



Universidad de Valladolid



PROGRAMA DE DOCTORADO EN FÍSICA

TESIS DOCTORAL:

Transformadas supersimétricas de sistemas cuánticos unidimensionales

Presentada por:

[Carlos San Millán Carpintero](#)

para optar al grado de Doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:

[Manuel Gadella Urquiza](#)

*”No hay nada noble en ser superior a tu prójimo,
la verdadera nobleza es ser superior a tu yo anterior.”*

Ernest Hemingway

Agradecimientos

Lo primero de todo gracias a mi director Manuel Gadella, así como a mi tutor, Luis Miguel Nieto, por haberme dado la oportunidad de realizar los estudios de doctorado con ellos en mi alma mater. Así como también agradecer a Javier Negro, quien dirigió mi trabajo de fin de grado y con el que he tenido el placer de volver a trabajar estos años, y a Şengul Kuru, por sus breves pero agradables estadias por el departamento.

Durante estos años, no solo he trabajado investigando, sino que también he tenido la oportunidad de impartir docencia, en la que he colaborado y aprendido de compañeros como David Mateos, Carlos Baladrón, Fernando Buitrago, Diego Sáez y Manuel Donaire, a los cuales agradezco sus enseñanzas.

Agradecer a los doctorandos, por haber sido grandes compañeros durante esta etapa que es el tercer ciclo, por eso gracias a Merillas, a Guillermo, a los Julios, a María, a Samane y a los chicos de la B101.

Han sido cuatro largos años, en los que he compartido grandes momentos con los mejores compañeros de trabajo que se podría tener, pero no podría haber llegado hasta aquí sin todos los compañeros que han hecho el día a día más llevadero, no solo durante el doctorado, sino desde el grado, por eso gracias a Marcos, Adrián, Hugo, Sandra, Marina, Pablo e Iván.

Por último, a mi querido pueblo, y a mi querida familia, de quienes soy consecuencia y debo la oportunidad de estar hoy aquí.

Muchas gracias a todos.

Esta tesis doctoral ha sido financiada por el Proyecto Q-CAYLE, Plan Complementario en Comunicación Cuántica (PRTRC17.I1) dentro del Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia - Next Generation UE, cofinanciado por el Ministerio de Ciencia e Innovación y la Junta de Castilla y León.

Para Joel.

Publicaciones

La realización de esta Tesis Doctoral ha desembocado en las siguientes publicaciones en revistas indexadas en el Journal Citation Reports (JCR):

- [1] M. Gadella, J. Hernández-Muñoz, L.M. Nieto y C. San Millán, *Supersymmetric Partners of the One-Dimensional Infinite Square Well Hamiltonian*. *Symmetry* (2021), 13, 350.
- [2] M. Gadella y C. San Millán, *Supersymmetric Partners of the One-Dimensional Infinite Square Well Hamiltonian: Special Cases*. *Symmetry* (2022), 14, 1314.
- [3] C. San Millán, M. Gadella, Ş. Kuru y J. Negro, *SUSY partners and S-matrix poles of the one-dimensional Rosen–Morse II potential*. *Eur. Phys. J. Plus* (2023) 138: 857

Índice general

Publicaciones	ix
Introducción	1
1. Fundamentos teóricos	5
1.1. Transformadas Supersimétricas	5
1.1.1. Introducción a SUSY-QM	6
1.1.2. Supersimetría de mayor orden.	10
1.1.3. SUSY confluyente.	13
1.2. Extensiones Autoadjuntas	15
1.3. Resonancias	19
1.4. Ecuaciones Fuchsianas	21
2. Clasificación de las extensiones autoadjuntas del pozo de potencial	25
2.1. El pozo de potencial infinito como límite del finito.	25
2.2. Cálculo de las extensiones autoadjuntas	27
2.2.1. Extensiones autoadjuntas que preservan la paridad y la invarianza temporal.	32
3. Transformadas supersimétricas de las extensiones autoadjuntas del pozo de potencial.	37
3.1. Caso particular para un valor concreto de los parámetros.	38
3.2. Transformadas supersimétricas hasta orden ℓ del pozo de potencial	39
3.3. Transformadas supersimétricas de las extensiones autoadjuntas $m_2 = m_3 = 0$	41
3.3.1. Estado fundamental de energía nula y degenerado.	41
3.3.2. Estado fundamental de energía negativa y degenerado.	44
3.3.3. Estado fundamental de energía negativa y primer excitado nulo.	45
3.4. Conclusiones	46
4. Transformadas supersimétricas del potencial Rosen-Morse II.	47
4.1. Potencial Rosen-Morse II.	48
4.2. Polinomios de Jacobi y condición de cuadrado integrable para las funciones del Rosen-Morse II.	51
4.2.1. Ceros de las funciones de onda.	54

4.3.	Transformadas SUSY de los estados del potencial Rosen-Morse II.	55
4.3.1.	Transformadas supersimétricas con estados redundantes como función semilla.	56
4.3.2.	Transformadas supersimétricas no ordinarias con estados ligados como función semilla.	56
4.3.3.	Transformadas supersimétricas no ordinarias con estados anti-ligados como función semilla.	57
4.4.	Acción de los operadores de intercambio sobre los niveles del potencial Rosen-Morse II.	58
4.5.	Equivalencia entre poner y quitar niveles en el potencial Rosen-Morse II .	59
4.6.	Conclusiones	62
	Resultados y Conclusiones	63
	Bibliografía	65
	Apéndices y Anexos	76
	A. Artículo 1	79
	B. Artículo 2	81
	C. Artículo 3	83

Introducción

El método de factorización fue aplicado primero por Dirac en partículas de espín 1/2 en un contexto de mecánica cuántica relativista a la hora de resolver la ecuación de Klein-Gordon [4, 5]. Edwin Schrödinger, inspirado en este método, lo aplicó para resolver la ecuación radial del átomo de hidrógeno, obteniendo una forma de resolver la ecuación diferencial sin necesidad de aplicar el método de Frobenius [6]. Seguidamente, abordó el problema del oscilador armónico [7] con este método. La idea principal de Schrödinger trata sobre, al ser el hamiltoniano (en mecánica cuántica no relativista) un operador diferencial de segundo orden, factorizar este en dos operadores diferenciales de primer orden. Esta idea se sustenta en la reducción de orden de una ecuación diferencial de segundo orden al conocer una de sus dos soluciones. Estos operadores no conmutan, y en el caso de intercambiar el orden de estos llevan a un hamiltoniano distinto, pero con un espectro similar al inicial. El caso del oscilador armónico es el preferido para iniciarse en esta materia por su simplicidad. Considérese el hamiltoniano de este sistema, con un término en el potencial que mande el valor de la energía del estado fundamental al origen de energías:

$$H^{(0)} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{4}x^2 + \frac{\omega}{2} = \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}x\omega\right) \left(-\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}x\omega\right) = B^+ \cdot B^-,$$

Donde los operadores B^\pm son conocidos como los operadores de intercambio, se ha requerido que el primer operador B^- aniquile al estado fundamental del oscilador armónico, así, B^+ queda totalmente determinado al exigir que $B^+ B^-$ coincida con $H^{(0)}$. Si alteramos el orden en el que estos aparecen, obtendremos el compañero supersimétrico de $H^{(0)}$:

$$H^{(1)} = B^- \cdot B^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{4}x^2 - \frac{\omega}{2}.$$

Ambos hamiltonianos son idénticos, excepto por un término constante en el potencial que mueve el origen de energía. Además, establece una correspondencia entre los niveles de energía de ambos hamiltonianos, de manera que los operadores de intercambio están estrechamente relacionados con las relaciones de recurrencia y las derivadas de los polinomios de Hermite que describen a las funciones de onda del oscilador armónico. En la publicación [6], Schrödinger aplica este método al problema de Kepler en mecánica cuántica no relativista, mientras que en el ejemplo del oscilador, el alternar el orden de los operadores lleva al mismo potencial con desplazamiento en el origen energético, no ocurre así en este problema, que lleva a un nuevo término en el potencial de $H^{(1)}$ que modifica el momento angular. Seguidamente, en la literatura se vuelve a popularizar por

[8] al dar una clasificación de potenciales que se pueden resolver de manera exacta y por [9] al darle más consistencia al método.

Hasta ahora solo hemos hablado de mecánica cuántica, ya sea relativista y no relativista, pero no de la supersimetría. El término supersimetría no entra en juego hasta los años 70, ya en un contexto de teoría cuántica de campos, con el objetivo de explicar algunas de las fallas del modelo estándar, como el problema de la jerarquía en las escalas energéticas en las que actúa cada fuerza fundamental, las divergencias ultravioletas que no pueden ser resueltas mediante renormalización de la teoría y otros ejemplos [10, 11]. No entraremos en estos detalles de la teoría cuántica de campos, ya que a pesar de ser interesantes y poder llegar a explicar grandes problemas de la física actual, escapan a nuestro campo, la **Mecánica Cuántica Supersimétrica** (SUSY-QM por sus siglas en inglés).

La SUSY-QM se desarrolla a la par que su respectiva en física de partículas, heredando parte de la terminología de esta [12]. Primero es presentada como un modelo de juguete¹ por Witten para explicar el fenómeno de la ruptura espontánea de la supersimetría en teoría de campos [9]. Así, lo que en la teoría cuántica de campos serían las supercargas, que permiten relacionar grados de libertad bosónicos y fermiónicos, con la misma masa, y, por tanto, misma energía, en SUSY-QM están relacionados con los operadores de intercambios B^\pm que nos permiten relacionar los niveles de dos hamiltonianos, que son compañeros supersimétricos, y poseen el mismo espectro (isospectrales).

Hasta ahora el camino seguido en SUSY-QM está basado en el método de factorización, e inspirado en los resultados relacionados con métodos de integral de camino y TCC [9, 12–15, 15–25], junto al desarrollo de la clasificación de los potenciales invariantes de forma por [26]. Así, se consiguen socios supersimétricos con una dependencia espacial equivalente, solo difiriendo entre sí por el traslado de un parámetro, a la par que la ecuación diferencial de segundo orden que gobierna ambos hamiltonianos es la misma. Este tipo de potenciales se caracterizan por construir el socio supersimétrico de $H^{(0)}$ a partir del estado fundamental.

Dentro de mecánica cuántica, existen los estados coherentes, primeramente mencionados por Schrödinger en 1926 [27], y más tarde retomados por [28] en óptica cuántica. Dichos estados son estados de incertidumbre mínima, cuyos valores medios a través de observables les hacen los más parecidos dentro de lo posible a su contraparte clásica. En el contexto del estudio de este tipo de estados, surge una de las líneas de investigación de SUSY-QM en [29–31], donde se derivan nuevos resultados, en los que a diferencia de lo planteado anteriormente, se llega a nuevas familias de soluciones, partiendo de un oscila-

¹Expresión recurrente a la hora de enseñar a los estudiantes modelos sencillos antes de abarcar los más complejos, como puede ser el modelo ϕ^4 en teoría cuántica de campos.

dor armónico. Estos nuevos resultados surgen al aplicar teoría de ecuaciones diferenciales, en los que se puede pasar de una ecuación lineal de segundo orden a una ecuación no lineal de Ricatti [32]. Ahora, a diferencia de los potenciales invariantes de forma, se obtienen nuevos hamiltonianos de espectro conocido, pero con una forma funcional completamente diferente de los sistemas partida, permitiendo obtener nuevas soluciones exactas en forma cerrada a nuevos potenciales.

Hasta aquí solo se han mencionado factorizaciones que involucran operadores de intercambio que son operadores diferenciales de primer orden. Esto cambia en [33], donde se introduce la posibilidad de utilizar operadores de intercambio que son operadores diferenciales de segundo orden, lo que lleva a un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que permite derivar nuevas familias de osciladores de espectro conocido. La posibilidad de realizar transformadas con operadores de intercambio de orden mayor que 1 siempre ha estado ahí, pudiendo entenderse como varias transformadas de primer orden concatenadas entre una serie de hamiltonianos que son supercompañeros en una correspondencia uno a uno, este ejemplo se ve muy bien cuando tratamos potenciales invariantes de forma [34–39].

Estas serían las transformadas supersimétricas de primer orden y orden n , que llamaremos ordinarias, al ser diseñadas con las funciones que cumplen la ecuación de Schrödinger asociadas al hamiltoniano original. Dentro de las aportaciones que permiten llegar a nuevos sistemas que se salen de la invariancia de forma, entra en juego la transformada supersimétrica confluyente. La transformada confluyente surge al plantear el álgebra de operadores, asumiendo un operador de intercambio de segundo orden. [40]:

$$B^+ H^{(0)} = H^{(2)} B^+, \quad B^+ = \frac{d^2}{dx^2} + \eta(x) \frac{d}{dx} + \gamma(x).$$

Donde $\gamma(x)$, $\eta(x)$ son funciones incógnita, al extraer los coeficientes de las derivadas se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales bastante complicado:

$$\begin{cases} V^{(2)} = V^{(0)} + 2\eta'(x), & \gamma(x) = d - V^{(0)}(x) + \eta^2(x)/2 - \eta'(x)/2, \\ \eta(x)\eta''(x) - (\eta'(x))^2/2 + \eta^2(x) (\eta^2(x) - 2\eta'(x) - 2V^{(0)}(x) + 2d) + 2c = 0 \end{cases}$$

La naturaleza de la transformada aquí definida queda determinada asumiendo que estados son destruidos por B^+ , por ejemplo, si destruye dos estados ligados de $H^{(0)}$, esto se reduce a una transformada de segundo orden bastante sencilla, donde las funciones a determinar en el operador de intercambio se reducen a dos ecuaciones de Ricatti [34, 41]. El problema radica en buscar una solución general. La transformada confluyente surge al considerar que B^+ destruye un estado de $H^{(0)}$, lo que permite despejar la forma de $\gamma(x)$, dejando $\eta(x)$ como única función a determinar mediante una ecuación diferencial no lineal. Una solución particular de esta ecuación viene dada por el ansatz en la que se

reducen las dos ecuaciones de Ricatti a una ecuación de Bernoulli, una vez considerado que ambas funciones semilla de la transformación poseen la misma energía de factorización [42]. Al tener en cuenta que tenemos dos estados físicos con la misma energía, la transformada confluyente permite trabajar en sistemas con degeneración, así como en sistemas que están limitados a una región finita del espacio [1–3]. Además, permite generar nuevos potenciales de espectro real conocido, pudiendo incluso generar potenciales complejos aprovechando la constante de integración que surge de su planteamiento [43].

El proceso por el cual se construye la transformada confluyente requiere saber cuál es la primitiva del cuadrado de la función de onda, lo que puede ser tedioso, en [44, 45] se presenta una manera de realizar este cálculo a través de la derivada de la energía como parámetro, dentro de la forma funcional de la función de onda, lo que simplifica los cálculos en determinados casos. Estas transformadas están ligadas con una cadena de Jordan, en las que la segunda autofunción del operador de intercambio no es ya función de $H^{(0)}$, sino de su cuadrado en el caso de doble degeneración, aunque también se puede definir una cadena de Jordan a mayor orden [46, 47]. También es destacable el desarrollo de SUSY mediante wronskianos, lo que puede llegar a simplificar enormemente los cálculos cuando ciertas funciones especiales están involucradas [48, 49].

El **objetivo** de esta Tesis Doctoral, en el campo de la física matemática, es estudiar nuevos sistemas isospectrales derivados de la aplicación de transformadas supersimétricas. Para ello se ha consultado la bibliografía especializada de las últimas décadas, en la que tanto mi director y tutor, han sido artífices en algunos de los avances principales de este campo.

Los **resultados principales** de esta Tesis Doctoral han desembocado en tres publicaciones, que son las presentadas en las primeras páginas de este documento, que también aparecerán en los anexos de este. Aun así, se dispone a lo largo de los siguientes cuatro capítulos los principales resultados de esta investigación, así como otros resultados que no entraron dentro de los artículos por cuestión de formato o por extensión.

La **metodología** es la típica dentro de este campo de la física teórica: antes poder aplicar transformadas supersimétricas para obtener parejas de socios isospectrales, necesitaremos poseer toda la información del sistema original: espectro, soluciones de su ecuación de Schrödinger, así como las propiedades de las funciones especiales que describan a las funciones de onda.

Después realizaremos distintas transformadas supersimétricas para obtener compañeros supersimétricos del hamiltoniano original, obteniendo nuevas propiedades, como potenciales con simetría PT , ruptura de la supersimetría por la elección de distintas funciones semilla, y otros tipos de características.

Capítulo 1

Fundamentos teóricos

En este Capítulo se establece la base teórica aplicada en las publicaciones [1–3], que más adelante son adaptados en los Capítulos 2, 3 y 4. Inicialmente, abordaremos las transformadas supersimétricas en mecánica cuántica no relativista, eje central de esta Tesis Doctoral. A continuación se introducirán las extensiones autoadjuntas de operadores en espacios de Hilbert, para el tratamiento en los Capítulos 2 y 3 de las extensiones del hamiltoniano libre restringido a un intervalo de la recta real. Luego, hablaremos de la matriz S y su utilidad en el cálculo de los niveles energéticos para un potencial no confinante, el cual trataremos en el Capítulo 4. Finalmente, se presentan unas breves nociones sobre ecuaciones fuchsianas, las cuales nos permitirán clasificar los nuevos sistemas cuánticos unidimensionales producto de las transformadas SUSY.

1.1. Transformadas Supersimétricas

En esta Tesis, se ha estudiado la Mecánica Cuántica Supersimétrica (SUSY-QM) a través de varias fuentes bibliográficas. Inicialmente, se ha seguido [14] para una introducción a la materia, adoptando una notación inspirada en la Tesis [50]. Adicionalmente, se ha revisado las aportaciones de los últimos 30 años [1, 2, 14, 38, 40, 41, 48, 51–58], destacando los aportes de la SUSY-QM confluyente y de alto orden.

La 'supersimetría' surge en la década de los setenta en el ámbito de la física de partículas [59], dentro de las teorías de gran unificación (GUT). El objetivo es explicar por qué existe una discrepancia entre las constantes de acople del lagrangiano del modelo estándar, y las teorías efectivas desarrolladas a un nivel fenomenológico. Una manera de solventar este problema es añadiendo nuevos términos al lagrangiano, con nuevas constantes de acople en sus términos, esto permitiría solventar ciertas divergencias y otros problemas de escala energética.

En el caso de supersimetría, a cada uno de los fermiones (campos de espín semientero) y a los bosones (mediadores de las fuerzas fundamentales entre los fermiones, de espín entero), se les asigna un supercompañero, que será un nuevo tipo de partícula, a cada fermión se le asigna un bosón nuevo. La relación entre una partícula y su superpartícula

viene dada por una supercarga, que será la generadora del álgebra de la supersimetría [60].

Pero este no es el objeto de estudio de esta tesis doctoral, en la cual aplicaremos transformadas supersimétricas en el ámbito de la mecánica cuántica (no relativista), no en la teoría cuántica de campos. El objetivo de la supersimetría en mecánica cuántica no relativista es construir hamiltonianos con espectro similar a uno dado. Se dice que el hamiltoniano de partida y el hamiltoniano obtenido por la transformada son compañeros supersimétricos. Esta transformada aplicada de manera repetida lleva a construir series infinitas de hamiltonianos, en las que cada miembro de la serie es similar al anterior y al siguiente. Basado en el método de factorización introducido por Schrödinger [61], dado un sistema cuántico, compuesto por su espectro, autofunciones y hamiltoniano, podemos llegar a nuevos sistemas cuánticos con el mismo espectro, pero con autofunciones y potencial completamente distinto al original.

Ambas teorías supersimétricas tiene su base en la transformada de Darboux [62–66]. En nuestro caso será aplicada a problemas de sistemas integrables para la generación de nuevos potenciales, en los que dado un problema de Sturm-Liouville del tipo:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x).$$

Dónde se podrán ordenar los valores propios de manera creciente $E_n < E_{n+1}$, entonces se definirá una transformación del potencial y función de onda, generando un nuevo sistema con el mismo espectro, pero con un nivel menos, a continuación se presenta el método.

1.1.1. Introducción a SUSY-QM

Dado un hamiltoniano unidimensional $H^{(0)}$, con potencial $V^{(0)}(x)$, autofunciones $\{\phi_i^{(0)}(x)\}$ y autovalores $\{E_i^{(0)}\}$, siendo $\phi_0^{(0)}$ el estado fundamental del sistema con energía $E_0^{(0)}$, la que no tiene por qué ser cero. Se plantea un hamiltoniano $H^{(1)}$ con las mismas autofunciones que $H^{(0)}$, pero con espectro de energías desplazado, cuyo estado fundamental sea de energía nula.

$$H^{(1)}\psi^{(1)}(x) = E^{(1)}\psi^{(1)}(x), \quad V^{(1)}(x) = V^{(0)}(x) - E_0^{(0)}, \quad E_n^{(1)} = E_n^{(0)} - E_0^{(0)}$$

Se busca un hamiltoniano $H^{(2)}$, con potencial $V^{(2)}$, y dos operadores diferenciales de primer orden A^\dagger y A que cumplan la siguiente álgebra con $H^{(1)}$ [34]:

$$A H^{(1)} = H^{(2)} A, \quad H^{(1)} A^\dagger = A^\dagger H^{(2)} \quad (1.1)$$

Los operadores A y A^\dagger son operadores diferenciales de primer orden dados por:

$$A = \frac{d}{dx} + W(x), \quad A^\dagger = -\frac{d}{dx} + W(x).$$

$W(x)$ es conocido como ‘superpotencial’ [14]. Resolviendo el álgebra de operadores, tomando los coeficientes de las derivadas iguales cero, se obtiene las siguientes expresiones para los potenciales:

$$V^{(1)}(x) = W^2(x) - W'(x), \quad V^{(2)}(x) = W^2(x) + W'(x), \quad (1.2)$$

$$V^{(2)}(x) - V^{(1)}(x) = 2W'(x). \quad (1.3)$$

Resolver la primera de las ecuaciones de (1.2) es equivalente a resolver la ecuación de Schrödinger asociada a $H^{(1)}$, ya que esta es la ecuación de Ricatti asociada a esta ecuación de segundo orden [32]. Sean $\{\phi_j^{(1)}\}$ las autofunciones de $H^{(1)}$, con espectro $\{E_j^{(1)}\}$, el espectro de $H^{(2)}$ se deduce a partir del álgebra de operadores:

$$A \left(H^{(1)} \left(\phi_j^{(1)} \right) \right) = E_j^{(1)} A \left(\phi_j^{(1)} \right) = H^{(2)} \left(A \left(\phi_j^{(1)} \right) \right).$$

Sean $\{\phi_j^{(2)}\}$ las autofunciones de $H^{(2)}$, con espectro $\{E_j^{(2)}\}$, podemos ver como es el espectro de $H^{(1)}$:

$$A^\dagger \left(H^{(2)} \left(\phi_j^{(2)} \right) \right) = E_j^{(2)} A^\dagger \left(\phi_j^{(2)} \right) = H^{(1)} \left(A^\dagger \left(\phi_j^{(2)} \right) \right).$$

Por lo que ambos hamiltonianos son isospectrales ($E_j^{(1)} = E_j^{(2)}$), y sus autofunciones se ven relacionadas por los operadores de intercambio A y A^\dagger , que cumplen una relación de conmutación similar a la del oscilador armónico cuando este es descompuesto en operadores escalera [67–72]. La relación entre autofunciones de ambos hamiltonianos, y como dependen estos de los operadores:

$$H^{(1)} = A^\dagger A, \quad H^{(2)} = AA^\dagger.$$

$$A\phi_j^{(1)} = \sqrt{E_j^{(1)}}\phi_j^{(2)}, \quad A^\dagger\phi_j^{(2)} = \sqrt{E_j^{(1)}}\phi_j^{(1)}.$$

Por lo que caracterizado uno de los dos hamiltonianos, ya tenemos el otro, siempre y cuando se sepa como es $W(x)$. Si el operador A aniquila el estado fundamental de $H^{(1)}$:

$$A\phi_0^{(1)} = 0 \implies W(x) = -\frac{d}{dx} \log \phi_0^{(1)}(x)$$

Así, el superpotencial queda determinado por la derivada logarítmica del estado fundamental del hamiltoniano $H^{(1)}$. Esto implica que el hamiltoniano $H^{(2)}$ no tendrá nivel para $j = 0$, aunque compartan el espectro, el segundo compañero pierde un nivel respecto a su pareja.

También podemos construir el superpotencial a partir del fundamental de $H^{(2)}$: $\phi_0^{(2)}$:

$$A^\dagger \phi_0^{(2)} = 0 \implies W(x) = \frac{d}{dx} \log \phi_0^{(2)}(x)$$

El estado fundamental de $H^{(1)}$ estaría desconectado del estado fundamental de $H^{(2)}$, teniendo este un nivel más. Se dice que SUSY es exacta cuando un hamiltoniano tiene un nivel menos que su pareja [73].

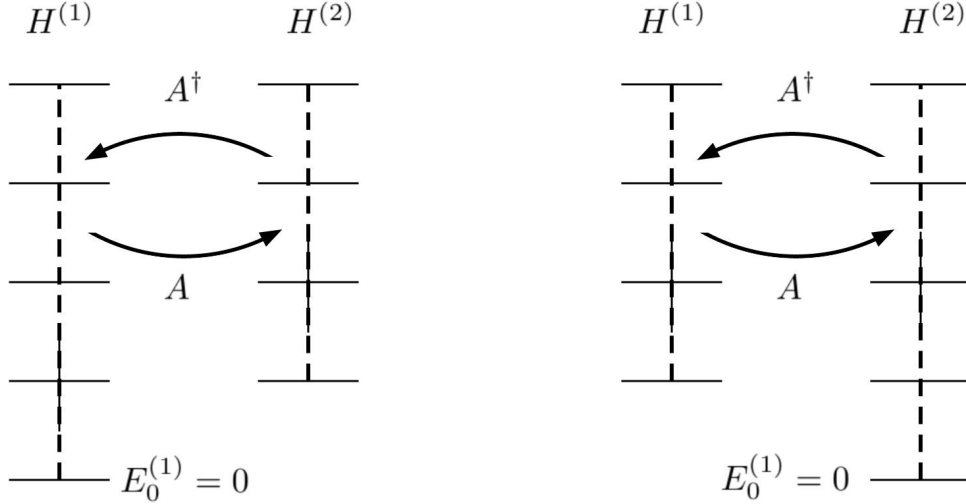


Figura 1.1: Esquema de niveles en el caso de que SUSY se conserve.

Si se construye el superpotencial con una de las funciones de onda de cuadrado integrable de $H^{(1)}$, se da el primer caso de SUSY que aparece en la figura 1.1, teniendo así $H^{(2)}$ un nivel menos. En cambio, si construimos el superpotencial con una autofunción de $H^{(1)}$ que no es de cuadrado integrable, es posible generar un compañero $H^{(2)}$ con un nivel más que $H^{(1)}$, este es el segundo tipo de SUSY que aparece en la figura 1.1.

Volviendo a un hamiltoniano $H^{(0)}$ dado, sean $V^{(0)}(x)$ su potencial, y su espectro $\{E_j^{(0)}\}$ con autofunciones $\{\phi_j^{(0)}\}$, definiremos como sus compañeros supersimétricos, bajo una transformada supersimétrica ordinaria de primer orden, a los siguientes dos hamiltonianos:

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= -\frac{d^2}{dx^2} + V^{(1)}(x), & V^{(1)}(x) &= V^{(0)} - E_0^{(0)} = W^2(x) - W'(x), \\ H^{(2)} &= -\frac{d^2}{dx^2} + V^{(2)}(x), & V^{(2)}(x) &= W^2(x) + W'(x), \\ W(x) &= -\frac{d}{dx} \log \phi_0^{(0)}, & E_n^{(1)} &= E_n^{(0)} - E_0^{(0)}, \\ \phi_j^{(1)} &= \phi_j^{(0)}, & \phi_j^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{E_j^{(1)}}} A \phi_j^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_j^{(1)}}} \frac{\mathcal{W}(\phi_0^{(0)}, \phi_j^{(0)})}{\phi_0^{(0)}} \end{aligned}$$

Decimos que la transformada es ordinaria cuando el estado fundamental de $H^{(1)}$ se utiliza como semilla para la construcción del superpotencial. De esta manera siempre tendremos

el estado fundamental $E_0^{(1)} = 0$ para ambos miembros de la pareja supersimétrica. teniendo el primer tipo de SUSY.

SUSY como simetría

Planteamos dos operadores matriciales a los que llamaremos supercargas:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El anticonmutador de estos operadores dará lugar a un hamiltoniano matricial cuyos elementos diagonales serán la pareja de hamiltonianos supersimétricos:

$$H_s = \{Q, Q^\dagger\} = QQ^\dagger + Q^\dagger Q = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{(1)} & 0 \\ 0 & H^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Esta definición nos lleva al siguiente conmutador $[Q, H_s] = [Q^\dagger, H_s] = 0$, siendo las supercargas las generadoras de la supersimetría [12]. Ya que la pareja de hamiltonianos es isospectral, tendremos que los autoestados de H_s están degenerados (excepto por el estado fundamental, que solo existirá en uno de los dos hamiltonianos):

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} |\phi_n^{(1)}\rangle \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ |\phi_n^{(2)}\rangle \end{pmatrix},$$

Diremos que la supersimetría (SUSY) se conserva cuando el valor medio del fundamental de H_s sea nulo, es decir:

$$\langle 0 | H_s | 0 \rangle = \begin{cases} \langle \phi_0^{(1)} | H^{(1)} | \phi_0^{(1)} \rangle = \|A | \phi_0^{(1)} \rangle\|^2 = 0, \\ \langle \phi_0^{(2)} | H^{(2)} | \phi_0^{(2)} \rangle = \|A^\dagger | \phi_0^{(2)} \rangle\|^2 = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, para conservar la supersimetría en cualquiera de los dos casos, las supercargas deben actuar sobre el estado fundamental y aniquilarlo. La ruptura de la supersimetría puede tener dos posibles causas: la no conmutatividad entre las supercargas y el hamiltoniano matricial (lo cual no nos interesa, ya que en ese caso no habría parejas isospectrales), o bien la existencia de un mecanismo de ruptura espontánea de la supersimetría.

La ruptura espontánea de la supersimetría (SSB) ocurre cuando el valor del estado fundamental $|0\rangle$ de H_s es distinto de cero, análogamente al mecanismo de Higgs en física de partículas, donde $\langle 0 | H_s | 0 \rangle > 0$. Esto lleva a la siguiente relación entre los operadores de intercambio:

$$\langle 0 | H_s | 0 \rangle = \begin{cases} \langle \phi_0^{(1)} | H^{(1)} | \phi_0^{(1)} \rangle = \|A | \phi_0^{(1)} \rangle\|^2 > 0, \\ \langle \phi_0^{(2)} | H^{(2)} | \phi_0^{(2)} \rangle = \|A^\dagger | \phi_0^{(2)} \rangle\|^2 > 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, los estados fundamentales respectivos de la pareja nunca son aniquilados, lo que impide que podamos relacionar el superpotencial con el estado fundamental de

ninguna de las parejas. A diferencia de la conservación de la supersimetría, donde un hamiltoniano tiene un nivel más que el otro, en el caso de la SSB ambos tienen la misma cantidad de niveles.

Para construir una pareja de hamiltonianos supersimétricos con SSB, el superpotencial se define a partir de un estado no físico y que no se encuentre entre las autofunciones de cuadrado integrable de la dupla $H^{(1)}, H^{(2)}$, aunque sí verifique las ecuaciones de Schrödinger asociadas en cada caso, dejando invariante la cantidad de niveles, pero alterando la forma del potencial y funciones de onda.

SUSY rota mediante SSB

Consideremos un hamiltoniano $H^{(0)}$ dado, con espectro discreto puro $\{E_j^{(0)}\}$ y autofunciones $\{\phi_j^{(0)}\}$. Consideremos un superpotencial $W(x) = -\partial_x \log \varphi_\varepsilon(x)$, donde $\varphi_\varepsilon(x)$ cumple la ecuación de Schrödinger asignada a $H^{(0)}$ con energía ε , pero no se encuentra dentro de la colección de las autofunciones de $H^{(0)}$ porque no es una solución física (i.e. no cumple las condiciones de contorno o no es normalizable). Entonces los compañeros supersimétricos asignados a $H^{(0)}$ con superpotencial $W(x)$ vendrán dados por:

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= -\frac{d^2}{dx^2} + V^{(1)}(x), & V^{(1)}(x) &= V^{(0)} - \varepsilon = W^2(x) - W'(x), \\ H^{(2)} &= -\frac{d^2}{dx^2} + V^{(2)}(x), & V^{(2)}(x) &= W^2(x) + W'(x), \\ W(x) &= -\frac{d}{dx} \log \varphi_\varepsilon(x), & E_n^{(1)} &= E_n^{(0)} - \varepsilon, \\ \phi_j^{(1)} &= \phi_j^{(0)}, & \phi_j^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{E_j^{(1)}}} A \phi_j^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_j^{(1)}}} \frac{\mathcal{W}(\varphi_\varepsilon, \phi_j^{(0)})}{\varphi_\varepsilon} \end{aligned}$$

En este caso, tendremos que el operador A no aniquila a $\phi_0^{(1)}$, ni A^\dagger aniquila a $\phi_0^{(2)}$, obteniendo que ambos hamiltonianos tienen la misma cantidad de niveles, por tanto, SUSY está rota. La única condición requerida a la función semilla es que no tenga ceros para evitar singularidades en la derivada logarítmica del superpotencial [43].

1.1.2. Supersimetría de mayor orden.

Sea un hamiltoniano $H^{(0)}$ en una dimensión, con potencial $V^{(0)}(x)$, con autofunciones $\{\phi_i^{(0)}(x)\}$ y autovalores $\{E_i^{(0)}\}$, siendo $E_0^{(0)}$ el estado fundamental del sistema cuya función de onda es $\phi_0^{(0)}$. Sea un hamiltoniano $H^{(1)}$ que tenga las mismas autofunciones que $H^{(0)}$, pero que su espectro de energías se vea desplazado, para que el estado fundamental se encuentre en el origen. Queremos encontrar un hamiltoniano $H^{(3)}$, con potencial $V^{(3)}$, pero

relacionado con $H^{(1)}$ mediante un operador de diferencial B de segundo orden [51, 74]:

$$\begin{aligned} BH^{(1)} &= H^{(3)}B, & H^{(1)}B^\dagger &= B^\dagger H^{(3)} \\ B &= \frac{d^2}{dx^2} + \eta(x)\frac{d}{dx} + \gamma(x), & V^{(1)}(x) &= V^{(0)}(x) - E_0^{(0)} \\ H^{(1)} &= -\frac{d^2}{dx^2} + V^{(1)}(x), & H^{(3)} &= -\frac{d^2}{dx^2} + V^{(3)}(x). \\ & & V^{(2)} - V^{(1)} &= 2\partial_x\eta(x) \end{aligned}$$

Consideremos el estado fundamental de $H^{(1)}$: $\phi_0^{(1)}$, como hemos establecido que su autovalor es nulo, se tiene que dar:

$$BH^{(1)}\phi_0^{(1)} = E_0^{(1)}B\phi_0^{(1)} = 0 = H^{(3)}B\phi_0^{(1)} \implies B\phi_0^{(1)} = 0$$

De esta manera, $\phi_0^{(1)}$ es una autofunción del operador de intercambio B con autovalor nulo, lo cual permite despejar uno de los dos coeficientes de B . Ahora existe cierta libertad para escoger cual va a ser el otro coeficiente de dicho operador. Escogeremos como segunda autofunción de B con autovalor nulo, al primer estado excitado de $H^{(1)}$, es decir, $\phi_1^{(1)}$. De esta manera las expresiones son:

$$\begin{aligned} B &= \frac{d^2}{dx^2} + \eta(x)\frac{d}{dx} + \gamma(x), \\ \eta(x) &= E_1^{(1)} \frac{\phi_0^{(0)}\phi_1^{(0)}}{\mathcal{W}(\{\phi_0^{(0)}, \phi_1^{(0)}\})}, & \gamma(x) &= -V^{(1)}(x) - E_1^{(1)} \frac{\phi_1^{(0)}\partial_x\phi_0^{(0)}}{\mathcal{W}(\{\phi_0^{(0)}, \phi_1^{(0)}\})} \end{aligned}$$

Además, el operador diferencial de segundo orden B puede ser factorizado como dos operadores diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} B &= A_{(2)}A_{(1)} = (\partial_x + W_{(2)}(x))(\partial_x + W_{(1)}(x)) = \\ &= (\partial_x - \partial_x \log \phi_1^{(2)}(x))(\partial_x - \partial_x \log \phi_0^{(0)}(x)). \end{aligned}$$

Donde $W_{(1)}$ es el superpotencial construido a partir del estado fundamental de $H^{(0)}$, y $W_{(2)}$ sería un superpotencial construido a partir del estado fundamental de $H^{(2)}$, es decir $\phi_1^{(2)} \propto A_{(1)}\phi_1^{(0)}$. Por simplificar los cálculos, podemos escribir la acción de B como un wronskiano de las funciones utilizadas como semilla de la transformación [15]:

$$\phi_n^{(3)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(0)} - E_0^{(0)}}} \frac{1}{\sqrt{E_n^{(0)} - E_1^{(0)}}} B\phi_n^{(0)} = \frac{\mathcal{W}(\{\phi_0^{(0)}, \phi_1^{(0)}, \phi_n^{(0)}\})}{\mathcal{W}(\{\phi_0^{(0)}, \phi_1^{(0)}\})}$$

Esto sería una transformada supersimétrica ordinaria de segundo orden, ya que el operador diferencial utilizado para el intercambio entre hamiltonianos es de segundo orden.

De una manera similar introducimos las transformadas de orden ℓ , las cuales tendrán asignadas unos operadores diferenciales de orden ℓ respecto al hamiltoniano de partida $H^{(0)}$. Para cada orden de supersimetría vamos a utilizar dos parejas de hamiltonianos, $H^{(\ell,1)}$ y $H^{(\ell,2)}$, el primer superíndice hace referencia al orden de SUSY y el segundo a que miembro de la pareja nos referimos. Así, las álgebras vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} A_\ell H^{(\ell,1)} &= H^{(\ell,2)} A_\ell, & A_\ell^\dagger H^{(\ell,2)} &= H^{(\ell,1)} A_\ell^\dagger, \\ A_\ell &= \partial_x + W_\ell(x), & A_\ell^\dagger &= -\partial_x + W_\ell(x), \\ W_\ell &= -\partial_x \log \phi_{\ell-1}^{(\ell,1)}, \end{aligned}$$

donde hemos indicado la relación entre parejas de hamiltonianos al mismo orden de SUSY. La relación que existirá entre distintos órdenes de SUSY vendrá dada por:

$$\begin{aligned} H^{(\ell,1)} &= H^{(\ell-1,2)} - E_{\ell-1}^{(\ell-1)}, & E_n^{(\ell)} &= E_n^{(0)} - E_{\ell-1}^{(0)}, \\ B_\ell H^{(0)} &= H^{(\ell,2)} B_\ell, & B_\ell &= \prod_{j=1}^{\ell} A_j \end{aligned}$$

La justificación de esta notación, aunque parezca innecesaria, ya que solo estamos agregando una constante a uno de los hamiltonianos, se debe a que así mantenemos siempre el nivel fundamental del primer partner igual a 0 en todos los ordenes, lo que nos garantiza tener una SUSY con el fundamental del hamiltoniano matricial igual a 0. Aunque si lo que nos interesa es estudiar las relaciones entre funciones y operadores diferenciales, podemos prescindir de ella, lo cual realizaremos en el último capítulo.

Los potenciales de las parejas de hamiltonianos a orden ℓ vendrán dados por:

$$\begin{aligned} V^{(\ell,1)}(x) &= V^{(0)}(x) - E_{\ell-1}^{(0)} + \partial_x^2 \log \mathcal{W} \left(\left\{ \phi_i^{(0)} \right\}_{i=0}^{\ell-2} \right), \\ V^{(\ell,2)}(x) &= V^{(0)}(x) - E_{\ell-1}^{(0)} - \partial_x^2 \log \mathcal{W} \left(\left\{ \phi_i^{(0)} \right\}_{i=0}^{\ell-1} \right). \end{aligned}$$

Las funciones de onda vienen dadas por [15]:

$$\begin{aligned} \phi_n^{(\ell,2)}(x) &= C_n^{(\ell,2)} \frac{\mathcal{W} \left(\left\{ \phi_0^{(0)}, \phi_1^{(0)}, \dots, \phi_{\ell-1}^{(0)}, \phi_n^{(0)} \right\} \right)}{\mathcal{W} \left(\left\{ \phi_0^{(0)}, \phi_1^{(0)}, \dots, \phi_{\ell-1}^{(0)} \right\} \right)}, \\ \phi_n^{(\ell,1)} &= \phi_n^{(\ell-1,2)}, & \phi_n^{(1,1)} &= \phi_n^{(0)}. \end{aligned}$$

Estos resultados son bien conocidos, y para sistemas con espectros numerables con fórmula cerrada para la energía, ya han sido aplicados. Veamos que ocurre cuando dos autovalores tienden a la misma energía.

1.1.3. SUSY confluyente.

Vamos a plantear una SUSY de segundo orden, en la que las dos funciones semilla van a tender a la misma energía de factorización [40, 41, 75]. Sean los niveles $\phi_0^{(0)} = u_0$ con $E_0^{(0)} = \varepsilon - \Delta$ y $\phi_1^{(0)} = u_1$ con $E_1^{(0)} = \varepsilon + \Delta$. El operador diferencial de segundo orden B que conecta los hamiltonianos $H^{(1,1)}$ y $H^{(2,2)}$ tiene la siguiente forma:

$$B = \frac{d^2}{dx^2} + \eta(x) \frac{d}{dx} + \gamma(x),$$

$$\eta(x) = \frac{2\Delta}{u_1'/u_1 - u_0'/u_0}, \quad \gamma(x) = \eta(x) - V_0(x) + \varepsilon - \Delta$$

Si ahora tomamos el límite $\Delta \rightarrow 0$ se obtiene $B = -H^{(1,1)} = \varepsilon - H^{(0)}$. La acción de B sobre los niveles de $H^{(1,1)}$ no generará ningún sistema nuevo, por lo que no se ha obtenido ningún tipo de SUSY. Replanteamos las ecuaciones a partir del álgebra de operadores: $BH^{(1,1)} = H^{(2,2)}B$, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, siendo las funciones incógnita $\eta(x)$, $\gamma(x)$ y el potencial $V^{(2,2)}$:

$$\begin{cases} \frac{\eta\eta''}{2} - \frac{\eta'^2}{4} + \eta^2 (\eta^2/4 - \eta' - V^{(1,1)}) = 0, \\ \gamma(x) = -V^{(1,1)} + \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta'}{2}, \\ V^{(2,2)} = V^{(1,1)} + 2\eta'. \end{cases}$$

El coeficiente $\eta(x)$ debería cumplir las siguientes ecuaciones no lineales a la vez, que dependen de las dos funciones semilla:

$$\eta' = \eta^2 + 2\frac{u_0'}{u_0}\eta + 2\Delta, \quad \eta' = \eta^2 + 2\frac{u_1'}{u_1}\eta - 2\Delta,$$

asumamos el siguiente ansatz para acercarnos a la posible solución de η cuando $\Delta \rightarrow 0$:

$$\eta' = \eta^2 + 2\frac{u'}{u}\eta.$$

Aquí $u(x)$ puede ser $u_0(x)$ ó $u_1(x)$, indistintamente. De esta manera la solución de $\eta(x)$ es:

$$\eta(x) = -\frac{d}{dx} \log(w(x)),$$

$$w(x) = w_0 - \int_{x_0}^x u(x')^2 dx' = - \int_{x_0}^x u(x')^2 dx'.$$

Esta expresión para η en función de la derivada logarítmica es similar a la obtenida en el caso no confluyente, donde en vez de $w(x)$ aparecía el wronskiano de las dos funciones

utilizadas para construir la transformada de segundo orden: $\mathcal{W}(u_0, u_1)$. Esto nos lleva a identificar la función que consideraremos el nuevo nivel que hemos introducido, tomando $\mathcal{W}(v, u) = w(x)$:

$$v(x) = u(x) \int \frac{w(x')}{u(x')^2} dx' \quad (1.4)$$

La interpretación que podemos tomar de la función $v(x)$ viene dada una vez que actuamos con el hamiltoniano $H^{(1,1)}$ sobre ella:

$$\begin{cases} H^{(1,1)}v(x) = u(x), \\ H^{(1,1)}u(x) = 0. \end{cases}$$

De esta manera obtenemos una cadena de Jordan [22]. La función $v(x)$ es una autofunción de $(H^{(1,1)})^2$, pero no del hamiltoniano original. La función $v(x)$ se conoce como la función generalizada de orden 2 de $H^{(1,1)}$ y puede ser construida con cualquiera de las funciones del hamiltoniano original. Debido a sus definición por el ansatz utilizado, podemos regular la presencia de singularidades en las funciones de $H^{(2,2)}$ modificando la constante w_0 . También podremos construir dos tipos de SUSY confluyente, utilizando u_0 y u_1 . Se puede definir funciones generalizadas de orden mayor [49], pero no han sido estudiadas en esta Tesis. Para diferenciar el hamiltoniano resultante de la transformada de segundo orden ordinaria, vamos a utilizar una tilde: $\tilde{H}^{(2,2)}$ para sus funciones y potencial.

La fórmula del wronskiano sigue siendo válida para la construcción de los niveles de $\tilde{H}^{(2,2)}$, considerando que tomamos $u(x) = u_0(x)$:

$$\tilde{\phi}_n^{(2,2)}(x) = B(u_n(x)) = \frac{\mathcal{W}(\{v(x), u_0(x), u_n(x)\})}{\mathcal{W}(\{v(x), u_0(x)\})}$$

Debido a esta definición, el único nivel que no tiene transformada será u_0 , al aparecer dentro del wronskiano, por lo que se mantienen el resto de los niveles, además el espectro es el mismo:

$$\tilde{E}_n^{(2)} = E_n^{(1)}$$

No tendría sentido hablar de una transformada supersimétrica confluyente de primer orden, ya que el nivel $v(x)$ no pertenece al hamiltoniano original [2]. Por último, un camino alternativo y equivalente para calcular el nuevo nivel y $w(x)$ es presentada en [44]. Si la primitiva de $u(x)^2$ es excesivamente complicada, o directamente no se puede obtener un resultado en forma cerrada, puede darse que el cálculo de la derivada respecto a la energía sea más sencillo. Así, la función semilla de la transformación puede también calcularse como:

$$v(x) = C_1 u(x) + C_2 u^\perp(x) + \partial_E u(x)$$

Y el potencial, en vez de venir dado por la derivada logarítmica de una integral, vendrá dado por:

$$\tilde{V}^{(2,2)}(x) = V^{(1,1)}(x) - 2\partial_x^2 \log(C_2 + \mathcal{W}(u, \partial_E u)) \quad (1.5)$$

La posibilidad de poder construir $w(x)$ mediante una integral, o la derivada respecto a un parámetro, posibilita poder tratar casos complicados, como puede ser el caso de hacer una transformada confluyente con una autofunción dada por una función especial [41]. La transformada confluyente es útil en casos degenerados para evitar la trivialidad del potencial resultante en una transformada SUSY de segundo orden ordinaria, en la que el wronskiano de dos funciones linealmente independientes no agrega nuevos términos al potencial. No es necesario que el sistema en cuestión posea degeneración para aplicar una transformada confluyente, siempre podremos realizar este tipo transformación.

1.2. Extensiones Autoadjuntas

Antes de hablar de las extensiones autoadjuntas de un operador, tendremos que definir todos estos términos con unas breves nociones de análisis funcional [76–83].

Se define el rango del operador B , $\mathcal{R}(B)$, en el espacio de Hilbert \mathcal{H} , como el subespacio:

$$\mathcal{R}(B) = \{y \in \mathcal{H} : \exists x \in \mathcal{H} : y = Bx\}$$

Donde $\mathcal{R}(B)$ es el espacio imagen. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable y de dimensión finita. Sea $\mathcal{D}(B)$ un subespacio denso del espacio de Hilbert, y sea B un operador tal que $B : \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. El subespacio $\mathcal{D}(B)$ es el dominio del operador B .

El operador B está acotado si:

$$\exists K > 0 : \forall x \in \mathcal{D}(B) / \quad \|Bx\| \leq K \|x\|.$$

En caso contrario el operador es **no acotado**, como suelen ser la mayoría de los observables en mecánica cuántica.

Diremos que el operador B está densamente definido, o sencillamente, que es **denso**, cuando la clausura de su dominio sea todo el espacio de Hilbert, $\overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{H}$, esta propiedad es de gran importancia a la hora de tratar al adjunto del operador.

Sea B un operador, diremos que es **cerrado** si para toda sucesión $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(B)$ convergente a $x \in \mathcal{H}$ y tal que la sucesión $\{Bx_n\}$ sea convergente a un cierto $y \in \mathcal{H}$ se verifica que:

$$x \in \mathcal{D}(B), \quad y = Bx.$$

La primera condición es que el límite de la sucesión de elementos del dominio converja dentro de este, y la segunda que el límite de la imagen de la sucesión sea igual al límite de la sucesión de las imágenes.

A diferencia de la definición de operador denso, la cual requiere la densidad del dominio, la definición de operador cerrado no implica que el dominio sea cerrado.

Sea B un operador con dominio \mathcal{D} , llamaremos grafo de B al conjunto \mathcal{G} de pares de la forma (x, Bx) con $x \in \mathcal{D}$. Obviamente $\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Sean dos operadores B y B' en \mathcal{H} . Se dice que B' es una **extensión** de B , i.e. $B \prec B'$, si $\mathcal{G}(B) \subset \mathcal{G}(B')$, equivalentemente se da $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(B')$. Cuando un operador es una extensión se está redefiniendo el subespacio del espacio de Hilbert sobre el cual se encuentra definido.

Considérese el operador derivada $P = -i\frac{d}{dx}$ y el espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable en un intervalo (a, b) de la recta real. Sean los operadores, P_1 y P_2 el operador derivada, con los siguientes dominios:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(P_1) = \{f(x) \in L^2(a, b) \mid \} \\ \mathcal{D}(P_2) = \{f(x) \in L^2(a, b) \mid f(0) = 0\} \end{cases}$$

Dicha definición de los dominios implica $\mathcal{D}(P_2) \subset \mathcal{D}(P_1)$ y P_1 es una extensión de P_2 , i.e. $P_2 \prec P_1$.

Diremos que un operador B es **cerrable** si existe una extensión para la cual el operador es cerrado. La extensión cerrada más pequeña de este operador, de ser cerrable, es su **clausura** \overline{B} . Si un operador es cerrable, la clausura de su grafo es igual a la clausura del operador, $\mathcal{G}_{\overline{B}} = \overline{\mathcal{G}_B}$.

Sea B un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(B)$ denso en \mathcal{H} , se define el siguiente dominio:

$$\mathcal{D}^\dagger(B) = \{y \in \mathcal{H} : \exists z \in \mathcal{H} \quad / \quad \langle z|x \rangle = \langle y|Bx \rangle, \forall x \in \mathcal{D}(B)\}$$

Se requiere que el operador sea denso en su dominio para garantizar que el z sea único, si no el adjunto B^\dagger no estaría definido. El operador adjunto de B , con el dominio previamente definido, es:

$$B^\dagger y = z, \quad \forall y \in \mathcal{D}(B).$$

Vamos a estudiar las extensiones autoadjuntas de operadores no acotados, con dominio denso y **simétricos**. Sea B un operador con dominio denso en \mathcal{H} , este será **simétrico** (ó hermítico) si:

$$\langle y, Bx \rangle = \langle By, x \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(B), \quad \text{donde } \langle x, y \rangle \text{ es el producto escalar.}$$

De la definición del dominio del operador adjunto se puede demostrar que $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}^\dagger(B)$, por lo que el operador adjunto es una extensión del operador B cuando este es simétrico, i.e. $B \prec B^\dagger$. En caso de que los dominios de un operador simétrico y su adjunto sean iguales, $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}^\dagger(B)$ diremos que el operador es **autoadjunto** y $B = B^\dagger$.

Sea B un operador en \mathcal{H} con dominio $\mathcal{D}(B)$, y sea un $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea $x \in \mathcal{D}(B)$, este un autovector de B con autovalor λ si $Bx = \lambda x$. Sea el siguiente operador: $B - \lambda I$, si λ es un autovalor, el operador $B - \lambda I : \mathcal{D}(B) \rightarrow \mathcal{H}$ no es inyectivo, ya que su núcleo admite como base los autovectores de B . El conjunto de autovalores λ se le denomina **espectro**

discreto de B , $P_\sigma(B)$.

En caso de que $B - \lambda I$ sea inyectivo, λ no pertenece al espectro discreto, y puede caer en tres categorías distintas:

- Si $B - \lambda I$ es un operador inyectivo, pero $\mathcal{R}(B - \lambda I)$ no es denso en \mathcal{H} , λ pertenece al **espectro residual** de B , $R_\sigma(B)$.
- Sea $B - \lambda I$ es un operador inyectivo, y $\mathcal{R}(B - \lambda I)$ es denso en \mathcal{H} , al ser inyectivo posee inversa. Definimos el operador resolvente de B como $(\mathcal{R}B - \lambda I)^{-1} : \mathcal{R}B - \lambda I \rightarrow \mathcal{D}(B)$, si este operador no es continuo para un λ , λ pertenece al **espectro continuo** de B , $C_\sigma(B)$.
- Todo λ que no pertenece a ninguno de los conjuntos anteriores, pertenece al **conjunto resolvente** de B , $\rho(B)$.

El conjunto conformado por el espectro discreto, continuo y residual, es el **espectro** de B :

$$\sigma(B) = P_\sigma(B) \cup R_\sigma(B) \cup C_\sigma(B)$$

Un operador simétrico tiene espectro real y cerrado. Sea B un operador simétrico y cerrado, se define la **transformada de Cayley** del operador:

$$V(B) = (B + iI)(B - iI)^{-1}$$

La transformada de Cayley de un operador simétrico cerrado es una isometría, ya que no altera la norma del vector sobre el que actúa, además, su rango e imagen vienen dados por:

$$V(B) : \mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(B - iI) \rightarrow \mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(B + iI)$$

Como B es simétrico y cerrado, tanto el rango como dominio de su transformada de Cayley son conjuntos cerrados, y al ser la transformada de Cayley acotada al ser unitaria, es un operador cerrado. Como estamos trabajando en espacios de Hilbert, el espacio topológico es completo, entonces los complementos ortogonales de $\mathcal{D}(V)$ y $\mathcal{R}(V)$ también serán conjuntos cerrados.

Se conocen como **subespacios de deficiencia** a los complementos ortogonales del dominio y rango de la transformada de Cayley:

$$N_\mp = \mathcal{N}(B^\dagger \pm iI) = [\mathcal{R}(B \mp iI)]^\perp$$

Una definición alternativa de los subespacios de deficiencia se obtiene de la primera igualdad:

$$N_\pm = \{x \in \mathcal{D}(B^\dagger) / B^\dagger x = \pm ix\}$$

Volviendo al asunto principal de esta subsección, nuestro interés es caracterizar las extensiones autoadjuntas de un operador B , simétrico, cerrado y denso en su dominio. El adjunto de B será una extensión de este y además su dominio contendrá a los subespacios

de deficiencia y al dominio del operador original.

Sea el grafo del adjunto \mathcal{G}_{B^\dagger} , y los grafos de B pero con su dominio siendo los subespacios de deficiencia:

$$\mathcal{G}_{B^\dagger} = \{(x, B^\dagger x) : x \in \mathcal{D}^\dagger(B)\}, \quad \mathcal{G}_{N_\pm} = \{(x, B^\dagger x) : x \in N_\pm\}$$

\mathcal{G}_{B^\dagger} contiene a \mathcal{G}_B y \mathcal{G}_{N_\pm} , es más, bajo el producto interno del grafo los elementos de \mathcal{G}_B , \mathcal{G}_{N_+} y \mathcal{G}_{N_-} son ortogonales entre sí. Esta propiedad es, escrita en término de los dominios:

$$\mathcal{D}(B) \perp_B N_+ \perp_B N_-$$

Donde \perp_B expresa que los conjuntos son ortogonales bajo el producto interno del grafo de B^\dagger . Con estos resultados, se llega a la siguiente conclusión para el dominio del adjunto de un operador B simétrico, cerrado y densamente definido en su dominio:

$$\mathcal{D}^\dagger(B) = \mathcal{D}(B) \oplus_B N_+ \oplus_B N_-$$

Esta última igualdad solo es válida cuando B es cerrado, denso y simétrico, si B no fuera cerrado, pero si cerrable, habría que cambiar $\mathcal{D}(B)$ por $\mathcal{D}(\overline{B})$, ya que el adjunto es un operador cerrado, y la clausura es la extensión cerrada mínima que contiene al operador, por lo que $B \preceq \overline{B} \preceq B^\dagger$.

El dominio del adjunto es combinación de los elementos de estos subespacios, pero no tenemos determinada cada una de las extensiones autoadjuntas de un operador dado. Sea un $x \in C_1 \subset N_+ \oplus_B N_- \subset \mathcal{D}(B^\dagger)$, al ser C_1 subespacio de $N_+ \oplus_B N_-$ sus elementos se pueden escribir como $x = x_+ + x_-$ con $x_\pm \in N_\pm$, al ser B^\dagger un operador cerrado y simétrico, se llega a:

$$\langle x, B^\dagger x \rangle = \langle x, B^\dagger x \rangle \implies \|x_+\| = \|x_-\| \implies x_- = Ux_+$$

Donde U es una isometría desde N_+ a N_- , pero para ser una isometría, la dimensión de ambos espacios debe ser la misma. Se definen los índices de deficiencia como la dimensión de los subespacios de deficiencia:

$$n_\pm = \dim(N_\pm)$$

Suponiendo que $n_+ = n_-$ las extensiones simétricas de B están en correspondencia 1 a 1 con el conjunto de las isometrías de N_+ a N_- , entonces para B , existe una extensión autoadjunta B_U , caracterizada por un operador unitario U , con dominio $\mathcal{D}(B_U)$ tal que:

$$\mathcal{D}(B_U) = \{x + x_+ + Ux_+ \mid x \in \mathcal{D}(B), x_+ \in N_+\}$$

Llegando al teorema de Von Neumann sobre extensiones autoadjuntas por el cual:

Sea B un operador cerrado, simétrico, y denso en su dominio $\mathcal{D}(B)$. Sea B^\dagger el adjunto de B y sean n_\pm los índices de deficiencia.

- Si $n_+ = n_- = 0$ el operador es esencialmente autoadjunto y solo posee una extensión autoadjunta, tal que $B^\dagger = B$ y $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B^\dagger)$.
- Si $n_+ = n_- = n$ el operador posee infinitas extensiones autoadjuntas B_U , caracterizadas por el número de parámetros que definan a la isometría U , que serán un total de n^2 .
- Si $n_+ \neq n_-$ no puede haber una correspondencia entre subespacios de deficiencia y el operador B no es autoadjunto.

1.3. Resonancias

En esta Tesis Doctoral se estudiarán los estados ligados de diversos sistemas por dos vías distintas: una será exigir a las funciones de onda resultantes de resolver la ecuación de Schrödinger que cumplan las condiciones de contorno del problema en cuestión. Estas condiciones de contorno pueden ser un sistema de ecuaciones que debe cumplir la función de onda y su derivada en un intervalo (pozo de potencial, potencial δ , etc. [84–94]) o en el caso de potenciales de profundidad finita, que estas funciones sean de cuadrado integrable en la recta real (lo cual no deja de ser otro tipo de condición de contorno) [86, 95–100]. El otro sistema para la obtención de los estados ligados, y otros tipos de estados, no físicos, en tanto que no son localizables en el espacio, se da mediante el cálculo de la matriz S .

Un planteamiento inicial de la matriz S se da a través de un proceso de scattering, consideremos el hamiltoniano libre $H_0 = -p^2/(2m)$ de una partícula libre, y en el centro se encuentra un potencial localizado, no dependiente del momento, e invariante en el tiempo $V(x)$, este potencial deberá decrecer más rápido que x^{-1} en $x \rightarrow \pm\infty$ (a excepción del potencial coulombiano y otros ejemplos). El comportamiento de la partícula es descrito por la solución de la ecuación de Schrodinger:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = V(x)\psi(x)$$

Por conveniencia y sin pérdida de generalidad, se toma $\hbar^2/2m = 1$, y $E = k^2$. Considerando que la partícula incidente viene por la izquierda, libre, interacciona con el potencial, obteniendo así una parte reflejada que vuelve por donde ha venido, y una parte transmitida, de manera que en los extremos asintóticos la función de onda tiene la siguiente forma:

$$\psi(x) \approx \begin{cases} e^{ikx} + r(k)e^{-ikx} & x \ll 0, \\ t(k)e^{ikx} & x \gg 0. \end{cases}$$

Aquí $r(k)$ es la amplitud reflejada y $t(k)$ es la amplitud transmitida. En caso de que el potencial sea cero, $r(k) = 0$ y $t(k) = 1$, la cual es la solución para una onda libre. De

estas amplitudes se definen los coeficientes de reflexión y transmisión:

$$R = |r(k)|^2, \quad T = |t(k)|^2.$$

En la forma de estos coeficientes se encuentra la información que caracteriza al potencial, por lo que es de interés calcularlos. Se presentan dos métodos:

Planteando la ecuación de Schrödinger como una ecuación de Helmholtz, el término del potencial ejerce como el término inhomogéneo de la ecuación. Aplicando la condición de que la onda viaja de izquierda a derecha, junto al método de las funciones de Green [32], tenemos:

$$\psi_k(x) = e^{ikx} + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x'|} \psi_k(x') V(x') dx'$$

Esta es la solución integral al proceso de scattering, la cual nos permite calcular los coeficientes una vez tomemos límites en $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{cases} r(k) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x'|} \psi_k(x') V(x') dx' = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \psi_k(x) V(x) dx \\ t(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x'|} \psi_k(x') V(x') dx' = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \psi_k(x) V(x) dx \end{cases}$$

Relacionando los coeficientes con la transformada de Fourier del potencial y la función de onda. Este desarrollo en integrales tiene diversas aplicaciones: uno de ellos es el desarrollo de la serie de Born para un proceso de scattering que permite sacar información en procesos perturbativos, así como calcular aproximaciones de interacciones de partículas fundamentales llevadas a potenciales clásicos (como el potencial de Yukawa).

Ahora consideremos que la partícula viaja por el espacio, pero no definamos una dirección privilegiada, entonces la forma asintótica de la función de onda vendrá dada por 4 coeficientes desconocidos:

$$\psi(x) \approx \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \ll 0, \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & x \gg 0. \end{cases}$$

Donde A , D representan las amplitudes de las ondas que entran en el potencial, y C , B representan las amplitudes de las ondas que escapan de este. Se pueden relacionar las amplitudes de entrada y salida mediante una matriz, la matriz S , tal que:

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

Donde las entradas de la matriz S pueden verse como amplitudes de transmisión/reflexión:

$$m_{11} = t(k), \quad m_{22} = r'(k), \quad m_{21} = r(k), \quad m_{12} = t'(k).$$

Donde las amplitudes t' y r' son las amplitudes de reflexión transmisión en un proceso de scattering de derecha a izquierda. La densidad de probabilidad debe conservarse en la entrada/salida, por tanto, la matriz S es unitaria. En un proceso en el cual la partícula está atrapada dentro del potencial, tenemos que los estados son puramente 'outgoing', es decir, la forma asintótica de la función de onda será la de una onda que emerge del potencial. Para estos valores del momento k , tendremos un *polo* de la matriz S . Estos polos de la matriz estarán clasificados según se encuentran situados en el plano complejo:

- Si el polo k es puramente imaginario, tal que $\text{Im}(k) > 0$, se denomina como estado ligado (i.e. bound state) por el contrario, si $\text{Im}(k) < 0$ es un estado anti-ligado (i.e. anti-ligado ó estado virtual).
- Si el polo k es un número complejo con parte imaginaria y parte real, k^* también será un polo de la matriz S que haga desvanecerse a las funciones de onda entrantes en el potencial. Este tipo de polos se denominan estados resonantes, o resonancias.
- En algunos sistemas tendremos lo que se conocen como polos redundantes, polos k de la matriz S , que a pesar de estar en el semieje positivo imaginario, no entran en las categorías anteriores.

Entonces tenemos dos vías para calcular los polos de la matriz $S(k)$: o mediante el cálculo de los coeficientes de reflexión/transmisión, o mediante el desarrollo asintótico de las funciones de onda y planteamiento de la matriz que relaciona entrada/salida en el potencial. Ambos métodos de resolución requieren la resolución de la ecuación diferencial que rige el sistema, lo que nos lleva a la última sección de esta breve introducción teórica.

1.4. Ecuaciones Fuchsianas

Al aplicar distintas transformadas SUSY a distintos tipos de potenciales, aparecerán nuevos sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales diferentes a las originales. Para poder clasificar dichas ecuaciones es necesario acudir la teoría de ecuaciones diferenciales de coeficientes variables [32, 101–104].

En teoría de ecuaciones diferenciales, aparece la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden de coeficientes variables:

$$u''(z) + p(z)u'(z) + q(z)u(z) = 0$$

Los coeficientes $p(z)$ y $q(z)$ son funciones meromorfas en el plano complejo (i.e. analíticas excepto en un conjunto discreto de puntos del plano complejo) y, en lo siguiente, cocientes de polinomios con el mismo denominador. Entonces, sea un punto $z = z_0$, en relación con la ecuación diferencial, se dice que es:

- Punto ordinario: Si $p(z)$ y $q(z)$ son funciones analíticas en un entorno de z_0 .

- Punto singular regular: Si $(z - z_0)p(z)$ y $(z - z_0)^2q(z)$ son funciones analíticas en un entorno de z_0 .
- Punto singular irregular: Si $(z - z_0)p(z)$ y/o $(z - z_0)^2q(z)$ no son analíticas en un entorno de z_0 . Además, se dice que z_0 es un punto singular irregular de orden n , para el n más pequeño que confirme que $(z - z_0)^n p(z)$ y $(z - z_0)^{n+1} q(z)$ son analíticas.

Para resolver estas ecuaciones, existe una posible herramienta, el llamado método de Frobenius. Si la ecuación tuviera un punto singular regular, una posible solución en un entorno de dicho punto, plantearse de la siguiente forma:

$$u(z) = (z - z_0)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

Mediante de una redefinición de los coeficientes de la ecuación diferencial:

$$p(z) = \frac{P(z)}{z - z_0}, \quad q(z) = \frac{Q(z)}{(z - z_0)^2},$$

Ya que $(z - z_0)p(z)$ y $(z - z_0)^2q(z)$ son analíticas en $z = z_0$, $Q(z)$ y $P(z)$ se pueden desarrollar mediante serie de potencias:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n, \quad Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Q^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n.$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación diferencial original, y agrupando términos por las potencias de z , se tiene que cada coeficiente de la serie debe ser cero, el primer término a anular nos dará la ecuación indicial alrededor del punto singular z_0 :

$$\lambda^2 + (P(z_0) - 1)\lambda + Q(z_0) = 0$$

Las soluciones en λ de esta ecuación se conocen como los exponentes característicos de la ecuación en el punto singular regular z_0 . Como es una ecuación de segundo orden, tendremos dos exponentes λ y λ' , una para cada una de las soluciones de la ecuación diferencial. Hay una serie de excepciones dentro del método, como por ejemplo que la raíz sea repetida, o que la diferencia entre exponentes característicos sea un número entero, que requieren refinar la técnica.

Una ecuación diferencial lineal es una ecuación fuchsiana si todos los puntos singulares son regulares, entonces la ecuación anterior, si tiene un total de N puntos singulares, puede ser rescrita de la siguiente manera tras una serie de cambios de variable:

$$w''(z) + \left(\sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n}{z - z_n} \right) w'(z) + \left(\sum_{n=1}^N \frac{q_n}{z - z_n} \right) w(z) = 0,$$

existiendo la siguiente relación entre constantes dentro de la ecuación diferencial:

$$\sum_{n=1}^N q_n = 0, \quad \alpha + \beta + 1 = \sum_{n=1}^N \gamma_n, \quad \alpha\beta = \sum_{n=1}^N z_n q_n.$$

Cada punto singular regular z_n tiene un par de exponentes característicos $(0, 1 - \gamma_n)$, más un punto singular regular en el infinito con exponentes (α, β) . Si en un principio existían $3N$ parámetros libres, tomando los puntos $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$ como es habitual, tendremos un total de $3N - 3$ parámetros libres. La última transformación que realizaremos en la ecuación será:

$$w(z) = \left(\prod_{j=1}^N (z - a_j)^{-\gamma_j/2} \right) W(z),$$

Este cambio de variable dependiente anula el término de la derivada primera de la función incógnita en la ecuación original, rescribiendo la ecuación en forma normal, esto nos permitirá identificarla como una ecuación de Schrödinger.

$$\frac{d^2 W(z)}{dz^2} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\tilde{\gamma}_j}{(z - a_j)^2} + \frac{\tilde{q}_j}{z - a_j} \right) W(z).$$

Los nuevos coeficientes son como sigue:

$$\tilde{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{\gamma_j \gamma_k}{a_j - a_k} - q_j; \quad \tilde{\gamma}_j = \frac{\gamma_j}{2} \left(\frac{\gamma_j}{2} - 1 \right).$$

Las ecuaciones diferenciales presentes en esta tesis son en su mayoría ecuaciones fuchsianas de 3 puntos singulares regulares (Funciones hipergeométricas ${}_2F_1$ y los polinomios ortogonales derivados de esta función), excepto en algún caso que se tratará en el Capítulo 3.

Capítulo 2

Clasificación de las extensiones auto-adjuntas del pozo de potencial

Este capítulo es una adaptación del principio de los dos primeros artículos que conforman esta tesis doctoral:

Supersymmetric Partners of the One-Dimensional Infinite Square Well Hamiltonian

M. Gadella¹, J. Hernández-Muñoz², L.M. Nieto¹, C. San Millan¹
[Symmetry 2021, 13\(2\), 350](#)

¹ Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica, and IMUVA, Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid, Spain

² Departamento de Física Teórica de la Materia Condensada, IFIMAC Condensed Matter Physics Center, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, Spain;

Supersymmetric Partners of the One-Dimensional Infinite Square Well Hamiltonian: Special Cases

M. Gadella¹, C. San Millan¹
[Symmetry 2022, 14\(7\), 1314](#)

¹ Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica, and IMUVA, Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid, Spain

En las siguientes secciones se proporciona un resumen de la introducción al problema físico en cuestión, el tratamiento en la bibliografía previa, los resultados obtenidos en los artículos, y otros que no fueron publicados por cuestión de formato.

2.1. El pozo de potencial infinito como límite del finito.

El primero de los dos sistemas sobre el cual aplicaremos la transformada SUSY será el pozo de potencial infinito en una dimensión, continuando así el estudio de [73]. Nuestra

principal fuente para adentrarnos en este trabajo ha sido [76], de la cual heredamos parte de la notación, para un desarrollo más extenso de estos resultados previos, se encuentra [77].

El pozo de potencial es el modelo de juguete favorito de la física cuántica, debido a la simplicidad de su ecuación de Schrödinger y de sus soluciones. A la hora de abordar el problema a nivel de grado, no da tiempo a resolverlo por teoría de operadores y análisis funcional, ya que estos tópicos se suelen impartir a nivel de máster o posgrado. Por lo general, el estudiante del grado en física, considera que los operadores diferenciales que actúan sobre las funciones de onda como si fueran matrices, y hasta cierto punto es verdad. Esa interpretación matricial del hamiltoniano y el requerimiento de que sea ‘autoadjunto’ sugiere, al igual que ocurre con las matrices sobre el cuerpo de los complejos, que $H = H^\dagger$ (y por lo que hemos visto en el capítulo anterior, esto no siempre es cierto para operadores diferenciales en un espacio de Hilbert). El pozo de potencial infinito unidimensional a nivel de grado se aborda de la siguiente manera: comencemos con el pozo finito, el cual viene descrito por el siguiente hamiltoniano:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{para } x < -a, \\ 0 & \text{para } a < x < a, \\ V_0 & \text{para } x > a, \end{cases}$$

El intervalo de definición suele ser $(0, L)$ en la mayoría de textos, ya que al resolver el problema en ese intervalo, todas las funciones trigonométricas vienen dadas por funciones seno. Como en la siguiente sección queremos ver propiedades de paridad, conviene tener el pozo centrado en el origen, lo que nos lleva a tener dos tipos de funciones de onda, una par en paridad (e impar en la etiqueta del nivel), y otra impar en paridad (y par en la etiqueta del nivel):

$$\psi_{2m}(x) = \begin{cases} -C_{2m} \sin(s_{2m}/2) e^{\tau_{2m}(x+a)}, & x < -a \\ C_{2m} \sin\left(\frac{s_{2m}x}{2a}\right), & |x| < a \\ C_{2m} \sin(s_{2m}/2) e^{-\tau_{2m}(x-a)}, & x > a, \end{cases}$$

Y otra de paridad par:

$$\psi_{2m+1}(x) = \begin{cases} C_{2m+1} \cos(s_{2m+1}/2) e^{\tau_{2m+1}(x+a)}, & x < -a \\ C_{2m+1} \cos\left(\frac{s_{2m+1}x}{2a}\right), & |x| < a \\ C_{2m+1} \cos(s_{2m+1}/2) e^{-\tau_{2m+1}(x-a)}, & x > a \end{cases}$$

Se ha tomado $\tau_n = \sqrt{V_0 - E_n}$ y $s_n = 2a\sqrt{E_n}$. Las constantes de normalización vienen

dadas por:

$$C_{2m+1} = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{1 + \frac{\cot(s_{2m+1}/2)}{s_{2m+1}/2}}}, \quad C_{2m} = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{1 - \frac{\tan(s_{2m}/2)}{s_{2m}/2}}}.$$

La cantidad de niveles, así como el valor numérico de estos, vienen dados por la resolución de dos ecuaciones trascendentes, las cuales se deducen de imponer la continuidad de la función de onda y su derivada:

$$\begin{cases} \text{Paridad par} : \frac{1}{\sqrt{V_0}} = \frac{\cos(s_{2m+1}/2)}{s_{2m+1}/2}, \\ \text{Paridad impar} : \frac{1}{\sqrt{V_0}} = \frac{\sin(s_{2m}/2)}{s_{2m}/2}. \end{cases}$$

Estas ecuaciones trascendentes dan lugar a un número finito de niveles, a no ser que se tome el límite $V_0 \rightarrow \infty$, entonces las ecuaciones pueden resolverse de manera cerrada:

$$\begin{cases} \text{Paridad par} : \cos(s_{2n+1}/2) = 0, \\ \text{Paridad impar} : \sin(s_{2n}/2) = 0. \end{cases} \equiv \psi(-a) = \psi(a) = 0$$

Al tomar este límite, las funciones exponenciales que describían la función de onda fuera del pozo tienden a cero debido a la constante de normalización, y además el número de niveles de energía se vuelve infinito numerable con forma cerrada en el espectro de la energía:

$$E_n = \left(\frac{s_n}{2a}\right)^2 = \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2$$

Esta es la manera pedagógica y sencilla de enseñar el problema, tomando el caso infinito del pozo como un límite del finito, pero lo que no se dice es que es un caso particular de restringir al operador diferencial a un intervalo finito de la recta real.

En la siguiente sección veremos como son las condiciones de contorno más generales que dan lugar a extensiones autoadjuntas de $-\partial_x^2$, siendo $\psi(-a) = \psi(a) = 0$ solo una de ellas.

2.2. Cálculo de las extensiones autoadjuntas

Sea el operador diferencial $H_0 := -d^2/dx^2$, en $L^2(-a, a)$ con $a > 0$. Para definir correctamente este operador, debemos establecer su dominio, $\mathcal{D}(H_0)$. En este caso, $\mathcal{D}(H_0)$ sería el espacio de las funciones $\mathcal{C}^\infty(-a, a)$ tal que ellas y todas sus derivadas se anulen en los puntos $\{-a, a\}$. Entonces el dominio de H_0^\dagger será el espacio de funciones absolutamente continuas en $[-a, a]$ con primera derivada absolutamente continua.

Entonces $H_0 \prec H_0^\dagger$, pues H_0 es simétrico. En su dominio $\mathcal{D}(H_0^\dagger)$ actúa como $-d^2/dx^2$. Los índices de deficiencia vienen dados por:

$$n_\pm = \dim \text{Ker} \left(H_0^\dagger \pm iI \right),$$

Calculemos la dimensión del subespacio de deficiencia positivo,

$$\left(H_0^\dagger + iI \right) \psi(x) = -\psi''(x) + i\psi(x) = 0,$$

Sus soluciones linealmente independientes vienen dadas por:

$$\psi_1(x) = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{i\frac{x}{\sqrt{2}}}; \quad \psi_2(x) = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-i\frac{x}{\sqrt{2}}},$$

Ambas soluciones están en $L^2[-a, a]$, por lo que $n_+ = 2$. De la misma manera, $n_- = 2$. Luego $n_+ = n_- = 2$ y las extensiones autoadjuntas existen al coincidir los índices de deficiencia. Según el teorema de Von Neumann, las extensiones autoadjuntas están en correspondencia biunívoca con las aplicaciones unitarias $U : \text{Ker} (H_0 + iI) \rightarrow \text{Ker} (H_0 - iI)$ [81]. Este conjunto de aplicaciones unitarias, depende de cuatro parámetros reales.

Equivalentemente, y como aparece en [76], U puede escribirse como el conjunto de aplicaciones unitarias que verifica:

$$\begin{pmatrix} 2a\phi'(-a) - i\phi(-a) \\ 2a\phi'(a) + i\phi(a) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 2a\phi'(-a) + i\phi(-a) \\ 2a\phi'(a) - i\phi(a) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

El resultado mostrado en (2.1) se obtiene mediante análisis funcional, pero también es posible llegar a él aplicando cálculo complejo, tal y como hacen en el artículo citado. La idea de la demostración es la siguiente: En $L^2[a, b]$ se da el siguiente producto escalar con $\phi \in \mathcal{D} \left(H_0^\dagger \right)$:

$$\left\langle -\frac{d^2}{dx^2} \phi, \phi \right\rangle = B(\phi, \phi) + \left\langle \phi, -\frac{d^2}{dx^2} \phi \right\rangle, \quad (2.2)$$

Aquí $B(\phi, \phi)$ es la expresión resultante de aplicar la regla de la cadena en la integral para pasar la derivada segunda de un lado del producto escalar, al otro.

$$B(\phi, \phi) = \phi'(a)\phi^*(a) - \phi(a)\phi'^*(a) - \phi'(-a)\phi^*(-a) + \phi(-a)\phi'^*(-a). \quad (2.3)$$

Para que el hamiltoniano sea autoadjunto tiene que cumplirse $B(\phi, \phi) = 0$, haciendo un poco de álgebra con los números complejos:

$$\begin{aligned} & |2a\phi'(-a) - i\phi(-a)|^2 + |2a\phi'(a) + i\phi(a)|^2 \\ & - |2a\phi'(-a) + i\phi(-a)|^2 - |2a\phi'(a) - i\phi(a)|^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Donde podemos identificar que se trata de $|\phi_+|^2 - |\phi_-|^2 = 0$ siendo ϕ_{\pm} las funciones de los núcleos de los subespacios de deficiencia. La manera más general de relacionar dos vectores de \mathbb{C}^2 es mediante una matriz compleja de $U(2)$. La matriz de $U(2)$ que describe las extensiones autoadjuntas de H_0 en $L^2[-a, a]$ puede escribirse como [73]:

$$U = e^{i\psi} \begin{pmatrix} m_0 - im_3 & -m_2 - im_1 \\ m_2 - im_1 & m_0 + im_3 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Donde aparecen cinco parámetros reales, los cuales se reducen a 4 con la condición $m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$ y una fase general $\psi \in (0, \pi)$. Al ser una matriz unitaria de $U(2)$ se puede descomponer en una fase general que multiplica a una combinación lineal de las matrices de Pauli junto a la identidad, es decir $U(2) = U(1) \times SU(2)$, esta descomposición también aparece en los generadores en la interacción electrodébil que permite unificar la interacción electromagnética con la fuerza nuclear débil [105]. Las extensiones autoadjuntas de H_0 , restringido a un intervalo de la recta real, vienen caracterizadas por:

$$\mathcal{D}(H_U) = \left\{ \phi + \phi_+ + U\phi_+ \mid \phi \in \mathcal{D}(H_0), \phi_+ \in \text{Ran} \left(H_0^\dagger + iI \right) \right\}. \quad (2.6)$$

Cada matriz U caracteriza una extensión autoadjunta distinta, que da lugar a unas condiciones de contorno únicas, que derivaran en un espectro y funciones de onda únicas para esa extensión.

Ahora deberíamos ver que significado físico se le asigna a cada uno de los 5 parámetros del problema que caracterizan a las extensiones, para ello tomaremos los siguientes tres tipos de función de onda según el signo de la energía:

- Energía positiva:

$$\phi(x) = A \cos\left(\frac{sx}{2a}\right) + B \sin\left(\frac{sx}{2a}\right), \quad E = \left(\frac{s}{2a}\right)^2, \quad (2.7)$$

- Energía nula:

$$\phi(x) = A + Bx, \quad E = 0, \quad (2.8)$$

- Energía negativa:

$$\phi(x) = A \cosh\left(\frac{rx}{2a}\right) + B \sinh\left(\frac{rx}{2a}\right), \quad E = -\left(\frac{r}{2a}\right)^2. \quad (2.9)$$

En la solución de los libros de texto para el pozo de potencial la energía es proporcional al cuadrado de la etiqueta del nivel ($E \propto n^2$), por ello nos interesa expresar la energía como el cuadrado de otra cantidad. Como estamos haciendo la distinción de energías positivas y negativas, utilizaremos dos cantidades adimensionales, s y r , respectivamente.

Cada tipo de solución da lugar a un sistema homogéneo (2.1), cuyas incógnitas son las constantes de integración (A, B) :

$$\mathcal{N}(\vec{m}, \psi, s) \begin{pmatrix} A(\vec{m}, \psi, s) \\ B(\vec{m}, \psi, s) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

Al ser un sistema de ecuaciones de dimensión dos, la matriz de este tendrá dos autovalores. Para que la solución no sea trivial ($A = 0, B = 0$), se requiere que el determinante de la matriz sea nulo, por lo que, o bien uno de los dos, o los dos autovalores, son nulos, de ahí extraeremos las ecuaciones trascendentes que proporcionaran los niveles de energía. Para caracterizar a cada una de las funciones de onda de cada nivel, necesitamos la expresión de (A, B) , que vendrá dada por el autovector asociado al autovalor nulo del sistema homogéneo definido por (2.10). Realizando los cálculos se llega a que, aunque la matriz del sistema dependa de todos los parámetros, su determinante no depende de m_2 y m_3 [1, 2, 76], propiedad que permitirá representar gráficamente los tipos de niveles más adelante. Así, las ecuaciones trascendentes y autovectores para cada tipo de solución son como sigue:

- Energía positiva:

$$(m_0 + \cos \psi) \sin s + 2s(m_1 - \cos s \sin \psi) - s^2(m_0 - \cos \psi) \sin s = 0, \quad (2.11)$$

- Energía nula:

$$E = 0, m_0 - 2m_1 + \cos \psi - 2 \sin \psi = 0, \quad (2.12)$$

- Energía negativa:

$$(m_0 + \cos \psi) \sinh r + 2r(m_1 - \cos r \sin \psi) + r^2(m_0 - \cos \psi) \sinh r = 0. \quad (2.13)$$

Los niveles de energía vendrán descritos por la resolución numérica de (2.11) y (2.13). En cambio, para las energías nulas, lo que indica (2.12) es la condición que se debe cumplir para que una extensión autoadjunta posea niveles de energía nula. Así, para tratar el caso de energías positivas haremos uso de $s = 2a\sqrt{E}$, y para el caso de energías negativas $r = 2a\sqrt{-E}$. Deberíamos dar un significado a los parámetros que aparecen en estas ecuaciones antes de resolverlas gráficamente. Siguiendo la clasificación de [76] tendremos tres tipos de extensiones autoadjuntas a las que se les atribuye significado físico:

- Extensiones que conservan la **simetría temporal**: Sea la función de onda total para un estado estacionario $\Psi(x, t) = \phi(x)e^{-iEt}$, se dice que la simetría temporal se conserva si bajo $t \rightarrow -t$ es equivalente a $\Psi(x, -t) = \Psi^*(x, t)$. Esto implica que la función de onda dependiente en las variables espaciales satisface $\phi(x) = \phi^*(x)$, por lo que debe ser real. Para poder relacionar esta propiedad con las extensiones

autoadjuntas, consideremos los núcleos de los subespacios de deficiencia, con la siguiente propiedad: $(\phi_+)^* = \phi_-$. Dichos vectores se relacionan por (2.1), por tanto $\det(I - U^*U) = 0$. De este determinante se obtiene la condición de invarianza temporal:

$$m_2 = 0. \quad (2.14)$$

Esta última propiedad puede parecer confusa en tanto que siempre se puede hacer una combinación lineal de la solución de Schrödinger que cumpla $\phi(x) = \phi^*(x)$, y es cierto, pero no cumpliría las condiciones de contorno (2.10) característica de la extensión.

- Extensiones que conservan la **paridad**: Cuando el potencial que describe el sistema es de paridad definida, se suele dar por hecho que las soluciones también lo son, pero esto depende de las condiciones de contorno escogidas. Puede darse el caso que bajo el operador paridad estas funciones de onda obtengan una fase general cuando el sistema es de paridad definida. Se dice que las extensiones autoadjuntas con paridad definida son aquellas que cumplen $|\phi(x)| = |\phi(-x)|$, como las amplitudes (A, B) son los autovectores de la matriz del sistema (2.10), ya tenemos la relación con los parámetros. Además, se dan 3 posibles condiciones de paridad:

$$m_3 = 0, \quad (2.15a)$$

$$\sin(s) = 0, \quad (2.15b)$$

$$(m_3 + \cos \psi) \sin s + 2s(m_2 - \cos s \sin \psi) - s^2(m_3 - \cos \psi) \sin s = 0. \quad (2.15c)$$

- Extensiones que conservan la **positividad**: Esta es la propiedad más abstracta, y no depende un parámetro en concreto. Las energías negativas suelen surgir en potenciales de intensidad infinita en regiones finitas, como en el potencial delta [94, 106], o en el potencial coulombiano. Debido a un teorema demostrado por Naimark [79], de existir energías negativas en un operador autoadjunto, la suma de las multiplicidades de estas tiene que ser igual a la dimensión de los índices de deficiencia. Por lo que, de existir un nivel de energía negativo, la raíz de su energía es solución de la ecuación (2.13), y de no haber otra solución, este nivel es degenerado.

Los tres parámetros restantes, m_0 , m_1 y ψ no tienen significado físico claro, sencillamente afectan al valor de los niveles de energía e influyen en la existencia de energías negativas. Una cuestión interesante es que en (2.11-2.13) no aparecen explícitamente los parámetros m_2 y m_3 , pero sí que influyen de manera implícita al tener la restricción $m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$. Ahora pasaremos a estudiar las extensiones autoadjuntas que nos permitirán sacar resultados explícitos, el caso $m_2 = m_3 = 0$.

Espectro general: (2.11)		
Simetría temporal: (2.11) y $m_2 = 0$		
Simetría espacial:	(2.11) y (2.15a)	$m_2 = 0$
		$m_2 \neq 0$
	(2.11) y (2.15b)	$m_2 = 0$
		$m_2 \neq 0$
	(2.11) y (2.15c)	$m_2 = 0$
		$m_2 \neq 0$

Cuadro 2.1: Lista de los tipos de extensiones autoadjuntas con significado físico claro a partir de los parámetros que caracterizan a cada extensión.

2.2.1. Extensiones autoadjuntas que preservan la paridad y la invarianza temporal.

Resolveremos de manera gráfica las ecuaciones (2.11-2.13) para hacer una clasificación de los tipos de sistemas que surgen de las extensiones autoadjuntas. Nos interesa saber cuáles tienen niveles de energía negativa, la cantidad de nodos del estado fundamental y existencia de estados de energía nula. Solo se tratará el caso $m_2 = m_3 = 0$ al ser el de dificultad intermedia y más tratable. El caso (2.15b) establece el espectro de energías al del pozo infinito ya conocido, solo variando las amplitudes, y (2.15c) puede ayudar a calcular (2.11), pero las expresiones que quedan son intratables [1].

De los cinco parámetros que caracterizan a cada extensión, cuatro de ellos tienen una ligadura: $\vec{m} = (m_0, m_1, m_2, m_3)$ cumplen la condición $\vec{m} \cdot \vec{m} = 1$, por tanto, es un vector unitario en \mathbb{R}^4 . Al tomar $m_2 = m_3 = 0$, pasa a ser un vector unitario de \mathbb{R}^2 , por lo que se puede tomar la siguiente parametrización:

$$m_0 = \cos \theta_0, \quad m_1 = \sin \theta_0. \quad (2.16)$$

De la condición $\det(\mathcal{N}(s, \theta_0, \psi)) = 0$, y con esta parametrización, (2.11) puede ser factorizada en una ecuación del tipo $(s - f_1(\theta_0, \psi, s))(s - f_2(\theta_0, \psi, s)) = 0$, por lo que obtenemos:

$$s = -\cot\left(\frac{s}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta_0 + \psi}{2}\right), \quad (A, B) = (1, 0), \quad (2.17a)$$

$$s = \tan\left(\frac{s}{2}\right) \cot\left(\frac{\theta_0 - \psi}{2}\right), \quad (A, B) = (0, 1). \quad (2.17b)$$

Cada dupla de parámetros $(\theta_0, \psi) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ da lugar a una extensión autoadjunta distinta, cuyas energías positivas son las soluciones de (2.17a-2.17b), teniendo dos series

de funciones de onda, una de paridad par para 2.17a y otra impar 2.17b. Además, dichas ecuaciones trascendentes dan lugar a infinitos niveles de energía positiva, no así para el caso de energías negativas, cuyas ecuaciones son equivalentes a (2.17a-2.17b), pero tomando $s \rightarrow -ir$, es decir, pasando al caso hiperbólico. Las condiciones de contorno que describen a estas extensiones autoadjuntas son:

$$\begin{pmatrix} \phi(a) \\ \phi'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\psi)}{\cos(\theta_0)+\cos(\psi)} & -\frac{\sin(\theta_0)}{\cos(\theta_0)+\cos(\psi)} \\ \frac{\sin(\theta_0)}{\cos(\theta_0)+\cos(\psi)} & -\frac{\sin(\psi)}{\cos(\theta_0)+\cos(\psi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a\phi'(a) \\ 2a\phi'(-a) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Lo que supone una condición de contorno mixta, además, si tomamos $(\theta_0, \psi) = (n\pi, m\pi)$ la matriz va al cero, recuperando las condiciones de contorno $\phi(a) = \phi(-a) = 0$. A diferencia del caso general (2.11-2.13) que dependía de todos los parámetros, ahora las ecuaciones que describen la raíz de la energía son del tipo $f(\theta_0, \psi, s) = 0$, por lo que pueden representarse como superficies en $(0, 2\pi) \times (0, \pi) \times \mathbb{R}$. Para realizar las transformadas supersimétricas nos interesa saber como serán los estados fundamentales y los primeros estados excitados, ya que si existen niveles negativos o nulos, estos serán como muchos, siendo el resto de los infinitos niveles de energía positiva, con lo que representar un intervalo finito de s nos sirve para clasificar las extensiones autoadjuntas. A continuación se presenta un gráfico tridimensional 2.1, en el cual se han realizado secciones de las partes que nos interesan para la clasificación.

La energía deberá de ser calculada de forma numérica en la mayoría de las extensiones, aun así, esta crece tan rápido como n^2 , desviándose del caso de los libros de texto. Debido a que tiene un crecimiento similar a n^2 , para la representación gráfica utilizaremos la raíz de la energía, equispaciando las distintas hojas de la superficie. Para representar las distintas hojas de la ecuación, representaremos s en el eje positivo, y r en el eje negativo

En el siguiente capítulo realizaremos diversas transformadas supersimétricas, y para construir el operador de intercambio, así como el nuevo potencial, necesitamos saber cual va a ser el estado fundamental. Para ello, se han clasificado los primeros niveles positivos, ya que para energías negativas/nulas como mucho hay dos niveles, podemos clasificar los tipos de extensión según las zonas de 2.1, como aparece en la tabla 2.2.

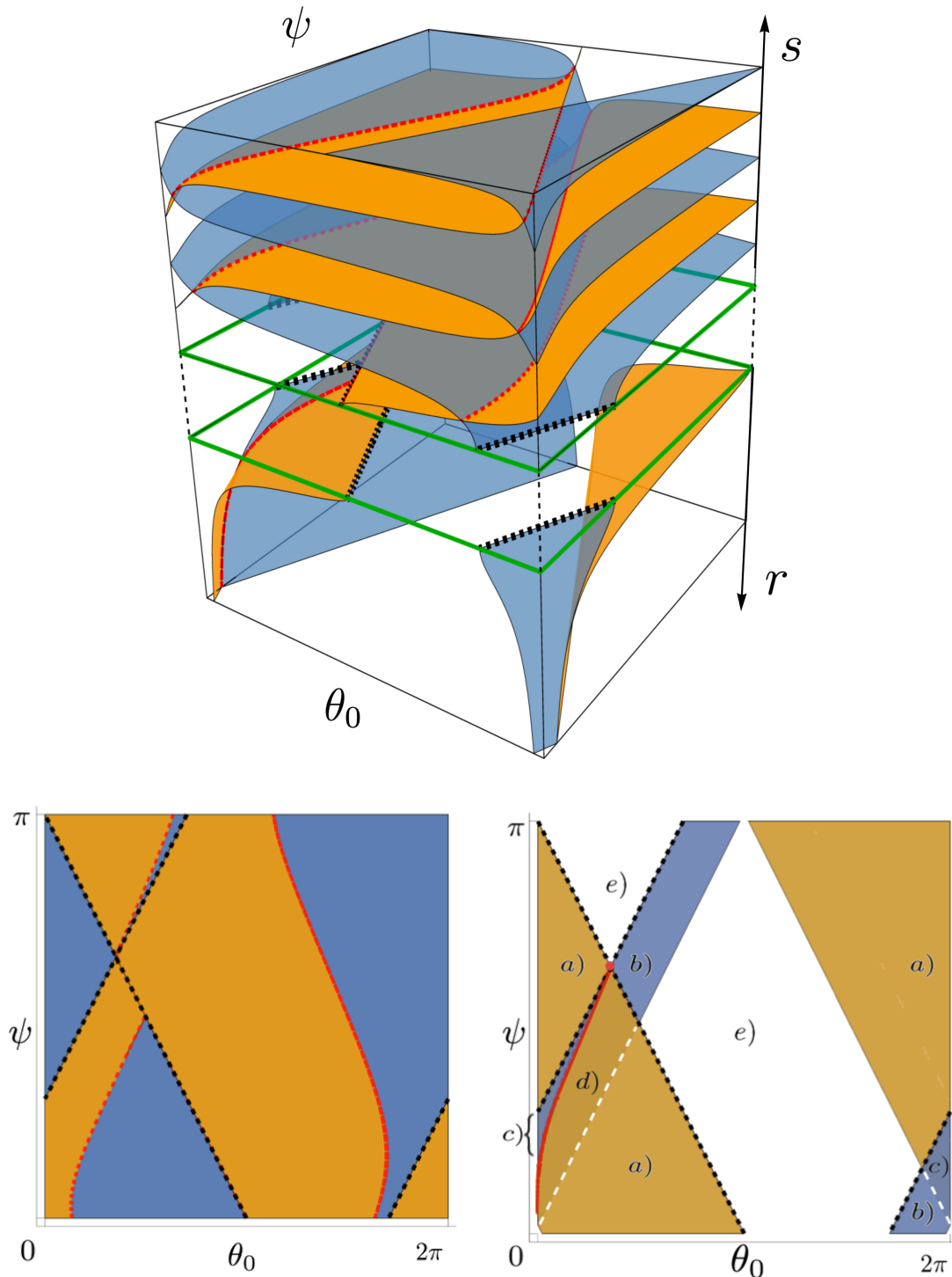


Figura 2.1: Representación tridimensional de las superficies definidas por (2.11-2.13) para $m_2 = m_3 = 0$. Las proyecciones del cuadrante inferior (eje r) y del cuadrante superior (eje S) se muestran debajo, donde se han clasificado las regiones del plano (θ_0, ψ) en función del signo de la energía del estado fundamental y de los primeros estados excitados.

Etiqueta	Estado Fundamental	1 ^{er} excitado	Signo de E_n
a)	Negativo y par	Positivo	(-,+,...)
b)	Negativo e impar	Positivo	(-,+,...)
c)	Negativo y par	Negativo y par	(-,-,+,...)
d)	Negativo e impar	Negativo y par	(-,-,+,...)
e)	Positivo	Positivo	(+,...)
b) \cap d)	Negativo e impar	Nulo y par	(-,0,+,...)
a) \cap c)	Negativo y par	Nulo e impar	(-,0,+,...)
e) \cap b)	Nulo e impar	Positivo	(0,+,+,...)
e) \cap a)	Nulo y par	Positivo	(0,+,...)
Línea roja	Negativo y degenerado	Positivo	(-,+,...)
Punto rojo	Nulo y degenerado	Positivo	(0,+,...)

Cuadro 2.2: Clasificación de las extensiones autoadjuntas para $m_2 = m_3 = 0$ según como es el signo de los dos primeros niveles.

Capítulo 3

Transformadas supersimétricas de las extensiones autoadjuntas del pozo de potencial.

En este capítulo seguimos tratando los resultados de los dos primeros artículos que conforman esta tesis doctoral:

Supersymmetric Partners of the One-Dimensional Infinite Square Well Hamiltonian

M. Gadella¹, J. Hernández-Muñoz², L.M. Nieto¹, C. San Millan¹
[Symmetry 2021, 13\(2\), 350](#)

¹ Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica, and IMUVA,
Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid, Spain

² Departamento de Física Teórica de la Materia Condensada, IFIMAC Condensed Matter Physics Center, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, Spain;

Supersymmetric Partners of the One-Dimensional Infinite Square Well Hamiltonian: Special Cases

M. Gadella¹, C. San Millan¹
[Symmetry 2022, 14\(7\), 1314](#)

¹ Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica, and IMUVA,
Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid, Spain

Primero analizaremos la transformada de primer orden de un caso genérico en el cual no se conserva ninguna de las propiedades. Luego las transformadas supersimétricas ordinarias sucesivas, donde veremos que debido a la invarianza de forma, no implican mayor dificultad que la presentada por la ecuación (2.11) al tener un total de 4 parámetros. Luego, para la transformada confluyente consideramos las extensiones de 2.2 que nos permiten llegar a nuevas soluciones de ecuaciones fuchsianas.

3.1. Caso particular para un valor concreto de los parámetros.

Consideremos una extensión autoadjunta de H_0 que no conmute con el operador paridad ($m_3 \neq 0$), sus funciones de onda serán combinación lineal de las dos soluciones independientes. Además, consideremos que dicha extensión no conserva la reversibilidad temporal ($m_2 \neq 0$). Esta última propiedad implica que entre las dos soluciones linealmente independientes aparece una fase imaginaria. Para ilustrar el ejemplo consideremos el siguiente vector de parámetros que caracteriza a una extensión autoadjunta, como los m_i satisfacen una ecuación del tipo $\sum m_i^2 = 1$, tomar la parametrización de una esfera unitaria en \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} m_0 &= \cos \theta_1 \cos \theta_0, & m_1 &= \cos \theta_1 \sin \theta_0, \\ m_2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2, & m_3 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2. \end{aligned}$$

Tomaremos los siguientes valores para las variables angulares, escogidos para que $m_2 \neq 0$ y $m_3 \neq 0$:

$$\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \psi = \frac{\pi}{10}. \quad (3.1)$$

Estos valores numéricos llevan a una extensión autoadjunta con estado fundamental de energía negativa y degenerada, y una infinidad de estados de energía positiva. Como resultado se obtiene un potencial con parte real e imaginaria, como consecuencia de la no conservación de la reversibilidad temporal. Una de las características de SUSY-QM consiste en que el espectro del hamiltoniano final es el mismo que el de partida, excepto por una cantidad finita de niveles que son eliminados (o agregados) en función de las funciones utilizadas como semilla de la transformación, en este caso obtendremos una serie de energías reales. Una descomposición del potencial obtenido se muestra en 3.1.

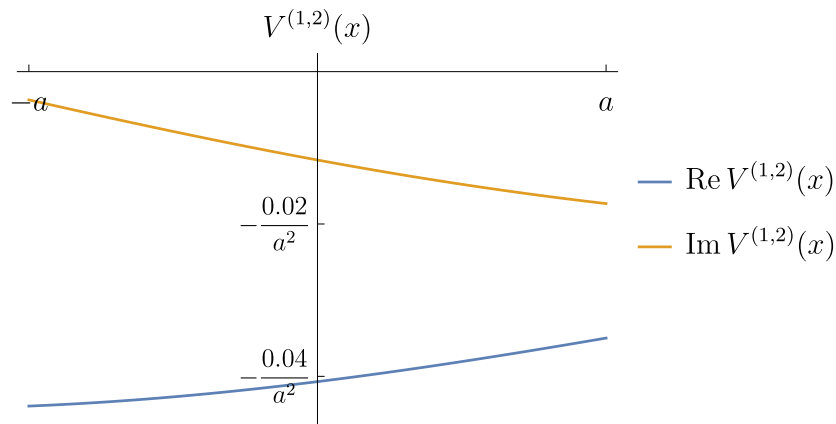


Figura 3.1: Parte real e imaginaria del potencial obtenido a partir del único estado de energía negativa para la extensión autoadjunta descrita en (3.1).

3.2. Transformadas supersimétricas hasta orden ℓ del pozo de potencial

Consideremos una extensión autoadjunta de H_0 tal que $m_2 \neq m_3 \neq 0$, pero que sí cumpla un $s_n = ns_1$ con $s_1 = \sqrt{2aE_1}$, con el objetivo de poder realizar un planteamiento recursivo de varias transformadas SUSY que utilicen el estado fundamental como función semilla. Así, las funciones de onda asignadas a los niveles de energía positiva para H_0 tendrán la siguiente forma:

$$\phi_n(x) = A_n \cos\left(\frac{s_n x}{2a}\right) + B_n \sin\left(\frac{s_n x}{2a}\right) \quad (3.2)$$

Donde el vector de amplitudes (A_n, B_n) es el autovector de (2.10) asignado a la raíz s_n de (2.11). Como queremos ver como plantear SUSY para $m_2 \neq m_3 \neq 0$ lo que implica que $(A_n, B_n) \neq (1, 0) \neq (0, 1)$, no se conservará ni paridad, ni reversibilidad temporal. Los cálculos pueden realizarse mediante dos caminos:

- Planteamiento de SUSY mediante wronskianos.
- Planteamiento diferencial de SUSY a orden 1 y buscar la recurrencia a través de distintos órdenes.

Aquí optaremos por la segunda opción, la primera la utilizaremos en la siguiente sección. Consideremos el nivel $\phi_1^{(1,1)}(x)$ como el estado fundamental y, por tanto, a s_1 como una cantidad proporcional a la raíz de la energía más baja. Para plantear una SUSY, tal que su sistema matricial conserve la supersimetría, debemos tener que el estado fundamental tenga energía nula, por lo que plantearemos las siguientes dos parejas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primer compañero: } H^{(1,1)} = H_0 - \left(\frac{s_1}{2a}\right)^2, \\ \text{Segundo compañero: } H^{(1,2)} = H_0 - \left(\frac{s_1}{2a}\right)^2 - 2\frac{d^2}{dx^2} \log(\phi_0^{(1,1)}(x)), \\ \text{Espectro de energía: } E_n^{(1)} = E_n - E_0 = \left(\frac{s_n}{2a}\right)^2 - \left(\frac{s_1}{2a}\right)^2. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

El primer compañero es el hamiltoniano original con un desplazamiento en el origen de energías. Planteamos el superpotencial:

$$W^{(1)}(x) = -\frac{d}{dx} \log \phi_1(x),$$

Como todo va a quedar en función del logaritmo del nivel considerado para la semilla de la transformación, y ya que las funciones consideradas son sencillas en comparación con otros sistemas con potenciales más complicados, un cambio de variable dado por:

$$z = -\frac{d}{dx} \log \phi_1(x),$$

Capítulo 3. Transformadas supersimétricas de las extensiones autoadjuntas del pozo de potencial.

nos permite escribir la ecuación de Schrödinger: $H^{(1,2)}\phi_n^{(1,2)} = E_n^{(1)}\phi_n^{(1,2)}$ como sigue:

$$(1 - z^2)\frac{d^2}{dz^2}\phi^{(1,2)}(z) - 2z\frac{d}{dz}\phi^{(1,2)}(z) + \left(2 - \frac{(s_n/s_1)^2}{1 - z^2}\right)\phi^{(1,2)}(z) = 0 \quad (3.4)$$

La cual es la ecuación diferencial de las funciones asociadas de Legendre $P_\ell^n(z)$ con $\ell = 1$, así, para $s_n/s_1 = n$. Tendremos que las transformadas SUSY de orden 1 vienen dadas por las funciones asociadas de Legendre de segunda especie [104]:

$$\phi_n^{(1,2)}(x) = Q_1^n \left(i \frac{A_1 \sin\left(\frac{s_1 x}{2a}\right) - B_1 \cos\left(\frac{s_1 x}{2a}\right)}{A_1 \cos\left(\frac{s_1 x}{2a}\right) + B_1 \sin\left(\frac{s_1 x}{2a}\right)} \right). \quad (3.5)$$

Aquí $n \geq 2$, ya que el primer nivel $n = 1$ ha sido eliminado al utilizarlo como función semilla. Además, las funciones asociadas de Legendre de segunda especie presentan singularidades logarítmicas cuando el segundo índice es igual o menor que el primero. Las funciones asociadas de Legendre de primera especie $P_\ell^n(z)$ no aparecen debido a que para $n > \ell$ valen directamente cero. Para obtener transformadas que las involucren, deberíamos haber considerado $s_n/s_1 \neq n \in \mathbb{N}$. Si repetimos el proceso con $n = 2$ en (3.5) obtendríamos otra pareja de hamiltonianos supersimétricos, después de haber realizado el desplazamiento en la energía:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primer partner: } H^{(2,1)} = H^{(1,2)} - E_2^{(1)}, \\ \text{Segundo partner: } H^{(2,2)} = H^{(2,1)} - 2\frac{d^2}{dx^2} \log \phi_2^{(1,2)}(x), \\ \text{Espectro de energía: } E_n^{(2)} = E_n - E_2 = \left(\frac{s_n}{2a}\right)^2 - \left(\frac{s_2}{2a}\right)^2. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Tomando el mismo cambio de variable independiente que antes, se llega a un resultado similar al de (3.4) pero con $\ell = 2$. Así, la segunda pareja de la segunda transformada tiene las siguientes funciones de onda:

$$\phi_n^{(2,2)}(x) = Q_2^n \left(i \frac{A_1 \sin\left(\frac{s_1 x}{2a}\right) - B_1 \cos\left(\frac{s_1 x}{2a}\right)}{A_1 \cos\left(\frac{s_1 x}{2a}\right) + B_1 \sin\left(\frac{s_1 x}{2a}\right)} \right) \quad (3.7)$$

Por tanto, de manera recursiva, una ℓ transformada tendrá las siguientes funciones de onda y potencial en su segunda pareja, y espectro:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Segundo partner a orden } \ell: H^{(\ell,2)} = H^{(\ell,1)} - \left(\frac{s_{\ell-1}}{2a}\right)^2 - 2\frac{d^2}{dx^2} \log \phi_{\ell-1}^{(\ell-1,2)}(x), \\ \text{Espectro de energía: } E_n^{(\ell)} = E_n - E_2 = \left(\frac{s_n}{2a}\right)^2 - \left(\frac{s_\ell}{2a}\right)^2, \\ \text{Función de onda: } \phi_n^{(\ell,2)}(x) = Q_\ell^n \left(i \frac{A_1 \sin\left(\frac{s_1 x}{2a}\right) - B_1 \cos\left(\frac{s_1 x}{2a}\right)}{A_1 \cos\left(\frac{s_1 x}{2a}\right) + B_1 \sin\left(\frac{s_1 x}{2a}\right)} \right) \end{array} \right.$$

3.3. Transformadas supersimétricas de las extensiones autoadjuntas

$m_2 = m_3 = 0.$

Este resultado es la invarianza de forma del potencial Pöschl-Teller [12], generalizado al caso de que la extensión autoadjunta no conserve paridad ni reversibilidad temporal. El esquema seguido es como aparece en la figura 3.2.

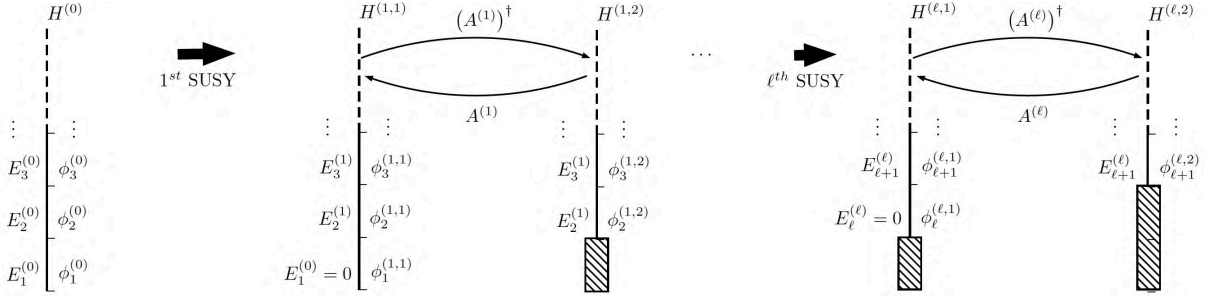


Figura 3.2: Transformadas sucesivas conservando la SUSY matricial a primer orden de las extensiones autoadjuntas con $s_n/s_1 = n$ del pozo de potencial.

3.3. Transformadas supersimétricas de las extensiones autoadjuntas $m_2 = m_3 = 0.$

La sección anterior es la tratada en [1], y aunque extiende los resultados conocidos, no deja de ser intratable al tener que resolver (2.11) para sus 4 parámetros y tener que lidiar con la condición de no existencia de estados de energía negativa y nula. En cambio, los resultados obtenidos en [2] permiten llegar a sistemas más concretos al tomar $m_3 = m_2 = 0$. Tomaremos la transformada confluyente en casos degenerados y la ordinaria en el resto, aunque siempre es posible tomar una transformada confluyente.

3.3.1. Estado fundamental de energía nula y degenerado.

Esta extensión se da, en el plano $E = 0$, para la intersección entre las rectas $\psi = \theta_0 + 2 \operatorname{arccot}(2)$ y $\psi = -\theta_0 + \pi$ representada en la figura 2.1 como la intersección de las regiones (a), (b), (c) y (d). Esta extensión es única, al tratarse del único punto entre las dos superficies que definen los valores de la energía y el plano $E = 0$.

$$\{\phi_n(x)\}_{n=0}^\infty = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2a}}, x, \cos\left(\frac{s_2 x}{2a}\right), \sin\left(\frac{s_3 x}{2a}\right), \cos\left(\frac{s_4 x}{2a}\right), \dots \right\}, \quad (3.8a)$$

$$\{E_n\}_{n=0}^\infty = \left\{ 0, 0, \left(\frac{s_2}{2a}\right)^2, \left(\frac{s_3}{2a}\right)^2, \dots \right\}, \quad (3.8b)$$

Si sustituimos los valores de (θ_0, ψ) en (2.17a-2.17b) obtenemos las ecuaciones trascendentes para calcular los niveles de energía positivos (3.9). Mientras que para $s_{2n} = 2n\pi$ tenemos una forma cerrada, no es así para el caso de paridad impar, teniendo que calcular los primeros niveles numéricamente, excepto para altas energías, donde se obtiene para valores de E suficientemente altos $s_{2n+1} \approx (2n + 1)\pi$.

$$\begin{cases} \text{Paridad par: } \cos\left(\frac{s_{2n}x}{2a}\right), & s_{2n} \sin(s_{2n}/2) = 0, \\ \text{Paridad impar: } \sin\left(\frac{s_{2n+1}x}{2a}\right), & s_{2n+1} \cot(s_{2n+1}/2) = 2, \end{cases} \quad (3.9)$$

Hay dos opciones para construir la función semilla de la transformación: o con el nivel constante o con el nivel lineal.

Transformada confluyente con el nivel de energía nula y paridad par.

Calculando función semilla, función de onda generalizada, y el nuevo potencial:

$$w_0(x) = w_0 - \int \frac{1}{2a} dx' = w_0 - \frac{x}{2a}, \quad (3.10a)$$

$$v_0(x) = u_0(x) \int \frac{w(x')}{u(x')^2} dx' = 2aw_0x - x^2/2, \quad (3.10b)$$

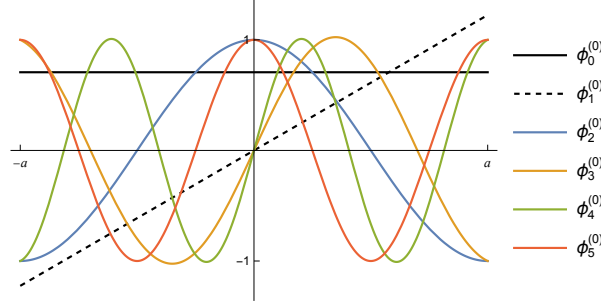
$$\tilde{V}_0^{(2,2)}(x) = -2\partial_x^2 \log(w_0(x)) = \frac{2}{(x - 2aw_0)^2}. \quad (3.10c)$$

Para evitar singularidades en el potencial (3.10) solo tenemos que tomar $|w_0| > 1/2$. El potencial obtenido lleva a una ecuación de Bessel con índice $3/2$, tomando el cambio de variable $x = (t + 1)2aw_0$:

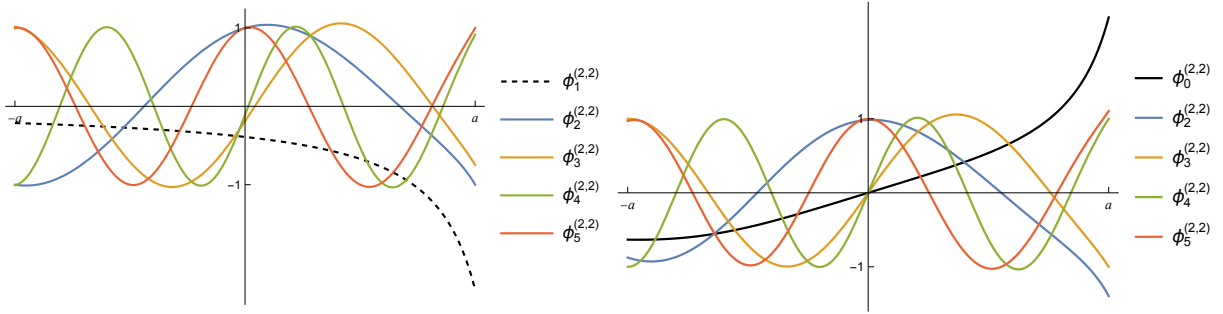
$$\begin{aligned} \phi_n^{(2,2)}(x) = & C_1 \sqrt{\frac{x}{2aw_0} - 1} J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{s_n x}{2a} - s_n w_0\right) + \\ & + C_2 \sqrt{\frac{x}{2aw_0} - 1} J_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{s_n x}{2a} - s_n w_0\right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

El como afecta la transformada a los niveles se muestra en la subfigura 3.3c, se ha tomado un ω_0 real fuera del intervalo del pozo para evitar singularidades, pero podríamos haber tomado un valor complejo perfectamente, llevándonos a un potencial complejo.

3.3. Transformadas supersimétricas de las extensiones autoadjuntas
 $m_2 = m_3 = 0$.



(a) Extensión autoadjunta con dos niveles de energía nula.



(b) Transformada SUSY-C a partir de $\phi_1^{(0)} = x$. (c) Transformada SUSY-C a partir de $\phi_0^{(0)} = 1$.

Figura 3.3: Extensión autoadjunta de H_0 con dos niveles de energía nula, y las dos transformadas confluentes de sus primeros niveles a partir de ellos.

Transformada confluyente con el nivel de energía nula y paridad impar.

Repitiendo el proceso, pero ahora con $\phi_1(x) = x$, obtenemos (3.12), con una mayor complejidad:

$$w_1(x) = w_0 - \int^x \frac{3x'^2}{2a^3} dx' = w_0 - \frac{x^3}{2a^3}, \quad (3.12a)$$

$$v_1(x) = u_1(x) \int \frac{w_1(x')}{u_1(x')^2} dx' = -\sqrt{\frac{1}{a^3} \frac{(4a^3w_0 + x^3)}{2\sqrt{6}}}, \quad (3.12b)$$

$$\tilde{V}_1^{(2,2)}(x) = \frac{6x}{4a^3w_0 + x^3} - \frac{72a^3w_0x}{(4a^3w_0 + x^3)^2}. \quad (3.12c)$$

Atendiendo al potencial de (3.12), la ecuación de Schrödinger asociada es una ecuación fuchsiana de 4 puntos con una confluencia en el infinito [2], donde los tres puntos regulares restantes son las raíces cúbicas de $-4a^3w_0$, pudiendo regular donde aparecerán.

Como consecuencia de introducir la transformada confluyente, el potencial de $H^{(2,2)}$ ha perdido la paridad, pudiendo regular la aparición de la singularidad fuera del intervalo $(-a, a)$, o incluso llevándola al plano complejo, lo que inevitablemente llevará a un

potencial con parte compleja, pero hará desaparecer la singularidad.

3.3.2. Estado fundamental de energía negativa y degenerado.

La intersección de las dos superficies en el eje r en 2.1 está representada como una curva roja, en dicha intersección se da la situación de que ambos niveles de energía negativa tienen el mismo valor. Debido a la no linealidad de las ecuaciones trascendentes, no podemos dar una parametrización de la curva, para dar una dependencia explícita del nivel degenerado con los parámetros (ψ, θ_0) . En este caso, las funciones de onda que manejaremos, son las soluciones hiperbólicas de H_0 , junto a los niveles positivos, siendo el conjunto de autofunciones:

$$\{\phi_n^{(0)}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \cosh\left(\frac{r_0 x}{2a}\right), \sinh\left(\frac{r_0 x}{2a}\right), \cos\left(\frac{s_2 x}{2a}\right), \sin\left(\frac{s_3 x}{2a}\right), \dots \right\},$$

$$\{E_n^{(0)}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ -\left(\frac{r_0}{2a}\right)^2, -\left(\frac{r_0}{2a}\right)^2, \left(\frac{s_2}{2a}\right)^2, \left(\frac{s_3}{2a}\right)^2, \dots \right\}$$

A diferencia del caso anterior, no podemos dar una estimación o una ecuación concreta para los niveles de energía, debido a la imposibilidad de encontrar una parametrización para las dos superficies (2.17a-2.17b) y así calcular su intersección.

Si realizamos una transformada SUSY ordinaria con uno de los dos niveles negativos obtendremos un potencial Pöschl-Teller. Por lo que plantearemos dos transformadas confluentes, una con $u_0 = \phi_0^{(0)}$, y otra con $u_1 = \phi_1^{(0)}$. Utilizaremos la segunda igualdad de (1.1.3), en la que como constate de integración se utiliza la ubicación de la singularidad y no el valor de la función en ese punto. Así, los dos potenciales resultantes son:

$$V_0^{(2,2)}(x) = \frac{2r_0^2 \left(\sinh\left(\frac{r_0 x}{a}\right) \left(a \sinh\left(\frac{r_0 x_0}{a}\right) + r_0 (x_0 - x) \right) + 2a \left(\cosh\left(\frac{r_0 x}{a}\right) + 1 \right) \right)}{a \left(a \left(\sinh\left(\frac{r_0 x}{a}\right) - \sinh\left(\frac{r_0 x_0}{a}\right) \right) + r_0 (x - x_0) \right)^2}, \quad (3.13a)$$

$$V_1^{(2,2)}(x) = \frac{2r_0^2 \left(\sinh\left(\frac{r_0 x}{a}\right) \left(a \sinh\left(\frac{r_0 x_0}{a}\right) + r_0 (x - x_0) \right) - 2a \left(\cosh\left(\frac{r_0 x}{a}\right) - 1 \right) \right)}{a \left(-a \sinh\left(\frac{r_0 x}{a}\right) + a \sinh\left(\frac{r_0 x_0}{a}\right) + r_0 (x - x_0) \right)^2}. \quad (3.13b)$$

A diferencia del artículo [2], aquí se han representado en función de x_0 y no de w_0 . Bajo el límite $r_0 \rightarrow 0$, estos potenciales dan como resultado los presentados en la subsección anterior (3.10) y (3.12), además no podemos clasificarlos dentro de ecuaciones conocidas, ya que sus puntos singulares se calculan a través de las ecuaciones trascendentes que surgen al calcular los ceros del denominador.

3.3.3. Estado fundamental de energía negativa y primer excitado nulo.

Este tipo de extensión se da para dos rectas en el plano $E = 0$: $\psi = \theta_0 + 2 \operatorname{arccot}(2)$ y $\psi = \theta_0 + 2 \operatorname{arccot}(2) + 2\pi$ como la intersección de (a) y (c), tendremos estados de energía nula (paridad par) por encima de estados de energía negativa (paridad impar). En $\psi = -\theta_0 + 2\pi$ como la intersección de (b) y (d), tendremos estados de energía nula (paridad impar) por encima de estados de energía negativa (paridad par).

Estado fundamental de energía negativa impar, y primer excitado nulo par.

$$\{\phi_n^{(0)}(x)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sinh\left(\frac{r_0 x}{2a}\right), \frac{1}{\sqrt{2a}}, \cos\left(\frac{s_2 x}{2a}\right), \sin\left(\frac{s_3 x}{2a}\right), \dots \right\},$$

Realizar una transformada de primer orden con $\phi_0^{(0)}$ nos lleva al segundo tipo de potencial Pöschl-Teller de solución conocida [107], y una transformada de primer orden con el nivel constante ($\phi_1^{(0)} = cte$) lleva a la derivada de los niveles. Una transformada ordinaria de segundo orden que utilice ambos niveles, nos lleva a usar como función semilla el wronskiano de los dos primeros niveles, que lleva a un potencial Pöschl-Teller:

$$V_0^{(2,2)} = -2 \frac{d^2}{dx^2} \log \mathcal{W} \left(\sinh\left(\frac{r_0 x}{2a}\right), \frac{1}{\sqrt{2a}} \right) = - \left(\frac{r_0}{2a}\right)^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{r_0 x}{2a}\right) \quad (3.14)$$

La transformada de segundo orden vendrá dada por las soluciones de este potencial con las energías de las que hayamos partido.

Estado fundamental de energía negativa par, y primero excitado nulo impar (zona amarilla).

Esta extensión aparece para la recta del plano $E = 0$ con $\psi = \pi - \theta_0$ como la intersección de (a) y (c). La distribución de los niveles y sus funciones de onda es como sigue:

$$\{\phi_n^{(0)}(x)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \cosh\left(\frac{r_0 x}{2a}\right), x, \cos\left(\frac{s_2 x}{2a}\right), \sin\left(\frac{s_3 x}{2a}\right), \dots \right\},$$

Las transformadas de primer orden con uno de los dos niveles llevan a resultados similares a los anteriores, si se parte del nivel negativo se obtiene un Pöschl-Teller convencional y para el nivel de energía nula se obtiene una ecuación de Bessel similar a la obtenida en el caso confluyente para el nivel constante (3.10). En cambio, si consideramos la transformada de segunda orden:

$$\begin{aligned}
 V_0^{(2,2)} &= -2 \frac{d^2}{dx^2} \log \mathcal{W} \left(\cosh \left(\frac{r_0 x}{2a} \right), x \right) = \\
 &= \frac{r_0^2}{2a^2} \frac{\cosh^2 \left(\frac{r_0 x}{2a} \right) + \left(\frac{r_0 x}{2a} \right)^2}{\left(\left(\frac{r_0 x}{2a} \right) \sinh \left(\frac{r_0 x}{2a} \right) - \cosh \left(\frac{r_0 x}{2a} \right) \right)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Estamos ante otro caso en el cual no podemos encontrar un sistema equivalente mediante un cambio de variable independiente debido a la complejidad del denominador del potencial.

3.4. Conclusiones

A lo largo de los dos últimos capítulos se ha introducido el sistema a estudiar, el operador energía cinética restringido a un intervalo. La restricción al intervalo junto a la necesidad de que sea autoadjunto lleva a dos características: El espectro siempre toma valores reales, por lo que no hay resonancias, y además siempre se presentarán infinitos niveles de energía. La definición de la extensión es equivalente a la restricción del operador diferencial a un conjunto de su dominio que cumplirá ciertas características. Dichas características definen las propiedades que cumplen las funciones de onda, dicha información se encuentra implícitamente en los parámetros que definen a la extensión. Así, obtenemos un taller de aplicación de SUSY donde podemos 'jugar' con las características de la función de semilla para iniciar la transformación, así como mezclar distintos tipos de función de onda para la obtención de potenciales exóticos. En este capítulo solo se han presentado 3 aplicaciones de las transformadas supersimétricas a 3 tipos de extensión, otros casos, como la degeneración de los niveles positivos, casos numéricos, y otras características, se presentan en los artículos indexados, así como ciertas demostraciones sobre la SUSY-Confluente.

Faltaría un estudio de la hermiticidad de los hamiltonianos obtenidos mediante una transformada SUSY, es decir, si son auto-adjuntos después de la transformada. Este estudio requeriría estudiar si el dominio de llegada cumple las características necesarias: el conjunto de las funciones de onda es cerrado, etc...

Después de ese estudio, donde se aseguraría que el hamiltoniano resultante de la transformada SUSY es simétrico, habría que comprobar que existe esa matriz de $U(2)$ que da las condiciones de contorno. Esta parte ya se ha realizado en [108], donde se relacionan los valores del superpotencial en la frontera del dominio, con la matriz de $U(2)$ que debe darnos la condición de contorno para que el hamiltoniano sea auto-adjunto.

Capítulo 4

Transformadas supersimétricas del potencial Rosen-Morse II.

Este capítulo es una adaptación del tercer y último artículo que conforma esta tesis doctoral:

SUSY partners and S-matrix poles of the one-dimensional Rosen–Morse II potential

C. San Millan¹, M. Gadella¹, Şengül Kuru², J. Negro¹

Eur. Phys. J. Plus **138**, 857 (2023)

¹ Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica, and IMUVA, Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid, Spain

² Department of Physics, Faculty of Science, Ankara University, 06100 Ankara, Türkiye

En los capítulos anteriores hemos estudiado la aplicación de SUSY a las extensiones autoadjuntas del hamiltoniano libre en un intervalo finito. La restricción a una pequeña zona de todo el espacio lleva a unas condiciones de contorno que garantizan un espectro infinito numerable. En este capítulo estudiaremos las transformadas supersimétricas del potencial Rosen-Morse II, un potencial unidimensional, el más complicado dentro de los potenciales unidimensionales con función de onda y espectro en forma cerrada. Primero se realizará un estudio de su matriz S , obteniendo bajo que condiciones se tienen distintos tipos de polos, y, por tanto, que tipos de estados físicos se pueden obtener. Luego veremos como los criterios para que un polo de la matriz S sea ligado coincide con la integral de normalización de las funciones de onda.

Seguidamente, estudiaremos cuando dichas funciones no presentan nodos, condición necesaria para ser función semilla de una transformada SUSY. Veremos como para los tres tipos de polo que se obtienen del estudio de la matriz S se pueden definir tres tipos de transformadas supersimétricas de primer orden. Por último, se demostrarán una serie de propiedades de los operadores de intercambio, que podrían llegar a simplificar el cálculo de los operadores escalera en un futuro.

4.1. Potencial Rosen-Morse II.

En el estudio de moléculas poliatómicas se toma una serie de aproximaciones para evitar el problema de muchos cuerpos, la aproximación más conocida es la de Born-Oppenheimer [109]. En la aproximación de BO se considera que, al ser la masa de los núcleos atómicos varios órdenes de magnitud mayor que la de los electrones, estos se mueven en escalas de tiempo distintas, lo que permite expresar el hamiltoniano molecular como el hamiltoniano de átomos y electrones por separado, despreciando la correlación entre sus funciones de onda y efectos de estructura fina e hiperfina:

$$H_{\text{molecular}} = H_{\text{electrónico}} + H_{\text{vibracional}} + H_{\text{rotacional}} + H_{\text{espín nuclear}}$$

Esto no implica que en $H_{\text{electrónico}}$ se desprecie la naturaleza de los núcleos atómicos, sino que se considera que al moverse los electrones más rápido que los núcleos, estos sentirán un potencial electrostático debido a un esqueleto atómico, percibiendo los núcleos localizados siempre en su posición de equilibrio.

Por otro lado, se consideran tres hamiltonianos distintos para la descripción de los núcleos que conforman el esqueleto atómico. Para simplificar el tratamiento de $H_{\text{vibracional}}$ se toma la serie de Taylor del potencial que describe la vibración, truncando dicha serie a segundo orden para aproximarla a un oscilador armónico.

Esa aproximación no tiene en cuenta efectos anarmónicos, los cuales pueden ser importantes en magnitud en comparación con los primeros términos de la serie, a la hora de tratar la ecuación de Schrödinger, si realizamos el desarrollo hasta cuarto orden del potencial, podría tratarse el estudio de las funciones de onda vibracionales con la función triconfluente de Heun [110]. El problema de tratar el potencial mediante una serie de Taylor, es que un potencial polinómico no es confinante, al no desvanecerse en el infinito, esto llevará a un espectro de energías vibracionales infinito numerable, cuando la molécula tendrá un número finito de estados vibracionales.

Por tanto, necesitamos un potencial que se aproxime al potencial real, pero con ecuación de Schrödinger que se pueda resolver de manera cerrada, aquí entran distintos tipos de potencial que se aproximan al potencial de vibración molecular: el potencial de Lennard-Jones, de Eckart, o el potencial de Rosen-Morse II. El primero mencionado no tiene solución por serie de potencias, el resto y sus variaciones, vienen expresados por funciones exponenciales o hiperbólicas, no son la forma exacta del potencial vibracional, pero se ajustan bastante bien a él, además, al desvanecerse en el infinito, dan lugar a espectros finitos.

Para la aplicación de SUSY en sistemas de espectro finito se ha escogido el potencial Rosen-Morse II, ya que al ofrecer más parámetros libres que otros potenciales hiperbólicos, da más juego en sus propiedades. Además, su asimetría nos ofrece otras propiedades físicas interesantes.

El potencial Rosen-Morse II [111] se introduce para estudiar de manera fenomenológica el potencial vibracional de moléculas poliatómicas. En el artículo original se aplica al

espectro vibracional del NH_3 . Este potencial pertenece a la clase de potenciales invariantes de escala (shape-invariance) [12], por lo que las transformadas SUSY ordinarias que utilizan como función semilla el estado fundamental, dejan invariante la dependencia funcional del potencial, solo variando sus parámetros, alterando su profundidad, y, por tanto, su cantidad de estados ligados. El sufijo ‘II’ se utiliza para recalcar que es el caso hiperbólico, siendo el Rosen-Morse I el potencial trigonométrico, el cual es periódico, no desarrollaremos este último, el cual ya ha sido abordado en la bibliografía previa [14].

La expresión del potencial aplicado a una dimensión viene dada por:

$$V_\lambda(x) = - \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \text{sech}^2 x + 2\beta \tanh x \quad (4.1)$$

El parámetro λ es el que le da profundidad al pozo de potencial, además el potencial es simétrico bajo la operación $\lambda \rightarrow -\lambda$. El parámetro β es el término que da la asimetría al potencial, además, tomar $\beta \rightarrow -\beta$ es equivalente a aplicar el operador paridad, por lo que podemos considerar $\beta \geq 0$ sin ninguna pérdida de generalidad, el tomar $\beta = 0$ lleva a un potencial Pöschl-Teller, el cual ya ha aparecido en el estudio de las extensiones auto-adjuntas, solo que allí teníamos un espectro infinito por estar restringidos a un intervalo finito de la recta real. Consideraremos $\lambda > 1/2 + \beta$ y $\beta \geq 0$, siendo ambos parámetros reales, el caso de parámetros complejos lleva a otros casos interesantes, como la aparición de estados resonantes o violación de simetría PT al tener el potencial términos imaginarios [52]. Al tratarse de un potencial no confinante, podemos calcular su matriz S para estudiar los estados de este. La ecuación de Schrödinger asociada al potencial es:

$$\begin{aligned} H_\lambda \Psi(x) &= E \Psi(x), \\ -\frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + V_\lambda(x) \Psi(x) &= E \Psi(x). \end{aligned}$$

Tomando un cambio de constantes para E y β dado por:

$$k = \sqrt{E + 2\beta}, \quad k' = \sqrt{E - 2\beta}. \quad (4.2)$$

La solución a la ecuación de Schrödinger es:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= A\psi(x) + B\phi(x) \quad (4.3) \\ &= A(1 - \tanh(x))^{i\frac{k'}{2}} (1 + \tanh(x))^{i\frac{k}{2}} {}_2F_1 \left(\frac{\frac{1}{2} - \lambda + i\frac{k}{2} + i\frac{k'}{2}}{1 + ik}, \frac{\frac{1}{2} + \lambda + i\frac{k}{2} + i\frac{k'}{2}}{2}; \frac{1 + \tanh(x)}{2} \right) \\ &+ B(1 - \tanh(x))^{-i\frac{k'}{2}} (1 + \tanh(x))^{-i\frac{k}{2}} {}_2F_1 \left(\frac{\frac{1}{2} - \lambda - i\frac{k'+k}{2}}{1 - ik}, \frac{\frac{1}{2} + \lambda - i\frac{k'+k}{2}}{2}; \frac{1 + \tanh(x)}{2} \right), \end{aligned}$$

Las dos soluciones linealmente independientes vienen dadas por $\psi(x)$ y $\phi(x)$. Ahora, para calcular los polos de la matriz S , se procede como en el capítulo 1, se calcula la forma

asintótica de (4.3), de manera que en el límite por la izquierda se obtiene la combinación lineal de dos ondas, una que llega al potencial y otra que sale de él, ambas con momento k , y por la derecha una onda que llega del infinito y otra que sale del potencial, con momento k' . Entonces calculando la matriz de transferencia se obtiene que esta es:

$$T(k, k') = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(-k, -k') & t(-k, k') \\ t(k, -k') & t(k, k') \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Donde $T_{22} = t(k, k')$ es la siguiente función:

$$t(k, k') = \frac{\Gamma(1 - ik) \Gamma(-ik')}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda - i\frac{k}{2} - i\frac{k'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda - i\frac{k}{2} - i\frac{k'}{2}\right)}. \quad (4.5)$$

La matriz S se relaciona con la matriz de transmisión T mediante la siguiente relación:

$$S = \frac{1}{T_{22}} \begin{pmatrix} -T_{21} & 1 \\ \det(T) & T_{12} \end{pmatrix}.$$

Por lo que para buscar los polos de la matriz S hay que buscar los ceros de $T_{22} = t(k, k')$. Esto lleva a dos condiciones que cuantifican los momentos de entrada/salida y, por tanto, la energía:

$$\frac{1}{2} - \lambda - \frac{i}{2}(k + k') = -n, \quad (\text{Condición a.})$$

$$\frac{1}{2} + \lambda - \frac{i}{2}(k + k') = -n. \quad (\text{Condición b.})$$

Tomamos $n \in \mathbb{N}$ para asegurar que las funciones gamma del denominador de T_{22} vayan al infinito. No es necesario que ambas condiciones se den a la vez, es más, de darse a la vez, implicaría que el término que genera el pozo Pöschl-Teller vale cero si el número natural es el mismo, recuperando un caso ya estudiado en el cual no había estados ligados [112].

El valor de los momentos de entrada/salida y de la energía para las dos condiciones aparecen las ecuaciones de la tabla 4.1:

Para un mismo hamiltoniano H_λ , tenemos $H_\lambda = H_{-\lambda}$ ya que el potencial tiene esa simetría $V_\lambda = V_{-\lambda}$, esto implica que H_λ tendrá dos series de autovalores, una dada por Condición a. y otra por Condición b.. Esto no quiere decir que las energías y momento tengan la misma simetría, ya que entonces no tendríamos dos series de autovalores para H_λ .

Para ver cuál de las dos condiciones producen funciones de onda de cuadrado integrable, tendremos que calcular la parte imaginaria de los momentos con parte real nula, y deducir para que n, λ y β estos se encuentran en el semieje imaginario positivo, no obstante, en la siguiente sección vamos a derivarlo mediante las propiedades de las funciones que describirán nuestros estados de cuadrado integrable: los polinomios de Jacobi.

4.2. Polinomios de Jacobi y condición de cuadrado integrable para las funciones del Rosen-Morse II.

Momento de entrada k	
Condición a	$-ik_{\lambda,n} = (\lambda - 1/2 - n) - \frac{\beta}{\lambda - 1/2 - n}, \quad (4.7a)$
Condición b	$-ik_{-\lambda,n} = -(\lambda + 1/2 + n) + \frac{\beta}{\lambda + 1/2 + n}, \quad (4.7b)$
Momento de salida k'	
Condición a	$-ik'_{\lambda,n} = (\lambda - 1/2 - n) + \frac{\beta}{\lambda - 1/2 - n}, \quad (4.8a)$
Condición b	$-ik'_{-\lambda,n} = -(\lambda + 1/2 + n) - \frac{\beta}{\lambda + 1/2 + n}, \quad (4.8b)$
Energía E	
Condición a	$E_{\lambda,n} = -(\lambda - 1/2 - n)^2 - \frac{\beta^2}{(\lambda - 1/2 - n)^2}, \quad (4.9a)$
Condición b	$E_{-\lambda,n} = -(\lambda + 1/2 + n)^2 - \frac{\beta^2}{(\lambda + 1/2 + n)^2}. \quad (4.9b)$

Cuadro 4.1: Valores de (k, k', E) para las dos condiciones de polo de la matriz S .

4.2. Polinomios de Jacobi y condición de cuadrado integrable para las funciones del Rosen-Morse II.

Adelantando resultados, las funciones $\phi(x)$ de (4.3) van a ser las funciones de cuadrado integrable, ya que las condiciones de la matriz S hacen que una de las dos primeras entradas de la función hipergeométrica que la describe, sea igual a un entero negativo, truncando la serie infinita que describe la hipergeométrica [32]. Queremos demostrar que el criterio de polo para un estado ligado en la matriz S coincide con el método de forzar el valor de los parámetros para que la función de onda sea de cuadrado integrable, para ello reescribimos $\phi(x)$ como un polinomio de Jacobi [107] aprovechando la Condición a., y obviando constantes que pueden reabsorberse en las constantes de integración el resultado es:

$$\phi_{\lambda,n}(x) = e^{-\frac{\beta}{\lambda-1/2-n}x} \operatorname{sech}^{\lambda-1/2-n}(x) P_n^{(\mu_{\lambda,n}, \nu_{\lambda,n})}(\tanh x), \quad (4.10)$$

donde $\mu_{\lambda,n} = -ik_{\lambda,n}$ y $\nu_{\lambda,n} = -ik_{-\lambda,n}$ para la Condición a., y como se muestra en la tabla 4.1, los momentos de entrada/salida son imaginarios puros para parámetros del potencial

reales, por tanto, la función $\phi_{\lambda,x}(x)$ es real al tener en todas sus entradas parámetros reales.

Para ver bajo qué criterio $\mu_{\lambda,n}$ y $\nu_{\lambda,n}$ dan lugar a una función de onda, $\phi_{\lambda,n}(x)$, de cuadrado integrable, haremos la integral del módulo al cuadrado, que bajo un cambio de variable $z = \operatorname{arctanh} x$ queda como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{\lambda,n}(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 (1-z)^{\mu_{\lambda,n}-1} (1+z)^{\nu_{\lambda,n}-1} \left(P_n^{(\mu_{\lambda,n}, \nu_{\lambda,n})}(z) \right)^2 dz \quad (4.11)$$

La integral en (4.11) es engañosa, ya que recuerda a la condición de ortogonalidad de los polinomios clásicos, pero no es esa, utilizando el mismo método que [113], podemos reducirla a un resultado tabulado ([114], ecuación: ET II 285(6) y propiedad de reflexión de los polinomios de Jacobi). Así la integral resulta ser:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{\lambda,n}(x)|^2 dx &= \int_{-1}^1 (1-z)^{\mu_{\lambda,n}-1} (1+z)^{\nu_{\lambda,n}-1} \left(P_n^{(\mu_{\lambda,n}, \nu_{\lambda,n})}(z) \right)^2 dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-z)^{\mu_{\lambda,n}-1} (1+z)^{\nu_{\lambda,n}} \left(P_n^{(\mu_{\lambda,n}, \nu_{\lambda,n})}(z) \right)^2 dz + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-z)^{\nu_{\lambda,n}-1} (1+z)^{\mu_{\lambda,n}} \left(P_n^{(\nu_{\lambda,n}, \mu_{\lambda,n})}(z) \right)^2 dz = \\ &= \frac{2^{\mu_{\lambda,n} + \nu_{\lambda,n} - 1} (\mu_{\lambda,n} + \nu_{\lambda,n}) \Gamma(n + \mu_{\lambda,n} + 1) \Gamma(n + \nu_{\lambda,n} + 1)}{n! \mu_{\lambda,n} \nu_{\lambda,n} \Gamma(n + \mu_{\lambda,n} + \nu_{\lambda,n} + 1)}, \text{ para: } \mu_{\lambda,n}, \nu_{\lambda,n} > 0 \text{ y } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para que la integral sea convergente (la constante de normalización elevada a -2), los índices del polinomio de Jacobi deben ser mayores que cero. Debido a la definición que hemos dado de estos, los momentos de entrada y salida deben ser:

$$\mu_{\lambda,n} = -ik_{\lambda,n} > 0, \nu_{\lambda,n} = -ik'_{\lambda,n} > 0 \equiv \operatorname{Im}(k_{\lambda,n}), \operatorname{Im}(k'_{\lambda,n}) > 0 \quad (4.13)$$

De estas desigualdades se obtiene la cantidad máxima de estados ligados del potencial Rosen-Morse II, de la misma manera, vemos cuando las dos condiciones de polo de la matriz S son aplicables para obtener estos:

$$\phi_{\lambda,n} \text{ es } L^2(\mathbb{R}) : 0 \leq n \leq \lambda - \frac{1}{2} - \sqrt{\beta} \text{ y } \lambda \geq \sqrt{\beta} + 1/2 \geq 1/2 \quad (4.14a)$$

$$\phi_{-\lambda,n} \text{ es } L^2(\mathbb{R}) : 0 \leq n \leq -\lambda - \frac{1}{2} - \sqrt{\beta} \text{ y } -\lambda \geq \sqrt{\beta} + 1/2 \geq 1/2 \quad (4.14b)$$

Por tanto, la Condición a. da lugar a estados de cuadrado integrable (estados ligados) cuando $\lambda \geq \sqrt{\beta} + 1/2$, para parámetros del potencial positivos. La Condición b. lo hará cuando λ sea negativo y $\lambda \leq -\sqrt{\beta} - 1/2$. Pero $H_{\lambda} = H_{-\lambda}$. Para modelar el potencial que describe la parte vibracional da igual si escogemos un valor positivo o negativo para

4.2. Polinomios de Jacobi y condición de cuadrado integrable para las funciones del Rosen-Morse II.

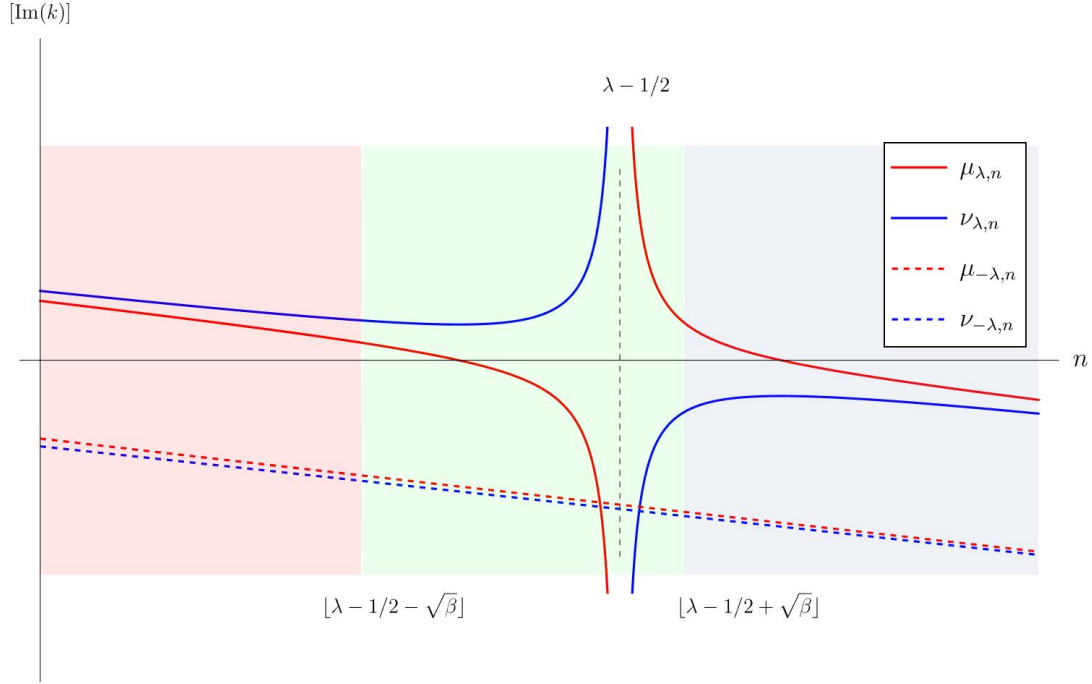


Figura 4.1: Representación de la parte imaginaria de los momentos de entrada y salida para las dos condiciones de polo de la matriz S para $\lambda \geq \sqrt{\beta} + 1/2$.

λ . Entonces escogeremos un valor de λ positivo, relegando los resultados derivados de la Condición b. a segundo plano.

Si representamos la parte imaginaria de los cuatro momentos para valores de parámetros reales y con $\lambda \geq \sqrt{\beta} + 1/2$ (Figura 4.1), veremos que los momentos de $\phi_{\lambda,n}$ son los únicos que cumplen el criterio para que existan estados ligados, mientras que para $\phi_{-\lambda,n}$ estos siempre son negativos. Por tanto, tendremos para $\phi(x)$ dos tipos de función de onda, y luego 3 tipos de estado que describen en función del signo de los k y k' :

- Estados ligados (bound states): Dados por $\phi_{\lambda,n}$, aquellos para los cuales $\text{Im}(k_{\lambda,n}) > 0$ y $\text{Im}(k'_{\lambda,n}) > 0$ siendo los momentos puramente imaginarios, teniendo un total de $N_{max} = \lfloor \lambda - 1/2 - \sqrt{\beta} \rfloor + 1$ estados ligados.
- Estados anti-ligados (anti-bound states): Para $\phi_{\lambda,n}$, aquellos para los cuales $\text{Im}(k_{\lambda,n}) < 0$ y $\text{Im}(k'_{\lambda,n}) < 0$ siendo los momentos puramente imaginarios, teniendo infinitos estados de este tipo, comenzando para $n \geq \lfloor \lambda - 1/2 + \sqrt{\beta} \rfloor$ estados ligados. Para $\phi_{-\lambda,n}$, considerando $\lambda \geq \sqrt{\beta} + 1/2$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tendremos estados anti-ligados.
- Estados redundantes: Aquellos en los que el signo de los momentos de entrada/salida no coinciden, cumpliendo el criterio de que a pesar de $\text{Im}(k_{\lambda,n}) > 0$ o $\text{Im}(k'_{\lambda,n}) > 0$

son positivos, pero no desembocan en un estado ligado. Por un lado, convergen y por el otro divergen, no son de cuadrado integrable, solo aparecen para $\phi_{\lambda,n}$ con $\lambda \geq \sqrt{\beta} + 1/2$ en el intervalo $\lambda - 1/2 - \sqrt{\beta} \leq n \leq \lfloor \lambda - 1/2 + \sqrt{\beta} \rfloor$, de manera que la aparición de este tipo de estados es causa de la asimetría del potencial.

Los polos redundantes surgen en la literatura en [115], dónde se estudia el scattering de ondas-s por un potencial central exponencial, obteniendo dos series de polos de la matriz S , que a pesar de cumplir el criterio de encontrarse en el semieje positivo, no llevan a funciones de onda de cuadrado integrable [4]. En nuestro caso aparecen por la asimetría del potencial, teniendo que tratar el problema con dos tipos de momento, a diferencia de lo que ocurre en [98], dónde su aparición no depende de los parámetros del potencial. Con esto hemos dejado asentado la clasificación de los tipos de estado que se pueden dar en este potencial, así como sus funciones de onda de cuadrado integrable. Para aplicar SUSY habrá que discernir que funciones de onda no tienen ceros para así evitar singularidades en el potencial.

4.2.1. Ceros de las funciones de onda.

Para la clasificación de las funciones de onda hemos recurrido a los resultados de [116], completando su clasificación de las funciones sin nodos (nodeless) con su caracterización a través de la matriz S . Así, para $\phi_{\lambda,n}$ y $\phi_{-\lambda,n}$, existen 3 tipos de funciones 'nodeless' o sin nodos:

Funciones de tipo 'nodeless' I, $\phi_{\lambda,m}^I$: Funciones de onda $\phi_{\lambda,n}$, que se encuentran en una región $n = m$ tal que $\lfloor \lambda - 1/2 \rfloor \leq m \leq \lfloor \lambda - 1/2 + \sqrt{\beta} \rfloor$, por lo que son funciones de onda de estados redundantes, las cuales convergen por la izquierda y divergen por la derecha:

$$m \in \mathbb{N}, \quad \lambda - 1/2 > m, \quad (\lambda - 1/2)(\lambda - 1/2 - m) < \beta < (\lambda - 1/2)^2. \quad (\text{tipo I})$$

Funciones de tipo 'nodeless' II, $\phi_{\lambda,m}^{II}$: Funciones $\phi_{\lambda,n}$ que se encuentran en una región $n = m$ tal que $\lfloor \lambda - 1/2 - \sqrt{\beta} \rfloor \leq m \leq \lfloor \lambda - 1/2 \rfloor$, por lo que son funciones de onda de estados redundantes que convergen por la derecha y divergen por la izquierda:

$$m \in \mathbb{N}, \quad m/2 < \lambda - 1/2 < m, \quad -(\lambda - 1/2)(\lambda - 1/2 - m) < \beta < (\lambda - 1/2)^2. \quad (\text{tipo II})$$

Funciones de tipo 'nodeless' III, $\phi_{\lambda,m}^{III}$: Funciones $\phi_{-\lambda,n}$, correspondientes a la solución de $\phi(x)$ derivada de (Condición b.), las cuales serán funciones de onda de estados anti-ligados, y además, no tendrán ceros para m par.

$$m/2 \in \mathbb{N}, \quad \lambda > 1/2 - \sqrt{\beta}, \quad 0 < \beta < (\lambda - 1/2)^2. \quad (\text{tipo III})$$

Por lo general, el estado fundamental suele ser el único estado sin nodos, aquí hemos visto que tenemos funciones sin nodos en los tres tipos de estado de la matriz S . Respecto a $\psi_{\lambda,n}$, como la función hipergeométrica que describe a esta solución, no tiene un entero negativo en una de sus dos primeras entradas, la serie de potencias en su argumento no se ve truncada a ningún orden, y no es de cuadrado integrable al ser una serie infinita, aunque más adelante, tanto $\psi_{\lambda,n}$ como $\psi_{-\lambda,n}$ tendrán su utilidad.

4.3. Transformadas SUSY de los estados del potencial Rosen-Morse II.

Anteriormente, se ha mencionado que el potencial Rosen-Morse II es invariante de escala, es decir, las transformadas supersimétricas ordinarias solo modifican los parámetros del potencial, pero no como depende en sus funciones. Si tomamos $\phi_{\lambda,0}$ con $\lambda \geq \sqrt{\beta} + 1/2$ como función semilla, y aplicamos (1.2), pasaremos de V_λ a $V_{\lambda-1}$ con una modificación en el origen de energías. La modificación del parámetro λ restando o sumando una unidad, afecta directamente a la cantidad de estados ligados, siendo esta cuantía directamente proporcional a la parte entera de $\lambda - 1/2 - \sqrt{\beta}$. En esta sección estudiaremos otro tipo de transformadas SUSY con la clasificación dada por los polos de la matriz S , aprovechando los resultados de [116]. No trataremos casos confluentes, ya que para calcular la integral de la función semilla, aunque sea del estado más sencillo, lleva a potenciales con funciones hipergeométricas [43], lo cual dificulta aproximarlos a algún sistema físico conocido, así como calcular expresiones de manera explícita.

Mientras que en SUSY calculamos los operadores de intercambio B^\pm que permiten relacionar los estados de dos hamiltonianos. Así mismo existen los operadores escalera, que permiten relacionar los estados de un mismo hamiltoniano. Estos operadores escalera suelen calcularse como la factorización del hamiltoniano en dos operadores diferenciales de primer orden, cuya dependencia funcional está estrechamente relacionada con las identidades para las derivadas de las funciones especiales que describen los estados del hamiltoniano. Una descomposición en operadores diferenciales de primer orden para relacionar los estados de H_λ consigo mismo no es posible debido a la dependencia de estos en (λ, n) , pero sí es posible mediante operadores diferenciales de orden n [56]. No abordaremos la relación entre estados de distinto tipo (ligado, anti-ligado y mixtos) mediante operadores escalera, como si se hacía en [112], debido a la complejidad de estos operadores. Un caso en el cual aparecen polinomios de Jacobi y se pueden obtener ambos tipos de operadores se da en [117], donde los operadores escalera actúan en los índices del polinomio y los operadores de intercambio en el grado de este. También se pueden obtener en la aproximación clásica [118].

Ahora se va a estudiar que tipo de SUSY obtenemos a partir de utilizar como función semilla los estados nodeless tipo I, tipo I y tipo III.

4.3.1. Transformadas supersimétricas con estados redundantes como función semilla.

Consideremos el caso numérico dado por $\lambda = 5,9, \beta = 5$, solo habrá 4 estados ligados, pero sí una buena cantidad de estados redundantes, para $3 < n < 8$. Para $n = 4$, $\phi_{5,4,5}$ es un estado redundante, y función nodeless de tipo I, la cual usaremos como semilla de una transformación SUSY ordinaria de primer orden. Debido a que la función diverge, por un lado, y converge por el otro, la transformada SUSY de $\psi_{5,4,5}$, no lleva a un estado de cuadrado integrable, ya que:

$$\frac{\mathcal{W}(\phi_{5,4,4}, \psi_{5,4,4})}{\phi_{5,4,4}} \propto 1/\phi_{5,4,4}$$

Por lo que si $\phi_{5,4,4}$ se comporta como una exponencial positiva, su inverso lo hace como una exponencial negativa. La consecuencia es que tendremos un potencial racional que altera la forma de las funciones de onda, y el potencial, pero no que no agrega ni quita ningún nivel, estando ante un caso de ruptura espontánea de la supersimetría (Figura 4.2).

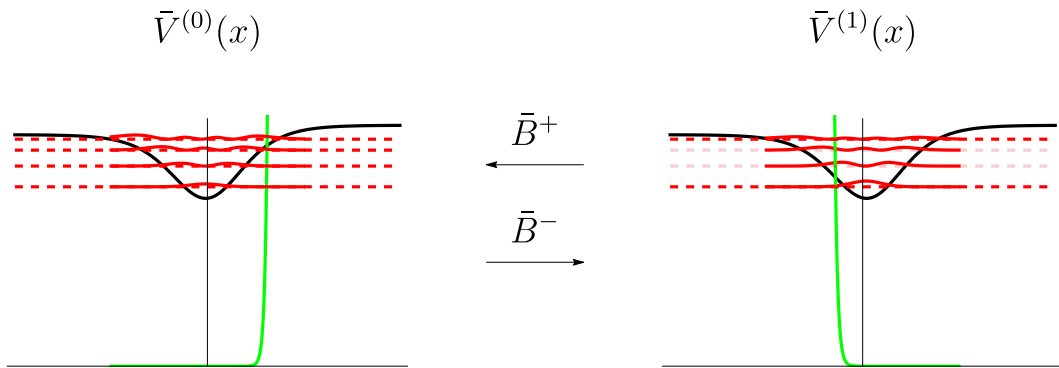


Figura 4.2: Transformada SUSY de primer orden con un estado nodeless tipo I.

4.3.2. Transformadas supersimétricas no ordinarias con estados ligados como función semilla.

Por transformada supersimétrica no ordinaria nos referimos a aquella que no sigue estrictamente el orden de la etiqueta de la energía, la cual suele estar estrechamente relacionada con el número de nodos de la función de onda. Debido a la propiedad shape-invariance del potencial, si realizamos una transformada de orden $\ell < \lfloor \lambda - 1/2 - \sqrt{\beta} \rfloor$ destruyendo los

4.3. Transformadas SUSY de los estados del potencial Rosen-Morse II.

niveles en el orden en que aparecen en H_λ , sobre una función $\phi_{\lambda,n}$ arbitraria, se obtiene:

$$\phi_{\lambda,n}^{(\ell)} \propto \frac{\mathcal{W}\left(\{\phi_{\lambda,j}\}_{j=0}^{\ell-1} \cup \{\phi_{\lambda,n}\}\right)}{\mathcal{W}\left(\{\phi_{\lambda,j}\}_{j=0}^{\ell-1}\right)} \propto \phi_{\lambda-\ell,n-\ell}$$

De aquí que realizar una transformada ordinaria no tiene demasiada complicación, pero se pueden llegar a resultados interesantes si destruimos niveles de manera salteada, evitando la propiedad shape-invariant. En la figura se muestra el caso numérico $\lambda = 5,4$ y $\beta = 1$ en el que solo se presentan 4 estados ligados, y eliminamos los dos primeros excitados. A

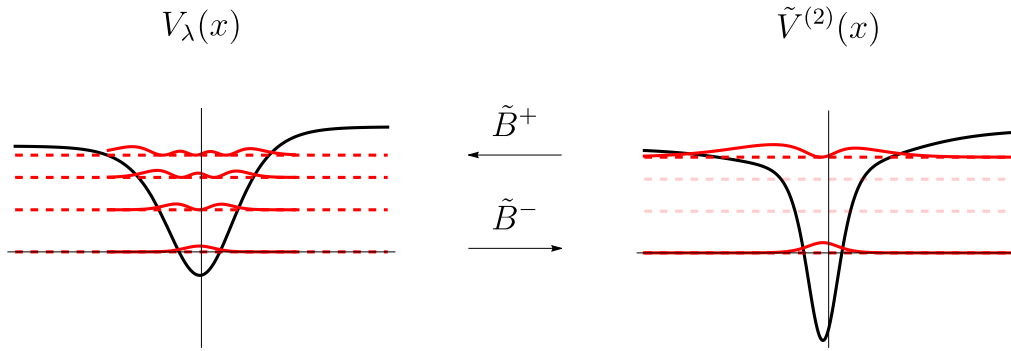


Figura 4.3: Transformada SUSY no ordinaria donde se han eliminado dos niveles consecutivos sin contar al estado fundamental.

continuación veremos que el potencial $\tilde{V}^{(2)}(x)$ de la Figura 4.3 no aparece solamente de esta operación.

4.3.3. Transformadas supersimétricas no ordinarias con estados anti-ligados como función semilla.

Utilizando las funciones sin nodos de tipo III podemos agregar nuevos niveles al hamiltoniano, a diferencia de tipo I y tipo II, cuyo único efecto es deformar el potencial y las funciones de onda, pero no afecta a la cantidad de niveles que tenemos. Las funciones tipo III son las $\phi_{-\lambda,n}$ con $n = 2m$, que para $\lambda \geq \sqrt{\beta} + 1/2$ no presentan nodos, por lo que tenemos bastante libertad a la hora de deformar el potencial. Consideremos el caso numérico $\lambda = 2,4$ y $\beta = 1$ en cuál solo se presentará 1 estado ligado, y vamos a agregar un nivel con una función tipo III dada por $\phi_{-2,4,2}$

Si se comparan las figuras 4.4 y 4.3 se podrá apreciar que $\tilde{V}^{(2)}(x)$ y $\hat{V}^{(1)}(x)$ son el mismo potencial y con los mismos estados ligados, por lo que hay una equivalencia entre quitar y poner niveles en distintos hamiltonianos dados por el potencial Rosen-Morse, como demostraremos en la siguiente sección.

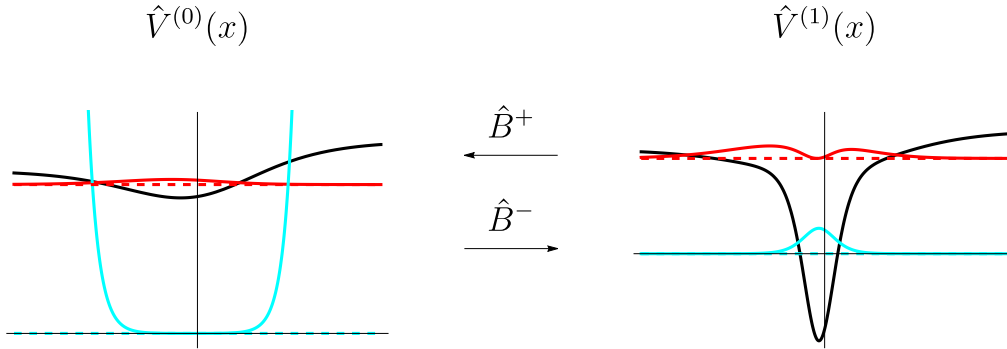


Figura 4.4: Transformada SUSY no ordinaria donde se ha agregado un nivel, siendo el primer excitado lo que fue el estado fundamental.

4.4. Acción de los operadores de intercambio sobre los niveles del potencial Rosen-Morse II.

Vamos a aprovechar cierta propiedad del superpotencial dado por el estado fundamental del sistema, por el cual hay una equivalencia entre los operadores de aniquilación/destrucción dada por la simetría $\lambda \rightarrow -\lambda$:

$$B_{\lambda,n}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{E_{\lambda,n} - E_{\lambda,0}}} \left(\mp \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} \log \phi_{\lambda,0} \right) = \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{\sqrt{E_{\lambda,n} - E_{\lambda,0}}} \left(\mp \frac{d}{dx} - \frac{\beta}{\lambda - \frac{1}{2}} - \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \tanh x \right).$$

El término de (4.16) que multiplica al operador diferencial no es realmente necesario, solo influye si queremos trabajar con las relaciones de conmutación que definen el álgebra de la supersimetría, además de normalizar la función de onda resultante de aplicar el operador. Pero para estudiar las relaciones que se dan entre funciones de onda, vamos a prescindir de esa constante, para no abusar de la notación, utilizaremos el símbolo 'proporcional', entendiéndose que para que se tenga la igualdad, faltarían las constantes de normalización, las cuales se pueden añadir después. Así, utilizaremos los siguientes operadores de intercambio:

$$B_{\lambda}^{\pm} = \mp \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} \log \phi_{\lambda,0} = \quad (4.17)$$

$$\mp \frac{d}{dx} - \frac{\beta}{\lambda - \frac{1}{2}} - \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \tanh x.$$

4.5. Equivalencia entre poner y quitar niveles en el potencial Rosen-Morse II

Si construimos los operadores de intercambio (4.17), primero con las funciones $\phi_{\lambda,0}$, y luego con las $\phi_{1-\lambda,0}$, que para $\lambda > \sqrt{\beta} + 1/2$ será siempre un estado anti-ligado, se da la siguiente relación:

$$B_{\lambda}^{\pm} = -B_{1-\lambda}^{\mp} \quad (4.18)$$

Antes de llegar a la demostración para justificar el resultado final de este capítulo, se muestra en la siguiente tabla 4.2 un resumen de los resultados de aplicar los operadores de intercambio sobre las funciones de onda $\phi(x)$ y $\psi(x)$. En dicha tabla se han omitido constantes de normalización de las funciones, así como el término que divide entre la raíz de la energía desplazada por el estado fundamental, las identidades son resultado de aplicar las derivadas de los polinomios de Jacobi y la función hipergeométrica [104].

Acción de B^{\pm} sobre las funciones de onda dadas por Condición a.	
Funciones $\phi_{\lambda,n}$	$B_{\lambda}^{-} \phi_{\lambda,n} \propto \phi_{\lambda-1,n-1}, \quad B_{\lambda}^{+} \phi_{\lambda-1,n-1} \propto \phi_{\lambda,n},$ (4.19a)
Funciones $\psi_{\lambda,n}$	$B_{\lambda}^{-} \psi_{\lambda,n} \propto \psi_{\lambda-1,n-1}, \quad B_{\lambda}^{+} \psi_{\lambda-1,n-1} \propto \psi_{\lambda,n}.$ (4.20a)
Acción de los B^{\pm} sobre las funciones de onda dadas por Condición b.	
Funciones $\phi_{-\lambda,n}$	$B_{\lambda}^{-} \phi_{-\lambda,n} \propto -\phi_{1-\lambda,n+1}, \quad B_{\lambda}^{+} \phi_{1-\lambda,n+1} \propto -\phi_{-\lambda,n}$ (4.19b)
Funciones $\psi_{-\lambda,n}$	$B_{\lambda}^{-} \psi_{-\lambda,n} \propto -\psi_{1-\lambda,n+1}, \quad B_{\lambda}^{+} \psi_{1-\lambda,n+1} \propto -\psi_{-\lambda,n}$ (4.20b)
Acción de los B^{\pm} sobre las funciones del estado fundamental.	
Función $\phi_{\lambda,n}$	$B_{\lambda}^{-} \phi_{\lambda,0} = 0,$ (4.19)
Función $\psi_{\lambda,n}$	$B_{\lambda}^{-} \psi_{\lambda,0} \propto -\phi_{1-\lambda,0}.$ (4.20)

Cuadro 4.2: Acción de los operadores de intercambio construidos con el estado fundamental sobre las diferentes funciones de onda que surgen de los polos de la matriz S .

Con todos estos ingredientes podemos demostrar la equivalencia que describimos en la siguiente sección.

4.5. Equivalencia entre poner y quitar niveles en el potencial Rosen-Morse II

Para demostrar la equivalencia entre los sistemas en las figuras 4.4 y 4.3, lo haremos de manera general para $N+1$ niveles. Considérese un H_{α} donde $\alpha \in (1/2+\sqrt{\beta}, 3/2+\sqrt{\beta})$, por

tanto, solo tendrá un estado anti-ligado para $n = 0$. Vamos a realizar una transformada SUSY con un estado ligado tipo III, en el nivel $N - 1$, siendo este N impar. Tendremos la siguiente pareja de hamiltonianos supersimétricos:

Sistema de partida, $\widehat{H}_\alpha^{(0)}$	Sistema de llegada, $\widehat{H}_\alpha^{(1)}$
Potencial: $\widehat{V}_\alpha^{(0)} = V_\alpha - E_{-\alpha, N-1}$	Potencial: $\widehat{V}_\alpha^{(1)} = V_\alpha - E_{-\alpha, N-1} - 2\partial_x^2 \log \phi_{-\alpha, N-1} \quad (4.21)$
Estado fundamental: $\phi_{\alpha, 0}$	Primer estado excitado: $\widehat{\phi}_{\alpha, 1}^{(1)} = \frac{\mathcal{W}(\phi_{-\alpha, N-1}, \phi_{\alpha, 0})}{\phi_{-\alpha, N-1}} = \phi_{\alpha, 0} \frac{\phi_{1-\alpha, N}}{\phi_{-\alpha, N-1}} \quad (4.22)$
Función semilla (no física): $\phi_{-\alpha, N-1}$	Estado fundamental: $\widehat{\phi}_{\alpha, 0}^{(1)} = \frac{\mathcal{W}(\phi_{-\alpha, N-1}, \psi_{-\alpha, N-1})}{\phi_{-\alpha, N-1}} = \frac{1}{\phi_{-\alpha, N-1}} \quad (4.23)$

Cuadro 4.3: Pareja de hamiltonianos supersimétricos dada por la transformación SUSY generada por la creación de un nivel utilizando un estado anti-bound tipo III.

Esta es la forma de la pareja en la que tenemos un caso de SUSY de segundo orden donde el segundo compañero tiene un nivel más que el anterior. Ahora considérese el hamiltoniano $H_{\alpha+N}$, en el cual habrá un total de $N + 1$ niveles. Vamos a realizar una transformada en la que destruiremos todos niveles excepto $n = 0$ y $n = N$, mostrándose sus transformadas en la tabla 4.4.

Ahora tenemos que demostrar que (4.21) es igual a (4.25), la parte del off-set de la energía ya coincide $E_{\alpha+N, 0} = E_{-\alpha, N-1}$, desarrollemos $\widetilde{H}_{\alpha+N}^{(N-1)}$ manipulando la expresión dentro del logaritmo:

4.5. Equivalencia entre poner y quitar niveles en el potencial Rosen-Morse II

Sistema de partida, $\tilde{H}_{\alpha+N}^{(0)}$	Sistema de llegada, $\tilde{H}_{\alpha+N}^{(N-1)}$
Potencial: $\tilde{V}_{\alpha+N}^{(0)} = V_{\alpha+N} - E_{\alpha+N,0}$	Potencial: $\begin{aligned} \hat{V}_{\alpha+N}^{(1)} &= V_{\alpha+N} - E_{\alpha+N,0} - \\ &- 2\partial_x^2 \log \mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=1}^{N-1} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$
Ultimo estado excitado: $\phi_{\alpha+N,N}$	Único estado excitado: $\tilde{\phi}_{\alpha+N,N}^{(N-1)} = \frac{\mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=1}^{N-1} \cup \{\phi_{\alpha+N,N}\} \right)}{\mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=1}^{N-1} \right)}. \quad (4.25)$
Estado fundamental: $\phi_{\alpha+N,0}$	Estado fundamental: $\tilde{\phi}_{\alpha+N,0}^{(N-1)} = \frac{\mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=1}^{N-1} \cup \{\phi_{\alpha+N,0}\} \right)}{\mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=1}^{N-1} \right)}. \quad (4.26)$

Cuadro 4.4: Pareja de hamiltonianos supersimétricos en la que se destruyen todos los niveles, excepto el estado fundamental y el último estado excitado.

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_{\alpha+N}^{(N-1)} &= H_{\alpha+N} - E_{\alpha+N,0} - 2\partial_x^2 \log \mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=1}^{N-1} \right) \\
 &= -\partial_x^2 + V_{\alpha+N} - E_{\alpha+N,0} - 2\partial_x^2 \log \mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=1}^{N-1} \right) \\
 &= -\partial_x^2 + V_{\alpha} + 2 \log \mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=0}^{N-1} \right) - E_{\alpha+N,0} - 2\partial_x^2 \log \mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=1}^{N-1} \right) \\
 &= -\partial_x^2 + V_{\alpha} - E_{\alpha+N,0} - 2\partial_x^2 \log \left(\frac{\mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=1}^{N-1} \right)}{\mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=0}^{N-1} \right)} \right) \\
 &= -\partial_x^2 + V_{\alpha} - E_{\alpha+N,0} - 2\partial_x^2 \log \left(\frac{\mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=0}^{N-1} \cup \{\psi_{\alpha+N,0}\} \right)}{\mathcal{W} \left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=0}^{N-1} \right)} \right). \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

En (4.27) se ha utilizado el hecho de que si realizamos el wronskiano de varias funciones, y dos de ellas son linealmente independientes, uno puede sacarlas fuera del wronskiano

como una constante, o en este caso, introducir esas dos funciones que faltan para poder identificar el interior de la última línea de (4.27) como una transformada SUSY ordinaria de orden N de uno de los estados que nunca son de cuadrado integrable. Si extraemos el interior del logaritmo, y rescribimos el wronskiano como una serie de operadores de intercambio:

$$\frac{\mathcal{W}\left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=0}^{N-1} \cup \{\psi_{\alpha+N,0}\}\right)}{\mathcal{W}\left(\{\phi_{\alpha+N,j}\}_{j=0}^{N-1}\right)} = B_{\alpha}^{-} \cdots B_{\alpha+N}^{-} \psi_{\alpha+N,0}. \quad (4.28)$$

Y aprovechando las identidades de la tabla 4.2 llegamos al resultado esperado:

$$B_{\alpha}^{-} \cdots B_{\alpha+N}^{-} \psi_{\alpha+N,0} \propto B_{\alpha}^{-} \cdots B_{\alpha+N-1}^{-} \phi_{1-\alpha-N,0} \propto \phi_{-\alpha,N-1} \quad (4.29)$$

Así queda demostrada la identidad que nos permite identificar que la creación de 1 nivel con las funciones tipo III es equivalente a quitar una cierta cantidad de niveles en otro potencial Rosen-Morse de una intensidad distinta.

4.6. Conclusiones

Se ha revisado el problema del potencial Rosen-Morse II, el cual tiene aplicación como potencial fenomenológico para los modos de vibración de moléculas poliatómicas. A través del formalismo de la matriz S en una dimensión, hemos clasificado los tres tipos de polo que surgen en la estructura de esta función, junto a dos series de autovalores del hamiltoniano. Se ha revisado la clasificación de las transformadas supersimétricas de este potencial en el caso de que se utilicen funciones que no tengan nodos, dándolas una interpretación a través de la clasificación de los polos de la matriz S . Por último, se ha demostrado la equivalencia de ciertas operaciones referentes a agregar y quitar niveles en los hamiltonianos resultado de las transformaciones supersimétricas.

Resultados y Conclusiones.

A lo largo de este documento se han presentado los resultados obtenidos en los artículos publicados en revistas científicas de impacto, los cuales conforman esta Tesis Doctoral por compendio [1], [2] y [3].

- En el Capítulo 1 se han establecido los fundamentos teóricos necesarios para poder llegar a los resultados de dichas publicaciones, haciendo un repaso por las distintas transformadas supersimétricas que se pueden realizar en mecánica cuántica no relativista en una dimensión.
- En el Capítulo 2 se hace un repaso al problema de las extensiones del operador derivada segunda restringido a un intervalo de la recta real. En este capítulo no se ha querido entrar en las transformadas supersimétricas del sistema, ya que se ha querido caracterizar antes los tipos de espectro que se pueden obtener a partir de cada una de las extensiones autoadjuntas del operador. Así, se ha mostrado que se obtienen todas las combinaciones posibles de espectros infinitos. De esta manera, este capítulo es un compendio de los resultados de las primeras páginas de los dos primeros artículos publicados [1] y [2]. Además, completamos las clasificaciones realizadas por [76], dando más detalles sobre la clasificación de estas extensiones, habiendo aprovechado la resolución gráfica de (2.11) en la figura 2.1 para guiarnos en la clasificación del espectro.
- En el Capítulo 3 se muestran los resultados de [1] y [2] una vez que hemos aplicado distintas transformadas supersimétricas. El principal resultado de [1] es el definir la transformada a orden ℓ para el pozo de potencial en el caso de que la extensión no tenga ninguna propiedad definida, calculándola de manera general siempre y cuando la raíz de la energía sea proporcional a la etiqueta del nivel. Los resultados de [2] tenemos resultados más específicos, ya que nos centramos en los casos particulares de $m_2 = m_3 = 0$, donde las extensiones autoadjuntas tienen estados de paridad definida, y con reversibilidad temporal.

Una de las ventajas de trabajar la transformada confluyente con las extensiones del pozo de potencial, es que la función semilla de la transformada es fácil de calcular, llegando a potenciales que se pueden clasificar mediante la teoría de ecuaciones fuchsianas, esto no ocurre cuando se tratan potenciales más complejos, ya que los compañeros supersimétricos obtenidos suelen ser potenciales que dependen de funciones hipergeométricas, a las cuales cuesta encontrar una interpretación física.

- En las dos primeras publicaciones se tratan las transformadas SUSY de las exten-

siones del pozo de potencial, que no deja de ser un sistema restringido a un intervalo finito de la recta real. En el Capítulo 4 tratamos los resultados de [3], donde el sistema cuántico unidimensional es muy distinto. Se trata el potencial Rosen-Morse II, el cual ocupa toda la recta real, además de no ser simétrico respecto a la coordenada espacial. Debido a su asimetría, permite derivar un tipo de estados no presentes en potenciales simétricos, los estados redundantes, los cuales surgen del análisis de los polos de su matriz S . De esta manera se muestra que en función del tipo de estado escogido para ser la semilla de la transformación supersimétrica, se pueden tener los tres tipos de supersimetría introducidos en el Capítulo 1.

- Aunque en el Capítulo 4 se muestra que el potencial Rosen-Morse II es un buen laboratorio para jugar con distintas transformadas SUSY, el principal resultado de [3] es el uso de las segundas soluciones de la ecuación diferencial para obtener nuevas relaciones entre los operadores de emparejamiento y las funciones de onda, lo que podría permitir obtener operadores escalera más sencillos en el futuro [56].

Dentro de trabajo que queda planteado para el futuro:

- Dentro del contexto de las extensiones autoadjuntas, estudiar la relación entre teoría de distribuciones y análisis funcional, que a veces permiten hacerlas equivalentes en el planteamiento de la matriz S [88, 91, 93].
- En las transformadas supersimétricas de las extensiones autoadjuntas del pozo de potencial, se obtienen potenciales periódicos [25, 92, 119–121], pudiendo generar nuevos potenciales nunca antes vistos. Mediante el uso de la transformada confluyente, potenciales con parte compleja pueden ser obtenidos, a la par que se conserva un espectro real, esto es de especial interés en el estudio de sistemas PT -simétricos.
- No se ha abordado el estudio de sistemas cuánticos de más de una dimensión. El formalismo lleva décadas planteado, incluida la transformada confluyente para dos y tres dimensiones [44, 49]. Ciertos sistemas integrables y superintegrables podrían ser estudiados en un futuro con los resultados de esta tesis, como por ejemplo el potencial Tremblay-Turbiner-Winternitz [122], el cual es un oscilador en la parte radial, y un potencial Darboux-Pöschl-Teller [123] en la parte angular.
- Durante el desarrollo de esta Tesis Doctoral han surgido otra serie de problemas que, a pesar de haber sido abordados, no han desembocado en publicaciones. Tampoco han sido incluidos en los apéndices por su breve desarrollo a día de la entrega de este documento. Se ha estado estudiando la teoría de ecuaciones fuchsianas, en concreto las ecuaciones de Heun. En [103] aparecen una serie de resultados que podrían permitir resolver una serie de problemas de manera exacta, o por lo menos llegar a nuevas ecuaciones trascendentes que faciliten el cálculo numérico de los niveles de energía.

Bibliografía

- [1] M. Gadella, J.M. Hernández-Muñoz, L. M. Nieto, and C. San Millán. Supersymmetric partners of the one-dimensional infinite square well hamiltonian. *Symmetry*, 13(2), 2021. ISSN 2073-8994. doi:10.3390/sym13020350. URL <https://www.mdpi.com/2073-8994/13/2/350>.
- [2] M. Gadella and C. San Millán. Supersymmetric partners of the one-dimensional infinite square well hamiltonian: Special cases. *Symmetry*, 14(7), 2022. ISSN 2073-8994. doi:10.3390/sym14071314. URL <https://www.mdpi.com/2073-8994/14/7/1314>.
- [3] C. San Millán, M. Gadella, Ş. Kuru, and J. Negro. SUSY partners and S-matrix poles of the one-dimensional Rosen-Morse II potential. *The European Physical Journal Plus*, 138(9):857, Sep 2023. ISSN 2190-5444. doi:10.1140/epjp/s13360-023-04338-x. URL <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-04338-x>.
- [4] C. A Nelson, A. K.Rajagopal, and C. S. Shastry. Relation between the singularities of the S- matrix and the l^2 class of solutions in potential theory. *Journal of Mathematical Physics*, 12(4):737–741, 10 2003. ISSN 0022-2488. doi:10.1063/1.1665639. URL <https://doi.org/10.1063/1.1665639>.
- [5] P. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press, Oxford, 1930.
- [6] E. Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish Acad. A*, 46:9–16, 1940.
- [7] E. Schrödinger. Further studies on solving eigenvalue problems by factorization. *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, 46:183–206, 1940. ISSN 00358975. URL <http://www.jstor.org/stable/20490756>.
- [8] L. Infeld and T.E. Hull. The factorization method. *Rev. Mod. Phys.*, 23:21–68, 1951. doi:10.1103/RevModPhys.23.21.
- [9] E. Witten. Dynamical breaking of supersymmetry. *Nucl. Phys. B*, 188:513, 1981. doi:10.1016/0550-3213(81)90006-7.
- [10] Yu. A. Gol’fand and E. P. Likhtman. *Extension of the algebra of Poincare group generators and violation of P-invariance*, pages 20–23. Supergravities in Diverse Dimensions, 1989. doi:10.1142/9789814542340_0001. URL https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814542340_0001.

- [11] M.E. Peskin and D.V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995. Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [12] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme. Supersymmetry and quantum mechanics. *Phys. Rep.*, 251:267–385, 1995. doi:10.1016/0370-1573(94)00080-M.
- [13] B.Roy, P. Roy, and R. Roychoudhury. On the solution of quantum eigenvalue problems. a supersymmetric point of view. *Fortschr. Phys.*, 39:211–258, 1991. doi:10.1002/prop.2190390304.
- [14] A. Gangopadhyaya, M. Asim, V. Jeffry, and C. Rasinariu. *Supersymmetric Quantum Mechanics*. WORLD SCIENTIFIC, 2010. doi:10.1142/7788. URL <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/7788>.
- [15] D. J. Fernández C. Supersymmetric quantum mechanics. *AIP Conf. Proc.*, 1287: 3–36, 2010.
- [16] S. Cruz y Cruz, A. Romero-Osnaya, and J.O. Rosas-Ortiz. Balanced gain-and-loss optical waveguides: Exact solutions for guided modes in susy-qm. *Symmetry*, 13: 1583, 2021.
- [17] S. Cruz y Cruz and C. Santiago-Cruz. Position dependent mass scarf hamiltonians generated via the riccati equation. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 42:4909–4924, 2019.
- [18] B. Bagchi. *Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics*. Chapman and Hall, Boca Raton, FL, USA, 2001.
- [19] D. J. Fernández C., M. Gadella, and L. M. Nieto. Supersymmetry transformations for delta potentials. *SIGMA*, 7:029, 2011. doi:10.3842/SIGMA.2011.029.
- [20] D. J. Fernández C., J. Negro, and L. M. Nieto. Regularized scarf potentials: Energy band structure and supersymmetry. *J. Phys. A Math. Gen.*, 37:6987–7001, 2004.
- [21] A. Lahiri, P.K. Roy, and B. Bagchi. Supersymmetry in quantum mechanics. *Int. J. Mod. Phys. A*, 5:1383–1456, 1990. doi:10.1142/S0217751X90000647.
- [22] B. Mielnik. Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum. *Journal of Mathematical Physics*, 25(12):3387–3389, 12 1984. ISSN 0022-2488. doi:10.1063/1.526108. URL <https://doi.org/10.1063/1.526108>.
- [23] D. J. Fernández C., V. Hussin, and B. Mielnik. A simple generation of exactly solvable anharmonic oscillators. *Physics Letters A*, 244(5):309–316, 1998. ISSN 0375-9601. doi:[https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(98\)00298-9](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00298-9). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960198002989>.
- [24] O. Rosas-Ortiz, B. Mielnik, and L. M. Nieto. Backlund-type superposition and free particle n-susy partners, 1999.

-
- [25] L. M. Nieto, B. Mielnik, and J.O. Rosas-Ortiz. Some connections between different supersymmetric approaches in quantum mechanics. 01 1999. doi:10.13140/RG.2.1.4481.3683.
- [26] L. É. Gendenshtein. Derivation of exact spectra of the schrödinger equation by means of supersymmetry. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 38:356, September 1983.
- [27] E. Schrödinger. Der stetige übergang von der mikro- zur makromechanik. *Naturwissenschaften*, 14(28):664–666, 1926. doi:10.1007/BF01507634. URL <https://doi.org/10.1007/BF01507634>.
- [28] R.J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131:2766–2788, Sep 1963. doi:10.1103/PhysRev.131.2766. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.2766>.
- [29] D. J. Fernandez C., V. Hussin, and L. M. Nieto. Coherent states for isospectral oscillator hamiltonians. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27(10):3547, may 1994. doi:10.1088/0305-4470/27/10/029. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/27/10/029>.
- [30] D. J. Fernández C., L. M. Nieto, and J.O. Rosas-Ortiz. Distorted heisenberg algebra and coherent states for isospectral oscillator hamiltonians. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28(9):2693, may 1995. doi:10.1088/0305-4470/28/9/026. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/28/9/026>.
- [31] D. J. Fernández C., J. Negro, and M.A. del Olmo. Group approach to the factorization of the radial oscillator equation. *Annals of Physics*, 252(2):386–412, 1996. ISSN 0003-4916. doi:<https://doi.org/10.1006/aphy.1996.0138>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491696901384>.
- [32] M. Gadella and L. M. Nieto. *Métodos matemáticos avanzados para ciencias e ingeniería*. Manuales y textos universitarios. Ciencias ; 31. Universidad de Valladolid, Valladolid, 2000. ISBN 84-8448-033-X.
- [33] D. J. Fernández C., M.L. Glasser, and L. M. Nieto. New isospectral oscillator potentials. *Physics Letters A*, 240(1):15–20, 1998. ISSN 0375-9601. doi:[https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(98\)00068-1](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00068-1). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960198000681>.
- [34] A.A. Andrianov, M.V. Ioffe, and V.P. Spiridonov. Higher-derivative supersymmetry and the witten index. *Physics Letters A*, 174(4):273–279, mar 1993. doi:10.1016/0375-9601(93)90137-o. URL [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)90137-o](https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90137-o).
- [35] J.O. Rosas-Ortiz. New families of isospectral hydrogen-like potentials. *Journal of*

- Physics A: Mathematical and General*, 31(27):L507, jul 1998. doi:10.1088/0305-4470/31/27/003. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/31/27/003>.
- [36] B. Bagchi and A. Ganguly, D. Bhaumik, and A. Mitra. Higher derivative supersymmetry, a modified crum–darboux transformation and coherent state. *Modern Physics Letters A*, 14(01):27–34, 1999. doi:10.1142/S0217732399000055. URL <https://doi.org/10.1142/S0217732399000055>.
- [37] M. Plyushchay. Nonlinear supersymmetry: From classical to quantum mechanics. *J. Phys. A*, 37:10375–10384, 2004. doi:10.1088/0305-4470/37/43/024.
- [38] D. J. Fernández C. and H.C. Rosu. Quantum mechanical spectral engineering by scaling intertwining. *Physica Scripta*, 64(3):177–183, sep 2001. doi:10.1238/physica.regular.064a00177. URL <https://doi.org/10.1238/2Fphysica.regular.064a00177>.
- [39] D. J. Fernández C. and N. Fernández-García. Higher-order supersymmetric quantum mechanics. *AIP Conf. Proc.*, 744(1):236–273, 2004. doi:10.1063/1.1853203. URL <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0502098>.
- [40] D. J. Fernández C. and E. Salinas-Hernández. The confluent algorithm in second-order supersymmetric quantum mechanics. *J. Phys. A Math. Gen.*, 36:2537–2543, 2003.
- [41] D. J. Fernández C., R. Muñoz, and A. Ramos. Second order susy transformations with ‘complex energies’. *Physics Letters A*, 308(1):11–16, 2003. ISSN 0375-9601. doi:[https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(02\)01779-6](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(02)01779-6). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960102017796>.
- [42] B. Mielnik, L. M. Nieto, and J.O. Rosas-Ortiz. The finite difference algorithm for higher order supersymmetry. *Phys. Lett. A*, 269:70–78, 2000. doi:10.1016/S0375-9601(00)00226-7.
- [43] D. J. Fernández C. and R. Barnana. Confluent second-order supersymmetric quantum mechanics and spectral design. *Physica Scripta*, 95(5):055210, feb 2020. doi:10.1088/1402-4896/ab4be2. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1402-4896/ab4be2>.
- [44] D. Bermudez, D. J. Fernández C., and N. Fernandez-García. Wronskian differential formula for confluent supersymmetric quantum mechanics. *Phys. Lett. A*, 376:692–696, 2012. doi:10.1016/j.physleta.2011.12.020. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960111014824>.
- [45] B. Bagchi, S. Mallik, H. BÍla, V. Jakubský, M. Znojil, and C. Quesne. pt -symmetric supersymmetry in a solvable short-range model. *International Journal of Modern Physics A*, 21(10):2173–2190, 2006. doi:10.1142/S0217751X0602951X. URL <https://doi.org/10.1142/S0217751X0602951X>.

-
- [46] A. Schulze-Halberg. Arbitrary-order jordan chains associated with quantum-mechanical hamiltonians: Representations and integral formulas. *Journal of Mathematical Physics*, 57(2):023521, 02 2016. ISSN 0022-2488. doi:10.1063/1.4942450. URL <https://doi.org/10.1063/1.4942450>.
- [47] A. Contreras-Astorga and A. Schulze-Halberg. On integral and differential representations of jordan chains and the confluent supersymmetry algorithm. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(31):315202, jul 2015. doi:10.1088/1751-8113/48/31/315202. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/48/31/315202>.
- [48] D. J. Fernández C. and E. Salinas-Hernández. Wronskian formula for confluent second-order supersymmetric quantum mechanics. *Phys. Lett. A*, 338:13–18, 2005.
- [49] D. Bermudez. Wronskian differential formula for k-confluent susy qm. *Annals of Physics*, 364:35–52, 2016. ISSN 0003-4916. doi:<https://doi.org/10.1016/j.aop.2015.10.015>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491615003863>.
- [50] A. Oeftiger, U. Wiese, and U. Wenger. Supersymmetric quantum mechanics. *Bachelor Thesis, University of Bern, Switzerland*, pages 1–38, 2010.
- [51] D. J. Fernández C. and A. Ramos. *Second Order Supersymmetry Transformations in Quantum Mechanics*, pages 167–175. Topics in Mathematical Physics, General Relativity and Cosmology in Honor of Jerzy Plebanski, 08 2006. doi:10.1142/9789812772732_0015. URL https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812772732_0015.
- [52] G. Lévai and E. Magyari. The pt-symmetric rosen–morse ii potential: effects of the asymptotically non-vanishing imaginary potential component. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42(19):195302, 2009.
- [53] A. Ganguly and L. M. Nieto. Shape-invariant quantum hamiltonian with position-dependent effective mass through second-order supersymmetry. *J. Phys. A Math. Gen.*, 49:7265–7281, 2007. doi:10.1088/1751-8113/40/26/012.
- [54] I. Marquette and C. Quesne. New families of superintegrable systems from hermite and laguerre exceptional orthogonal polynomials. *J. Math. Phys.*, 54:042102, 2013.
- [55] M.V. Ioffe, J. Negro, L. M. Nieto, and D. Nishiniandze. New two-dimensional integrable quantum models from susy intertwining. *J. Phys. A Math. Gen.*, 39: 9297–9308, 2006. doi:10.1088/0305-4470/39/29/020.
- [56] S. Garneau-Desroches and V. Hussin. Ladder operators and coherent states for the rosen–morse system and its rational extensions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(47):475201, nov 2021. doi:10.1088/1751-8121/ac2549. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/ac2549>.

- [57] V. Correa, V. Jakubsk, L. M. Nieto, and M.S. Plyushchay. Self-isospectrality, special supersymmetry, and their effect on the band structure. *Phys. Rev. Lett.*, 101:030403, 2008. doi:10.1103/PhysRevLett.101.030403.
- [58] F. Correa, L. M. Nieto, and M.S. Plyushchay. Hidden nonlinear supersymmetry of finite-gap lamé equation. *Phys. Lett. B*, 644:94–98, 2007. doi:10.1016/j.physletb.2006.11.020.
- [59] J. Wess and B. Zumino. Supergauge transformations in four dimensions. *Nuclear Physics B*, 70(1):39–50, 1974. ISSN 0550-3213. doi:[https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90355-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90355-1). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374903551>.
- [60] S.P. Martin. A supersymmetry primer. In *Perspectives on Supersymmetry*, pages 1–98. WORLD SCIENTIFIC, jul 1998. doi:10.1142/9789812839657_0001. URL https://doi.org/10.1142/9789812839657_0001.
- [61] P. Dirac and R.H. Fowler. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 117(778):610–624, 1928. doi:10.1098/rspa.1928.0023. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1928.0023>.
- [62] V.B. Matveev and M.A. Salle. Springer series in nonlinear dynamics. In *Darboux transformations and solitons.*, Berlin, 1991. Springer-Verlag.
- [63] R. Razo and S. Cruz y Cruz. New confining optical media generated by darbox transformations. *Journal of Physics: Conference Series*, 1194(1):012091, apr 2019. doi:10.1088/1742-6596/1194/1/012091. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1194/1/012091>.
- [64] S. Cruz y Cruz and C. Santiago-Cruz. Position dependent mass scarf hamiltonians generated via the riccati equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(15):4909–4924, 2019. doi:<https://doi.org/10.1002/mma.5068>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mma.5068>.
- [65] A. A. Suzko and E. Velicheva. Supersymmetry and darbox transformations. *Journal of Physics: Conference Series*, 343(1):012120, feb 2012. doi:10.1088/1742-6596/343/1/012120. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/343/1/012120>.
- [66] B.F. Samsonov. New possibilities for supersymmetry breakdown in quantum mechanics and second-order irreducible darbox transformations. *Physics Letters A*, 263(4-6):274–280, dec 1999. doi:10.1016/s0375-9601(99)00736-7. URL [https://doi.org/10.1016/s0375-9601\(99\)00736-7](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(99)00736-7).
- [67] R. Campoamor-Stursberg, M. Gadella, Ş. Kuru, and J. Negro. Action–angle variables, ladder operators and coherent states. *Phys. Lett. A*, 376:2515–2521, 2012.

-
- [68] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*. Wiley, 2019. ISBN 9783527345533. URL https://books.google.es/books?id=tVI_EAAAQBAJ.
- [69] S. Cruz y Cruz, Ş. Kuru, and J. Negro. Classical motion and coherent states for pöschl–teller potentials. *Physics Letters A*, 372(9):1391–1405, 2008. ISSN 0375-9601. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.10.010>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960107014260>.
- [70] J.F. Cari nena and M.S. Plyushchay. Ground-state isolation and discrete flows in a rationally extended quantum harmonic oscillator, Nov 2016. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.105022>.
- [71] J.F. Cari nena and M.S. Plyushchay. Abc of ladder operators for rationally extended quantum harmonic oscillator systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(27):275202, jun 2017. doi:10.1088/1751-8121/aa739b. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/aa739b>.
- [72] J.F. Cari nena, M.S. Plyushchay, L. Inzunza, and M.S. Plyushchay. Rational deformations of conformal mechanics. *Phys. Rev. D*, 98:026017, Jul 2018. doi:10.1103/PhysRevD.98.026017. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.026017>.
- [73] M. Gadella and J.M. Hernández-Muñoz. Partners supersimétricos de las extensiones autoadjuntas del operador energía cinética en el pozo infinito de una dimensión. *Trabajos de Fin de Grado*, 2015.
- [74] D. J. Fernández C. and V. Hussin. Higher-order susy, linearized nonlinear heisenberg algebras and coherent states. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(19):3603, may 1999. doi:10.1088/0305-4470/32/19/311. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/32/19/311>.
- [75] D. J. Fernández C. SUSUSY quantum mechanics. *International Journal of Modern Physics A*, 12(01):171–176, 1997. doi:10.1142/S0217751X97000232. URL <https://doi.org/10.1142/S0217751X97000232>.
- [76] G. Bonneau, J. Faraut, and G. Valent. Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 69(3):322–331, 03 2001. ISSN 0002-9505. doi:10.1119/1.1328351. URL <https://doi.org/10.1119/1.1328351>.
- [77] D.M. Gitman, I.V. Tyutin, and B.L. Voronov. *Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics: General Theory and Applications to Schrödinger and Dirac Equations with Singular Potentials*. Progress in Mathematical Physics. Birkhäuser Boston, 2012. ISBN 9780817646622. URL <https://books.google.es/books?id=9IB001NjxUMC>.

- [78] M.A.Naimark. *Linear Differential Operators*. harrap, New York, NY, USA, 1968.
- [79] M.A. Naimark. *Linear differential operators. 2, Linear differential operators in Hilbert space / M. A. Naimark ; translated by E. R. Dawson*. Dover, New York, NY, USA, 2014.
- [80] G. Bachman and L. Narici. *Functional Analysis*. Dover, New York, NY, USA, 2012.
- [81] M. Reed and B. Simon. *IV: Analysis of Operators*. Methods of Modern Mathematical Physics. Elsevier Science, 1978. ISBN 9780125850049. URL <https://books.google.es/books?id=WwApAQAAMAAJ>.
- [82] M. Reed and B. Simon. *Functional Analysis*. Academic Press, New York, NY, USA, 1972.
- [83] M. Reed and B. Simon. *Fourier Analysis. Self Adjointness*. Academic Press, New York, NY, USA, 1975.
- [84] M.Gadella, M.A. García-Ferrero, S. González-Martí, and F.H. Maldonado-Villamizar. The infinite square well with a point interaction: A discussion on the different parameterizations. *Int. J. Theor. Phys.*, 53:1614–1627, 2013. doi:10.1007/s10773-013-1959-7.
- [85] M. Gadella, M.L. Glasser, and L. M. Nieto. The infinite square well with a singular perturbation. *Int. J. Theor. Phys.*, 50:2191–2200, 2011. doi:10.1007/s10773-011-0690-5.
- [86] S. Albeverio, S. Fassari, and F. Rinaldi. The hamiltonian of the harmonic oscillator with an attractive δ' -interaction centred at the origin as approximated by the one with a triple of attractive delta-interactions. *J. Phys. A Math. Theor.*, 49:025302, 2016. doi:10.1088/1751-8113/49/2/025302.
- [87] F. Erman and H. Uncu. Green's function formulation of multiple nonlinear dirac delta-function potential in one dimension. *Phys. Lett. A*, 384:126227, 2020. doi:10.1016/j.physleta.2019.126227.
- [88] M. Gadella, M.L. Glasser, and L. M. Nieto. One dimensional models with a singular potential of the type $-\alpha \delta(x) + \beta \delta'(x)$. *Int. J. Theor. Phys.*, 50:2144–2152, 2011. doi:10.1007/s10773-010-0641-6.
- [89] Y.D. Golovaty and R.O. Hryniv. On norm resolvent convergence of schrödinger operators with δ' -like potentials. *J. Phys. A Math. Theor.*, 43:155204, 2010. doi:10.1088/1751-8113/43/15/155204.
- [90] M.E. Charro, M.L. Glasser, and L. M. Nieto. Dirac green function for δ potentials. *EPL*, 120:30006, 2017. doi:10.1209/0295-5075/120/30006.
- [91] M. Gadella, J.M. Mateos-Guilarte, J.M. Muñoz Castañeda, and L. M. Nieto. Two-point one-dimensional $\delta(x) - \delta'(x)$ interactions: Non-abelian addition law and

-
- decoupling limit. *J. Phys. A Math. Theor.*, 49:015204, 2016. doi:10.1088/1751-8113/49/1/015204.
- [92] M. Gadella, J.M. Mateos-Guilarte, L. M. Nieto J.M. Muñoz Castañeda, and L. Santamaría-Sanz. Band spectra of periodic hybrid δ - δ' structures. *Eur. Phys. J. Plus*, 135:786, 2020. doi:10.1140/epjp/s13360-020-00818-6.
- [93] J.M. Muñoz Castañeda, L. M. Nieto, and C. Romaniega. Hyperspherical $\delta - \delta'$ potentials. *Ann. Phys.*, 400:246–261, 2019. doi:10.1016/j.aop.2018.11.017.
- [94] A.V. Zolotaryuk and Y. Zolotaryuk. A zero-thickness limit of multilayer structures: A resonant-tunnelling δ' -potential. *J. Phys. A Math. Theor.*, 48:035302, 2015. doi:10.1088/1751-8113/48/3/035302.
- [95] J.I. Díaz, J. Negro, L. M. Nieto, and J.O. Rosas-Ortiz. The supersymmetric modified pöschl-teller and delta-well potential. *J. Phys. A Math. Gen.*, 32:8447–8460, 1999. doi:10.1088/0305-4470/32/48/308.
- [96] J.I. Díaz, J. Negro, L. M. Nieto, and J.O. Rosas-Ortiz. The supersymmetric modified pöschl-teller and delta well potential. *J. Phys. A Math. Gen.*, 32:8447–8460, 1999.
- [97] O. Civitarese and M. Gadella. Coherent gamow states for the hyperbolic pöschl-teller potential. *Ann. Phys.*, 406:222–232, 2019.
- [98] M. Gadella, A. Hernández-Ortega, Ş. Kuru, and J. Negro. Redundant poles of the s-matrix for the one-dimensional morse potential. *Eur. Phys. J. Plus*, 135:822, 2020.
- [99] Z. Zali, A. Amani, J. Sadeghi, and B. Pourhassan. Energy spectrum of massive dirac particles in gapped graphene with morse potential. *Physica B Condens. Matter*, 614:413045, 2021.
- [100] D. Çevik, M. Gadella, Ş Kuru, and J. Negro. Resonances and antibound states for the pöschl-teller potential: Ladder operators and susy partners. *Phys. Lett. A*, 380:1600–1609, 2016.
- [101] E.L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1956. ISBN 9780486603490. URL <https://books.google.es/books?id=uYz-pqUD75gC>.
- [102] S.I.U. Slavianov and W. Lay. *Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities*. Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, 2000. ISBN 9780198505730. URL <https://books.google.es/books?id=JvGCsnd50MUC>.
- [103] A. Ronveaux and F.M. Arscott. *Heun's Differential Equations*. Oxford science publications. Oxford University Press, 1995. ISBN 9780198596950. URL <https://books.google.es/books?id=5p65FD8caCgC>.

- [104] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, and C.W. Clark. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1st edition, 2010. URL <https://dlmf.nist.gov/14.3>.
- [105] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Physics textbook. Wiley, 2008. ISBN 9783527406012. URL <https://books.google.es/books?id=w9Dz56myXm8C>.
- [106] A.V. Zolotaryuk. A phenomenon of splitting resonant-tunneling one-point interactions. *Ann. Phys.*, 396:479–494, 2018. doi:10.1016/j.aop.2018.07.030.
- [107] A. O. Barut, A. Inomata, and R. Wilson. Algebraic treatment of second poschl-teller, morse-rosen and eckart equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 20(13):4083, sep 1987. doi:10.1088/0305-4470/20/13/017. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/20/13/017>.
- [108] M.H. Al-Hashimi, M. Salman, A. Shalaby, and U.-J. Wiese. Supersymmetric descendants of self-adjointly extended quantum mechanical hamiltonians. *Annals of Physics*, 337:1–24, 2013. ISSN 0003-4916. doi:<https://doi.org/10.1016/j.aop.2013.06.002>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491613001334>.
- [109] P.W. Atkins and R.S. Friedman. *Molecular Quantum Mechanics*. OUP Oxford, 2011. ISBN 9780199541423. URL <https://books.google.es/books?id=9k-cAQAQBAJ>.
- [110] B. Chen, Y. Wu, and Q. Xie. Heun functions and quasi-exactly solvable double-well potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(3):035301, dec 2012. doi:10.1088/1751-8113/46/3/035301. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/46/3/035301>.
- [111] N. Rosen and P. M. Morse. On the vibrations of polyatomic molecules. *Phys. Rev.*, 42(2):210, 1932.
- [112] M. Gadella, Ş. Kuru, and J. Negro. The hyperbolic step potential: Anti-bound states, susy partners and wigner time delays. *Annals of Physics*, 379:86–101, 2017. ISSN 0003-4916. doi:<https://doi.org/10.1016/j.aop.2017.02.013>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491617300611>.
- [113] M.M. Nieto. Exact wave-function normalization constants for the $B_0 \tanh z - U_0 \cosh^{-2} z$ and Pöschl-Teller potentials. *Phys. Rev. A*, 17:1273–1283, Apr 1978. doi:10.1103/PhysRevA.17.1273. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.17.1273>.
- [114] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, seventh edition, 2007. ISBN 978-0-12-373637-6; 0-12-373637-4. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface

by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, With one CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).

- [115] S. T. Ma. Further remarks on the redundant zeros in heisenberg's theory of characteristic matrix. *Phys. Rev.*, 71:210–210, Feb 1947. doi:10.1103/PhysRev.71.210. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.71.210>.
- [116] C. Quesne. Novel enlarged shape invariance property and exactly solvable rational extensions of the Rosen–Morse II and Eckart potentials. *SIGMA*, 8:080, 2012.
- [117] B. Bagchi, Y. Grandati, and C. Quesne. Rational extensions of the trigonometric darboux–pöschl–teller potential based on para-jacobi polynomials. *Journal of Mathematical Physics*, 56(6), 06 2015. ISSN 0022-2488. doi:10.1063/1.4922017. URL <https://doi.org/10.1063/1.4922017>. 062103.
- [118] L. Delisle-Doray, V. Hussin, Ş. Kuru, and J. Negro. Classical ladder functions for Rosen-Morse and curved kepler-coulomb systems. *Ann. Phys., NY*, 405:69–82, 2019.
- [119] D.J Ferández C., J. Negro, and L. M. Nieto. Second-order supersymmetric periodic potentials. *Physics Letters A*, 275(5):338–349, 2000. ISSN 0375-9601. doi:[https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00591-0](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00591-0). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960100005910>.
- [120] D. J. Fernández C. and R. Reyes. Spectral manipulation of the trigonometric Rosen-Morse potential through supersymmetry. *Phys. Scr.*, 96:125250, 2021.
- [121] F. Correa, V. Jakubský, L. M. Nieto, and M.S. Plyushchay. Self-isospectrality, special supersymmetry, and their effect on the band structure. *Phys. Rev. Lett.*, 101:030403, Jul 2008. doi:10.1103/PhysRevLett.101.030403. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.030403>.
- [122] Frédéric Tremblay, Alexander V Turbiner, and Pavel Winternitz. An infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(24):242001, may 2009. doi:10.1088/1751-8113/42/24/242001. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/42/24/242001>.
- [123] P Gaillard and V B Matveev. Wronskian and casorati determinant representations for darboux–pöschl–teller potentials and their difference extensions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(40):404009, sep 2009. doi:10.1088/1751-8113/42/40/404009. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/42/40/404009>.

Apéndices y Anexos

Apéndice A

Artículo 1

M. Gadella, J. Hernández-Muñoz, L.M. Nieto y C. San Millán, *Supersymmetric Partners of the One-Dimensional Infinite Square Well Hamiltonian*. *Symmetry* (2021), 13, 350.
DOI: <https://doi.org/10.3390/sym13020350>

Apéndice B

Artículo 2

M. Gadella y C. San Millán, *Supersymmetric Partners of the One-Dimensional Infinite Square Well Hamiltonian: Special Cases*. *Symmetry* (2022), 14, 1314.

DOI: <https://doi.org/10.3390/sym14071314>

Apéndice C

Artículo 3

C. San Millán, M. Gadella, Ş. Kuru y J. Negro, *SUSY partners and S-matrix poles of the one-dimensional Rosen–Morse II potential*. Eur. Phys. J. Plus (2023) 138: 857.

DOI: <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-04338-x>