

Introduction

Soit  $X$  un champ vecteurs analytique sur une variété  $M$  et soit  $t \mapsto \gamma(t)$  une courbe intégrale de  $X$  dont l'ensemble  $\omega$ -limite  $\omega(\gamma)$  est un point singulier  $p$  de  $X$ . Dans ce travail nous étudions la question suivante : comment, d'un point de vue analytique,  $\gamma$  peut-elle tendre vers  $p$  ? C'est une question classique déjà étudiée à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle par Poincaré [Po] et Lyapunov [Ly]. En dimension 2, leurs travaux apportent une réponse satisfaisante à cette question:  $\gamma$  possède une tangente en  $p$  ou  $\gamma$  spirale autour de  $p$  et alors  $p$  est un foyer monodromique. Pour décrire le comportement analytique de  $\gamma$  en dimension  $\geq 2$  nous utiliserons les concepts d'oscillation, de tangentes itérées et de spiralement axial en dimension 3. Donnons brièvement leur définition.

La courbe  $\gamma : [0, \infty[ \rightarrow M$  est *non oscillante* si toute hypersurface analytique qui ne la contient pas la coupe un nombre fini de fois seulement. Soit  $\pi_1 : M_1 \rightarrow M$  l'éclatement de  $M$  de centre  $p$ . La courbe  $\gamma$  possède (par définition) une tangente en  $p$  si son relevé  $\gamma_1 = \pi_1^{-1} \circ \gamma$  possède un unique point  $\omega$ -limite  $p_1 = \omega(\gamma_1)$ . S'il existe une suite d'éclatements

$$M = M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \cdots \longleftarrow M_{n-1} \xleftarrow{\pi_n} M_n \cdots$$

de centres respectifs  $p = p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, \dots$  tels que, pour tout  $n$ , le relevé  $\gamma_n = \pi_n^{-1} \circ \gamma_{n-1}$ , possède un unique point  $\omega$ -limite  $p_n = \omega(\gamma_n)$ . On dit alors que  $\gamma$  *possède des tangentes itérées* en  $p$  et on écrit  $TI(\gamma) = \{p_n\}$ . On voit que si  $\gamma$  est non oscillante alors  $TI(\gamma)$  existe. La réciproque est vraie en dimension 2. Cette dichotomie osciller-tangentes itérées est propre à la dimension 2. En dimension 3, il faut la remplacer par le *spiralemment axial* comme le montre le théorème suivant.

**Théorème 1.** *Si  $TI(\gamma)$  existe et si  $\gamma$  est oscillante alors  $\gamma$  spirale autour d'un axe analytique  $\Gamma$  invariant par  $X$ .*

La définition générale du spiralement axial étant un peu technique (voir I.4), nous allons seulement en donner une propriété caractéristique lorsque  $\Gamma$  est lisse :  $\gamma$  *spirale autour de  $\Gamma$  lisse* s'il existe des coordonnées analytiques  $(x, y, z)$  en  $p$  telles que  $\Gamma = \{x = y = 0, z > 0\}$  et telles que si  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  la courbe  $t \mapsto (x(t), y(t))$  spirale autour de 0 dans le plan réel et  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x^2(t) + y^2(t))z(t)^{-n} = 0$  pour tout  $n$ . L'hypothèse  $\Gamma$  lisse n'est pas essentielle. En effet par une suite finie d'éclatements ponctuels on se ramène à ce cas.

Nous dirons qu'une demi-courbe analytique (ouverte) $\Gamma$  est *un axe de tourbillonnement de  $X$*  s'il existe un voisinage semi analytique  $V$  de  $\Gamma$ , positivement invariant par  $X$  tel que  $\Gamma$  soit un axe de spiralement pour toute courbe intégrale de  $X$  issue d'un point de  $V$ . Il est dit non dégénéré si  $\Gamma$  n'est pas contenu dans l'ensemble  $\text{Sing } X$  des points fixes de  $X$ . Ce concept doit être rapproché de celui de foyer monodromique en dimension 2 comme le montre le théorème suivant.

**Théorème 2.** *Un axe de spiralement non dégénéré  $\Gamma$  pour  $\gamma$  est un axe de tourbillonnement de  $X$ .*

Ces axes sont des “centres organisateurs” de la dynamique de  $X$  au sens de R. Thom. Ils possèdent la propriété de finitude que l’on exige en général de tels objets.

**Corollaire.** *Tout point  $p$  de  $M$  possède un voisinage qui ne contient qu’un nombre fini d’axes de tourbillonnement non dégénérés.*

La motivation initiale de ce travail était l’étude de la dynamique d’un champ de gradient,  $X = \nabla f$ , où  $f$  est une fonction analytique. S. Lojasiewicz a montré [Lo<sub>1</sub>] qu’une courbe intégrale  $\gamma$  de  $\nabla f$  a au plus un point  $\omega$ -limite  $\omega(\gamma) = p$  et R. Thom [Th<sub>1</sub>] a proposé la *conjecture du gradient*:  $\gamma$  possède une tangente en  $p$ . Cette conjecture est vraie en dimension 2 et dans certains cas en dimension plus grande [Hu]. On peut aussi proposer la *conjecture forte du gradient*:  $\gamma$  n’est pas oscillante. Cette conjecture est encore vraie en dimension 2. Elle l’est aussi en dimension 3 lorsque la hessienne de  $f$  en  $p$  n’est pas nul. De plus, on peut montrer qu’un champ de gradient ne possède pas d’axe de tourbillonnement non dégénéré lisse [Sa]. Signalons enfin que dans un travail récent [Br], M. Brunella montre que tout champ de vecteurs analytique en dimension trois, à singularité isolée, possède une courbe intégrale ayant la propriété des tangentes itérées. Ainsi, les deux théorèmes précédents s’appliquent à ces champs de vecteurs.

Ce travail comporte deux parties. Dans la première partie, on étudie tout d’abord les relations entre les concepts oscillation, tangentes itérées et spiralement pour une courbe analytique quelconque  $\gamma : [0, \infty[ \rightarrow M$  telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = p$ . Ensuite on précise ces résultats lorsque  $\gamma$  est une courbe intégrale et on prouve le théorème 1. La deuxième partie est essentiellement consacrée à la preuve du théorème 2 et de son corollaire.

Les trois auteurs remercient vivement la C.E.E. pour le support financier qu’elle leur a apporté pendant la préparation de ce travail, par l’intermédiaire du réseau T.M.R..

## I. Tangentes itérées, oscillation, spiralement.

Dans tout ce chapitre  $M$  désigne une variété analytique (non singulière) de dimension  $m$  et  $\gamma$  désigne une application analytique non constante de  $\mathbb{R}^+$  dans  $M$  qui possède un unique point  $\omega$ -limite  $p = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$ . Pour décrire le comportement analytique de  $|\gamma|$ , l’image de  $\gamma$ , au voisinage de  $p$  nous utilisons quatre concepts: tangentes itérées, contact plat, oscillation et spiralement. Dans la partie 1 de ce chapitre, nous étudions les relations qui les lient dans le cas général et dans la partie 2 nous précisons ces résultats lorsque  $\gamma$  est une courbe intégrale d’un champ de vecteurs analytique réel.

**1. Courbes paramétrées.** Les définitions que nous allons donner dans ce paragraphe reposent sur les éclatements ponctuels et sur quelques propriétés classiques des ensembles semi-analytiques que l’on peut trouver dans [Hi<sub>1</sub>], [Lo<sub>2</sub>].

**1.1. Eclatement ponctuel et tangentes itérées.** Précisons tout d’abord quelques notations et définitions. Une *carte affine* centrée en un point  $p$  de  $M$  est un difféomorphisme analytique  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  d’un voisinage  $U$  de  $p$  sur  $\mathbb{R}^m$  tel que  $x(p) = 0$  (on dit “affine” pour rappeler que l’image de la carte est  $\mathbb{R}^m$ , quoique les changements de cartes ne seront pas linéaires). Un *diviseur à croisements normaux*  $E$  de  $M$  est une union finie d’hypersurfaces analytiques lisses

vérifiant : en tout point  $p$  de  $M$ , il existe une carte affine centrée en  $p$  et un entier  $\nu \geq 0$  telle que  $E \cap U = \{x_1 x_2 \cdots x_\nu = 0\}$ . Une *orientation* de  $M$  en  $p$  adaptée à  $E$  est le (choix du) germe  $M^+$  en  $p$  d'une composante connexe de  $U \setminus E$ . Rappelons que l'*éclatement de centre  $p$*  de  $M$  est un morphisme analytique, surjectif, propre  $\pi : M_1 \longrightarrow M$  dont la restriction à  $M \setminus \pi^{-1}\{p\}$  est un isomorphisme sur  $M \setminus \{p\}$  possédant la propriété suivante. En tout point  $p_1$  de  $\pi^{-1}(p)$  il existe une carte affine  $((x, z), U_1)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$  centrée en  $p_1$  et une carte affine centrée en  $p$  telles que

$$\pi(x, z) = (zx, z), \quad U_1 \cap \pi^{-1}(p) = \{z = 0\}.$$

Notons que la restriction de  $\pi$  à  $U_1 \cong \mathbb{R}^m$  est un morphisme algébrique sur  $U \cong \mathbb{R}^m$  et que le diviseur exceptionnel  $\pi^{-1}(p)$  peut être identifié à l'espace projectif  $\mathbb{R}P(m-1)$ . Si  $E$  est un diviseur à croisements normaux de  $M$ ,  $E_1 = \pi^{-1}(E \cup \{p\})$  est un diviseur à croisements normaux de  $M_1$ . Une orientation  $M_1^+$  de  $M_1$  en un point  $p_1$  de  $E_1$  adaptée à  $E_1$  est dite *compatible avec une orientation  $M^+$*  de  $M$  en  $p$  adaptée à  $E$  si  $\pi(M_1^+) \subseteq M^+$ .

Soit  $\gamma : \mathbb{R}^+ = [0, \infty[ \longrightarrow M \setminus E \cup \{p\}$  une application analytique dont l'ensemble  $\omega$ -limite est le point  $p$ , c'est-à-dire :

$$p = \omega(\gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma((t, \infty))}.$$

Soit  $\gamma_1 = \pi^{-1} \circ \gamma$  le *relevé de  $\gamma$  par  $\pi$*  l'éclatement de centre  $p$ , i.e  $\pi(\gamma_1(t)) = \gamma(t)$  pour  $t \geq 0$ . Si  $\gamma_1$  possède un seul point  $\omega$ -limite  $p_1 = \omega(\gamma_1)$  on dit (naturellement) que  $\gamma$  possède une *tangente en  $p$*  et que  $p_1 \in \mathbb{R}P(m-1)$  est la (direction de la) tangente à  $\gamma$  en  $p$ . Posons  $M_0 = M$ ,  $p_0 = p$ ,  $E_0 = \emptyset$ ,  $\pi_1 = \pi$ .

**Définition.** On dit que  $\gamma$  a (la propriété) des *tangentes itérées* s'il existe une suite :

$$M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \longleftarrow \cdots M_{n-1} \xleftarrow{\pi_n} M_n \longleftarrow \cdots$$

d'éclatements  $\pi_n$  de centres  $p_{n-1}$  telle que le relevé  $\gamma_n = \pi_n^{-1} \circ \gamma_{n-1}$  possède un unique point  $\omega$ -limite  $p_n = \omega(\gamma_n)$ . La suite  $TI(\gamma) = \{p_n\}$  est la suite des points infiniment proches de  $\gamma = \gamma_0$ . Notons, pour  $n \geq 1$ ,  $E_n = \pi_n^{-1}(E_{n-1} \cup \{p_{n-1}\})$  et  $M_n^+$  l'orientation de  $M_n$  adaptée à  $E_n$  telle que  $M_n^+$  contient le germe de  $|\gamma_n|$  en  $p_n$ . La suite  $TI^+(\gamma) = \{(p_n, M_n^+)\}$  est la suite orientée des points infiniment proches de  $\gamma$ .

(Notons que lorsque  $p \notin |\gamma| = \text{image de } \gamma$  et que  $\omega(\gamma) = \{p\}$ , alors le germe en  $p$  de  $|\gamma|$  coïncide avec "l'image du germe" en  $t = \infty$  de  $\gamma$ ).

**1.2. Oscillation.** Dans tout ce paragraphe  $\gamma$  désigne encore une application analytique de  $\mathbb{R}^+$  dans  $M \setminus \{p\}$  telle que  $\omega(\gamma) = p$ .

**Définition.** Soit  $H$  une hypersurface semi-analytique de  $M$ . On dit que  $\gamma$  est *oscillante en  $p$  par rapport à  $H$*  si  $|\gamma|$  n'est pas contenu dans  $H$  et si  $|\gamma| \cap H$  est un ensemble infini. S'il n'existe pas une telle hypersurface nous dirons que  $|\gamma|$  est *non oscillante en  $p$* .

Ce concept d'oscillation d'une courbe est étudié quantitativement dans le cadre global par D. Novikov et S. Yakovenko dans [No-Ya].

**Proposition.** Si  $|\gamma|$  est non oscillante en  $p$ , elle possède la propriété des tangentes itérées en  $p$ . La proposition réciproque n'est pas vraie en général. Par exemple la courbe  $t \mapsto (1/t, \exp(-t)\sin t)$  possède des tangentes itérées en  $(0, 0)$  et est oscillante par rapport à la droite  $y = 0$ .

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous étudierons cette réciproque lorsque  $\gamma$  est une courbe intégrale d'un champ de vecteurs analytique.

**Preuve.** Nous allons montrer la proposition contraposée. Posons  $M_0 = M$ ,  $p_0 = p$ ,  $\gamma_0 = \gamma$  et supposons qu'il existe une suite d'éclatements  $\pi_k : M_k \rightarrow M_{k-1}$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$  de centres  $p_{k-1}$ , telle que, pour  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , le relevé  $\gamma_k = \pi_k^{-1} \circ \gamma_{k-1}$  de  $\gamma_{k-1}$  possède un unique point  $\omega$ -limite  $p_k = \omega(\gamma_k)$  et telle que  $\gamma_n = \pi_n^{-1} \circ \gamma_{n-1}$  possède au moins deux points  $\omega$ -limites distincts  $p'_n, p''_n$ . Puisqu'il s'agit de prouver un résultat local nous pouvons supposer que  $M_0 = \mathbb{R}^m$  et que les deux points  $p'_n, p''_n$  sont contenus dans une même carte affine  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que  $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n \circ x^{-1}$  soit une application polynomiale. D'après le théorème de Tarski-Seidenberg [Ta] sur les projections d'ensembles semi-algébriques, il suffit de construire une hypersurface algébrique  $H_n$  dans  $U \cong \mathbb{R}^m$  non contenue dans le diviseur telle que  $\# H_n \cap |\gamma_n| = \infty$  et  $|\gamma_n| \not\subset H_n$ . En effet, sa projection par  $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n \circ x^{-1}$  sera une hypersurface semi-algébrique  $H$  telle que  $\# H \cap \gamma = \infty$  et  $|\gamma| \not\subset H$ . Soient  $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, z)$  des coordonnées affines sur  $U$  telles que :

$$\{z = 0\} = \pi_n^{-1}(p_{n-1}) \quad \text{et} \quad p'_n, p''_n \in B = \{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-1}^2 + z^2 < 1\}.$$

Si  $|\gamma_n|$  coupe une infinité de fois la sphère  $\partial B$  on prend  $H_n = \partial B$ . Si ce n'est pas le cas, soit  $H_n$  un hyperplan  $f(x_1, \dots, x_{m-1}, z) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1} + \beta = 0$  tel que  $f(p'_n) \cdot f(p''_n) < 0$ . Les points  $p'_n, p''_n$  appartenant à deux composantes connexes distinctes de  $B \setminus H_n$ ,  $|\gamma|$  coupe une infinité de fois leur "frontière commune"  $B \cap H_n$ . ■

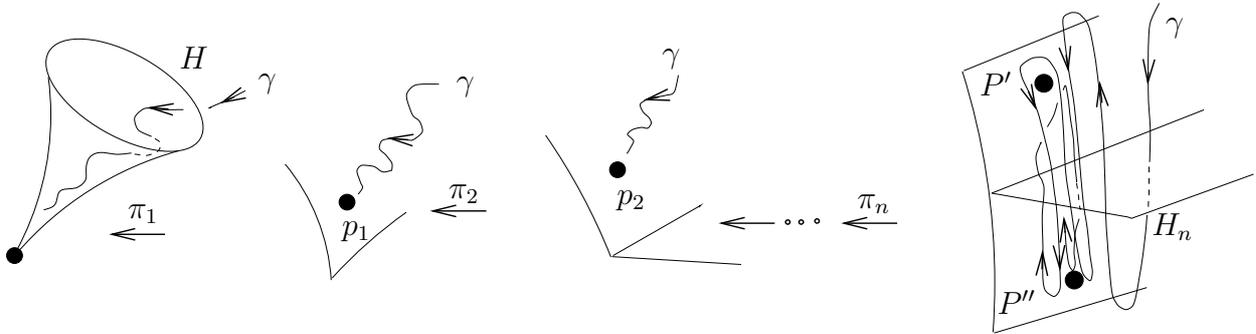


Figure 0.

**Remarque.** Le concept "osciller" est stable par éclatement. Si  $\gamma$  est oscillante par rapport à  $H$ , alors  $\pi^{-1} \circ \gamma = \gamma_1$  est oscillante par rapport à  $\pi^{-1}(H) = H_1$ . Par contre, il ne l'est pas, à priori, par effondrement puisque l'image directe par éclatement ponctuel d'une hypersurface analytique n'est pas en général semi-analytique [Lo<sub>2</sub>], [Hi<sub>1</sub>]. Dans la preuve précédente, on contourne cette difficulté en travaillant dans des cartes affines pour se placer dans le cadre algébrique.

Nous aurions pu faire une théorie semblable dans le cadre sous-analytique. Les deux théories ne sont pas équivalentes. Il nous semble qu'elles coïncident lorsqu'il s'agit de trajectoires de champs de vecteurs (mais nous ne l'avons pas démontré).

**1.3. Contact plat avec une demi-branche analytique.** Soit  $c$  une application analytique non constante de  $\mathbb{R}$  dans  $M$  et soit  $E$  un diviseur à croisements normaux. Le germe  $\Gamma$  de  $c([0, \varepsilon[)$ ,

$\varepsilon > 0$ , en  $p = c(0)$  est appelé une *demi-branche analytique en  $p$* . Elle est dite *adaptée à  $E$*  si  $\Gamma \cap E = \emptyset$ . On dit que  $\Gamma$  est *lisse relativement à  $E$*  s'il existe une carte affine  $((x_1, \dots, x_{m-1}, z), U)$  centrée en  $p$  telle que

$$\Gamma = \{x_1 = x_2 = \dots = x_{m-1} = 0, z > 0\} \text{ et } E \cap U = \{z = 0\}.$$

Soit  $\pi_1 : M_1 \rightarrow M = M_0$  l'éclatement de centre  $p = p_0$ . On sait que  $c$  possède un unique relèvement  $c_1$  par  $\pi$ ,  $c(s) = \pi \circ c_1(s)$ . La contre-image  $\Gamma_1 = \pi_1^{-1}(\Gamma_0)$ , avec  $\Gamma_0 = \Gamma$ , est la demi-branche analytique en  $p_1 = c_1(0)$  adaptée à  $E_1 = \pi^{-1}(E \cup \{p\})$  qui est le germe de  $c_1([0, \varepsilon])$  en  $p_1$ . En itérant cette construction, on obtient une suite d'éclatements :

$$M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \cdots \longleftarrow M_{n-1} \xleftarrow{\pi_n} M_n \cdots$$

de centre des points  $p_{n-1}$  et une suite de demi-branches analytiques  $\Gamma_n$ ,  $n \geq 0$ , aux points  $p_n$  adaptées aux diviseurs  $E_n = \pi_n^{-1}(E_{n-1})$ . La suite  $\{p_n\}$ ,  $n \geq 1$  est la suite des points infiniment proches au sens de 1.1 de la courbe  $\sigma : t \mapsto c(1/t)$ ,  $t > 0$  et nous écrivons :

$$TI(\Gamma) = TI(\sigma) = \{p_n\} \text{ et } TI^+(\Gamma) = TI^+(\sigma) = \{(p_n, M_n^+)\}.$$

Rappelons ([Lo2], [Hi1]) les propriétés suivantes des demi-branches analytiques qui sont bien connues:

- i) Il existe  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $\Gamma_n$  soit lisse relativement à  $E_n$ .
- ii) Si  $\Gamma'$  est une demi-branche analytique telle que  $TI^+(\Gamma') = TI^+(\Gamma)$  alors  $\Gamma' \equiv \Gamma$ .
- iii) Soit  $A$  un sous-ensemble semi-analytique de  $M$ . Alors  $\Gamma$  est contenu dans  $\overline{A}$  si et seulement si  $p_n$  appartient à l'adhérence de  $(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n)^{-1}(A) \cap M_n^+$  pour tout  $n \geq 0$ .

Dans toute la suite de ce paragraphe,  $\gamma$  désigne une application analytique de  $\mathbb{R}^+$  dans  $M \setminus \{p\}$  telle que  $\omega(\gamma) = p$ .

**Définition.** Soit  $\Gamma$  une demi-branche analytique en  $p$ . On dit que  $\gamma$  a un contact plat avec  $\Gamma$  si  $\gamma$  a la propriété des tangentes itérées et si  $TI^+(\gamma) = TI^+(\Gamma)$ .

Par définition, ce concept est stable par éclatement et par effondrement.

**Proposition (propriété caractéristique).** Soit  $\Gamma$  une demi-branche analytique lisse en  $p$  adaptée à  $E$ , i.e.  $\Gamma = \{x_1 = \dots = x_{m-1} = 0, z > 0\}$ ,  $E \cap U = \{z = 0\}$  dans une carte affine  $U$  centrée en  $p$ . Alors  $\gamma$  a un contact plat avec  $\Gamma$  si et seulement si on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0, \quad z(t) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|x(t)\|}{z(t)^n} = 0 \quad \text{pour } n \geq 0,$$

en écrivant  $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ ,  $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-1}^2$ .

L'existence des tangentes itérées n'implique pas le contact plat comme le montre l'exemple  $\gamma : t \rightarrow (t^{-1}, t^{-\lambda})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . En effet  $TI(\gamma)$  contient un nombre infini de "coins" du diviseur déterminés par le développement en fraction continue de  $\lambda$ .

**Preuve.** Soit  $TI(\Gamma) = \{p_n\}$  la suite de points infiniment proches de  $\Gamma$  et soit  $\{\pi_n\}$  la suite d'éclatements de centre les points  $p_{n-1}$ . Il existe une carte affine en  $p_n$ ,  $((u, z), U_n)$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$  telle que :

$$\pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_n(u, z) = (z^n u, z).$$