y, sin embargo, el campo original puede tener una dinámica local muy complicada.

No obstante, en un caso intermedio en el que la parte lineal de X en la singularidad p tiene algunos autovalores con parte real nula y otros autovalores con parte real no nula (en cuyo caso suele decirse que la singularidad es *semi-hiperbólica*, pueden generalizarse de cierta forma los Teoremas 8 y 9. En este párrafo presentamos dichas generalizaciones.

Dado X, un campo de vectores con una singularidad en $p \in \mathbb{R}^n$, descomponemos

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u,$$

donde E^s, E^u, E^c son, respectivamente, los subespacio propio de los autovalores con parte real negativa, positiva y nula. Se denominan *subespacio estable, inestable y central de X en p*, respectivamente.

El Teorema 8 se generaliza como sigue para las singularidades semi-hiperbólicas.

Teorema 10 (Teorema de la variedad central)**.** *Supongamos que el campo X es de clase C^∞ o analítico (C^ω) y que tiene en $p \in U$ una singularidad semi-hiperbólica. Entonces, para cada r con $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, existe un entorno V_r de p y subvariedades lisas en V_r de clase C^r*

$$W_r^s, \;\; W_r^{cs}, \;\; W_r^c, \;\; W_r^{cu}, \;\; W_r^u,$$

(que se denominan respectivamente variedad estable, central-estable, central, central-inestable e inestable de clase C^r*) que son localmente invariantes por X y tales que*

$$T_pW_r^s = E^s, \; T_pW_r^{cs} = E^s \oplus E^c, \; T_pW_r^c = E^c, T_pW_r^{cu} = E^u \oplus E^c, T_pW_r^u = E^u.$$

Además, V_r puede ser elegido de modo que se verifican las propiedades:

1. *Las variedades estable e inestable W_r^s, W_r^u verifican las propiedades 1 y 2 respectivamente del Teorema 8.*
2. *La variedad central-estable W_r^{cs} contiene todos los puntos q de V_r para los cuales la curva integral positiva γ_q^+ está definida para todo $t \geq 0$ y permanece en V_r.*
3. *La variedad central W_r^c contiene todos los puntos q de V_r para los cuales la curva integral γ_q está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y permanece en V_r.*
4. *La variedad central-inestable W_r^c contiene todos los puntos q de V_r para los cuales la curva integral negativa γ_q^- está definida para todo $t \leq 0$ y permanece en V_r.*

El nombre de teorema de la variedad central, que tradicionalmente se da a este resultado, se debe a que establece la existencia de las variedades tangentes al subespacio central: la variedad central-estable, W^{cs}, central-inestable, W^{cu} y central, W^c. Estas variedades son también llamadas *variedades débiles* en contraposición con las variedades estable, W^s e inestable, W^u, que se llaman *variedades fuertes*. La diferencia entre variedades fuertes y débiles radica en las propiedades de unicidad y el carácter diferenciable. Mientras que, como en el Toerema 8, la propiedad 1 define unívocamente las variedades fuertes W_r^s, W_r^u en V_r (de modo que los gérmenes de estas variedades en el punto p no dependen de r y están bien definidos), no existe unicidad de las variedades débiles, pudiendo darse que para distintos r, r' se tenga que

$$W_r^\epsilon \cap V_r \cap V_{r'} \neq W_{r'}^\epsilon \cap V_r \cap V_{r'}$$

para $\epsilon \in \{cs, cu, c\}$ o, incluso, que haya diferentes variedades centrales (o central-estables, o central-inestables) de clase C^r en el mismo entorno V_r. Un ejemplo sencillo en dimensión dos es la singularidad semí-hiperbólica más sencilla que no es hiperbólica:

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Para este ejemplo, existe una infinidad de variedades centrales (tangentes a $\{y = 0\}$, el subespacio central E^c de esta singularidad).

De la propiedad de unicidad para las variedades fuertes, inferimos que éstas son de clase C^∞ si lo es el campo X (más aún, son analíticas si lo es X, la referencia para este hecho ya la hemos comentado antes, en los comentarios que siguen al Teorema 8). Sin embargo, pueden no existir variedades débiles de clase C^∞ (ver por ejemplo [26].

Una demostración completa del Teorema 10 puede encontrarse en el libro de Shub [25], o en el artículo de Kelley [16]. Se siguen ideas y técnicas parecidas a las que hemos bosquejado sobre la demostración del Teorema 8 de la variedad estable; pero la demostración completa es bastante más sofisticada técnicamente. También, para un enunciado que cubre situaciones más generales (variedades invariantes sobre un conjunto normalmente hiperbólico), puede verse el libro de Hirsch, Pugh y Shub [13]. Conviene observar que el Teorema 10 es también cierto con las mismas conclusiones con la hipótesis más débil de que el campo inicial X es de clase C^l, con l finito pero mayor o igual que el número r que aparece en el enunciado. Aquí hemos considerado la situación de campos C^∞ o analíticos para hacer ver los problemas, ya comentados, relativos a la unicidad y falta de diferenciabilidad infinita de las variedaes débiles.

Finalmente, el Teorema 9 de Hartman-Grobman también puede generalizarse a singularidades semi-hiperbólicas. Se trata del teorema conocido con el nombre de *teorema de reducción a la variedad central* y establece que basta conocer la dinámica del campo de vectores en el interior de una variedad central para tener una descripción topológica local del campo en un entorno de la singularidad: sobre el resto de variables (las tangentes a las variedades fuertes) es equivalente a un campo lineal del tipo definido en la ecuación (1). Más concretamente:

Teorema 11 (Reducción a la variedad central)**.** *Sea X un campo de vectores con singularidad semi-hiperbólica $p \in U \subset \mathbb{R}^n$. Sea $k = \dim(E^s(p))$, $l = \dim(E^u)$ y sea W^c una variedad central en un entorno de p. Entonces X es localmente topológicamente conjugado al campo $X|_{W^c} + X_{k,l}$ en un entorno de $(p, \mathbf{0}) \in W^c \times \mathbb{R}^{k+l}$.*

Puede verse una demostración de este resultado en el artículo de Palis y Takens [20] o también, con un tratamiento más general, en el libro de Hirsch, Pugh y Shub [13].

2.6. Variedades invariantes formales. Del Teorema 11 deducimos la importancia que tiene encontrar una variedad central W^c de un campo de vectores X

con singularidad semi-hiperbólica para poder tener una descripción cualitativa de la dinámica local. Esto nos lleva a la pregunta de si existen variedades centrales distinguidas más fáciles de encontrar que otras, o con una naturaleza mejor que las demás. Sin embargo, como ya hemos comentado tras el teorema de la variedad central, no existe unicidad de las variedades invariantes débiles, ambigüedad a la que se añade que no podamos asegurar la existencia de variedades centrales analíticas cuando el campo de partida es analítico (ni aún la existencia de variedades centrales de clase C^∞).

Existe, sin embargo, un "objeto único" que podemos asociar a un campo de vectores analítico y que representa *la* variedad central: es la *variedad invariante formal.* Tiene naturaleza formal; esto es, es un objeto algebraico, manipulable pero que a priori no tiene significado geométrico.[1]

Con mayor precisión, podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 12 (Variedades invariantes formales)**.** *Sea X analítico con una singularidad semi-hiperbólica en un punto $p \in U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces existen variedades formales no singulares por el punto p*

$$\widehat{W}^s, \widehat{W}^{cs}, \widehat{W}^c, \widehat{W}^{cu}, \widehat{W}^u$$

que son formalmente invariantes para X y únicas verificando

$$T_p\widehat{W}^s = E^s, T_p\widehat{W}^{cs} = E^c \oplus E^s, T_p\widehat{W}^c = E^c, T_p\widehat{W}^{cu} = E^c \oplus E^u, T_p\widehat{W}^u = E^u.$$

Se llaman respectivamente variedad estable formal, central-estable formal, central formal, central-inestable formal *e* inestable formal.

Precisamos un poco más lo que queremos decir en el enunciado anterior por "variedad formal lisa invariante". Por ejemplo para el caso de la variedad central formal (ecuaciones y nociones análogas se tienen para las otras variedades invariantes formales). Fijemos coordenadas $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ tangentes a E^s, E^c, E^u, respectivamente y sea $k = \dim(E^c)$. Entonces pensamos en $\widehat{W}^c$ como un grafo de la forma

$$\widehat{W}^c : \Big(\mathbf{y} = \widehat{h}^c = (\widehat{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \ldots, \widehat{h}_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}))\Big) \tag{6}$$

siendo $\widehat{h}_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}[[\mathbf{x}, \mathbf{z}]]$ una serie formal de orden ≥ 2 para $i = 1, 2, ..., k$. La condición de ser un grafo responde al carácter "liso" de la variedad formal y la condición sobre el orden mayor o igual a dos responde a la propiedad de que el espacio tangente $T_p\widehat{W}^c$ de la variedad central formal sea igual al espacio central E^c.

[1] Aunque a la variedad central formal puede en muchas ocasiones dotársele de un significado geométrico y compatible con la dinámica asociada al campo de vectores, cosa que se ha realizado con grandísimo éxito usando las teorías de *sumabilidad* de Ramis o de *resurgencia* de Écalle, teorías que exceden con mucho el propósito de este curso.

Por último, la condición de que $\widehat{W}^c$ sea "formalmente invariante" para el campo X se describe como sigue: si escribimos

$$X = A(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + B(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} + C(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}$$

en las coordenas elegidas, donde A, B, C son funciones analíticas, entonces, por definición, la variedad formal dada por (6) es formalmente invariante para X si y sólo si se da la siguiente identidad de vectores de k series formales en las variables $(\mathbf{x},\mathbf{z})$

$$B(\mathbf{x},\widehat{h}^c(\mathbf{x},\mathbf{z}),\mathbf{z}) = \frac{\partial \widehat{h}^c}{\partial(\mathbf{x},\mathbf{z})}(\mathbf{x},\mathbf{z})\begin{pmatrix} A(\mathbf{x},\widehat{h}^c(\mathbf{x},\mathbf{z}),\mathbf{z}) & C(\mathbf{x},\widehat{h}^c(\mathbf{x},\mathbf{z}),\mathbf{z})\end{pmatrix} \tag{7}$$

(teniendo en cuenta que la derivada de una serie formal se define como la serie resultante de hacer la derivada usual término a término y con la notación estándar de matriz jacobiana $\frac{\partial \widehat{h}^c}{\partial(\mathbf{x},\mathbf{z})}$ de k filas y $n-k = \dim(E^s \oplus E^u)$ columnas).

La ecuación (7) como definición de invariancia formal se justifica por lo que ocurre en la situación en la que las series $\widehat{h}_i(\mathbf{x},\mathbf{z})$ en (6) fueran todas convergentes: si en tal caso denotamos por h_i la suma de $\widehat{h}_i(\mathbf{x},\mathbf{z})$ (función analítica real en las variables $(\mathbf{x},\mathbf{z})$), entonces el grafo de $h^c = (h_1,...,h_k)$ da lugar a una variedad analítica lisa tangente a E^c en p que por verificar (7) es localmente invariante para el campo de vectores X; esto es, sería una variedad central analítica.

Conviene señalar que, para campos analíticos, las variedades formales débiles $\widehat{W}^{cs}, \widehat{W}^c, \widehat{W}^{cu}$ no son necesariamente convergentes (las series que las definen como grafos, como en la ecuación (6) no son convergentes). Sin embargo, las variedades invariantes formales fuertes $\widehat{W}^s, \widehat{W}^u$ son siempre convergentes, lo que garantiza la existencia de variedades estable e inestable analíticas para campos analíticos con singularidad semi-hiperbólica. Este resultado de analiticidad de las variedades invariantes fuertes ya lo hemos comentado, pero queremos señalar aquí que en las dos referencia aludidas [15, 7] sobre la demostración de tal resultado, la segunda se basa en probar la convergencia de las variedades formales fuertes por métodos elementales de acotación de series, mientras que la primera (que establece un resultado más general) utiliza métodos distintos a los expuestos en estas notas.

Queremos también señalar que, pese a la falta de unicidad que se tiene de las variedades débiles obtenidas en el Teorema 10, la unicidad de las variedades invariantes formales marca una unicidad del desarrollo de Taylor de aquéllas. Más precisamente se tiene que si W^ϵ con $\epsilon = s, c, u, cs, cu$ es una variedad invariante de clase C^r y la escribimos como un grafo sobre el espacio lineal correspondiente E^ϵ (una vez elegidas coordenadas), entonces el desarrollo de Taylor hasta orden r de las funciones utilizadas para describir este grafo coincide con la truncación hasta orden r de las series utilizadas para la descripción de la variedad invariante formal $\widehat{W}^\epsilon$. En pocas palabras, se tiene:

$$j^r(W^\epsilon) = j^r(\widehat{W^\epsilon}). \tag{8}$$

Esta propiedad, que resulta evidente para las variedades fuertes (cuando $\epsilon = s, u$) por ser éstas analíticas y únicas, permite afirmar que dos variedades invariantes débiles cualesquiera están *exponencialmente próximas*, esto es, la distancia de un punto q de una de ellas a la otra es menor que cualquier potencia de la distancia del punto q al origen si q está suficientemente cerca del origen.

La demostración del Teorema 12 no presenta el tipo de dificultades técnicas del Teorema 10. Debido a que se buscan series formales del tipo (6) que verifiquen la ecuación diferencial (7), sin que se requiera probar que existe un soporte geométrico de dichas series, la prueba puede hacerse por el método simple de coeficientes indeterminados: los coeficientes de las series se van determinando recursivamente simplemente imponiendo la igualdad (7). Proponemos el libro de Chow y Hale [8] para ver una demostración completa con este argumento bien organizado y desarrollado para tener validez en todos los casos contemplados en el enunciado del Teorema 12.

3. Campos planos. Explosiones. Reducción de singularidades

En la segunda unidad temática del curso, pretendemos analizar las singularidades (hiperbólicas o no) de campos de vectores analíticos planos, esto es, definidos en un entorno del origen de $\mathbb{R}^2$ donde tienen una singularidad. Para ello necesitamos la herramienta de las explosiones y el teorema de reducción de singularidades.

3.1. Singularidades simples de campos planos. Hemos visto que las singularidades hiperbólicas pueden describirse fácilmente desde el punto de vista topológico local, usando el Teorema de Hartman-Grobman. Ahora queremos introducir una familia de singlaridades de campos de vectores planos, que incluyen buena parte de las singularidades hiperbólicas, y que tienen propiedades analíticas fácilmente describibles.

Definición 13. *Sea X un campo de vectores analítico en un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea p un punto singular para X. Decimos que p es una* singularidad simple (real) *si los dos autovalores λ_1, λ_2 de la parte lineal de X en p son reales, uno de ellos, por ejemplo λ_2, es distinto de cero y λ_1/λ_2 no es un número racional positivo.*

Obsérvese que singularidades en las que uno de los autovalores es nulo y el otro es no nulo son singularidades simples, aunque estas singularidades no son hiperbólicas. Por otro lado, no todas las singularidades hiperbólicas con autovalores reales son simples: los autovalores de una singularidad hiperbólica pueden ser reales no nulos y tener cociente racional positivo. La razón de por qué considerar singularidades simples viene descrita por el teorema que sigue.

Antes de nada necesitamos recordar lo que es una *curva formal (real) plana* $\widehat{\Gamma}$ en un punto $p \in \mathbb{R}^2$: es una expresión formal en coordenadas (x, y) centradas en p de la forma

$$\widehat{\Gamma} : y = \hat{h}(x^{1/r}) = a_1 x^{1/r} + a_2 x^{2/r} + \cdots + a_m x^{m/r} + \cdots$$

donde r es un entero positivo y $\hat{h}(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ es una serie de potencias formales en la variable z con coeficientes reales. La curva formal se dice *no singular* en p si $r = 1$ y se dice que es *convergente* si $\hat{h}(z)$ es una serie convergente. En este último caso, la expresión anterior da lugar a una *curva analítica real plana*: la imagen Γ en $\mathbb{R}^2$ de la parametrización

$$x(t) = t^q, y(t) = h(t)$$

para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ con ε suficientemente pequeño y donde h es la suma de la serie $\hat{h}(z)$. Identificamos en este caso la expresión formal con el conjunto obtenido $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$.

Una curva formal $\widehat{\Gamma}$ en p se dice que es *invariante* por el campo X si, al escribir X en las coordenadas mencionadas (x, y) centradas en p como

$$X = A(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

se tiene que

$$\frac{1}{r} x^{(1-r)/r} \hat{h}'(x^{1/r}) A(x, \hat{h}(x^{1/r})) = B(x, \hat{h}(x^{1/r}))$$

como series formales en la variable $x^{1/r}$ y donde $\hat{h}'(z)$ denota la serie formal obtenida de $\hat{h}(z)$ al derivar término a término (la derivada de la serie formal). Cuando $\widehat{\Gamma}$ es convergente, esto equivale a que la curva analítica real correspondiente Γ sea localmente invariante para X como subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Una curva analítica real en el punto p que sea invariante se denomina también una *separatriz de X en p*.

Teorema 14 (Descripción de singularidades simples)**.** *Sea X un campo de vectores plano con una singularidad simple (por ejemplo en el origen de $\mathbb{R}^2$). Entonces*

1. *Existen curvas formales $\widehat{\Gamma}_1, \widehat{\Gamma}_2$ en el origen, invariantes por X, no singulares y tangentes en el origen a las direcciones propias de la parte lineal L_0X asociadas a los autovalores λ_1, λ_2, respectivamente.*
2. *Éstas son las únicas curvas formales en el origen invariantes por X.*
3. *Para $j = 1, 2$, existe una subvariedad regular C_j de clase C^∞, de dimensión uno, que pasa por el origen, es localmente invariante por X y cuyo desarrollo de Taylor coincide con $\widehat{\Gamma}_j$.*
4. *$\widehat{\Gamma}_j$ es convergente si $\lambda_j \neq 0$.*

La existencia de curvas formales solución en el punto 1 se establece por el método de coeficientes indeterminados (en algunos casos, es consecuencia del Teorema 12 de existencia de variedades invariantes formales).

La unicidad enunciada en el punto 2 se obtiene fácilmente a partir de la condición de singularidad simple (más precisamente, la condición de que el cociente entre los dos autovalores no sea racional positivo).

El punto 3 requiere una demostración aparte; sin entrar mucho en los detalles, puede completarse desarrollando los siguientes argumentos:

- si $\lambda_1\lambda_2 < 0$, entonces C_1, C_2 son las variedades invariantes fuertes y el resultado es consecuencia del Teorema 8,

- si $\lambda_1\lambda_2 > 0$, junto con la condición de que $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, por ser singularidad simple, se tiene, por un resultado clásico que se debe a Poincaré, que X es analíticamente conjugado a su parte lineal, campo éste para el cual el resultado es obvio,

- si $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$, la curva C_2 es la variedad invariante fuerte (por tanto analítica por el Teorema 8) y C_1 es una variedad central W^c. Si bien el Teorema 10 sólo permite asegurar la existencia de variedad central de clase C^k cada vez que fijamos k, en esta situación concreta de campos planos podemos probar que cualquier variedad central W^c es de clase C^∞: la función $h(x)$ cuyo grafo define W^c tiene *desarrollo asintótico formal* igual a la serie $\widehat{h}(x)$ que describe la variedad central formal $\widehat{W^c}$; por la invariancia, tanto h como $\widehat{h}$ satisfacen una ecuación diferencial con coeficientes meromorfos con lo que deducimos que la derivada $h'(x)$ también tienen desarrollo asintótico igual a la derivada $\widehat{h}'(x)$ de la serie formal y que h' tiene el mismo grado de diferenciabilidad que h, por tanto infinito.

El punto 4 es un resultado clásico conocido como *Teorema de Briot y Bouquet*. Una demostración puede verse en el libro [4] por ejemplo.

Otra observación que se sigue de todo lo comentado es que si la curva formal $\widehat{\Gamma}_j$ es convergente, entonces C_j en el punto 3 puede tomarse igual a la separatriz convergente. En cualquier caso, las curvas C_j no son necesariamente únicas, salvo en el caso en que el autovalor correspondiente λ_j sea no nulo.

Ejemplo 15 (Ecuación de Euler)**.** Un ejemplo característico es el campo de vectores plano

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + (y - x)\frac{\partial}{\partial y}$$

o la ecuación asociada $x^2\frac{dy}{dx} = y - x$, llamada *ecuación de Euler*. Para este campo, los autovalores son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. El eje de ordenadas $\{x = 0\}$ es la curva (analítica) C_2 del punto 3, mientras que la curva formal $\widehat{\Gamma}_1$ asociada al autovalor nulo no es convergente (un cálculo sencillo por coeficientes indeterminados muestra que $\widehat{\Gamma}_1$: $y = \widehat{h}(x)$ con $\widehat{h}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!x^{n+1}$, la *serie de Euler*). Dibujando el mapa de fases de esta ecuación (que puede resolverse por el método de variación de las constantes), podemos ver lo siguiente:

- cada trayectoria de X, salvo las contenidas en el eje $\{x = 0\}$, es un grafo sobre la coordenada x, que toma valores positivos si la solución entá contenida en el semiespacio $\{x > 0\}$ y valores negativos si está contenida en el semiespacio $\{x > 0\}$,
- existe una única trayectoria $\mid \gamma_0 \mid$ en $\{x < 0\}$ que se acumula en el origen (de hecho $\lim_{t\to\infty} \gamma_0(t) = 0$), mientras que cualquier trayectoria $\mid \gamma \mid$ en $\{x > 0\}$ se acumula en el origen (de hecho $\lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = 0$),
- si $\mid \gamma \mid$ es una trayectoria que se acumula en el origen y es el grafo de la función h, entonces existen los límites de las derivadas de todos los órdenes de h cuando x tiende a 0 y su desarrollo de Taylor en 0 es igual a la serie de Euler,
- la unión de $\mid \gamma_0 \mid$, el origen y una cualquiera de las trayectorias contenidas en $\{x > 0\}$ define una curva de clase C^∞ que hace las veces de curva C_1 como en el punto 3 del Teorema 14.

Teniendo este ejemplo como ilustración, a partir del Teorema 14, y con los teoremas de Hartman-Grobman y su generalización, Teoremas 9 y 11, podemos describir la geometría local de las singularidades simples fácilmente. Tomamos curvas C_1, C_2 como en el punto 3 de dicho teorema, que son no singulares y transversales. Éstas dividen un entorno del punto en cuatro "sectores" abiertos dentro de cada uno de los cuales todas las curvas integrales γ de la restricción del campo a tal entorno tienen un comportamiento parecido:
- o bien cada cada γ tiene límite la singularidad cuando $t \to +\infty$ (o cuando $t \to -\infty$) y escapa del sector en tiempo finito negativo (o positivo),
- o bien cada γ se escapa del sector tanto en tiempo finito positivo como tiempo finito negativo.

El primer tipo se llama *sector parabólico* (*sumidero* si las curvas se aproximan a la singularidad para $t \to \infty$ o *fuente* si es para $t \to -\infty$). El segundo se llama *sector hiperbólico.*

Cuando los dos autovalores λ_1, λ_2 tienen el mismo signo no nulo (singularidad que se llama de *tipo nodo*) todos los sectores son parabólicos. Cuando los autovalores tienen signo contrario no nulo (singularidad que se llama de *tipo silla*) entonces todos los sectores son hiperbólicos. Cuando uno de los autovalores es nulo (singularidad que se llama entonces de tipo *silla-nodo*), puede ocurrir que los cuatro sectores sean parabólicos, que los cuatro sean hiperbólicos o que dos de ellos contiguos sean hiperbólicos y los otros dos sean parabólicos.

En lo que resta de curso, queremos intentar generalizar esta descripción local en términos de sectores para singularidades cualesquiera de campos de vectores en el plano. Para ello, necesitaremos del resultado de reducción de singularidades que permite reducir cualquier singularidad a una singularidad simple mediante transformaciones que reciben el nombre de *explosiones*. Pasamos a describir, por tanto, estas transformaciones, una herramienta esencial para el estudio de singularidades.

3.2. Explosiones, transformados totales y transformados estrictos. La *explosión polar* de $\mathbb{R}^2$ en el origen es el morfismo que consiste en tomar "coordenads polares":

$$\tau : [0, \infty) \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2, \ \tau(r, v) = rv,$$

donde hemos considerado la circunferencia $\mathbb{S}^1$ dentro de $\mathbb{R}^2$. Este morfismo substituye el origen por la circunferencia $\{0\} \times \mathbb{S}^1$, que puede considerarse como representando el conjunto de semirrectas del plano que pasan por el origen y restringe a un isomorfismo entre el complementario de dicha circunferencia y $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

El problema de este morfismo es que la variedad resultante (el cilindro) es una variedad con borde, siendo la variedad de partida, el plano, una variedad sin borde. Para solventar este problema puede considerarse el doble recubrimiento de este morfismo:

$$\tilde{\tau} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2, \ \tilde{\tau}(r, v) = rv.$$

Ahora, si bien la variedad que resulta es una variedad analítica sin borde, el morfismo de explosión $\tilde{\tau}$ no es inyectivo sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^1$, sino 2 a 1.

La mejor forma de proceder es considerar la variedad M obtenida a partir de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ por paso al cociente que identifica los puntos (r, v) con $(-r, -v)$ (esto es, los puntos que tienen la misma imagen via $\tilde{\tau}$. Se obtiene así el *morfismo de explosión (proyectivo)* por paso al cociente

$$\pi : M \to \mathbb{R}^2.$$

Se comprueba que M es una variedad analítica real (es de hecho la banda de Moebius no acotada, por tanto no orientable), π es una aplicación analítica *propia* (la contraimagen de un compacto es compacta), que restringe a un isomorfismo entre $M \setminus \pi^{-1}(0)$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y que $D = \pi^{-1}(0)$, denominado *divisor excepcional de la explosión* es isomorfo a la recta proyectiva real $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.

Si Γ es una curva analítica real en el origen, diremos que $\pi^{-1}(\Gamma)$ es el *transformado total de* Γ *por* π. Este conjunto consiste en la unión de dos curvas analíticas, una de ellas es el divisor D y la otra, Γ', llamada *transformada estricta de* Γ, igual a la adherencia topológica de $\pi^{-1}(\Gamma \setminus \{0\})$. La transformada estricta Γ' corta al divisor D en un único punto, igual al punto de la recta proyectiva real correspondiente a la recta tangente de Γ en el origen.

Siempre pensaremos en la variedad M como recubierta por dos cartas afines $(U', (x', y'))$ y $(U'', (x'', y''))$ en las que el morfismo de exlosión se escribe (para las coordenadas cartesianas (x, y) de $\mathbb{R}^2$) como

$$\pi(x', y') = (x', x'y'), \ \ \pi(x'', y'') = (x''y'', y'').$$

La imagen $\pi(U')$ cubre $\mathbb{R}^2$ menos la recta vertical $x = 0$, privada del origen y la imagen $\pi(U'')$ cubre $\mathbb{R}^2$ menos la recta horizontal $y = 0$ privada del origen. El divisor excepcional D está dado en U' por $x' = 0$ y en U'' está dado por $y'' = 0$.

Usando esta escritura podemos ver sin dificultad lo siguiente. Dado un campo de vectores analítico

$$X = A(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

definido en un entorno del origen de $\mathbb{R}^2$ como punto singular, entonces existe un (único) campo de vectores $\widetilde{X}$ en M, analítico, tal que $\pi_*\widetilde{X} = X$. Dicho campo se denomina *transformado total* de X por la explosión π. La escritura de dicho campo en las cartas correspondientes es

$$\begin{array}{l} \widetilde{X} \mid_{U'} = A(x', x'y')\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{x'}(B(x', x'y') - y'A(x', x'y')\frac{\partial}{\partial y'} \\ \widetilde{X} \mid_{U'} = \frac{1}{y''}(A(x''y'', y'') - x''B(x''y'', y'')\frac{\partial}{\partial x''} + B(x''y'', y'')\frac{\partial}{\partial y''} \end{array}$$

Cuando la *multiplicidad* del campo X en el origen (esto es el mínimo de los órdenes de sus componentes A, B) es superior a uno, el transformado total $\widetilde{X}$ se anula a lo largo del divisor excepcional. Esto se traduce en que, cuando escribimos $\widetilde{X} \mid_{U'}$ en la carta (x', y'), sus componentes pueden dividirse por una potencia de x' (y análogamente las componentes de $\widetilde{X} \mid_{U''}$ se dividen por una potencia de y''). Cada uno de estos campos resulatantes al hacer estas divisiones se denomina *transformados estrictos de X (en la carta U' o en la carta U'', respectivamente).*

Si bien los transformados estrictos no coinciden en la intersección $U' \cap U''$, ambos generan la misma foliación en tal intersección, de modo que si $\mathcal{F}_X$ es la foliación generada por el campo X en $\mathbb{R}^2$, podemos hablar de la *foliación $\pi^*\mathcal{F}_X$, transformada estricta de $\mathcal{F}_X$ por π*, foliación en la variedad M; esto es, partición de M por trayectorias que son curvas inmersas o puntos, no necesariamente generada por ningún campo de vectores global en M.

Dado un punto $q \in D$, cualquier campo de vectores analítico en un entorno de D tal que genere la misma foliación que $\pi^*\mathcal{F}_X$ en un entorno de q se llamará *transformado estricto de X por π en el punto q.*

Debido a que π es un isomorfismo fuera del divisor, la foliación transformada estricta es un magnífico objeto para estudiar las trayectorias de X alrededor del origen (salvo el propio origen como punto singular): la imagen inversa por π de una tal trayectoria es la intersección de una hoja de $\pi^*\mathcal{F}_X$ con $M \setminus D$.

Suponiendo que el origen es un punto singular aislado de X (lo cual siempre supondremos), la foliación transformada estricta sólo tiene un número finito de puntos singulares en el divisor D. Dos situaciones son posibles:

- Caso *no-dicrítico*: D es invariante por $\pi^*\mathcal{F}_X$, esto es, una unión de puntos singulares y hojas no singulares de la foliación transformada estricta.
- Caso *dicrítico*: D es transversal a las hojas regulares de $\pi^*\mathcal{F}_X$ en casi todos los puntos (salvo en los puntos singulares y posiblemente en otro conjunto finito de puntos). En este segundo caso, existe una infinidad de separatrices no singulares del campo X con tangentes distintas en el origen.

3.3. Reducción de singularidades de campos planos. La construcción del morfismo de explosión puede hacerse no sólo en el origen de $\mathbb{R}^2$ sino en cualquier punto de una variedad analítica real. Más explícitamente, sea M una variedad analítica real de dimensión dos y sea $p \in M$. Sea (U, φ) un entorno coordenado centrado en p con rango $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2$. Denotemos por $\pi_V : \pi^{-1}(V) \to V$ la restricción de la explosión π del origen de $\mathbb{R}^2$ a $\pi^{-1}(V)$. Consideremos la unión disjunta $M \setminus \{p\} \cup \pi^{-1}(V)$ e identifiquemos en esta unión un punto $a \in U \setminus \{p\}$ con $\pi^{-1}(\varphi(a)) \in \pi^{-1}(V) \setminus D$. El espacio cociente resultante $\widetilde{M}_p$ admite estructura de variedad analítica real de dimensión dos donde $M \setminus \{p\}$ es un abierto y la aplicación

$$\pi_p : \widetilde{M}_p \to M, \ \pi_p(a) = \begin{cases} a, & \text{si } a \in M \setminus \{p\}; \\ \pi(a), & \text{si } a \in \pi^{-1}(V); \end{cases}$$

es analítica y propia e induce un isomorfismo entre $\widetilde{M}_p \setminus D$ y $M \setminus \{p\}$. Se denomina *explosión de M en el punto p* (llamado también *centro de la explosión*). Esta construcción, si bien depende de la carta local utilizada (U, φ), es en esencia única: si (U', φ') es otra carta local centrada en p y $\pi'_p : \widetilde{M}'_p \to M$ es la explosión construida como antes usando la carta (U', φ') entonces se puede comprobar que existe un isomorfismo analítico $\theta : \widetilde{M}'_p \to \widetilde{M}_p$ que verifica

$$\pi_p \circ \theta = \pi'_p.$$

Así pues, el proceso de explosión de puntos puede repetirse: tras la primera explosión $\pi_1 : M_1 \to M_0 = \mathbb{R}^2$ en el origen, podemos elegir un punto p_1 en M_1 y realizar la explosión $\pi_2 : M_2 \to M_1$ de M_1 en el punto p_1 y así sucesivamente. Podremos así fabricar *sucesiones finitas de explosiones de puntos*

$$\Pi : M = M_r \xrightarrow{\pi_r} M_{r-1} \xrightarrow{\pi_{r-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} M_1 \xrightarrow{\pi_1} M_0.$$

Para una tal sucesión, el conjunto $D = \Pi^{-1}(0) \subset M$ se llama *divisor total de* Π. Es una unión $D = D_1 \cup \cdots \cup D_r$ de curvas inmersas en M donde D_j es el transformado estricto correspondiente del divisor excepcional de la explosión π_j. Estas curvas son difeomorfas a rectas proyectivas y 2 a 2 transversales. El morfismo Π es analítico e induce un isomorfismo de $M \setminus D$ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Si el centro p_1 de explosión π_2 es un punto singular de la foliación transformada estricta $\pi_1^* \mathcal{F}_X$, entonces, tomando un generador local de dicha foliación en el punto p_1, los argumentos del párrafo anterior se repiten y tenemos la existencia de una foliación $\pi_2^* \pi_1^* \mathcal{F}_X$ en M_2, *foliación transformada estricta* de X por la composición $\pi_1 \circ \pi_2$. Repitiendo este proceso, existirá una foliación transformada estricta $\Pi^* \mathcal{F}_X$ en M_r, con sólo un número finito de puntos singulares en el divisor total D y tal que toda trayectoria de X fuera del origen coincide con la restricción de una hoja de $\Pi^* \mathcal{F}_X$ a $M \setminus D$.

Ahora podemos enunciar uno de los resultados más importantes en teoría local de campos de vectores planos analíticos.

Teorema 16 (Teorema de Reducción de Singularidades de Campos Planos)**.** *Sea X un campo de vectores analíticos definido en un entorno U del origen de $\mathbb{R}^2$, siendo el origen su único punto singular. Entonces existe una sucesión de explosiones de puntos $\Pi : M \to U$, que son singulares para las sucesivas foliaciones transformadas estrictas, y tal que la foliación transformada estricta final $\Pi^*\mathcal{F}_X$ verifica:*

1. *Cada punto singular de $\Pi^*\mathcal{F}_X$ es una singularidad simple (singularidad simple para un generador local de la foliación en dicho punto).*
2. *Cada componente D_j del divisor total, o bien es invariante por $\Pi^*\mathcal{F}_X$ o bien no contiene puntos singulares de $\Pi^*\mathcal{F}_X$ y es transversal a las hojas en todos sus puntos (se denominan* componentes dicríticas*).*

Una de las primeras versiones del teorema de reducción de singularidades se debe a Seidenberg [24]. Aunque hemos presentado aquí la versión real, el resultado puede establecerse para campos de vectores holomorfos (los coeficientes son series complejas convergentes en dos variables). Si se quiere ver una demostración detallada del Teorema 16 tal y como lo hemos enunciado puede verse en el libro en preparación de Cano, Cerveau, Désertie [4]. La demostración contenida en este libro, aparte del resultado, es muy interesante en sí misma pues contiene muchos conceptos nuevos e información relevante sobre singularidades de campos planos. Una demostración más concisa, que cubre únicamente el caso en que no aparecen componentes dicríticas, puede también verse en el curso de Camacho y Sad [6].

3.4. Descripción local de campos planos en sectores. Haciendo uso del teorema de reducción de singularidades, podemos describir la geometría local de las trayectorias de buena parte de singularidades de campos de vectores analíticos planos.

Sea X un campo de vectores analítico plano y sea p una singularidad. Una trayectoria no singular $\mid \gamma \mid$ de X que se acumula a la singularidad se dirá que es una *órbita característica en p* si posee una tangente bien definida, esto es, si $\pi_p^{-1}(\mid \gamma \mid)$ se acumula a un único punto del divisor excepcional, donde π_p es la explosión con centro en el punto p.

El campo de vectores X se dice que tiene una singularidad de tipo *centro-foco* en p si no existen órbitas características en p. En este caso tenemos un resultado que asegura que, o bien las trayectorias que se acumulen en p no tienen tangente y giran en espiral alrededor de p (se dirá que la singularidad es un *foco*), o bien un entorno del punto p está formado por órbitas cerradas (se dirá que la singularidad es un *centro*).[2] La determinación de si un campo de tipo centro-foco es efectivamente un centro o un foco es un problema de una naturaleza transcendente que no puede

[2]Este resultado, aparentemente inocente, no es nada trivial. Es un avatar del denominado *problema de Dulac* sobre la finitud de ciclos aislados en un entorno de una singularidad, problema resuelto independientemente por Ilyashenko y Écalle haciendo uso de teorías y técnicas complicadas e intrincadas.

determinarse mirando la expresión del campo de vectores, esto es, los coeficientes como series de potencias (véase el libro de Arnold [2]). Debido a que un centro no es topológicamente equivalente a un foco, debemos descartar las singularidades de tipo centro-foco si queremos dar una clasificación de la dinámica local módulo equivalencia en términos razonables.

Usando la reducción de singularidades, podemos determinar si un campo X tiene una singularidad de tipo centro-foco en un punto p: equivale a decir que para una reducción de singularidades de X en p, no aparecen componentes dicríticas y que todas las singularidades de la foliación transformada estricta se encuentran en las intersecciones de las componentes del divisor y los sectores locales en dichos puntos son todos de tipo silla.

Ahora, para las singularidades que no son centro-foco, tenemos una descripción por sectores, al estilo de las singularidades simples:

Teorema 17 (Descripción local en sectores de campos planos)**.** *Supongamos que X tiene una singularidad en p que no es de tipo centro-foco. Entonces existe un número finito de órbitas características de X en p que determinan "sectores curvilíneos" que rellenan un entorno V de p, cada uno de los cuales puede ser, o bien de tipo hiperbólico, o bien de tipo parabólico, o bien de tipo* elíptico*: cada curva integral γ de $X\mid_V$ en tal sector está definida en todo $\mathbb{R}$ y $\lim_{t\to\pm\infty}\gamma(t)=p$.*

La demostración de este resultado se basa en los siguientes argumentos. Después de una reducción de singularidades Π, todas las singularidades de la foliación transformada estricta $\Pi^*\mathcal{F}_X$ son simples. Podemos por tanto describir sectores locales alrededor de dichas singularidades de tipo parabólico o hiperbólico. Cada uno de estos sectores locales pueden propagarse a lo largo de los arcos de curva del divisor total $D=\Pi^{-1}(p)$ en los que no hay singularidades de la foliación siguiendo las hojas, de manera que al llegar a otra singularidad, el sector propagado es un nuevo sector local (o una parte de él) en la nueva singularidad. Esto da lugar a zonas alrededor D donde el comportamiento asintótico de las trayectorias es conocido. La imagen de esta zona por Π es uno de los sectores buscados en el enunciado del Teorema 17. Si partimos de un sector hiperbólico local y llegamos a otro sector hiperbólico local, dicha imagen nos da lugar a un sector hiperbólico en la singularidad de partida p; si partimos de un sector parabólico local y llegamos a un sector hiperbólico local, dicha imagen es un sector parabólico en p; finalmente, si partimos de y llegamos a un sector parabólico local, entonces dicha imagen es un sector elíptico en p. Si se quiere ver más detalles, se recomienda consultar el libro de Lefschetz [17] y el artículo de Dumortier [10].

Una última observación sobre la descripción local en sectores antes de terminar. Nótese que el número y carácter de los sectores locales en una singularidad no está bien determinado. Por ejemplo, si tenemos dos sectores parabólicos contiguos, la unión de ambos determina un único sector parabólico. También, los sectores elípticos no están bien definidos a menos que especifiquemos el entorno V en el que consideramos definido el campo: si consideramos un entorno V' más pequeño, algunas de las curvas integrales contenidas en un sector elíptico dentro de V se salen del entorno V' en tiempo finito y no pueden formar parte de un sector elíptico dentro de V', sino de un sector parabólico.

Existe, no obstante, una relación entre el número y carácter de los sectores necesarios para una descripción local en un entorno de la singularidad y un invariante topológico asociado a la singularidad que se llama el *índice*. No entramos en este tema, pero invitamos al lector que consulte el libro de Perko [22] para tener una primera aproximación a él.

Referencias

[1] Andronov, A.A. et al. *Qualitative Theory of Second -Order Dynamical Systems.* John Wiley and Sons, New York, 1973.

[2] Arnold, V. *Équations différentielles ordinaires.* Éditions Mir, Moscow, tercera edición, 1981.

[3] Camacho, C.; Lins Neto, A. *Geometric theory of foliations.* Traducido del portugués. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[4] Cano, F.; Cerveau, D.; Déserti, J. *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers.* Libro en preparación.

[5] Cano, F.; Roche, C.; Spivakovsky, M. *Reduction of Singularities of Three Dimensional Vector Fields.* Preprint 2009, 40 pgs..

[6] Camacho, C.; Sad, P. *Pontos singulares de equacões diferenciais analiticas.* 16 Colóquio brasileiro de matemática (1987).

[7] Carrillo, S.; Sanz, F. *Briot-Bouquet's Theorem in high dimension.* In preparation.

[8] Chow, S.-N.; Hale, J. K. *Methods of Bifurcation Theory.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 251, Springer-Verlag, 1982.

[9] Coddington, E.A.; Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations.* MacGraw Hill, New York, 1955.

[10] Dumortier, F. *Singularities of vector fields on the plane.* Jour. Diff. Eq., 23 (1977), 53-106.

[11] Hadamard, J. *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles.* Bull. Soc. Math. France, 29 (1901), 224-228.

[12] Hartman, P. *Ordinary Differential Equations.* John Wiley and Sons, New York, 1964.

[13] Hirsch, M.; Pugh, C.; Shub, M. *Invariant Manifolds.* LNM, vol. 583, Springer-Verlag, 1977.

[14] Hirsh, M.W.; Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.* Academic Press, New York, 1974.

[15] Jonsson, M.; Varolin, D. *Stable manifolds of holomorphic diffeomorphisms.* Invent. Math., 149 (2002), 409-430.

[16] Kelley, A. *The sable, center-stable, center, center-unstable and unstable manifolds.* J. Diff. Eq., 3 (1967), 546-570.

[17] Lefschetz, S. *Differential Equations: Geometric Theory.* Interscience, New York, 1962.

[18] Moussu, R. *Sur la dynamique des gradients. Existence de variétés invariantes.* Math. Ann., 307, No. 3 (1997) 445-460..

[19] Palis, J.; de Melo, W. *Geometric Theory of Dynamical Systems.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[20] Palis, J., Takens, F. *Topological equivalence of normally hyperbolic dynamical systems.* Topology, 16 (1977), 335-345.

[21] Panazzolo, D. *Resolution of singularities of real-analytic vector fields in dimension three.* Acta Math. 197 (2006), no. 2, 167289.

[22] Perko, L. *Differential equations and dynamical systems. Third edition.* Texts in Applied Mathematics, 7. Springer-Verlag, New York, 2001.

[23] Sanz, F. *Course on Non-oscillatory Trajectories.* Lecture Notes on O-Minimal Structures and Real Analytic Geometry (ed. C. Miller et al.), Fields Institute Communications, 62 (2012), 111–178.

[24] Seidenberg, A. *Reduction of the singularities of the differential equation* $Ady = Bdx$. Am. J. of Math., (1968), 248-269.

[25] Shub, M. *Stabilité globale des systèmes dynamiques.* Astérisque, 56 (1978).

[26] van Strien, S. J. *Center manifolds are not* C^∞. Math. Z. 166 (1979), no. 2, 143145.

[27] Warner, F.W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Corrected reprint of the 1971 edition. Graduate Texts in Mathematics, 94. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

V ESCUELA DOCTORAL ECSING

Curso: "Dinámica local de campos de vectores reales"
Fernando Sanz Sánchez
24-27 abril de 2012

Problemas y ejercicios sobre la parte básica del curso

Campos de vectores en variedades

Ejercicio 1.– Sea n un número natural mayor o igual a cero. Dar ejemplos de campos de vectores analíticos en $\mathbb{S}^1$ con exactamente n puntos singulares.

Ejercicio 2.– Contruir ejemplos explícitos de campos de vectores analíticos sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ que posean exactamente:

- Un punto singular.
- Dos puntos singulares y una órbita periódica.

Ejercicio 3.– Sea n un número natural mayor o igual a cero. Dar ejemplos de campos de vectores C^∞ en $\mathbb{S}^2$ con exactamente n puntos singulares. Hacerlo también en el contexto analítico.

Ejercicio 4.– Probar que todo campo diferenciable en una variedad compacta es completo.

Ejercicio 5.– Contruir ejemplos explícitos de campos de vectores analíticos sobre el plano proyectivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Más generalmente, contruir ejemplos explícitos de campos de vectores C^∞ sobre el espacio proyectivo n-dimensional $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 6.– Sea X un campo de vectores C^∞ en una variedad M y sea $p \in M$. Sea $\gamma_p : I_p \to M$ la curva integral maximal de X por el punto p. Supongamos que γ_p no es inyectiva. Probar que entonces $I_p = \mathbb{R}$ y que $\gamma_p(\mathbb{R}) \subset M$ es una subvariedad regular de M difeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

Ejercicio 7.– Un campo X en $\mathbb{R}^2$ se llama *polinómico* si se escribe respecto de la base estándar de las parciales como

$$X = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

donde P, Q son polinomios. El máximo de los grados de P ó Q se denomina *grado* del campo de vectores. Se pide:

(1) Probar un campo de vectores polinómico de grado uno se extiende a un campo de vectores diferenciable en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

(2) Dar ejemplos de campos de vectores polinómicos de grado mayor que uno que no puedan extenderse al plano proyectivo.
(3) Sea X un campo de vectores polinómico como antes y supongamos que los polinomios P y Q no tienen factores comunes. Probar que existen un conjunto finito de puntos Ω en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y una foliación $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ de dimensión uno (singular con puntos singulares en Ω) tal que cada trayectoria maximal de X en $\mathbb{R}^2$ está contenida en una hoja de $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 8.– Sabiendo que no existen campos de vectores sin singularidades en la esfera $\mathbb{S}^2$, ¿puede existir un campo de vectores en el plano proyectivo real que no se anule en ningún punto?

Ejercicio 9.– Consideremos el toro como la variedad producto $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Sea α un número real positivo y consideremos la aplicación $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ definida por $\varphi_\alpha(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$. Se pide:
(1) Probar que φ_α es una inmersión inyectiva.
(2) Probar que si α es un número racional, la imagen de φ_α es una subvariedad regular de $\mathbb{T}$ difeomorfa a $\mathbb{S}^1$.
(3) Probar que si α no es racional entonces la imagen de φ_α es un subconjunto denso de $\mathbb{T}$.
(4) Probar que existe un campo de vectires diferenciable X_α en $\mathbb{T}$ tal que φ_α es una solución maximal de X_α.

Flujos y equivalencias

Ejercicio 10.– Para cada número entero positivo k, considérese el campo de vectores

$$X_k = x_1^k \frac{\partial}{\partial x_1}$$

en $\mathbb{R}$. Se pide:
(1) Explicitar el flujo maximal de X_k.
(2) Determinar para qué valores de k, X_k es completo.
(3) Determinar las clases de equivalencia y conjugación C^r de tales campos (esto es, cuándo dos de los campos X_k, X_l son C^r-equivalentes y cuándo son C^r-conjugados). ¿Depende esta clasificación de r?

Ejercicio 11.– Explicitar el flujo maximal del campo

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + (y - x)\frac{\partial}{\partial y}$$

en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 12.– Explicitar el flujo maximal del campo X en $\mathbb{S}^2$ obtenido por proyección ortogonal del campo $\frac{\partial}{\partial r_3}$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 13.– Dar ejemplos de campos de vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ con singularidad en el origen y que no sean localmente topológicamente equivalentes.

Ejercicio 14.– Dar ejemplos de campos de vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ con singularidad en el origen que sean localmente topológicamente equivalentes pero que no sean localmente C^1-equivalentes.

Campos lineales

Ejercicio 15.– Sea $X = X_A$ un campo lineal en $\mathbb{R}^n$ de matriz A. Sea L un subespacio lineal de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que L es invariante para A como aplicación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si y sólo si L es invariante para el campo X_A.

Ejercicio 16.– Hallar el flujo, dibujar el mapa de fases y describir los subespacios lineales invarantes de los campos lineales con la siguiente matriz A:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 17.– Una matriz A se llama *semisimple* si en su descomposición de Jordan real no hay unos fuera de la diagonal; esto es, si existe P inversible con $P^{-1}AP = D$, siendo D diagonal por bloques con bloques 1-dimensionales o loques 2-dimensionales de tipo complejo $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Sea X_A el campo lineal en $\mathbb{R}^n$ con matriz A. Se pide:

(1) Probar que si A es emisimple y no hay autovalores de A con parte real positiva (resp. negativa), entonces toda semi-trayectoria positiva (resp. negativa) de X_A permanece acotada.
(2) Mostrar ejemplos en los que se vea la necesidad de la hipótesis A semisimple.

Ejercicio 18.– Sea X un campo lineal en $\mathbb{R}^n$ de matriz A y sea $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ la descomposición en subespacios estable, central e inestable, respectivamente. Se pide probar:

(1) Si $v \in E^c \setminus \{0\}$ y A es semisimple, entonces la trayectoria γ_v de X que pasa por v permanece acotada y alejada del origen: $m \leq \|\gamma_v(t)\| \leq M$ para $m, M > 0$.
(2) Si A no es semisimple y $E^c \neq 0$, existe $v \in E^c \setminus \{0\}$ tal que

Variedades invariantes y teorema de Hartman-Grobman

Ejercicio 19.– Calcular la variedad estable local en el origen de los siguientes campos:

(1) $X = -x\frac{\partial}{\partial x} + (y + x^2)\frac{\partial}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$.
(2) $X = -x\frac{\partial}{\partial x} + (-y + x^2)\frac{\partial}{\partial y} + (z + x^2)\frac{\partial}{\partial z}$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 20.– Calcular varias aproximaciones sucesivas, según la demostración bosquejada en el texto del Teorema de Hartman-Grobman, para el homeomorfismo que conjuga el campo

$$X = -x\frac{\partial}{\partial x} + (y + x^2)\frac{\partial}{\partial y}$$

a su parte lineal en el origen. Obtener explícitamente una tal conjugación topológica mediante el cálculo del flujo de X y comparar con las aproximaciones obtenidas.

Ejercicio 21.– Considérese el campo de vectores en el plano

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Probar que existe una infinidad de variedades centrales en el origen y que todas ellas son de clase C^∞.

Ejercicio 22.– Calcular algunos términos de las variedades invariantes formales en el origen del campo de vectores

$$X = (-x + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + xz\frac{\partial}{\partial y} + (z - xy)\frac{\partial}{\partial z}$$

Campos planos

Ejercicio 23.– Mostrar que una singularidad simple en el plano tiene exactamente dos curvas formales invariantes, que estas son no singulares y transversales entre sí.

Ejercicio 24.– Explicitar una lista de singularidades simples en el plano de modo que cualquier otra singularidad simple sea localmente topológicamente equivalente a una de las de la lista. Determinar el carácter de los sectores hiperbólicos y/o parabólicos que salen en cada caso.

Ejercicio 25.– Sea X un campo plano analítico con singularidad simple en $0 \in \mathbb{R}^2$. Mostrar que 0 es una singularidad no dicrítica y que la foliación transformada estricta de $\mathcal{F}_X$ por la explosión del origen tiene dos singularidades en el divisor excepcional, ambas simples.

Ejercicio 26.– Probar el teorema de reducción de singularidades para el caso más sencillo en que partimos de un campo X que tiene una parte lineal en el origen no nilpotente.

Ejercicio 27.– Mostrar que el campo de vectores plano

$$X = (y - x^3)(y - 2x^3)T - (x^2 + y^2)^2 R$$

donde $T = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, $R = -x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$, es de tipo centro-foco. [El interés de este campo es que sus órbitas, aún girando en espiral alrededor del origen, el ángulo con el que giran presenta "retroceso" cuando pasa entre las dos cúbicas factores de T].

Ejercicio 28.– Describir una reducción de singularidades del campo plano

$$X = (y^2 + xy + x^3)\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + 2x^2y - x^4)\frac{\partial}{\partial y}$$

y dar una descripción local del mismo en términos de sectores parabólicos, hiperbólicos y/o elípticos.

Ejercicio 29.– Precisar y demostrar el resultado que dice que dos campos planos con singularidad aislada en el origen que no son de tipo centro-foco son localmente topológicamente equivalentes si y sólo si tienen la "misma" configuración de sectores parabólicos, hiperbólicos y elípticos.