



## Solitarios, cubo de Rubik y otros juegos

Versión 2024

Jorge Mozo Fernández  
<http://jorgemozo.blogs.uva.es>

Universidad de Valladolid  
Protegido con licencia Creative Commons



# IDM 2024: Jugando con las matemáticas



Figura: Póster del Día Internacional de las Matemáticas 2024



## ¿Qué es el cubo de Rubik?

- ▶ El cubo de Rubik es uno de los pasatiempos más famosos de los tiempos recientes.
- ▶ Su inventor es Ernő Rubik, arquitecto húngaro que concibió varios juegos como apoyo a sus clases, para ayudar a visualizar la geometría del espacio.



**Figura:** Ernő Rubik. Fuente: The Guardian (13 Sep 2020). Fotografía: Richard Drew/AP



## Rubik en Informe Semanal

- ▶ En un programa reciente de Informe Semanal (<https://www.rtve.es/play/videos/informe-semanal/rubik-solucion-cubo/6750321/>) se abordó el 50 aniversario del cubo de Rubik, e incluye una entrevista con Rubik.

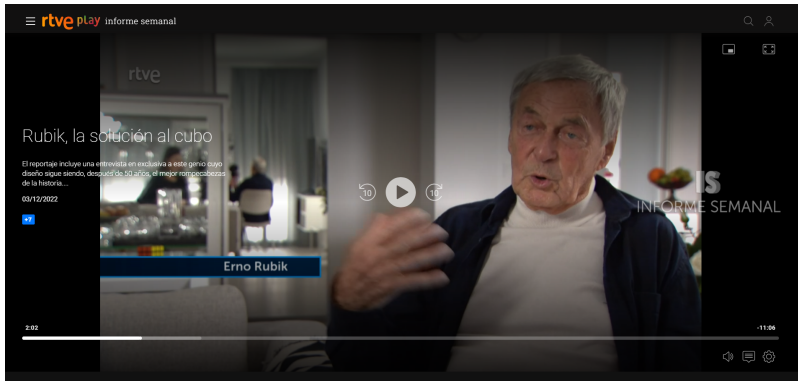


Figura: Informe Semanal. Captura de pantalla



## ¿Para qué sirve la lógica?

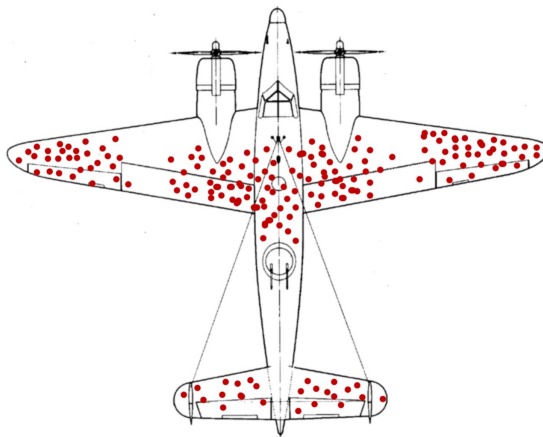


Figura: Avión de la IIGM con marcas de disparos



## Vamos a la prehistoria

Mucho antes de que el cubo de Rubik se hiciera popular, hubo otros juegos en el mercado de la misma naturaleza que alcanzaron fama: se trata de recomponer una situación inicial, o llegar a una situación, siguiendo unos movimientos limitados.

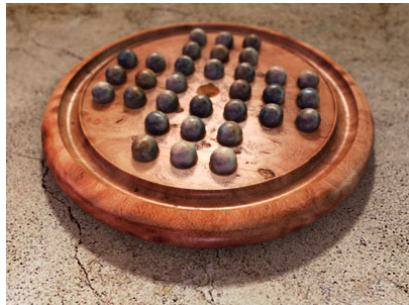


Figura: Juego del 15. Solitario



## El juego del quince

- ▶ Exactamente cien años antes de la patente de Rubik, un funcionario de Correos en Nueva York llamado Noyes Palmer Chapman empezó a fabricar modelos caseros del solitario ahora conocido como el puzle del quince.
- ▶ A finales de 1879, Matthias Rice, quien dirigía un negocio de carpintería, comercializó el producto bajo el nombre “Gem Puzzle” . Las instrucciones eran muy simples: “Colocar las piezas desordenadamente en la caja para después deslizarlas hasta conseguir ordenarlas de nuevo” .
- ▶ Sam Loyd lo resucitó en 1891. Ofreció un premio de 1000 dólares a quien fuera capaz de resolverlo partiendo de la posición en la que el 14 y el 15 están permutados.



## Algunas posiciones posibles

15	3	2	4
5	1	10	14
9	11	7	
13	8	12	6

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	





- ▶ Juego del quince online:  
<https://www.geogebra.org/m/aSYHQp4k>



- ▶ Juego del quince online:  
<https://www.geogebra.org/m/aSYHQp4k>
- ▶ Pregunta (medio punto en el examen): Para resolverlo, ¿cuántos movimientos hay que hacer? ¿7, 33, 124?



## Algunas posiciones imposibles

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	



## Vamos a simplificar

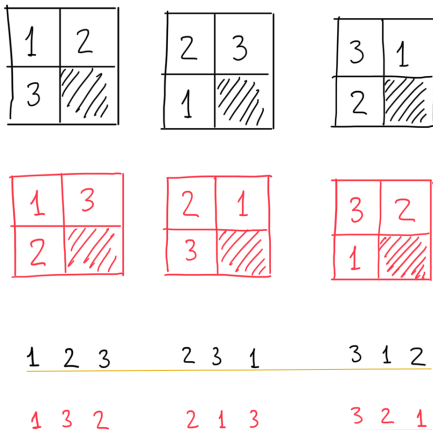


Figura: Todas las posibilidades en el Juego del 3



## Permutaciones en el juego del quince

- ▶ Al desplazar una ficha en vertical siempre se cambia la paridad de las permutaciones.



## Permutaciones en el juego del quince

- ▶ Al desplazar una ficha en vertical siempre se cambia la paridad de las permutaciones.
- ▶ Para lograr el intercambio del 14 y el 15 hay que desplazar una ficha en vertical un número par de veces.



## Permutaciones en el juego del quince

- ▶ Al desplazar una ficha en vertical siempre se cambia la paridad de las permutaciones.
- ▶ Para lograr el intercambio del 14 y el 15 hay que desplazar una ficha en vertical un número par de veces.
- ▶ En consecuencia no se cambia la paridad (se cambia un número par de veces).



## Permutaciones en el juego del quince

- ▶ Al desplazar una ficha en vertical siempre se cambia la paridad de las permutaciones.
- ▶ Para lograr el intercambio del 14 y el 15 hay que desplazar una ficha en vertical un número par de veces.
- ▶ En consecuencia no se cambia la paridad (se cambia un número par de veces).
- ▶ Conclusión: El problema propuesto por Sam Loyd carece de solución.





# Las torres de Hanoi

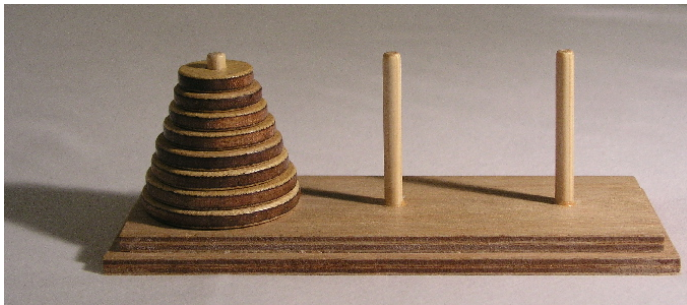


Figura: Juego de torres de Hanoi



## La leyenda

En el gran templo de Benarés, debajo de la cúpula que marca el centro del mundo, yace una base de bronce en la que se encuentran fijadas tres agujas de diamante de un codo de altura y del grueso del cuerpo de una abeja. En una de estas agujas, Dios, en el comienzo de los siglos, colocó sesenta y cuatro discos de oro puro, el mayor sobre el plato de bronce, y los otros, en orden decreciente de anchura, superpuestos hasta la cima. Día y noche, los sacerdotes se turnan en la ocupación de transportar la torre de la primera aguja de diamante a la tercera, sin desviarse de las reglas fijas e inmutables impuestas por Brahma.



El sacerdote no debe mover más de un disco a la vez; y no debe colocar un disco más que en una aguja libre, o sobre un disco mayor. Cuando siguiendo estrictamente estas recomendaciones los sesenta y cuatro discos hayan sido transferidos de la aguja en la que Dios los colocó a la tercera, la torre y los brahmanes se convertirán en polvo y será el fin del mundo.



El sacerdote no debe mover más de un disco a la vez; y no debe colocar un disco más que en una aguja libre, o sobre un disco mayor. Cuando siguiendo estrictamente estas recomendaciones los sesenta y cuatro discos hayan sido transferidos de la aguja en la que Dios los colocó a la tercera, la torre y los brahmanes se convertirán en polvo y será el fin del mundo. Los sacerdotes hacen un movimiento por segundo. ¿Llegará el fin del mundo antes del fin de semana?



El sacerdote no debe mover más de un disco a la vez; y no debe colocar un disco más que en una aguja libre, o sobre un disco mayor. Cuando siguiendo estrictamente estas recomendaciones los sesenta y cuatro discos hayan sido transferidos de la aguja en la que Dios los colocó a la tercera, la torre y los brahmanes se convertirán en polvo y será el fin del mundo. Los sacerdotes hacen un movimiento por segundo. ¿Llegará el fin del mundo antes del fin de semana?

- ▶ Torres de Hanoi online:

<https://www.geogebra.org/m/NqyWJVra>



El sacerdote no debe mover más de un disco a la vez; y no debe colocar un disco más que en una aguja libre, o sobre un disco mayor. Cuando siguiendo estrictamente estas recomendaciones los sesenta y cuatro discos hayan sido transferidos de la aguja en la que Dios los colocó a la tercera, la torre y los brahmanes se convertirán en polvo y será el fin del mundo.

Los sacerdotes hacen un movimiento por segundo. ¿Llegará el fin del mundo antes del fin de semana?

- ▶ Torres de Hanoi online:

<https://www.geogebra.org/m/NqyWJVra>

El fin del mundo llegará tras 18446744073709551615 segundos, que vienen a ser algo más de 584942417355 años.





Figura: Primera imagen del juego del solitario

- ▶ El juego surge por primera vez en Francia en 1687 en el retrato de Ana de Rohan-Chabot, Princesa de Soubise a cargo del artista Claude-Auguste Béréy y fue seguramente jugado en la corte de Luis XIV. En agosto de 1687, el periódico literario francés *Mercure de France* publicó la descripción del juego, así como sus reglas y posibles jugadas. En Inglaterra aparece en 1746.



## Objetivo



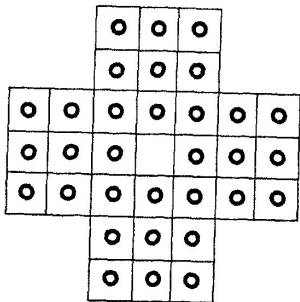
- ▶ El objetivo del juego es, saltando fichas y comiéndoselas, quedarse con una única ficha en el centro.





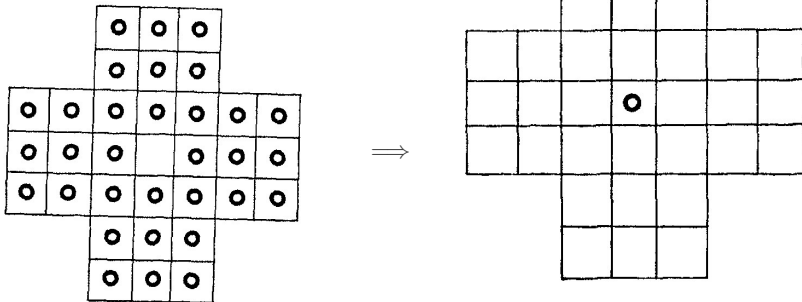
## Objetivo

- El objetivo del juego es, saltando fichas y comiéndoselas, quedarse con una única ficha en el centro.



## Objetivo

- ▶ El objetivo del juego es, saltando fichas y comiéndoselas, quedarse con una única ficha en el centro.



**Figura:** Jugando al solitario.  
Fuente: M. de Guzmán, *Cuentos con cuentas*



# Solitario imposible

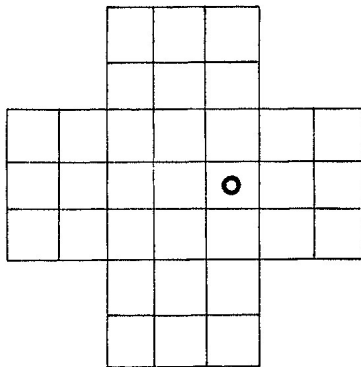


Figura: Solitario imposible. Fuente: M. de Guzmán, *Cuentos con cuentas*



		ab	a	b		
		b	ab	a		
b	ab	a	b	ab	a	b
a	b	ab	a	b	ab	a
ab	a	b	ab	a	b	ab
		a	b	ab		
		ab	a	b		

Figura: Grupo del solitario. Fuente: M. de Guzmán, *Cuentos con cuentas*



¿Y éste quién es?



# Alan Turing



Figura: Alan Turing. Fuente: NG España



# Alan Turing

- ▶ Alan Turing escribió una carta a Maria Greenbaum, una niña de 8 años, dándole pistas e indicaciones sobre cómo abordar el juego del solitario:

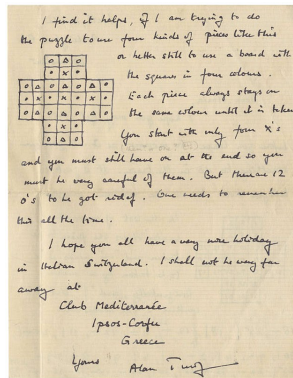
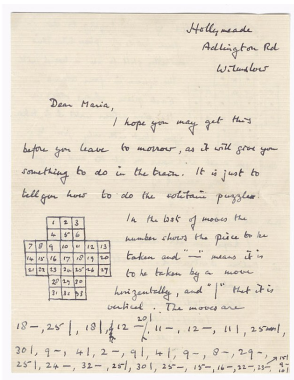


Figura: Carta de Alan Turing sobre el juego del solitario



## Vamos a por el cubo

- ▶ Cada una de las 6 caras del cubo está dividida en 9 cuadrados. Las caras son inicialmente monocromas.
- ▶ Físicamente se compone de 27 piezas, de varios tipos:
  - ▶ Una pieza central, no visible.
  - ▶ Seis piezas centrales de cada cara.
  - ▶ Doce piezas de arista, bicolors, entre cada par de caras adyacentes.
  - ▶ Ocho piezas vértice, tricolors.
- ▶ Cada cara se mueve de manera independiente, arrastrando con ella a sus piezas. La pieza central de cada cara se encuentra anclada a la pieza central del cubo, y no se desplaza, sólo gira.





## Objetivo

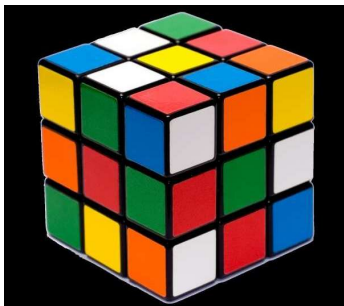


- ▶ El objetivo del juego es, partiendo de una posición arbitraria, realizar movimientos elementales de las caras para devolver el cubo a su configuración original.



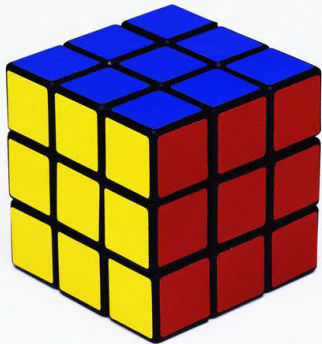
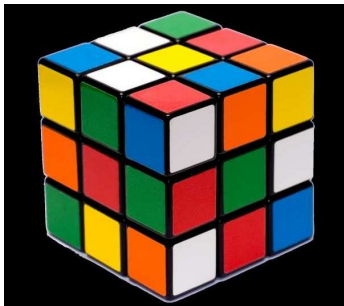
## Objetivo

- ▶ El objetivo del juego es, partiendo de una posición arbitraria, realizar movimientos elementales de las caras para devolver el cubo a su configuración original.



## Objetivo

- ▶ El objetivo del juego es, partiendo de una posición arbitraria, realizar movimientos elementales de las caras para devolver el cubo a su configuración original.



## Las matemáticas, ¿dónde están?

- ▶ Se puede estudiar el cubo desde un punto de vista matemático.



## Las matemáticas, ¿dónde están?

- ▶ Se puede estudiar el cubo desde un punto de vista matemático.
- ▶ Nos podemos hacer numerosas preguntas, del tipo:



## Las matemáticas, ¿dónde están?

- ▶ Se puede estudiar el cubo desde un punto de vista matemático.
- ▶ Nos podemos hacer numerosas preguntas, del tipo:
  - ▶ ¿Se puede alcanzar cualquier configuración de colores desordenando el cubo?



## Las matemáticas, ¿dónde están?

- ▶ Se puede estudiar el cubo desde un punto de vista matemático.
- ▶ Nos podemos hacer numerosas preguntas, del tipo:
  - ▶ ¿Se puede alcanzar cualquier configuración de colores desordenando el cubo?
  - ▶ ¿Cuántas posiciones posibles hay?



## Las matemáticas, ¿dónde están?

- ▶ Se puede estudiar el cubo desde un punto de vista matemático.
- ▶ Nos podemos hacer numerosas preguntas, del tipo:
  - ▶ ¿Se puede alcanzar cualquier configuración de colores desordenando el cubo?
  - ▶ ¿Cuántas posiciones posibles hay?
  - ▶ ¿Se puede desarrollar un método matemático para reconstruirlo, que funcione siempre?





## Las matemáticas, ¿dónde están?

- ▶ Se puede estudiar el cubo desde un punto de vista matemático.
- ▶ Nos podemos hacer numerosas preguntas, del tipo:
  - ▶ ¿Se puede alcanzar cualquier configuración de colores desordenando el cubo?
  - ▶ ¿Cuántas posiciones posibles hay?
  - ▶ ¿Se puede desarrollar un método matemático para reconstruirlo, que funcione siempre?
  - ▶ ¿Cuál es el mínimo número de movimientos necesarios para reconstruir el cubo, desde una posición arbitraria?



## Las matemáticas, ¿dónde están?

- ▶ Se puede estudiar el cubo desde un punto de vista matemático.
- ▶ Nos podemos hacer numerosas preguntas, del tipo:
  - ▶ ¿Se puede alcanzar cualquier configuración de colores desordenando el cubo?
  - ▶ ¿Cuántas posiciones posibles hay?
  - ▶ ¿Se puede desarrollar un método matemático para reconstruirlo, que funcione siempre?
  - ▶ ¿Cuál es el mínimo número de movimientos necesarios para reconstruir el cubo, desde una posición arbitraria?
- ▶ Todas esas preguntas se pueden responder utilizando una rama de las matemáticas que se llama la teoría de grupos.





Figura: Grupo diedral de orden 8





Figura: Grupo diedral de orden 8



# ¡Notación, notación, notación!

Los movimientos del cubo se representan con letras mayúsculas: A, B, I, D, F, T. Cada una de ellas representa un giro de la cara correspondiente en el sentido de las agujas del reloj. El movimiento inverso es  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$ , ... Se tiene que, por ejemplo,  $A^4 = 1$  (identidad). De esta manera, expresando movimientos de manera consecutiva, es claro que tenemos un grupo, no conmutativo.



## Sucesiones de movimientos

### Moviendo aristas



- ▶ La sucesión de movimientos  $AD^{-1}A^2DAD^{-1}AD$  intercambia dos aristas adyacentes (y realiza un 4-ciclo con los vértices).



## Sucesiones de movimientos

### Moviendo aristas



- ▶ La sucesión de movimientos  $AD^{-1}A^2DAD^{-1}AD$  intercambia dos aristas adyacentes (y realiza un 4-ciclo con los vértices).
- ▶ La sucesión  $D^{-1}A^2DAD^{-1}AD$  hace un 3-ciclo con aristas de la cara superior (y mueve vértices).



# Sucesiones de movimientos

## Moviendo aristas

- ▶ La sucesión de movimientos  $AD^{-1}A^2DAD^{-1}AD$  intercambia dos aristas adyacentes (y realiza un 4-ciclo con los vértices).
- ▶ La sucesión  $D^{-1}A^2DAD^{-1}AD$  hace un 3-ciclo con aristas de la cara superior (y mueve vértices).
- ▶ La sucesión  $DAD^{-1}FT^{-1}BD^{-1}B^{-1}F^{-1}T$  realiza un 3-ciclo con aristas, ¡y no mueve ninguna otra pieza!





# Sucesiones de movimientos

## Moviendo aristas

- ▶ La sucesión de movimientos  $AD^{-1}A^2DAD^{-1}AD$  intercambia dos aristas adyacentes (y realiza un 4-ciclo con los vértices).
- ▶ La sucesión  $D^{-1}A^2DAD^{-1}AD$  hace un 3-ciclo con aristas de la cara superior (y mueve vértices).
- ▶ La sucesión  $DAD^{-1}FT^{-1}BD^{-1}B^{-1}F^{-1}T$  realiza un 3-ciclo con aristas, ¡y no mueve ninguna otra pieza!
- ▶ Jugando con estos movimientos llevamos todas las aristas a su posición correcta.



# Una estrategia



- ▶ Las matemáticas permiten desarrollar una estrategia, al menos teórica, para recomponer el cubo. Por ejemplo:



# Una estrategia



- ▶ Las matemáticas permiten desarrollar una estrategia, al menos teórica, para recomponer el cubo. Por ejemplo:
  1. Colocar todos los vértices en su lugar, aunque no en su posición.



- ▶ Las matemáticas permiten desarrollar una estrategia, al menos teórica, para recomponer el cubo. Por ejemplo:
  1. Colocar todos los vértices en su lugar, aunque no en su posición.
  2. Colocar todas las aristas en su lugar, aunque no en su posición.



- ▶ Las matemáticas permiten desarrollar una estrategia, al menos teórica, para recomponer el cubo. Por ejemplo:
  1. Colocar todos los vértices en su lugar, aunque no en su posición.
  2. Colocar todas las aristas en su lugar, aunque no en su posición.
  3. Girar vértices hasta que todos estén en su posición correcta, sin alterar el resto de las piezas.



- ▶ Las matemáticas permiten desarrollar una estrategia, al menos teórica, para recomponer el cubo. Por ejemplo:
  1. Colocar todos los vértices en su lugar, aunque no en su posición.
  2. Colocar todas las aristas en su lugar, aunque no en su posición.
  3. Girar vértices hasta que todos estén en su posición correcta, sin alterar el resto de las piezas.
  4. Girar aristas hasta que todas estén en posición correcta, sin alterar las demás.



# El grupo del cubo de Rubik

¿Cuántas posiciones hay?

Se pueden calcular el número total de posiciones posibles alcanzables. Este número es:

$$\frac{8! \cdot 12! \cdot 2^{12} \cdot 3^8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 43252003274489856000.$$



# El grupo del cubo de Rubik

¿Cuántas posiciones hay?



Se pueden calcular el número total de posiciones posibles alcanzables. Este número es:

$$\frac{8! \cdot 12! \cdot 2^{12} \cdot 3^8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 43252003274489856000.$$

Si pudiéramos hacer 100 posiciones por segundo, para conseguir hacerlas todas necesitaríamos más de 13700 millones de años. Esto es, ¡aproximadamente la edad del universo!

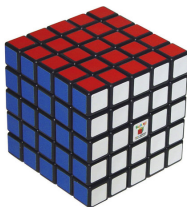




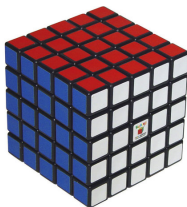
## Otros cubos y similares



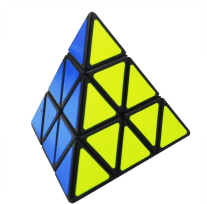
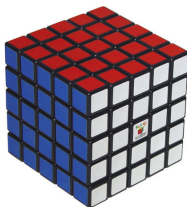
## Otros cubos y similares



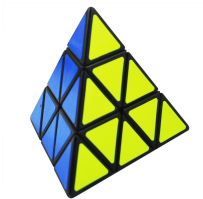
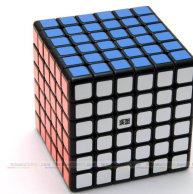
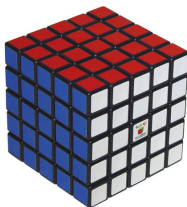
## Otros cubos y similares



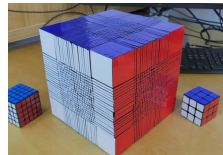
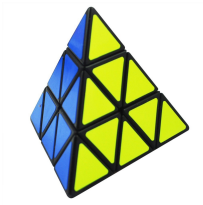
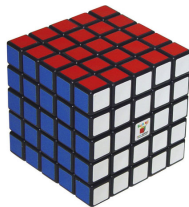
## Otros cubos y similares



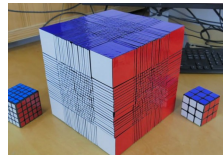
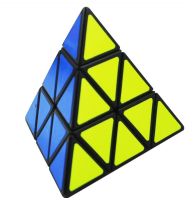
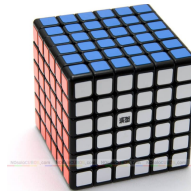
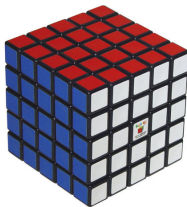
## Otros cubos y similares



## Otros cubos y similares



## Otros cubos y similares



## Algunos datos curiosos

- ▶ En 2018 Yusheng Du consiguió una marca de 3.47 segundos en el torneo Wuhu Open. Feliks Zemdegs, australiano de 22 años, tenía el record anterior, con 4.22 segundos (<https://www.youtube.com/watch?v=NevGDFBfQGw>). Zemdegs tiene también el mejor registro de velocidad media, con 5.53 segundos en Sidney (2019).





## Algunos datos curiosos

- ▶ En 2018 Yusheng Du consiguió una marca de 3.47 segundos en el torneo Wuhu Open. Feliks Zemdegs, australiano de 22 años, tenía el record anterior, con 4.22 segundos (<https://www.youtube.com/watch?v=NevGDFBfQGw>). Zemdegs tiene también el mejor registro de velocidad media, con 5.53 segundos en Sidney (2019).
- ▶ En 2010 se demostró, con ayuda de ordenadores, que 20 movimientos son suficientes para recomponer el cubo desde una posición arbitraria. El procedimiento para hacerlo no es algorítmico, y esta cifra es óptima (<http://cube20.org/>).



## Algunos datos curiosos

- ▶ En 2018 Yusheng Du consiguió una marca de 3.47 segundos en el torneo Wuhu Open. Feliks Zemdegs, australiano de 22 años, tenía el record anterior, con 4.22 segundos (<https://www.youtube.com/watch?v=NevGDFBfQGw>). Zemdegs tiene también el mejor registro de velocidad media, con 5.53 segundos en Sidney (2019).
- ▶ En 2010 se demostró, con ayuda de ordenadores, que 20 movimientos son suficientes para recomponer el cubo desde una posición arbitraria. El procedimiento para hacerlo no es algorítmico, y esta cifra es óptima (<http://cube20.org/>).
- ▶ En Youtube (<https://www.youtube.com/watch?v=Q4BrzJbtRZg>) se puede ver un video en el que Oskar van Deventer hace un cubo  $17 \times 17 \times 17$ , en 7 horas y media. Hay una versión acelerada del vídeo, por si no tienes paciencia de verlo todo (<https://www.youtube.com/watch?v=qlnUEknwdcI>).



## Algunos datos curiosos

- ▶ En 2018 Yusheng Du consiguió una marca de 3.47 segundos en el torneo Wuhu Open. Feliks Zemdegs, australiano de 22 años, tenía el record anterior, con 4.22 segundos (<https://www.youtube.com/watch?v=NevGDFBfQGw>). Zemdegs tiene también el mejor registro de velocidad media, con 5.53 segundos en Sidney (2019).
- ▶ En 2010 se demostró, con ayuda de ordenadores, que 20 movimientos son suficientes para recomponer el cubo desde una posición arbitraria. El procedimiento para hacerlo no es algorítmico, y esta cifra es óptima (<http://cube20.org/>).
- ▶ En Youtube (<https://www.youtube.com/watch?v=Q4BrzJbtRZg>) se puede ver un video en el que Oskar van Deventer hace un cubo  $17 \times 17 \times 17$ , en 7 horas y media. Hay una versión acelerada del vídeo, por si no tienes paciencia de verlo todo (<https://www.youtube.com/watch?v=qlnUEknwdcI>).
- ▶ Un robot puede resolver el cubo de Rubik en 0.38 segundos: <https://www.youtube.com/watch?v=nt00QzKuNVY>



## Algunos datos curiosos

- ▶ En 2018 Yusheng Du consiguió una marca de 3.47 segundos en el torneo Wuhu Open. Feliks Zemdegs, australiano de 22 años, tenía el record anterior, con 4.22 segundos (<https://www.youtube.com/watch?v=NevGDFBfQGw>). Zemdegs tiene también el mejor registro de velocidad media, con 5.53 segundos en Sidney (2019).
- ▶ En 2010 se demostró, con ayuda de ordenadores, que 20 movimientos son suficientes para recomponer el cubo desde una posición arbitraria. El procedimiento para hacerlo no es algorítmico, y esta cifra es óptima (<http://cube20.org/>).
- ▶ En Youtube (<https://www.youtube.com/watch?v=Q4BrzJbtRZg>) se puede ver un video en el que Oskar van Deventer hace un cubo  $17 \times 17 \times 17$ , en 7 horas y media. Hay una versión acelerada del vídeo, por si no tienes paciencia de verlo todo (<https://www.youtube.com/watch?v=qlnUEknwdcI>).
- ▶ Un robot puede resolver el cubo de Rubik en 0.38 segundos: <https://www.youtube.com/watch?v=nt00QzKuNVY>
- ▶ Hasta 2020, se calcula que se habían vendido en el mundo al menos 450 millones de unidades del cubo. Se sigue vendiendo a un ritmo de 20 millones de cubos al año.





# GRACIAS POR LA ATENCIÓN

