

Curso breve de geometría proyectiva

por: *Felipe Cano, Beatriz Molina-Samper, Fernando Sanz*

Curso elemental de geometría proyectiva, con un prefacio histórico:

Naturaleza y objeto de la geometría

por: *José Manuel Aroca Hernández-Ros*

Índice general

Presentación	v
Naturaleza y objeto de la geometría	
<i>José Manuel Aroca Hernández-Ros</i>	1
1. El objeto de la geometría	2
2. Los espacios abstractos	8
3. La forma del espacio	13
4. La geometría proyectiva	20
5. Los teoremas de Desargues y Pappus	23
6. Introducción histórica	32
7. El teorema fundamental de la geometría proyectiva	37
Curso breve de geometría proyectiva	
<i>Felipe Cano, Beatriz Molina-Samper, Fernando Sanz</i>	41
Capítulo 1. Espacio proyectivo. Aspectos lineales	43
1. El espacio proyectivo de un espacio vectorial	43
2. Proyectividades y perspectivas	46
3. Referencias proyectivas y coordenadas homogéneas	52
4. Proyectividades entre hiperplanos	56
5. Dualidad	59
6. Cuaternas armónicas. Razón doble	68
7. El espacio afín y el espacio proyectivo	77
Capítulo 2. Cónicas y cuádricas.	85
1. Formas bilineales simétricas y cuadráticas. Repaso	85
2. Efecto de las proyectividades. Cuádricas en subespacios	87
3. Descripción matricial de las cuádricas. Polinomios homogéneos	87
4. El soporte de una cuádrica	90
5. Rango de las cuádricas proyectivas. El vértice de una cuádrica	91
6. Aplicación de polaridad e hiperplanos polares	95
7. Hiperplanos tangentes de cuádricas no degeneradas	97
8. Polaridad respecto de una cuádrica no degenerada	99
9. Cónicas no degeneradas. Polaridad y racionalidad	101
10. Clasificación proyectiva de las cuádricas	106
11. Cuádricas y cónicas reales	109
12. Cuádricas afines. Principios generales de clasificación	111
13. Determinación de cónicas	114
14. Haces no degenerados de cónicas complejas	116

Capítulo 3. Aspectos multilineales. Cuádrica de Klein	127
1. Producto tensorial	127
2. Producto exterior	128
3. El determinante de un endomorfismo	130
4. La cuádrica de Klein	131
Bibliografía	137
Índice alfabético	141

Presentación

En este volumen se recoge un curso de geometría proyectiva, de unas sesenta horas, impartido en la Universidad de Valladolid durante los años académicos 2017/18, 2018/19 y 2019/20. El curso está ubicado en el segundo año de los estudios de matemáticas y utiliza como prerrequisito únicamente el conocimiento básico del álgebra lineal de espacios vectoriales, formas bilineales y geometría afín elemental. Hemos querido ceñirnos a la duración y contenidos exactos de esos cursos para que sirva de orientación a futuros profesores. El desarrollo se hace en el contexto de la geometría proyectiva analítica, pero hemos intentado darle un aire clásico y sintético en algunas partes, como por ejemplo el estudio de perspectivas y de las cuaternas armónicas. Los profesores de este curso estamos profundamente agradecidos a todos los estudiantes que lo han seguido en los citados años, sin cuya participación nunca lo habríamos podido escribir. En particular, agradecemos las sugerencias de Jose Antonio Castro Moreno.

Hemos pedido a José Manuel Aroca Hernández-Ros, maestro común a todos nosotros y quien nos ha transmitido a lo largo de muchísimos años lo que conocemos de geometría proyectiva y matemáticas en general, que redacte un prefacio histórico a este curso breve. Hemos tenido éxito y presentamos en este volumen el texto titulado *Naturaleza y objeto de la geometría*. Estamos seguros de que el lector encontrará en él muchas de las raíces del conocimiento geométrico que a veces permanecen ocultas. Le agradecemos profundamente haber aceptado esta sugerencia.

Felipe Cano, Beatriz Molina-Samper, Fernando Sanz
Valladolid, Mayo de 2020

Naturaleza y objeto de la geometría

José Manuel Aroca Hernández-Ros

*Alejaos de todas las curiosidades apasionantes.
Sobre todo no os dejéis embrojar por los diabólicos
atractivos de la geometría: nada hará tanto como
ellos para extinguir en vosotros el espíritu interior
de gracia y recogimiento.*

Fenelon. *Cartas espirituales*

En esta introducción presentaremos brevemente algunas reflexiones sobre el objeto y naturaleza de la geometría, que nos conducirán a la razón de ser de la geometría proyectiva. No pretendemos escribir ni una historia de la geometría, ni un tratado filosófico sobre el concepto de espacio. Intentamos simplemente mostrar cómo la pregunta *¿qué es el espacio?*, que se han hecho a lo largo de la historia numerosos matemáticos, físicos y filósofos tiene muchas respuestas, a veces enormemente complejas, que han conducido a un mejor conocimiento del universo, o al menos de la forma en que lo percibimos.

La geometría proyectiva es, hoy en día, una parte de las matemáticas casi completamente desconocida, se enseña en pocas universidades y en las que se enseña se presenta como una aplicación del álgebra lineal. Sin embargo, la geometría proyectiva no solo ha tenido por sí misma un papel central en las matemáticas, sino que ha sido también el campo en que se han debatido problemas esenciales: el rigor de las demostraciones, la axiomatización, el paso de una matemática de problemas a una matemática de teorías, la relación entre geometría y álgebra y la relación entre geometría y análisis.

La fundamentación de la geometría proyectiva fue el centro de las matemáticas durante el siglo XIX y los principios del siglo XX. En los debates sobre los problemas geométricos participaron los matemáticos más importantes. Por ejemplo, para algo aparentemente tan simple como probar que una proyectividad de la recta real con tres puntos invariantes es la identidad intervinieron, entre otros, Moebius,

Chasles, Steiner, von Staudt, Reye, Klein, Zeuthen, Lüroth, Darboux, Pasch, Enriques, Schur, Hilbert, Veblen y Weierstrass, todos ellos sobradamente conocidos en muchos campos de las matemáticas.

¿Por qué aprender hoy geometría proyectiva? No solo por ella misma, las matemáticas son un todo entrelazado y se precisan resultados proyectivos en campos a veces muy alejados de la geometría, por ejemplo en finanzas: las diferentes monedas, de las que solo conocemos el valor relativo de unas respecto a otras se pueden manejar conjuntamente como un punto de un espacio proyectivo. O en teoría de la visión y en reconocimiento de imágenes, las visuales de una cámara son puntos de un espacio proyectivo. La geometría proyectiva es el mejor campo de ejercicios para aprender algo fundamental en matemáticas, como pasar de lo que vemos a lo que es cierto, del razonamiento geométrico intuitivo, basado siempre en un dibujo, que no refleja sino un caso particular, a un teorema con validez universal. Y por una razón más, la geometría proyectiva es extraordinariamente bonita.

En este prólogo hablaremos primero de geometría en términos generales, para centrarnos después en algunos aspectos de la geometría proyectiva, sin pretender presentar una historia, maravillosamente recogida en los *Aperçu historique* de Chasles [15] y Schoenflies [60] y su versión moderna de Nabonnand [45].

1. El objeto de la geometría

En un artículo sobre los principios de la geometría publicado en la Enciclopedia de las Matemáticas [21], F. Enriques señalaba que el objetivo de la geometría es el estudio del espacio, pero distinguía tres espacios distintos:

1. *El espacio intuitivo habitual.* Es el constituido por objetos ideales: puntos, rectas, planos, etc., tal como los concibe nuestra imaginación. Dichos objetos han de ser definidos y su comportamiento ha de ser regulado por medio de unas reglas o axiomas. Una vez hecho esto, el método de la geometría es esencialmente deductivo, limitándose a aplicar las reglas de la lógica para obtener propiedades de esos objetos, propiedades que son consecuencias, más o menos difíciles de obtener, de las definiciones y axiomas, pero que no corresponden necesariamente a hechos observables.
2. *El espacio físico.* Constituido por objetos reales cuyas propiedades nos son conocidas por experiencia. La geometría obtiene por un proceso deductivo nuevas propiedades que se pueden comprobar después experimentalmente y es capaz de justificar hechos observados.
3. *Los espacios abstractos.* Es decir, espacios más generales que podemos obtener de los espacios físicos, por procesos de abstracción o generalización. Los objetos que conforman estos espacios ni son objetos reales, ni son idealización de objetos reales, son objetos *inventados* y, en principio, su estudio tiene solo interés por sí mismo.

Resulta imposible separar con claridad las tres categorías en las diferentes maneras de ver el espacio a lo largo de la historia, lo más que podemos hacer es apreciar si una determinada manera de concebir el espacio tiene más de una que de otra. En principio, el primer objetivo de las geometrías es dar un modelo más o menos ideal del mundo físico y el segundo, que sus resultados sean próximos a lo observable. La distancia entre el objeto físico y su modelo marca el grado de generalidad de la geometría, pero cuanto más general es la geometría y más quiere abarcar menos puede decir, ya que al aumentar el número de objetos a considerar disminuyen sus

propiedades comunes, así, tenemos el riesgo de construir *una teoría tan general que no tiene casos particulares* (G. Ancochea).

Desde un punto de vista lógico, es razonable pensar que los primeros modelos de la geometría corresponderían a descripciones del espacio físico, luego se debería pasar por una fase de idealización para concluir con un proceso de abstracción. El origen de la geometría como ciencia se situaría después de un proceso sistemático de idealización, y así se hace generalmente situándolo en *Los elementos* de Euclides.

Detallando un poco más la clasificación de Enriques, comenzaremos por el primero de los espacios, es decir, el espacio descrito por una serie de definiciones y axiomas, irreprochables desde un punto de vista lógico, pero que no corresponden exactamente a objetos reales, aunque permiten crear una ciencia, la geometría, cuya existencia real nadie puede discutir.

El que los objetos ideales de la geometría sean próximos a la realidad no es necesariamente una ventaja, por ejemplo para P. Abellanas la semejanza entre los objetos definidos y los reales solo puede enturbiar el razonamiento al mezclarlo con la intuición, así, refiriéndose a los procesos de fundamentación de la matemática del pasado siglo escribía:

La nueva fundamentación de la matemática se apoya en un principio bien simple que se puede enunciar así: para poder demostrar con rigor las proposiciones es necesario vaciar de contenido los conceptos primitivos, limitándonos a establecer el mecanismo lógico permitido y las relaciones fundamentales entre dichos conceptos. (P. Abellanas [2]).

Esta era también la idea de D. Hilbert que, aunque en sus *Grundlagen* [35], se refería a los axiomas como *hechos fundamentales de nuestra intuición*, posteriormente, en respuesta a una carta de G. Frege [25] en la que este decía que los axiomas proceden de una fuente que no es lógica y a la que llamaba *intuición del espacio*, Hilbert afirmaba:

Desde que empecé a pensar, a escribir y a dar cursos sobre estas materias, digo siempre lo contrario: si axiomas arbitrariamente propuestos no se contradicen ni lo hacen tampoco sus consecuencias, son ciertos, y las cosas definidas por ellos existen. Estos son para mí los criterios de verdad y existencia.

Por su parte, en [51] H. Poincaré escribía:

Los axiomas no son ni juicios sintéticos a priori, ni hechos experimentales, son convenios. Nuestra elección entre todos los convenios posibles se hace en base a hechos experimentales; pero es libre y está limitada solamente por la necesidad de evitar contradicciones. De este modo, los postulados pueden resultar rigurosamente ciertos aunque las leyes experimentales que hayan sugerido su adopción sean solo aproximadas. En otros términos, los axiomas de la geometría son solo definiciones enmascaradas. La cuestión de la veracidad de la geometría no tiene sentido.

También se sitúa en esta línea un libro delicioso [28], publicado en 1923. Su autor, un geómetra olvidado, el Vizconde de Güell, se expresaba de modo más apasionado:

El espacio del geómetra no existe, no tiene realidad física, ni necesita para nada someterse a las condiciones que dimanen de los objetos reales en movimiento o en reposo. Es un espacio íntegramente ideal, espacio pensado, espacio inventado, espacio construido por el entendimiento abstracto y a cuyas propiedades no atañen nada las exigencias que puedan derivarse de la realidad. Nadie puede negarle al intelecto humano el perfecto derecho a construir esa noción, a precisarla y a determinarla idealmente según las leyes rigurosas del pensamiento lógico.

El paradigma de la geometría, como estudio de los espacios ideales, es Euclides, con sus *Elementos de geometría* [32]. Para P. Abellanas la geometría, como toda entidad dotada de vida propia, tiene un código genético y una historia, y su porvenir es consecuencia de ambos. Los genes de la geometría son *Elementos* y su historia es una espiral que retorna periódicamente a ellos.

El primer libro de los *Elementos* comienza con veintitrés definiciones, cinco postulados y cinco axiomas. Las definiciones son a veces simples descripciones, no demasiado precisas desde nuestro punto de vista actual. Hay que hacer notar que estas descripciones no tienen otra finalidad que la de permitirnos visualizar el objeto descrito, las propiedades de partida de estos objetos están fijadas por los postulados.

Veamos, por ejemplo, algunas definiciones:

- Un *punto* es un objeto indivisible.
- Una *línea* es una longitud sin anchura.
- Una *superficie* es un objeto que solo tiene longitud y anchura.

Para Euclides los límites de las líneas son puntos y los de las superficies líneas. De entre las líneas destaca las líneas rectas y las circunferencias, definiéndolas de un modo a primera vista impreciso y alejado de nuestra forma actual de expresarnos, pero difícilmente mejorable:

La recta es la línea que se extiende igualmente respecto a todos sus puntos (es decir, la línea que es dividida por cualquiera de sus puntos en dos partes iguales). El círculo es una figura plana encerrada por una línea tal que todas las rectas que pasan por un determinado punto (el centro), que se encuentra dentro de la figura, la cortan en partes iguales entre sí. (Véase figura 1).

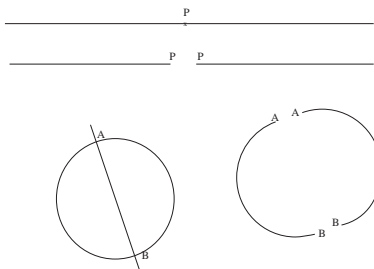


FIGURA 1. Cualquiera de sus puntos divide a la recta en dos partes iguales y cualquier diámetro lo hace con la circunferencia.

No vamos a entrar en todas las definiciones de los *Elementos*, que no son sino las de los objetos comunes de la geometría métrica. Señalemos únicamente que Euclides no define ni utiliza los grados como medida de ángulos, y define el ángulo recto como el ángulo formado por una recta y otra a la que corta de modo que los ángulos que se forman a ambos lados son iguales. Resulta interesante enunciar los axiomas (hechos comunes) y postulados tomados de la versión de los *Elementos* hecha por Heath [32].

Axiomas:

- (1) *Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.*
- (2) *Si se añaden iguales a iguales, los todos son iguales.*
- (3) *Si se sustraen iguales a iguales, los restos son iguales.*
- (4) *Las cosas que coinciden una con la otra son iguales entre sí.*
- (5) *El todo es mayor que la parte.*

Postulados:

- (1) *Se puede trazar una única recta de cualquier punto a cualquier punto.*
- (2) *Se puede prolongar un segmento de recta continuamente en línea recta.*
- (3) *Se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y radio.*
- (4) *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*
- (5) *Si una recta corta a otras dos, contenidas en un mismo plano, de modo que la suma de los ángulos interiores situados a un mismo lado es menor que dos rectos, las dos rectas, prolongadas suficientemente, se cortan en ese lado.*

Como puede apreciarse, los axiomas no corresponden a propiedades de los objetos definidos, son reglas de razonamiento a utilizar en las deducciones y corresponden a un dominio más amplio que la geometría, el de la lógica.

Los postulados afirman la posibilidad de efectuar determinadas construcciones primitivas, son de naturaleza puramente geométrica, y añaden algo a los conceptos que figuran en su enunciado. De entre los postulados del primer libro de los *Elementos*, el que ha tenido más repercusión es el *quinto postulado*, que se ha hecho célebre con un enunciado ligeramente diferente al inicialmente propuesto por Euclides, aunque equivalente a él. Si se definen las líneas paralelas como aquellas que prolongadas indefinidamente no se cortan (definición 23 de Euclides), el quinto postulado es equivalente a la afirmación: *por un punto exterior a una recta solo se puede trazar una paralela a ella*. También es equivalente a la afirmación de que *la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es la de dos rectos*.

Muchos geómetras anteriores a Euclides admitían el quinto postulado, pero otros, tanto anteriores como posteriores, pensaron que debería ser un teorema, es decir, que podía ser demostrado como consecuencia de los restantes axiomas y postulados. Fueron necesarios dos mil años para llegar a la conclusión de que el quinto postulado es realmente independiente de los restantes axiomas y postulados de la geometría euclídea.

Los libros de Hartshorne [29] o Gray [27] contienen buenos estudios sobre el origen y desarrollo de las geometrías no euclídeas, es decir, de aquellas en las que no se verifica el quinto postulado, y algunos de los artículos fundacionales de esta rama de la geometría están recogidos en el libro de Stilwell [66]. Como veremos

más tarde, estas geometrías abren una de las vías para la aparición de espacios abstractos.

La axiomática de Euclides no es única. En vez de intentar que nuestras definiciones describan objetos reales de modo más o menos aproximado, podemos renunciar a ello y aplicar un proceso de abstracción en lugar de la idealización; en este proceso los objetos básicos no se presentan como modelos de objetos físicos, sino como conjuntos que verifican unas ciertas propiedades. Así, podemos describir algunos espacios de un modo muy simple, prescindiendo de todas las ideas intuitivas asociadas a los nombres de los objetos definidos:

- El *espacio* es un conjunto, a cuyos elementos llamamos *puntos*.
- Una *recta* es un subconjunto del espacio.
- Dos rectas son *paralelas* si su intersección es vacía.
- Diremos que un subconjunto del espacio está compuesto por puntos alineados, si está contenido en una recta.

Los postulados siguientes (cuyo origen es indudablemente fruto de un proceso de observación de rectas y planos como objetos físicos, pero que son lo bastante poco exigentes como para que los cumplan objetos muy generales) permiten construir una geometría que incluye modelos de espacio muy poco intuitivos, pero interesantes:

1. Dos puntos distintos pertenecen a una recta y solo a una.
2. Existen tres puntos no alineados.
3. Un punto no perteneciente a una recta está contenido en una única recta paralela a ella.

El ejemplo más simple de un espacio que verifica estos postulados, es un conjunto de cuatro puntos

$$E_2 = \{A, B, C, D\},$$

con las rectas

$$\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}.$$

Así, podemos ver a qué extremos conduce la substitución de un objeto por su modelo ideal; las condiciones que se exigen al modelo (axiomas) no son necesariamente las que describen el objeto modelizado y sólo a este: se exigen solamente las condiciones mínimas que permiten manejar el modelo. De este modo, la teoría elaborada es aplicable no solo a los objetos de partida, sino a otros que verifiquen las condiciones iniciales y, como señalábamos al principio, cuanto menores sean las exigencias mayor será el número de objetos que las cumplan y más lejos estarán de lo que nuestra intuición reconoce como geometría. Este proceso de generalización algunas veces es estéril, pero otras lleva al desarrollo de sistemas formales cuyas aplicaciones se descubren con posterioridad a su elaboración, de modo que, como dice P. Griffiths:

Uno de los misterios profundos de la vida es la forma en la cual la mejor matemática pura, interesante por sí misma, inexplicablemente e impredeciblemente resulta ser útil.

Y en el caso de la geometría, esta utilidad no es privativa de la geometría construida con un sistema de axiomas proveniente de nuestra *intuición del espacio*, también ramas tan alejadas de la intuición como las geometrías finitas han resultado tener interesantes aplicaciones a problemas prácticos como es el de codificación.

Hemos elegido la geometría de Euclides como ejemplo de geometría del espacio ideal. Para presentar la geometría como ciencia del mundo físico el mejor ejemplo es probablemente la geometría de Hemholtz (1821-1894). Físico, fisiólogo y especialista en óptica, Hemholtz se sitúa en una línea de identificación de la geometría con la descripción del mundo físico que comienza en Galileo y Newton. Helmholtz considera la geometría como el lenguaje exacto de la naturaleza, como:

Una teoría que, gracias al carácter abstracto y lógico de sus conceptos y métodos, proporciona la garantía de una aplicabilidad efectiva de las matemáticas al estudio del mundo real. (Texto recogido en [11]).

El trabajo de Hemholtz es coetáneo e independiente del de B. Riemann, que afronta el problema de describir el espacio físico desde una óptica puramente matemática, es decir, desde el punto de vista que antes hemos llamado ideal, pero tratando de describir la realidad por una parte de un modo más preciso que Euclides y por otra de modo que abarque también la posibilidad de un universo no euclídeo. Son muy significativos los títulos de las publicaciones que ambos dedican al problema del espacio, la de Hemholtz se titula: *Sobre los hechos que están en los fundamentos de la geometría* [33], mientras que el título de la de Riemann [52] es: *Sobre las hipótesis que están en los fundamentos de la geometría*.

Según Hemholtz, resulta claro que percibimos cosas; además, el origen de nuestras sensaciones es independiente de nuestra actividad mental y exterior a nosotros. Nuestras percepciones pueden originarse en algo que simplemente está, la materia, o en algo que actúa sobre nosotros o produce cambios, las fuerzas. El espacio no es más que una relación entre los distintos objetos y el movimiento es el cambio de esta relación. El espacio comprende todos los cambios que pueden producirse en la materia, es decir, los movimientos. Así, Hemholtz introduce en la geometría las transformaciones, y también introduce las funciones, ligadas a los grados de libertad (dimensión). Para Hemholtz:

- El espacio se extiende hasta el infinito y es infinitamente divisible.
- Se admiten infinitas determinaciones del espacio diferenciadas por la dimensión; en un espacio de dimensión n se puede fijar la presencia de un punto material mediante n cantidades independientes (coordenadas) que varían de forma continua (diferenciable) al moverse el punto.
- En el espacio hay subespacios de todas las dimensiones, cada subespacio de dimensión t está dado por $n - t$ ecuaciones, la línea es el subespacio de dimensión uno.
- La longitud de la línea más corta entre dos puntos se llama distancia; si la distancia entre dos puntos A y B es a y la distancia entre B y C es b , la distancia entre A y C no puede ser menor que $a - b$ ni mayor que $a + b$.
- Existen en el espacio sistemas de puntos y sólidos rígidos que se pueden desplazar libremente por él.
- Si un cuerpo material se desplaza, todas sus partes mantienen inalterada su posición relativa. Si dos segmentos tienen la misma longitud, se puede desplazar uno de ellos hasta hacerlo coincidir con el otro.
- Si un cuerpo se desplaza, las coordenadas de sus puntos varían continuamente.

El planteamiento de Hemholtz presenta algunas lagunas lógicas, y fue discutido por muchos de sus coetáneos, pero desde el punto de vista de hoy presenta claras

novedades respecto a su época; la primera es la introducción de los movimientos como elemento fundamental de la geometría, la segunda la admisión de la existencia física de los espacios de dimensión arbitraria y la tercera, aunque no es el primero que propone la idea, es la consideración de la métrica como un objeto local, ya que la distancia se presenta como solución de un problema variacional (un problema de mínima longitud de las curvas que unen dos puntos).

Esa es precisamente la idea de Riemann, para medir longitudes de curvas basta con medir vectores en cada espacio tangente y que los coeficientes de la métrica varíen diferenciablemente con el punto. A la métrica de cada espacio tangente se le exige que verifique el teorema de Pitágoras, es decir, que sea definida positiva. Un proceso de integración permite medir curvas y la distancia, como hemos dicho, es el mínimo de las longitudes de las curvas que unen dos puntos. Así, las rectas son las líneas de mínima distancia, las geodésicas, y no hay problema para definir las. En esencia, el método de trabajo con los espacios abstractos es el mismo que usaba Gauss con las superficies, pero para dar el salto entre la geometría de las superficies y la geometría de los espacios abstractos, es decir, encontrar la relación entre métrica y forma, todavía fue necesario algún tiempo más.

La relación de la geometría del mundo físico con la geometría ideal, o más precisamente, la determinación de cuáles de los resultados de la geometría corresponden a hechos comprobables experimentalmente y cuáles son simplemente definiciones, es el primer problema a resolver ya que:

Las figuras de la geometría son objetos ideales, a los que las figuras materiales del mundo real solo pueden aproximarse, sin verificar nunca plenamente las propiedades que las caracterizan. Además, para comprobar experimentalmente la invariabilidad de la forma de un cuerpo y la presencia en el mismo de rectas y planos, nos hace falta utilizar proposiciones relativas a ellas, de modo que se hace necesario encontrar una suerte de demostración experimental de estas proposiciones.(H. Hemholtz).

El mérito de este planteamiento es que, junto con las geometrías no euclídeas de Lobachevski y Bolyai, abre la puerta a las dos formas actuales de concebir el tercer objeto de la geometría, los espacios abstractos.

La primera se inicia en Riemann (1826-1866), como hemos dicho de modo simultáneo e independiente del trabajo de Hemholtz. Riemann se fija únicamente en las funciones que definen las coordenadas. Para Riemann el espacio era lo que hoy en día se conoce por una variedad diferenciable riemanniana de curvatura nula [52]. En particular, el espacio es el conjunto de puntos más un conjunto de funciones.

La segunda se fija en los movimientos y alcanza su culminación en el *Programa de Erlangen* de Klein [40]; para este, una geometría es un conjunto junto con un grupo que actúa sobre él de modo transitivo, las propiedades geométricas son aquellas que son invariantes por la acción del grupo. La geometría de Hemholtz encaja en este modelo. S. Lie caracterizó los grupos que corresponden en el contexto de Klein a los espacios físicos de Hemholtz, y para ello desarrolló la teoría de los llamados hoy en día *grupos de Lie* [26].

2. Los espacios abstractos

El modelo de la geometría de Klein es el modelo abstracto más próximo a la Física, Yaglom [72] recoge un texto de Galileo que pone de manifiesto esta

proximidad. En ese texto, demasiado largo para ser incluido aquí, Galileo nos sitúa en un barco con moscas, mariposas, un pez en una pecera, una botella que gotea en un plato, etc., y nos hace observar el movimiento de los animales, la caída de la gota, etc., con el barco quieto y luego con el barco desplazándose con un movimiento uniforme. No hay diferencia en la apreciación de los movimientos en ambos casos; es decir: los fenómenos observados son independientes de cambios de una referencia a otra que se desplaza respecto a ella con movimiento uniforme y rectilíneo (transformaciones de Galileo). Así, la mecánica clásica es una geometría para el grupo de transformaciones de Galileo.

También están en la Física algunas de las razones por las cuales, a pesar de su admitida independencia del *mundo real*, la geometría se interesa en espacios de dimensión mayor que tres e incluso de dimensión infinita.

Si lanzamos una barra al aire y tratamos de describir su movimiento, bastará describir el movimiento de sus extremos, llamémosles A y B . Uno, por ejemplo A , se mueve libremente, es decir, sus posiciones quedan parametrizadas por los puntos de \mathbb{R}^3 y para cada una de sus posiciones, B está situado en una esfera de centro A y radio la longitud de la barra. Por tanto, las posiciones de la barra están en correspondencia con los puntos de un espacio de dimensión 5. El movimiento de la barra es una curva continua en ese espacio y las magnitudes físicas asociadas al movimiento se pueden definir en términos geométricos sobre él. Si en vez de con una barra tratamos con un sistema de n partículas, el espacio que parametriza sus posiciones (espacio de estados) sería \mathbb{R}^{3n} , lo que podemos observar (observables) son las funciones sobre ese espacio, funciones que forman un álgebra conmutativa, de esta forma el par (espacio de estados, observables), es decir, (espacio, anillo de funciones) describe también el sistema mecánico.

En la mecánica cuántica, los puntos materiales se substituyen por distribuciones de probabilidad, y el espacio de estados es el espacio de rayos de un espacio de Hilbert, los observables son operadores acotados en el espacio, y la estructura del conjunto de operadores acotados en un espacio de Hilbert es la de álgebra no conmutativa (álgebra de Von Neumann), ahora la estructura geométrica es más complicada y está ligada a un tipo de estructuras completamente distintas de las correspondientes a la mecánica clásica.

Si queremos estudiar nuestro sistema físico no solo globalmente, sino también localmente, entramos en otra forma de espacio abstracto. Tenemos que considerar ahora todos los abiertos del espacio de estados y los anillos de observables en ellos, de esta forma se obtiene otro concepto de geometría que vuelve al de Riemann. Ahora una geometría es *un espacio topológico junto con un haz de funciones*. Abstrayendo su origen y limitándonos a las geometrías diferencial o analítica real, exigiremos condiciones más precisas. Una geometría es un par (X, \mathcal{F}) , donde:

- X es una variedad topológica de dimensión n , o lo que es lo mismo, un espacio topológico separado localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n . Es decir, existe un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X donde cada U_i es homeomorfo a un abierto V_i de \mathbb{R}^n . Estos homeomorfismos se llaman cartas locales.
- \mathcal{F} es un haz de funciones en X , que llamamos el haz de funciones diferenciables sobre X . Se trata de una familia $\{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \Delta}$ (donde Δ es el conjunto de abiertos de X) verificando las propiedades siguientes:
 1. Cada $\mathcal{F}(U)$ es un subanillo del anillo de funciones continuas sobre U con valores reales.

2. La familia es cerrada por restricciones, es decir, si $U, V \in \Delta$ y $U \subset V$, entonces $\mathcal{F}(U)$ contiene a la restricción a U de toda función de $\mathcal{F}(V)$.
3. La familia es cerrada por *recolección*, es decir, si $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de U y todas las restricciones de una función continua $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ a los abiertos U_i están en los $\mathcal{F}(U_i)$, entonces $f \in \mathcal{F}(U)$.
4. Las cartas locales inducen, por composición, isomorfismos locales del haz de funciones diferenciables sobre \mathbb{R}^n con \mathcal{F} .

En los espacios así descritos aparecen dos elementos claramente diferenciados, el espacio base de la geometría y el haz de funciones. El primero no es un espacio topológico arbitrario, ya que entre las condiciones impuestas está que el espacio construido es localmente isomorfo a un *modelo* y que esos isomorfismos locales *pegan* los modelos de una forma determinada. Esto impone ciertas restricciones a la estructura global del espacio; en la geometría diferencial real el modelo local es el que ya hemos indicado, en la geometría analítica compleja es \mathbb{C}^n con las funciones analíticas, y en la algebraica, el espectro de un álgebra generada finitamente sobre un cuerpo (esquema afín). También se pueden elegir espacios convenientes para admitir la presencia de singularidades, o se pueden añadir más condiciones, una métrica, una estructura compleja, etc. Cada uno de los dos elementos que intervienen en la geometría tiene un papel propio, aunque ambos no son completamente independientes e incluso las condiciones impuestas pueden dar lugar a geometrías rígidas, esto es, determinadas unívocamente por la topología.

Para entender el papel del espacio base, podemos recurrir a un cuento escrito por Weeks [71] utilizando ambientes y personajes de Abbot [1]. Sus protagonistas son animales fabulosos, las *planarias*. Ellas y su mundo, Planilandia (Flatland), son descritas así por Abbot:

Imaginaos una amplia hoja de papel en que líneas, rectas, triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos y otras figuras, en vez de permanecer fijas en sus lugares, se movieran libremente por todas partes, sobre la superficie o, más precisamente, dentro de la superficie, sin la capacidad ni de poder alzarse por encima, ni de poder hundirse por debajo de ella, muy parecidos a sombras, solo que consistentes y con los bordes luminosos, y poseeréis una noción bastante correcta de mi país y de mis paisanos.

Weeks introduce la revolución en Planilandia. Uno de sus habitantes, llamado C.C. (Cristóbal Colón, claro está), intenta convencer a sus paisanos de que habitan sobre una esfera. La noción de esfera es tan abstrusa para una planaria, como la de 3-esfera (que describiremos más adelante) para nosotros, de modo que la tarea de C.C. es realmente compleja. Afortunadamente, tiene una idea genial; para demostrar a sus paisanos la veracidad de su teoría saldrá de su pueblo caminando hacia el norte en línea recta y aparecerá por el sur tras dar la vuelta a su universo. Felizmente su mundo es pequeño y completa la expedición en poco tiempo, pero a su regreso continua chocando con la incredulidad de sus paisanos que le hacen ver amablemente que además de estar loco, tiene una pierna más corta que otra y, creyendo andar en línea recta, se ha movido en un círculo por la llanura. C.C. no se desanima y recurre a un nuevo experimento. Repetirá el viaje marcando el camino con una línea roja, y luego hará un nuevo viaje saliendo por el este para regresar por el oeste. Así, midiendo los pasos caminados en este segundo viaje, si lo que sus paisanos dicen es cierto, la distancia desde el pueblo al punto en que

encuentre la línea roja será distinta de la distancia recorrida desde este punto hasta llegar de nuevo al pueblo. Si por el contrario, son iguales, él es quien tiene razón. Completa la primera expedición e inicia la segunda y tras mucho caminar y antes de encontrar la línea roja, ve ante sí otro pueblo. Corre sorprendido a saludar a sus desconocidos habitantes y al acercarse se da cuenta de que está de nuevo en su punto de salida. Esta vez C.C. decide ingresar voluntariamente en el manicomio, por suerte, ya en la puerta, tuvo la suficiente intuición del espacio para comprender que habitaba sobre una rosquilla.

La historia de C.C. habría sido aún más difícil si Planilandia hubiera sido una banda de Moebius, en este caso, se habrían intercambiado su izquierda y su derecha tras su primera vuelta al mundo. Esta perspectiva hace terrorífico un viaje de circunnavegación en un universo tridimensional, ya que en uno de los tipos posibles de geometría de un tal universo, se pueden intercambiar el dentro y el fuera del viajero.

Esta fábula nos hace apreciar el papel de la topología del espacio base en la naturaleza global del espacio. El papel del haz de funciones es diferente, permite describir coordenadas locales, medir cuándo es posible hacerlo y, sobre todo, permite definir las transformaciones propias de la geometría y en consecuencia, determina las propiedades geométricas.

El espacio topológico base no determina el haz de funciones. El ejemplo más simple lo proporcionan las curvas elípticas, estructuras analíticas complejas no isomorfas montadas sobre el mismo espacio topológico base, el toro bidimensional. Un ejemplo más sofisticado y puramente real es el que suministró Milnor construyendo dos estructuras diferenciables no isomorfas sobre la esfera de dimensión 7.

Así, se puede apreciar que se abren dos problemas generales completamente distintos: el de clasificar módulo homeomorfismos las variedades topológicas y el de clasificar diferenciable o analíticamente todas las variedades diferenciables o analíticas con espacio base prefijado. Estos problemas de clasificación son de enorme importancia, no cabe entender el interés de los matemáticos por ellos como una aspiración de semejarse a zoólogos. En su momento, conocer la forma y el tamaño de la tierra fue un problema central para la humanidad, hoy lo es conocer todas las formas posibles del universo y saber de entre ellas cuál es la real.

Volviendo a las superficies, hemos visto en nuestra fábula que podemos distinguir un toro de una esfera y ello de forma puramente topológica. Cabe preguntarse ahora por la cantidad de superficies esencialmente distintas que podemos encontrar; cuando decimos esencialmente distintas, queremos decir no isomorfas topológicamente (no homeomorfas).

Normalmente se suelen describir de forma intuitiva los espacios homeomorfos como aquellos que se pueden transformar uno en otro por una deformación sin cortar ni agujerear. El inconveniente de esta descripción es que de forma insensible imaginamos nuestros espacios como subespacios de \mathbb{R}^3 y así perdemos precisión; por ejemplo, un aro de cuerda es homeomorfo al resultado de cortarlo anudarlo y volverlo a pegar y sin embargo, no es posible en general deshacer el nudo deformándolo en \mathbb{R}^3 sin cortar la cuerda de nuevo. Por tanto, hay que distinguir los problemas de clasificar espacios mediante las relaciones:

- Dos espacios X e Y son equivalentes si y solo si son homeomorfos.
- Dos espacios X e Y sumergidos en un espacio Z son equivalentes si y solo si existe un homeomorfismo de Z en Z que transforma X en Y .

Ambos son problemas muy distintos, que además admiten variantes, equivalencia homotópica, isotopía, etc., extremadamente sutiles. Si nos limitamos a la primera clasificación y para superficies compactas y conexas, es bien sabido que el grupo de Poincaré (grupo fundamental) suministra un sistema completo de invariantes. Más precisamente, *el abelianizado del grupo fundamental de una superficie conexa compacta X es:*

- \mathbb{Z}^{2g} , si X es orientable.
- $\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, si X es no orientable.

Dos superficies son homeomorfas si y solo si los abelianizados de sus grupos fundamentales son isomorfos. El número g se llama el género de la superficie; entonces, dos superficies orientables son homeomorfas si y solo si tienen el mismo género y lo mismo sucede con las no orientables. En particular, la única superficie compacta, conexa y simplemente conexa (es decir, con grupo fundamental trivial lo que significa que cualquier lazo se puede contraer hasta cerrarlo en un punto) es la esfera de dimensión 2 (2-esfera). De esta forma hemos encontrado un sistema completo de invariantes para la clasificación de las superficies por homeomorfía.

De forma optimista podríamos intentar buscar un resultado similar para dimensión tres, es decir, buscar un sistema completo de invariantes para variedades topológicas tridimensionales, pero el problema es enormemente más complicado. Para entender un poco más el grado de complejidad del problema, tratemos de imaginar cómo es la 3-esfera, es decir, la esfera en el espacio de dimensión cuatro. Naturalmente, cabe pensar en la 3-esfera como el conjunto de los puntos (x, y, z, t) del espacio real de dimensión 4 que verifican la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

Ahora bien, esta ecuación no da idea de la forma de esfera. Para acercarnos más, podemos recurrir a la proyección estereográfica, es decir, la proyección de la esfera desde uno de sus puntos (polo de la proyección) sobre el hiperplano tangente en el punto diametralmente opuesto. Como la aplicación es un homeomorfismo de la esfera menos el polo sobre el hiperplano, la n -esfera sería el resultado de añadir al espacio de dimensión n un punto en el que se colapsaría todo el infinito, pero así solo se ven bien las esferas de dimensiones 1 y 2, para las que esta descripción no es tampoco necesaria.

Un método topológicamente más adecuado es comenzar por la esfera de dimensión 0, es decir, los puntos $+1$ y -1 en la recta. Estos puntos limitan la bola de dimensión uno, que es el segmento de extremos $+1$ y -1 . Pegando dos bolas de dimensión uno por su borde, es decir, el $+1$ de la primera con el de la segunda y lo mismo con el -1 , se obtiene topológicamente, es decir, tras una pequeña deformación, una circunferencia, que limita el círculo o bola de dimensión dos; pegando dos círculos por su borde se obtiene una esfera, que encierra una bola de dimensión tres; pegando dos bolas por su borde, es decir, tomando dos esferas terrestres e identificando cada punto de la primera con el punto de la segunda con su misma longitud y latitud, se obtiene la esfera tridimensional.

Entonces, la traslación a la 3-esfera de la caracterización topológica de la 2-esfera, que sería el escalón más sencillo en la clasificación de variedades tridimensionales, es la llamada conjetura de Poincaré (ver [44]):

La 3-esfera es conexa, compacta y simplemente conexa. Poincaré conjeturó que estas propiedades son características de la 3-esfera,

es decir, que toda variedad tridimensional conexa, compacta y simplemente conexa es homeomorfa a la 3-esfera.

La conjetura de Poincaré tiene una generalización natural: *Toda variedad topológica con los mismos invariantes (homológicos y homotópicos) de una esfera de dimensión n es homeomorfa a ella.*

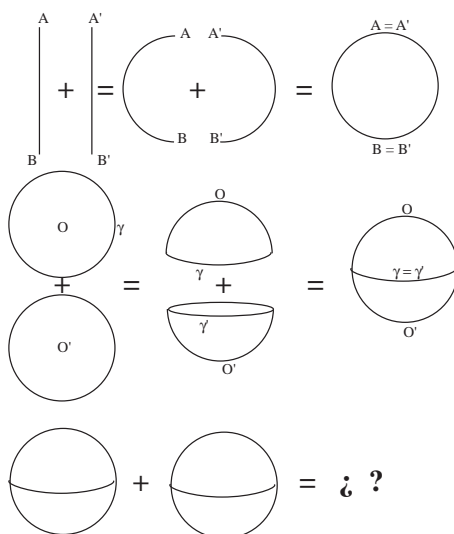


FIGURA 2. Pegando dos segmentos se construye una circunferencia, pegando por su borde dos círculos se obtiene una esfera, la 3-esfera resultante de pegar dos bolas por su borde no se ve tan fácilmente.

Hemos visto la respuesta afirmativa a esta conjetura para $n = 2$, que era ya bien conocida en el siglo XIX. Para n mayor o igual que 5 la conjetura fue probada en los años 60 por Smale. En 1982, M. H. Freedman probó la conjetura para $n = 4$ (ver [20]), más aún, proporcionó una clasificación completa de las variedades topológicas de dimensión 4 compactas y simplemente conexas por medio de dos invariantes. Sin embargo, en su formulación inicial, es decir, para la 3-esfera, la conjetura de Poincaré ha permanecido abierta largo tiempo y solo muy recientemente ha sido probada por Perelman.

En general la geometría en dimensión tres es muy complicada, por ejemplo, entender las variedades diferenciales de dimensión tres fue el trabajo de Thurston que le valió la medalla Fields en 1982 y fue la primera revolución en la geometría en baja dimensión. C.T.C. Wall en la descripción de la obra de Thurston hecha con motivo de su medalla Fields en el I.C.M. de 1983, observa que:

La topología en dimensión 3 tenía una fuerte tradición de técnicas de “manos desnudas” y relativamente poca interacción con otros temas, tras la obra de Thurston, los argumentos directos continúan jugando un papel esencial, pero la topología 3-dimensional ha retornado a la corriente principal de las matemáticas.

3. La forma del espacio

Una vez que tenemos un espacio abstracto cabe preguntarse hasta qué punto su geometría se puede reducir a una geometría ya estudiada, la forma más simple

de hacerlo es tratar de sumergir nuestro espacio en otro conocido, por ejemplo \mathbb{R}^n , de forma que la inmersión conserve la geometría. El problema de la inmersión está ligado entonces a la posibilidad de hablar de *forma de una variedad*.

En la geometría clásica, es decir, trabajando con subconjuntos de \mathbb{R}^3 , es razonable decir de una superficie que se curva o hablar de forma de una superficie. Esta idea intuitiva de forma se puede extender a \mathbb{R}^n , pero un espacio abstracto no está en un espacio ambiente, por tanto no parece tener sentido decir que un tal espacio se curva. Siempre podemos pensar en sumergirlo en otro para tener así un ambiente, eso es posible con algunas restricciones. Sin embargo, esto no es estrictamente necesario y para comprobarlo volvamos de nuevo a nuestra fabulosa Planilandia, y esta vez tomándonos, si cabe, más libertades matemáticas que en la visita anterior.

Imaginemos ahora una sola planaria llamada S situada en el centro de un círculo de cien pasos de diámetro. S avanza un paso hacia el borde, es decir, en cualquier dirección, y aunque ella no aprecia nada, nosotros observamos que su tamaño disminuye y lo hace en la cantidad precisa para que le sigan quedando 100 pasos hasta el borde, y así pasa cada vez, cuanto más se acerca al borde se hace más y más pequeña, y aunque para nosotros se aproxima a salir del círculo, a ella le queda siempre la misma cantidad de camino por recorrer para alcanzarlo. Su universo, acotado desde nuestro punto de vista, es para ella infinito.

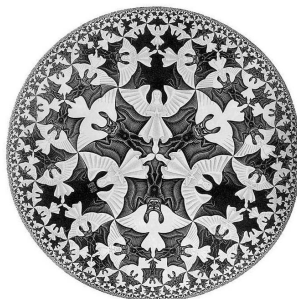


FIGURA 3. Todos los ángeles y todos los demonios son iguales para la geometría hiperbólica.

Esta diferencia entre la visión del universo desde dentro y desde fuera, de modo que para un observador exterior un cambio de posición lleva aparejado un cambio de forma o tamaño imperceptible para el que lo padece, repugna a nuestra intuición. Nuestra percepción del espacio es inicialmente táctil y por ello nos resulta difícil dudar de la inmutabilidad de los objetos sólidos. Pero desde el punto de vista matemático es fácil construir este tipo de universos, el más fácil es el plano hiperbólico. La figura 3 corresponde al modelo de Poincaré del plano hiperbólico, las rectas son los arcos de circunferencia ortogonales al borde del disco unidad, los giros con centro el centro del círculo no tienen un comportamiento extraño, pero las homotecias con el mismo centro producen la disminución de tamaño a la que aludíamos antes. Se puede definir una distancia en el interior del círculo con la cual tiene estructura de espacio métrico [29, 41, 66], las líneas de mínima distancia (rectas) para esa métrica son, como hemos dicho, los arcos intersecados por el círculo unidad en las circunferencias ortogonales a su borde, y la geometría del círculo tiene las propiedades de la euclídea, salvo las derivadas del célebre *quinto postulado* (por un punto

exterior a una recta se puede trazar una única paralela a ella), que obviamente no es válido en este espacio.

¿Pero, qué tiene que ver esta métrica con la forma? Imaginemos dos rectas paralelas en el plano situadas a igual distancia a uno y otro lado de una recta r y tracemos una curva asintótica a ambas rectas y simétrica respecto a r ; a continuación, giremos la figura en torno a r construyendo así un cilindro de revolución con una superficie en su interior asintótica al cilindro. Supongamos que la superficie es transparente e iluminémosla con un foco en el infinito para que se proyecte en una pantalla ortogonal al eje del cilindro. Coloquemos ahora S en el vértice de la superficie. En la pantalla veremos un círculo con S en su centro, si ahora S se mueve en la superficie, su sombra se desplazará por el círculo, pero nunca llegará al borde, porque ahora S deberá recorrer una distancia verdaderamente infinita para que esto sucediera. El hábitat de S tiene ahora nuestra métrica, pero tiene forma y el efecto es el mismo. Es decir, la forma no es sino una métrica distinta, y cabe hablar de curvatura de la métrica en lugar de curvatura del espacio.

De un modo formal, podemos definir una métrica de Riemann en una variedad diferenciable como una familia de métricas en los espacios tangentes que varían diferenciablemente con el punto. La longitud de un arco de curva diferenciable se calcula integrando la medida de su vector tangente y la distancia se obtiene como solución de un problema variacional de mínimo para las longitudes de arcos que unen dos puntos. En particular, la métrica estándar de \mathbb{R}^n induce una métrica de Riemann en sus subvariedades.

Schlafi conjeturó que dada una variedad diferenciable de dimensión 2 con una métrica de Riemann, la variedad se puede sumergir localmente en \mathbb{R}^3 , de modo que la inmersión sea una isometría, si se dota su imagen de la métrica inducida por la del espacio ambiente. La superficie imagen está curvada y la forma de medir en ella es la usual; así, se puede considerar que hablar de métrica es una manera de hablar de forma. La conjetura de Schlafi fue demostrada por Janet y Cartan [13], pero subsiste el problema de buscar condiciones para la existencia de una inmersión isométrica global, que salvo en casos muy particulares está abierto.

Una vez analizada la posibilidad de existencia de inmersiones, podemos volver a plantear el problema de la clasificación de variedades sumergidas en un espacio ambiente y hablaremos de él solo en un caso particular: la teoría de nudos.

Todos tenemos una idea intuitiva de los objetos geométricos llamados formalmente nudos [4], basta tomar una cuerda anudarla de la forma que se desee y pegar después sus extremos, así, tenemos una figura homeomorfa a una circunferencia pero que, a menos que hayamos hecho los nudos de una forma muy especial, no puede transformarse en una circunferencia sin cortarla, desanudarla y volverla a pegar. Dos nudos que pueden transformarse uno en otro sin cortar la cuerda se llaman equivalentes. Formalmente, se consideran los nudos sumergidos en la esfera y orientados; se llaman isótopos si existe un homeomorfismo lineal a trozos de la esfera en sí misma que conserva la orientación y transforma uno en otro. Una propiedad compartida por un nudo y los equivalentes a él se llama un invariante.

La primera propuesta de clasificación sistemática de nudos se debe a un físico, P. Tait. Tait se interesó por la clasificación de los nudos porque en 1867 Lord Kelvin conjeturó que los átomos eran tubos anudados de éter. Así, el intento de Tait de clasificar los nudos y las coligaciones (una coligación o link es una colección de nudos entrelazados) por los puntos de cruzamiento de sus proyecciones planas,

abría aparentemente la puerta a una fundamentación de la clasificación (Sistema Periódico) de los elementos químicos.

Cuando, una veintena de años después, el modelo de Kelvin desapareció, ya estaba lanzado a los matemáticos el desafío de la clasificación de nudos. El polinomio invariante de Alexander, descubierto en 1927, resultó ser una herramienta mejor que las empleadas por Tait. Los resultados de Brauner y Burau, encaminados a describir localmente y desde el punto de vista real las curvas analíticas irreducibles complejas, que veremos a continuación, dieron nuevo interés a la teoría de nudos, esta vez dentro exclusivamente de las matemáticas.

Una curva analítica plana es el conjunto de ceros de una función analítica compleja de dos variables. El plano complejo se puede identificar al espacio real de dimensión cuatro y, como la anulación de una función compleja equivale a la anulación de sus partes real e imaginaria, una curva analítica compleja se puede visualizar como una superficie real en \mathbb{R}^4 con una singularidad aislada en el origen. Esta superficie es transversal a una 3-esfera centrada en el origen y de radio suficientemente pequeño, de modo que la intersección de ambas es una curva esférica cerrada y no singular. La proyección estereográfica de esta curva es un nudo en \mathbb{R}^3 , nudo que no depende de la esfera (si el radio de esta es lo suficientemente pequeño).

La forma del nudo es muy curiosa. Un toro hueco se obtiene pegando una superficie cilíndrica por sus extremos, cuidando de no anudarla. Tiene por tanto dos agujeros, el central y el envuelto por la superficie cilíndrica. Si consideramos un toro y arrollamos sobre él una cuerda que antes de cerrarse da m_1 vueltas en torno al agujero central y n_1 en torno al otro, tenemos un nudo tórico de género 1. Si ahora inflamos la cuerda para convertirla en un toro anudado y repetimos el proceso, tenemos un nudo tórico de género dos y así sucesivamente. Brauner y Burau probaron que las curvas analíticas daban lugar a nudos tóricos de género finito y que los exponentes característicos del nudo $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$, que son un sistema completo de invariantes del mismo, se podían calcular directamente a partir de las series de potencias de exponentes fraccionarios que Puiseux había demostrado eran las soluciones de la ecuación (ecuaciones de las ramas). Este resultado sirvió a Zariski como base de la llamada teoría de la equisingularidad, una de las ramas más estudiadas de la geometría algebraica en los años 70.

A finales de los 80, Cameron, Gordon y Luecke probaron que los complementos de dos nudos son homeomorfos si y solo si los nudos son isótopos, resultado que no es válido para las coligaciones. De este modo, el estudio de los nudos es de enorme interés para la clasificación topológica de las variedades de dimensión tres, al menos de aquellas que son complementos de nudos. Salvo para un tipo muy particular de nudos, las variedades complementarias de los nudos admiten una estructura hiperbólica (son precisamente las variedades estudiadas por Thurston).

Al mismo tiempo V. Jones hizo otro descubrimiento sorprendente, esta vez relacionado con una estructura muy próxima a los nudos, las trenzas. Una trenza (braid) no es más que una colección de cuerdas que unen puntos situados en planos paralelos y se han entrelazado entre sí sin anudar unas con otras. Dos trenzas del mismo número de cuerdas se pueden componer sin más que unir los extremos de las cuerdas de la primera con los orígenes de las de la segunda, así, se puede dotar el conjunto de clases de trenzas con un número de cuerdas dado de una estructura algebraica de grupo. Artin en 1923 dio una descripción de estos grupos en términos de generadores y relaciones. Claramente, una trenza da lugar a una coligación si

se pegan los extremos de las cuerdas que la forman. Alexander probó en 1928 que todas las coligaciones se pueden obtener de esta forma.

V. Jones en 1984 descubrió una relación entre las álgebras de Von Neumann de las que hemos hablado en conexión con la mecánica cuántica y los grupos de trenzas: los conjuntos de generadores y relaciones de las álgebras de Von Neumann coinciden con los de los grupos de trenzas, así, los grupos de trenzas y las coligaciones tienen una vía natural de conexión con la mecánica cuántica.

Usando esta analogía, Jones descubrió en 1987 un nuevo polinomio invariante de los nudos y abrió un camino para la búsqueda de polinomios invariantes (en poco tiempo aparecieron media docena más de ellos, uno de los cuales, el HOMFLY, fue descubierto simultáneamente por seis matemáticos cuyas iniciales dan nombre al polinomio) y también abrió la puerta a los trabajos de E. Witten que extendió estos invariantes a tres-variedades generales (es decir, no necesariamente complementarias de nudos). Otro de los resultados esenciales de Witten ha sido la interpretación de los invariantes de Jones como integrales de Feynman de una teoría gauge tridimensional, esta interpretación permite extender la teoría de Jones de nudos en la esfera tridimensional a nudos en variedades arbitrarias de dimensión tres. Claramente, quedan justificadas las palabras de M. Atiyah referidas a Witten:

En este amplio y excitante campo en el que trabajan muchos de los físicos y matemáticos más importantes del mundo, Edward Witten se presenta como la figura más influyente e importante. Aunque es definitivamente un físico, y así lo demuestra claramente su lista de publicaciones, pocos matemáticos rivalizan con él en el dominio de las matemáticas, y su habilidad para interpretar ideas físicas en forma matemática es única. Una y otra vez ha sorprendido a la comunidad matemática por sus brillantes aplicaciones del punto de vista físico para obtener nuevos y profundos teoremas matemáticos.

Se vuelve así a la idea de Helmholtz, la geometría está ligada de modo indisoluble al mundo físico, y no solo para interpretarlo, hay un proceso de retroalimentación que lleva de nuevo los resultados observables a ideas geométricas a menudo enormemente abstractas.

Para terminar esta introducción, debemos decir algo sobre la geometría de nuestro universo (ver [38]). Durante mucho tiempo los cosmólogos pensaron que la teoría de la relatividad general suministra suficiente información para conocer la geometría del espacio-tiempo, pero las ecuaciones de Einstein que relacionan la curvatura con la materia son de naturaleza puramente local y para conocer la estructura global de nuestro espacio necesitamos no solo conocer la curvatura, sino también información sobre la topología del universo. En un artículo reciente, Cornish y Weeks [16] establecen de modo claro la situación actual de nuestro conocimiento del problema, aceptando como es habitual las hipótesis de homogeneidad e isotropía del universo.

Esta aceptación no es gratuita. En 1965 Penzias y Wilson descubrieron un resto de la *gran explosión* que dio origen a nuestro universo, una radiación de microondas a aproximadamente tres grados Kelvin a la que se denomina por sus siglas CMB. La isotropía de esta radiación permite suponer, a gran escala, que el universo admite secciones espaciales tridimensionales de curvatura constante, es decir, que el continuo espacio-temporal es $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$, donde \mathcal{M} es una tres-variedad de curvatura constante. La métrica en la sección \mathcal{M}_t correspondiente a un instante t es producto de un factor de escala por la métrica estándar de curvatura constante.

Debemos pues describir las variedades de dimensión tres de curvatura constante: 0 (modelo euclídeo), 1 (modelo elíptico) y -1 (modelo hiperbólico). Con estas hipótesis, en los casos elíptico e hiperbólico la topología determina completamente la geometría, es decir, al suponerse la curvatura constante, dos variedades elípticas o hiperbólicas homeomorfas son isométricas, lo que no sucede con las euclídeas.

Volvamos por última vez al mundo plano, pero ahora a uno más parecido al nuestro, un universo bidimensional con un mundo circular en cuya superficie, la circunferencia, vive una planaria. El mundo está iluminado por un sol y el universo es un toro.

Podemos representar un toro como cociente del plano euclídeo por el grupo de traslaciones generado por las traslaciones de vectores $(1,0)$ y $(0,1)$, es decir, en un sistema cartesiano de coordenadas cuadrículamos el plano mediante rectas paralelas a los ejes para obtener así cuadrículas de lado uno, luego recortamos las cuadrículas y las pegamos todas sobre una de ellas y, por último, pegamos unos a otros los lados del borde de esta, identificando cada punto de un lado con el que ocupa la misma posición en el lado opuesto. Como mapa del toro usamos esta única cuadrícula, bien entendido que si salimos de ella por un punto del borde volvemos por el punto del lado opuesto que se identifica con él. En la figura 4 se representa una recta en el plano sobre las cuadrículas a la izquierda y en una sola de ellas a la derecha, aparecen solo un número finito de segmentos porque la recta es de pendiente racional, si fuera de pendiente irracional no se cerraría nunca y daría lugar a un conjunto denso en el plano.

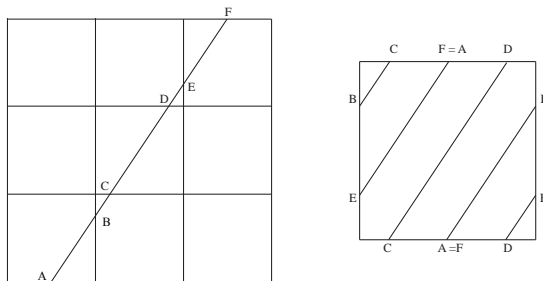


FIGURA 4. La recta corta los lados de las cuadrículas en puntos A, B, C, \dots que aparecen en el borde de la cuadrícula seleccionada cuando todas las demás se pegan sobre ella

En virtud de la construcción que acabamos de señalar, si el universo es lo suficientemente pequeño, la planaria vería su cielo tachonado de estrellas, todas ellas imágenes ilusorias de su sol, resultado de dar la luz vueltas alrededor del universo.

La diferencia de las distancias aparentes a las estrellas produciría variaciones en su brillo, que haría creer a la planaria que se trataba realmente de estrellas distintas como se aprecia en la figura 5. (Claro está que un espectrómetro la podría sacar de su error).

Nuestro universo podría ser similar con una dimensión más, por ejemplo en el caso de curvatura cero, podría ser un toro espacial resultado de identificar caras opuestas en un paralelepípedo. En un caso así, al igual que le pasaba a la planaria, cabría la posibilidad de que alguna de las galaxias que observamos fuera la nuestra,

pero eso es difícil de averiguar. Hay un experimento más fácil y que está ya en marcha basado en la CMB.

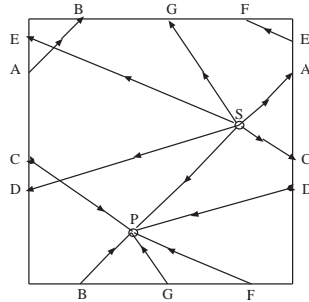


FIGURA 5. En un Universo bidimensional toroidal con una sola estrella, el observador vería estrellas en todas direcciones, más débiles en brillo cuando corresponden a dominios más distantes.

En cierto sentido la CMB contiene registros de la gran explosión, los fotones de la CMB se originan, según el modelo cosmológico que usamos, aproximadamente a los 300.000 años de la explosión, en un momento en que el universo completo está lleno de plasma que se condensa a gas. Así, esos fotones se originan en todos los puntos del universo y viajan isotrópicamente en todas direcciones; de este modo, los que llegan a nosotros en cada momento se han originado en una esfera que nos tiene por centro: la esfera de última emisión. Y lo mismo sucede para cualquier otro observador del universo.

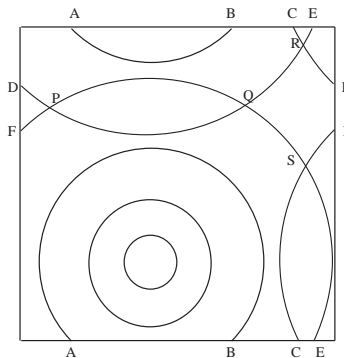


FIGURA 6. En un Universo bidimensional toroidal las circunferencias última emisión se cortan en puntos, si añadimos una dimensión más se cortarían en círculos. Actualmente se intenta detectar esos círculos, que de encontrarse determinarían la topología del universo

Desde nuestro punto de vista, el mapa de la CMB presenta ligeras variaciones de temperatura de microondas; el mapa de la CMB correspondiente a otro punto del Universo sería diferente, pero a lo largo de la circunferencia intersección de las esferas de última emisión, ambos mapas serían iguales. Ahora bien, si el universo es finito, nosotros lo vemos como si ocupásemos distintas posiciones a la vez, solo que los fotones que nos alcanzan corresponden a esferas de emisión de distintas épocas, eso motivaría la aparición de circunferencias en la CMB que serían identificables y nos darían una idea de la forma real de nuestro universo.

4. La geometría proyectiva

El objetivo de este texto es el estudio de los principios de una geometría no euclídea, ya que no verifica el quinto postulado, de naturaleza local (como veremos más adelante al hablar de la topología del espacio proyectivo real), pero que permite trabajar en el infinito y contiene a una geometría no local como es la euclídea. Esta geometría, paradójica, es la geometría proyectiva.

La geometría proyectiva se ocupa de resultados geométricos que se pueden enunciar y demostrar sin utilizar ángulos ni distancias.
(Poncelet [50]).

Es decir, partimos de unas figuras elementales: puntos, rectas, planos, etc., a las que llamamos subespacios y una relación entre ellas, la relación de incidencia, que es el nombre geométrico que designa indistintamente a las expresiones conjuntistas contenido y contiene. Asociadas a la relación de incidencia hay dos operaciones básicas entre subespacios, *sección de S_1 por S_2* , que es simplemente la intersección conjuntista, es decir $S_1 \cap S_2$ y *proyección de S_1 desde S_2* , que es el mínimo subespacio $S_1 + S_2$ incidente con ambos.

Dadas dos planos α y β y un punto P no contenido en ninguno de ellos, podemos definir una transformación llamada *perspectividad de centro P* :

$$\bar{\lambda}_P : \alpha \rightarrow \beta, \bar{\lambda}_P(A) = (P + A) \cap \beta, \text{ para todo } A \in \alpha.$$

La perspectividad es la composición de la proyección de α desde P con la sección por β . La composición de una cadena de perspectividades se llama una *proyectividad*. Del mismo modo que entre planos, se puede definir una perspectividad con centro un punto entre rectas coplanarias. Y estas definiciones se pueden extender a espacios de dimensión arbitraria.

Para Poncelet, las propiedades geométricas son aquellas que son invariantes por proyección y sección, es decir, por proyectividades. Es fácil comprobar que las proyectividades entre dos subespacios forman un grupo, de modo que la geometría de Poncelet encaja en el modelo de geometría de Klein. Pero las propiedades invariantes por proyectividades no coinciden exactamente con propiedades enunciadas independientemente de ángulos y distancias: la razón doble, por ejemplo.

Dados cuatro puntos A, B, C, D de la recta real, se llama *razón doble* de estos cuatro puntos a

$$[A, B : C, D] = \frac{|AD| \cdot |BC|}{|AC| \cdot |BD|},$$

donde para cada par de puntos X, Y de la recta, tenemos que $|XY|$ representa la distancia de X a Y . La razón doble, que se construye en términos métricos, es invariante por proyectividades como veremos a continuación.

Dado un triángulo cualquiera PQR de altura correspondiente al lado PR igual a h (figura 7), el área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}|PR| \cdot h = \frac{1}{2}|PQ| \cdot |PR| \cdot \sin \beta,$$

donde $\beta = \widehat{QPR}$ se toma como ángulo no orientado. Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} [A, B : C, D] &= \frac{|AD| \cdot |BC|}{|AC| \cdot |BD|} = \frac{|AD| \cdot h \cdot |BC| \cdot h}{|AC| \cdot h \cdot |BD| \cdot h} \\ &= \frac{|OA| \cdot |OD| \cdot \sin \widehat{AOD} \cdot |OB| \cdot |OC| \cdot \sin \widehat{BOC}}{|OA| \cdot |OC| \cdot \sin \widehat{AOC} \cdot |OB| \cdot |OD| \cdot \sin \widehat{AOD}} \\ &= \frac{\sin \widehat{AOD} \cdot \sin \widehat{BOC}}{\sin \widehat{AOC} \cdot \sin \widehat{BOD}}. \end{aligned}$$

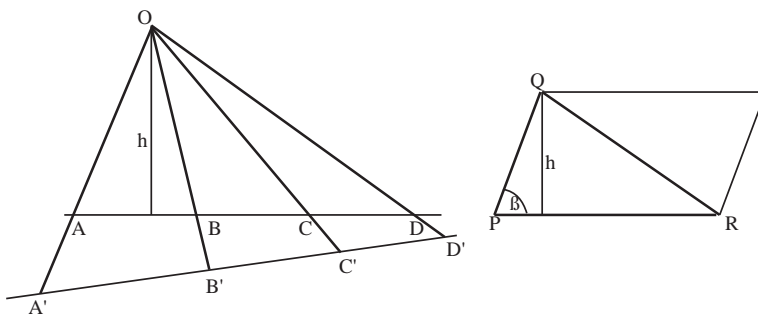


FIGURA 7. La razón doble se puede calcular en términos trigonométricos.

A la vista de la figura 7, la igualdad anterior prueba que la razón doble es invariante por proyección y sección ya que:

$$[A, B : C, D] = \frac{\sin \widehat{AOD} \cdot \sin \widehat{BOC}}{\sin \widehat{AOC} \cdot \sin \widehat{BOD}} = \frac{\sin \widehat{A'OD'} \cdot \sin \widehat{B'OC'}}{\sin \widehat{A'OC'} \cdot \sin \widehat{B'OD'}} = [A', B' : C', D'].$$

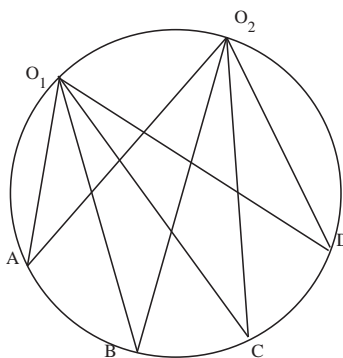


FIGURA 8. Tiene sentido hablar de razón doble de cuatro puntos de una circunferencia, definiéndola como la razón doble de sus proyecciones desde un quinto punto.

El resultado anterior prueba también que dados cuatro puntos distintos A, B, C y D en una circunferencia (figura 8), tomando un quinto punto O , la razón doble $[OA, OB : OC, OD]$ es independiente del punto O , ya que, al ser los ángulos \widehat{AOC} , \widehat{AOD} , etc. inscritos, su medida en radianes es la mitad del cociente por el radio de la circunferencia de los arcos \widehat{AC} , \widehat{AD} , etc., por tanto es independiente de O y

se puede hablar de razón doble de cuatro puntos de una circunferencia. Más aún, como una cónica no degenerada es siempre imagen de una circunferencia por una perspectiva, se puede hablar también de razón doble de cuatro puntos de una cónica como un concepto proyectivo.

La noción afín o euclídea de cónica está ligada a ecuaciones de segundo grado, sin embargo las cónicas son objetos proyectivos, ya que se pueden construir sin usar coordenadas.

- Un *haz plano de rectas* es el conjunto de rectas contenidas en un plano π y que pasan por un punto $P \in \pi$ llamado vértice del haz.
- Una *perspectividad* con eje en una recta r entre dos haces planos de rectas de vértices P y Q , ambos coplanarios con r y tales que sus vértices no están en r , es una correspondencia entre los haces que asocia a cada recta x del primero la recta del segundo que pasa por $x \cap r$. Es decir, es composición de la sección por r y la proyección desde Q .
- La composición de perspectivas se llama una *proyectividad*, ampliando el concepto introducido anteriormente.

Entonces una *cónica* es el lugar geométrico de los puntos de corte de rectas homólogas en una proyectividad entre dos haces planos de rectas (figura 9).

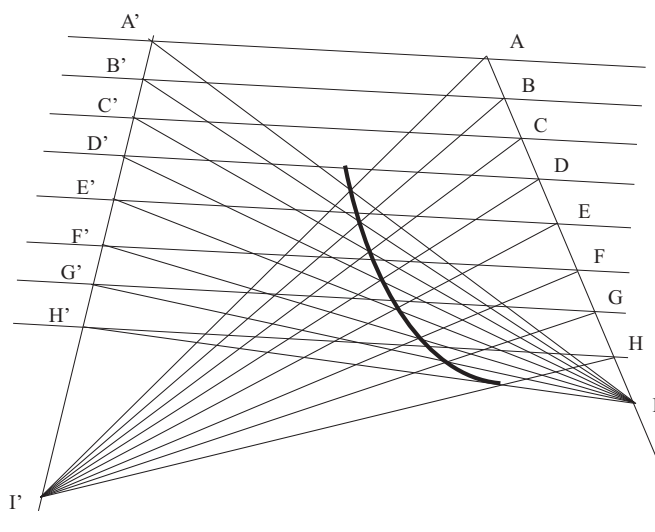


FIGURA 9. La proyección paralela define una proyectividad que lleva A, B, C, \dots a A', B', C', \dots . Tenemos así una proyectividad entre los haces de rectas, las rectas homólogas se cortan en una cónica.

Podemos precisar la geometría de Poncelet, que se sitúa sobre el espacio real y está atada, sin reconocerlo, a la estructura del cuerpo de los reales, substituyendo el concepto, algo impreciso, de propiedades invariantes por proyección y sección, por el de propiedades derivadas por razonamiento lógico de una serie de axiomas, con enunciados independientes de la métrica e invariantes por proyección y sección. Así se obtienen geometrías en principio más generales que la de Poncelet, dependiendo de los axiomas que se introduzcan, para concluir con una axiomática que describa exactamente la geometría del espacio proyectivo real propuesta por él.

Como consecuencia de un conjunto suficiente de axiomas, se puede asociar a cada espacio proyectivo un cuerpo, atribuir coordenadas a sus puntos y definir ecuaciones para las figuras geométricas. De este modo, no solo se establece un método algebraico de resolver mediante ecuaciones los problemas geométricos, sino que se puede construir toda la geometría a partir del álgebra lineal.

Surgen así dos formas distintas y tradicionalmente antagónicas de entender la geometría proyectiva:

- Utilizar únicamente los objetos geométricos elementales y la relación de incidencia para probar los resultados, lo cual constituye lo que se entiende por *geometría sintética*.
- Utilizar coordenadas, ecuaciones y la maquinaria del álgebra para resolver los problemas geométricos, tenemos así la *geometría analítica*.

La geometría proyectiva, como la entendemos hoy, es el resultado de un largo proceso de evolución que comienza con la geometría métrica griega y culmina en la obra de los geómetras franceses y alemanes de la segunda mitad del siglo XIX y el primer tercio del XX. La trayectoria histórica de la geometría transcurre entre las dos líneas que acabamos de señalar, la geometría analítica y la geometría sintética, de ellas hablaremos más adelante, pero antes y para mostrar con más precisión la diferencia entre estas dos líneas de pensamiento, vamos a exponer dos ejemplos paradigmáticos, los llamados *teorema de Desargues* y *teorema de Pappus*.

5. Los teoremas de Desargues y Pappus

Hay una clase de objetos geométricos proyectivos que se definen sin usar la métrica y son especialmente interesantes, las llamadas configuraciones.

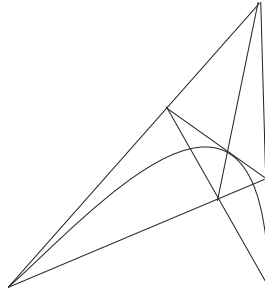


FIGURA 10. La configuración de Fano corresponde al plano proyectivo sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Una *configuración plana de tipo* (p_α, r_β) ¹ es un sistema de p puntos y r rectas del plano, tales que cada punto incide con un número fijo α de rectas y cada recta con un número fijo β de puntos. Por ejemplo, un triángulo es una configuración $(3_2, 3_2)$. Es claro que dados cuatro números al azar p, α, r, β , no existe una configuración (p_α, r_β) , y que puede plantearse la existencia de configuraciones que no se puedan dibujar, es decir, no existan en la geometría real, pero sean viables en una geometría con una cierta axiomática, de modo que admitir la existencia de ciertas configuraciones determina la geometría e induce propiedades del cuerpo base, por

¹El estudio de las configuraciones tiene numerosas aplicaciones en geometría y durante el primer cuarto del siglo XX fue una de las ramas importantes de la geometría proyectiva. El libro de Hilbert y Cohn - Vossen *Geometry and Imagination* [36] contiene un capítulo dedicado a este tema.

ejemplo la existencia de la *configuración de Fano* $(7_3, 7_3)$ (figura 10), equivale a que el cuerpo base tenga característica 2. La configuración de Fano corresponde a un plano con 7 puntos y 7 rectas, cada recta contiene tres puntos y por cada punto pasan tres rectas, es claro que no se puede dibujar en el plano real con las rectas habituales.

La existencia de otras dos configuraciones interesantes corresponde a los teoremas de Desargues y Pappus, que establecen respectivamente la existencia de las configuraciones planas $(10_3, 10_3)$ y $(9_3, 9_3)$ en el plano real, aunque su significado geométrico es más profundo. El teorema de Desargues es un resultado muy clásico, probablemente conocido por Euclides al menos en alguna de sus formas reducidas, y que no fue publicado por Desargues sino por uno de sus discípulos A. Bosse [12], que lo atribuyó a su maestro. El teorema en sí es muy importante y extremadamente útil para la geometría, pero es la demostración de Desargues [19], por medio de proyección y sección, la que hace que sea de interés excepcional desde el punto de vista metodológico, ya que marca claramente la distinción entre propiedades métricas y propiedades proyectivas en el espacio.

Dos triángulos, ABC , DEF del plano o el espacio reales, se dice que están en *posición homológica* si las rectas $A + D$, $B + E$ y $C + F$ son distintas dos a dos y concurrentes en un punto O . Los pares de vértices (A, D) , (B, E) y (C, F) y los pares de lados $(A + B, D + E)$, $(B + C, E + F)$ y $(A + C, D + F)$ se llaman *homólogos*. Entonces, se verifica que:

TEOREMA 1. *Si dos triángulos ABC y DEF del plano o el espacio reales están en posición homológica y se tiene que:*

$$(A + B) \cap (D + E) = R, \quad (A + C) \cap (D + F) = S, \quad (B + C) \cap (E + F) = T,$$

entonces R , S y T están alineados (figura 11).

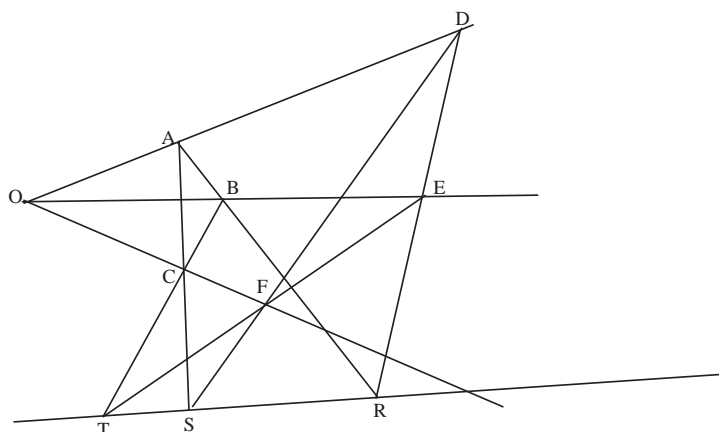


FIGURA 11. El teorema de Desargues en el plano real establece la existencia de una configuración $(10_3, 10_3)$.

Demostración analítica: Para probar el teorema fijaremos una referencia adecuada y asignaremos coordenadas a los puntos que intervienen en el enunciado. En principio habría que hacer dos demostraciones distintas, una para el plano y otra para el espacio; además, dentro del contexto en que nos movemos, habría que

elegir referencias cartesianas. Como solo tratamos de dar un ejemplo, elegiremos una referencia afín y nos limitaremos al caso plano. La referencia más razonable es la dada por

$$\mathcal{R} = \{O : \alpha \cdot \overrightarrow{OA}, \beta \cdot \overrightarrow{OC}\}, \quad \text{con } \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}.$$

En esta referencia los puntos del enunciado tendrán coordenadas

$$A : (a, 0), B : (1, 1), C : (0, c), D : (d, 0), E : (e, e), F : (0, f),$$

con $a \neq 0$, $c \neq 0$, $d \notin \{0, a\}$, $e \notin \{0, 1\}$ y $f \notin \{0, c\}$. Un cálculo elemental y tedioso muestra entonces que

$$\begin{aligned} R & : \left(\frac{a(d-e) + (1-a)de}{d-ae}, \frac{e(d-a)}{d-ae} \right), \\ S & : \left(\frac{ad(c-f)}{cd-af}, \frac{cf(d-a)}{cd-af} \right), \\ T & : \left(\frac{e(c-f)}{ec-f}, \frac{ef(c-1) + c(e-f)}{ec-f} \right) \end{aligned}$$

y como

$$\begin{vmatrix} d-ae & a(d-e) + (1-a)de & e(d-a) \\ cd-af & ad(c-f) & cf(d-a) \\ ec-f & e(c-f) & ef(c-1) + c(e-f) \end{vmatrix} = 0,$$

los tres puntos están alineados.

CQD.

Demostración sintética: La demostración geométrica comienza por el caso de espacio ambiente tridimensional (ver figura 12).

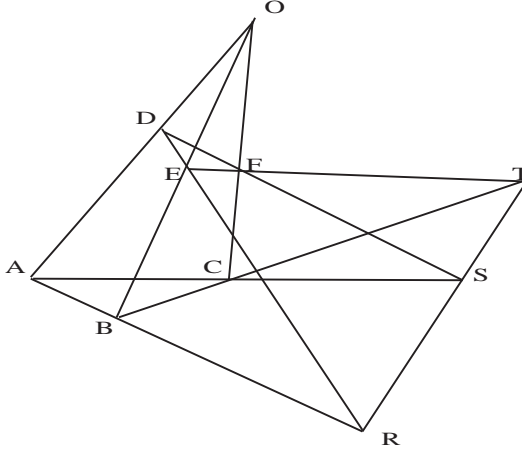


FIGURA 12. Teorema de Desargues en el espacio de dimensión 3.

Suponemos que $\alpha = A + B + C$ y $\beta = D + E + F$ son planos distintos, porque en otro caso, estaríamos en el plano. Como

$$(A + B) \cap (D + E) = R, \quad (A + C) \cap (D + F) = S, \quad (B + C) \cap (E + F) = T,$$

y sabemos que $A + B$, $A + C$, $B + C$ están contenidas en α y $D + E$, $D + F$, $E + F$ están contenidas en β , entonces $R, S, T \in \alpha \cap \beta$ y por tanto están alineados.

El caso plano se reduce al caso de dimensión tres por proyección y sección. Llamamos α al plano de los dos triángulos, tomamos un punto $P \notin \alpha$ y un segundo punto $Q \in (O+P) \setminus \{O, P\}$ y tal que ninguno de los pares de rectas $(P+A, Q+D)$, $(P+B, Q+E)$, $(P+C, Q+F)$ sean paralelas. Como las rectas de esos pares son coplanarias y no paralelas, son concurrentes y definen puntos

$$M = (P+A) \cap (Q+D), N = (P+B) \cap (Q+E), L = (P+C) \cap (Q+F),$$

que determinan un plano β .

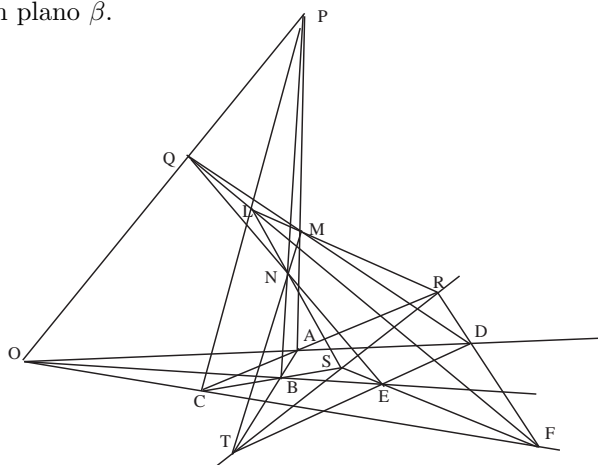


FIGURA 13. Prueba del Teorema de Desargues plano por reducción al caso tridimensional.

Así, los triángulos ABC y MNL están en posición homológica y también lo están los triángulos DEF y MNL . En consecuencia, y por el teorema de Desargues del caso tridimensional, llamando $r = \alpha \cap \beta$, se verifica que

$$(A+B) \cap (M+N) \in r, \quad (M+N) \cap (D+E) \in r,$$

y por tanto $(A+B) \cap (D+E) \in r$ y lo mismo sucede con los otros pares de lados homólogos (ver figura 13). CQD.

Las hipótesis del teorema de Desargues son *genéricas*, y se pueden dar versiones degeneradas o *reducidas* del mismo, algunas de las cuales aparecen recogidas en la figura 14.

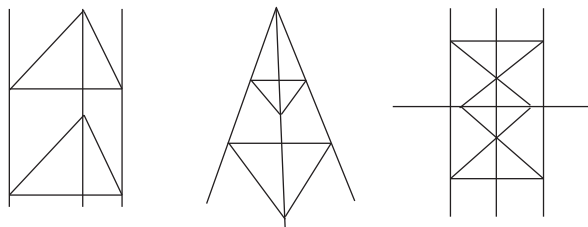


FIGURA 14. Algunos casos degenerados del Teorema de Desargues en el plano.

En la primera de ellas se amplía la condición de *posición homológica* a triángulos tales que las rectas que unen pares de vértices homólogos sean paralelas, y lo mismo se hace en la tercera. Respecto a la condición de que los puntos de corte de lados homólogos estén alineados que aparece en la tesis del teorema, en las figuras primera y segunda se transforma en: *si dos pares de lados homólogos son paralelos, el tercero también*, y en la tercera figura se transforma en que: *la recta determinada por los puntos de corte de dos pares de lados homólogos es paralela al par de lados homólogos restantes*.

Mediante proyección y sección se puede transformar el caso genérico en los casos reducidos, de modo que una vez probado el primero, los segundos quedan probados automáticamente. Vemos en primer lugar, en la figura 15, cómo proyectar sobre un plano β , desde un punto P , una recta r situada en un plano α . Para construir la recta proyección, basta observar que dicha recta es la intersección de β con el plano $P+r$ que pasa por P y r . Tomando el plano γ paralelo a β por P y escribiendo

$$(P+r) \cap \gamma = s = P+O, \quad O = r \cap (\gamma \cap \alpha),$$

la recta s es paralela a la recta proyección $t = \beta \cap (P+r)$, ya que ambas son secciones de un plano $P+r$ por dos planos paralelos γ y β . Entonces, la construcción de la recta t se hace como sigue: dados α, β, P y $r \subset \alpha$, se construye el plano γ paralelo a β por P , se dibujan los puntos de corte de r con $\alpha \cap \gamma$ y con $\alpha \cap \beta$, O y R respectivamente, se traza la recta s que pasa por P y O y la recta t buscada es la paralela a s por R .

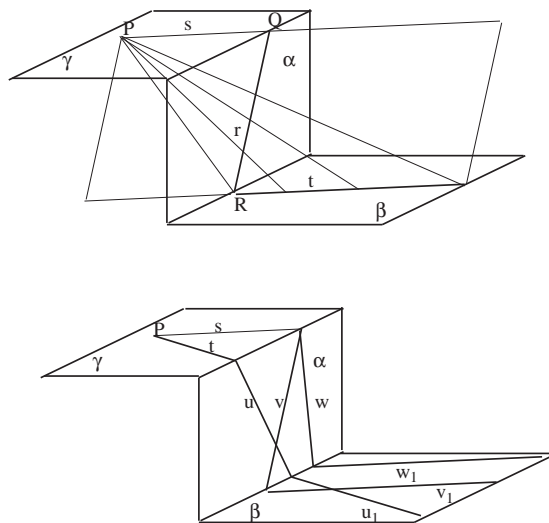


FIGURA 15. Construcción de la proyección de rectas y puntos del plano α sobre el plano β desde el punto P

En la parte inferior de la figura 15, se hace ver cómo las proyecciones de dos rectas, v, w que se cortan en $\alpha \cap \gamma$ son rectas paralelas v_1, w_1 y cómo se puede construir la proyección de un punto Q , tomando dos rectas v, u que se cortan en él y proyectando ambas rectas, el punto de corte $v_1 \cap u_1$ de las rectas proyección da la proyección T de Q desde P .

En la figura 16 se aprecia cómo una de las formas reducidas del teorema de Desargues se obtiene por proyección y sección de la forma genérica del teorema. Por tanto, una vez probada ésta, quedan también probadas las formas reducidas.

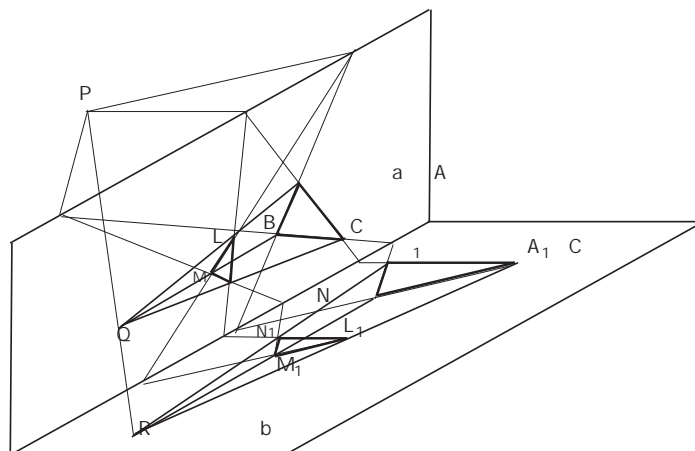


FIGURA 16. Por proyección y sección pueden obtenerse las formas degeneradas del teorema de Desargues a partir de la forma genérica

Estas versiones degeneradas del teorema de Desargues y otras que se pueden describir fácilmente, se reducen también a la versión genérica si consideramos del mismo modo las rectas paralelas y las secantes, esto puede hacerse añadiendo al plano un punto por cada *dirección*, de este modo añadimos al plano una *recta del infinito* y establecemos que dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma dirección, esto es, pasan por el mismo punto de la recta del infinito.

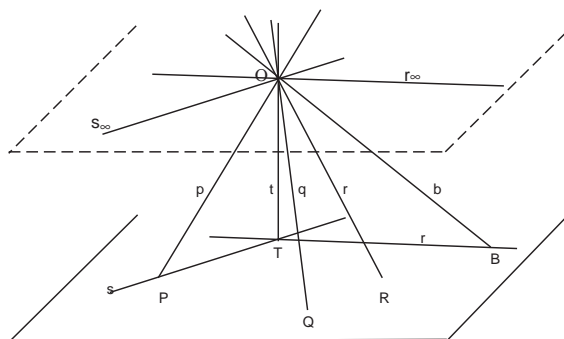


FIGURA 17. Los puntos ordinarios, vistos desde O son rectas que pasan por O y cortan al plano π , cuando el observador de O mira al infinito, es decir, paralelamente a π , aparecen los puntos del infinito

Así alcanzamos uno de los principios básicos que sustentan la Geometría Proyectiva, que es el de *mirar el espacio desde fuera*. Por ejemplo, si un plano π es visto por el observador O (ver figura 17), los *puntos* son las rectas que pasan por O . De este modo, junto a puntos *ordinarios* P, Q, R , representados por las rectas

p, q, r , aparecen puntos *del infinito* representados por las rectas que pasan por O y son paralelas al plano π .

Una *recta* r es el conjunto de sus *puntos*, es decir, el conjunto de rectas que unen O con todos sus puntos, o lo que es lo mismo rectas por O contenidas en el plano definido por O y r . Ahora aparece un nuevo punto en cada recta, el punto del infinito, que es la recta r_∞ por O paralela a r . Dos rectas s, t paralelas en π corresponden a dos planos por O que se cortan en una recta paralela a π , que será el punto del infinito común a ambas (ver figura 18). La presencia de los puntos del infinito, que como hemos visto son aquellos puntos donde se cortan las rectas paralelas, introduce simetría en los axiomas de la geometría plana (por dos puntos distintos pasa una única recta, dos rectas distintas se cortan en un solo punto) y permite, entre otros muchos resultados, establecer un principio de dualidad (si una proposición relativa a puntos y rectas es válida, automáticamente es cierto el *enunciado dual* que se obtiene intercambiando punto y recta, contenido y contiene) ampliamente explotado por los géometras franceses.

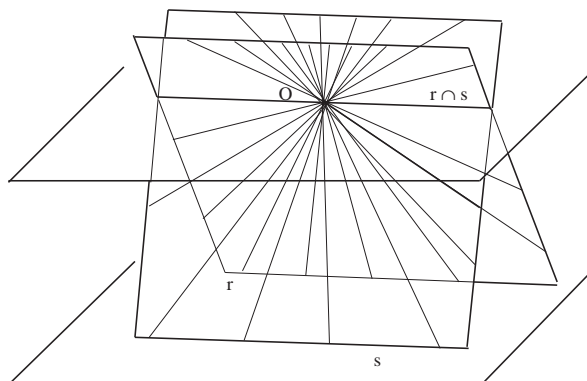


FIGURA 18. Dos rectas son paralelas si se cortan en el infinito

El teorema de Pappus es una versión degenerada de un teorema probado por Blaise Pascal (1623-1662) cuando solo tenía dieciséis años. Pascal fue alumno de Desargues y abandonó las matemáticas para dedicarse a la teología.

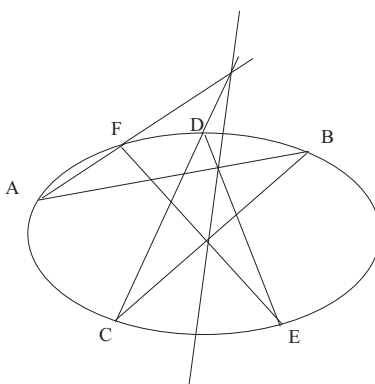


FIGURA 19. El teorema de Pascal es válido en condiciones genéricas, o admitiendo que las rectas paralelas se cortan en el infinito.

El teorema, llamado por su autor *mysterium hexagrammicum* [58], establece que:

TEOREMA 2 (Pascal). *Si $ABCDEF$ es un hexágono inscrito en una cónica real no degenerada, los puntos de corte de pares de lados opuestos*

$$(A + B) \cap (D + E), (B + C) \cap (E + F), (C + D) \cap (F + A),$$

están alineados (ver figura 19).

Cuando la cónica degenera en un par de rectas, la condición *hexágono inscrito* se traduce en que hay tres vértices no contiguos del hexágono en cada una de ellas, de modo que ninguno de los vértices coincide con el punto de intersección de ambas. Así se obtiene el teorema de Pappus:

TEOREMA 3 (Pappus). *Dadas dos rectas coplanarias r y s , tres puntos A, C, E sobre r y otros tres B, D, F sobre s , tales que ninguno de ellos es $r \cap s$, los puntos*

$$(A + B) \cap (D + E), (B + C) \cap (E + F), (C + D) \cap (F + A)$$

están alineados (ver figura 20).

Este teorema es equivalente, por dualidad, al siguiente:

TEOREMA 4. *Dados dos puntos del plano R y S , tres rectas a, c, e por R y otras tres b, d, f por S , tales que ninguna de ellas es $R + S$, las rectas*

$$(a \cap b) + (d \cap e), (b \cap c) + (e \cap f), (c \cap d) + (f \cap a)$$

son concurrentes (ver figura 20).

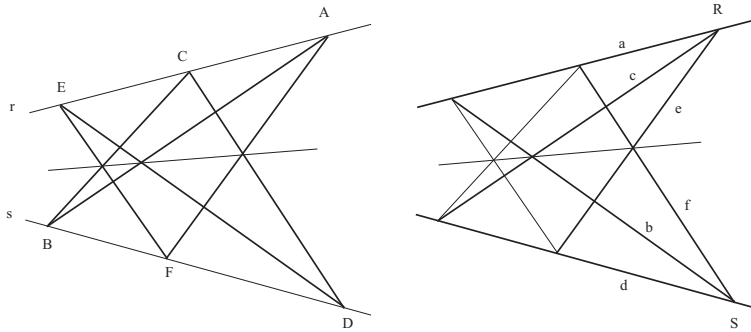


FIGURA 20. Las dos figuras prueban la equivalencia entre los enunciados 3, 4.

Lo mismo que el teorema de Desargues, el de Pappus se puede probar en el plano real por métodos analíticos, es decir, eligiendo una referencia afín adecuada y trabajando en coordenadas. También puede probarse de modo sintético, a partir de un teorema del espacio por posterior proyección y sección. Pero esta vez la existencia de una proyección conveniente, que lleva una proposición evidente del espacio al teorema de Pappus, deriva de un resultado de naturaleza no lineal, que es el recogido en el siguiente teorema.

TEOREMA 5. *Dados seis puntos distintos dos a dos del espacio real tridimensional A, B, C, D, E, F , tales que las rectas $A+B, C+D, E+F$ y las rectas $B+C, D+E, F+A$ se cruzan dos a dos, y cada una de las tres primeras rectas corta a las tres segundas, se tiene que las rectas $A+D, B+E, C+F$ son concurrentes.*

Demostración: Como $A + B$ y $D + E$ son concurrentes (ver figura 21), son coplanarias y las rectas $A + D$ y $B + E$ se cortan en un punto. El mismo razonamiento prueba que también lo hacen $A + D$, $C + F$ y $B + E$, $C + F$. Si los tres puntos de corte no coincidiesen estas tres rectas serían coplanarias y también lo serían los seis puntos, en contradicción con las hipótesis. En consecuencia, el teorema se verifica. CQD.

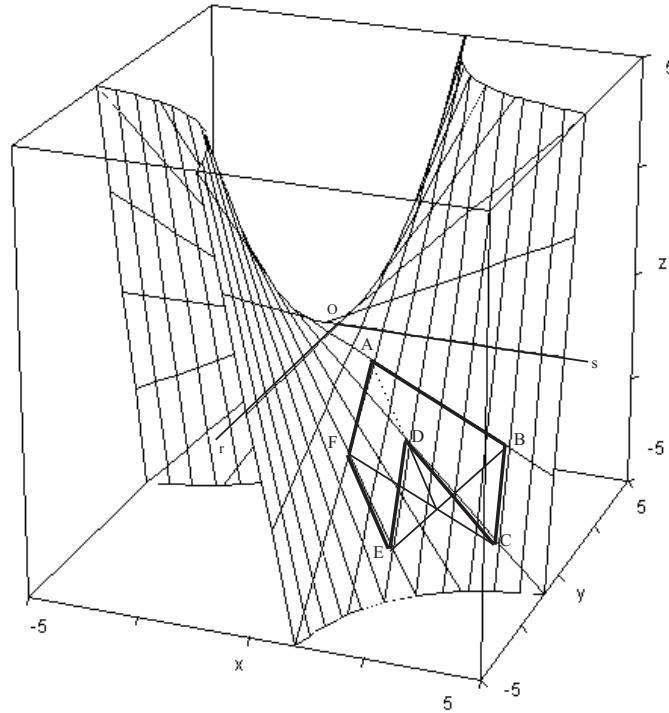


FIGURA 21. Los lados del hexágono $ABCDEF$ se apoyan en las rectas r y s que se cortan en O . Los pares de lados opuestos son coplanarios al pertenecer a dos familias distintas de generatrices del hiperboloide.

Demostración: (Pappus en el plano real). Un cálculo analítico elemental prueba que el lugar geométrico de las rectas del espacio real tridimensional que se apoyan en tres rectas que se cruzan dos a dos, es una cuádrica hiperbólica. En consecuencia, las seis rectas de la hipótesis del teorema anterior están contenidas en una cuádrica hiperbólica (ver figura 21), de modo que las tres primeras pertenecen a una de las familias de generatrices y las tres segundas a la otra. Tomando dos rectas r y s , una en cada una de las familias de generatrices de la cuádrica y distintas ambas de la anteriores, r y s se cortan en un punto O de la cuádrica. Por proyección desde O sobre un plano que no contenga a ninguna de las rectas usadas, se tiene un hexágono plano que cumple las hipótesis del teorema 4 y también la tesis.

El único problema es construir para un hexágono plano que verifique las hipótesis del teorema 4 otro espacial que verifique las del teorema 5 junto con las rectas r y s del párrafo anterior y que se proyecte sobre el primero desde el punto O . Esa construcción es un ejercicio que dejamos al lector. CQD.

Hemos visto que hay un cierto paralelismo entre los dos teoremas presentados en esta sección, ambos prueban la existencia de configuraciones planas muy semejantes y en sus demostraciones geométricas se usan teoremas análogos en dimensión tres. No obstante, hay entre ellos una diferencia fundamental, el teorema de Desargues tridimensional depende solo de resultados formulables en términos de incidencia, pero no sucede lo mismo con el de Pappus. En la prueba de este último interviene una cuádrlica, pero esto no es el problema, ya que como hemos señalado al principio de este capítulo, las cónicas y las cuádrlicas se pueden definir en términos de propiedades de incidencia; el problema está en la existencia de las dos familias generatrices lo cual requiere no solo la construcción de una proyectividad, sino el hecho de que una proyectividad entre rectas reales queda determinada unívocamente por las imágenes de tres puntos distintos, y aquí juega un papel esencial la propiedad conmutativa de la multiplicación en el cuerpo base.

Ambos enunciados son independientes de los axiomas de incidencia de la geometría plana, por lo cual pueden añadirse como axiomas. Ahora bien, admitiendo Desargues plano como axioma, el enunciado de Pappus no es demostrable, debido a que para un plano sobre un cuerpo este teorema equivale a la conmutatividad de la multiplicación y ¡existen cuerpos no conmutativos! Por la misma razón, es decir la existencia de cuerpos no conmutativos, aunque en un plano contenido en un espacio tridimensional se verifica automáticamente Desargues, no necesariamente lo hace Pappus.

Sin embargo, si se toma como axioma el enunciado de Pappus, el de Desargues es un teorema, es decir puede deducirse de los axiomas usuales de incidencia y del axioma de Pappus (Teorema de Hessenberg [18]).

6. Introducción histórica

Generalmente se afirma que la geometría proyectiva tiene su origen en el desarrollo teórico de la perspectiva; pero es muy discutible, como veremos más adelante el trabajo del sistematizador de la perspectiva, Desargues, era completamente desconocido a principios del XIX, cuando Poncelet inicia el desarrollo de la geometría proyectiva. El descubrimiento de la obra de Desargues se produce medio siglo después durante las discusiones entre alemanes y franceses sobre la paternidad de esta geometría. Sin embargo, el uso de las proyecciones y secciones en geometría es mucho más antiguo. Según Chasles, Pappus usa la proyección para probar propiedades del Helicoide, y hemos podido comprobar que Ptolomeo en *el Almagesto* hace un uso sistemático de la proyección central para su estudio de la geometría esférica. El trabajo de Apolonio que considera las cónicas como secciones de un cono de base circular, o sea, proyecciones de un círculo desde un punto exterior a su plano, es un ejemplo más del uso temprano de las proyecciones. Desde los géometras griegos hasta el siglo XVII, las proyecciones siguen usándose, aunque no de un modo sistemático, como elemento de prueba en geometría.

Sin embargo, y desde un punto de vista formal, el creador de la geometría proyectiva fue Girard Desargues (1591-1661), ingeniero y arquitecto francés que en su obra *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plane* [19] utiliza sistemáticamente la proyección central, es decir, la proyección desde un punto, para probar resultados geométricos y especialmente para obtener propiedades de las cónicas. Es claro que la proyección central no conserva ni distancias ni ángulos, por tanto Desargues desvincula la geometría de la métrica y

en consecuencia, cambia sustancialmente la primera. La geometría ya no es solo el estudio de las propiedades de las figuras derivadas de la medida de sus ángulos y distancias, incluye también propiedades proyectivas, es decir, propiedades estables por proyección.

Como ya hemos señalado, situamos el origen de la geometría proyectiva en Desargues solo desde un punto de vista formal, porque su obra, pese a los comentarios elogiosos de su amigo Descartes, no tuvo resonancia en su época ni reconocimiento posterior hasta mediados del siglo XIX, cuando la mayor parte de su obra había sido descubierta de nuevo por personas que no conocían su existencia. La idea de usar la proyección central para probar resultados geométricos, sobre todo relativos a las cónicas, aparece fugazmente en varios autores, por ejemplo, Pascal en 1640 demuestra su teorema sobre el hexágono por proyección de un círculo sobre una cónica, y La Hire, Mac Laurin y Lambert, entre otros, también obtienen resultados sobre cónicas por proyección.

Por lo que respecta a los puntos del infinito, según afirma Enriques [21], Guidoaldo del Monte hacia 1600 prueba que en la proyección central las rectas paralelas se pueden representar por rectas concurrentes en un *punto de fuga*. Es Desargues el que considera que todas las rectas paralelas a una dada pasan por un mismo *punto del infinito*; sin embargo, la recta de fuga o recta del infinito, no aparece hasta principios del XVIII en la obra de Taylor [68]. Pero el momento en que esta idea adquiere un papel estelar no llega hasta el primer cuarto del siglo XIX con la obra de Victor Poncelet (1788 -1867).

Poncelet, oficial de artillería del ejército de Napoleón y antiguo alumno de Monge en la Escuela Politécnica, decide reescribir la geometría en la prisión rusa donde estuvo confinado tras el desastre de la *gran armada*. El resultado de su trabajo ve la luz en 1822 con el título: *Traité des propriétés projectives des figures* [50] y su forma completamente nueva de entender las propiedades geométricas es la siguiente:

... Una figura cuyas partes no guardan entre ellas más relaciones que las indestructibles por efecto de la proyección, se llamará figura proyectiva. Estas relaciones, y en general todas las propiedades que subsisten a la vez en la figura dada y en todas sus proyecciones, se llamarán propiedades proyectivas....

Al adoptar esta postura, Poncelet además de olvidar la métrica hace aparecer de modo físico el infinito. La introducción del infinito para resolver problemas de perspectiva arquitectónica se debe también a Desargues, como hemos indicado, pero no se usa sistemáticamente hasta Poncelet.

La obra fundamental de Poncelet hace explotar una polémica que venía gestándose entre los geómetras desde hacía más de un siglo. La introducción de los métodos cartesianos en geometría había transformado a esta en subsidiaria del análisis algebraico, todos los problemas geométricos se resolvían mediante coordenadas y los métodos y razonamientos de los Elementos de Euclides parecían condenados a desaparecer. La nueva geometría proyectiva no se podía reducir a coordenadas y, en palabras de Carnot, iba a *librar a la geometría de los jeroglíficos del análisis*. Como hemos visto, Poncelet no es el creador de la polémica *analítico versus sintético*, pero su geometría da un arma, en ese momento definitiva, a los geómetras sintéticos, cuya situación a principios del XIX era bastante precaria.

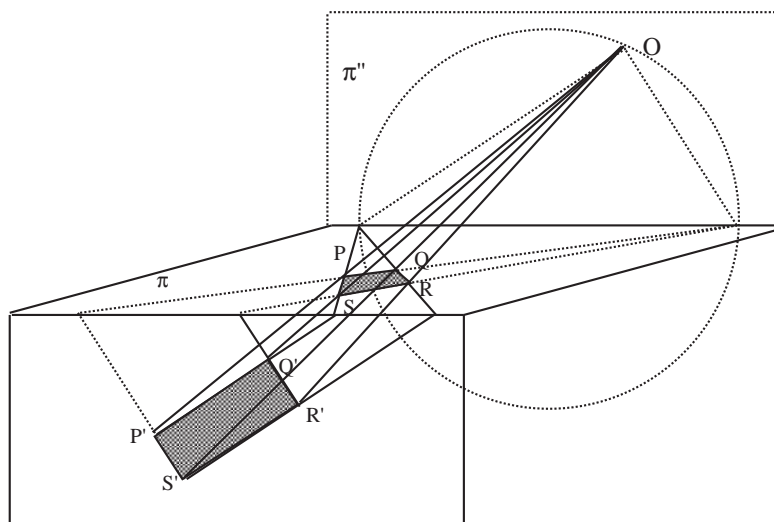


FIGURA 22. La proyección de un cuadrilátero puede ser un rectángulo, es decir, ni ángulos ni razones de distancias son invariantes por proyección, en cambio *cuadrilátero* sí es una noción proyectiva.

Monge había impulsado grandemente la geometría descriptiva, geometría cuyo objeto es la representación plana de figuras espaciales. Esta geometría cubría y cubre hoy casi todas las necesidades de la ingeniería, pero desde el punto de vista del matemático deja mucho que desear y Poncelet conocía los resultados de Dupin que probaban que resulta imposible reflejar mediante dibujos planos todas las propiedades geométricas de una figura tridimensional. Por ello, Poncelet busca un camino completamente nuevo y su situación de aislamiento le ayuda a hacerlo, aunque sus condiciones de trabajo no fueran las ideales:

Esta obra es el resultado de las investigaciones que realicé, desde la primavera de 1813, en la prisión de Rusia. Privado de todo tipo de libros y de ayuda y, sobre todo, distraído por las desventuras de mi patria y las mías propias, no he podido darle toda la perfección deseable.

Poncelet no olvida en absoluto la métrica y sus enunciados tienen muchas veces contenido analítico. La misma tónica se mantiene en los continuadores de su trabajo, y es Von Staudt (1798 - 1867) quien en su *Geometrie der Lage* (1847)[63] desliga totalmente ambas geometrías, limitando las operaciones de la geometría proyectiva a *conceptos proyectivos*. Así, libera también la geometría proyectiva de su vinculación al cuerpo real, y con ello desaparece otro de los conceptos poco comprendidos hasta el momento, el de punto imaginario introducido también por Poncelet [50].

Es un hecho curioso que la aparición en geometría de los puntos imaginarios se produce sin ninguna vinculación con los números complejos, que ya empezaban a utilizar los analistas. Queda fuera de los límites de esta introducción explicar detalladamente el manejo geométrico de los puntos imaginarios, pero vamos a exponer sin mucho detalle un ejemplo significativo.

Consideremos en el plano real una cónica c y una recta r , definidas en una referencia cartesiana por las ecuaciones $q(x, y) = 0$ y $r(x, y) = 0$, respectivamente.

Las ecuaciones

$$a \cdot q(x, y) + b \cdot r(x, y)^2 = 0$$

definen, al variar los números a y b , una familia de cónicas $\{c_{ab}\}$, que es lo que se llama un *haz de cónicas*. Si la recta y la cónica se cortan en dos puntos, todas las cónicas del haz pasan por ellos, ya que sus coordenadas anulan simultáneamente las ecuaciones de ambas. La cuestión es averiguar si todas las cónicas del haz tienen algo en común cuando la recta y la cónica no se cortan. Si extendemos el cuerpo para trabajar con los complejos, ese algo que tienen en común es precisamente un par de puntos imaginarios conjugados, pero nuestro objetivo es buscar un objeto real.

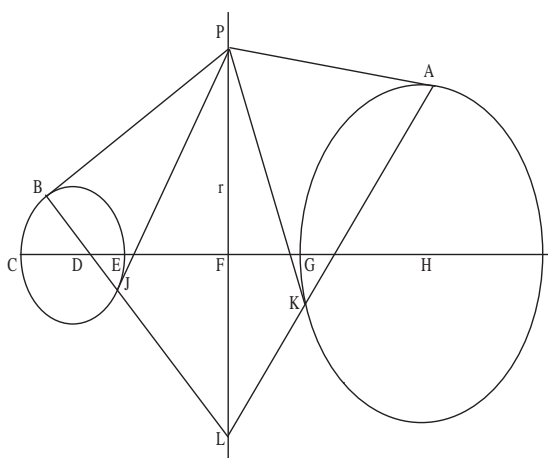


FIGURA 23. La polaridad permite utilizar los puntos imaginarios. Las dos cónicas y la recta de la figura se cortan en la involución de la recta inducida por una de ellas, ya que ambas definen la misma involución.

Para ello, debemos dar una noción distinta de intersección de una recta con una cónica. La cónica c induce una transformación en la recta r , que se describe como sigue:

Si $P \in r$ es un punto arbitrario (ver figura 23) se pueden tomar las rectas tangentes por P a c , estas rectas cortan a la cónica en puntos B y J ; la recta $B + J$ a su vez, corta a r en el punto $f_c(P) = L$ al que tomamos como imagen de P en la transformación.

La transformación así definida es una proyectividad involutiva (si r no es tangente a c), y si r corta a c , tiene dos puntos invariantes reales que son precisamente los puntos de corte de r y c . Por tanto, el dato de esta transformación equivale al de los puntos de corte, si estos existen. Además, como una proyectividad involutiva de la recta real queda unívocamente determinada por sus puntos invariantes, todas las cónicas c_{ab} , que cortan r en los mismos puntos que c , inducen en r la misma transformación. Parece entonces razonable decir que la intersección de c y r es la transformación f_c .

La transformación f_c se puede definir aunque c y r no se corten, y en este caso también todas las cónicas c_{ab} inducen en r la misma transformación, que ahora no tiene puntos invariantes reales, pero es el elemento común a todas las cónicas del

haz y la recta r , así que tiene sentido decir que es la intersección de la recta y la cónica.

Si vamos un poco más lejos, pasamos al cuerpo complejo y calculamos los puntos invariantes de la involución f_c , encontramos dos puntos imaginarios conjugados, que son precisamente los puntos complejos de corte de r y c . Es decir, el objeto real f_c permite manejar puntos de coordenadas imaginarias.

Los métodos analíticos vuelven a entrar en la geometría proyectiva de la mano de Plücker (1801-1868), quien redescubre en su obra *Analytisch-geometrische Entwicklungen* [48] (1828), ahora de modo definitivo, las coordenadas homogéneas, que con anterioridad habían sido descritas con poco éxito por Feuerbach y Moebius. Al mismo tiempo observa que el intercambio de coeficientes y variables en las ecuaciones permite hablar de coordenadas de rectas en el plano y demuestra, de modo indudable, el principio de dualidad de Poncelet. Todavía se escapan a la coordinatización de la geometría muchos objetos, y los más importantes son las rectas del espacio tridimensional. Pasan más de veinte años hasta que, esencialmente por medio del álgebra lineal, se resuelve este problema a la vez que se transforma la geometría proyectiva en el lenguaje geométrico del álgebra.

La introducción sistemática de los espacios vectoriales de dimensión arbitraria sigue dos caminos distintos, por una parte Arthur Cayley (1821-1895) desarrolla la geometría analítica de \mathbb{R}^n usando sistemáticamente la teoría de determinantes (1846), por otra parte Grassmann (1809-1877), en un trabajo no comprendido hasta casi veinte años después, sienta las bases del álgebra lineal moderna con la introducción de las “magnitudes con extensión”, que corresponden a nuestros vectores y formas, y son la contrapartida puramente geométrica de la teoría de determinantes (Incidentalmente, Grassmann abandonó las matemáticas para dedicarse al estudio del sánscrito y es el creador de la *última gran ley* de la lingüística). Plücker [49], en 1868, describe con ayuda de las técnicas desarrolladas por Grassmann un espacio de dimensión 4 (una cuádrica de un espacio de dimensión 5) cuyos elementos son las rectas del espacio tridimensional y da la victoria definitiva a la geometría analítica.

Una tercera forma de extender la geometría es por medio de los grupos de transformaciones, y fue expuesta por un alumno de Plücker, F. Klein, en su *Programa de Erlangen* [40] (1872). Para Klein una geometría es un grupo de transformaciones que actúa en un conjunto, las propiedades geométricas son aquellas invariantes por estas transformaciones.

Desde este punto de vista, podemos considerar en \mathbb{R}^3 dos operaciones: proyectar desde un punto O (proyección) que consiste en unir cualquier punto del espacio con O mediante una recta, y cortar por un plano π (sección). Así, dado un plano π , una familia de puntos, O_1, O_2, \dots, O_r , y otra de planos, $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{r-1}$ (situados razonablemente), podemos proyectar π desde O_1 y cortar por π_1 , proyectar π_1 desde O_2 y cortar por π_2 , etc., hasta proyectar π_{r-1} desde O_r y cortar de nuevo por π . Tenemos así una transformación de π en π que se llama una *proyectividad*. Las proyectividades forman un grupo y la geometría proyectiva es el estudio de propiedades de π invariantes por dicho grupo.

A finales del primer tercio del pasado siglo, el papel de las estructuras combinatorias en Matemáticas se hace de enorme importancia, y hay un grupo de geómetras y lógicos que se interesan por los fundamentos combinatorios de la geometría sintética, así Birkhoff y Menger publican axiomáticas de la geometría proyectiva, libres de la noción de cuerpo base, cubriendo incluso modelos no desarguesianos. Ambos

utilizan los retículos como elementos básicos de la geometría y, de hecho, hacen volver a la vida a la geometría sintética.

Un ejemplo de la evolución de los métodos de la geometría proyectiva es la prueba del llamado teorema fundamental de la geometría proyectiva, que abordamos en la siguiente sección.

7. El teorema fundamental de la geometría proyectiva

La historia de este teorema está ligada a la observación que hemos hecho anteriormente del carácter métrico de la razón doble, que sin embargo es un invariante proyectivo. Hay un caso particular en el que desaparece el papel de la métrica, el de las cuaternas armónicas.

Decimos que cuatro puntos alineados A, B, C, D forman una cuaterna armónica si su razón doble es igual a -1 , esto es $[A, B : C, D] = -1$. En este caso, la posición de los cuatro puntos sobre la recta se puede fijar usando solamente la relación de incidencia (ver figura 24).

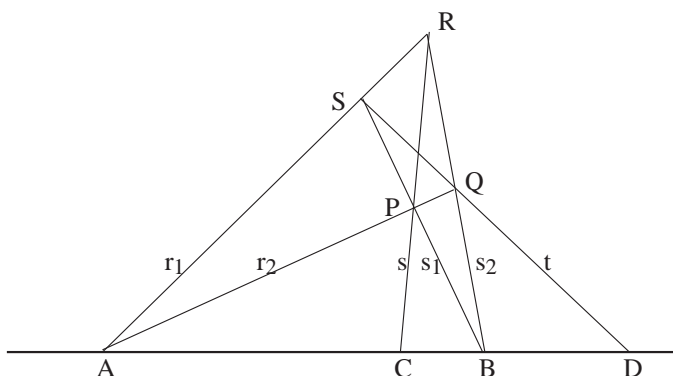


FIGURA 24. Cuaterna armónica y cuadrivértice completo.

Llamando E al punto de corte de las diagonales $E = (S + Q) \cap (P + R)$, por proyección desde S y sección por $R + P$, se tiene que:

$$[A, B : C, D] = [R, P : C, E]$$

y por proyección desde Q y sección por $A + B$

$$[R, P : C, E] = [B, A : C, D].$$

Sabemos que

$$[A, B : C, D] = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|}, \quad [B, A : C, D] = \frac{|BC| \cdot |AD|}{|AC| \cdot |BD|},$$

por tanto $[A, B : C, D]^2 = 1$ y como $[A, B : C, D] \neq 1$, pues son puntos distintos, debe ser $[A, B : C, D] = -1$

Por tanto, dados tres puntos alineados A, B, C para construir su cuarto armónico, es decir, un punto D tal que $[A, B : C, D] = -1$, basta tomar dos rectas r_1 y r_2 por A (figura 24) y una recta s por C . Si llamamos $R = r_1 \cap s$, $P = r_2 \cap s$ y construimos rectas $s_1 = R + B$, $s_2 = P + B$, tenemos los puntos $Q = s_1 \cap r_2$, $S = s_2 \cap r_1$, que con P y R definen un cuadrivértice $PQRS$ que tiene como puntos

diagonales a A y B y verifica que la diagonal $P + R$ corta a $A + B$ en C ; luego si D es el punto de corte de $A + B$ con la diagonal $Q + S$, se tiene que $[A, B, C, D] = -1$.

Este hecho era conocido por Poncelet, pero es Staudt el que, usando el teorema de Desargues, prueba la unicidad de la construcción y la extiende a otras figuras proyectivas unidimensionales (formas de primera especie), como el haz plano de rectas o el haz de planos con arista en una recta. El trabajo de Moebius [43], que prueba que una proyectividad del plano está unívocamente determinada por las imágenes de cuatro puntos tales que tres cualesquiera de ellos no están alineados y el de Steiner [64], que prueba que una proyectividad de la recta está determinada por las imágenes de tres puntos distintos utilizando como herramienta la invariancia de la razón doble (y con el fallo de suponer implícitamente que las proyectividades son continuas), llevan a Staudt a definir una proyectividad de la recta como una correspondencia biunívoca que conserva las cuaternas armónicas. El problema es demostrar que esa definición coincide con la de Poncelet y, para ello, lo único que necesita probar es que una transformación biunívoca de la recta que conserva las cuaternas armónicas y tiene tres puntos invariantes es la identidad. Este resultado es el que llama *teorema fundamental de la geometría proyectiva*.

La base de la prueba de Staudt consiste en, dada una de sus proyectividades, establecer una alternativa:

1. Existe un segmento $[A, B]$ compuesto por puntos invariantes.
2. No existe ningún segmento compuesto por puntos invariantes.

En el primer caso, dado un punto C de fuera del segmento, su cuarto armónico respecto a A y B debe pertenecer al segmento $[A, B]$, luego es invariante, y al conservar la transformación las cuaternas armónicas C es también invariante.

En el segundo caso, y aquí está el fallo de la demostración, hay dos puntos invariantes A y B tales que el segmento $[A, B]$ no contiene puntos invariantes, entonces, puesto que hay tres puntos invariantes, hay uno fuera del segmento $[A, B]$ y su cuarto armónico, interior al segmento, debe ser invariante en contradicción con la hipótesis.

Reye [55] intenta corregir la demostración de Staudt, inspirándose en la construcción de Moebius de una red de puntos invariantes de una proyectividad del plano con cuatro puntos invariantes. Para ello, usando la construcción de la cuaterna armónica, construye una familia infinita y densa de puntos invariantes en la recta, y de nuevo suponiendo implícitamente la continuidad, obtiene la prueba del teorema.

De hecho, construye, dada una referencia, los puntos de coordenadas racionales. Usando coordenadas homogéneas en la recta, si $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{Q}$ y si $\alpha_0 = a_0/b_0$, $\alpha_1 = a_1/b_1$, con $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{Z}$, es $[\alpha_0, \alpha_1] = [a_0b_1, a_1b_0]$ y $a_0b_1 \in \mathbb{Z}$, $a_1b_0 \in \mathbb{Z}$. Como además $[a, b] = [-a, -b]$, para construir todos los puntos de coordenadas racionales, basta construir los puntos $[\alpha, \beta]$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{N}$; para hacer esta construcción, es suficiente utilizar series de cuaternas armónicas, como la siguiente:

La serie que permite construir $[-n, 1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (figura 25 (I)) es

$$\begin{aligned} [[1, 0], [0, 1] : [1, 1], [-1, 1]] &= -1 \\ [[1, 0], [-1, 1] : [0, 1], [-2, 1]] &= -1 \\ [[1, 0], [-2, 1] : [-1, 1], [-3, 1]] &= -1 \\ \vdots &\vdots \\ [[1, 0], [-n, 1] : [-n + 1, 1], [-n - 1, 1]] &= -1 \end{aligned}$$

y las series similares, que aparecen en la misma figura 25, construyen la red de racionalidad $\{[m, n]\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$.

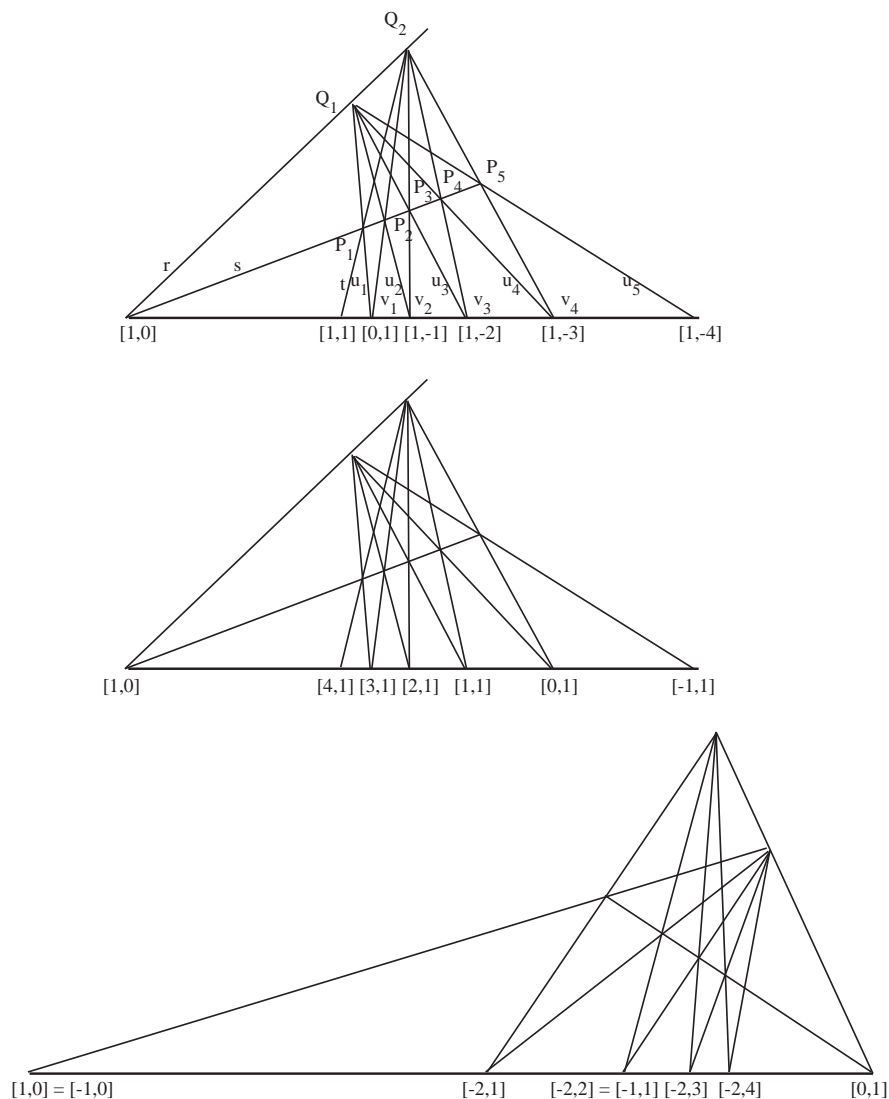


FIGURA 25. Redes de racionalidad

Reye no utiliza coordenadas y afirma, sin demostración, que cualquier punto de la recta se puede aproximar indefinidamente por puntos de una red de racionalidad, y de aquí concluye el resultado.

En una serie de seis artículos publicados entre 1871 y 1873, Klein [42] analiza, entre otras cosas, las pruebas del teorema fundamental y precisa las dos cosas que hay que probar, que no esta probadas ni en Staudt ni en Reye, primero, que la red de racionalidad es densa en la recta real y en segundo lugar, que la correspondencia definida sobre los puntos de la red se extiende a toda la recta. Para asegurar la veracidad de estas dos afirmaciones Klein añade primero un axioma y luego dos,

pero sus axiomas no garantizan la continuidad de la proyectividad. Lo que sí hace Klein es situar el teorema fundamental en su verdadero marco, el de la continuidad en la recta real, enlazando sus resultados con los de Dedekind y Weierstrass, ya que esencialmente trata de construir todos los números irracionales, tal como habían sido definidos por Dedekind.

Al margen del trabajo de Klein, Pasch [47] admite un nuevo axioma de continuidad, la propiedad arquimediana que había sido admitida de forma implícita por muchos geómetras anteriores:

Si el punto C_1 está en el interior del segmento $[A, B]$ y se prolonga el segmento con el segmento $[C_1, C_2]$ congruente con él, y él y de nuevo con el $[C_2, C_3]$ también congruente con él, etc. se llega a un segmento $[C_n, C_{n+1}]$ que contiene al punto B .

Este axioma fue objeto de discusión durante los veinte años siguientes, Stolz obtuvo el primer ejemplo de magnitud no arquimediana y Hilbert desarrolló el primer modelo de geometría no arquimediana. Usándolo, Pasch prueba que toda proyectividad en el sentido de Staudt con tres puntos invariantes tiene un punto invariante en el interior de cualquier segmento, un elemento esencial de la prueba de Pasch es que las proyectividades son correspondencias ordenadas.

Schur en 1891 [61] da una nueva prueba del teorema fundamental, pero en forma restringida, prueba que, con independencia de la propiedad arquimediana, una proyectividad en el sentido de Poncelet, es decir, composición de perspectivas, con tres puntos invariantes es la identidad. La prueba de Schur se basa en los teoremas de Desargues y Pappus. La obra de Schur tiene influencia en los Grundlagen de Hilbert [35], que contienen la axiomática definitiva de la geometría.

Hay numerosos intentos de prueba del teorema de matemáticos tan conocidos como Balser, Chasles, Cremona, Darboux, Enriques, Peano, Pieri, Stolz, Veronese, etc, e incluso Weierstrass tiene una prueba alternativa del teorema restringido de Schur. Una excelente referencia sobre el tema es el artículo de Voelke [70].

Curso breve de geometría proyectiva

por: *Felipe Cano, Beatriz Molina-Samper, Fernando Sanz*

Espacio proyectivo. Aspectos lineales

El espacio proyectivo responde a la idea de completar el espacio afín con un hiperplano en el infinito de modo que las propiedades de intersección de subvariedades afines eviten la excepción del paralelismo. Así, dos rectas de un plano proyectivo se cortarían siempre, mientras que en el plano afín podrían ser paralelas.

En este curso suponemos conocidos los rudimentos de la geometría afín, aun cuando repasaremos un poco el tema al presentar el espacio proyectivo como el completado de un espacio afín con un hiperplano en el infinito.

Abordaremos la presentación “más cómoda” del espacio proyectivo a partir de los espacios vectoriales. Una incursión al punto de vista sintético del plano y espacio proyectivos sería deseable, pero no disponemos en este curso de tiempo suficiente para ello.

1. El espacio proyectivo de un espacio vectorial

Consideremos un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo k .

DEFINICIÓN 1. *El espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ asociado al espacio vectorial V es el conjunto de rectas vectoriales de V . La dimensión $\dim \mathbb{P}(V)$ de $\mathbb{P}(V)$ se define por $\dim \mathbb{P}(V) = \dim_k V - 1$.*

Es decir, un punto de $\mathbb{P}(V)$ es, por definición, un subespacio vectorial de V de dimensión exactamente igual a uno. Si $\dim_k V = 0$, tenemos que $\mathbb{P}(V) = \emptyset$ y $\dim \mathbb{P}(V) = -1$.

Existe una aplicación suprayectiva natural

$$\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V); \quad v \mapsto L(v),$$

donde $L(v) \subset V$ es la recta vectorial generada por $v \neq 0$. En ese sentido, el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ es el cociente de $V \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia que identifica vectores proporcionales entre sí, la clase de un vector $v \in V \setminus \{0\}$ se denotará por $[v]$. Nótese que $[v]$ y $L(v)$ denotan el mismo punto del espacio proyectivo.

Dado un subespacio vectorial W de V se tiene una inclusión natural

$$\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V).$$

Los subconjuntos de $\mathbb{P}(V)$ de la forma $K = \mathbb{P}(W)$, donde W es un subespacio vectorial de V se llamarán *subespacios proyectivos de $\mathbb{P}(V)$* . Un punto de $\mathbb{P}(V)$ se corresponde con un subespacio proyectivo de dimensión cero. Una *recta proyectiva de $\mathbb{P}(V)$* es todo subespacio proyectivo de dimensión uno. Un *hiperplano proyectivo* es todo subespacio proyectivo de $\mathbb{P}(V)$ de dimensión $\dim \mathbb{P}(V) - 1$.

Existe una biyección que conserva la relación de inclusión

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{subespacios} \\ \text{vectoriales de } V \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{subespacios} \\ \text{proyectivos de } \mathbb{P}(V) \end{array} \right\}$$

que a cada subespacio vectorial $W \subset V$ le hace corresponder $\mathbb{P}(W)$. La única observación pertinente es que esta aplicación es inyectiva, es decir, que

$$\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W') \Rightarrow W = W'.$$

Veámoslo. Si $W \neq W'$, existe $w \in V$ con $w \in W \setminus W'$, o bien $w \in W' \setminus W$. Supongamos $w \in W \setminus W'$, entonces la recta vectorial $L(w) \subset V$ generada por w cumple que $L(w) \subset W$ y que $L(w) \not\subset W'$, es decir $L(w) \in \mathbb{P}(W)$ y $L(w) \notin \mathbb{P}(W')$. Por tanto $\mathbb{P}(W) \neq \mathbb{P}(W')$.

La intersección de subespacios proyectivos es también un subespacio proyectivo. Más precisamente, tenemos la siguiente igualdad

$$\bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} W_i\right).$$

Por consiguiente, podemos definir el concepto de *subespacio proyectivo* $L\text{Proj}(S)$ generado por un subconjunto $S \subset \mathbb{P}(V)$ como el mínimo subespacio proyectivo que contiene S . Tenemos que

$$L\text{Proj}(S) = \mathbb{P}(L(\pi^{-1}(S))),$$

donde $L(\pi^{-1}(S)) \subset V$ es el subespacio vectorial de V generado por $\pi^{-1}(S)$.

En el caso particular del subespacio proyectivo generado por la unión de dos subespacios $K_1 = \mathbb{P}(W_1)$ y $K_2 = \mathbb{P}(W_2)$, tenemos que

$$L\text{Proj}(K_1 \cup K_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2).$$

Utilizaremos la notación: $K_1 + K_2 = L\text{Proj}(K_1 \cup K_2)$. Atención, los elementos de un espacio proyectivo no se suman (no hay una estructura de grupo abeliano), se trata de una notación referida a subespacios.

PROPOSICIÓN 1 (Fórmula de las dimensiones). *Supongamos que $\dim \mathbb{P}(V) = n$ y que tenemos dos subespacios proyectivos K_1 y K_2 de dimensiones respectivas d_1 y d_2 . Se tiene*

$$d_1 + d_2 = \dim(K_1 + K_2) + \dim(K_1 \cap K_2).$$

Demostración: Supongamos que $K_1 = \mathbb{P}(W_1)$ y $K_2 = \mathbb{P}(W_2)$. Para subespacios del espacio vectorial V , se tiene que

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2),$$

de donde se concluye el enunciado.

CQD.

Tenemos las siguientes consecuencias notables de las anteriores definiciones y propiedades, para subespacios de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ con $n = \dim \mathbb{P}(V)$:

- Dos subespacios proyectivos con relación de inclusión $K_1 \subset K_2$ satisfacen que $\dim K_1 \leq \dim K_2$ y que si $\dim K_1 = \dim K_2$ entonces $K_1 = K_2$. Esto es consecuencia de que la biyección en la fórmula 1 respeta las inclusiones y de que dos subespacios vectoriales con relación de inclusión son iguales si y sólo si tienen la misma dimensión.

- Por dos puntos distintos P_1, P_2 de $\mathbb{P}(V)$ pasa una única recta ℓ . Veamos que $\ell = \{P_1\} + \{P_2\}$ es la única recta que pasa por P_1 y P_2 . Para ver que ℓ es una recta, tenemos que ver que $\dim \ell = 1$. Esto se sigue de la fórmula de las dimensiones, dado que $\dim\{P_i\} = 0$, para $i = 1, 2$ y $\dim \emptyset = -1$, así tenemos

$$0 + 0 = \dim \ell - 1.$$

Supongamos ahora que ℓ' es otra recta con $P_1, P_2 \in \ell'$. Esto implica que $\ell = \{P_1\} + \{P_2\} \subset \ell'$ y como $\dim \ell = \dim \ell' = 1$, se tiene que $\ell' = \ell$.

- Sea K un subespacio proyectivo de dimensión d . Dado cualquier punto P del espacio proyectivo que no esté en K , el subespacio proyectivo $K + \{P\}$ tiene dimensión exactamente igual a $d+1$. Esto se sigue de la fórmula de las dimensiones.

- Dado un hiperplano proyectivo H y un subespacio proyectivo K de dimensión d , tal que $K \not\subset H$, se tiene que $\dim(H \cap K) = d - 1$. En efecto, como $K \not\subset H$ existe un punto $P \in K \setminus H$. Por consiguiente $H \neq H + K$ y por dimensionalidad $H + K = \mathbb{P}(V)$. La fórmula de las dimensiones dice que

$$n - 1 + d = n + \dim(H \cap K),$$

por tanto, tenemos que $\dim(H \cap K) = d - 1$.

- Dos hiperplanos proyectivos distintos H_1 y H_2 se cortan en el subespacio $H_1 \cap H_2$, que tiene dimensión $n - 2$. Es un caso especial de la observación anterior. En particular, dos rectas distintas de un plano proyectivo se cortan siempre en un punto. Así pues, no existe el paralelismo entre rectas del plano proyectivo.

- Si $n = 3$, existen rectas proyectivas que se cruzan, es decir, que no tienen ningún punto en común. Basta tomar una descomposición del espacio vectorial V como suma directa de dos subespacios vectoriales bidimensionales

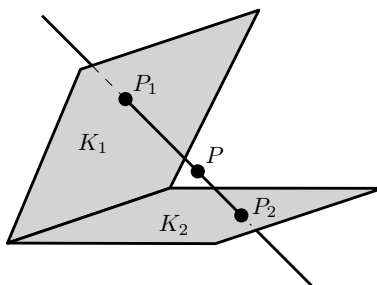
$$V = W_1 \oplus W_2.$$

Entonces $\ell_1 = \mathbb{P}(W_1)$ y $\ell_2 = \mathbb{P}(W_2)$ son dos rectas que se cruzan. Recordemos que un subespacio proyectivo $\mathbb{P}(W)$ de $\mathbb{P}(V)$ tiene intersección vacía con otro subespacio $\mathbb{P}(W')$ si y solamente si $W \cap W' = \{0\}$.

- Más generalmente y en cualquier dimensión ambiente $n = \dim \mathbb{P}(V)$, dos subespacios proyectivos $L_1 = \mathbb{P}(W_1)$ y $L_2 = \mathbb{P}(W_2)$ son *complementarios* si se tiene que $V = W_1 \oplus W_2$. Esto equivale a decir que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y la suma de las dimensiones de L_1 y L_2 es $n-1$. Razonando vía espacios vectoriales, todo subespacio proyectivo admite complementario.

- Una recta proyectiva tiene al menos tres puntos, ya que todo plano vectorial tiene tres vectores linealmente independientes dos a dos: los de coordenadas $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ en una base dada.

- Como consecuencia de la afirmación anterior, si tenemos dos subespacios proyectivos K_1 y K_2 distintos de $\mathbb{P}(V)$, existe al menos un punto $P \notin K_1 \cup K_2$. En efecto, podemos suponer que no hay relación de inclusión entre ellos y tomar $P_1 \in K_1 \setminus K_2$ y $P_2 \in K_2 \setminus K_1$; considerando ahora un tercer punto P en la recta $\ell = \{P_1\} + \{P_2\}$, se tiene que $P \notin K_1 \cup K_2$, ya que si, por ejemplo $P \in K_2$, tendríamos que $\ell = \{P\} + \{P_2\} \subset K_2$ y entonces $P_1 \in K_2$.



— — —

EJERCICIO 1. Sea k un cuerpo finito con r elementos. Calcúlese en función de n y r el número de elementos del espacio proyectivo \mathbb{P}_k^n . Más generalmente, si $0 \leq d \leq n$, calcúlese el número de subespacios de dimensión d de \mathbb{P}_k^n .

EJERCICIO 2. Descríbanse las rectas de \mathbb{P}_k^2 , donde $k = \mathbb{Z}/(2)$.

EJERCICIO 3. Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión 3. Consideremos dos rectas distintas r y s que se cortan en un punto P . Sean t y u otras dos rectas que se cruzan entre sí y también con r y s . Denotemos por T y U los puntos respectivos de corte de t y u con $r + s$. Supongamos que P , U y T no están alineados. Demuéstrese que existen exactamente dos rectas que cortan simultáneamente r, s, t y u .

EJERCICIO 4. (Difícil) Sea k un cuerpo de característica cero. Dadas cuatro rectas distintas de \mathbb{P}_k^3 que se cruzan dos a dos, pruébese que existen exactamente dos rectas que cortan simultáneamente las cuatro anteriores.

EJERCICIO 5. Sea \mathcal{P} un conjunto no vacío cuyos elementos llamaremos “puntos” y sea \mathcal{L} un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de \mathcal{P} , que llamaremos “rectas”, de forma que se cumplan los siguientes axiomas:

- A1. Dados dos puntos distintos, existe una única recta que los contiene.
- A2. Cada recta contiene al menos tres puntos.
- A3. Existen al menos tres puntos no alineados.
- A4. Dos rectas tienen siempre un punto común.

Demuéstrese que se cumplen las siguientes propiedades:

- 1. Existen tres rectas cuya intersección es vacía.
- 2. Dado un punto, existe una recta que no lo contiene.
- 3. Dada una recta, existe un punto que no está en ella.
- 4. Por cada punto pasan al menos tres rectas.
- 5. Dadas dos rectas cualesquiera, existe una biyección entre ellas.
- 6. Dados dos puntos, existe una biyección entre el conjunto de rectas que pasan por uno y el conjunto de rectas que pasan por el otro.
- 7. Si una recta tiene exactamente $d + 1$ puntos, entonces \mathcal{P} tiene $d^2 + d + 1$ puntos y hay $d^2 + d + 1$ rectas.
- 8. Hay al menos siete puntos y, si hay más, son al menos trece.

Demuéstrese que todo plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ cumple los cuatro axiomas anteriores.

2. Proyectividades y perspectividades

Las proyectividades son las transformaciones naturales entre espacios proyectivos, que vienen asociadas a isomorfismos de espacios vectoriales. Por otro lado, las perspectividades hacen referencia a las operaciones geométricas de proyección y sección.

2.1. Proyectividades. Consideremos dos espacios proyectivos $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$. Una *proyectividad* $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ de $\mathbb{P}(V)$ en $\mathbb{P}(V')$ es una aplicación para la cual existe un isomorfismo vectorial $\phi : V \rightarrow V'$ con la propiedad de que

$$\Phi(\mathbb{P}(L(v))) = \mathbb{P}(\phi(L(v))), \text{ para todo } v \in V \setminus \{0\}.$$

Escribiremos $\Phi = \Phi_\phi$. Nótese que $\phi(L(v)) = L(\phi(v))$.

PROPOSICIÓN 2. *Se tiene que $\Phi_\phi = \Phi_{\phi'}$ si y solamente si existe un escalar $\lambda \in k$, con $\lambda \neq 0$, tal que $\phi' = \lambda\phi$.*

Demostración: Es evidente que si $\phi' = \lambda\phi$ entonces $\Phi_\phi = \Phi_{\phi'}$. Recíprocamente, supongamos que $\Phi_\phi = \Phi_{\phi'}$. Para cada $v \in V$, con $v \neq 0$, tenemos que

$$L(\phi(v)) = L(\phi'(v)),$$

por tanto existe $\lambda_v \neq 0$ tal que $\phi'(v) = \lambda_v\phi(v)$. Basta ver que λ_v no depende de v . Sean $v, v' \in V$ no nulos, queremos ver que $\lambda_v = \lambda_{v'}$. Si $v' = \mu v$, tenemos

$$\begin{aligned}\phi'(v') &= \lambda_{v'}\phi(v') = \lambda_{v'}\mu\phi(v) \\ \phi'(v') &= \phi'(\mu v) = \mu\phi'(v) = \mu\lambda_v\phi(v).\end{aligned}$$

Se concluye que $\lambda_v = \lambda_{v'}$. Supongamos ahora que v y v' son linealmente independientes y por tanto, lo son también $\phi(v)$ y $\phi(v')$; tenemos

$$\begin{aligned}\phi'(v + v') &= \lambda_{v+v'}\phi(v + v') = \lambda_{v+v'}(\phi(v) + \phi(v')) = \lambda_{v+v'}\phi(v) + \lambda_{v+v'}\phi(v'). \\ \phi'(v + v') &= \phi'(v) + \phi'(v') = \lambda_v\phi(v) + \lambda_{v'}\phi(v').\end{aligned}$$

Se concluye que $\lambda_v = \lambda_{v+v'} = \lambda_{v'}$. CQD.

Dos proyectividades $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ y $\Phi' : \mathbb{P}(V') \rightarrow \mathbb{P}(V'')$ se pueden componer para obtener la proyectividad

$$\Phi' \circ \Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V'').$$

Más aún, son invertibles y se tiene que $\Phi_\phi^{-1} = \Phi_{\phi^{-1}}$. En particular, el conjunto de las proyectividades de $\mathbb{P}(V)$ en sí mismo es un subgrupo (no abeliano en general) del grupo de las biyecciones de $\mathbb{P}(V)$ en sí mismo.

Toda proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ define un isomorfismo entre los retículos de subespacios proyectivos, dado por $K \mapsto \Phi(K)$. Es decir, es una biyección entre los conjuntos de subespacios que conserva la relación de inclusión. Como consecuencia, se conserva la dimensión, la imagen de la intersección de subespacios proyectivos es la intersección de las imágenes y la imagen de la suma es la suma de las imágenes. Además dado $S \subset \mathbb{P}(V)$, se tiene que

$$\Phi(\text{LProj}(S)) = \text{LProj}(\Phi(S)).$$

Las proyectividades se restringen a subespacios de manera evidente, a partir de la restricción a subespacios vectoriales (sobre la imagen) de los isomorfismos vectoriales.

2.2. Perspectividades por un punto. Consideremos un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensión $n \geq 1$. Fijemos un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ y un hiperplano H tal que $P \notin H$. Denotemos por $\text{Rad}(P; \mathbb{P}(V))$ el conjunto de las rectas ℓ de $\mathbb{P}(V)$ tales que $P \in \ell$ (“Rad” por “radiación”). Tenemos biyecciones inversas una de otra

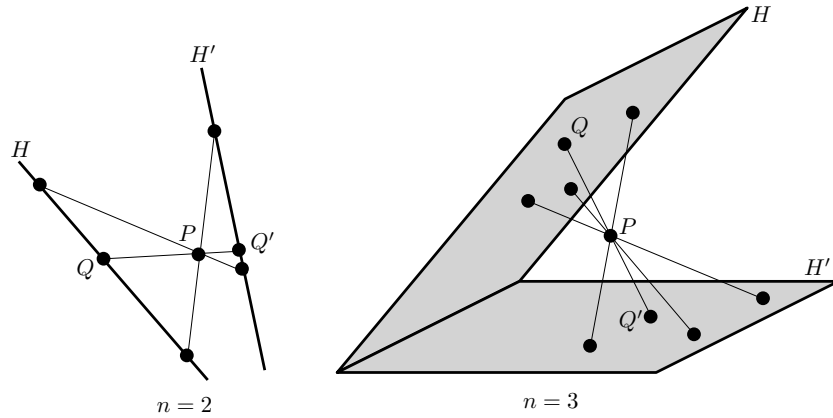
$$\begin{aligned}\text{pr}_{H,P} &: H \rightarrow \text{Rad}(P; \mathbb{P}(V)), \\ \text{sec}_{H,P} &: \text{Rad}(P; \mathbb{P}(V)) \rightarrow H,\end{aligned}$$

definidas por $Q \mapsto \ell = \{P\} + \{Q\}$ y por $\ell \mapsto \ell \cap H$; estas biyecciones se llamarán *proyección* y *sección* respectivamente.

Dado otro hiperplano H' con $P \notin H'$, definiremos la *perspectividad* $H \bar{\wedge}_P H'$ de centro P entre H y H' por la composición

$$H \bar{\wedge}_P H' = \text{sec}_{H',P} \circ \text{pr}_{H,P} : H \rightarrow H'.$$

Es una biyección entre H y H' que, como veremos, de hecho es también una proyectividad entre H y H' .



Demos una interpretación algebraica de las construcciones anteriores.

Recordemos que, por definición, el punto P es una recta vectorial de V . Para facilitar la comprensión, usaremos una notación doble; así, escribiremos

$$L_P \subset V$$

para denotar la recta vectorial y simplemente $P \in \mathbb{P}(V)$ para denotar el punto. Asimismo, si $L \subset V$ es una recta vectorial de V , interpretaremos indistintamente $\mathbb{P}(L)$ como el punto correspondiente a L en $\mathbb{P}(V)$ y también como el subespacio 0-dimensional de $\mathbb{P}(V)$ formado por dicho punto (el contexto indicará la interpretación acertada). Recordemos asimismo que toda recta proyectiva ℓ de $\mathbb{P}(V)$ es de la forma $\ell = \mathbb{P}(U)$, donde $U \subset V$ es un subespacio vectorial de dimensión dos. Además, tenemos que

$$P \in \ell \Leftrightarrow L_P \subset U.$$

Supongamos ahora que H y H' son hiperplanos de $\mathbb{P}(V)$ tales que

$$P \notin H \cup H'.$$

Esto equivale a decir que $H = \mathbb{P}(W)$ y que $H' = \mathbb{P}(W')$, donde W y W' son hiperplanos vectoriales de V tales que

$$\{0\} = W \cap L_P = W' \cap L_P.$$

En particular, tenemos sendas expresiones de V como suma directa interna

$$V = L_P \oplus W = L_P \oplus W'.$$

Consideremos el espacio vectorial cociente V/L_P . Recuérdese que los elementos de V/L_P son los subconjuntos de V de la forma

$$v + L_P = \{v + w; \quad w \in L_P\}; \quad v \in V,$$

que definen una partición de V y que se suman y multiplican de acuerdo con las reglas

$$(v_1 + L_P) + (v_2 + L_P) = (v_1 + v_2) + L_P; \quad \lambda(v + L_P) = \lambda v + L_P.$$

Tenemos la aplicación lineal suprayectiva y canónica entre espacios vectoriales

$$c: V \rightarrow V/L_P; \quad c(v) = v + L_P.$$

Nótese que $c^{-1}(v + L_P) = v + L_P$ (atención a la notación). Dado un subespacio vectorial $U \subset V$ de dimensión dos con $L_P \subset U$, la imagen $c(U) \subset V/L_P$ es un subespacio vectorial de dimensión uno y además $c^{-1}(c(U)) = U$. Recíprocamente, dada una recta vectorial \bar{U} de V/L_P , se tiene que $U = c^{-1}(\bar{U})$ es un subespacio vectorial de V de dimensión dos tal que $L_P \subset U$. De este modo, tenemos identificaciones naturales

$$\begin{aligned} \text{Rad}(P; \mathbb{P}(V)) &\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \{ \text{subespacios vectoriales } U \subset V \text{ de dimensión dos con } L_P \subset U \} \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \{ \text{subespacios vectoriales } \bar{U} \subset V/L_P \text{ de dimensión uno} \} = \mathbb{P}(V/L_P). \end{aligned}$$

Así pues, podemos decir que $\text{Rad}(P; \mathbb{P}(V)) = \mathbb{P}(V/L_P)$.

Por otro lado, dado que $V = W \oplus L_P$, vemos que la aplicación canónica c induce isomorfismos de espacios vectoriales

$$\psi_W : W \rightarrow V/L_P, \quad \psi_W^{-1} : V/L_P \rightarrow W,$$

que representan las proyecciones y secciones respectivamente en el sentido de que

$$\begin{aligned} \text{pr}_{H,P}(Q) &= \mathbb{P}(\psi_W(L_Q)) \in \mathbb{P}(V/L_P), \text{ para todo } Q \in H, \\ \text{Sec}_{H,P}(\mathbb{P}(\bar{U})) &= \mathbb{P}(\psi_W^{-1}(\bar{U})) \in H, \text{ para todo } \mathbb{P}(\bar{U}) \in \mathbb{P}(V/L_P). \end{aligned}$$

Nótese que dado un subespacio vectorial $\bar{T} \subset V/L_P$ tenemos que

$$\psi_W^{-1}(\bar{T}) = W \cap c^{-1}(\bar{T}).$$

En particular, si $U \supset L_P$ y $\bar{U} = c(U)$, se tiene $\psi_W^{-1}(\bar{U}) = U \cap W$. De lo dicho anteriormente, se sigue que el isomorfismo

$$\psi_{W,W'} = \psi_{W'}^{-1} \circ \psi_W : W \rightarrow W'$$

está dado por $w \mapsto w'$, donde $\{w'\} = W' \cap (w + L_P)$. En particular, la perspectividad

$$H \bar{\lambda}_P H' : H \rightarrow H'$$

coincide con la proyectividad $\Phi_{\psi_{W,W'}}$.

Más adelante veremos que toda proyectividad entre dos hiperplanos proyectivos es composición de perspectividades.

2.3. Perspectividades. Lo desarrollado en el apartado anterior se extiende sin problemas a la definición de perspectividad

$$K \bar{\lambda}_C K' : K \rightarrow K'$$

entre dos subespacios proyectivos K, K' de la misma dimensión, con centro en un subespacio proyectivo C de dimensión $\dim C = \dim V - \dim K - 1$ tal que $C \cap K = C \cap K' = \emptyset$.

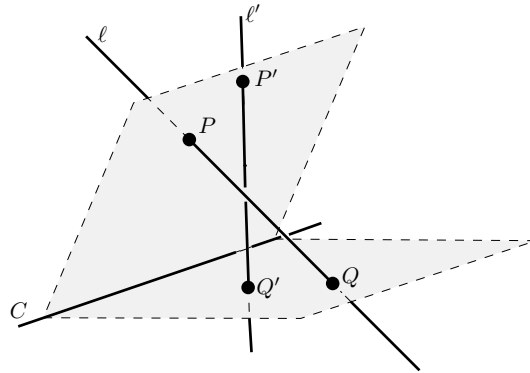
Más concretamente, definimos en primer lugar la radiación $\text{Rad}(C; \mathbb{P}(V))$ de centro C como el conjunto de los subespacios proyectivos de dimensión $\dim C + 1$ que contienen C . Esto permite definir las correspondientes proyección y sección

$$\begin{aligned} \text{pr}_{K,C} &: K \rightarrow \text{Rad}(C; \mathbb{P}(V)), \\ \text{sec}_{K',C} &: \text{Rad}(C; \mathbb{P}(V)) \rightarrow K' \end{aligned}$$

exactamente como para el caso de que C sea un punto. La perspectividad se define por

$$K \bar{\lambda}_C K' = \text{sec}_{K',C} \circ \text{pr}_{K,C}.$$

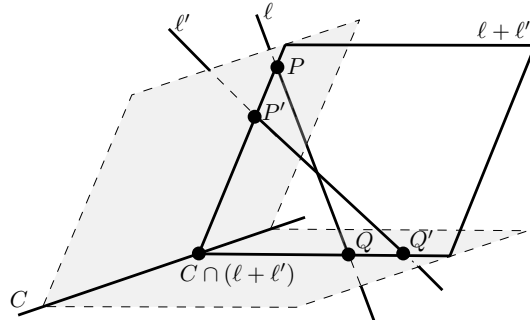
Es una proyectividad entre K y K' , como en el caso anterior.



Consideremos el espacio proyectivo $K + K' \subset \mathbb{P}(V)$ como un nuevo “espacio ambiente”, en el que tenemos el subespacio $C \cap (K + K')$. En este contexto, la perspectividad $K \bar{\wedge}_C K'$ en el espacio ambiente $\mathbb{P}(V)$ coincide con la perspectividad

$$K \bar{\wedge}_{C \cap (K + K')} K'$$

considerada en $K + K'$.



2.4. Abundancia de subespacios. Ya sabemos que una recta proyectiva tiene al menos tres puntos. El siguiente enunciado, útil para muchos argumentos, generaliza la observación anterior:

PROPOSICIÓN 3. *Sea K un subespacio de $\mathbb{P}(V)$ y supongamos que se tienen dos puntos $P, P' \in \mathbb{P}(V) \setminus K$. Existe un hiperplano $H \subset \mathbb{P}(V)$ tal que $K \subset H$ y que no contiene ninguno de los puntos P, P' .*

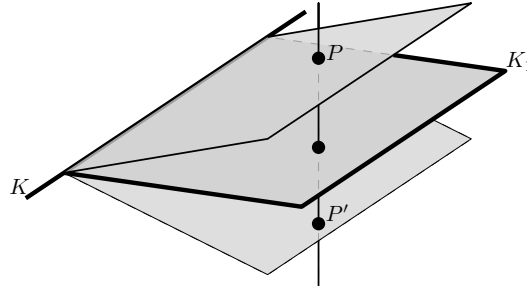
Demostración: Si K es un hiperplano, se toma $H = K$. Supongamos que $\dim K \leq n - 2$, donde $n = \dim \mathbb{P}(V)$. Veamos que existe un subespacio K_1 de dimensión

$$\dim K_1 = \dim K + 1$$

tal que $K \subset K_1$ y con $P \notin K_1, P' \notin K_1$. Comenzando de nuevo con K_1 , en un número finito de pasos alcanzamos el hiperplano H buscado. Si $K = \mathbb{P}(W)$, basta tomar

$$K_1 \in \text{Rad}(K; \mathbb{P}(V)) = \mathbb{P}(V/W),$$

de modo que $K_1 \neq K + P$ y $K_1 \neq K + P'$, lo cual es posible pues todo espacio proyectivo de dimensión positiva tiene al menos tres puntos. CQD.



— — —

EJERCICIO 6. Consideremos un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensión tres sobre un cuerpo infinito. Sean r y s dos rectas que se cruzan y $\alpha : r \rightarrow r$, $\beta : s \rightarrow s$ sendas proyectividades. Probar que existen infinitas proyectividades $\psi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ tales que $\psi|_r = \alpha$ y $\psi|_s = \beta$.

EJERCICIO 7. Sea $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ una proyectividad, con $\Phi = \Phi_\phi$. Pruébese que un punto $P = L(v)$ es invariante para Φ si y solamente si v es un vector propio de ϕ . Más generalmente, un subespacio proyectivo $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ es invariante para Φ si y solamente si $\phi(W) = W$. Calcúlense los puntos y rectas invariantes de la proyectividad

$$\Phi = \Phi_\phi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2,$$

donde $\phi(1, 0, 0) = (2, 0, -2)$, $\phi(0, 1, 0) = (1, 1, -1)$ y $\phi(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.

EJERCICIO 8. Probar que si una proyectividad en un espacio proyectivo tiene un hiperplano invariante y dos puntos fijos fuera de dicho hiperplano entonces tiene una recta de puntos fijos.

EJERCICIO 9. Dar un ejemplo de una proyectividad de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ en sí mismo que no tenga ningún punto fijo. Demuéstrese que esto no ocurre para $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ (todo polinomio de grado impar tiene una raíz en \mathbb{R}).

EJERCICIO 10. Se dice que una proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ es una *homología* si existe un hiperplano $H \subset \mathbb{P}(V)$ de puntos invariantes, que se llama *eje de la homología*. Consideremos una homología Φ distinta de la identidad y supongamos que $\dim \mathbb{P}(V) \geq 2$. Se pide probar que:

1. El eje de Φ es único.
2. Existe un único punto O , que se llama *centro de la homología*, definido por la propiedad de que $O \in P + \Phi(P)$, para cualquier punto P no invariante.
3. Si S es un subespacio que pasa por el centro, entonces S es invariante y Φ induce una homología de S .
4. Los únicos puntos invariantes de Φ son el centro y los del eje.

EJERCICIO 11. Sean $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo y L_1, L_2 subespacios proyectivos disjuntos de la misma dimensión. Pruébese que toda proyectividad $\Phi : L_1 \rightarrow L_2$ es una perspectividad.

3. Referencias proyectivas y coordenadas homogéneas

Consideramos un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensión $n \geq 0$.

Dada una familia finita $\mathcal{F} = \{P_0, P_1, \dots, P_d\}$ de $\mathbb{P}(V)$ de $d+1$ puntos, sabemos que la dimensión del subespacio que generan es menor o igual que d . Esto es

$$\dim \text{LProj}(\mathcal{F}) \leq d.$$

En el caso de que $\dim \text{LProj}(\mathcal{F}) = d$ diremos que \mathcal{F} es una *familia de $d+1$ puntos proyectivamente independientes*. Decimos que una familia

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; U\}$$

de $n+2$ puntos es una *referencia proyectiva* si y solamente si cualquier subfamilia de $n+1$ puntos es una subfamilia de $n+1$ puntos proyectivamente independientes. En este caso, el último punto U de la familia se llamará *punto unidad de la referencia*. La importancia de las referencias proyectivas queda reflejada en los siguientes resultados.

OBSERVACIÓN 1. En las definiciones anteriores se ha cometido cierto “abuso de lenguaje” en aras de la praxis habitual. Si deseamos expresarnos con total precisión, hay que distinguir entre “familia” y “conjunto”. Una familia de d elementos de un conjunto A es una aplicación $f : I \rightarrow A$, donde el conjunto de índices I tiene exactamente d elementos; una subfamilia es la restricción $f|_J$ de f a un subconjunto $J \subset I$. La aplicación f no necesariamente tiene que ser inyectiva, así podemos tener una familia de d elementos donde la imagen $f(I)$ tiene menos de d elementos. Una familia de $d+1$ puntos independientes es siempre inyectiva, pero se pueden imaginar familias de $d+1$ puntos dos de los cuales sean iguales. Esta misma observación es válida respecto a familias libres o ligadas de vectores en un espacio vectorial.

DEFINICIÓN 2. Decimos que una base vectorial $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ de V está asociada a una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; U\}$ de $\mathbb{P}(V)$ si y sólo si se cumple la propiedad

$$P_i = L(e_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n; \quad U = L(e_0 + e_1 + \dots + e_n).$$

Dada una base $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ del espacio vectorial V y un escalar $\mu \neq 0$, denotamos por $\mu\beta$ la base $\mu\beta = \{\mu e_0, \mu e_1, \dots, \mu e_n\}$. El siguiente resultado justifica esta notación y la definición anterior:

LEMA 1. Dada una referencia proyectiva \mathcal{R} de $\mathbb{P}(V)$ existe al menos una base β de V asociada a \mathcal{R} . Si $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ es una base de V asociada a \mathcal{R} y $\beta' = \{e'_0, e'_1, \dots, e'_n\}$ es otra base de V , entonces β' está asociada a \mathcal{R} si y sólo si existe un escalar $\mu \in k \setminus \{0\}$ tal que $\beta' = \mu\beta$.

Demostración: Elijamos una familia $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ de V tal que $L(f_i) = P_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Como $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ es una familia de $n+1$ puntos proyectivamente independientes, necesariamente $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ genera todo el espacio vectorial V y dado que $\dim_k V = n+1$, se trata de una base. Ahora seleccionemos coeficientes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que

$$U = L(\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n).$$

Como la familia $\{P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n; U\}$ es proyectivamente independiente, se concluye que $\lambda_i \neq 0$, para cada $i = 0, 1, \dots, n$. Hagamos $e_i = \lambda_i f_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$; la base $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ así obtenida está asociada a \mathcal{R} .

Sea β' otra base asociada a \mathcal{R} , como $L(e'_i) = P_i = L(e_i)$, existen $\mu_i \neq 0$ tales que $e'_i = \mu_i e_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$. Como además

$$L(e'_0 + e'_1 + \dots + e'_n) = U = L(e_0 + e_1 + \dots + e_n),$$

existe otro escalar $\mu \neq 0$ de modo que

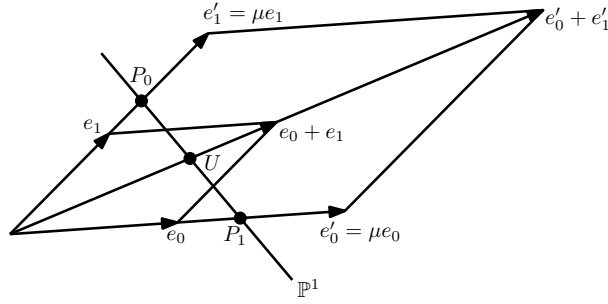
$$e'_0 + e'_1 + \dots + e'_n = \mu(e_0 + e_1 + \dots + e_n).$$

De modo equivalente, se tiene que

$$(\mu_0 - \mu)e_0 + (\mu_1 - \mu)e_1 + \dots + (\mu_n - \mu)e_n = 0$$

y por lo tanto $\mu_i = \mu$ para cada $i = 0, 1, \dots, n$, dado que β es una base.

Recíprocamente, si $e'_i = \mu e_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$, vemos directamente que β' está asociada a \mathcal{R} . CQD.



Consideremos una proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$. Dada una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; U\}$ de $\mathbb{P}(V)$, su imagen $\Phi(\mathcal{R})$, definida por

$$\Phi(\mathcal{R}) = \{\Phi(P_0), \Phi(P_1), \dots, \Phi(P_n); \Phi(U)\},$$

es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(V')$. Más aún, si $\Phi = \Phi_\phi$, donde $\phi : V \rightarrow V'$ es un isomorfismo vectorial y β es una base de V asociada a \mathcal{R} , entonces la imagen $\phi(\beta)$ de β por ϕ es una base de V' asociada a $\Phi(\mathcal{R})$ (estas comprobaciones se dejan al lector). Ahora podemos enunciar el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 4. Sean $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$ dos espacios proyectivos de la misma dimensión y dos referencias proyectivas \mathcal{R} y \mathcal{R}' de $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$, respectivamente. Existe una única proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ tal que $\Phi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$.

Demostración: Escribamos

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; U\} \text{ y } \mathcal{R}' = \{P'_0, P'_1, \dots, P'_n; U'\}$$

y seleccionemos bases $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ y $\beta' = \{e'_0, e'_1, \dots, e'_n\}$ de V y V' , asociadas respectivamente a \mathcal{R} y \mathcal{R}' . Existe un isomorfismo vectorial $\phi : V \rightarrow V'$ tal que $\phi(e_i) = e'_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. La proyectividad $\Phi = \Phi_\phi$ cumple que $\Phi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$.

Probemos la unicidad. Supongamos que tenemos otra proyectividad

$$\Phi' : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V'),$$

tal que $\Phi'(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$. Sea $\phi' : V \rightarrow V'$ un isomorfismo vectorial tal que $\Phi' = \Phi_{\phi'}$. La base $\alpha' = \phi'(\beta)$ está asociada a \mathcal{R}' . Por el lema 1, existe un escalar $\mu \neq 0$ tal

que $\alpha' = \mu\beta'$. Por consiguiente $\phi' = \mu\phi$. En virtud de la proposición 2, se concluye que $\Phi' = \Phi_{\mu\phi} = \Phi_\phi = \Phi$. CQD.

3.1. Coordenadas homogéneas. La asignación de coordenadas, una vez fijada una base de un espacio vectorial V de dimensión $n + 1$, identifica V con el producto cartesiano k^{n+1} del cuerpo de escalares k . Se trata de un espacio vectorial “modelo” muy particular, cuyos elementos son $n + 1$ -uplas de escalares. La existencia de proyecciones lineales $k^{n+1} \rightarrow k$ sobre cada factor, nos permite “aislar” una coordenada particular de un vector dado. En el caso de los espacios proyectivos n -dimensionales, las referencias proyectivas también nos permitirán identificarlos con el espacio $\mathbb{P}(k^{n+1})$, que llamaremos *espacio proyectivo n -dimensional de coordenadas homogéneas*; no obstante, no existen proyecciones similares al caso vectorial y por consiguiente, no tiene sentido aislar una sola coordenada homogénea de un punto.

En diferentes contextos se usan las notaciones \mathbb{P}_k^n y $k\mathbb{P}(n)$, esta última sobre todo para los casos real y complejo. Así tenemos

$$\mathbb{P}(k^{n+1}) = \mathbb{P}_k^n; \quad \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{C}\mathbb{P}(n) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n; \quad \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}\mathbb{P}(n) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n.$$

Un punto de \mathbb{P}_k^n es la recta vectorial de k^{n+1} generada por una $(n + 1)$ -upla

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \in k^{n+1}$$

que no tenga todos sus coeficientes cero. Tal punto será denotado indistintamente como $L((x_0, x_1, \dots, x_n))$, o bien $[x_0, x_1, \dots, x_n]$, o bien $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, es decir, tenemos las notaciones equivalentes

$$L((x_0, x_1, \dots, x_n)) = [x_0, x_1, \dots, x_n] = (x_0 : x_1 : \dots : x_n).$$

Tomando la notación central, observemos que $[x_0, x_1, \dots, x_n] = [x'_0, x'_1, \dots, x'_n]$ si y sólo si existe $\mu \in k \setminus \{0\}$ con $(x'_0, x'_1, \dots, x'_n) = \mu(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

La *referencia proyectiva estándar* \mathcal{S}^n de \mathbb{P}_k^n se define por

$$\mathcal{S}^n = \{L(\mathbf{e}_0), L(\mathbf{e}_1), \dots, L(\mathbf{e}_n^{n+1}); L(\mathbf{u})\},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ \mathbf{e}_1 &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\dots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \\ \mathbf{u} &= (1, 1, \dots, 1, 1). \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; U\}$ una referencia proyectiva del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$. Sabemos que existe una única proyectividad

$$\Psi_{\mathcal{R}} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}_k^n$$

tal que $\Psi_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) = \mathcal{S}^n$. La proyectividad $\Psi_{\mathcal{R}}$ se llama *aplicación de coordenadas homogéneas en la referencia \mathcal{R}* , o simplemente *aplicación de coordenadas*. Para cada $P \in \mathbb{P}(V)$, el punto $\Psi_{\mathcal{R}}(P) \in \mathbb{P}_k^n$ recibe el nombre de *punto de coordenadas homogéneas de P en la referencia \mathcal{R}* .

Supongamos que $P = L(v)$ y que el vector v se escribe $v = \sum_{i=0}^n a_i e_i$, donde $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ es una base de V asociada a la referencia \mathcal{R} . Entonces, tenemos que

$$\Psi_{\mathcal{R}}(P) = [a_0, a_1, \dots, a_n].$$

Diremos que la $(n+1)$ -upla $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in k^{n+1}$ es un *vector de coordenadas homogéneas para P en la referencia \mathcal{R}* . Así, tenemos que una $(n+1)$ -upla $(a'_0, a'_1, \dots, a'_n)$ es un vector de coordenadas homogéneas para P en la referencia \mathcal{R} si y sólo si existe un escalar $\mu \neq 0$ tal que

$$(a'_0, a'_1, \dots, a'_n) = (\mu a_0, \mu a_1, \dots, \mu a_n).$$

Mucha atención: la coordenada homogénea de P que ocupa el lugar i *no está definida*. En efecto, lo único que tiene sentido es decir si es cero o distinta de cero, ya que si a_i es el coeficiente del lugar i para un vector de coordenadas homogéneas de P , tenemos que μa_i también será el coeficiente del lugar i para otro vector de coordenadas homogéneas de P , para cada escalar $\mu \in k \setminus \{0\}$.

OBSERVACIÓN 2. (Compatibilidad de la aplicación de coordenadas con las proyectividades). Supongamos que $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ es una proyectividad y sea \mathcal{R} una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(V)$. Denotemos por \mathcal{R}' la imagen. Las aplicaciones de coordenadas

$$\Psi_{\mathcal{R}} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}_k^n, \quad \Psi_{\mathcal{R}'} : \mathbb{P}(V') \rightarrow \mathbb{P}_k^n$$

cumplen que $\Psi_{\mathcal{R}} = \Psi_{\mathcal{R}'} \circ \Phi$ (la imagen de la referencia \mathcal{R} es la misma).

Consideremos dos referencias proyectivas \mathcal{R} y \mathcal{R}' en $\mathbb{P}(V)$. La *aplicación de cambio de coordenadas homogéneas de \mathcal{R} a \mathcal{R}'* es la proyectividad $\Psi_{\mathcal{R}, \mathcal{R}'}$ definida por

$$\Psi_{\mathcal{R}, \mathcal{R}'} = \Psi_{\mathcal{R}'} \circ \Psi_{\mathcal{R}}^{-1} : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n.$$

Cumple, por definición, la propiedad siguiente. Si $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ es el punto de coordenadas homogéneas de $P \in \mathbb{P}(V)$ en la referencia \mathcal{R} , entonces

$$[b_0, b_1, \dots, b_n] = \Psi_{\mathcal{R}, \mathcal{R}'}([a_0, a_1, \dots, a_n])$$

es el punto de coordenadas homogéneas de P en la referencia \mathcal{R}' .

Recordemos que, en virtud de la proposición 2, toda proyectividad $\Phi : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ tiene asociada una “recta de isomorfismos” vectoriales $\phi : k^{n+1} \rightarrow k^{n+1}$. Más aún todo isomorfismo vectorial $\phi : k^{n+1} \rightarrow k^{n+1}$ está representado por una matriz no singular $(n+1) \times (n+1)$, cuyas filas son las imágenes de los elementos $e_i \in k^{n+1}$ de la base estándar de k^{n+1} . Así, todo cambio de coordenadas homogéneas se asocia a una recta de matrices no singulares.

— — —

EJERCICIO 12. Sea $a : k \rightarrow k$ un automorfismo del cuerpo k , distinto de la identidad. Consideremos la aplicación $\Phi : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ definida por

$$\Phi([\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n]) = [a(\lambda_0), a(\lambda_1), \dots, a(\lambda_n)].$$

Demuéstrase que Φ es una biyección bien definida, diferente de la identidad, que deja fija la referencia proyectiva estándar \mathcal{S}_k^n y tal que para todo subespacio proyectivo $K \subset \mathbb{P}_k^n$, la imagen $\Phi(K)$ es un subespacio proyectivo de la misma dimensión que K .

EJERCICIO 13. Compruébese que $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, A_2; U\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ y encuéntrase una base asociada, donde

$$A_0 = L((1, -1, 2)), \quad A_1 = L((2, 1, 3)), \quad A_2 = L((2, 2, 6)), \quad U = L((1, 0, 2)).$$

EJERCICIO 14. Sea $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ una proyectividad donde $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ tal que existen tres puntos A, B y C no alineados de modo que $\Phi(A) = B$, $\Phi(B) = C$ y $\Phi(C) = A$. Pruébese que $\Phi^3 = \text{Id}$.

4. Proyectividades entre hiperplanos

En esta sección demostraremos que toda proyectividad entre dos hiperplanos H y H' de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensión $n \geq 2$ es composición de perspectividades.

Dado que una proyectividad está determinada por la imagen de una referencia proyectiva y que toda composición de perspectividades es una proyectividad, es suficiente probar el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 5. Sean H y H' dos hiperplanos de $\mathbb{P}(V)$ y consideremos referencias proyectivas \mathcal{R} y \mathcal{R}' de H y H' respectivamente. Existe una composición de perspectividades $\Phi : H \rightarrow H'$ tal que $\Phi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$.

Fijamos pues dos referencias

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}; U\}, \quad \mathcal{R}' = \{P'_0, P'_1, \dots, P'_{n-1}; U'\},$$

de H y H' respectivamente. Antes de probar la proposición, veremos dos lemas.

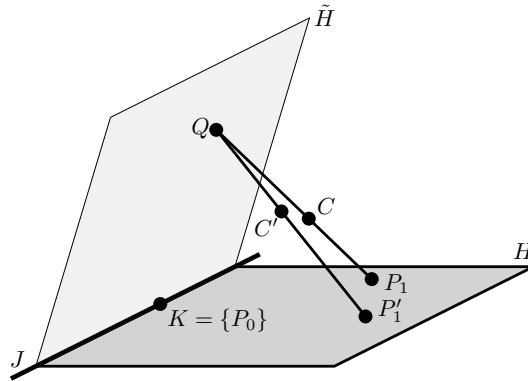
LEMA 2. Supongamos que $H = H'$ y que hay un índice $0 \leq m \leq n-1$ tal que $P'_i = P_i$ para $0 \leq i < m$ y $P'_m \neq P_m$. Entonces existe una composición de dos perspectividades $\Phi : H \rightarrow H$ tal que $\Phi(P_i) = P_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, m-1$ y además $\Phi(P_m) = P'_m$.

Demostración: Sea K el subespacio de $\mathbb{P}(V)$ generado por P_0, P_1, \dots, P_{m-1} . Sabemos que $K \subset H$ y $\dim K = m-1 < n-1$. Por otro lado $P_m \notin K$ y $P'_m \notin K$, dado que \mathcal{R} y \mathcal{R}' son referencias proyectivas. En virtud de la proposición 3, existe un hiperplano J de H (esto es, tenemos que $J \subset H$ y $\dim J = n-2$) tal que $K \subset J$ y ninguno de los puntos P_m, P'_m están en J . Ahora seleccionemos un hiperplano \tilde{H} de $\mathbb{P}(V)$ tal que $J = H \cap \tilde{H}$. Sea C un punto cualquiera con $C \notin H \cup \tilde{H}$ y sea $Q = \tilde{H} \cap (P_m + C)$. Elijamos ahora $C' \in (Q + P'_m) \setminus H \cup \tilde{H}$. La composición Φ de perspectividades dada por

$$\Phi = (\tilde{H} \bar{\wedge}_{C'} H) \circ (H \bar{\wedge}_C \tilde{H})$$

cumple con las propiedades requeridas.

CQD.



LEMA 3. *Supongamos que $H = H'$, que $P'_i = P_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$ y que existe un índice $i_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que P_{i_0} , U y U' están alineados. Entonces, existe una composición $\Phi : H \rightarrow H$ de dos perspectivas que cumple $\Phi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$.*

Demostración: Detallamos la prueba del caso $i_0 = 0$, los demás se tratan de la misma manera. Denotemos por K el subespacio

$$K = \text{LProj}(\{P_1, P_2, \dots, P_{n-1}\}) \subset H = H' \subset \mathbb{P}(V).$$

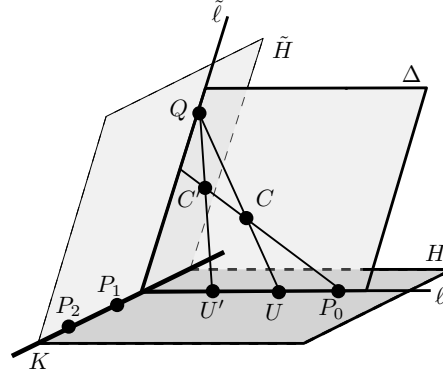
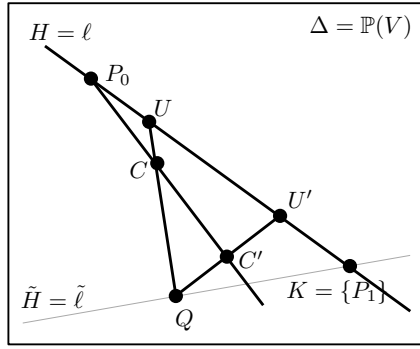
Sabemos que K tiene dimensión $n-2$. Además $P_0 \notin K$, $U \notin K$, $U' \notin K$. Sea \tilde{H} un hiperplano de $\mathbb{P}(V)$ tal que $\tilde{H} \cap H = K$. Consideremos la recta ℓ que contiene P_0 , U y U' , recordemos que $\ell \subset H$. Sea Δ un plano (dimensión dos) que contiene ℓ y no está contenido en H (por ejemplo, el plano generado por ℓ y un punto en $\tilde{H} \setminus K$). La intersección $\Delta \cap \tilde{H}$ es una recta $\tilde{\ell}$ que corta ℓ en exactamente un punto, pues son dos rectas coplanarias y distintas. Tomemos un punto cualquiera $C \in \Delta \setminus \ell \cup \tilde{\ell}$ (véase final de la Sección 1)

Ahora, sean Q el punto $(C + U) \cap \tilde{\ell}$ y C' el punto $(Q + U') \cap (P_0 + C)$. La composición de perspectivas

$$\Phi = (\tilde{H} \bar{\wedge}_{C'} H) \circ (H \bar{\wedge}_C \tilde{H})$$

cumple con las propiedades pedidas.

CQD.



Completaremos ahora la prueba de la proposición 5.

En primer lugar, observemos que basta considerar el caso en el cual $H = H'$. En efecto, si $H \neq H'$, podemos elegir una perspectiva cualquiera $\pi : H \rightarrow H'$. Tenemos que $\tilde{\mathcal{R}} = \pi(\mathcal{R})$ es una referencia en H' . Ahora, bastaría encontrar una composición de perspectivas $\tilde{\Phi} : H' \rightarrow H'$ tal que $\tilde{\Phi}(\tilde{\mathcal{R}}) = \mathcal{R}'$ ya que $\Phi = \tilde{\Phi} \circ \pi$ cumpliría con lo deseado. De esta manera, el problema se reduce al caso $H = H'$, propiedad que suponemos a partir de ahora.

Después de una aplicación reiterada del lema 2, podemos suponer que los primeros puntos de ambas referencias proyectivas son iguales, esto es, que se tiene

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}; U\}, \quad \mathcal{R}' = \{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}; U'\}.$$

Si $U' = U$ entonces $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ y hemos terminado. Si existe un índice $0 \leq i \leq n-1$ tal que P_i, U y U' están alineados, podemos aplicar el lema 3 y concluimos la prueba.

Dado un subconjunto $I \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$ con $I \neq \{0, 1, \dots, n-1\}$, denotemos por K_I el subespacio

$$K_I = U' + \sum_{i \in I} P_i = \text{LProj}(\{U'\} \cup \{P_i; i \in I\}).$$

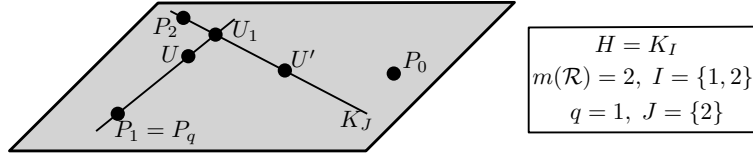
Decir que P_i, U y U' están alineados es lo mismo que decir que $U \in K_{\{i\}}$. Sabemos que $\dim K_I = \#I$, donde $\#I$ denota el número de elementos de I . En particular, si $\#I = n-1$ se tiene que $K_I = H$. Por otro lado si $I \subset I'$ tenemos $K_I \subset K_{I'}$.

Sea $m(\mathcal{R})$ el mínimo de los enteros $m \leq n-1$ para los cuales podemos encontrar un subconjunto $I \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$ con $\#I = m$ tal que $U \in K_I$.

Si $m(\mathcal{R}) \leq 1$ ya sabemos terminar. Trabajando por inducción sobre $m(\mathcal{R}) \geq 2$, es suficiente demostrar que existe una composición de perspectivas que deja fijos los $P_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ y transforma \mathcal{R} en \mathcal{R}_1 con $m(\mathcal{R}_1) < m(\mathcal{R})$.

Supongamos pues que $m(\mathcal{R}) \geq 2$. Elijamos $I_{\mathcal{R}}$ tal que $\#I_{\mathcal{R}} = m(\mathcal{R})$ y un índice $q \in I_{\mathcal{R}}$, que existe pues $\#I_{\mathcal{R}} \geq 2$. Denotemos $J = I_{\mathcal{R}} \setminus \{q\}$. Consideremos la recta $P_q + U$ y el punto U_1 dado por

$$U_1 = (P_q + U) \cap K_J.$$



Debemos comprobar dos cosas: en primer lugar que el punto U_1 está bien definido y en segundo lugar que se tiene una referencia proyectiva \mathcal{R}_1 dada por

$$\mathcal{R}_1 = \{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}; U_1\}.$$

Una vez comprobadas estas dos propiedades, dado que P_q, U y U_1 están alineados, podemos aplicar el lema 3, y “mover” U hasta U_1 . Como $U_1 \in K_J$, se tiene que $m(\mathcal{R}_1) < m(\mathcal{R})$, como queríamos ver.

Veamos que existe un único punto U_1 tal que $U_1 = (P_q + U) \cap K_J$. Dado que $U \notin K_J$, tenemos asegurada la unicidad de U_1 , ya que no puede ocurrir que la recta $P_q + U$ esté íntegramente contenida en K_J . Por otro lado $(P_q + U)$ es una recta de $K_{I_{\mathcal{R}}}$ y por tanto interseca K_J que es un hiperplano de $K_{I_{\mathcal{R}}}$.

Nos falta ver que \mathcal{R}_1 es una referencia proyectiva de H . Dado que ya sabemos que \mathcal{R} lo es, lo único que hay que comprobar es que para todo índice $0 \leq j \leq n-1$ tenemos que $L_j = H$, donde

$$L_j = P_0 + P_1 + \dots + P_{j-1} + U_1 + P_{j+1} + \dots + P_{n-1}.$$

Si $j \neq q$, tenemos que $U_1 + P_q = U + P_q \subset L_j$ y entonces

$$\begin{aligned}
L_j &= (P_q + U_1) + \sum_{i \in \{0,1,\dots,n-1\} \setminus \{q,j\}} P_i = (P_q + U) + \sum_{i \in \{0,1,\dots,n-1\} \setminus \{q,j\}} P_i = \\
&= U + \sum_{i \in \{0,1,\dots,n-1\} \setminus \{j\}} P_i = H.
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $j = q$. Veamos en primer lugar que se tiene

$$K_J = U_1 + \sum_{i \in J} P_i.$$

Sabemos que $U_1 + \sum_{i \in J} P_i \subset K_J$. Por un argumento de dimensionalidad, es suficiente probar que $U_1 \notin \sum_{i \in J} P_i$. Ahora bien, si $U_1 \in \sum_{i \in J} P_i$ tendríamos que

$$U \in (U + P_q) + \sum_{i \in J} P_i = (U_1 + P_q) + \sum_{i \in J} P_i = P_q + \sum_{i \in J} P_i = \sum_{i \in I_{\mathcal{R}}} P_i.$$

Esto implica que \mathcal{R} no es una referencia, absurdo. Escribamos

$$L_q = U_1 + \sum_{i \in J} P_i + \sum_{i \in \{0,1,\dots,n-1\} \setminus I_{\mathcal{R}}} P_i = K_J + \sum_{i \in \{0,1,\dots,n-1\} \setminus I_{\mathcal{R}}} P_i.$$

Recordando que $K_J = U' + \sum_{i \in J} P_i$, tenemos

$$L_q = U' + \sum_{i \in J} P_i + \sum_{i \in \{0,1,\dots,n-1\} \setminus I_{\mathcal{R}}} P_i = U' + \sum_{i \in \{0,1,\dots,n-1\} \setminus \{q\}} P_i = H.$$

Esto concluye la prueba de la proposición 5.

— — —

EJERCICIO 15. Búsqese un número $N \leq 4n - 2$ de modo que toda proyectividad $\Phi : H \rightarrow H$, donde H es un hiperplano de \mathbb{P}_k^n , se pueda poner como composición de no más de N perspectividades. Demuéstrese que si $k = \mathbb{C}$ y $n = 3$, se puede tomar $N = 8$.

EJERCICIO 16. Sean L y L' subespacios propios de $\mathbb{P}(V)$ de la misma dimensión r y $\Phi : L \rightarrow L'$ una proyectividad. Pruébese que Φ es una composición finita de perspectividades entre subespacios de $\mathbb{P}(V)$ de dimensión r .

5. Dualidad

Antes de entrar en los conceptos proyectivos de dualidad, efectuaremos un breve repaso de la dualidad en espacios vectoriales.

5.1. El espacio vectorial dual. Dado un k -espacio vectorial V , definimos el *espacio vectorial dual* V^* de V por

$$V^* = \text{Hom}_k(V, k).$$

Es decir, los elementos de V^* son aplicaciones lineales $\phi : V \rightarrow k$, donde en k tenemos la estructura natural de k -espacio vectorial inducida por su estructura de cuerpo. Estas aplicaciones lineales, con llegada en el cuerpo k , reciben el nombre de *formas lineales*. Así pues, los elementos de V^* son las formas lineales $\phi : V \rightarrow k$.

Las operaciones de suma y producto por un escalar en V^* son las correspondientes al “espacio de funciones” de V en k . Es decir,

$$(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v), \quad (\lambda\phi)(v) = \lambda(\phi(v)), \quad v \in V.$$

OBSERVACIÓN 3. El lector se podría preguntar qué diferencia hay entre V^* y $\text{Hom}_k(V, L)$, donde L es un k -espacio vectorial de dimensión 1. Son espacios vectoriales isomorfos; en efecto, una vez se ha fijado una base $\{e\}$ en L tenemos un isomorfismo dado por

$$\phi \in V^* \mapsto (v \mapsto \phi(v)e).$$

La principal diferencia es que las formas lineales se pueden multiplicar, aunque el resultado no es una forma lineal, sino cuadrática, como veremos más adelante.

5.2. Bases duales. Supongamos que V tiene dimensión finita $n + 1$ y consideremos una base $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ de V . Dado que toda aplicación lineal está definida por la imagen de los elementos de una base, podemos considerar formas lineales $e_i^* \in V^*$ definidas por la propiedad

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \in k \text{ (símbolo de Kronecker),}$$

recordamos que $\delta_{ii} = 1$ y que $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Veamos que la familia

$$\beta^* = \{e_0^*, e_1^*, \dots, e_n^*\}$$

es una base de V^* . Es un sistema de generadores, pues para cada $\phi \in V^*$ se tiene

$$\phi = \phi(e_1)e_1^* + \phi(e_2)e_2^* + \dots + \phi(e_n)e_n^*.$$

Por otro lado, son linealmente independientes, ya que si $0 = \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i^*$, tenemos

$$0 = \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i^* \right) (e_j) = \lambda_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Decimos que β^* es la *base dual* de β .

Una consecuencia muy notable de la construcción de la base dual es que si V tiene dimensión finita, entonces V^* tiene la misma dimensión que V .

OBSERVACIÓN 4. En el caso de que V tenga dimensión infinita, la dimensión de V^* es estrictamente mayor que la dimensión de V , por consiguiente, son espacios vectoriales no isomorfos. Este es un hecho muy relevante, por ejemplo en teoría de funciones. Para convencerse de ello, veamos una descripción precisa de V^* a partir de una base $\alpha = \{a_i\}_{i \in I}$ de V . El conjunto de índices I marca el “tamaño de la base”, esto es, la base α como conjunto es equipotente a I (recuérdese que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$). Denotemos por k^I el conjunto de las aplicaciones $I \rightarrow k$ y sea $k^{|I|}$ el subconjunto de k^I definido por

$$k^{|I|} = \{\sigma \in k^I, \text{ Sop}(\sigma) \text{ es finito}\},$$

donde $\text{Sop}(\sigma) = \{i \in I; \sigma(i) \neq 0\}$. El conjunto $k^{|I|}$ tiene estructura de espacio vectorial (las operaciones suma y producto por un escalar son las de las funciones) y $k^{|I|}$ es un subespacio vectorial de k^I . Tenemos el isomorfismo de coordenadas

$$\psi_\alpha : V \rightarrow k^{|I|}$$

definido por la propiedad $(\psi_\alpha(\sum_{i \in I} \lambda_i a_i))(i) = \lambda_i$ (la suma es finita, dicho de otro modo, todos los λ_i son nulos, excepto un número finito de ellos). La imagen por ψ_α de la base α es la base estándar $\beta = \{\mathbf{e}_i\}_{i \in I}$ de $k^{|I|}$, donde $\mathbf{e}_i(j) = \delta_{ij}$. Así, identificamos V con $k^{|I|}$ y por tanto, el dual V^* de V es asimismo isomorfo al dual de $k^{|I|}$. Consideremos la aplicación

$$\phi : k^I \rightarrow (k^{|I|})^*, \quad f \mapsto \phi(f),$$

donde $\phi(f)(\mathbf{e}_i) = f(i)$, para cada $i \in I$. Está bien definida, es lineal, inyectiva y sobre (dejamos la comprobación al lector). Por tanto, tenemos que ϕ es un isomorfismo que identifica k^I con el dual de $k^{|I|}$ y también con el dual de V , vía el isomorfismo ψ_α .

No es tan fácil dar explícitamente una base de k^I , pero podemos ver que k^I y $k^{|I|}$ no son isomorfos como espacios vectoriales cuando I es infinito y $k = \mathbb{Z}/(2)$. En este caso k^I es el conjunto de funciones características de I , también denotado 2^I , el cual, como sabemos, es equipotente con el conjunto de las partes de I ; por otro lado $k^{|I|}$ representa el conjunto de las partes finitas de I . Sabemos por teoría de conjuntos que 2^I no es equipotente con I (procedimiento diagonal de Cantor) y que, sin embargo, el conjunto de las partes finitas de I sí lo es. En consecuencia, los dos espacios vectoriales k^I y $k^{|I|}$ no tienen la misma dimensión, pues dos espacios vectoriales de la misma dimensión son equipotentes.

5.3. Traspuesta de una aplicación lineal. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre k -espacios vectoriales. La *aplicación traspuesta* $f^t : W^* \rightarrow V^*$ de f está definida por

$$f^t(w^*)(v) = w^*(f(v)), \quad w^* \in W^*, v \in V.$$

Obsérvese que esta definición es intrínseca y no depende de ninguna selección previa de bases en V, W . La aplicación traspuesta también es una aplicación lineal. Se cumple además que

$$(f \circ g)^t = g^t \circ f^t; \quad (id_V)^t = id_{V^*}.$$

OBSERVACIÓN 5. En el lenguaje de teoría de categorías, diremos que el paso de dualidad $V \rightarrow V^*$ define un *funtor contravariante*, dado que cumple con las propiedades anteriores. No desarrollaremos esta teoría aquí.

Si β_V y β_W son bases de V y W respectivamente, en la cuales la aplicación lineal f se expresa mediante la matriz M , entonces la aplicación traspuesta f^t se expresa mediante la matriz traspuesta M^t en las bases duales β_W^* y β_V^* .

5.4. La aplicación natural al bidual. Dado un espacio vectorial V existe una aplicación natural

$$V \rightarrow V^{**}; \quad v \mapsto v^{**},$$

definiendo $v^{**} : V^* \rightarrow k$ por $v^{**}(u^*) = u^*(v)$, para cada $u^* \in V^*$.

PROPOSICIÓN 6. *La aplicación natural $V \rightarrow V^{**}$ es inyectiva. En particular, es un isomorfismo cuando V tiene dimensión finita.*

Demostración: Supongamos que $v^{**} = 0$. Esto quiere decir que $u^*(v) = 0$, para todo $u^* \in V^*$; lo cual implica que $v = 0$. En efecto, si $v \neq 0$ forma parte de una base y podemos construir una forma lineal $u^* \in V^*$ tal que $u^*(v) = 1$. La segunda parte se sigue por razones dimensionales, ya que si $\dim_k V < \infty$ tenemos $\dim_k V = \dim_k V^* = \dim_k V^{**}$. CQD.

La identificación natural, en dimensión finita, entre V y V^{**} tiene una interpretación proyectiva que veremos enseguida.

5.5. Dualidad en espacios proyectivos. El *espacio proyectivo dual* $\mathbb{P}(V)^*$ de $\mathbb{P}(V)$ es el espacio de hiperplanos de $\mathbb{P}(V)$. Se identifica naturalmente con el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V^*)$ construido sobre el espacio vectorial dual V^* de V . La dualidad entre subespacios invierte la relación de inclusión y enriquece la visión geométrica del espacio proyectivo. Por ejemplo, un punto se verá de manera natural como la intersección de todos los hiperplanos que lo contienen, así como un hiperplano se ve como el conjunto de todos sus puntos. Detallemos estas ideas.

Sabemos que hay una identificación

$$\mathbb{P}(V)^* = \{ \text{hiperplanos de } \mathbb{P}(V) \} \leftrightarrow \{ \text{hiperplanos vectoriales de } V \}.$$

Deseamos identificar, si ello es posible, el conjunto de los hiperplanos vectoriales de V con un cierto espacio proyectivo. Dada una forma lineal no nula $\phi : V \rightarrow k$, sabemos que $\dim_k \text{Im}(\phi) = 1$. Por la fórmula de las dimensiones

$$\dim_k \text{Ker}(\phi) = \dim V - 1.$$

Dicho de otro modo, el núcleo de una forma lineal no nula es un hiperplano vectorial de V . Por otro lado, si W es un hiperplano vectorial de V , podemos completar una base β_W de W hasta una base $\beta = \{e\} \cup \beta_W$ de V y definir una forma lineal

$$\phi : V \rightarrow k$$

tal que $\phi(e) = 1$ y $\phi(w) = 0$ para cada $w \in \beta_W$; obtenemos que $W = \text{Ker}(\phi)$. Tenemos así una aplicación suprayectiva

$$V^* \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)^*; \quad \phi \mapsto \mathbb{P}(\text{Ker}(\phi)).$$

LEMA 4. *Dadas dos formas lineales no nulas $\phi_1, \phi_2 \in V^* \setminus \{0\}$, son equivalentes*

1. $\text{Ker}(\phi_2) = \text{Ker}(\phi_1)$.
2. *Existe un escalar $\lambda \in k \setminus \{0\}$ tal que $\phi_2 = \lambda\phi_1$.*

Demostración: Sea $W = \text{Ker}(\phi_1) = \text{Ker}(\phi_2)$. Ampliemos una base β_W de W hasta una base $\beta = \{e\} \cup \beta_W$ de V . Tenemos que $\phi_1(e) \neq 0 \neq \phi_2(e)$ y que

$$\phi_1(w) = \phi_2(w) = 0, \quad w \in \beta_W.$$

Se concluye que $\phi_2 = \lambda\phi_1$, donde $\lambda = \phi_2(e)/\phi_1(e)$. Recíprocamente, vemos que para todo $v \in V$ y $\lambda \neq 0$ con $\phi_2 = \lambda\phi_1$, se tiene

$$\phi_2(v) = \lambda\phi_1(v) = 0 \Leftrightarrow \phi_1(v) = 0$$

y por tanto $\text{Ker}(\phi_2) = \text{Ker}(\phi_1)$.

CQD.

Como consecuencia del lema y la discusión anterior, tenemos una identificación

$$\mathbb{P}(V)^* = \mathbb{P}(V^*),$$

pues sabemos que $\mathbb{P}(V^*)$ se ve como el cociente de $V^* \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia de proporcionalidad.

Veamos a continuación cómo afecta la dualidad a los subespacios. Dado un subconjunto $S \subset V$, consideremos el subconjunto S^\perp de V^* dado por

$$S^\perp = \{ \phi \in V^*; S \subset \text{Ker}(\phi) \}.$$

Es un subespacio vectorial de V^* , que llamaremos *ortogonal a S* .

OBSERVACIÓN 6. No se confunda este concepto con la ortogonalidad respecto de una forma cuadrática, que ocurre dentro del mismo espacio vectorial ambiente.

Es interesante analizar cómo se aplica la ortogonalidad al dual V^* de un espacio vectorial V de dimensión finita. Por una vez, demos nombre a la identificación natural $\nu : V \rightarrow V^{**}$. Consideremos un subespacio $L \subset V^*$, le podemos asociar el ortogonal $L^\perp \subset V^{**}$ que se identifica con $\nu^{-1}(L^\perp) \subset V$. Una verificación que dejamos al lector, muestra que

$$\nu^{-1}(L^\perp) = \bigcap_{\phi \in L} \text{Ker}(\phi).$$

Más aún, si $W \subset V$ es un subespacio de V , se tiene que $\nu(W) = W^{\perp\perp}$.

Resumiendo, se tienen las siguientes propiedades:

1. Para todo $S \subset V$, el ortogonal S^\perp es un subespacio vectorial de V^* .
2. Si $S_1 \subset S_2$, entonces $S_1^\perp \supset S_2^\perp$.
3. Si $S \subset V$ genera el subespacio vectorial W , entonces $S^\perp = W^\perp$.
4. Si $S \subset V$, el subespacio vectorial W generado por S cumple $W = S^{\perp\perp}$, bajo la identificación natural $V = V^{**}$ (estamos en dimensión finita). En particular $W = W^{\perp\perp}$.
5. Tenemos una biyección de *ortogonalidad*

$$\{\text{subespacios vectoriales de } V\} \rightarrow \{\text{subespacios vectoriales de } V^*\},$$

dada por $W \mapsto W^\perp$, que invierte la relación de inclusión. En particular, se tiene que $\dim_k W^\perp = \dim_k V - \dim_k W$.

En términos de subespacios proyectivos, se tienen biyecciones

$$\begin{array}{ccccc} \{\text{subesp. de } \mathbb{P}(V)\} & \rightarrow & \{\text{subesp. de } \mathbb{P}(V^*)\} & \rightarrow & \{\text{subesp. de } \mathbb{P}(V^{**})\} \\ \mathbb{P}(W) & \mapsto & \mathbb{P}(W^\perp) & \mapsto & \mathbb{P}(W^{\perp\perp}) = \mathbb{P}(W) \end{array}$$

Recuérdese que tenemos una identificación natural $V = V^{**}$ y, por tanto, una identificación $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V^{**})$ por una proyectividad natural. Dado un subespacio $K = \mathbb{P}(W)$, escribiremos $K^\perp = \mathbb{P}(W^\perp)$, con las consiguientes propiedades derivadas de las relativas a subespacios vectoriales. Es interesante interpretar geoméricamente alguno de los hechos anteriores:

- Dado un punto $P \in \mathbb{P}(V)$, consideremos el subespacio unipuntual $\{P\}$. Entonces $\{P\}^\perp$ es un hiperplano de $\mathbb{P}(V^*)$. Los elementos de $\{P\}^\perp$ son precisamente los hiperplanos H de $\mathbb{P}(V)$ tales que $P \in H$.
- Dado un subespacio proyectivo $K \subset \mathbb{P}(V)$, su ortogonal K^\perp está dado por la intersección

$$K^\perp = \bigcap_{P \in K} \{P\}^\perp.$$

Es decir, vemos el ortogonal K^\perp como intersección de hiperplanos de $\mathbb{P}(V^*)$.

- En el caso particular de que tengamos un hiperplano H de $\mathbb{P}(V)$, sabemos que H es un elemento de $\mathbb{P}(V)^* = \mathbb{P}(V^*)$ y por otro lado su ortogonal H^\perp es la intersección de los hiperplanos $\{P\}^\perp$ donde $P \in H$. Esta intersección es unipuntual y tenemos que

$$H^\perp = \bigcap_{P \in H} \{P\}^\perp = \{H\} \subset \mathbb{P}(V^*).$$

- La doble ortogonalidad presenta, de manera natural, un punto como la intersección de los hiperplanos que lo contienen. Veámos cómo:

Dado un punto $P \in \mathbb{P}(V)$, ya sabemos que $\{P\}^\perp$ es un hiperplano de $\mathbb{P}(V^*)$. Por tanto $\{\{P\}^\perp\}^\perp$ es un punto de $\mathbb{P}(V^{**})^* = \mathbb{P}(V^{**})$. Dada la

identificación natural $V = V^{**}$ el punto $\{P\}^\perp \in \mathbb{P}(V^{**})$ se identifica con P , es decir, podemos escribir $P = \{P\}^\perp$. Si hacemos el ortogonal, tenemos

$$(\{P\}^\perp)^\perp = \bigcap_{H \in \{P\}^\perp} \{H\}^\perp = \{\{P\}^\perp\}.$$

De nuevo, dentro de la identificación natural $V = V^{**}$, el ortogonal $\{H\}^\perp$ del subespacio unipuntual de $\mathbb{P}(V^*)$, cuyo único elemento es el hiperplano $H \subset \mathbb{P}(V)$, es un hiperplano de $\mathbb{P}(V^{**})$ que se identifica con el hiperplano $H \subset \mathbb{P}(V)$. Leyendo la fórmula anterior dentro exclusivamente de $\mathbb{P}(V)$ se traduce en que $\{P\}$ es la intersección de los hiperplanos que lo contienen.

NOTA 1. (Isomorfismos y anti-isomorfismos de retículos) En diversas ocasiones aparecerán estos conceptos, por lo que dedicamos unas líneas a explicarlos, sin detalles técnicos. Un *retículo*, para nosotros, es un par (A, \leq) formado por un conjunto A junto con una relación de orden parcial \leq en A , de modo que para cualquier subconjunto no vacío B de A existen dos elementos $\inf(B), \sup(B) \in A$ tales que

- $\inf(B) \leq b$ para todo $b \in B$ y si $a \leq b$ para todo $b \in B$, entonces $a \leq \inf(B)$.
- $\sup(B) \geq b$ para todo $b \in B$ y si $a \geq b$ para todo $b \in B$, entonces $a \geq \sup(B)$.

Un ejemplo típico de retículo es el de las partes $A = \mathcal{P}(E)$ de un conjunto E , donde la relación de orden es la relación de contención. Otro ejemplo es el conjunto de subespacios de un espacio vectorial V , con la relación de contención también; por cierto, es el mismo que el de los subespacios proyectivos de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$. En el primer ejemplo $\inf(B)$ y $\sup(B)$ están dados respetivamente por la intersección y por la unión de los elementos de B . En el segundo ejemplo $\inf(B)$ es la intersección y $\sup(B)$ la intersección de todos los subespacios que contienen a los de la familia B . Una característica importante del retículo de subespacios de un espacio vectorial V (no de todo tipo de retículos), es que la dimensión de un subespacio W de V es la máxima longitud d de cadenas estrictas (banderas) de subespacios

$$W = W_d \supset W_{d-1} \supset \cdots \supset W_1 \supset \{0\}.$$

Dados dos retículos (A, \leq) y (A', \leq') , diremos que una biyección $\phi : A \rightarrow A'$ es un *isomorfismo de retículos* si $a_1 \leq a_2$ implica que $\phi(a_1) \leq' \phi(a_2)$, para todos $a_1, a_2 \in A$; diremos que es un *antiisomorfismo de retículos*, si $a_1 \leq a_2$ implica que $\phi(a_1) \geq' \phi(a_2)$, para todos $a_1, a_2 \in A$. La composición de dos isomorfismos de retículos también es isomorfismo de retículos, la composición de un isomorfismo con un antiisomorfismo es un antiisomorfismo y la composición de dos antiisomorfismos es un isomorfismo. Por ejemplo, una aplicación lineal biyectiva $f : V \rightarrow V'$ de espacios vectoriales de dimensión finita induce un isomorfismo de los retículos de subespacios dado por

$$W \subset V \mapsto f(W) \subset V'.$$

La aplicación de dualidad $W \subset V \mapsto W^\perp \subset V^*$ es un antiisomorfismo entre el retículos de subespacios de V y el de subespacios de V^* . Como sabemos, si la componemos con la dualidad de V^* en V^{**} , obtenemos el isomorfismo de retículos asociado a la identificación natural $V \rightarrow V^{**}$.

Finalmente, muchas de las propiedades que hemos detallado antes son consecuencia inmediata de que se tienen los isomorfismos de retículos antedichos (se sugiere que el lector lo compruebe).

Las propiedades de la ortogonalidad, anti-isomorfismo de retículos de subespacios, permiten establecer enunciados en $\mathbb{P}(V)$ que tienen sus equivalentes en $\mathbb{P}(V^*)$ y recíprocamente, sin más que substituir subespacios por sus ortogonales e invertir las relaciones de inclusión.

Un primer ejemplo es la caracterización de referencia proyectiva de hiperplanos. Diremos que una lista de hiperplanos $\{H_0, H_1, \dots, H_n; H_U\}$ es una *referencia proyectiva de hiperplanos* si es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(V^*)$. Son equivalentes:

1. La lista $\{H_0, H_1, \dots, H_n; H_U\}$ es una referencia proyectiva de hiperplanos.
2. Tenemos que $H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_n = \emptyset$ y para cada índice $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ se tiene $H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_{j-1} \cap H_U \cap H_{j+1} \cap \dots \cap H_n = \emptyset$.

Otro ejemplo, clásicamente muy importante, es el de la configuración de Desargues y su enunciado dual.

Desargues: Consideremos un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y tres rectas distintas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 , concurrentes en un punto S . Elijamos dos puntos A_i, B_i , sobre la recta ℓ_i , para $i = 1, 2, 3$, distintos entre sí y diferentes de S . Entonces los puntos

$$\begin{aligned} P_1 &= (A_2 + A_3) \cap (B_2 + B_3), \\ P_2 &= (A_1 + A_3) \cap (B_1 + B_3), \\ P_3 &= (A_1 + A_2) \cap (B_1 + B_2) \end{aligned}$$

están alineados.

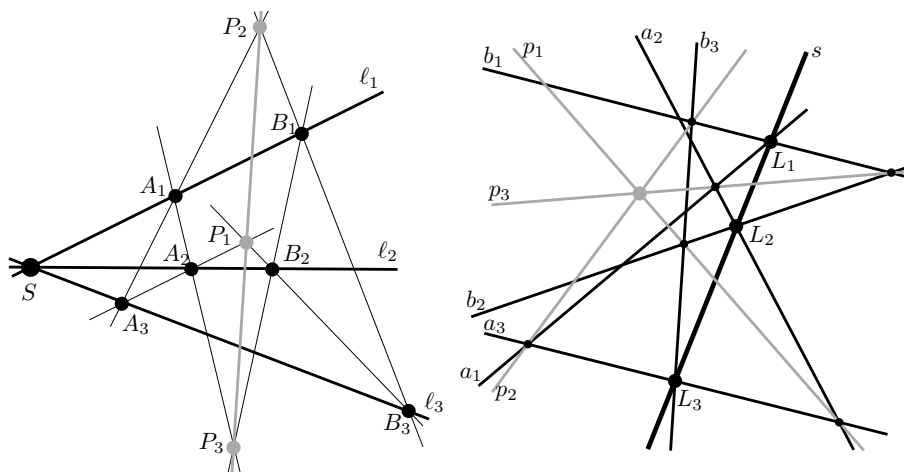
Dejamos al lector la tarea de verificar que este resultado es verdad en todo plano proyectivo.

El enunciado dual asimismo debe cumplirse en todo plano proyectivo:

Desargues dual: Consideremos un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y tres puntos distintos L_1, L_2, L_3 , alineados según una recta s . Elijamos dos rectas a_i, b_i , concurrentes en L_i , para $i = 1, 2, 3$, distintas entre sí y diferentes de s . Las rectas

$$\begin{aligned} p_1 &= (a_2 \cap a_3) + (b_2 \cap b_3), \\ p_2 &= (a_1 \cap a_3) + (b_1 \cap b_3), \\ p_3 &= (a_1 \cap a_2) + (b_1 \cap b_2) \end{aligned}$$

son concurrentes.



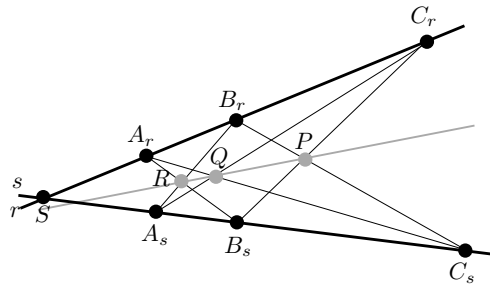
El enunciado de Pappus y su dual son también clásicos (aunque no podemos detenernos en ello, son esenciales para la estructura vectorial conmutativa de los espacios proyectivos que consideramos).

Pappus: Consideremos un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y dos rectas distintas r, s concurrentes en el punto S . Elijamos tres puntos distintos A_r, B_r, C_r , sobre la recta r y distintos de S , así como tres puntos distintos A_s, B_s, C_s , sobre s , también distintos de S . Los puntos P, Q y R dados por

$$\begin{aligned} P &= (B_r + C_s) \cap (B_s + C_r), \\ Q &= (A_r + C_s) \cap (A_s + C_r), \\ R &= (A_r + B_s) \cap (A_s + B_r) \end{aligned}$$

están alineados.

Se deja al lector el cuidado de establecer el enunciado dual del de Pappus, así como la comprobación de la veracidad de ambos (con uno es suficiente).



5.6. Referencia dual.

$$\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; U\}$$

de $\mathbb{P}(V)$. Sabemos que existe una “recta” de bases $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ de V asociadas a \mathcal{R} . La base dual $\beta^* = \{e_0^*, e_1^*, \dots, e_n^*\}$ de β da una base de V^* y por consiguiente una referencia proyectiva $\mathcal{R}^* = \{H_0, H_1, \dots, H_n; H_u\}$ de $\mathbb{P}(V^*)$. En las coordenadas homogéneas asociadas a la referencia \mathcal{R} , tenemos ecuaciones

$$H_i = (X_i = 0), \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad H_u = (X_0 + X_1 + \dots + X_n = 0).$$

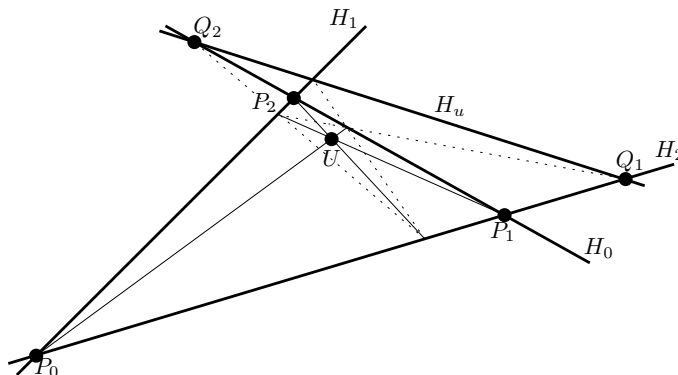
Vemos que $(X_i = 0)$ es el hiperplano generado por los puntos P_j con $j \neq i$, esto es

$$(X_i = 0) = P_0 + P_1 + \dots + P_{i-1} + P_{i+1} + \dots + P_n.$$

Sin embargo, es más delicado elegir un sistema de puntos generadores para H_u . Estos podrían ser los puntos Q_1, Q_2, \dots, Q_n de coordenadas

$$\begin{aligned} Q_1 &= [1, -1, 0, \dots, 0, 0] \\ Q_2 &= [0, 1, -1, \dots, 0, 0] \\ \dots &\dots \dots \\ Q_n &= [0, 0, 0, \dots, 1, -1] \end{aligned}$$

La “construcción” geométrica de este hiperplano tiene cierta relación con las cuaternas armónicas, que veremos a continuación.



— — —

EJERCICIO 17. Sea $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ una proyectividad y $\Phi^t : \mathbb{P}(V')^* \rightarrow \mathbb{P}(V)^*$ la proyectividad traspuesta. Dados K y K' subespacios proyectivos de $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$ respectivamente, demuéstrase que $\Phi(K) = K'$ si y sólo si $\Phi^t(K'^\perp) = K^\perp$.

EJERCICIO 18. Se considera en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ el plano π que en la referencia estándar tiene la ecuación $X_0 - X_1 + 2X_2 - X_3 = 0$ y en dicho plano se consideran los puntos

$$A_0 = [1, 1, 2, 4], A_1 = [2, 1, 3, 7], A_2 = [1, 2, 0, -1], U = [1, 3, 1, 0].$$

Se pide:

1. Probar que $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, A_2; U\}$ es una referencia de π y dar una base asociada a la misma.
2. Hallar el punto de coordenadas homogéneas de $P = [1, 1, 1, 2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ en \mathcal{R} .
3. Dar una ecuación, en la referencia \mathcal{R} , de la recta intersección de π con el plano $X_0 - X_1 + 2X_2 = 0$.

EJERCICIO 19. Sea $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2; U\}$ una referencia de un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ sobre el cuerpo complejo. Consideremos la proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ que satisface las propiedades siguientes

$$\begin{aligned} \Phi(P_0 + P_2) &= P_0 + P_1, & \Phi(P_1 + U) &= P_1 + U, \\ \Phi(P_0 + P_1) &= P_2 + U, & \Phi(P_2 + U) &= P_0 + P_2. \end{aligned}$$

Se piden las coordenadas homogéneas de $\Phi(\mathcal{R})$ en la referencia \mathcal{R} . Demuéstrase que esta proyectividad tiene exactamente tres puntos fijos.

EJERCICIO 20. Consideremos tres puntos no alineados A, B y C en un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y las rectas $c = A + B$, $b = A + C$ y $a = B + C$. Sea ℓ una recta que no pasa por ninguno de los puntos A, B, C y denotemos $P = \ell \cap c$, $Q = \ell \cap a$, $R = \ell \cap b$. Sean $S = (P + C) \cap (A + Q)$, $R_0 = b \cap (B + S)$, $T = (B + R) \cap (P + C)$, $Q_0 = a \cap (A + T)$. Se pide probar que los puntos P, R_0 y Q_0 están alineados. Establézcase el enunciado dual.

EJERCICIO 21. Sea $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ una proyectividad, donde $\mathbb{P}(V)$ es un plano proyectivo. Pruébese que si Φ deja invariantes tres rectas distintas que pasan por un punto P , entonces deja invariante cada recta que pasa por P .

EJERCICIO 22. Sea $\mathbb{P}(V)$ un plano proyectivo sobre un cuerpo k . Llamamos *configuración de tipo* (r_α, s_β) a toda familia finita de r puntos y s rectas proyectivas tales que cada punto pertenece a exactamente α rectas de la familia y cada recta contiene exactamente β puntos de la familia. Se pide probar que:

1. Si existe una configuración (r_α, s_β) , entonces $\alpha r = \beta s$.
2. Si existe una configuración (r_α, s_β) , existe también una de tipo (s_β, r_α) (dual).
3. Si existe una configuración (r_3, r_3) , entonces $r \geq 7$.
4. Si k es infinito, para cada $r \in \mathbb{N}$ existe una configuración (r_α, s_β) que no tiene tres puntos alineados y que contiene las rectas que unen cada pareja de puntos de la configuración (*configuraciones completas*).
5. Existe la configuración $(7_3, 7_3)$ si y sólo si la característica de k es igual a 2 (*configuración de Fano*).
6. Si $k \neq \mathbb{Z}/(2)$, existen configuraciones $(10_3, 10_3)$ (Desargues) y $(9_3, 9_3)$ (Pappus).

EJERCICIO 23. Sean A_1, A_2, A_3 y A_4 puntos tres a tres no alineados de un plano proyectivo. Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, tomamos un punto $P_i \in (A_i + A_{i+1}) \setminus \{A_i, A_{i+1}\}$, donde ponemos $A_5 = A_1$. Demuéstrese que las rectas $P_1 + P_2, P_3 + P_4$ y $A_1 + A_3$ son concurrentes si y sólo si lo son $P_1 + P_4, P_3 + P_2$ y $A_2 + A_4$. Establézcase el enunciado dual.

EJERCICIO 24. Sean $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$, cuatro planos distintos de un espacio proyectivo de dimensión tres, tales que su intersección es un único punto. Para cada $1 \leq i < j \leq 4$, elijamos un punto P_{ij} de $\Delta_i \cap \Delta_j$, de modo que $\Delta_{ijk} = P_{ij} + P_{ik} + P_{jk}$ sea un plano para cada $1 \leq i < j < k \leq 4$. Pruébese que $\Delta_{234}, \Delta_{134}, \Delta_{124}$ y Δ_{123} son concurrentes y establézcase el enunciado dual.

6. Cuaternas armónicas. Razón doble

Las cuaternas armónicas responden a una configuración clásica de rectas y puntos en un plano proyectivo. El hecho de que cuatro puntos estén en cuaterna armónica se puede interpretar como la versión proyectiva del “punto medio” de un segmento o también, en otro orden, del punto opuesto a uno dado. En realidad las implicaciones de esta configuración son mucho más potentes y permiten recuperar todos los escalares racionales del cuerpo base. En esta breve sección daremos una somera introducción a este tipo de resultados.

6.1. El cuadrivértice completo y las cuaternas armónicas. Situémonos en un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$, es decir $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ y fijemos cuatro puntos

$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$$

tres a tres no alineados. Forman una referencia proyectiva, pero no tenemos interés en insistir en ello por el momento. Consideremos las seis rectas

$$\ell_{12}, \ell_{34}, \ell_{13}, \ell_{24}, \ell_{14}, \ell_{23}$$

que unen dos a dos los puntos Q_i , donde denotamos $\ell_{ij} = Q_i + Q_j$. Consideremos asimismo los puntos

$$R_2 = \ell_{12} \cap \ell_{34}, \quad R_3 = \ell_{13} \cap \ell_{24}, \quad R_4 = \ell_{14} \cap \ell_{23}.$$

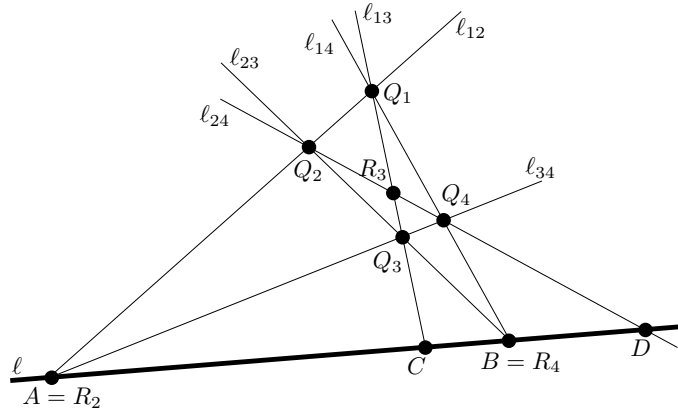
Nótese que los puntos donde se cortan pares de rectas ℓ_{ij} son precisamente los Q_s , $s = 1, 2, 3, 4$ y los R_t , $t = 2, 3, 4$. La familia \mathcal{C} dada por

$$(2) \quad \mathcal{C} = \{\{Q_s\}_{s=1}^4; \{\ell_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 4}; \{R_t\}_{t=2}^4\}$$

recibe el nombre de *cuadrivértice completo de base los puntos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4* .

DEFINICIÓN 3. Dada una recta ℓ del plano $\mathbb{P}(V)$ y una lista de cuatro puntos A, B, C, D en ℓ , diremos que A, B, C, D forman una cuaterna armónica si existe un cuadrivértice completo \mathcal{C} como en la ecuación 2 tal que

$$A = R_2, \quad B = R_4, \quad C = \ell \cap \ell_{13}, \quad D = \ell \cap \ell_{24}.$$



Consideremos una proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ y un cuadrivértice completo \mathcal{C} como en la ecuación 2. La imagen \mathcal{C}' de \mathcal{C} por Φ dada por

$$\mathcal{C}' = \{ \{ \Phi(Q_s) \}_{s=1}^4; \{ \Phi(\ell_{ij}) \}_{1 \leq i < j \leq 4}; \{ \Phi(R_t) \}_{t=2}^4 \}$$

es un cuadrivértice completo de base $\Phi(Q_1), \Phi(Q_2), \Phi(Q_3), \Phi(Q_4)$ en $\mathbb{P}(V')$. Como consecuencia, si A, B, C, D forman una cuaterna armónica en $\mathbb{P}(V)$, las imágenes $\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(D)$ también forman cuaterna armónica en $\mathbb{P}(V')$.

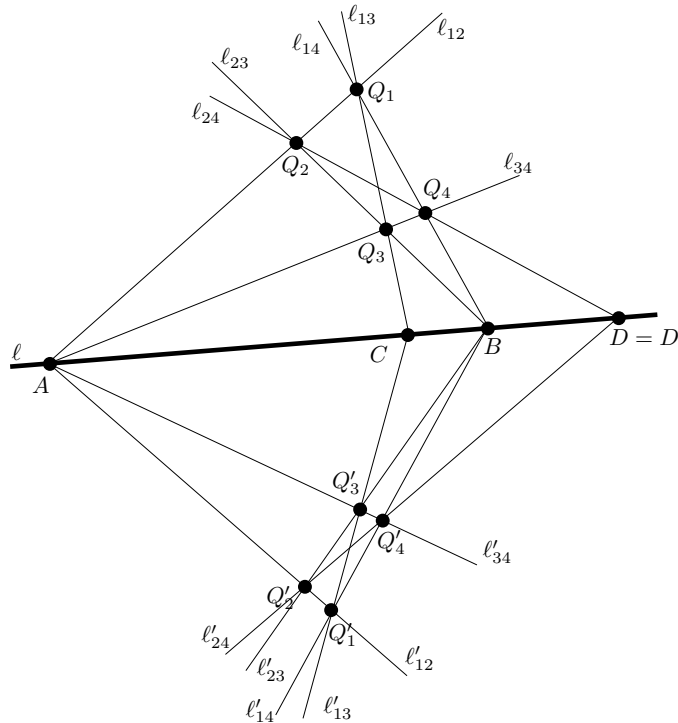
Dados tres puntos alineados y distintos dos a dos A, B, C de $\mathbb{P}(V)$, llamamos *cuarto armónico de A, B, C* a todo punto $D \in \mathbb{P}(V)$ tal que A, B, C, D formen una cuaterna armónica.

PROPOSICIÓN 7. *Dados tres puntos alineados y distintos dos a dos A, B, C de $\mathbb{P}(V)$, el cuarto armónico D de A, B, C existe y es único.*

Demostración: Sea ℓ la recta que une A, B y C . Existen dos rectas ℓ_{12}, ℓ_{34} distintas que pasan por A y distintas de ℓ (recuérdese que por cada punto pasan al menos tres rectas distintas). Asimismo, existe una recta ℓ_{13} que pasa por C y es diferente de ℓ . En particular ℓ_{13} es distinta de cualquiera de las rectas ℓ_{12}, ℓ_{34} . Denotemos $Q_1 = \ell_{13} \cap \ell_{12}$ y $Q_3 = \ell_{13} \cap \ell_{34}$. Los puntos Q_1 y Q_3 son distintos entre sí y ninguno de ellos está situado en ℓ . Ahora, consideremos las rectas $\ell_{14} = Q_1 + B$, $\ell_{23} = Q_3 + B$. De nuevo estas son dos rectas distintas entre sí y distintas de ℓ . Escribamos $Q_2 = \ell_{12} \cap \ell_{23}$ y $Q_4 = \ell_{14} \cap \ell_{34}$. Finalmente sea $\ell_{24} = Q_2 + Q_4$. Hemos construido un cuadrivértice completo y basta tomar $D = \ell_{24} \cap \ell$. Esto prueba la existencia del cuarto armónico.

Para probar la unicidad, supongamos que existen dos cuartos armónicos D, D' para A, B, C asociados a sendos cuadrivértices completos \mathcal{C} y \mathcal{C}' . Existe una única proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ que envía la referencia Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 en Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4 . Esta envía C en C' . En particular $\Phi(A) = A, \Phi(B) = B, \Phi(C) = C$ y $\Phi(D) = D'$. Como la recta ℓ es invariante induce una proyectividad $\ell \rightarrow \ell$ que debe ser la identidad, ya que fija la referencia A, B, C . Por tanto $\Phi(D) = D' = D$.

CQD.



6.2. Cuaternas armónicas y perspectividades. Continuamos considerando un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ como espacio ambiente. En esta sección haremos algunas consideraciones geométricas con un estilo “sintético”, a modo de ejemplo. Hemos querido mantenerla para presentar argumentos en la línea del proceso histórico de la geometría proyectiva, a pesar de que el tratamiento con coordenadas de los enunciados conduce más rápidamente a los resultados.

Comencemos probando que las perspectividades entre rectas conservan las cuaternas armónicas.

PROPOSICIÓN 8. *Consideremos dos rectas ℓ, ℓ' en un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y una perspectividad $\ell \bar{\wedge}_L \ell'$ entre ellas. Entonces*

1. *Existe una proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ tal que $\Phi(\ell) = \ell'$ y cuya restricción $\ell \rightarrow \ell'$ coincide con la perspectividad $\ell \bar{\wedge}_L \ell'$*
2. *Si A, B, C, D forman una cuaterna armónica en ℓ , entonces sus imágenes A', B', C', D' por la perspectividad forman una cuaterna armónica en ℓ' .*

Demostración: La afirmación (2) es consecuencia de (1), ya que entonces tenemos que $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$, $C' = \Phi(C)$ y $D' = \Phi(D)$ y sabemos que toda proyectividad del plano conserva las cuaternas armónicas.

Probemos la afirmación (1). Elijamos dos puntos distintos $P, Q \in \ell$ y distintos de E , donde $E = \ell \cap \ell'$. Tenemos que $\{E, P; Q\}$ forman una referencia proyectiva de ℓ . Sean P' y Q' dados por

$$P' = (P + L) \cap \ell' = (\ell \bar{\wedge}_L \ell')(P); \quad Q' = (Q + L) \cap \ell' = (\ell \bar{\wedge}_L \ell')(Q).$$

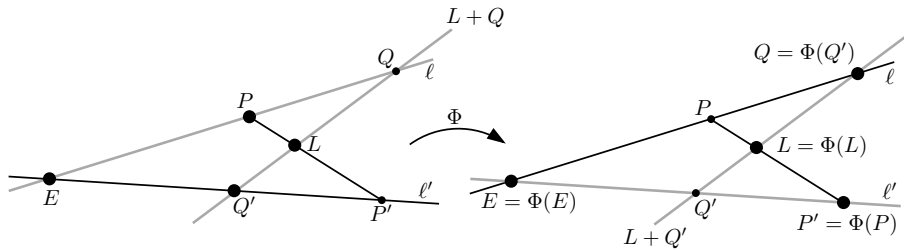
También tenemos que $\{E, P'; Q'\}$ forman una referencia proyectiva de ℓ' . Entonces, la perspectividad $\ell \bar{\wedge}_L \ell'$ es la única proyectividad $\ell \rightarrow \ell'$ que envía la referencia $\{E, P; Q\}$ en $\{E, P'; Q'\}$. Consideremos las referencias proyectivas del plano proyectivo dadas por

$$\mathcal{R}_1 = \{E, P, Q'; L\}, \quad \mathcal{R}_2 = \{E, P', Q; L\}.$$

La proyectividad Φ que envía \mathcal{R}_1 en \mathcal{R}_2 cumple con los requerimientos deseados. Es decir $\Phi(\ell) = \ell'$ y la restricción $\ell \rightarrow \ell'$ de Φ envía $\{E, P; Q\}$ en $\{E, P'; Q'\}$ y por consiguiente coincide con la perspectividad $\ell \bar{\wedge}_L \ell'$. En efecto, para ver que $\Phi(Q) = Q'$, observamos que

$$\Phi(Q + L) = Q' + L = Q + L,$$

por consiguiente $\Phi(Q) = \Phi(\ell \cap (Q + L)) = \ell' \cap (Q + L) = Q'$. CQD.



COROLARIO 1. *Consideremos dos rectas ℓ, ℓ' del plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y una proyectividad $\ell \rightarrow \ell'$ entre ellas. Si A, B, C, D forman una cuaterna armónica en ℓ , entonces sus imágenes A', B', C', D' por la proyectividad forman una cuaterna armónica en ℓ' .*

Demostración: Toda proyectividad entre hiperplanos (por ejemplo entre rectas de un plano proyectivo) es composición de perspectividades. CQD.

Veamos ahora de qué modo se puede alterar el orden de los puntos A, B, C, D en una cuaterna armónica de forma que se continúe teniendo una cuaterna armónica.

Dada la definición, alterando el orden en los puntos de un cuadrivértice completo del plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$, obtenemos

1. Si A, B, C, D forman una cuaterna armónica, entonces B, A, C, D también forman una cuaterna armónica.
2. Si A, B, C, D forman una cuaterna armónica, entonces A, B, D, C también forman una cuaterna armónica.

Así pues, si A, B, C, D forman una cuaterna armónica, tenemos al menos cuatro cuaternas armónicas

$$A, B, C, D; \quad B, A, C, D; \quad A, B, D, C; \quad B, A, D, C$$

de entre las posibles permutaciones de A, B, C, D , que son un total de 24.

Todavía podemos obtener otro conjunto de cuatro permutaciones si probamos que C, D, A, B también forman una cuaterna armónica. En la prueba de este resultado utilizaremos la configuración dual de la configuración de Desargues.

PROPOSICIÓN 9. Si A, B, C, D forman una cuaterna armónica del plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$, entonces C, D, A, B también forman una cuaterna armónica.

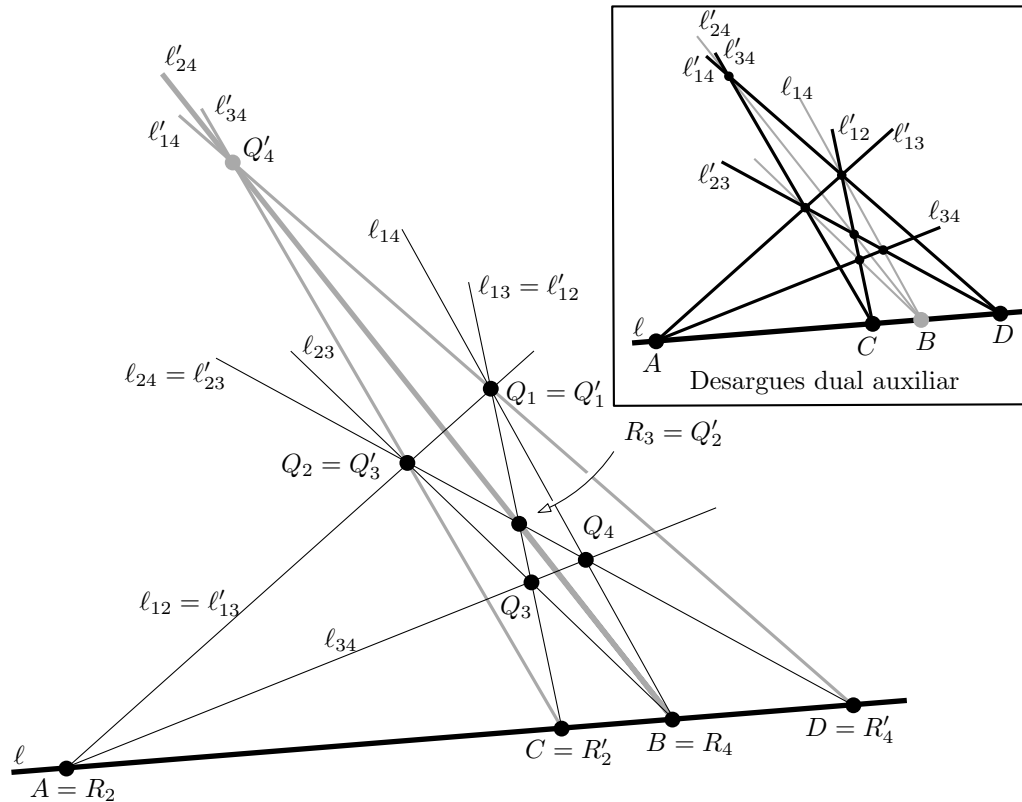
Demostración: Sea \mathcal{C} un cuadrivértice completo que soporte la cuaterna armónica A, B, C, D . Esto es

$$\mathcal{C} = \{\{Q_s\}_{s=1}^4; \{\ell_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 4}; \{R_t\}_{t=2}^4\}$$

donde $A = R_2$, $B = R_4$, $C = \ell \cap \ell_{13}$ y $D = \ell \cap \ell_{24}$.

Queremos encontrar un cuadrivértice completo \mathcal{C}' que sirva para construir la cuaterna armónica C, D, A, B . Denotemos $Q'_1 = Q_1$, $Q'_3 = Q_2$, entonces $\ell'_{13} = \ell_{12}$ es una recta que pasa por A . Sean $\ell'_{12} = C + Q'_1 = \ell_{13}$ y $\ell'_{34} = C + Q'_3$. Sean $\ell'_{23} = D + Q'_3 = \ell_{24}$ y $\ell'_{14} = D + Q'_1$. Ahora denotamos $Q'_2 = \ell'_{12} \cap \ell'_{23} = R_3$ y $Q'_4 = \ell'_{14} \cap \ell'_{34}$. Si podemos ver que $\ell'_{24} = Q'_2 + Q'_4$ pasa por B hemos terminado.

Aplicamos el enunciado dual de Desargues a los tres puntos alineados A, C, D por los que pasan los pares de rectas (ℓ'_{13}, ℓ_{34}) , (ℓ_{34}, ℓ'_{12}) y (ℓ'_{14}, ℓ'_{23}) respectivamente. Se concluye que las rectas ℓ_{14} , ℓ_{23} y ℓ'_{24} son concurrentes, necesariamente en el punto B . Esto concluye la prueba. CQD.



Así pues, si A, B, C, D forman una cuaterna armónica, tenemos la ocho cuaternas armónicas siguientes:

$$\begin{array}{cccc} A, B, C, D & B, A, C, D & A, B, D, C & B, A, D, C \\ C, D, A, B & C, D, B, A & D, C, A, B & D, C, B, A. \end{array}$$

6.3. Razón doble de cuatro puntos en una recta proyectiva. Consideremos una recta proyectiva $\mathbb{P}(V)$ y cuatro puntos en ella A, B, C y D tales que los tres primeros sean distintos entre sí. Esta última condición equivale a que $\{A, B, C\}$ sea una referencia proyectiva en $\mathbb{P}(V)$. Así pues, tenemos la aplicación de coordenadas homogéneas

$$\Phi_{\{A, B, C\}} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(k^2),$$

donde $\Phi_{\{A, B, C\}}(D) = [\lambda_0, \lambda_1] \in \mathbb{P}(k^2)$.

Por definición, la *razón doble* $[A, B : C, D] \in k \cup \{\infty\}$ de los cuatro puntos A, B, C, D es el cociente

$$[A, B : C, D] = \lambda_1 / \lambda_0$$

obtenido a partir del punto de coordenadas homogéneas de D en la referencia $\{A, B, C\}$ (por convención $[A, B : C, D] = \infty$ en el caso $\lambda_0 = 0$, es decir si $D = B$).

OBSERVACIÓN 7. La razón doble es invariante por cualquier proyectividad. Concretamente, si $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ es una proyectividad entre dos rectas proyectivas, entonces

$$[A, B : C, D] = [\Phi(A), \Phi(B) : \Phi(C), \Phi(D)].$$

Esto es consecuencia de la compatibilidad de la aplicación de coordenadas con la proyectividad Φ .

Las cuaternas armónicas están determinadas por la razón doble como sigue:

PROPOSICIÓN 10. *Consideremos un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$, una recta ℓ en él y cuatro puntos A, B, C, D en ℓ donde A, B, C son distintos entre sí. Son equivalentes*

1. *Los puntos A, B, C, D forman una cuaterna armónica.*
2. $[A, B : C, D] = -1$.

Demostración: Veamos que (1) implica (2). Consideremos un cuadrivértice completo \mathcal{C} que soporte la cuaterna armónica A, B, C, D . Esto es

$$\mathcal{C} = \{\{Q_s\}_{s=1}^4; \{\ell_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 4}; \{R_t\}_{t=2}^4\},$$

donde $A = R_2$, $B = R_4$, $C = \ell \cap \ell_{13}$ y $D = \ell \cap \ell_{24}$. Ahora consideremos la referencia proyectiva dada por

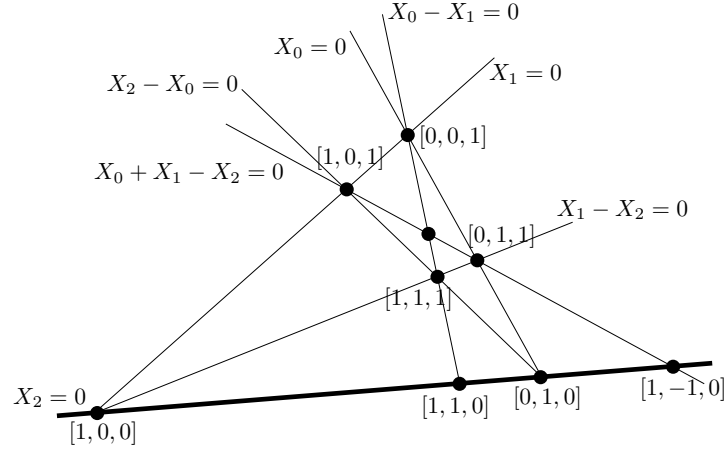
$$\mathcal{R} = \{A, B, Q_1; Q_3\}.$$

Las coordenadas homogéneas de A, B, C, D en esta referencia son:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{R}}(A) &= [1, 0, 0] \\ \Phi_{\mathcal{R}}(B) &= [0, 1, 0] \\ \Phi_{\mathcal{R}}(C) &= [1, 1, 0] \\ \Phi_{\mathcal{R}}(D) &= [1, -1, 0]. \end{aligned}$$

De aquí se concluye que el punto de coordenadas homogéneas de D en la referencia $\{A, B, C\}$ es $[1, -1]$ y por consiguiente $[A, B : C, D] = -1$.

Recíprocamente, dado que el cuarto armónico es único y que también lo es el punto D tal que $\Phi_{\{A, B, C\}}(D) = [1, -1]$, se concluye que coinciden. CQD.



De esta manera, podemos ampliar el concepto de cuaterna armónica a cualquier espacio proyectivo ambiente que no sea necesariamente un plano. Así, diremos que cuatro puntos alineados A, B, C, D en un espacio proyectivo forman una cuaterna armónica si y sólo si su razón doble es igual a -1 , esto es $[A, B : C, D] = -1$.

La razón doble de cuatro puntos alineados es invariante por cualquier proyectividad, sin más que acudir al isomorfismo vectorial correspondiente. Dejamos al lector la comprobación de este hecho. En particular, las cuaternas armónicas se aplican en cuaternas armónicas por la acción de una proyectividad.

OBSERVACIÓN 8. La denominación “razón doble” adquirirá pleno significado cuando analicemos la relación entre el espacio afín y el espacio proyectivo.

6.4. Cálculo de la razón doble. Vamos a dar una fórmula explícita para la razón doble $\lambda = [A, B : C, D]$ de cuatro puntos A, B, C, D de $\mathbb{P}(k^2)$ tales que A, B, C son distintos entre sí. Supongamos que

$$A = [\alpha_1, \beta_1]; B = [\alpha_2, \beta_2]; C = [\alpha_3, \beta_3]; D = [\alpha_4, \beta_4].$$

Si encontramos $\mu_0, \mu_1, \lambda_0, \lambda_1$ tales que

$$\begin{aligned} (\alpha_3, \beta_3) &= \mu_0(\alpha_1, \beta_1) + \mu_1(\alpha_2, \beta_2) \\ (\alpha_4, \beta_4) &= \lambda_0\mu_0(\alpha_1, \beta_1) + \lambda_1\mu_1(\alpha_2, \beta_2) \end{aligned}$$

entonces $\lambda = \lambda_1/\lambda_0$. Sea $\mu = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$. Resolviendo el sistema, tenemos

$$\mu \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \lambda_0\mu_0 & \lambda_1\mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Ahora se tiene

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\mu^2 \lambda_1 \mu_1 \mu_0}{\mu^2 \lambda_0 \mu_0 \mu_1} = \frac{(\alpha_1\beta_4 - \beta_1\alpha_4)/(\alpha_4\beta_2 - \beta_4\alpha_2)}{(\alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_3)/(\alpha_3\beta_2 - \beta_3\alpha_2)}$$

Esta fórmula es la razón (o cociente) de razones de determinantes. Más adelante daremos una interpretación en términos afines.

6.5. Valores de la razón doble al permutar los puntos. Tomemos cuatro puntos distintos A_1, A_2, A_3, A_4 de una recta proyectiva $\mathbb{P}(V)$. Sea λ la razón doble $\lambda = [A_1, A_2 : A_3, A_4]$. Nótese que $\lambda \notin \{0, 1, \infty\}$, dado que suponemos que A_4 no coincide con A_i , para $i = 1, 2, 3$. Deseamos expresar la razón doble de las 24 permutaciones de A_1, A_2, A_3, A_4 en términos de λ .

Recordemos que el grupo S_4 de permutaciones de $\{1, 2, 3, 4\}$ es el conjunto de las biyecciones $\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$. Por otro lado, este grupo está generado por las transposiciones $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{34}$. Así pues, es suficiente calcular

$$[A_2, A_1 : A_3, A_4], [A_1, A_3 : A_2, A_4], [A_1, A_2 : A_4, A_3],$$

ya que los demás valores se deducen de estos. Tomando coordenadas homogéneas en la referencia A_1, A_2, A_3 , tenemos que

$$A_1 = [1, 0], A_2 = [0, 1], A_3 = [1, 1], A_4 = [1, \lambda].$$

Dada la fórmula que expresa la razón doble, se tiene que:

$$[A_2, A_1 : A_3, A_4] = 1/\lambda; [A_1, A_3 : A_2, A_4] = \lambda/(\lambda - 1); [A_1, A_2 : A_4, A_3] = 1/\lambda.$$

Consideramos el subgrupo G del grupo de biyecciones $k \setminus \{0, 1\} \rightarrow k \setminus \{0, 1\}$ generado por las biyecciones $f_{12} : t \mapsto 1/t$, $f_{23} : t \mapsto t/(t - 1)$, $f_{34} = f_{12}$. Tenemos que:

$$[A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)} : A_{\sigma(3)}, A_{\sigma(4)}] = f_{12}^{n_1} f_{23}^{m_1} f_{34}^{p_1} \cdots f_{12}^{n_s} f_{23}^{m_s} f_{34}^{p_s}(\lambda),$$

cuando la permutación σ se exprese $\sigma = \tau_{12}^{n_1} \tau_{23}^{m_1} \tau_{34}^{p_1} \cdots \tau_{12}^{n_s} \tau_{23}^{m_s} \tau_{34}^{p_s}$. Obtenemos seis valores posibles para la razón doble, que son los siguientes

$$\begin{aligned} \lambda &= [A_1, A_2 : A_3, A_4] \\ 1/\lambda &= [A_2, A_1 : A_3, A_4] \\ \lambda/(\lambda - 1) &= [A_1, A_3 : A_2, A_4] \\ 1 - \lambda &= [A_3, A_2 : A_1, A_4] \\ 1/(1 - \lambda) &= [A_2, A_3 : A_1, A_4] \\ 1 - 1/\lambda &= [A_3, A_1 : A_2, A_4] \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene el mismo valor de la razón doble cuando se aplica una permutación del tipo $\tau_{ij}\tau_{rs}$ con $\{i, j, r, s\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Es decir

$$\begin{aligned} [A_1, A_2 : A_3, A_4] &= [A_2, A_1 : A_4, A_3] = [A_3, A_4 : A_1, A_2] = [A_4, A_3 : A_2, A_1] \\ [A_2, A_1 : A_3, A_4] &= [A_1, A_2 : A_4, A_3] = [A_3, A_4 : A_2, A_1] = [A_4, A_3 : A_1, A_2] \\ [A_1, A_3 : A_2, A_4] &= [A_3, A_1 : A_4, A_2] = [A_2, A_4 : A_1, A_3] = [A_4, A_2 : A_3, A_1] \\ [A_3, A_2 : A_1, A_4] &= [A_2, A_3 : A_4, A_1] = [A_1, A_4 : A_3, A_2] = [A_4, A_1 : A_2, A_3] \\ [A_2, A_3 : A_1, A_4] &= [A_3, A_2 : A_4, A_1] = [A_1, A_4 : A_2, A_3] = [A_4, A_1 : A_3, A_2] \\ [A_3, A_1 : A_2, A_4] &= [A_1, A_3 : A_4, A_2] = [A_2, A_4 : A_3, A_1] = [A_4, A_2 : A_1, A_3] \end{aligned}$$

En el caso particular de que se tenga una cuaterna armónica y entonces $\lambda = -1$ (suponemos que la característica del cuerpo no es igual a dos) obtenemos sólo tres valores diferentes

$$-1, 2, 1/2.$$

Esto justifica las ocho permutaciones ($8 = 24/3$) que dan cuaterna armónica.

— — —

EJERCICIO 25. Sean H_i hiperplanos de un espacio proyectivo concurrentes en un subespacio K de codimensión dos, con $i = 1, 2, 3, 4$. Consideremos dos rectas r y r' que no cortan K y los puntos $A_i = H_i \cap r$ y $A'_i = H_i \cap r'$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Consideremos

asimismo los puntos A_i^* del plano proyectivo dual tales que $H_i^\perp = \{A_i^*\}$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Demuéstrese que

$$[A_1, A_2 : A_3, A_4] = [A'_1, A'_2 : A'_3, A'_4] = [A_1^*, A_2^* : A_3^*, A_4^*].$$

En particular, cuatro rectas concurrentes en un punto P de un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ forman cuaterna armónica (como elementos de $\mathbb{P}(V)^*$) si y solo si los puntos de corte de ellas con una recta que no pasa por P forman cuaterna armónica.

EJERCICIO 26. Consideremos una proyectividad $\Phi : \mathbb{P}_\mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$. Demuéstrese que existen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, con $ad - bc \neq 0$, tales que Φ está definida en $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1 \setminus \{[0, 1]\}$ por la fórmula

$$\Phi([1, z]) = \left[1, \frac{az + b}{cz + d} \right],$$

donde se entiende que si $cz + d = 0$, entonces $\Phi([1, z]) = [0, 1]$.

EJERCICIO 27. Sea $\mathbb{P}(V)$ una recta proyectiva sobre un cuerpo base k de característica $p \neq 2$. Pruébese que la condición necesaria y suficiente para que una cuaterna armónica lo siga siendo, al permutar entre sí los puntos de cualquier forma, es que $p = 3$.

EJERCICIO 28. Sea $\mathbb{P}(V)$ una recta proyectiva y $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ una proyectividad. Se dice que Φ es una *involución* si su cuadrado Φ^2 es la identidad.

1. Pruébese que si $\Phi \neq id$, entonces Φ es una involución si y sólo si existe un punto A tal que $\Phi(A) \neq A$ y $\Phi^2(A) = A$.
2. Pruébese que si Φ es una involución distinta de la identidad y con dos puntos fijos A y B , entonces para todo punto $P \notin \{A, B\}$ se tiene que

$$[A, B : P, \Phi(P)] = -1.$$

EJERCICIO 29. Consideremos una recta L de un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ sobre un cuerpo k de característica cero, así como una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{P_0, P_1; U\}$ de L . Dados $m, n \in \mathbb{Z}$ no simultáneamente nulos, se pide construir el punto de coordenadas homogéneas $[m, n]$ en la referencia \mathcal{R} , mediante una sucesión finita de construcciones clásicas de cuartos armónicos, partiendo de los puntos P_0, P_1 y U . Como ayuda, se recomienda observar que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $[[1, 0], [-n, 1] : [-n+1, 1], [-n-1, 1]] = -1$. Esto es útil para construir inductivamente los puntos de coordenadas homogéneas $[-n, 1]$, con $n \in \mathbb{N}$.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $[[1, 0], [n, 1] : [n-1, 1], [n+1, 1]] = -1$. Esto es útil para construir inductivamente los puntos de coordenadas homogéneas $[n, 1]$, con $n \in \mathbb{N}$.
3. Dado $a \in k$ no nulo, se tiene que $[[0, 1], [a, n] : [a, n-1], [a, n+1]] = -1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es útil para construir inductivamente los punto de coordenadas homogéneas $[a, n]$, si conocemos el punto $[a, 1]$.

EJERCICIO 30. Sea $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ una biyección de un plano proyectivo sobre el cuerpo $k = \mathbb{Q}$ en sí mismo tal que Φ envía rectas en rectas y Φ deja fijos los puntos de una referencia. Demostrar que Φ es la identidad.

EJERCICIO 31. Sean r y s dos rectas distintas de un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$, que se cortan en el punto Q . Consideremos tres puntos A, B y C distintos entre sí y distintos de Q , situados todos ellos sobre la recta r . Dado otro punto P , que no esté ni en r ni en s , denotamos A_P, B_P y C_P las imágenes respectivas de A, B y C por la perspectividad de r en s con centro P . Consideremos los puntos R_P y T_P , dados por:

$$R_P = (A + B_P) \cap (B + A_P), \quad T_P = (B + C_P) \cap (C + B_P).$$

Se pide probar que los puntos Q, R_P y T_P están alineados y que las rectas $r, s, R_P + T_P$ y $Q + P$ forman una cuaterna armónica. Demuéstrese asimismo que dados dos puntos

$P_1, P_2 \notin r \cup s$, los puntos Q, P_1 y P_2 están alineados si y sólo si las rectas $R_{P_1} + T_{P_1}$ y $R_{P_2} + T_{P_2}$ coinciden. Establézcanse enunciados duales de los anteriores.

EJERCICIO 32. Considérense en el plano proyectivo real un punto P y tres rectas no concurrentes a, b y c que no pasen por el punto P . Calcúlese el número de rectas que pasan por P y cortan a, b y c en puntos que, salvo reordenación, formen junto con P una cuaterna armónica.

7. El espacio afín y el espacio proyectivo

En esta sección veremos cómo el espacio afín puede ser completado con un “hiperplano del infinito” que recoge las direcciones de las rectas afines. Recíprocamente, veremos que el complementario de cualquier hiperplano de un espacio proyectivo puede ser dotado de estructuras de espacio afín, de modo que los subespacios afines sean la intersección con la parte afín de los subespacios proyectivos.

7.1. Espacio afín. Repaso. Dado un espacio vectorial W y un conjunto no vacío A , una *estructura de espacio afín sobre A con W como espacio de vectores* es una aplicación

$$a : A \times A \rightarrow W; \quad (P, Q) \mapsto a(P, Q) \in W$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. Dado $P \in A$ y $w \in W$, existe $Q \in A$ tal que $a(P, Q) = w$.
2. Dados $P, Q \in A$ se tiene que $a(P, Q) = 0$ si y sólo si $P = Q$.
3. Dados $P, Q, R \in A$, se tiene $a(P, R) = a(P, Q) + a(Q, R)$.

Hay algunas consecuencias notables de esta definición:

- a) Para todos $P, Q \in A$ se tiene que $a(Q, P) = -a(P, Q)$. En efecto, sabemos que $0 = a(P, P) = a(P, Q) + a(Q, P)$.
- b) Si $a(P, Q) = a(P, R)$, entonces $Q = R$. En efecto, tenemos

$$a(Q, R) = a(Q, P) + a(P, R) = -a(P, Q) + a(P, R) = 0$$

y por tanto $Q = R$.

Asociada a una estructura de espacio afín tenemos una *acción* $W \times A \rightarrow A$ de W sobre A dada por

$$(w, P) \rightarrow P + w,$$

donde $P + w \in A$ es el único punto de A tal que $a(P, P + w) = w$. Se trata de una acción libre y transitiva, es decir, se cumplen las propiedades siguientes:

1. Acción: $P + (w_1 + w_2) = (P + w_1) + w_2$ y $P + 0 = P$.
2. Acción libre: $P + w = P$ si y sólo si $w = 0$.
3. Acción transitiva: Dados $P, Q \in A$ existe $w \in W$ con $P + w = Q$. (Por ser la acción libre, el vector w es necesariamente único).

Inversamente, toda acción libre y transitiva $W \times A \rightarrow A$ induce una estructura única de espacio afín de la cual procede.

El *espacio de direcciones* del espacio afín A es el conjunto de rectas vectoriales de W , es decir, el espacio proyectivo $\mathbb{P}(W)$.

Decimos que un subconjunto no vacío S de A es un *subespacio afín* si existe un subespacio vectorial $T \subset W$ y un punto $P \in A$ tal que

$$S = P + T = \{P + w; w \in T\}.$$

Notemos que T es único. Además S tiene estructura heredada de espacio afín con espacio de vectores T . Dos subespacios afines con el mismo espacio de direcciones

son paralelos (intersección vacía) o coincidentes. La intersección de subespacios afines es el vacío o un subespacio afín.

Dos estructuras $a_1, a_2 : A \times A \rightarrow W$ de espacio afín sobre A se dicen *compatibles* si existe un automorfismo de espacios vectoriales $\phi : W \rightarrow W$ tal que para todo $P, Q \in A$ se tenga

$$a_2(P, Q) = \phi(a_1(P, Q)).$$

Dos estructuras compatibles de espacio afín tienen exactamente los mismos subespacios afines.

7.2. El complementario de un hiperplano proyectivo. Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo y consideremos un hiperplano $H = \mathbb{P}(W)$ de $\mathbb{P}(V)$, donde sabemos que W es un subespacio vectorial de V de codimensión uno.

Fijemos un elemento no nulo b del espacio vectorial cociente V/W . Como $\dim_k(V/W) = 1$, sabemos que $\{b\}$ es una base de V/W . Recordemos la aplicación canónica $V \rightarrow V/W$, que envía cada elemento $v \in V$ en su clase $v + W$.

LEMA 5. *Dado un punto $P \in \mathbb{P}(V) \setminus H$, existe un único $v \in V \setminus W$ tal que $P = [v]$ y tal que $v + W = b$.*

Demostración: Tomemos $v' \in V$ tal que $P = [v']$. Sabemos que $v' \notin W$ dado que $P \notin H$. Por consiguiente $v' + W \neq 0$. Como $\{b\}$ es una base de V/W , existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $(v' + W) = \lambda b$. Si tomamos $v = (1/\lambda)v'$, tenemos que $P = [v]$ y además $v + W = b$. Para ver la unicidad, consideremos dos $v_1, v_2 \in V$ con $P = [v_1] = [v_2]$ tales que $v_1 + W = v_2 + W = b$. Como $P = [v_1] = [v_2]$, existe un escalar $\mu \neq 0$ con $v_2 = \mu v_1$. Ahora bien $b = v_2 + W = \mu v_1 + W = \mu(v_1 + W) = \mu b$, por tanto $\mu = 1$ y $v_2 = v_1$. CQD.

Para cada $P \in \mathbb{P}(V) \setminus H$, denotaremos v_P^b al vector $v_P^b \in V \setminus W$ tal que $P = [v_P^b]$ y $v_P^b + W = b$. Sea $A = \mathbb{P}(V) \setminus H$. Consideremos la aplicación

$$\alpha_b : A \times A \rightarrow W; \quad \alpha_b(P, Q) = v_Q^b - v_P^b.$$

TEOREMA 6. *La aplicación α_b da una estructura de espacio afín sobre el conjunto $A = \mathbb{P}(V) \setminus H$ con espacio de vectores W . Además hay una biyección*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{subespacios proyectivos } L \subset \mathbb{P}(V) \\ \text{tales que } L \not\subset H \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{subespacios afines} \\ L_a \subset A \end{array} \right\}$$

dada por $L \mapsto L_a = L \cap A$.

Demostración: Comprobemos en primer lugar la estructura de espacio afín. Es decir, tenemos que probar que

1. Dado $P \in A$ y $w \in W$, existe $Q \in A$ tal que $\alpha_b(P, Q) = w$.
2. Dados $P, Q \in A$ se tiene que $\alpha_b(P, Q) = 0$ si y sólo si $P = Q$.
3. Dados $P, Q, R \in A$, se tiene $\alpha_b(P, R) = \alpha_b(P, Q) + \alpha_b(Q, R)$.

Probemos cada afirmación:

1. Supongamos que $P = [v_P^b] \in A$ y sea $w \in W$. Basta tomar $Q = [v_P^b + w]$. Obsérvese que $v_Q^b = v_P^b + w$, ya que $v_P^b + W = (v_P^b + w) + W = b$.
2. Tenemos que $\alpha_b(P, Q) = 0$ si y sólo si $v_P^b = v_Q^b$, lo que equivale a decir que $P = Q$.
3. Se tiene $v_R^b - v_P^b = (v_Q^b - v_P^b) + (v_R^b - v_Q^b)$.

Esto completa la primera parte del enunciado.

Consideremos ahora un subespacio proyectivo $L = \mathbb{P}(T)$ tal que $L \not\subset H$, esto quiere decir que $T \not\subset W$. Sea $P = [v_P^b]$ un punto de $L \setminus H$. Vemos que

$$L_a = L \cap A = P + T \cap W.$$

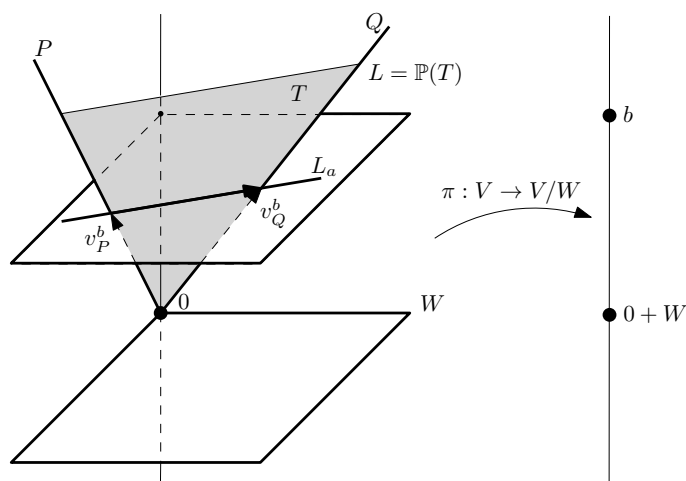
Por otro lado, si $P + T'$ es un subespacio afín de A , tenemos que

$$P + T' = \mathbb{P}(T' + L(v_P^b)) \cap A.$$

Estas dos transformaciones son inversas una de otra.

CQD.

Si $L_a \subset A$ es un subespacio afín, al subespacio proyectivo $L \subset \mathbb{P}(V)$ tal que $L \cap A = L_a$ se le llama *cierre proyectivo de L_a*



Si consideramos otro elemento $b' \in V/W$, la estructura afín $\alpha_{b'}$ es equivalente a α_b . Más precisamente, si $b' = \lambda b$, tenemos que $\alpha_{b'}(P, Q) = \lambda \alpha_b(P, Q)$.

7.3. Subespacios paralelos en el complementario de un hiperplano.

Consideremos un hiperplano proyectivo $H = \mathbb{P}(W)$ de $\mathbb{P}(V)$ y sea $b \in V/W$ un vector no nulo. Sabemos que tenemos la estructura α_b de espacio afín sobre el complementario $A = \mathbb{P}(V) \setminus H$ del hiperplano H . Recordemos que dos subespacios afines $P + T$ y $Q + T$, con espacio vectorial de dirección $T \subset W$, son *paralelos* si $(P + T) \cap (Q + T) = \emptyset$. Vamos a ver en qué se traduce esta propiedad considerando los correspondientes subespacios proyectivos. Escribamos

$$P = [v_P^b]; \quad Q = [v_Q^b],$$

donde sabemos que $b = v_P^b + W = v_Q^b + W$. El espacio proyectivo asociado a $P + T$ es $\mathbb{P}(T + L(v_P^b))$ y sabemos que

$$A \cap \mathbb{P}(T + L(v_P^b)) = P + T.$$

Ocurre lo mismo con $Q + T$. La intersección de los subespacios proyectivos está dada por

$$\mathbb{P}(T + L(v_P^b)) \cap \mathbb{P}(T + L(v_Q^b)) = \mathbb{P}((T + L(v_P^b)) \cap (T + L(v_Q^b))).$$

En términos de espacios vectoriales, tenemos dos alternativas:

1. $v_P^b \in T + L(v_Q^b)$ y entonces $T + L(v_P^b) = T + L(v_Q^b)$. En este caso se tiene que $\mathbb{P}(T + L(v_P^b)) = \mathbb{P}(T + L(v_Q^b))$ y entonces $P + T = Q + T$.
2. $v_P^b \notin (T + L(v_Q^b))$ y entonces $T = (T + L(v_Q^b)) \cap (T + L(v_Q^b))$. En este caso se tiene que $\mathbb{P}(T + L(v_P^b)) \cap \mathbb{P}(T + L(v_Q^b)) = \mathbb{P}(T) \subset H$ y por lo tanto $(P + T) \cap (Q + T) = A \cap \mathbb{P}(T) = \emptyset$.

7.4. El hiperplano del infinito para un espacio afín. Vamos a proceder ahora a la inversa. Supongamos que tenemos un espacio afín

$$\alpha : A \times A \rightarrow W.$$

Consideremos el espacio vectorial $V = W \times k$, que contiene $W \times \{0\}$ como subespacio y éste a su vez es isomorfo a W , identificando los elementos $w \in W$ con los de la forma $(w, 0) \in W \times k$. Consideremos el hiperplano proyectivo $H = \mathbb{P}(W \times \{0\})$ y denotemos por b la clase de vector $(0, 1) \in W \times k$ en el cociente $V/(W \times \{0\})$. Fijemos un punto $a_0 \in A$. Tenemos una biyección

$$\phi_{a_0} : A \rightarrow \mathbb{P}(V) \setminus H$$

dada por $\phi_{a_0}(a) = [(0, 1) + (a - a_0, 0)] = [(a - a_0, 1)]$.

Recuérdese que $a - a_0 \in W$ está definido por la fórmula $a_0 + (a - a_0) = a$. Vamos a ver que ϕ_{a_0} es efectivamente una biyección y que bajo esta identificación la estructura α_b de espacio afín para $\mathbb{P}(V) \setminus H$ coincide con la estructura α de espacio afín para A de la cual hemos partido.

La suprayectividad de ϕ_{a_0} se sigue de que cualquier punto P de $\mathbb{P}(V) \setminus H$ es de la forma $[w', \lambda]$, con $\lambda \neq 0$ y por consiguiente es de la forma $[w, 1]$, donde $w = w'/\lambda$. Sabemos que existe $a_P \in A$ tal que $a_P - a_0 = w$ y por tanto $\phi_{a_0}(a_P) = P$. Por otro lado, si $\phi_{a_0}(a) = \phi_{a_0}(a')$ esto significa que $[a - a_0, 1] = [a' - a_0, 1]$, por tanto $a - a_0 = a' - a_0$ y entonces $a = a'$, de acuerdo con los axiomas de espacio afín. Así pues, la aplicación ϕ_{a_0} es una biyección.

Para ver que ϕ_{a_0} induce en $\mathbb{P}(V) \setminus H$ la estructura afín α_b (bajo la identificación de W con $W \times \{0\} \subset V$) lo único que hay que comprobar es que para todo $a_1, a_2 \in A$ tenemos

$$\alpha_b(\phi_{a_0}(a_1), \phi_{a_0}(a_2)) = (\alpha(a_1, a_2), 0) \in W \times \{0\}.$$

Recordando que $(\alpha(a_1, a_2), 0) = (a_2 - a_1, 0)$ concluimos la prueba como sigue:

$$\begin{aligned} \alpha_b(\phi_{a_0}(a_1), \phi_{a_0}(a_2)) &= \alpha_b([a_1 - a_0, 1], [a_2 - a_0, 1]) = \\ &= ((a_2 - a_0), 1) - ((a_1 - a_0), 1) = (a_2 - a_1, 0). \end{aligned}$$

7.5. Cartas afines del espacio proyectivo. Consideremos una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; U\}$ del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$. Denotemos por H_i el hiperplano generado por

$$P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n.$$

En las coordenadas homogéneas asociadas a \mathcal{R} se tiene que H_i tiene la ecuación $X_i = 0$. Sea $A_i = \mathbb{P}(V) \setminus H_i$ el complementario del hiperplano H_i , para cada índice $i = 0, 1, \dots, n$. El espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ es unión de estos subconjuntos:

$$\mathbb{P}(V) = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n.$$

Seleccionemos ahora un vector $s \in V$ tal que $U = [s]$. Esto es lo mismo que fijar la única base $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ de V asociada a \mathcal{R} que cumple $s = e_0 + e_1 + \dots + e_n$.

Nótese que $H_i = \mathbb{P}(W_i)$, donde $W_i \subset V$ es el hiperplano vectorial generado por $e_0, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$; estos vectores forman una base de W_i . Sea $b_i = s + W_i \in V/W_i$ la clase del vector s . Tenemos que $b_i \neq 0$ y por consiguiente existe una estructura afín α_{b_i} sobre cada A_i . Dado que los A_i recubren $\mathbb{P}(V)$, todo subespacio proyectivo no vacío L de $\mathbb{P}(V)$ tiene intersección no vacía $L_i = L \cap A_i$ con algún A_i . Como sabemos, podemos recuperar L a partir de cada una de las partes afines L_i , con $L_i \neq \emptyset$.

Por otro lado, en cada A_i tenemos señalado el punto P_i ; recuérdese que $P_j \notin A_i$ si $j \neq i$. La teoría de espacios afines nos da biyecciones

$$\phi_i : A_i \rightarrow k^{\{0,1,\dots,n\} \setminus \{i\}}; \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

definidas por $\phi_i(Q) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n)$, donde

$$\alpha_{b_i}(P_i, Q) = \sum_{j \in \{0,1,\dots,n\} \setminus \{i\}} \lambda_j e_j.$$

Estas biyecciones ϕ_i identifican la estructura α_{b_i} de espacio afín de A_i con la estructura estándar del espacio afín de $k^{\{0,1,\dots,n\} \setminus \{i\}}$. Reciben el nombre de *cartas afines de $\mathbb{P}(V)$ en la base β* .

OBSERVACIÓN 9. Las aplicaciones ϕ_i aparentemente dependen de la elección inicial del vector s que representa el punto unidad (y por tanto de los b_i). Si hacemos una selección diferente $s' = \lambda s$, observamos que las aplicaciones ϕ_i y ϕ'_i son exactamente iguales. No obstante, dan una identificación de estructuras afines diferentes de A_i (las estructuras α_{b_i} y $\alpha_{b'_i}$, respectivamente) con la estructura afín estándar de $k^{\{0,1,\dots,n\} \setminus \{i\}}$.

En términos menos teóricos y usando coordenadas homogéneas, la carta afín ϕ_0 está definida por

$$\begin{aligned} \phi_0 : \quad \{X_0 \neq 0\} &\rightarrow k^n \\ [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n] &\mapsto (\lambda_1/\lambda_0, \lambda_2/\lambda_0, \dots, \lambda_n/\lambda_0). \end{aligned}$$

En casos particulares, como el de los cuerpos $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$, se pueden usar estas cartas afines para dotar de diferentes estructuras al espacio proyectivo, por ejemplo la topología usual, estructuras de variedades diferenciables y/o analíticas. En el caso general, siguiendo las mismas ideas, se dota de estructura de variedad algebraica, lo que hace del espacio proyectivo el espacio ambiente “completo” más habitual en la geometría algebraica.

7.6. Estratificación en espacios afines del espacio proyectivo. No daremos más que la idea de base:

El complemento de un hiperplano es un espacio afín. Un hiperplano es un espacio proyectivo de dimensión una unidad menos, el complemento de un hiperplano de un hiperplano es un espacio afín. Así hasta alcanzar el espacio proyectivo de dimensión cero, el único que a su vez es un espacio afín.

Esta construcción se puede hacer respetando una referencia dada y una base como en el apartado anterior. Dejamos los detalles y las consiguientes reflexiones al lector.

— — —

EJERCICIO 33. Sea $H = \mathbb{P}(W)$ un hiperplano del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$, fijemos un elemento no nulo $b \in V/W$ y consideremos la estructura α_b de espacio afín sobre

$A = \mathbb{P}(V) \setminus H$ definida por la selección de b . Pruébese que, dada una afinidad $f : A \rightarrow A$, existe una única proyectividad $\Phi_{b,f} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ que extiende f , para la cual H es invariante. Averígüese si $\Phi_{b,f}$ es igual o distinta de $\Phi_{b',f}$ cuando $b \neq b'$. Recíprocamente, pruébese que toda proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$, que deja invariante H , se restringe a una afinidad de A en A .

EJERCICIO 34. (Razón simple y razón doble). Consideremos un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$, un hiperplano $H = \mathbb{P}(W)$ y un elemento no nulo $b \in V/W$. Sea $A = \mathbb{P}(V) \setminus H$ y $\alpha_b : A \times A \rightarrow W$ la estructura de espacio afín sobre A asociada a b . Tomemos una recta afín ℓ_a de A , tres puntos $P, Q, R \in \ell_a$ tales que $P \neq Q$ y denotemos por T_∞ la intersección de ℓ con H , donde ℓ es el cierre proyectivo de ℓ_a . Se llama *razón simple* de los puntos P, Q, R al escalar $\lambda \in k$ tal que $\alpha_b(P, R) = \lambda \alpha_b(P, Q)$; denotemos por $[P, Q, R]$ la razón simple. Se pide probar que

$$[P, Q, R] = [P, T_\infty : Q, R]$$

y que si S es otro punto de ℓ_a distinto de P, Q, R , la razón doble $[P, Q : R, S]$ es el cociente de razones simples dado por la fórmula

$$[P, Q : R, S] = \frac{[P, R, S]}{[Q, R, S]}.$$

Indíquese por qué la razón simple no depende del elemento $b \in V/W$, que determina la estructura α_b .

EJERCICIO 35. Sean ABC un triángulo en un plano afín y $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ puntos que no coinciden con ninguno de los vértices. Consideremos el siguiente producto de razones simples:

$$\alpha = [A', B, C] \cdot [B', C, A] \cdot [C', A, B].$$

Pruébese que:

1. Los puntos A', B', C' están alineados si y sólo si $\alpha = 1$ (teorema de Menelaus).
2. Las rectas AA', BB', CC' son concurrentes o paralelas si y solamente si $\alpha = -1$ (teorema de Ceva).

EJERCICIO 36. Sean $ABC, A'B'C'$ dos triángulos en un plano afín tal que $(AB, A'B')$, $(AC, A'C')$, $(BC, B'C')$ son parejas de lados paralelos. Pruébese que las rectas AA', BB', CC' son concurrentes o paralelas. En el caso de que sean paralelas, pruébese que existe una traslación afín que lleva un triángulo en el otro.

EJERCICIO 37. Sea r una recta de un plano afín A y consideremos el completado proyectivo \bar{r} de r respecto de una inmersión de A en un plano proyectivo. Denotemos por $R_\infty \in \bar{r}$ el punto de corte de \bar{r} con la recta del infinito. Pruébese que, dados dos puntos distintos $P, Q \in r$, se tiene que R_∞ es el cuarto armónico de P, Q y M , donde M es el punto medio entre P y Q .

EJERCICIO 38. Consideremos un triángulo Δ del plano afín y una recta r que no pase por ninguno de sus vértices, ni sea paralela a alguno de los lados. Asociemos a cada vértice V de Δ la recta s_V que une V con el punto medio del segmento en r determinado por los lados adyacentes a V y sea P_V el punto de corte de s_V con el lado opuesto a V . Pruébese que los tres puntos P_V están alineados.

EJERCICIO 39. (Teorema de Tales). Sean H_1, H_2, H_3 planos paralelos y distintos en el espacio afín tridimensional \mathbb{R}^3 y $r, r' \subset \mathbb{R}^3$ dos rectas distintas no paralelas a ellos. Denotemos $A_i = r \cap H_i$ y $A'_i = r' \cap H_i$, para $i = 1, 2, 3$. Pruébese que:

$$\frac{\|\overrightarrow{A_1 A_3}\|}{\|\overrightarrow{A_1 A_2}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A'_1 A'_3}\|}{\|\overrightarrow{A'_1 A'_2}\|}.$$

EJERCICIO 40. Sean π y π' dos planos distintos en el espacio afín \mathbb{R}^3 . Consideremos una inmersión $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ y sea Q un complementario común de los cierres proyectivos $\bar{\pi}$ y $\bar{\pi}'$ de π y π' respectivamente. Denotemos por φ la perspectividad de $\bar{\pi}$ en $\bar{\pi}'$ desde Q . Sea $\mathcal{P} \subset \pi$ un paralelogramo. ¿Qué condiciones deben satisfacer π , π' y Q para que la imagen de \mathcal{P} por φ sea también un paralelogramo?

EJERCICIO 41. Consideremos el espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ y el hiperplano H de ecuación $X_0 - X_1 + 2X_2 + X_3 = 0$. Hállese una referencia afín de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \setminus H$ y exprésese en dicha referencia la recta afín $\ell \cap (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \setminus H)$, donde ℓ es la recta proyectiva que pasa por los puntos $[1, 2, 1, 0]$ y $[0, 1, 1, 3]$.

Cónicas y cuádricas.

En este capítulo siempre trabajaremos con un cuerpo base k de característica distinta de dos. Comenzaremos recordando algunos conceptos relativos a formas bilineales y cuadráticas.

1. Formas bilineales simétricas y cuadráticas. Repaso

Sea V un k -espacio vectorial de dimensión finita $n + 1$. Una función

$$\psi : V \times V \rightarrow k$$

es una *forma bilineal* si se cumple que las aplicaciones

$$\psi(v, -) : w \mapsto \psi(v, w), \quad \psi(-, w) : v \mapsto \psi(v, w)$$

son formas lineales para cada $v, w \in V$. Esto es equivalente a decir que

$$\psi(\lambda v + \mu w, \lambda' v' + \mu' w') = \lambda \lambda' \psi(v, v') + \lambda \mu' \psi(v, w') + \mu \lambda' \psi(w, v') + \mu \mu' \psi(w, w'),$$

para todos $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in k$ y $v, v', w, w' \in V$. Una forma bilineal ψ es *simétrica* si $\psi(v, w) = \psi(w, v)$, para todo $v, w \in V$.

Por otro lado, una función $\zeta : V \rightarrow k$ es una *forma cuadrática* si existe una forma bilineal ψ tal que $\zeta(v) = \psi(v, v)$, para todo $v \in V$. Escribiremos $\zeta = \zeta_\psi$.

Recordemos la relación entre formas bilineales simétricas y formas cuadráticas. Toda forma cuadrática ζ tiene una forma bilineal simétrica asociada σ_ζ dada por

$$\sigma_\zeta(v, w) = \frac{1}{2} (\zeta(v + w) - \zeta(v) - \zeta(w)).$$

Si $\zeta = \zeta_\psi$, diremos que σ_ζ es el simetrizado de ψ ; de hecho, si ψ ya es simétrica, se tiene que $\sigma_\zeta = \psi$. Nótese que toda forma cuadrática ζ cumple la propiedad

$$\zeta(\lambda v + \mu w) = \lambda^2 \zeta(v) + \mu^2 \zeta(w) + 2\lambda\mu\sigma_\zeta(v, w).$$

en particular $\zeta(\lambda v) = \lambda^2 \zeta(v)$.

Denotemos por $\mathcal{Q}(V)$ el conjunto de formas cuadráticas sobre V y por $\mathcal{S}\text{im}(V)$ el de las formas bilineales simétricas. Tenemos una biyección entre ambos conjuntos que asocia a cada forma cuadrática ζ la forma bilineal simétrica σ_ζ y recíprocamente, a cada forma bilineal simétrica σ la forma cuadrática ζ_σ . Tanto los elementos de $\mathcal{Q}(V)$ como los de $\mathcal{S}\text{im}(V)$ son funciones con llegada en el cuerpo de escalares k , así la suma y el producto por escalares como funciones tiene sentido. De este modo, como se comprueba directamente, ambos conjuntos adquieren estructura de espacio vectorial, para la cual la biyección anterior es un isomorfismo vectorial.

OBSERVACIÓN 10. Nótese que $(\lambda\zeta)(\mu v) = \lambda\mu^2\zeta(v)$.

OBSERVACIÓN 11. La restricción $\zeta|_W$ de una forma cuadrática ζ sobre V a un subespacio vectorial W de V es, de nuevo, una forma cuadrática sobre W .

Determinemos una base de $\mathcal{S}\text{im}(V)$ a partir de una base dada

$$\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$$

del espacio vectorial V . Sabemos que toda forma bilineal simétrica está determinada por las imágenes de las parejas (e_i, e_j) , donde $i \leq j$. Más precisamente, para cada par (i, j) con $0 \leq i \leq j \leq n$, podemos definir la forma bilineal simétrica σ_{ij} dada por las propiedades:

$$\sigma_{ij}(e_i, e_j) = 1; \quad \sigma_{ij}(e_s, e_u) = 0, \quad \text{si } 0 \leq s \leq u \leq n, (i, j) \neq (s, u).$$

Así, se tiene que

$$\sigma_{ij} \left(\sum_{\ell=0}^n \lambda_\ell e_\ell, \sum_{r=0}^n \mu_r e_r \right) = \begin{cases} \lambda_i \mu_j + \lambda_j \mu_i, & \text{si } i < j. \\ \lambda_i \mu_i, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

La familia de formas bilineales simétricas $\{\sigma_{ij}\}_{0 \leq i \leq j \leq n}$ es una base del espacio vectorial $\mathcal{S}\text{im}(V)$. En efecto, dada una forma bilineal simétrica σ , tenemos una expresión única

$$\sigma = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} \sigma_{ij}, \quad \lambda_{ij} = \sigma(e_i, e_j).$$

Por tanto, la dimensión de $\mathcal{S}\text{im}(V)$ es

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = (n+1)(n+2)/2.$$

La base $\{\sigma_{ij}\}_{0 \leq i \leq j \leq n}$ define la base $\{\varsigma_{ij}\}_{0 \leq i \leq j \leq n}$ del espacio vectorial de las formas cuadráticas dada por $\varsigma_{ij}(v) = \sigma_{ij}(v, v)$, para cada $v \in V$. En particular, tenemos que

$$\varsigma_{ij} \left(\sum_{\ell=0}^n \lambda_\ell e_\ell \right) = \begin{cases} 2\lambda_i \lambda_j, & \text{si } i < j. \\ \lambda_i^2, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 12. La imagen de los elementos de una base de V no determina una forma cuadrática. Por ejemplo, si $n+1 = 2$ y tenemos la forma bilineal simétrica σ que cumple

$$\sigma(e_0, e_0) = 0, \quad \sigma(e_0, e_1) = 1/2, \quad \sigma(e_1, e_1) = 0,$$

entonces la forma cuadrática $\zeta = \zeta_\sigma$ satisface que $\zeta(e_0) = \zeta(e_1) = 0$, al igual que la forma cuadrática idénticamente nula, pero sin embargo $\zeta(e_0 + e_1) = 1$.

Terminamos esta sección de repaso con la definición de cuádrlica de $\mathbb{P}(V)$

DEFINICIÓN 4. *Los elementos del espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$ se llaman cuádrlicas de $\mathbb{P}(V)$. En el caso de que $\dim \mathbb{P}(V) = 2$, las cuádrlicas también reciben el nombre de cónicas.*

Una cuádrlica \mathfrak{c} de $\mathbb{P}(V)$ es la clase proyectiva $\mathfrak{c} = [\zeta]$ de una forma cuadrática no nula ζ sobre V . Teniendo en cuenta el isomorfismo natural entre $\mathcal{Q}(V)$ y $\mathcal{S}\text{im}(V)$, tenemos fijada una identificación

$$\mathbb{P}(\mathcal{Q}(V)) = \mathbb{P}(\mathcal{S}\text{im}(V)).$$

De este modo, las cuádrlicas se definen de manera equivalente como las clases proyectivas $\mathfrak{c} = [\sigma]$, donde σ es una forma bilineal simétrica no nula sobre V . La identificación anterior se interpreta diciendo que $[\zeta] = [\sigma_\zeta]$. Usaremos indistintamente las dos acepciones del concepto de cuádrlica.

2. Efecto de las proyectividades. Cuádricas en subespacios

Sea $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ una proyectividad. Tenemos una proyectividad inducida entre los espacios de cuádricas

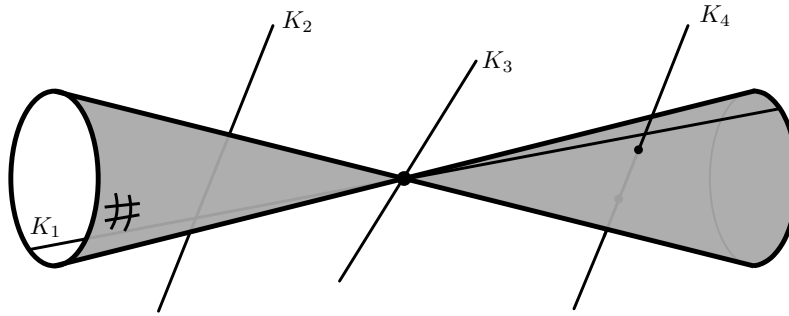
$$(3) \quad \vartheta_\Phi : \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V)) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V'))$$

dada por $[\varsigma] \mapsto [\varsigma \circ \phi^{-1}]$, donde $\phi : V \rightarrow V'$ es uno cualquiera de los isomorfismos de espacios vectoriales que definen Φ .

DEFINICIÓN 5. Sean \mathfrak{c} y \mathfrak{c}' cuádricas sobre $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$ respectivamente. Diremos que \mathfrak{c} y \mathfrak{c}' son proyectivamente equivalentes cuando exista una proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ tal que $\mathfrak{c}' = \vartheta_\Phi(\mathfrak{c})$.

Por otro lado, dados una cuádrica $\mathfrak{c} = [\varsigma]$ de $\mathbb{P}(V)$ y un subespacio proyectivo $K = \mathbb{P}(W)$ de $\mathbb{P}(V)$, tenemos dos posibilidades:

1. La restricción $\varsigma|_W$ de la forma cuadrática ς a W es idénticamente nula. En este caso, decimos que K “está contenido en el soporte de \mathfrak{c} ” (esta afirmación será precisada más adelante). No se induce ninguna cuádrica sobre K .
2. La restricción $\varsigma|_W$ de ς a W no es idénticamente nula. Se obtiene una cuádrica $\mathfrak{c}|_K = [\varsigma|_W]$ de K que llamaremos *restricción de \mathfrak{c} a K* .



Posibilidad (1): K_1 . Posibilidad (2): K_2, K_3, K_4 .

3. Descripción matricial de las cuádricas. Polinomios homogéneos

Consideremos una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_n; U\}$ de $\mathbb{P}(V)$. Como hemos visto, tenemos una proyectividad

$$\vartheta_{\mathcal{R}} : \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V)) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Q}(k^{n+1})), \quad \vartheta_{\mathcal{R}} = \vartheta_{\Psi_{\mathcal{R}}}$$

inducida por la proyectividad de coordenadas homogéneas $\Psi_{\mathcal{R}} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}_n^k$.

Dada una cuádrica \mathfrak{c} de $\mathbb{P}(V)$, diremos que la cuádrica $\vartheta_{\mathcal{R}}(\mathfrak{c})$ de \mathbb{P}_n^k es la *descripción en coordenadas homogéneas de \mathfrak{c} en la referencia \mathcal{R}* . Diremos asimismo que $\vartheta_{\mathcal{R}}$ es la proyectividad *de descripción en coordenadas homogéneas para las cuádricas de $\mathbb{P}(V)$ en la referencia \mathcal{R}* .

Tenemos una compatibilidad “funtorial” de las proyectividades de descripción en coordenadas homogéneas para las cuádricas. Concretamente, supongamos que tenemos dos proyectividades

$$\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V'), \quad \Phi' : \mathbb{P}(V') \rightarrow \mathbb{P}(V'').$$

Del mismo modo que antes, obtenemos proyectividades

$$\vartheta_\Phi : \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V)) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V')), \quad \vartheta_{\Phi'} : \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V')) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V'')).$$

La propiedad “funtorial” dice que se tiene $\vartheta_{\Phi' \circ \Phi} = \vartheta_{\Phi'} \circ \vartheta_\Phi$.

Como consecuencia de lo anterior, dada una referencia proyectiva \mathcal{R} en $\mathbb{P}(V)$ y su imagen $\mathcal{R}' = \Phi(\mathcal{R})$ por una proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$, tenemos la *propiedad de compatibilidad de las descripciones en coordenadas homogéneas para las cuádricas*, descrita por la siguiente igualdad

$$\vartheta_{\mathcal{R}'} \circ \vartheta_\Phi = \vartheta_{\mathcal{R}}.$$

La descripción en coordenadas homogéneas de las cuádricas permite estudiar los elementos de $\mathbb{P}(\mathcal{Q}(k^{n+1}))$ y considerar acto seguido la identificación $\vartheta_{\mathcal{R}}$ una vez se ha fijado una referencia proyectiva \mathcal{R} de $\mathbb{P}(V)$, con el fin de obtener propiedades de las cuádricas de $\mathbb{P}(V)$, a partir de propiedades en \mathbb{P}_k^n , siempre que estas se transmitan por las proyectividades de tipo $\vartheta_{\mathcal{R}}$.

Procedemos pues a describir los elementos de $\mathbb{P}(\mathcal{Q}(k^{n+1}))$, que podemos llamar *cuádricas en coordenadas homogéneas*.

3.1. Matrices. Para cada $0 \leq i \leq j \leq n$, denotemos $\bar{\sigma}_{ij}$ la forma bilineal simétrica $\bar{\sigma}_{ij} : k^{n+1} \times k^{n+1} \rightarrow k$ dada por

$$\bar{\sigma}_{ij}((\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)) = \begin{cases} \lambda_i \mu_j + \lambda_j \mu_i, & \text{si } i < j \\ \lambda_i \mu_i, & \text{si } i = j, \end{cases}$$

cuya forma cuadrática asociada $\bar{\zeta}_{ij} : k^{n+1} \rightarrow k$ está dada por

$$\bar{\zeta}_{ij}((\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \begin{cases} 2\lambda_i \lambda_j, & \text{si } i < j \\ \lambda_i^2, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Sabemos que $\{\bar{\sigma}_{ij}\}_{0 \leq i \leq j \leq n}$ es una base de $\text{Sim}(k^{n+1})$ y que $\{\bar{\zeta}_{ij}\}_{0 \leq i \leq j \leq n}$ lo es de $\mathcal{Q}(k^{n+1})$. Consideremos ahora una forma bilineal simétrica $\bar{\sigma} \in \text{Sim}(k^{n+1})$ y escribamos

$$\bar{\sigma} = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} \bar{\sigma}_{ij}, \quad \alpha_{ij} \in k.$$

Definimos la matriz simétrica $A_{\bar{\sigma}} = (a_{ij})$ de dimensión $(n+1) \times (n+1)$ por $a_{ij} = \alpha_{ij}$, si $0 \leq i \leq j \leq n$ y $a_{ij} = \alpha_{ji}$, si $i > j$. Las fórmulas anteriores nos dicen que

$$\bar{\sigma}((\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) A_{\bar{\sigma}} (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)^t,$$

donde $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)^t$ es la matriz (columna) traspuesta de la matriz (fila) dada por $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$. Del mismo modo, si $\bar{\zeta}$ es la forma cuadrática asociada a $\bar{\sigma}$, tenemos que

$$\bar{\zeta}((\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) A_{\bar{\sigma}} (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)^t.$$

Así, diremos que $A_{\bar{\sigma}}$ es la *matriz de la forma bilineal simétrica* $\bar{\sigma}$. Escribiremos también $A_{\bar{\zeta}} = A_{\bar{\sigma}}$ y diremos que es la *matriz de la forma cuadrática* $\bar{\zeta}$.

Sea $\mathcal{M}_k(n+1)$ el espacio vectorial de las matrices $(n+1) \times (n+1)$ con coeficientes en el cuerpo k , que tiene dimensión $(n+1)^2$. El subconjunto $\text{Sim}\mathcal{M}_k(n+1)$ de las

matrices simétricas forma un subespacio vectorial de dimensión $(n+1)(n+2)/2$. De este modo, tenemos un isomorfismo vectorial

$$\mathcal{Q}(k^{n+1}) \leftrightarrow \text{Sim}\mathcal{M}_k(n+1); \quad \bar{\zeta} \mapsto A_{\bar{\zeta}}$$

que induce una proyectividad

$$\mathbb{P}(\mathcal{Q}(k^{n+1})) \leftrightarrow \mathbb{P}(\text{Sim}\mathcal{M}_k(n+1)); \quad [\bar{\zeta}] \mapsto [A_{\bar{\zeta}}].$$

Diremos que $\mathcal{A}(\bar{\mathfrak{c}}) = [A_{\bar{\zeta}}]$ es la *recta de matrices de la cuádrlica* $\bar{\mathfrak{c}} = [\bar{\zeta}]$. Finalmente, dadas una cuádrlica \mathfrak{c} y una referencia proyectiva \mathcal{R} de $\mathbb{P}(V)$, diremos que $\mathcal{A}(\bar{\mathfrak{c}})$ es la *recta de matrices de \mathfrak{c} en la referencia \mathcal{R}* , donde $\bar{\mathfrak{c}} = \vartheta_{\mathcal{R}}(\mathfrak{c})$.

3.2. Polinomios cuadráticos.

Consideremos el anillo de polinomios

$$k[X_0, X_1, \dots, X_n]$$

con coeficientes en k y en las $n+1$ indeterminadas que denotamos X_0, X_1, \dots, X_n . Recordamos que un polinomio $F \in k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ es homogéneo de grado d si y sólo si se escribe de la forma

$$F = \sum_{i_0+i_1+\dots+i_n=d} c_{i_0i_1\dots i_n} X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}.$$

Dado un entero $d \geq 0$, denotamos por $k[X_0, X_1, \dots, X_n]_d$ el conjunto de polinomios homogéneos de grado d . Sabemos que cada $k[X_0, X_1, \dots, X_n]_d$ es un espacio vectorial de dimensión finita. Más precisamente

$$\dim_k k[X_0, X_1, \dots, X_n]_d = \binom{n+d}{d}.$$

En el caso particular de que $d = 2$, la dimensión es $(n+1)(n+2)/2$ que, como hemos visto, es también la dimensión del espacio de formas cuadráticas sobre un espacio vectorial de dimensión $n+1$. Esto nos permite dar isomorfismos de espacios vectoriales

$$\text{Sim}(k^{n+1}) \leftrightarrow \mathcal{Q}(k^{n+1}) \leftrightarrow \text{Sim}\mathcal{M}_k(n+1) \leftrightarrow k[X_0, X_1, \dots, X_n]_2,$$

definidos por

$$\bar{\sigma} \leftrightarrow \bar{\zeta} \leftrightarrow A_{\bar{\zeta}} = A_{\bar{\sigma}} \leftrightarrow F_{\bar{\zeta}},$$

de modo que si $A_{\bar{\zeta}} = (a_{ij})$, el *polinomio* $F_{\bar{\zeta}}$ asociado a $\bar{\zeta}$ está dado por

$$F_{\bar{\zeta}} = \sum_{i=0}^n a_{ii} X_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq n} 2a_{ij} X_i X_j.$$

Obsérvese la propiedad fundamental:

$$\bar{\zeta}((\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)) = F_{\bar{\zeta}}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

La *recta de polinomios* $\mathcal{P}(\bar{\mathfrak{c}})$ de una cuádrlica $\bar{\mathfrak{c}} = [\bar{\zeta}]$ de \mathbb{P}_k^n es el punto proyectivo

$$\mathcal{P}(\bar{\mathfrak{c}}) = [F_{\bar{\zeta}}] \in \mathbb{P}(k[X_0, X_1, \dots, X_n]_2).$$

Finalmente, la *recta de polinomios asociada a una cuádrlica \mathfrak{c} de $\mathbb{P}(V)$ en una referencia dada \mathcal{R}* está dada por $\mathcal{P}(\bar{\mathfrak{c}})$, donde $\bar{\mathfrak{c}} = \vartheta_{\mathcal{R}}(\mathfrak{c})$.

4. El soporte de una cuádrica

Sea $\mathfrak{c} = [\zeta]$ una cuádrica sobre $\mathbb{P}(V)$. El *soporte* $\text{Sop}(\mathfrak{c})$ es el subconjunto de $\mathbb{P}(V)$ dado por

$$\text{Sop}(\mathfrak{c}) = \{[v] \in \mathbb{P}(V); \zeta(v) = 0\}.$$

Está bien definido, en efecto si $[\zeta'] = [\zeta]$ y $[v'] = [v]$, existen escalares no nulos λ y μ tales que $\zeta' = \lambda\zeta$ y $v' = \mu v$; por consiguiente $\zeta'(v') = \lambda\mu^2\zeta(v)$ y entonces se tiene que $\zeta'(v') = 0$ si y sólo si $\zeta(v) = 0$.

Consideremos una referencia \mathcal{R} de $\mathbb{P}(V)$, una cuádrica \mathfrak{c} y un punto $P = [v]$. Sean $\Psi_{\mathcal{R}}(P) = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n]$ y $\vartheta_{\mathcal{R}}(\mathfrak{c}) = [\bar{\zeta}]$; obsérvese que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $P \in \text{Sop}(\mathfrak{c})$.
- $\bar{\zeta}([\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n]) = 0$.
- $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)A_{\bar{\zeta}}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)^t = 0$.
- $F_{\bar{\zeta}}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$.

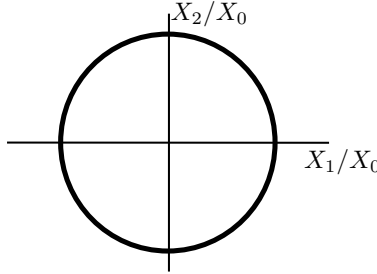
El soporte puede ser vacío, así por ejemplo, sobre el cuerpo real $k = \mathbb{R}$, la cuádrica de \mathbb{P}_k^n , cuya recta de polinomios está generada por

$$X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_n^2,$$

tiene soporte vacío. Por otro lado, el soporte no necesariamente coincide con un subespacio proyectivo. Por ejemplo, en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la cuádrica con recta de polinomios generada por

$$X_1^2 + X_2^2 - X_0^2,$$

tiene soporte no vacío que no contiene ninguna recta (es una “circunferencia” en una carta afín adecuada).



El soporte se comporta bien por proyectividades, es decir, si $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ es una proyectividad, entonces

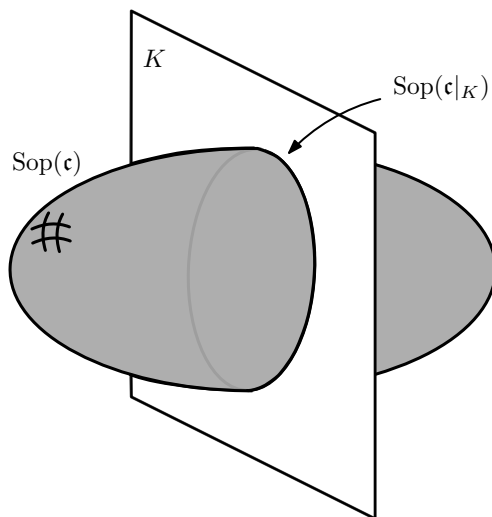
$$\Phi(\text{Sop}(\mathfrak{c})) = \text{Sop}(\vartheta_{\Phi}(\mathfrak{c})).$$

Asimismo, se comporta bien por restricción a un subespacio. Más precisamente, si $K = \mathbb{P}(W)$ es un subespacio de $\mathbb{P}(V)$ y $\mathfrak{c} = [\zeta]$ es una cuádrica de $\mathbb{P}(V)$, tenemos dos posibilidades:

1. $K \subset \text{Sop}(\mathfrak{c})$. En este caso la restricción $\zeta|_W$ de ζ a W es idénticamente nula y no determina ninguna cuádrica sobre K .
2. $K \not\subset \text{Sop}(\mathfrak{c})$. En este caso la restricción $\mathfrak{c}|_K$ existe y cumple que

$$\text{Sop}(\mathfrak{c}|_K) = K \cap \text{Sop}(\mathfrak{c}).$$

Se deja al lector la comprobación detallada de estas propiedades.



5. Rango de las cuádricas proyectivas. El vértice de una cuádrica

Seleccionemos una forma cuadrática $\varsigma : V \rightarrow k$ y su forma bilineal simétrica asociada $\sigma : V \times V \rightarrow k$. La *aplicación de adjunción* ad_ς de ς es la aplicación lineal

$$\text{ad}_\varsigma : V \rightarrow V^*$$

definida por $v \in V \mapsto \text{ad}_\varsigma(v) : w \mapsto \sigma(v, w) = \sigma(w, v)$. Denotaremos también

$$\text{ad}_\varsigma(v) = \sigma(v, -) = \sigma(-, v).$$

Sea $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ una base del espacio vectorial V y denotemos por $\bar{\sigma}$ y $\bar{\varsigma}$ las correspondientes formas bilineal simétrica y cuadrática en k^{n+1} . Es decir, ponemos $\bar{\varsigma} = \varsigma \circ \psi_\beta^{-1}$, donde $\psi_\beta : V \rightarrow k^{n+1}$ es la aplicación de coordenadas asociada a β . Consideremos la matriz $A_{\bar{\sigma}} = A_{\bar{\varsigma}}$ de $\bar{\sigma}$. El lector puede comprobar que $A_{\bar{\sigma}}$ es la matriz de la aplicación de adjunción ad_ς en las bases β y β^* , donde β^* es la base dual de β .

Diremos que el *rango* $\text{rg}(\varsigma)$ de ς , respectivamente el *rango* $\text{rg}(\sigma)$ de σ , es el rango de la aplicación de adjunción ad_ς . Es decir, el rango es la dimensión de la imagen de ad_ς , que coincide con el rango de la matriz simétrica $A_{\bar{\varsigma}}$.

Dada una cuádrica $\mathfrak{c} = [\varsigma]$ de $\mathbb{P}(V)$, definimos el *rango* $\text{rg}(\mathfrak{c})$ por $\text{rg}(\mathfrak{c}) = \text{rg}(\varsigma)$. Nótese que si la dimensión de $\mathbb{P}(V)$ es n , el rango máximo que puede tener una cuádrica es igual a $n + 1$ y el mínimo es igual a 1 (si fuera cero, tendríamos que $\varsigma = 0$ y no definiría una cuádrica). Las cuádricas de rango máximo se llamarán *cuádricas no degeneradas*.

Dada una cuádrica $\mathfrak{c} = [\varsigma]$ de $\mathbb{P}(V)$, se define el *vértice* $\text{Vert}(\mathfrak{c})$ por

$$\text{Vert}(\mathfrak{c}) = \mathbb{P}(\ker(\text{ad}_\varsigma)).$$

Se trata de un subespacio proyectivo de $\mathbb{P}(V)$, cuya dimensión es

$$\dim \text{Vert}(\mathfrak{c}) = \dim_k(\ker(\text{ad}_\varsigma)) - 1 = n - \text{rg}(\mathfrak{c}).$$

En particular, tenemos que $-1 \leq \dim \text{Vert}(\mathfrak{c}) \leq n-1$ y la cuádrica es no degenerada si y solamente si el vértice es el conjunto vacío.

Existen cuádricas de la recta proyectiva sobre un cuerpo k con soporte vacío, por ejemplo la cuádrica de polinomio $X_0^2 + X_1^2$, con $k = \mathbb{R}$; obviamente, esto no ocurre para cuerpos algebraicamente cerrados. En el siguiente resultado, se describe el soporte de las cuádricas de la recta proyectiva:

PROPOSICIÓN 11. *Toda cuádrica degenerada de la recta proyectiva tiene soporte unipuntual. Una cuádrica no degenerada de la recta proyectiva tiene o bien un soporte vacío o bien un soporte con exactamente dos puntos.*

Demostración: Tomando coordenadas homogéneas, una cuádrica de la recta proyectiva está dada por un polinomio no idénticamente nulo

$$a_{00}X_0^2 + a_{11}X_1^2 + 2a_{01}X_0X_1.$$

La cuádrica es degenerada si y sólo si la matriz simétrica (a_{ij}) tiene determinante cero, es decir $a_{00}a_{11} - a_{01}^2 = 0$.

Supongamos primero que la cuádrica es degenerada. Si $a_{00} = a_{11} = 0$, tendríamos también $a_{01} = 0$ y el polinomio sería idénticamente nulo. Por tanto, salvo cambio de orden y eligiendo un polinomio proporcional, podemos suponer que $a_{00} = 1$. Entonces, el polinomio se escribe

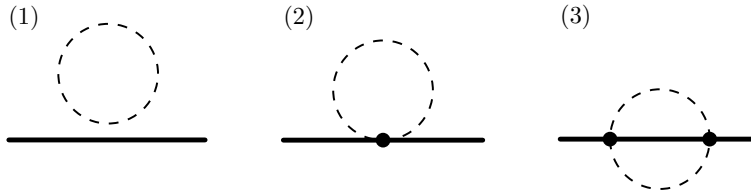
$$X_0^2 + a_{01}^2X_1^2 + 2a_{01}X_0X_1 = (X_0 + a_{01}X_1)^2.$$

El soporte tiene entonces el único punto $[-a_{01}, 1]$.

Si la cuádrica es no degenerada y tiene soporte no vacío, podemos suponer, salvo cambio de coordenadas homogéneas, que el punto $[1, 0]$ está en el soporte. Esto implica que $a_{00} = 0$ y además tenemos $a_{01} \neq 0$, por ser no degenerada. El polinomio queda

$$(a_{11}X_1 + 2a_{01}X_0)X_1.$$

El soporte está formado por los dos puntos distintos $[1, 0]$ y $[-a_{11}, 2a_{01}]$. CQD.

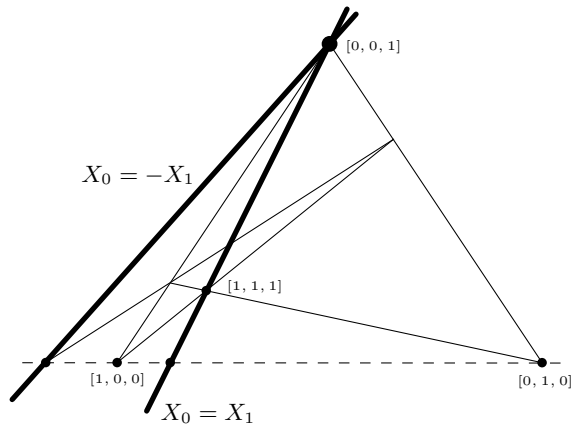


Cónicas no degeneradas: (1) y (3). Cónicas degeneradas: (2).

OBSERVACIÓN 13. El vértice de una cuádrica siempre está contenido en su soporte. Esto no significa que sea el único subespacio proyectivo contenido en el soporte. Piénsese, por ejemplo, en la cuádrica de \mathbb{P}_k^2 dada por el polinomio

$$(X_1 + X_0)(X_1 - X_0)$$

cuyo soporte es la unión de las dos rectas $X_1 = X_0$ y $X_1 = -X_0$ y cuyo vértice es el punto $[0, 0, 1]$. Lo que sí ocurre, es que el soporte es un “cono” sobre el vértice, de ahí la denominación de “vértice”, como mostramos en las siguientes proposiciones.



PROPOSICIÓN 12. Consideremos una cuádrlica $\mathfrak{c} = [\zeta]$ de $\mathbb{P}(V)$ y un subespacio proyectivo $K = \mathbb{P}(W)$ tal que $K \not\subset \text{Sop}(\mathfrak{c})$. Se tiene que

$$(4) \quad \text{Vert}(\mathfrak{c}) \cap K \subset \text{Vert}(\mathfrak{c}|_K).$$

Demostración: La aplicación traspuesta $V^* \rightarrow W^*$ de la inclusión $W \subset V$ es suprayectiva y está dada por

$$(\alpha : V \rightarrow k) \mapsto (\alpha|_W : W \rightarrow k).$$

En términos de aplicaciones adjuntas, obtenemos un diagrama conmutativo

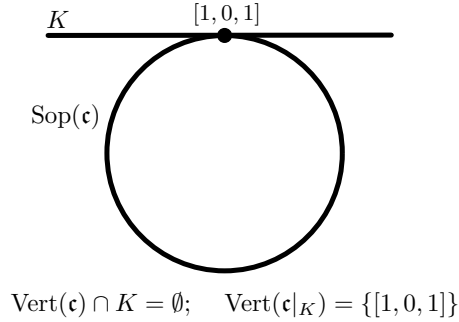
$$\begin{array}{ccc} \text{ad}_\zeta : & V & \rightarrow & V^* \\ & \uparrow & & \downarrow \\ \text{ad}_{\zeta|_W} : & W & \rightarrow & W^* \end{array}$$

Si ahora tomamos $P = [w] \in \text{Vert}(\mathfrak{c}) \cap K$ sabemos que $\text{ad}_\zeta(w) = 0$, por consiguiente $\text{ad}_{\zeta|_W}(w) = 0$ y entonces $P \in \text{Vert}(\mathfrak{c}|_K)$. CQD.

La igualdad en la ecuación 4 no siempre se cumple. Es precisamente la propiedad que nos servirá para identificar espacios tangentes más adelante. Por ejemplo, consideremos la cónica no degenerada de \mathbb{P}_k^2 dada por el polinomio

$$X_1^2 + X_2^2 - X_0^2$$

y la recta $X_2 = X_0$. Tomando coordenadas homogéneas en esa recta de modo que $\Psi([Y_0, Y_1, Y_0]) = [Y_0, Y_1]$, la restricción de la cuádrlica está dada por el polinomio Y_1^2 y es, por tanto, degenerada: su vértice es el punto de coordenadas homogéneas $[1, 0]$.



PROPOSICIÓN 13. Consideremos una cuádrica \mathfrak{c} de $\mathbb{P}(V)$, un subespacio proyectivo L contenido en el vértice $\text{Vert}(\mathfrak{c})$ y un subespacio K complementario de L . Se tienen las siguientes propiedades:

1. $K \not\subset \text{Vert}(\mathfrak{c})$ y por tanto la restricción $\mathfrak{c}|_K$ existe.
2. $\text{Vert}(\mathfrak{c}|_K) = K \cap \text{Vert}(\mathfrak{c})$.
3. Si $\text{Sop}(\mathfrak{c}|_K) \neq \emptyset$, el soporte $\text{Sop}(\mathfrak{c})$ es la unión de los subespacios $L + P$, donde P recorre los puntos de $\text{Sop}(\mathfrak{c}|_K)$.
4. Si $\text{Sop}(\mathfrak{c}|_K) = \emptyset$, entonces $L = \text{Vert}(\mathfrak{c}) = \text{Sop}(\mathfrak{c})$.

Demostración: Escribamos $L = \mathbb{P}(S)$ y $K = \mathbb{P}(W)$. Como L y K son complementarios, tenemos que $L \cap K = \emptyset$ y $L + K = \mathbb{P}(V)$; esto es equivalente a decir que se tiene una suma directa interna $V = W \oplus S$. Elijamos ς y σ , formas cuadrática y bilineal simétrica respectivamente, asociadas a la cuádrica \mathfrak{c} . Las observaciones clave son que si $v = w + s, v' = w' + s' \in V$, con $w, w' \in W$ y $s, s' \in S$, tenemos

$$(5) \quad \sigma(v, v') = \sigma(w, w') + \sigma(w, s') + \sigma(s, w') + \sigma(s, s') = \sigma(w, w'),$$

$$(6) \quad \varsigma(v) = \varsigma(w) + \varsigma(s) + 2\sigma(w, s) = \varsigma(w).$$

Probemos la afirmación (1). Sabemos que existe $v = w + s$ con $\varsigma(v) \neq 0$, dado que ς no es idénticamente nula; entonces $\varsigma(w) \neq 0$ y como consecuencia, la restricción $\varsigma|_W : W \rightarrow k$ no es idénticamente nula.

Para probar (2), basta ver que $\text{Vert}(\mathfrak{c}|_K) \subset K \cap \text{Vert}(\mathfrak{c})$, en vista de la proposición anterior. Esto es lo mismo que probar que si $w \in W$ cumple que $\sigma(w, w') = 0$ para todo $w' \in W$, entonces $\sigma(w, v') = 0$ para todo $v' \in V$; escribamos $v' = w' + s'$, tenemos que $\sigma(w, v') = \sigma(w, w')$ y se concluye.

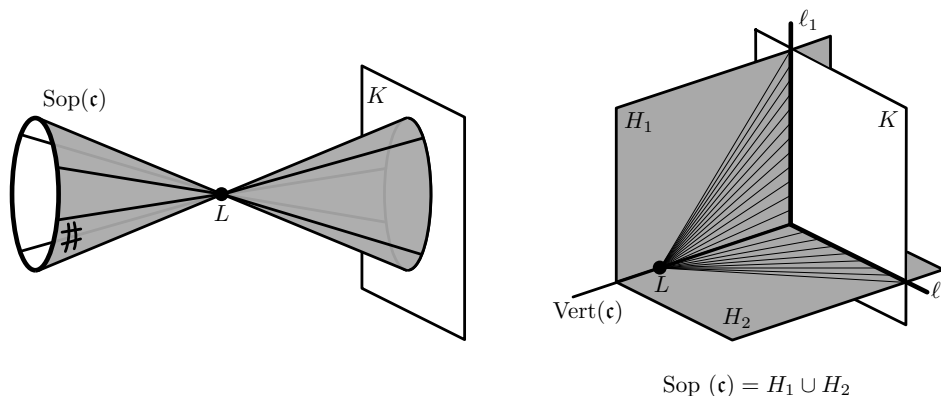
Probemos (3). Tomemos un punto $Q = [v] \in \text{Sop}(\mathfrak{c})$ y escribamos $v = w + s$, con $w \in W$ y $s \in S$. Sean $P = [w] \in K$ y $R = [s] \in L$. Como Q está en la recta que une P con R , tenemos que $Q \in P + L$. Ahora, es suficiente ver que $P \in \text{Sop}(\mathfrak{c}|_K)$, lo cual es cierto, dado que $\varsigma(v) = 0$ y entonces también $\varsigma(w) = 0$. Recíprocamente, si $Q = [v] \in P + L$, con $P = [w] \in \text{Sop}(\mathfrak{c}|_K)$, podemos escribir $v = w + s$, donde $\varsigma(w) = 0$. Tenemos que $\varsigma(v) = \varsigma(w) = 0$ y así $P \in \text{Sop}(\mathfrak{c})$.

Finalmente, probemos (4). Si $L \neq \text{Vert}(\mathfrak{c})$, entonces tenemos que

$$\text{Vert}(\mathfrak{c}|_K) = K \cap \text{Vert}(\mathfrak{c}) \neq \emptyset$$

y por consiguiente $\text{Sop}(\mathfrak{c}|_K) \neq \emptyset$. Se sigue que $L = \text{Vert}(\mathfrak{c})$. Si existe un punto $P \in \text{Sop}(\mathfrak{c}) \setminus L$, podemos elegir un complementario K' de L que lo contenga. Aplicando (3) a K' , el subespacio $P + L$ está contenido en $\text{Sop}(\mathfrak{c})$. Por dimensionalidad,

sabemos que $K \cap (P + L) \neq \emptyset$. Dado que $K \cap (P + L) \subset K \cap \text{Sop}(\mathfrak{c}) = \text{Sop}(\mathfrak{c}|_K)$, se sigue que $\text{Sop}(\mathfrak{c}|_K)$ es distinto del vacío. CQD.



Si ahora hacemos $L = \text{Vert}(\mathfrak{c})$, obtenemos el siguiente corolario, que expresa la estructura cónica de una cuádrica sobre su vértice:

COROLARIO 2. *Consideremos una cuádrica \mathfrak{c} y un subespacio proyectivo K de $\mathbb{P}(V)$ que sea complementario del vértice $\text{Vert}(\mathfrak{c})$. La restricción $\mathfrak{c}|_K$ es una cuádrica no degenerada de K y el soporte $\text{Sop}(\mathfrak{c})$ es la unión de los subespacios $P + \text{Vert}(\mathfrak{c})$, donde $P \in \text{Sop}(\mathfrak{c}|_K)$, entendiéndose que $\text{Sop}(\mathfrak{c}) = \text{Vert}(\mathfrak{c})$ en el caso de que $\text{Sop}(\mathfrak{c}|_K)$ sea vacío.*

— — —

EJERCICIO 42. Dada una cuádrica \mathfrak{c} de $\mathbb{P}(V)$, demuéstrese que $\text{Sop}(\mathfrak{c}) \neq \text{Vert}(\mathfrak{c})$ si y solo si existe un subespacio $K \subset \mathbb{P}(V)$ complementario de $\text{Vert}(\mathfrak{c})$ tal que $\text{Sop}(\mathfrak{c}|_K) \neq \emptyset$. Pruébese que en este caso, para todo subespacio $K \subset \mathbb{P}(V)$ complementario de $\text{Vert}(\mathfrak{c})$ se tiene que $\text{Sop}(\mathfrak{c}|_K) \neq \emptyset$.

6. Aplicación de polaridad e hiperplanos polares

En esta sección introduciremos la *aplicación de polaridad*

$$\pi_{\mathfrak{c}} : \mathbb{P}(V) \setminus \text{Vert}(\mathfrak{c}) \mapsto \mathbb{P}(V^*),$$

relativa a una cuádrica \mathfrak{c} de $\mathbb{P}(V)$.

Seleccionemos una forma cuadrática $\varsigma : V \rightarrow k$ (y su forma bilineal simétrica asociada $\sigma : V \times V \rightarrow k$) que represente la cuádrica \mathfrak{c} . Consideremos un punto P de $\mathbb{P}(V)$ que no esté en el vértice $\text{Vert}(\mathfrak{c})$ y seleccionemos un representante vectorial v de P , esto es $P = [v]$. Recordemos que la condición necesaria y suficiente para que P no esté en el vértice es que $\text{ad}_{\varsigma}(v) \neq 0$, donde $\text{ad}_{\varsigma} : V \rightarrow V^*$ es la aplicación de adjunción de ς . Se define así la *aplicación $\pi_{\mathfrak{c}}$ de polaridad respecto de \mathfrak{c}* , o simplemente *polaridad respecto de \mathfrak{c}* , por

$$\pi_{\mathfrak{c}}(P) = [\text{ad}_{\varsigma}(v)] \in \mathbb{P}(V^*), \quad \mathfrak{c} = [\varsigma], \quad P = [v],$$

para todo $P \in \mathbb{P}(V) \setminus \text{Vert}(\mathfrak{c})$. La definición es consistente y no depende de la selección de ς , ni de la de v .

En la interpretación del espacio dual $\mathbb{P}(V^*)$ como el espacio de hiperplanos de $\mathbb{P}(V)$, tenemos que $\pi_{\mathfrak{c}}(P) = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$, donde $W = \text{Ker}(\text{ad}_{\zeta}(v))$. Así, diremos que $\pi_{\mathfrak{c}}(P)$ es el *hiperplano polar de P respecto de \mathfrak{c}* , para cada punto P fuera del vértice de \mathfrak{c} . Si el punto P está en el soporte de la cuádrica (siempre fuera del vértice), diremos que $\pi_{\mathfrak{c}}(P)$ es el *hiperplano tangente a \mathfrak{c} en P* . En el caso de que \mathfrak{c} sea no degenerada, la aplicación de adjunción ad_{ζ} es un isomorfismo, su núcleo es el cero y por dimensionalidad es sobre. En esta situación, la polaridad

$$\pi_{\mathfrak{c}} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$$

es la proyectividad inducida por ad_{ζ} .

OBSERVACIÓN 14. Para todo $P \in \mathbb{P} \setminus \text{Vert}(\mathfrak{c})$, se tiene que $\text{Vert}(\mathfrak{c}) \subset \pi_{\mathfrak{c}}(P)$.

La observación anterior queda precisada por la siguiente proposición, en la que se reduce el estudio de la polaridad al caso de cuádricas no degeneradas.

PROPOSICIÓN 14. *Sea \mathfrak{c} una cuádrica de $\mathbb{P}(V)$ y $K \subset \mathbb{P}(V)$ un subespacio complementario del vértice $\text{Vert}(\mathfrak{c})$. Dado un punto $Q \in \mathbb{P}(V) \setminus \text{Vert}(\mathfrak{c})$, denotemos por P el único punto de intersección entre K y $Q + \text{Vert}(\mathfrak{c})$. Se tiene que*

$$\pi_{\mathfrak{c}}(Q) = \pi_{\mathfrak{c}}(P) = \pi_{\mathfrak{c}|_K}(P) + \text{Vert}(\mathfrak{c}).$$

Demostración: Supongamos que $\text{Vert}(\mathfrak{c}) = \mathbb{P}(S)$ y $K = \mathbb{P}(W)$. Seleccionemos una forma cuadrática ζ que represente \mathfrak{c} y su forma bilineal simétrica asociada σ . Tenemos una descomposición en suma directa $V = S + W$. Escribamos $Q = [s + w]$, la relación indicada entre P y Q , permite ver que $P = [w]$. Asimismo, en virtud de las propiedades establecidas en las ecuaciones 5 y 6, tenemos que

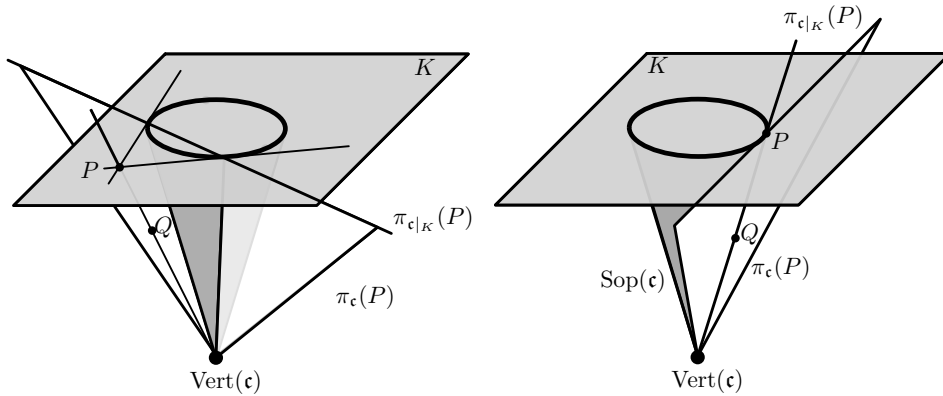
$$\text{ad}_{\zeta}(s + w) = \text{ad}_{\zeta}(w),$$

lo cual ya prueba que $\pi_{\mathfrak{c}}(Q) = \pi_{\mathfrak{c}}(P)$.

Consideremos ahora un punto $Q' = [s' + w']$ y sea $P' = [w'] \in K$. Si Q' está en $\pi_{\mathfrak{c}}(P)$ se tiene que $\sigma(w, s' + w') = 0$; dado que $\sigma(w, s' + w') = \sigma(w, w')$, vemos que P' está en $\pi_{\mathfrak{c}|_K}(P)$ y por tanto tenemos

$$Q' \in P' + \text{Vert}(\mathfrak{c}) \subset \pi_{\mathfrak{c}|_K}(P) + \text{Vert}(\mathfrak{c}).$$

Recíprocamente, si $Q' \in \pi_{\mathfrak{c}|_K}(P) + \text{Vert}(\mathfrak{c})$, se tiene que $Q' = [s' + w']$, donde $\sigma(w', w) = 0$. Como $\sigma(s' + w', w) = \sigma(w', w)$, concluimos que $Q' \in \pi_{\mathfrak{c}}(P)$. CQD.



Como consecuencia, para averiguar quién es el hiperplano polar de un punto Q fuera del vértice $\text{Vert}(\mathfrak{c})$, es suficiente seleccionar un espacio complementario K de $\text{Vert}(\mathfrak{c})$ y calcular el hiperplano polar en K del punto $(Q + \text{Vert}(\mathfrak{c})) \cap K$ respecto de la cuádrlica restricción $\mathfrak{c}|_K$, que es no degenerada.

OBSERVACIÓN 15. (Ecuaciones del hiperplano polar). Consideremos una cuádrlica \mathfrak{c} y una referencia \mathcal{R} en un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensión n . Recordemos que $\Psi_{\mathcal{R}} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ es la proyectividad de coordenadas homogéneas y que $\vartheta_{\mathcal{R}}$ es la descripción en coordenadas homogéneas de las cuádrlicas dada por la referencia \mathcal{R} , véase la ecuación 3. Escribamos $\bar{\mathfrak{c}} = \vartheta_{\mathcal{R}}(\mathfrak{c})$. Sabemos que

$$\text{Vert}(\mathfrak{c}) = \Psi_{\mathcal{R}}^{-1}(\text{Vert}(\bar{\mathfrak{c}}))$$

y que las aplicaciones de polaridad satisfacen que $H_P = \Psi_{\mathcal{R}}^{-1}(\bar{H}_{\bar{P}})$, para todo punto $P \in \mathbb{P}(V) \setminus \text{Vert}(\mathfrak{c})$, con $\bar{P} = \Psi_{\mathcal{R}}(P)$ y donde $H_P, \bar{H}_{\bar{P}}$ son el hiperplano polar de P relativo a \mathfrak{c} , respectivamente de \bar{P} relativo a $\bar{\mathfrak{c}}$.

Así pues, para expresar el hiperplano polar H_P de P en coordenadas homogéneas, tenemos que describir el hiperplano polar $\bar{H}_{\bar{P}}$ de \bar{P} respecto de $\bar{\mathfrak{c}}$. Supongamos que $\bar{\mathfrak{c}}$ está representada por la matriz simétrica $A = (\alpha_{ij})$ y que

$$\bar{P} = [\lambda] = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n].$$

Tenemos que $\bar{H}_{\bar{P}} = \mathbb{P}(\bar{W})$, donde $\bar{W} \subset k^{n+1}$ es el núcleo de la aplicación lineal

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)A(x_0, x_1, \dots, x_n)^t.$$

Escribiendo el producto matricial $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)A = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$, una ecuación de el hiperplano polar $\bar{H}_{\bar{P}}$ está dada por

$$\mu_0 X_0 + \mu_1 X_1 + \dots + \mu_n X_n = 0.$$

— — —

EJERCICIO 43. Consideremos una cuádrlica \mathfrak{c} de $\mathbb{P}(V)$. Demuéstrese que la imagen de la aplicación de polaridad $\pi_{\mathfrak{c}} : \mathbb{P}(V) \setminus \text{Vert}(\mathfrak{c}) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$ consiste en los hiperplanos de $\mathbb{P}(V)$ que contienen el vértice $\text{Vert}(\mathfrak{c})$.

EJERCICIO 44. Consideremos una cuádrlica \mathfrak{c} de $\mathbb{P}(V)$, y dos puntos P, Q que no estén en el vértice $\text{Vert}(\mathfrak{c})$. Demuéstrese que

$$Q \in \pi_{\mathfrak{c}}(P) \Leftrightarrow P \in \pi_{\mathfrak{c}}(Q).$$

7. Hiperplanos tangentes de cuádrlicas no degeneradas

La proposición 14 permite reducir el estudio de la aplicación de polaridad al caso de cuádrlicas no degeneradas. Aquí nos restringiremos a lo concerniente a los hiperplanos tangentes.

PROPOSICIÓN 15. *Sea \mathfrak{c} una cuádrlica no degenerada de $\mathbb{P}(V)$. Dados un punto P y su hiperplano polar $H = \pi_{\mathfrak{c}}(P)$, son equivalentes:*

1. $P \in \text{Sop}(\mathfrak{c})$. Es decir, tenemos que H es el hiperplano tangente a \mathfrak{c} en P .
2. $P \in H$.
3. La restricción $\mathfrak{c}|_H$ de \mathfrak{c} a H es una cuádrlica degenerada de H .
4. $\text{Vert}(\mathfrak{c}|_H) = \{P\}$.

Demostración: Seleccionemos una forma cuadrática ς que represente \mathfrak{c} y su forma bilineal simétrica asociada σ . Escribamos $P = [v]$ y $H = \mathbb{P}(W)$. Sabemos que W es el núcleo de $\text{ad}_\varsigma(v)$, esto es $W = \{w \in V; \sigma(v, w) = 0\}$.

Veamos que (1) es equivalente a (2). Tenemos que $P \in \text{Sop}(\mathfrak{c})$ si y solo si $\sigma(v, v) = 0$, lo que es equivalente a decir que $v \in W$, esto es $P \in H$.

Veamos que (2) implica (3). Como $H \not\subset \text{Sop}(\mathfrak{c})$, la restricción $\mathfrak{c}|_H$ existe; comprobemos ahora que $\text{Vert}(\mathfrak{c}|_H) \neq \emptyset$. Como $P \in H$, tenemos que $v \in W$ y dado que $\sigma(v, w) = 0$ para todo $w \in W$, se tiene que $P \in \text{Vert}(\mathfrak{c}|_H)$ y concluimos.

Veamos que (3) implica (2). Sabemos que existe un vector no nulo $w_0 \in W$ tal que $Q = [w_0] \in H$ está en el vértice de $\mathfrak{c}|_H$. Es decir, se tiene que

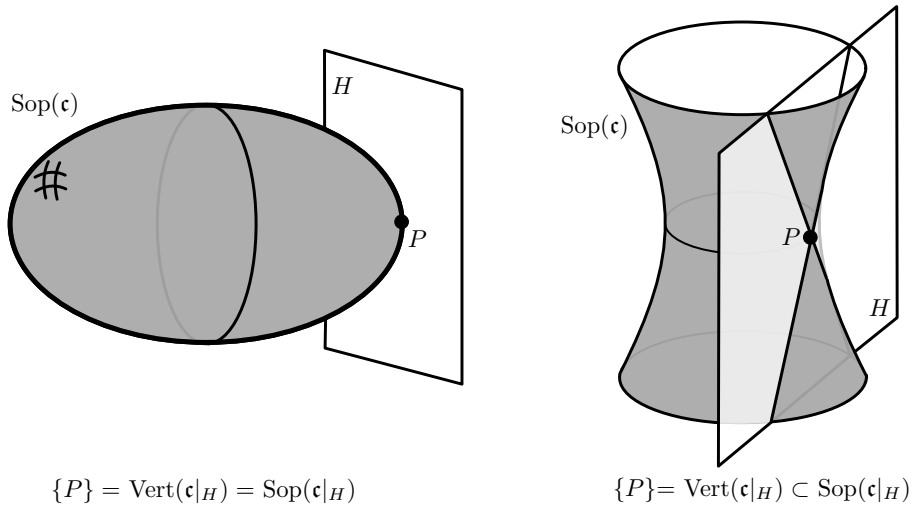
$$\sigma(w_0, w) = 0,$$

para todo $w \in W$. Esto implica que $\pi_\mathfrak{c}(Q) = H$. Como $\pi_\mathfrak{c}$ es una biyección, tenemos que $Q = P$ y por tanto $P \in H$. De este modo, se ve también que (3) implica (4). Finalmente (4) implica (3), ya que $\text{Vert}(\mathfrak{c}|_H) = \{P\} \neq \emptyset$. CQD.

Considerando las afirmaciones opuestas, tenemos el corolario siguiente:

COROLARIO 3. *Sea \mathfrak{c} una cuádrica no degenerada de $\mathbb{P}(V)$. Dados un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ y su hiperplano polar $H = \pi_\mathfrak{c}(P)$, son equivalentes:*

1. $P \notin \text{Sop}(\mathfrak{c})$.
2. $P \notin H$.
3. La restricción $\mathfrak{c}|_H$ de \mathfrak{c} a H es una cuádrica no degenerada de H .



OBSERVACIÓN 16. Cuando tratamos con cuádricas degeneradas, podemos pensar en ellas geoméricamente como un cono construido sobre una cuádrica no degenerada en dimensión menor. Esto es así al tratar con el soporte, también se puede hacer un estudio más abstracto, que omitiremos por falta material de tiempo en este curso.

— — —

EJERCICIO 45. Sea $F(X_0, X_1, \dots, X_n) \in k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ un polinomio homogéneo de grado dos asociado a una cuádrlica \mathfrak{c} de \mathbb{P}_k^n . Demuéstrese que un punto $P = [\mathbf{a}]$ está en el vértice $\text{Vert}(\mathfrak{c})$ si y solo si

$$\frac{\partial F}{\partial X_i}(\mathbf{a}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pruébese asimismo que si P no está en el vértice, una ecuación del hiperplano polar de P respecto de \mathfrak{c} está dada por

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial X_i}(\mathbf{a}) \cdot X_i = 0.$$

EJERCICIO 46. Consideremos un espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}(V)$ y una cuádrlica no degenerada \mathfrak{c} sobre él. Tomemos un punto P que no esté en el soporte de \mathfrak{c} . Pruébese que el hiperplano polar $\pi_{\mathfrak{c}}(P)$ es el lugar geométrico de los cuartos armónicos de P respecto de la intersección con el soporte de las rectas que pasan por P .

8. Polaridad respecto de una cuádrlica no degenerada

Consideremos una cuádrlica no degenerada \mathfrak{c} del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$. En esta sección ampliaremos la definición de polaridad, de modo que podamos asociar a cada subespacio K de $\mathbb{P}(V)$ su subespacio polar $K^{\mathfrak{c}}$ respecto de la cuádrlica, donde $K^{\mathfrak{c}}$ está dentro del *mismo espacio ambiente* $\mathbb{P}(V)$.

Fijemos una forma cuadrática ς que represente \mathfrak{c} y su correspondiente forma bilineal simétrica asociada σ . Dado un subespacio proyectivo $K = \mathbb{P}(W)$ de $\mathbb{P}(V)$ definimos el *subespacio polar* $K^{\mathfrak{c}}$ de K respecto de \mathfrak{c} como $K^{\mathfrak{c}} = \mathbb{P}(W^{\varsigma})$, donde

$$W^{\varsigma} = \{v \in V; \text{ad}_{\varsigma}(w)(v) = 0, \text{ para todo } w \in W\} = \bigcap_{w \in W} \text{Ker}(\text{ad}_{\varsigma}(w)).$$

Dicho de otro modo, tenemos que

$$W^{\varsigma} = \{v \in V; \sigma(w, v) = 0, \text{ para todo } w \in W\}.$$

El subespacio $W^{\varsigma} \subset V$, que también denotaremos $W^{\sigma} = W^{\varsigma}$, se denomina usualmente *subespacio ortogonal de W respecto de la forma cuadrática ς* , o también *respecto de la forma bilineal simétrica σ* . En términos proyectivos $K^{\mathfrak{c}}$ está dado por la fórmula:

$$K^{\mathfrak{c}} = \bigcap_{P \in K} \pi_{\mathfrak{c}}(P).$$

Por construcción, para todo $P \in \mathbb{P}(V)$ tenemos que $\{P\}^{\mathfrak{c}}$ coincide con el hiperplano polar $\pi_{\mathfrak{c}}(P)$. De este modo, estamos ampliando el concepto de hiperplano polar de un punto a cualquier subespacio.

OBSERVACIÓN 17. 1 Nótese que $K^{\mathfrak{c}} \subset \mathbb{P}(V)$, mientras que $K^{\perp} \subset \mathbb{P}(V^*)$, donde K^{\perp} denota el subespacio dual-ortogonal de K .

LEMA 6. *Dado cualquier subespacio $K = \mathbb{P}(W)$ del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$, se tiene que $\dim_k W^{\varsigma} = \dim_k V - \dim_k W$, y por consiguiente*

$$\dim K^{\mathfrak{c}} = \dim \mathbb{P}(V) - \dim K - 1.$$

Demostración: Basta hacer la demostración para el espacio ambiente \mathbb{P}_k^n . Sean $A = (\alpha_{ij})$ la matriz de ς y $f^j = (f_0^j, f_1^j, \dots, f_n^j) \in k^{n+1}$, $j = 0, 1, \dots, d$, los elementos

de una base de $W \subset k^{n+1}$. Entonces $W^\mathfrak{c}$ está dado por las soluciones de

$$g^j \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = 0,$$

donde $g^j = f^j A$. Como A es una matriz inversible, se trata de un sistema lineal de ecuaciones homogéneas de rango $d + 1$ y por consiguiente el espacio de soluciones tiene dimensión $n - d$. CQD.

Vamos a interpretar la polaridad relativa a \mathfrak{c} en términos de la dualidad y del isomorfismo de adjunción $\text{ad}_\zeta : V \rightarrow V^*$. Denotemos por $\Delta^\mathfrak{c}$ la aplicación de polaridad, esto es

$$\Delta^\mathfrak{c} : \{\text{subespacios de } \mathbb{P}(V)\} \rightarrow \{\text{subespacios de } \mathbb{P}(V)\}$$

está dada por $K \mapsto K^\mathfrak{c} = \Delta^\mathfrak{c}(K)$. Pretendemos comprobar que $\Delta^\mathfrak{c}$ es un antiisomorfismo de retículos al mismo tiempo que lo relacionamos con la dualidad.

Recordemos que el isomorfismo de adjunción $\text{ad}_\zeta : V \rightarrow V^*$, así como el isomorfismo natural $\nu : V \rightarrow V^{**}$ inducen sendos isomorfismos de retículos

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\text{ad}_\zeta} : \{\text{subespacios de } \mathbb{P}(V)\} &\rightarrow \{\text{subespacios de } \mathbb{P}(V^*)\} \\ \mathfrak{R}_\nu : \{\text{subespacios de } \mathbb{P}(V)\} &\rightarrow \{\text{subespacios de } \mathbb{P}(V^{**})\}. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos los antiisomorfismos de retículos de dual-ortogonalidad

$$\begin{aligned} \Delta_V : \{\text{subespacios de } \mathbb{P}(V)\} &\rightarrow \{\text{subespacios de } \mathbb{P}(V^*)\} \\ \Delta_{V^*} : \{\text{subespacios de } \mathbb{P}(V^*)\} &\rightarrow \{\text{subespacios de } \mathbb{P}(V^{**})\}. \end{aligned}$$

La siguiente proposición relaciona polaridad y dual-ortogonalidad:

PROPOSICIÓN 16. *Se tiene que $\Delta^\mathfrak{c} = \mathfrak{R}_\nu^{-1} \circ \Delta_{V^*} \circ \mathfrak{R}_{\text{ad}_\zeta}$. En particular $\Delta^\mathfrak{c}$ es un antiisomorfismo de retículos.*

Demostración: Basta probar que $\mathfrak{R}_\nu \circ \Delta^\mathfrak{c} = \Delta_{V^*} \circ \mathfrak{R}_{\text{ad}_\zeta}$, componiendo por la izquierda con \mathfrak{R}_ν . Sea $K = \mathbb{P}(W)$ un subespacio de $\mathbb{P}(V)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta^\mathfrak{c}(K) &= \mathbb{P}(W^\mathfrak{c}); & \mathfrak{R}_\nu(\mathbb{P}(W^\mathfrak{c})) &= \mathbb{P}(\nu(W^\mathfrak{c})). \\ \mathfrak{R}_{\text{ad}_\zeta}(K) &= \mathbb{P}(\text{ad}_\zeta(W)); & \Delta_{V^*}(\mathbb{P}(\text{ad}_\zeta(W))) &= \mathbb{P}(\text{ad}_\zeta(W)^\perp). \end{aligned}$$

Así pues, basta ver que $\nu(W^\mathfrak{c}) = \text{ad}_\zeta(W)^\perp$, como subespacios de V^{**} . Sabemos que tienen la misma dimensión, igual a $\dim_k V - \dim_k W$ y por tanto, es suficiente probar que $\nu(W^\mathfrak{c}) \subset \text{ad}_\zeta(W)^\perp$. Tomemos un elemento $s \in \nu(W^\mathfrak{c}) \subset V^{**}$, queremos ver que $s \in \text{ad}_\zeta(W)^\perp$. Sabemos que $s = \nu(v)$ con $v \in W^\mathfrak{c}$ y, en particular, se tiene que $\sigma(v, w) = 0$ para todo $w \in W$. Como todo elemento de $\text{ad}_\zeta(W)$ es de la forma $\sigma(-, w)$, con $w \in W$, es suficiente probar que

$$s(\sigma(-, w)) = 0, \quad \text{para todo } w \in W.$$

Concluimos, dado que $s(\sigma(-, w)) = \nu(v)(\sigma(-, w)) = \sigma(v, w) = 0$. CQD.

COROLARIO 4. *Consideremos una cuádrlica no degenerada \mathfrak{c} del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$. Dados subespacios K_1 y K_2 de $\mathbb{P}(V)$, se tiene:*

$$K_1 \subset K_2 \Leftrightarrow K_1^\mathfrak{c} \supset K_2^\mathfrak{c}, \quad (K_1 + K_2)^\mathfrak{c} = K_1^\mathfrak{c} \cap K_2^\mathfrak{c}, \quad (K_1 \cap K_2)^\mathfrak{c} = K_1^\mathfrak{c} + K_2^\mathfrak{c}.$$

Además, la aplicación de polaridad es autoinversa, es decir, $(K^c)^c = K$, para todo subespacio K de $\mathbb{P}(V)$.

Demostración: La primera parte es consecuencia directa de la proposición precedente. Para demostrar la segunda parte, y recordando que

$$\dim K^c = \dim \mathbb{P}(V) - \dim K - 1,$$

basta probar que $K \subset (K^c)^c$. Esto es lo mismo que ver que $W \subset (W^c)^c$, donde $K = \mathbb{P}(W)$ y $c = [c]$. Tomemos $w \in W$, sabemos que $w \in (W^c)^c$ si y solamente si se cumple que

$$\sigma(w, v) = 0, \text{ para todo } v \in W^c,$$

pero esta última propiedad se cumple por definición de los elementos de W^c . CQD.

— — —

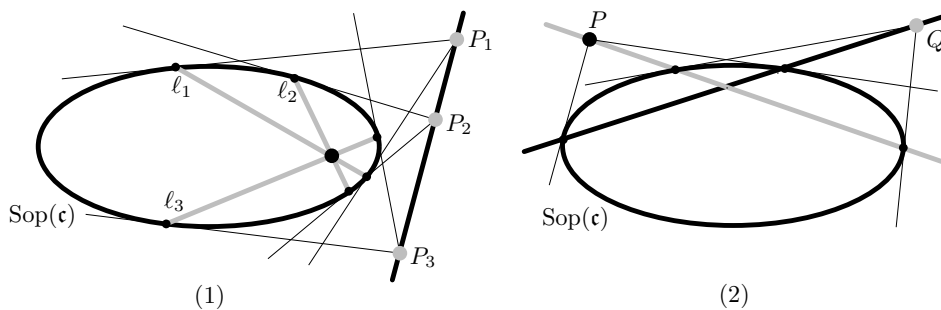
EJERCICIO 47. Consideremos un espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}(V)$, una cuádrlica no degenerada \mathfrak{c} sobre él y una recta ℓ tal que la restricción de \mathfrak{c} a ℓ es no degenerada. Pruébese que para cualquier punto $P \in \ell$, el hiperplano polar $\pi_c(P)$ no contiene ℓ y por tanto define un punto $\Phi(P) = \ell \cap \pi_c(P)$. Muéstrese además que Φ define una proyectividad de ℓ en ℓ , con exactamente dos puntos fijos y que es una involución ($\Phi^2 = \text{Id}$).

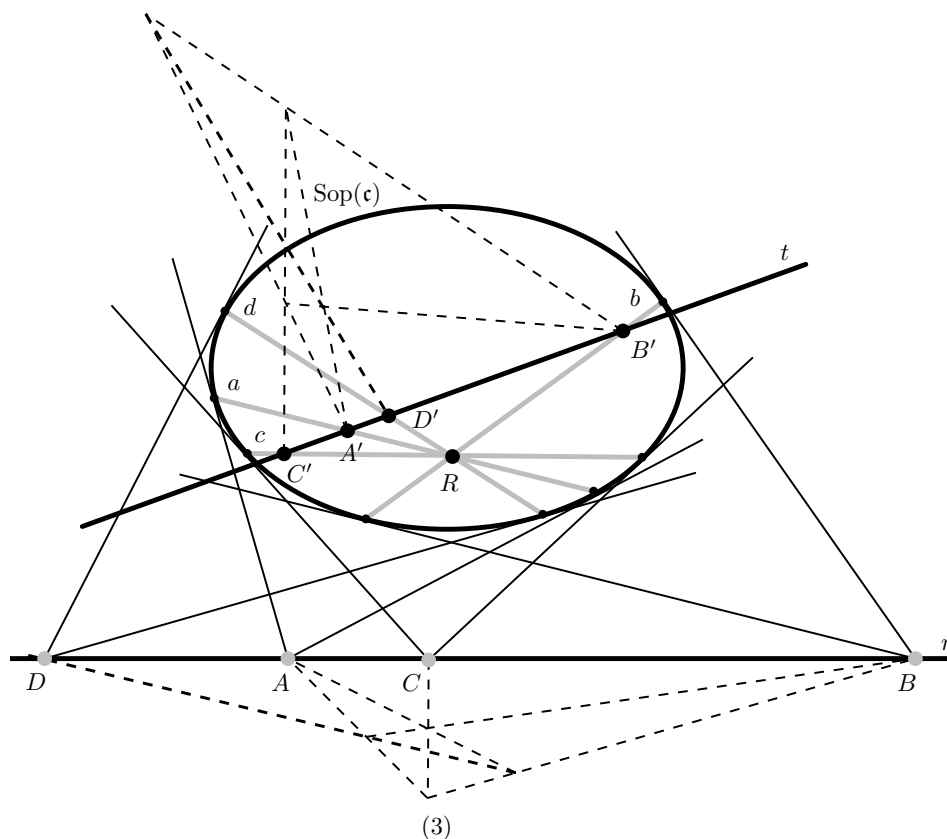
9. Cónicas no degeneradas. Polaridad y racionalidad

En esta sección recogemos resultados relativos a cónicas no degeneradas, su soporte, la polaridad y la racionalidad.

Consideremos un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y una cónica no degenerada \mathfrak{c} sobre él. Las siguientes observaciones son consecuencia directa del antiisomorfismo de retículos dado por la polaridad:

1. Las rectas polares de una familia de puntos alineados son concurrentes. Recíprocamente, los polos de las rectas de una familia de rectas concurrentes están alineados.
2. Si un punto P está en la polar de otro punto Q , entonces la polar de Q pasa por P .
3. Consideremos una recta r y cuatro puntos A, B, C, D de r que forman una cuaterna armónica. Las rectas polares a, b, c, d de A, B, C, D son concurrentes en el polo R de r y forman cuaterna armónica. Recordemos que esto último significa que si tomamos otra recta t que no pase por R , los puntos de corte A', B', C', D' de a, b, c, d con t forman una cuaterna armónica.



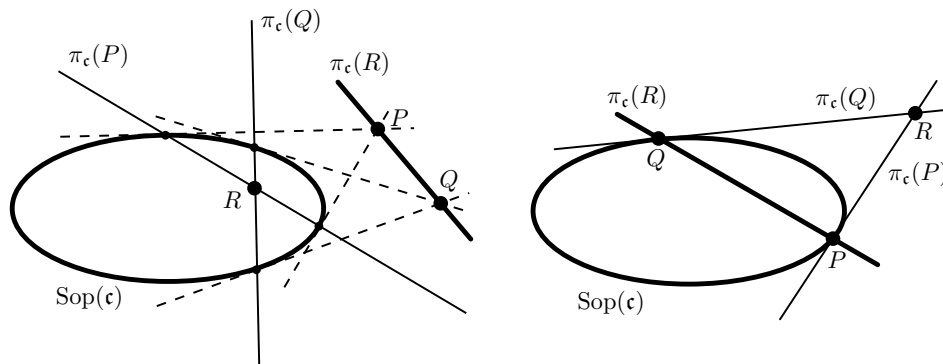


PROPOSICIÓN 17. Consideremos una cónica no degenerada \mathfrak{c} del plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y dos puntos distintos $P, Q \in \mathbb{P}(V)$. Las rectas polares $\pi_{\mathfrak{c}}(P)$ y $\pi_{\mathfrak{c}}(Q)$ son distintas y además la recta $P + Q$ es la recta polar del punto de intersección $R = \pi_{\mathfrak{c}}(P) \cap \pi_{\mathfrak{c}}(Q)$.

Demostración: Caso particular de las propiedades generales de la polaridad asociada a una cuádrica no degenerada. CQD.

La intersección de dos tangentes a una cónica da el polo de la recta que une los puntos de tangencia y recíprocamente:

COROLARIO 5. Consideremos una cónica no degenerada \mathfrak{c} del plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y dos puntos distintos $P, Q \in \text{Sop}(\mathfrak{c})$. Las rectas tangentes $\pi_{\mathfrak{c}}(P)$ y $\pi_{\mathfrak{c}}(Q)$ son distintas y además la recta $P + Q$ es la recta polar del punto de intersección $R = \pi_{\mathfrak{c}}(P) \cap \pi_{\mathfrak{c}}(Q)$.



En los siguientes resultados, el segundo de los cuales corresponde a la “proyección estereográfica”, mostramos que las cónicas no vacías tienen “suficientes” puntos, identificando su soporte con una recta proyectiva: se alude a este hecho diciendo que las cónicas no degeneradas y no vacías son “racionales”.

PROPOSICIÓN 18. Sea \mathfrak{c} una cónica no degenerada del plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$. Supongamos que el soporte $\text{Sop}(\mathfrak{c})$ es no vacío, seleccionemos un punto $P \in \text{Sop}(\mathfrak{c})$ y consideremos su recta tangente $\ell = \pi_{\mathfrak{c}}(P)$. Existe una biyección

$$\text{Sop}(\mathfrak{c}) \setminus \{P\} \leftrightarrow \ell \setminus \{P\}$$

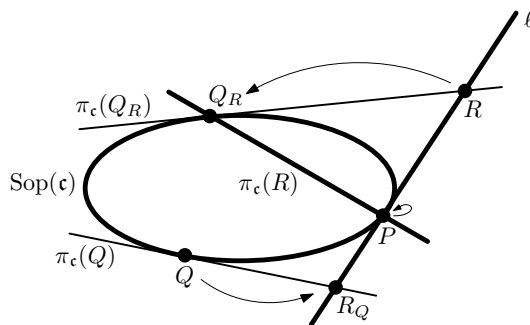
dada por $Q \mapsto \pi_{\mathfrak{c}}(Q) \cap \ell$.

Demostración: Dado que $\pi_{\mathfrak{c}}$ es una biyección, para todo $Q \in \text{Sop}(\mathfrak{c}) \setminus \{P\}$ se tiene $\pi_{\mathfrak{c}}(Q) \neq \ell$ y por tanto $R_Q = \pi_{\mathfrak{c}}(Q) \cap \ell$ es un punto de ℓ .

Veamos ahora que $R_Q \neq P$. Si no fuera así, tendríamos que $\pi_{\mathfrak{c}}(Q) = P + Q$ y entonces la restricción de \mathfrak{c} a $\pi_{\mathfrak{c}}(Q)$ no sería degenerada. Así pues, la aplicación

$$\text{Sop}(\mathfrak{c}) \setminus \{P\} \rightarrow \ell \setminus \{P\}$$

dada por $Q \mapsto R_Q = \pi_{\mathfrak{c}}(Q) \cap \ell$ está bien definida. Construyamos su inversa para probar que es una biyección. Consideremos un punto $R \in \ell \setminus \{P\}$, la recta polar $\pi_{\mathfrak{c}}(R)$ de R pasa por P . Como ℓ tiene P como único punto del soporte de \mathfrak{c} , entonces R no está en el soporte de la cónica, por consiguiente la restricción de \mathfrak{c} a $\pi_{\mathfrak{c}}(R)$ es no degenerada; así, debe existir un punto $Q_R \in \pi_{\mathfrak{c}}(R) \cap \text{Sop}(\mathfrak{c})$ con $Q_R \neq P$. La recta tangente a Q_R pasa por R ; se sigue que la aplicación inversa está dada por $R \mapsto Q_R$. CQD.



PROPOSICIÓN 19 (Proyección estereográfica). *Sea \mathfrak{c} una cónica no degenerada del plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$. Supongamos que el soporte $\text{Sop}(\mathfrak{c})$ es no vacío y seleccionemos un punto $P \in \text{Sop}(\mathfrak{c})$. Consideremos una recta ℓ que no pasa por P . Existe una biyección*

$$\text{Sop}(\mathfrak{c}) \setminus \{P\} \rightarrow \ell \setminus \ell \cap \pi_{\mathfrak{c}}(P)$$

dada por $Q \mapsto R_Q = (P + Q) \cap \ell$, que se amplía hasta una biyección

$$\text{St}_{\mathfrak{c}}(P; \ell) : \text{Sop}(\mathfrak{c}) \rightarrow \ell,$$

asociando $\ell \cap \pi_{\mathfrak{c}}(P)$ al punto P .

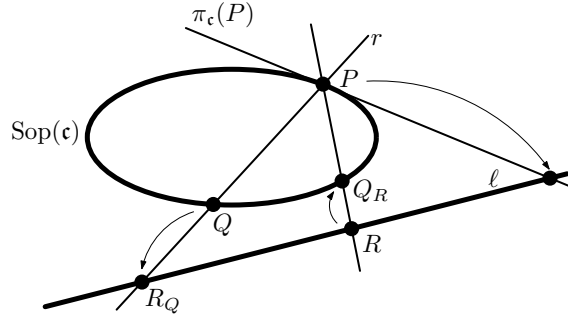
Demostración: Sea Q un punto del soporte distinto de P , la recta $r = P + Q$ es distinta de la recta tangente $\pi_{\mathfrak{c}}(P)$, ya que contiene dos puntos del soporte de \mathfrak{c} y, en particular, la restricción $\mathfrak{c}|_r$ es no degenerada. Por tanto, la aplicación $Q \mapsto R_Q$ del enunciado está bien definida. Es una aplicación inyectiva, pues una cuádrica no degenerada y no vacía de una recta tiene exactamente dos puntos; en efecto, si hubiera una pareja de puntos distintos Q_1 y Q_2 con la misma imagen, tendríamos que P, Q_1 y Q_2 estarían alineados según la recta

$$r = P + Q_1 = P + Q_2 = P + R, \quad R = R_{Q_1} = R_{Q_2},$$

así, los tres serían puntos del soporte de la cuádrica no degenerada $\mathfrak{c}|_r$, absurdo. Finalmente, la aplicación es sobre, pues toda recta que pase por P distinta de la recta tangente $\pi_{\mathfrak{c}}(P)$ corta el soporte de \mathfrak{c} en otro punto más; así, dado un punto R de $\ell \setminus \ell \cap \pi_{\mathfrak{c}}(P)$, la recta $P + R$ es igual a una recta $P + Q$, donde Q está en el soporte, y tenemos que

$$R = (P + R) \cap \ell = (P + Q) \cap \ell = R_Q.$$

Si ahora asignamos a P el punto $\pi_{\mathfrak{c}}(P) \cap \ell$, obtenemos la biyección deseada. CQD.



La aplicación $\text{St}_{\mathfrak{c}}(P; \ell)$ se llama *proyección estereográfica de \mathfrak{c} sobre ℓ desde P* . Es útil para dotar de “estructura de recta proyectiva” al soporte, cuando este sea no vacío, de una cónica no degenerada, de acuerdo con la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 20. *Sea \mathfrak{c} una cónica no degenerada del plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$, consideremos dos puntos P, Q del soporte y una recta ℓ que no pasa por P ni por Q . La biyección*

$$\text{St}_{\mathfrak{c}}(Q; \ell) \circ \text{St}_{\mathfrak{c}}(P; \ell)^{-1} : \ell \rightarrow \ell$$

es una proyectividad.

Demostración: Recuérdese que $\text{Rad}(P; \mathbb{P}(V))$ es la recta del espacio dual $\mathbb{P}(V^*)$ cuyos elementos son las rectas de $\mathbb{P}(V)$ que pasan por P . Además sabemos que la aplicación

$$\ell \rightarrow \text{Rad}(P; \mathbb{P}(V)), \quad Q \mapsto P + Q,$$

es una proyectividad. Así pues, es suficiente probar que la biyección

$$\Phi : \text{Rad}(P; \mathbb{P}(V)) \rightarrow \text{Rad}(Q; \mathbb{P}(V))$$

dada por $\Phi(r) = Q + P_r$, donde $\{P_r, P\} = r \cap \text{Sop}(\mathfrak{c})$ es una proyectividad.

Podemos suponer que $P = [0, 0, 1]$ y $Q = [0, 1, 0]$ en una referencia adecuada, siendo $A = (\alpha_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ una matriz que representa la cónica. Como P y Q están en el soporte, tenemos que $\alpha_{22} = \alpha_{11} = 0$ y así la cónica está dada por el polinomio

$$\alpha_{00}X_0^2 + 2(\alpha_{01}X_0X_1 + \alpha_{02}X_0X_2 + \alpha_{12}X_1X_2).$$

La condición de que la cuádrica sea no degenerada es que $\alpha_{00}\alpha_{12} - 2\alpha_{01}\alpha_{02} \neq 0$. Escribamos las rectas que pasan por P en coordenadas homogéneas $[\lambda, \mu]$ de la forma

$$r_{\lambda, \mu} = (\lambda X_0 - \mu X_1 = 0),$$

y las que pasan por Q , con coordenadas homogéneas $[\gamma, \delta]$, de la forma

$$s_{\gamma, \delta} = (\gamma X_0 + \delta X_2 = 0).$$

Necesitamos ver que la biyección $[\lambda, \mu] \mapsto [\gamma, \delta]$ definida por $\Phi(r_{\lambda, \mu}) = s_{\gamma, \delta}$ es una proyectividad. Tenemos que describir $[\gamma, \delta]$ en términos de $[\lambda, \mu]$. Calculemos en primer lugar P_r , donde $r = r_{\lambda, \mu}$ cuando $\mu \neq 0$ y por consiguiente $P_r \notin (X_0 = 0)$. Se trata de un punto $P_r = [1, \lambda/\mu, b]$ tal que

$$\alpha_{00} + 2(\alpha_{01}\lambda/\mu + \alpha_{02}b + \alpha_{12}b\lambda/\mu) = 0.$$

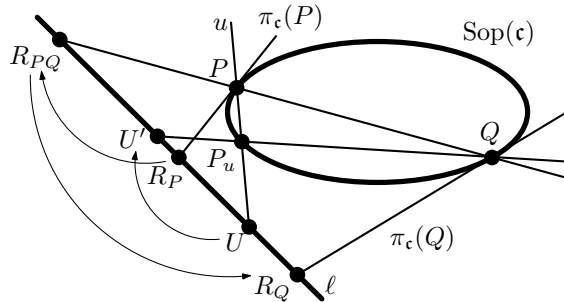
Es decir, tenemos que

$$b = -\frac{\alpha_{00}\mu + 2\alpha_{01}\lambda}{2(\alpha_{02}\mu + \alpha_{12}\lambda)}.$$

Calculemos ahora la recta $Q + P_r = (\gamma X_0 + \delta X_2 = 0)$, tiene que cumplirse

$$\frac{\gamma}{\delta} = -b = \frac{\alpha_{00}\mu + 2\alpha_{01}\lambda}{2(\alpha_{02}\mu + \alpha_{12}\lambda)}.$$

Nótese que $[\lambda, \mu] \mapsto [\alpha_{00}\mu + 2\alpha_{01}\lambda, 2(\alpha_{02}\mu + \alpha_{12}\lambda)]$ define una proyectividad, pues sabemos que $\alpha_{00}\alpha_{12} - 2\alpha_{01}\alpha_{02} \neq 0$. Esta proyectividad cumple los requisitos, incluso para el caso $\mu = 0$. CQD.



Gracias a la proposición anterior adquieren sentido expresiones como “cuatro puntos del soporte de una cuádrica que estén en cuaterna armónica” y todas las que sean trasladables a una recta proyectiva ℓ mediante proyección estereográfica e invariantes por proyectividades.

EJERCICIO 48. Sea \mathfrak{c} una cónica no degenerada sobre un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y R un punto que no esté en el soporte de \mathfrak{c} . Consideremos la aplicación del haz de rectas $\text{Rad}(R)$ que pasan por R en sí mismo, dada como sigue. A cada recta ℓ que pasa por R , le hacemos corresponder la recta que une R con el polo de ℓ . Demuéstrese que esta aplicación está bien definida, es una proyectividad involutiva y determinense sus puntos fijos, si existen.

EJERCICIO 49. Consideremos cuatro puntos P_0, P_1, P_2, P_3 de un plano proyectivo, que forman una referencia, y los tres vértices formados por las intersecciones de los pares de rectas que unen puntos $P_i, i = 0, 1, 2, 3$. Demuéstrese que la recta que une dos de estos vértices es la polar del tercer vértice con respecto de cualquier cónica no degenerada que pase por P_0, P_1, P_2, P_3 .

EJERCICIO 50. (Teorema de Pascal) Las parejas de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica no degenerada se cortan en puntos alineados.

EJERCICIO 51. (Teorema de Brianchon) Las tres diagonales de un hexágono circunscrito a una cónica no degenerada son concurrentes.

10. Clasificación proyectiva de las cuádricas

La clasificación proyectiva de las cuádricas consiste en determinar en qué condiciones dos cuádricas proyectivas son *proyectivamente equivalentes*, es decir, se pueden llevar una en otra por una proyectividad.

Esto se hará de dos modos posibles. En primer lugar la descripción de *invariantes*, es decir, características comunes a cuádricas proyectivamente equivalentes. En esta dirección, lo óptimo es encontrar un *sistema completo de invariantes*, es decir una colección de características de modo que dos cuádricas con los mismos invariantes sean proyectivamente equivalentes y recíprocamente. Una segunda manera es dar una lista de *formas normales*, esto es cuádricas específicas, no equivalentes entre sí y tales que toda cuádrica sea equivalente a una de ellas.

No daremos una clasificación completa sobre cualquier cuerpo base, aunque sí lo haremos para el caso de un cuerpo base algebraicamente cerrado y del cuerpo de los números reales.

El invariante obvio es la dimensión del espacio proyectivo ambiente. Un segundo invariante es el rango de una cuádrica: veámoslo. Tomemos una cuádrica \mathfrak{c} de $\mathbb{P}(V)$ y consideremos una proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$. Queremos ver que el rango de $\vartheta_\Phi(\mathfrak{c})$ es el mismo que el de \mathfrak{c} . Tomemos un isomorfismo vectorial $\phi : V \rightarrow V'$ asociado a Φ y una forma cuadrática $\zeta : V \rightarrow k$ que represente \mathfrak{c} , entonces

$$\zeta \circ \phi^{-1} : V' \rightarrow k$$

es una forma cuadrática que representa $\vartheta_\Phi(\mathfrak{c})$. La aplicación de adjunción $\text{ad}_{\zeta \circ \phi^{-1}}$ relativa a $\zeta \circ \Phi^{-1}$ está dada por

$$\text{ad}_{\zeta \circ \phi^{-1}} = (\phi^{-1})^t \circ \text{ad}_\zeta \circ \phi^{-1},$$

que tiene el mismo rango que ad_ζ .

El resultado más notable de cara a clasificar las cuádricas proyectivas es el Teorema de Gram:

TEOREMA 7 (Gram). *Consideremos una forma cuadrática ς sobre V y su forma bilineal simétrica asociada σ . Existe una base $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ de V ortogonal para σ , es decir tal que $\sigma(e_i, e_j) = 0$, para todo $i \neq j$.*

Demostración: (Repaso de álgebra bilineal) Si ς es idénticamente nula, también lo es σ y el resultado es evidente. Supongamos que ς no es idénticamente nula y por tanto existe un vector $v \in V$ con $\varsigma(v) \neq 0$. Elijamos una base $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ de V tal que $f_0 = v$. Consideremos $e_0 = f_0$ y sea

$$e'_i = f_i - \frac{\sigma(e_0, f_i)}{\varsigma(e_0)} e_0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Entonces $\sigma(e_0, e'_i) = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Se concluye que e_0 es ortogonal a todos los vectores del subespacio vectorial $W \subset V$ generado por e'_1, e'_2, \dots, e'_n . Ahora consideramos la restricción $\varsigma|_W$ de la forma cuadrática ς a W . Trabajando por inducción sobre la dimensión del espacio ambiente V , podemos suponer que existe una base e_1, e_2, \dots, e_n de W formada por vectores ortogonales dos a dos para $\sigma|_{W \times W}$. La base e_0, e_1, \dots, e_n de V cumple con la propiedad requerida. CQD.

Como corolario, concluimos que dada una cuádrlica \mathfrak{c} de $\mathbb{P}(V)$ existe una referencia proyectiva \mathcal{R} de $\mathbb{P}(V)$ tal que $\vartheta_{\mathcal{R}}(\mathfrak{c})$ es una cuádrlica de \mathbb{P}_k^n representada por una recta $[A]$ de matrices diagonales, es decir, con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

El rango de \mathfrak{c} es el cardinal del conjunto de índices $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ tales que $\alpha_i \neq 0$.

El siguiente teorema tiene como consecuencia inmediata que el rango describe completamente las clases de equivalencia proyectiva de las cuádrlicas, en espacios de dimensión fija, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, por ejemplo el cuerpo de los números complejos:

TEOREMA 8. *Consideremos una cuádrlica \mathfrak{c} de $\mathbb{P}(V)$ de rango r y supongamos que el cuerpo base k es algebraicamente cerrado. Existe una referencia proyectiva \mathcal{R} de $\mathbb{P}(V)$ tal que la cuádrlica $\vartheta_{\mathcal{R}}(\mathfrak{c})$ está representada por una matriz diagonal de la forma*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

donde I_r es la matriz identidad $r \times r$.

Demostración: En términos vectoriales, elijamos una forma cuadrática ς que represente \mathfrak{c} y su forma bilineal simétrica asociada σ . Consideremos una base

$$\{e'_0, e'_1, \dots, e'_n\}$$

de V en la que σ tenga matriz diagonal, con $\varsigma(e'_i) = \alpha_i$. Cambiando eventualmente el orden de los elementos de la base, supondremos además que

$$\alpha_r = \alpha_{r+2} = \cdots = \alpha_n = 0$$

y que $\alpha_i \neq 0$, para $i = 0, 1, \dots, r-1$. Como k es algebraicamente cerrado, existen escalares $\mu_i \neq 0$ tales que $\mu_i^2 = \alpha_i$, para $i = 0, 1, \dots, r-1$. Definamos $e_i = e'_i / \mu_i$ para $i = 0, 1, \dots, r-1$ y $e_i = e'_i$ para $i = r, r+1, \dots, n$. La base $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ da una matriz diagonal para σ de unos y ceros, como se desea. CQD.

La clasificación completa en el caso de $k = \mathbb{R}$ se basa en el teorema de inercia de Steiner:

TEOREMA 9 (Teorema de inercia de Steiner). *Consideremos una forma cuadrática real $\varsigma : V \rightarrow \mathbb{R}$ y su forma bilineal simétrica asociada $\sigma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Existe una base $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ de V de vectores ortogonales dos a dos para σ y una descomposición de $n+1$ como suma de tres números enteros no negativos $p_\beta, n_\beta, c_\beta$ tal que*

$$\begin{aligned} \varsigma(e_i) &= 1, & \text{para todo } i = 0, 1, \dots, p_\beta - 1, \\ \varsigma(e_i) &= -1, & \text{para todo } i = p_\beta, p_\beta + 1, \dots, p_\beta + n_\beta - 1, \\ \varsigma(e_i) &= 0, & \text{para todo } i = p_\beta + n_\beta, p_\beta + n_\beta + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Además, si β' es otra base con las propiedades anteriores, se tiene

$$p_\beta = p_{\beta'}, \quad n_\beta = n_{\beta'}, \quad c_\beta = c_{\beta'}.$$

Demostración: (Repaso de álgebra bilineal) La existencia de una base β con las propiedades requeridas, se comprueba como en el teorema anterior, observando que la raíz cuadrada de un número real existe si es positivo, de modo que si $\varsigma(e'_i) < 0$, substituyendo e'_i por $e_i = e'_i/\mu$, donde $\mu^2 = -\varsigma(e'_i)$ se tiene $\varsigma(e_i) = -1$. La unicidad es un poco más complicada y es el contenido clásico del teorema de inercia de Steiner. Nótese que para cualquier base β con las propiedades del enunciado, se tiene que $c_\beta = n + 1 - r =$, donde r es el rango de ς ; en particular, dado que $p_\beta + n_\beta = r$, basta probar que $p_\beta = p_{\beta'}$ para dos bases cualesquiera con las propiedades requeridas. Elijamos ahora una de estas bases β para la cual el número p_β sea máximo y denotemos $p = p_\beta$. Obsérvese que esto implica en particular que la restricción $\varsigma|_W$ de ς al subespacio W de V generado por e_0, e_1, \dots, e_{p-1} es definida positiva. Es decir, para cualquier vector no nulo $v \in W$ tenemos que $\varsigma(v) > 0$. Tomemos otra de estas bases β' y escribamos $p' = p_{\beta'}$. Sabemos que $p' \leq p$, se trata pues de probar que $p' \geq p$. Supongamos por reducción al absurdo que $p' < p$ y denotemos por W' el subespacio generado por $e'_0, e'_1, \dots, e'_{p'-1}$. Consideremos su ortogonal W'^σ respecto de la forma bilineal σ . Esto es

$$W'^\sigma = \{v \in V; \quad \sigma(v, w') = 0, \text{ para todo } w' \in W'\}.$$

Un vector $v = \sum_{i=0}^{p'-1} \lambda_i e'_i + \sum_{i=p'}^n \lambda_i e'_i$ está en W'^σ si y sólo si tenemos que

$$\sigma(e'_i, v) = \lambda_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p' - 1.$$

Es decir W'^σ es el subespacio generado por los vectores $e'_{p'}, e'_{p'+1}, \dots, e'_n$, cuya dimensión es igual a $n + 1 - p'$. Por otro lado, para cada vector $v = \sum_{i=p'}^n \lambda_i e'_i \in W'^\sigma$, tenemos que

$$\varsigma(v) = \varsigma\left(\sum_{i=p'}^n \lambda_i e'_i\right) = -\left(\sum_{i=p'}^n \lambda_i^2\right) \leq 0.$$

Dado que la dimensión de W es igual a p , necesariamente se tiene que

$$\dim W \cap W'^\sigma \geq p + (n + 1 - p') - (n + 1) = p - p' \geq 1$$

y por consiguiente, existe un vector no nulo $v \in W \cap W'^\sigma$. Ahora bien, debe ocurrir que

$$\varsigma(v) > 0 \text{ y } \varsigma(v) \leq 0,$$

lo cual evidentemente es una contradicción.

CQD.

Definimos la *signatura proyectiva* de una forma cuadrática real $\varsigma : V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathbb{P}\text{sig}(\varsigma) = |p_\beta - n_\beta| \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

donde β es una base de V cumpliendo las condiciones del teorema de inercia. Dada una cuádrlica real $\mathfrak{c} \in \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$ y dos representantes ς, ς' de \mathfrak{c} , se tiene

$$\mathbb{P}\text{sig}(\varsigma) = \mathbb{P}\text{sig}(\varsigma'),$$

lo que nos permite definir de manera evidente la *signatura proyectiva* $\mathbb{P}\text{sig}(\mathfrak{c})$ de una cuádrlica proyectiva real \mathfrak{c} como la de cualquiera de las formas cuadráticas que la representan.

La clasificación completa de cuádricas reales proyectivas queda enunciada en el siguiente teorema, que es un corolario de los resultados anteriores:

TEOREMA 10. Sean $\mathfrak{c} \in \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$ y $\mathfrak{c}' \in \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V'))$ cuádricas sobre espacios proyectivos reales $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$ de la misma dimensión. Son equivalentes:

1. Existe una proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ tal que $\mathfrak{c}' = \vartheta_\Phi(\mathfrak{c})$.
2. Las cuádricas \mathfrak{c} y \mathfrak{c}' tienen el mismo rango y la misma signatura proyectiva.

11. Cuádricas y cónicas reales

En esta sección aplicaremos los resultados anteriores para dar una descripción rápida de las cuádricas sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ (cónicas reales) y sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$.

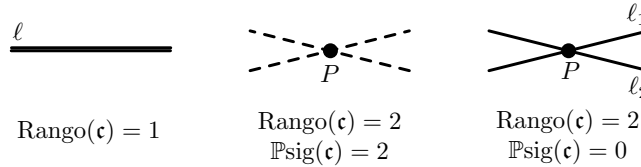
11.1. Cónicas reales proyectivas. Las cónicas reales tienen los posibles rangos 1, 2, 3 y, como sabemos, el vértice tiene dimensión igual a $2 - r$, donde r es el rango. En particular, las de rango 3 son las no degeneradas, cuyo vértice es vacío.

Las de rango 1 son las más degeneradas, su signatura proyectiva es igual a 1 y son todas proyectivamente equivalentes a la cónica de polinomio X_0^2 . El vértice coincide con el soporte y es una recta. Se dice que esta cónica es una “recta doble”.

El vértice de las cónicas de rango 2 es un punto. Hay dos tipos, las de signatura proyectiva igual a 2 y las de signatura proyectiva igual a 0:

- Las de signatura proyectiva igual a 2 son proyectivamente equivalentes a la cónica de polinomio $X_0^2 + X_1^2$. El soporte coincide con el vértice. En el caso de la cónica dada por $X_0^2 + X_1^2$, el vértice es el punto $[0, 0, 1]$.
- Las de signatura proyectiva igual a 0 son proyectivamente equivalentes a la cónica de polinomio $X_0^2 - X_1^2$. El soporte es la unión de dos rectas distintas que se cortan en el vértice. En el caso de la cónica de polinomio $X_0^2 - X_1^2$, el soporte es la unión de las rectas $X_0 - X_1 = 0$ y $X_0 + X_1 = 0$, que se cortan en el punto $[0, 0, 1]$.

En la siguiente figura representamos las cónicas reales degeneradas:



Las cónicas no degeneradas, de rango máximo igual a 3, tienen vértice vacío y las posibles signaturas proyectivas 3 y 1:

- Las de signatura proyectiva 3 son proyectivamente equivalentes a la cónica de polinomio $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2$. Tienen soporte vacío y se suele hablar de la “cónica vacía”.
- Las de signatura proyectiva 1 son proyectivamente equivalentes a la cónica de polinomio $X_0^2 - X_1^2 - X_2^2$. Tienen soporte no vacío y se les llama “elipses proyectivas”. Obsérvese que la cónica dada por $X_0^2 - X_1^2 - X_2^2$ no corta la recta $X_0 = 0$ y en el espacio afín complementario de $X_0 = 0$, de coordenadas $x = X_1/X_0, y = X_2/X_0$, el soporte tiene la conocida ecuación $x^2 + y^2 = 1$.



11.2. Cuádricas reales. Las cuádricas de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ tienen los posibles rangos 1, 2, 3 ó 4 y, como sabemos, el vértice tiene dimensión igual a $3 - r$, donde r es el rango. En particular las de rango 4 son las no degeneradas, cuyo vértice es vacío.

Las de rango 1 son las más degeneradas, son proyectivamente equivalentes a la cuádrica de polinomio X_0^2 . Su soporte coincide con el vértice y es un plano. Se dice que estas cuádricas son “planos dobles”.

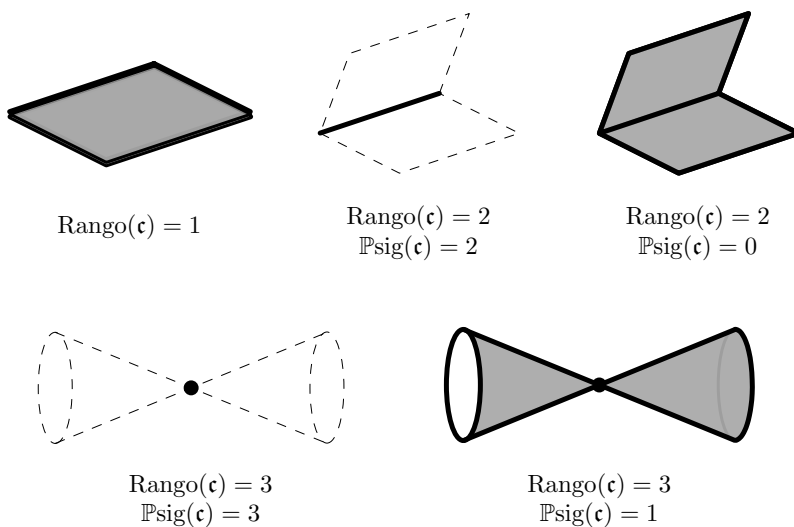
Las cuádricas de rango 2 tienen dos posibles signaturas proyectivas: 2 y 0. Las de signatura proyectiva 2 son proyectivamente equivalentes a la de polinomio $X_0^2 + X_1^2$; el soporte coincide con el vértice, que es una recta. Las de signatura proyectiva 0 son proyectivamente equivalentes a la de polinomio $X_0^2 - X_1^2$; el soporte es la unión de dos planos distintos, cuya intersección es la recta que define el vértice.

Las cuádricas de rango 3 tienen las mismas posibles signaturas proyectivas que las cónicas no degeneradas, esto es 3 y 1 y su vértice es un punto. Son proyectivamente equivalentes a las de polinomios

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2, \quad X_0^2 - X_1^2 - X_2^2,$$

respectivamente. En ambas el vértice es el punto $[0, 0, 0, 1]$. El soporte de la primera coincide con el vértice, mientras que el soporte de la segunda es un cono desde el vértice con directriz el soporte (no vacío) de la cónica no degenerada inducida por restricción a un plano que no contenga el vértice.

En la siguiente figura representamos las cuádricas degeneradas de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$:



Las cuádricas de rango 4, o no degeneradas, tienen tres posibles firmas proyectivas: 4, 2 y 0:

- Las de firma proyectiva 4 son “cuádricas vacías”, proyectivamente equivalentes a la de polinomio $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$. No tienen soporte.
- Las de firma proyectiva 2 son proyectivamente equivalentes a la de polinomio

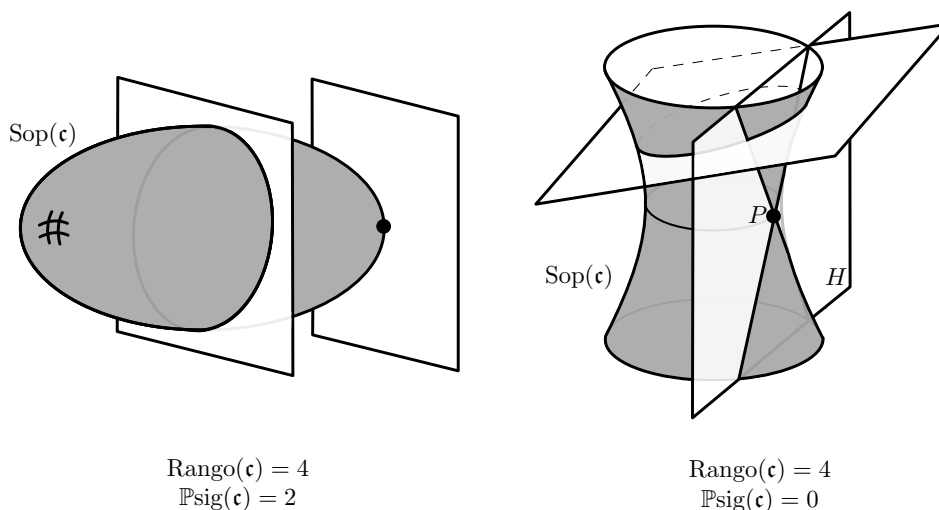
$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2.$$

La restricción a un plano de esta cuádrica es o bien no degenerada, o bien la cónica formada por un único punto. En particular, esta cuádrica no contiene rectas en su soporte. Se llama “elipsoide proyectivo”. Nótese que el soporte no corta el plano $X_0 = 0$ y en el espacio afín complementario de este plano, tiene la conocida ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- Las de firma proyectiva 0 son proyectivamente equivalentes a la de polinomio

$$X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2.$$

La restricción a un plano no tangente de esta cuádrica, siempre es una elipse proyectiva; en particular, el soporte corta cualquier plano. Cuando el plano es tangente, es la unión de dos rectas. De este modo, vemos que el soporte de la cuádrica es unión de rectas, de hecho por cada punto pasan dos rectas contenidas en el soporte, correspondientes a su intersección con el plano tangente en el punto. Se llama “hiperboloide proyectivo”.



12. Cuádricas afines. Principios generales de clasificación

Desde el punto de vista proyectivo, una *cuádrica afín* de $\mathbb{P}(V)$ se define como una pareja (c, H) , donde c es una cuádrica de $\mathbb{P}(V)$ y H un hiperplano de $\mathbb{P}(V)$, que suele denominarse *hiperplano del infinito para la cuádrica afín*. Diremos que dos cuádricas afines (c, H) y (c', H') de $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$, respectivamente, son *equivalentes* si y sólo si existe una proyectividad

$$\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$$

tal que $\vartheta_{\Phi}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}'$ y $\Phi(H) = H'$. El rango de una cuádrlica afín (\mathfrak{c}, H) es, por definición, el rango de \mathfrak{c} ; diremos que la cuádrlica afín es *no degenerada* si y sólo si la correspondiente cuádrlica proyectiva lo es.

Por falta de tiempo en este breve curso, no entraremos completamente en esta clasificación. El resultado general, que enunciamos sin demostración, es el siguiente:

TEOREMA 11 (Clasificación de las cuádrlicas afines). *Dos cuádrlicas afines (\mathfrak{c}, H) y (\mathfrak{c}', H') sobre $\mathbb{P}(V)$ son equivalentes si y sólo si se tiene:*

1. *Las cuádrlicas \mathfrak{c} y \mathfrak{c}' son proyectivamente equivalentes.*
2. *Las cuádrlicas restricción $\mathfrak{c}|_H$ y $\mathfrak{c}'|_{H'}$ son proyectivamente equivalentes.*

Ciertamente (1) y (2) se cumplen si las cuádrlicas afines son equivalentes. El recíproco se obtiene como consecuencia de un teorema de Witt, véase [2, pp. 316-322] o también [54].

A título de ejemplo, desarrollaremos la clasificación afín para las cuádrlicas no degeneradas sobre un cuerpo base algebraicamente cerrado, así como para las elipses reales. Para ello, seguiremos un procedimiento específico no directamente relacionado con la prueba del teorema general anterior.

12.1. Cuádrlicas afines no degeneradas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. El siguiente resultado da la clasificación de este tipo de cuádrlicas afines:

PROPOSICIÓN 21. *Consideremos una cuádrlica afín no degenerada (\mathfrak{c}, H) sobre $\mathbb{P}(V)$, donde el cuerpo base k es algebraicamente cerrado. La cuádrlica afín (\mathfrak{c}, H) es equivalente a la cuádrlica afín $(\mathfrak{c}_0, (X_0 = 0))$ de \mathbb{P}_k^n , donde \mathfrak{c}_0 está dada por el polinomio P_0 , siendo*

$$P_0 = \begin{cases} X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_n^2, & \text{si } H \text{ no es tangente a } \mathfrak{c}; \\ X_0X_1 + X_2^2 + \cdots + X_n^2, & \text{si } H \text{ es tangente a } \mathfrak{c}. \end{cases}$$

Demostración: Consideremos el hiperplano vectorial $W \subset V$ que determina H y seleccionemos una forma cuadrática ζ que represente \mathfrak{c} , así como su forma bilineal simétrica asociada σ . Sea W^σ el ortogonal de W con respecto de σ . Recuérdese que W^σ es una recta vectorial, que representa el polo de H . Dicho de otro modo, si elegimos un generador v de W^σ , el punto $P = [v]$ es el polo de H . En particular, se tiene

$$\sigma(v, w) = 0 \Leftrightarrow w \in W.$$

Supongamos en primer lugar que H no es tangente a \mathfrak{c} . Entonces P no está en H , pues en caso contrario tendríamos que H es el hiperplano tangente a \mathfrak{c} en P , véase la proposición 15. Así, tenemos que $\{P\}$ y H son subespacios complementarios y podemos expresar V como suma directa

$$V = W^\sigma \oplus W.$$

Observemos que $\zeta(v) = \sigma(v, v) \neq 0$, ya que $v \notin W$. Consideremos $e_0 = \lambda v \in W^\sigma$ tal que $\zeta(e_0) = 1$, para lo cual basta que elegir λ cumpliendo que $\lambda^2 = 1/\zeta(v)$. Aplicando el teorema de Gram, en su versión para cuerpos algebraicamente cerrados, a la restricción $\sigma|_{W \times W}$, podemos encontrar una base *ortonormal* e_1, e_2, \dots, e_n de W ; es decir, es una base ortogonal y tal que $\zeta(e_i) = 1$, para $i = 1, 2, \dots, n$. La base ampliada

$$e_0, e_1, e_2, \dots, e_n$$

es una base de V ortonormal para σ . Tomando coordenadas homogéneas asociadas a esta base, la cuádrlica tiene polinomio $X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_n^2$ y $H = (X_0 = 0)$.

Supongamos ahora que H es tangente a la cuádrlica; necesariamente lo es en el punto $P = [v]$. Por tanto $P \in H$ y $P \in \text{Sop}(\mathfrak{c})$.

Veamos en primer lugar que existe una recta ℓ con $P \in \ell$ que corta al soporte de la cuádrlica exactamente en dos puntos distintos P y P' , lo que equivale a decir que la restricción $\mathfrak{c}|_\ell$ es no degenerada. En efecto, sabemos que existe un hiperplano \tilde{H} que pasa por P y no es tangente a la cuádrlica, así que la restricción de la cuádrlica a \tilde{H} es no degenerada; razonando por inducción sobre la dimensión ambiente, podemos encontrar $\ell \subset \tilde{H}$. Nótese que $\ell \not\subset H$, ya que, como P es el vértice de $\mathfrak{c}|_H$, la restricción de la cuádrlica a toda recta contenida en H y pasando por P es degenerada. Sea $T = \ell^\circ$. Como $P \in \ell$, entonces $T \subset H$, además $P \notin T$ ya que si $P \in T$ tendríamos $H \supset \ell$, que sabemos no ocurre. Como $P \notin T$, la restricción

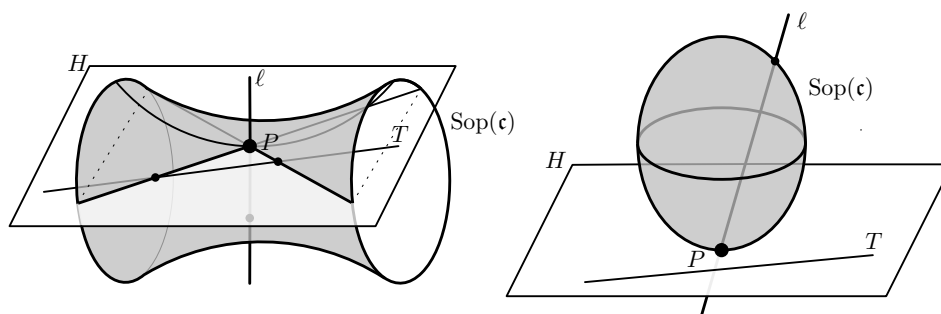
$$\mathfrak{c}|_T = (\mathfrak{c}|_H)|_T$$

de la cuádrlica a T es no degenerada, ya que P es el vértice de $\mathfrak{c}|_H$ y T y P son complementarios en H .

Por otro lado ℓ y T son complementarios en $\mathbb{P}(V)$, pues su intersección es vacía ya que $P \notin T$ y P es el único punto de intersección de H con ℓ . Escribamos

$$T = \mathbb{P}(U), \quad \ell = T^\circ = \mathbb{P}(U^\sigma),$$

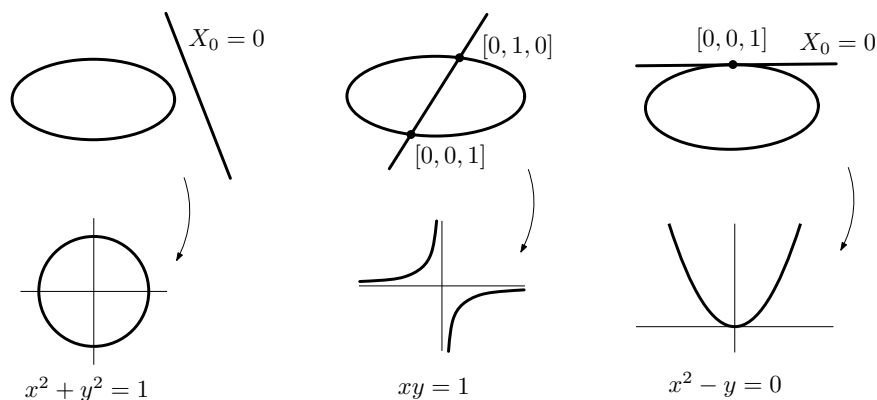
donde $U \subset W$. Sabemos que $V = U \oplus U^\sigma$. Como la restricción de la cuádrlica a T es no degenerada, podemos elegir una base e_2, e_3, \dots, e_n de U ortonormal para $\sigma|_{U \times U}$. Elijamos v, f base de U^σ tal que $P = [v]$ y $P' = [f]$, sabemos que $\zeta(v + f) \neq 0$, ya que sólo hay dos puntos en el soporte sobre la recta ℓ . Así que, usando argumentos conocidos, podemos elegir $\mu \neq 0$ tal que $\zeta(e_0 + e_1) = 1$, donde $e_0 = \mu v$ y $e_1 = \mu f$. De este modo, hemos obtenido una base $e_0, e_1, e_2, \dots, e_n$, del espacio vectorial V , tal que en el correspondiente espacio de coordenadas homogéneas, la cuádrlica tiene polinomio $X_0X_1 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ y $H = (X_0 = 0)$. CQD.



12.2. Cónicas afines reales. Daremos sólo la descripción como consecuencia del teorema general. El lector puede adaptar las demostraciones a partir de lo sugerido en la proposición precedente. Las clases de equivalencia de cónicas afines no degeneradas están representadas exactamente por los tipos siguientes, donde representamos la cónica por un polinomio y la recta del infinito siempre es $X_0 = 0$:

- La cónica vacía. La recta del infinito no puede ser tangente. Se tiene el polinomio $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2$.
- La elipse de polinomio $X_0^2 - X_1^2 - X_2^2$. La recta del infinito no corta el soporte.
- La hipérbola de polinomio $X_0^2 - X_1X_2$. La recta del infinito corta el soporte en dos puntos.
- La parábola de polinomio $X_0X_2 - X_1^2$. La recta del infinito es tangente.

Dejamos al lector la descripción de las cónicas afines degeneradas.



13. Determinación de cónicas

A continuación, probamos la determinación de una cónica por cinco puntos:

PROPOSICIÓN 22. *Consideremos un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ sobre un cuerpo k de característica distinta de dos. Sean Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 y Q_5 cinco puntos distintos de $\mathbb{P}(V)$ tales que no hay cuatro alineados entre ellos. Existe una única cónica c sobre $\mathbb{P}(V)$ que tiene los cinco puntos en su soporte.*

Demostración: Supongamos primero que hay tres de ellos alineados, ya sabemos que no hay cuatro; digamos que son Q_1, Q_2 y Q_3 y sea ℓ la recta que los une. Como una cónica sobre una recta tiene a lo más dos puntos en su soporte, necesariamente debería estar ℓ íntegramente contenida en el soporte de c , así pues c debería ser una cónica degenerada cuyo soporte fuera una recta doble o la unión de dos rectas. Necesariamente es la unión de dos rectas, siendo la otra recta la que une Q_4 y Q_5 . Para ver la unicidad, observamos que dos cónicas cuyo soporte es la unión de las dos mismas rectas son iguales (se deja la comprobación al cuidado del lector). Esto prueba la existencia y la unicidad.

Supongamos ahora que no hay tres alineados entre los cinco puntos. Podemos tomar una referencia $\mathcal{R} = \{Q_1, Q_2, Q_3; Q_4\}$ formada por los cuatro primeros. Supongamos que $[1, \lambda, \mu]$ son las coordenadas homogéneas de Q_5 en esta referencia, donde sabemos que $\lambda\mu \neq 0$, $\lambda \neq \mu$ y que $\lambda \neq 1 \neq \mu$. Queremos probar que existe

una matriz simétrica $A = (\alpha_{ij})$ que cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}(1, 0, 0)A(1, 0, 0)^t &= 0, & (0, 1, 0)A(0, 1, 0)^t &= 0, \\ (0, 0, 1)A(0, 0, 1)^t &= 0, & (1, 1, 1)A(1, 1, 1)^t &= 0, \\ (1, \lambda, \mu)A(1, \lambda, \mu)^t &= 0\end{aligned}$$

y que esta matriz es única salvo multiplicación por un escalar. Las condiciones anteriores se expresan diciendo que $\alpha_{00} = \alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$ y además los coeficientes $\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{12}$ cumplen que:

$$\begin{aligned}\alpha_{01} + \alpha_{02} + \alpha_{12} &= 0, \\ \lambda\alpha_{01} + \mu\alpha_{02} + \lambda\mu\alpha_{12} &= 0.\end{aligned}$$

El sistema es de rango dos, lo que prueba la existencia y unicidad deseadas. CQD.

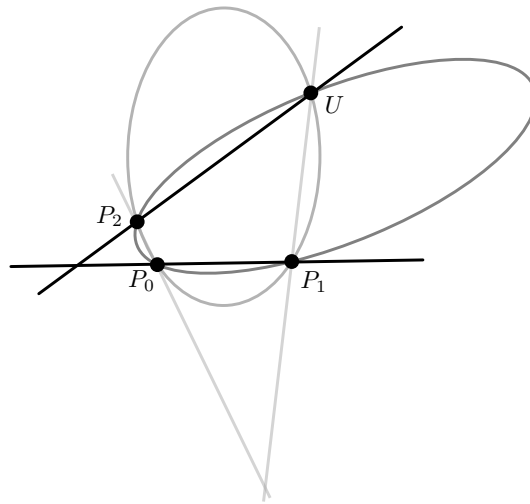
Recordemos que el espacio de cónicas $\mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$ de un plano proyectivo ambiente $\mathbb{P}(V)$ es asimismo un espacio proyectivo, de dimensión cinco. Tenemos el siguiente corolario geométrico:

COROLARIO 6. *Sea $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2; U\}$ una referencia del plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$. Denotemos $\mathcal{H}_{\mathcal{R}} \subset \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$ el conjunto de cónicas que tienen todos los puntos de la referencia \mathcal{R} en su soporte. Entonces $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ es una recta proyectiva de $\mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$.*

Demostración: Trabajemos en coordenadas homogéneas asociadas a \mathcal{R} . De acuerdo con la prueba de la proposición anterior, el conjunto $\mathcal{H}_{\mathcal{R}} \subset \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$ es el subespacio de ecuaciones

$$\alpha_{00} = \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{01} + \alpha_{02} + \alpha_{12} = 0.$$

Son ecuaciones homogéneas independientes y por tanto se trata de una recta del espacio de cónicas, ya que este tiene dimensión cinco. CQD.



EJERCICIO 52. (Transformaciones de Cremona). Consideremos el haz no degenerado de cónicas $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, donde $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ es una referencia de un plano proyectivo complejo $\mathbb{P}(V)$. Sean R_1, R_2, R_3 los vértices de esta referencia (intersecciones de parejas de rectas que unen los puntos P_i , $i = 0, 1, 2, 3$). Pruébese que para todo punto

$$P \in \mathbb{P}(V) \setminus \{R_1, R_2, R_3\},$$

las polares de P con respecto de las cónicas de $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ se cortan en un único punto $\xi(P)$. Pruébese asimismo que $\xi(Q) = R_3$, para todo $Q \in (R_1 + R_2) \setminus \{R_1, R_2\}$. Finalmente demuéstrase que la aplicación ξ induce una biyección de $\mathbb{P}(V) \setminus T$ en sí mismo, donde T es el triángulo determinado por R_1, R_2, R_3 .

14. Haces no degenerados de cónicas complejas

Las *haces de cónicas* son, por definición, las rectas del espacio de cónicas $\mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$ de un plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$. En esta sección describiremos los haces de cónicas complejas que contienen al menos una no degenerada (haces no degenerados) y daremos la clasificación proyectiva de los mismos.

14.1. Equivalencia de haces de cónicas. Recordemos que una proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ induce una proyectividad $\vartheta_{\Phi} : \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V)) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V'))$ entre los espacios de cónicas. Diremos que dos haces de cónicas \mathcal{H} y \mathcal{H}' sobre $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$ respectivamente, son *proyectivamente equivalentes* si existe una proyectividad Φ tal que $\vartheta_{\Phi}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}'$.

Diremos que un haz de cónicas $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$ es *no degenerado* si contiene al menos una cónica no degenerada. Se cumple que ϑ_{Φ} envía cónicas no degeneradas en cónicas no degeneradas y por consiguiente, haces no degenerados de cónicas en haces no degenerados.

PROPOSICIÓN 23. *Sea \mathcal{H} un haz no degenerado de cónicas de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ sobre un cuerpo base k infinito. Hay un máximo de tres cónicas degeneradas en el haz \mathcal{H} . En particular, hay por lo menos dos cónicas no degeneradas distintas en \mathcal{H} .*

Demostración: Podemos trabajar en \mathbb{P}_k^2 . Sean \mathbf{c}_0 y \mathbf{c}_1 dos cónicas del haz \mathcal{H} , representadas respectivamente por matrices simétricas A_0 y A_1 linealmente independientes, es decir, si $\lambda A_0 + \mu A_1 = 0$ se tiene que $\lambda = \mu = 0$. Tenemos una proyectividad

$$\mathbb{P}_k^1 \leftrightarrow \mathcal{H}$$

que a cada $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_k^1$ le hace corresponder la cónica determinada por la matriz simétrica $\lambda A_0 + \mu A_1$. Consideremos ahora la aplicación

$$D : k^2 \rightarrow k; \quad D(\lambda, \mu) = \text{Det}(\lambda A_0 + \mu A_1).$$

Se tiene que $D(\lambda, \mu)$ es un polinomio homogéneo en las variables λ, μ de grado tres. No es idénticamente nulo, ya que como el haz \mathcal{H} es no degenerado, existe un par (λ_0, μ_0) con $D(\lambda_0, \mu_0) \neq 0$. Así, hay un máximo de tres puntos proyectivos $[\lambda, \mu]$ que anulen D y, por ende, un máximo de tres cónicas degeneradas en \mathcal{H} . Como k es infinito, una recta proyectiva tiene por lo menos cinco elementos y así encontramos al menos dos cónicas no degeneradas en el haz. CQD.

14.2. Familias de haces no degenerados de cónicas complejas. A continuación describiremos cinco familias de haces no degenerados de cónicas complejas. Probaremos que dos haces de la misma familia son proyectivamente equivalentes y que, si están en familias distintas, no lo son. Daremos además representantes elegidos para cada una de ellas (formas normales).

Las familias estarán etiquetadas por las distintas maneras de poner el número 4 como suma de enteros positivos ordenados; así, las denotaremos:

$$\mathcal{F}_{1111}, \mathcal{F}_{112}, \mathcal{F}_{13}, \mathcal{F}_{22}, \mathcal{F}_4.$$

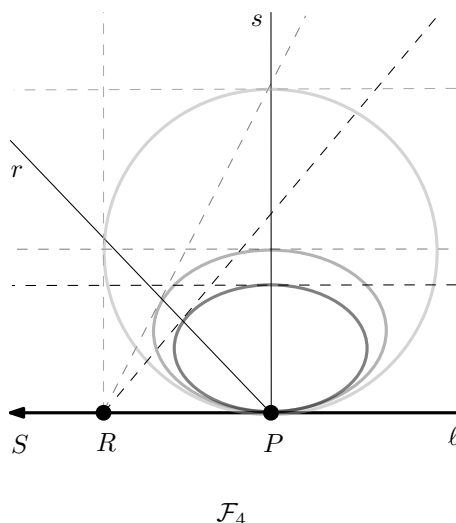
El conjunto de estas cinco familias se denotará por $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$.

La razón de este etiquetado es el teorema de Bézout, que dice que dos cónicas no degeneradas se cortan en cuatro puntos, contados con multiplicidad. Dado que no estamos desarrollando la teoría de multiplicidad de intersección, presentaremos las familias en términos geométricos.

En primer lugar, diremos cuándo un haz no degenerado de cónicas \mathcal{H} sobre un plano proyectivo complejo $\mathbb{P}(V)$ pertenece a una de las familias \mathcal{F}_{1111} o \mathcal{F}_4 .

Diremos que \mathcal{H} pertenece a la familia \mathcal{F}_{1111} si y solo si existen cuatro puntos P_0, P_1, P_2 y P_3 que forman una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(V)$, tales que \mathcal{H} es el haz de las cónicas que pasan por estos cuatro puntos. Evidentemente, dos haces de esta familia son proyectivamente equivalentes, a través de la proyectividad que envía una referencia en la otra.

Diremos que \mathcal{H} pertenece a la familia \mathcal{F}_4 si y solo si existen tres rectas ℓ, r, s distintas y concurrentes en un punto P y otros dos puntos $R, S \in \ell$, distintos entre sí y distintos de P de modo que se cumpla la propiedad siguiente: una cónica no degenerada está en \mathcal{H} si y solo si es tangente a ℓ en P , la recta r es la polar de R y la recta s es la polar de S .



PROPOSICIÓN 24. Sea $\mathbb{P}(V)$ un plano proyectivo complejo, consideremos tres rectas ℓ, r, s distintas y concurrentes en un punto P y otros dos puntos $R, S \in \ell$, distintos entre sí y distintos de P . Existe un único haz no degenerado \mathcal{H} de cónicas

sobre $\mathbb{P}(V)$ de modo que se cumple que una cónica no degenerada está en \mathcal{H} si y solo si es tangente a ℓ en P , la recta r es la polar de R y la recta s es la polar de S . Además, dadas dos cónicas distintas \mathfrak{c}_1 y \mathfrak{c}_2 de \mathcal{H} , el punto P es el único punto de intersección de sus soportes.

DEMOSTRACIÓN. Seleccionemos coordenadas homogéneas de modo que ℓ sea la recta $X_0 = 0$ y P el punto $[0, 0, 1]$. Además, podemos suponer que r es $X_1 = 0$, que R es el punto $[0, 1, 0]$, que s es la recta $X_0 + X_1 = 0$ y que S es el punto $[0, 1, 1]$ (el lector puede mostrar como ejercicio que existe una referencia proyectiva que cumple con estas propiedades). Las condiciones sobre una matriz $A = (\alpha_{ij})$ genérica de las cónicas que cumplan estas propiedades son:

1. Que ℓ sea tangente en P : $\alpha_{22} = \alpha_{12} = 0$.
2. Que además r sea la polar de R : $\alpha_{01} = 0$.
3. Que además s sea la polar de S : $\alpha_{11} - \alpha_{02} = 0$.

Son cuatro ecuaciones lineales independientes en un espacio proyectivo de dimensión cinco, por consiguiente tenemos una recta. El haz \mathcal{H} está dado por las cónicas de polinomio

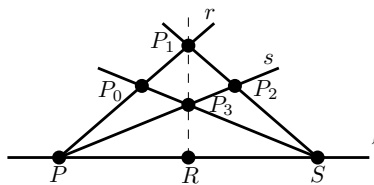
$$\lambda X_0^2 + \mu(X_1^2 + 2X_0X_2), \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1,$$

cuyo elemento genérico es no degenerado. El hecho de que el soporte de dos cónicas distintas del haz se cortan únicamente en el punto P es inmediato. \square

OBSERVACIÓN 18. Dos haces \mathcal{H} y \mathcal{H}' de la familia \mathcal{F}_4 son proyectivamente equivalentes. En efecto, el haz \mathcal{H} está asociado a un dato ℓ, r, s, P, R, S y el haz \mathcal{H}' a otro dato $\ell', r', s', P', R', S'$. Si vemos que hay una proyectividad que envía un dato en el otro, automáticamente \mathcal{H} se envía en \mathcal{H}' . Observemos que podemos construir una referencia proyectiva P_0, P_1, P_2, P_3 de modo que $P_0 + P_1 = r$, $P_2 + P_3 = s$ y

$$(P_0 + P_3) \cap (P_1 + P_2) = S, \quad (P_1 + P_3) \cap (P_0 + P_2) = R.$$

Haciendo lo mismo con el dato asociado a \mathcal{H}' , la proyectividad que envía una referencia en la otra, envía el dato ℓ, r, s, P, R, S en $\ell', r', s', P', R', S'$ y por consiguiente \mathcal{H} en \mathcal{H}' .



Para presentar las familias \mathcal{F}_{112} , \mathcal{F}_{13} y \mathcal{F}_{22} primero consideramos planos de cónicas que describimos a continuación. Dado un plano proyectivo complejo $\mathbb{P}(V)$, una recta ℓ , un punto $P \in \ell$ y otro punto $Q \notin \ell$, denotaremos por $\Delta_{\ell, P, Q}$ el conjunto de cónicas \mathfrak{c} que son tangentes a ℓ en P y pasan por Q .

PROPOSICIÓN 25. El conjunto $\Delta_{\ell, P, Q}$ es un plano en $\mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$. Más aún, si \mathcal{H} es un haz no degenerado de este plano, se tiene una de las siguientes propiedades:

- P_{112} : Existe un tercer punto R , que no está en ℓ y ni en $P + Q$, de modo que todas las cónicas en \mathcal{H} pasan por R . Además, \mathcal{H} es el único haz en $\Delta_{\ell, P, Q}$ cuyas cónicas pasan por R .

P_{13} : Existen dos cónicas no degeneradas \mathfrak{c}_1 y \mathfrak{c}_2 en \mathcal{H} con tangentes distintas en Q y de modo que P y Q son los únicos puntos comunes a los soportes de \mathfrak{c}_1 y \mathfrak{c}_2 . Además, se tiene que las tangentes en Q de dos cónicas no degeneradas de \mathcal{H} son siempre distintas.

P_{22} : Existe una recta r que pasa por Q tal que todas las cónicas no degeneradas en \mathcal{H} tienen r como tangente en Q . Además, \mathcal{H} es el único haz en $\Delta_{\ell,P,Q}$ cuyas cónicas tienen la tangente común r en el punto Q .

DEMOSTRACIÓN. Seleccionemos coordenadas homogéneas de modo que ℓ sea la recta $X_0 = 0$ y los puntos P y Q sean respectivamente $[0, 0, 1]$ y $[1, 0, 0]$. Las condiciones sobre una matriz $A = (\alpha_{ij})$ genérica de las cónicas que están en $\Delta_{\ell,P,Q}$ son:

$$\alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{00} = 0.$$

Son tres ecuaciones independientes y por tanto $\Delta_{\ell,P,Q}$ es un plano.

Todo haz de este plano es de la forma $\mathcal{H}_{[\lambda]}$, dado por la ecuación adicional

$$\lambda_{01}\alpha_{01} + \lambda_{02}\alpha_{02} + \lambda_{11}\alpha_{11} = 0, \quad [\lambda] = [\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{11}] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2.$$

Dada una cónica en $\Delta_{\ell,P,Q}$ de matriz A , la recta tangente en Q está dada por:

$$\alpha_{01}X_1 + \alpha_{02}X_2 = 0.$$

En particular, si $\lambda_{11} \neq 0$ tenemos tangentes distintas en las cónicas de $\mathcal{H}_{[\lambda]}$.

Si $\lambda_{11} = 0$, esta tangente es fija y está dada por $r = (\lambda_{02}X_1 - \lambda_{01}X_2 = 0)$. Dicho de otro modo, se cumple la propiedad P_{22} si y solamente si $\lambda_{11} = 0$. Nótese que la condición adicional de ser tangente a r en Q fija el punto proyectivo $[\lambda_{01}, \lambda_{02}]$ y por tanto $\mathcal{H}_{[\lambda_{01}, \lambda_{02}, 0]}$ es el único haz de $\Delta_{\ell,P,Q}$ tangente a r en Q .

Supongamos ahora que $\lambda_{11} \neq 0$. Veamos que un haz no degenerado del tipo $\mathcal{H}_{[a,b,1]}$ cumple P_{112} o P_{13} . Si $(a,b) = (0,0)$, el haz es degenerado, ya que toda cónica del mismo debe tener $\alpha_{11} = 0$ y sabemos que $\det A = \alpha_{11}\alpha_{02}^2$.

Supongamos primero que $a \neq 0$. Consideremos dos cónicas \mathfrak{c}_1 y \mathfrak{c}_2 en $\mathcal{H}_{[a,b,1]}$ dadas respectivamente por los polinomios

$$F_1 = X_0(bX_1 - aX_2), \quad F_2 = X_1(X_0 - aX_1).$$

La intersección de los soportes está formada por los puntos no alineados

$$P = [0, 0, 1], \quad Q = [1, 0, 0], \quad R_{a,b} = [a^2, a, b].$$

El haz cumple la propiedad P_{112} , pues todas sus cónicas pasan por estos puntos. Nótese que $\mathcal{H}_{[a,b,1]}$ es el único haz, con $a \neq 0$, en $\Delta_{\ell,P,Q}$ cuyas cónicas pasan por el punto $R_{a,b}$; en efecto, si $R_{a,b} = R_{a',b'}$, tenemos que $(a,b) = (a',b')$. Veremos que si $a = 0$, la intersección de los soportes tiene solo dos puntos; de modo que $\mathcal{H}_{[a,b,1]}$ es el único haz no degenerado de $\Delta_{\ell,P,Q}$ cuyas cónicas pasan por $R_{a,b}$.

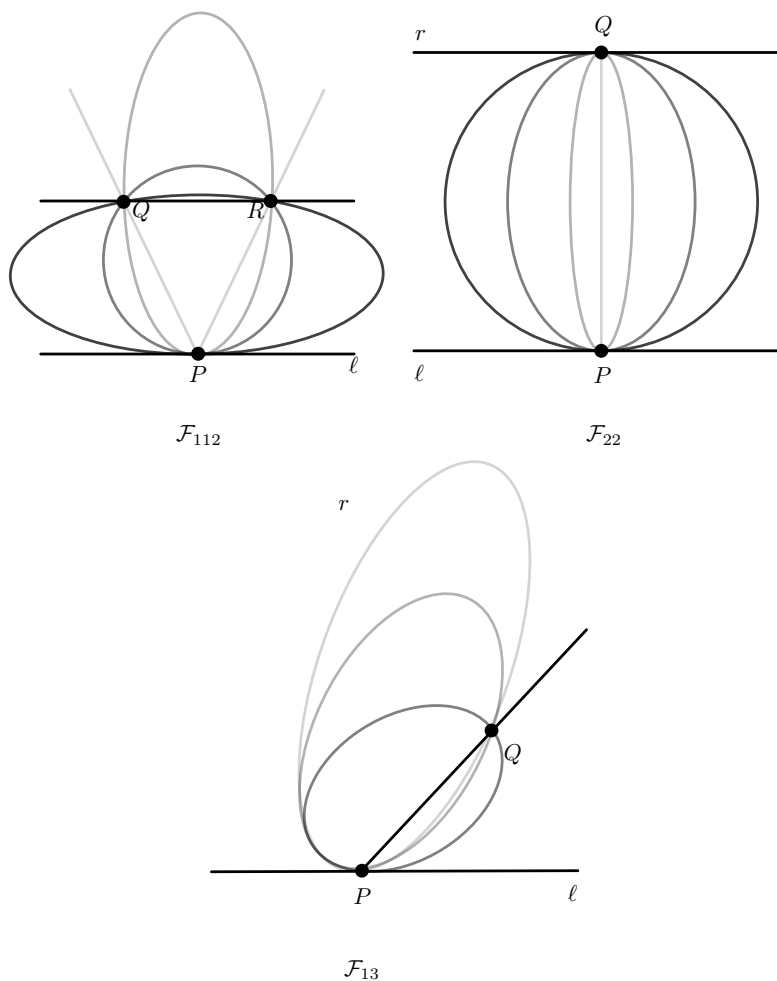
Supongamos ahora que $a = 0$ y por tanto $b \neq 0$. Consideremos las cónicas del haz dadas por los polinomios

$$F_1 = X_0X_1, \quad F_2 = X_0X_2 - bX_1^2.$$

La intersección de sus soportes es el conjunto de los puntos P y Q . Recordando que tenemos tangentes distintas en Q , estamos en la propiedad P_{13} . \square

Sea \mathcal{H} un haz no degenerado de cónicas en un plano proyectivo complejo $\mathbb{P}(V)$. Diremos que \mathcal{H} pertenece a una de las familias \mathcal{F}_{112} , \mathcal{F}_{13} o \mathcal{F}_{22} si y solo si \mathcal{H} está contenido en uno de los planos $\Delta_{\ell,P,Q}$. En este caso, diremos que \mathcal{H} está en la familia

\mathcal{F}_{112} , respectivamente \mathcal{F}_{13} y \mathcal{F}_{22} , si se cumple la propiedad P_{112} , respectivamente P_{13} y P_{22} , de la proposición 25.



LEMA 7. *Dos haces de cónicas cualesquiera de la familia \mathcal{F}_{13} son proyectivamente equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean \mathcal{H} y \mathcal{H}' haces de cónicas pertenecientes a la familia \mathcal{F}_{13} , respectivamente contenidos en $\Delta_{\ell, P, Q} \subset \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$ y en $\Delta_{\ell', P', Q'} \subset \mathbb{P}(\mathcal{Q}(V'))$. Después de considerar una proyectividad de $\mathbb{P}(V')$ en $\mathbb{P}(V)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $V' = V$ y que $\ell' = \ell$, $P' = P$ y $Q' = Q$.

Tomando las notaciones de la demostración anterior, sabemos que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{[0, b, 1]}, \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H}_{[0, b', 1]}, \quad bb' \neq 0.$$

Buscamos una proyectividad $\Phi : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$, de matriz $M = (\mu_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ que envíe $\mathcal{H}_{[0, b, 1]}$ en $\mathcal{H}_{[0, b', 1]}$. Veamos que podemos tomar M de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^t, \quad \mu \neq 0.$$

Observemos que el dato ℓ, P, Q queda fijo. Basta con que la proyectividad envíe dos cónicas de $\mathcal{H}_{[0, b, 1]}$ en dos cónicas de $\mathcal{H}_{[0, b', 1]}$. Dos generadores de \mathcal{H} son las cónicas \mathbf{c}_1 y \mathbf{c}_2 de polinomios respectivos

$$F_1 = X_0 X_1; \quad F_2 = X_0 X_2 - (b/2) X_1^2,$$

asimismo, el haz \mathcal{H}' está generado por \mathbf{c}_1 y por la cónica \mathbf{c}'_2 de polinomio

$$F'_2 = X_0 X_2 - (b'/2) X_1^2.$$

Vamos a intentar encontrar Φ de modo que $\Phi_*(\mathbf{c}_1) = \mathbf{c}_1$ y que $\Phi_*(\mathbf{c}_2) = \mathbf{c}'_2$. El transformado $\Phi_*(\mathbf{c}_1)$ está dado por la matriz

$$M \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M^t = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y tenemos garantizado que $\phi_*(\mathbf{c}_1) = \mathbf{c}'_1$. El transformado $\phi_*(\mathbf{c}_2)$ está dado por la matriz

$$M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b\mu^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tomando μ tal que $\mu^2 = b'/b$, tenemos garantizado que $\phi_*(\mathbf{c}_2) = \mathbf{c}'_2$. \square

PROPOSICIÓN 26. Sean \mathcal{H} y \mathcal{H}' dos haces no degenerados de cónicas con $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{H}' \in \mathcal{F}'$, donde \mathcal{F} y \mathcal{F}' pertenecen al conjunto $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$. Se tiene que \mathcal{H} y \mathcal{H}' son proyectivamente equivalentes si y solo si $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que \mathcal{H} y \mathcal{H}' son proyectivamente equivalentes. El número de puntos comunes n a los soportes de las cónicas de cada haz es el mismo para \mathcal{H} y \mathcal{H}' . Así, tenemos:

1. Si $n = 4$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}' = \mathcal{F}_{1111}$.
2. Si $n = 3$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}' = \mathcal{F}_{112}$.
3. Si $n = 2$, entonces $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \{\mathcal{F}_{13}, \mathcal{F}_{22}\}$.
4. Si $n = 1$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}' = \mathcal{F}_4$.

En el caso de que $n = 2$, la propiedad de tener tangentes comunes o no en los dos puntos de intersección de los soportes es también un invariante por equivalencia proyectiva. Esto distingue las familias \mathcal{F}_{13} y \mathcal{F}_{22} .

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, que \mathcal{H} es un haz de cónicas de $\mathbb{P}(V)$ y \mathcal{H}' de $\mathbb{P}(V')$. Si $\mathcal{F} \in \{\mathcal{F}_{1111}, \mathcal{F}_{13}, \mathcal{F}_4\}$, ya sabemos que \mathcal{H} y \mathcal{H}' son proyectivamente equivalentes, en efecto, el caso de la familia \mathcal{F}_{1111} es evidente, si es la familia \mathcal{F}_4 se sigue de la observación 18 y si se trata de la familia \mathcal{F}_{13} , del lema 7.

Estudemos la situación suponiendo que $\mathcal{F} \in \{\mathcal{F}_{112}, \mathcal{F}_{22}\}$. Después de una proyectividad adecuada, podemos suponer que \mathcal{H} y \mathcal{H}' son haces sobre el mismo plano proyectivo $\mathbb{P}(V)$ y asimismo pertenecen al mismo plano $\Delta_{\ell, P, Q}$ de $\mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$.

Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{112}$, tenemos puntos $R, R' \in \mathbb{P}(V)$ de modo que las cónicas de \mathcal{H} pasan por R y las de \mathcal{H}' por R' . Podemos encontrar una proyectividad de $\mathbb{P}(V)$ en

sí mismo que envía el dato ℓ, P, Q, R en ℓ, P, Q, R' . Esta proyectividad envía \mathcal{H} en un haz $\tilde{\mathcal{H}} \subset \Delta_{\ell, P, Q}$ cuyas cónicas pasan todas por R' ; por la unicidad probada en la proposición 25, tenemos que $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}'$.

Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{22}$, tenemos rectas $r, r' \in \mathbb{P}(V)$ de modo que las cónicas de \mathcal{H} son tangentes a r en Q y las de \mathcal{H}' lo son a r' en Q . Sabemos que existe al menos una proyectividad de $\mathbb{P}(V)$ en sí mismo, que deja fijos ℓ, P y Q y envía r en r' . Razonando como antes, la proyectividad envía \mathcal{H} en \mathcal{H}' . \square

Como consecuencia de los argumentos en las proposiciones anteriores, podemos dar formas normales para las familias descritas, en términos de polinomios, como sigue:

$$(7) \quad \begin{array}{ll} \mathcal{F}_{1111} : & \lambda X_0(X_1 - X_2) + \mu X_1(X_0 - X_2), \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \\ \mathcal{F}_{112} : & \lambda(X_1^2 - X_0X_2) + \mu X_0(X_1 - X_2), \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \\ \mathcal{F}_{13} : & \lambda X_0X_1 + \mu(X_0X_2 - X_1^2), \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \\ \mathcal{F}_{22} : & \lambda X_1^2 + \mu X_0X_2, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \\ \mathcal{F}_4 : & \lambda X_0^2 + \mu(X_1^2 + 2X_0X_2), \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1. \end{array}$$

El lector podrá probar que un haz no degenerado está en una de las familias si y solamente si es proyectivamente equivalente a la forma normal correspondiente. Se concluye que las familias son algunas de las clases de conjugación, por equivalencia proyectiva, de la clase de haces no degenerados de cónicas. En la próxima sección, veremos que son de hecho todas las posibles, es decir, que cualquier haz no degenerado de cónicas es proyectivamente equivalente a una de las formas normales anteriores.

14.3. Clasificación de haces de cónicas. El objetivo de esta sección es la clasificación proyectiva de haces no degenerados de cónicas proyectivas complejas. Veremos que dos haces no degenerados de cónicas sobre planos proyectivos complejos son proyectivamente equivalentes si y solo si pertenecen a la misma familia de $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$. A la vista de la subsección anterior, es suficiente probar el resultado siguiente:

PROPOSICIÓN 27. *Todo haz no degenerado de cónicas pertenece a una de las familias en $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$.*

Sea \mathcal{H} un haz no degenerado de cónicas en un plano proyectivo complejo $\mathbb{P}(V)$. Queremos probar que existe una familia $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ tal que $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$.

Tomemos dos cónicas distintas cualesquiera \mathfrak{c}_0 y \mathfrak{c}_1 en \mathcal{H} , que por tanto generan \mathcal{H} como recta proyectiva de $\mathbb{P}(\mathcal{Q}(V))$. El conjunto

$$B = \text{Sop}(\mathfrak{c}_0) \cap \text{Sop}(\mathfrak{c}_1)$$

es el conjunto de puntos comunes a los soportes de todas las cónicas de \mathcal{H} . En efecto, toda cónica \mathfrak{c} de \mathcal{H} está definida por una forma cuadrática combinación lineal de las que definen \mathfrak{c}_0 y \mathfrak{c}_1 , y por tanto un punto de B está en el soporte de \mathfrak{c} . Por conveniencia, elegimos \mathfrak{c}_0 y \mathfrak{c}_1 no degeneradas. Podemos hacer esto en virtud de la proposición 23.

El conjunto B tiene un máximo de cuatro puntos, y no hay tres alineados entre ellos, ya que están en el soporte de cónicas no degeneradas. En efecto, si tuviera cinco puntos o más, deberían coincidir \mathfrak{c}_0 y \mathfrak{c}_1 , por la proposición 22.

LEMA 8. *El conjunto B es no vacío.*

Demostración: Elijamos coordenadas de manera que la cónica \mathfrak{c}_0 esté dada por el polinomio $X_1^2 - X_0X_2$. El único punto de corte del soporte de \mathfrak{c}_0 con la recta $X_0 = 0$ es el punto $[0, 0, 1]$. Podemos suponer que este punto no está en el soporte de \mathfrak{c}_1 y buscar si existe algún punto de la forma $[1, a, b]$ en la intersección de los dos soportes. La cónica \mathfrak{c}_1 estará dada por un polinomio

$$\alpha_{00}X_0^2 + \alpha_{11}X_1^2 + \alpha_{22}X_2^2 + 2(\alpha_{01}X_0X_1 + \alpha_{02}X_0X_2 + \alpha_{12}X_1X_2).$$

Como el punto $[0, 0, 1]$ no está en el soporte de \mathfrak{c}_1 , tenemos que $\alpha_{22} \neq 0$, así, podemos tomar $\alpha_{22} = 1$. Si $[1, a, b]$ está en el soporte de \mathfrak{c}_0 , debe ocurrir que $b = a^2$. Ahora, la condición sobre a para que esté en el soporte de \mathfrak{c}_1 es que se cumpla

$$\alpha_{00} + 2\alpha_{01}a + (\alpha_{11} + 2\alpha_{02})a^2 + 2\alpha_{12}a^3 + a^4 = 0.$$

Se trata de un polinomio mónico de grado 4, que tendrá cuatro raíces contadas con multiplicidad, en particular tiene por lo menos una y por tanto $B \neq \emptyset$. CQD.

Dejamos al lector la comprobación de las siguientes propiedades:

1. Si ℓ es la recta polar de un punto P respecto de \mathfrak{c}_0 y de \mathfrak{c}_1 , entonces también ℓ es la recta polar de P respecto de cualquier cónica no degenerada \mathfrak{c} de \mathcal{H} .
2. Si ℓ es una recta tangente a \mathfrak{c}_0 y \mathfrak{c}_1 en el mismo punto P , entonces ℓ es tangente a cualquier cónica no degenerada \mathfrak{c} de \mathcal{H} en ese punto P .

Si B tiene cuatro puntos, es una referencia proyectiva, ya que no hay tres de ellos alineados. Así pues, en este caso el haz \mathcal{H} pertenece a la familia \mathcal{F}_{1111} .

LEMA 9. *Si B tiene tres puntos o menos, existe un punto $P \in B$ y una recta que es tangente a \mathfrak{c}_0 y \mathfrak{c}_1 en P .*

Demostración: Elijamos un punto $Q \in B$ y denotemos por r la recta tangente a \mathfrak{c}_0 en Q . Tal como hicimos en la clasificación afín de las cuádricas, podemos elegir coordenadas para que Q sea $[0, 0, 1]$, la recta r sea $X_0 = 0$ y la cónica \mathfrak{c}_0 esté dada por el polinomio $X_1^2 - X_0X_2$. La matriz $A = (\alpha_{ij})$ asociada a \mathfrak{c}_1 , debe cumplir la condición de que $[0, 0, 1]$ esté en el soporte de \mathfrak{c}_1 , esto es $\alpha_{22} = 0$. Sabemos que no hay más puntos de \mathfrak{c}_0 en $X_0 = 0$. Buscamos los demás puntos de B en la forma $[1, a, b]$. Deben cumplir con las ecuaciones $b = a^2$ y $F(a) = 0$, donde

$$(8) \quad F(a) = \alpha_{00} + 2\alpha_{01}a + (\alpha_{11} + 2\alpha_{02})a^2 + 2\alpha_{12}a^3.$$

Se tiene un polinomio de grado como mucho tres, que tendrá en general tres raíces que dan lugar a los puntos adicionales de B . Si hay menos de cuatro puntos en B , el polinomio F tiene dos raíces o menos. Queremos ver que en esta situación hay una tangente común a \mathfrak{c}_0 y \mathfrak{c}_1 en uno de los puntos de B .

El primer caso se da cuando $\alpha_{12} = 0$, ya que entonces F tiene grado menor o igual a 2. Entonces, la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{02}^2\alpha_{11} \neq 0.$$

Se tiene que \mathfrak{c}_1 es tangente a $X_0 = 0$ en $[0, 0, 1]$, al igual que \mathfrak{c}_0 .

Supongamos ahora que $\alpha_{12} \neq 0$. Salvo multiplicar A por un escalar, podemos suponer que $\alpha_{12} = 1/2$, de manera que F es mónico y lo escribiremos

$$(9) \quad F(a) = \alpha + \beta a + \gamma a^2 + a^3.$$

Dado que $F(a)$ tiene una raíz doble o triple, tenemos que $F(a) = (a - \lambda)^2(a - \mu)$. En particular, se cumple que

$$(10) \quad -\lambda^2\mu = \alpha, \quad \lambda(\lambda + 2\mu) = \beta, \quad -\mu - 2\lambda = \gamma.$$

Consideremos el punto $P = [1, \lambda, \lambda^2] \in B$ correspondiente a la raíz múltiple λ de F . La recta tangente ℓ_0 a \mathbf{c}_0 en P es $\lambda^2X_0 - 2\lambda X_1 + X_2 = 0$, dado que

$$(1, \lambda, \lambda^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\lambda^2, -2\lambda, 1).$$

Teniendo en cuentas las ecuaciones 8, 9 y 10, la matriz $A = (\alpha_{ij})$ de \mathbf{c}_1 tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda^2\mu & \lambda^2/2 + \lambda\mu & -\lambda - (\mu + \alpha_{11})/2 \\ \lambda^2/2 + \lambda\mu & \alpha_{11} & 1/2 \\ -\lambda - (\mu + \alpha_{11})/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La recta tangente ℓ_1 a \mathbf{c}_1 en P es $c_0X_0 + c_1X_1 + c_2X_2$, donde $(1, \lambda, \lambda^2)A = (c_0, c_1, c_2)$. Para ver que $\ell_0 = \ell_1$, es suficiente comprobar que $[c_0, c_1, c_2] = [\lambda^2, -2\lambda, 1]$. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} c_0 &= -(1/2)(\lambda + \mu + \alpha_{11})\lambda^2, \\ c_1 &= -(1/2)(\lambda + \mu + \alpha_{11})(-2\lambda), \\ c_2 &= -(1/2)(\lambda + \mu + \alpha_{11}), \end{aligned}$$

lo que termina la demostración.

CQD.

Continuemos con la prueba de la proposición 27. Suponemos que B tiene tres puntos o menos. Así pues, en virtud del lema 9, existe un punto $P \in B$ y una recta ℓ que es tangente a \mathbf{c}_0 y \mathbf{c}_1 en P . Tomemos coordenadas homogéneas de modo que ℓ_0 esté dada por el polinomio $X_1^2 - X_0X_2$, la recta ℓ sea la recta $X_0 = 0$ y el punto P el punto $P = [0, 0, 1]$. Sea $A = (\alpha_{ij})$ una matriz que define \mathbf{c}_1 . Como ℓ es tangente a \mathbf{c}_1 en P , tenemos que $\alpha_{12} = \alpha_{22} = 0$ y $\alpha_{02}\alpha_{11} \neq 0$.

Podemos suponer $\alpha_{02} = 1$. A la vista de la prueba del lema 9, los otros puntos de B , si existen, están dados por $Q_a = [1, a, a^2]$, donde a es una raíz del polinomio

$$(11) \quad F(a) = \alpha_{00} + 2\alpha_{01}a + (\alpha_{11} + 2)a^2.$$

Podemos tener ninguno de ellos, uno o dos. Estudiemos los posibles casos.

Supongamos primero que $B = \{P\}$. En este caso $F(a)$ no tiene raíces. Esto ocurre si y solamente si $\alpha_{00} \neq 0$, $\alpha_{01} = 0$, $\alpha_{11} = -2$. La matriz A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \neq 0.$$

La polar respecto de \mathbf{c}_1 de un punto $R_\lambda = [0, 1, \lambda]$ es la recta r_λ de ecuación

$$\lambda X_0 - 2X_1 = 0.$$

Por otro lado, la polar respecto de \mathbf{c}_0 de R_λ es la recta

$$(0, 1, \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0;$$

es decir, es también la recta r_λ . Tomando $R = R_0$, $S = R_1$, $r = r_0$ y $s = r_1$, en virtud de la proposición 24, vemos que \mathcal{H} es el único haz no degenerado cuyas cónicas son tangentes a ℓ en P , la recta r es la polar de R y la recta s es la polar de S . Se concluye que $\mathcal{H} \in \mathcal{F}_4$.

Supongamos ahora que $\{P, Q\} \subset B \subset \{P, Q, R\}$. Tenemos que \mathfrak{c}_0 y \mathfrak{c}_1 son dos cónicas del plano $\Delta_{\ell, P, Q}$ y por lo tanto \mathcal{H} es una recta de dicho plano. En vista de la proposición 25, sabemos que \mathcal{H} cumple una de las tres propiedades P_{112} , P_{13} o P_{22} y por lo tanto, pertenece a una de las tres familias \mathcal{F}_{112} , \mathcal{F}_{13} o \mathcal{F}_{22} .

— — —

EJERCICIO 53. Consideremos un haz \mathcal{H} no degenerado de cónicas en un plano proyectivo complejo $\mathbb{P}(V)$. Pruébese que si hay una recta tangente a todas las cónicas del haz, lo es necesariamente en el mismo punto.

EJERCICIO 54. Consideremos un haz \mathcal{H} no degenerado de cónicas en un plano proyectivo complejo $\mathbb{P}(V)$ perteneciente a la familia \mathcal{F}_4 , cuyas cónicas son tangentes a una recta ℓ en un punto fijo P . Demuéstrese que la recta polar de cualquier punto $Q \in \ell$ con respecto a una cónica no degenerada de \mathcal{H} es independiente de la cónica elegida.

EJERCICIO 55. Dada una cónica no degenerada \mathfrak{c} de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, muéstrese que existen al menos cinco haces de cónicas que pasan por \mathfrak{c} y pertenecen respectivamente a las cinco familias anteriormente descritas.

EJERCICIO 56. (Haces de cónicas degeneradas) Descríbanse los tipos posibles de haces de cónicas degeneradas.

Aspectos multilineales. Cuádrica de Klein

1. Producto tensorial

Consideremos una familia finita V_1, V_2, \dots, V_p de k -espacios vectoriales de dimensión finita. Sea W otro k -espacio vectorial. Diremos que una aplicación

$$\phi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p \rightarrow W$$

es p -*multilineal* si para cada índice $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ y para cada colección de vectores $v_i \in V_i$ con $i \in \{1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, p\}$, la aplicación

$$v \in V_j \mapsto \phi(v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_p) \in W$$

es lineal. Denotaremos por $\text{Mult}_k(V_1, V_2, \dots, V_p; W)$ el conjunto de aplicaciones p -multilineales como la susodicha. Se trata de un k -espacio vectorial.

El producto tensorial representa las aplicaciones multilineales, de acuerdo con la siguiente definición:

DEFINICIÓN 6. *Diremos que un par (t, T) formado por un k -espacio vectorial T y una aplicación p -multilineal*

$$t : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p \rightarrow T$$

es un producto tensorial de la familia V_1, V_2, \dots, V_p de k -espacios vectoriales si y solo si se cumple la siguiente propiedad (*propiedad universal del producto tensorial*):

“Para cada $\phi \in \text{Mult}_k(V_1, V_2, \dots, V_p; W)$ existe una única aplicación lineal $f : T \rightarrow W$ tal que $\phi = f \circ t$.”

Si (t, T) y (t', T') son dos productos tensoriales de la familia V_1, V_2, \dots, V_p , como consecuencia de la definición, existe un único isomorfismo de espacios vectoriales $g : T \rightarrow T'$ tal que $t' = g \circ t$. Esta propiedad suele expresarse diciendo que el producto tensorial es “único salvo isomorfismo único”.

Una observación importante es que si (t, T) es un producto tensorial de la familia V_1, V_2, \dots, V_p se tiene un isomorfismo natural de espacios vectoriales

$$T^* \rightarrow \text{Mult}_k(V_1, V_2, \dots, V_p; k),$$

dado por $\sigma \mapsto \sigma \circ t$.

Veamos la existencia de productos tensoriales de la familia V_1, V_2, \dots, V_p . Fijemos una base $\beta_j = \{e_i^j\}_{i \in I_j}$ en cada V_j , para $j = 1, 2, \dots, p$. Consideremos el producto de conjuntos finitos

$$I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_p$$

y sea T el espacio vectorial $T = k^I$ formado por las funciones $\xi : I \rightarrow k$. Dado un elemento $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ de I , definamos el elemento $\mathbf{e}^{\mathbf{i}} : I \rightarrow k$ por $\mathbf{e}^{\mathbf{i}}(\mathbf{i}) = 1$

y $\mathbf{e}^{\mathbf{j}} = 0$, si $\mathbf{j} \neq \mathbf{i}$. Sabemos que la familia $\{\mathbf{e}^{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i} \in I}$ es una base de k^I . Ahora definimos la aplicación multilinear

$$t : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_p \rightarrow T$$

por la fórmula

$$t \left(\sum_{i \in I_1} \lambda_i^1 e_i^1, \sum_{i \in I_2} \lambda_i^2 e_i^2, \dots, \sum_{i \in I_p} \lambda_i^p e_i^p \right) = \sum_{\mathbf{i} \in I} (\lambda_{i_1}^1 \lambda_{i_2}^2 \cdots \lambda_{i_p}^p) \mathbf{e}^{\mathbf{i}}.$$

Veamos ahora que hemos construido un producto tensorial (t, T) . Consideremos una aplicación $\phi \in \mathcal{M}ult_k(V_1, V_2, \dots, V_p; W)$. La propiedad de ser p -multilinear dice que

$$\phi \left(\sum_{i \in I_1} \lambda_i^1 e_i^1, \sum_{i \in I_2} \lambda_i^2 e_i^2, \dots, \sum_{i \in I_p} \lambda_i^p e_i^p \right) = \sum_{\mathbf{i} \in I} (\lambda_{i_1}^1 \lambda_{i_2}^2 \cdots \lambda_{i_p}^p) \phi(e_{i_1}^1, e_{i_2}^2, \dots, e_{i_p}^p).$$

Si una aplicación lineal $f : T \rightarrow W$ cumple que $f \circ t = \phi$, forzosamente debe ocurrir que

$$f(\mathbf{e}^{\mathbf{i}}) = \phi(e_{i_1}^1, e_{i_2}^2, \dots, e_{i_p}^p)$$

y si definimos f por esta propiedad, se cumple efectivamente que $f \circ t = \phi$. Así pues, hemos construido un producto tensorial. Recordemos que cualquier otro es isomorfo salvo isomorfismo único. Nótese que

$$\dim_k T = \prod_{j=1}^p \dim_k V_j.$$

Es importante señalar que la aplicación p -multilinear

$$t : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_p \rightarrow T$$

asociada a un producto tensorial no necesariamente es suprayectiva. Los elementos de la imagen se llaman *descomponibles*.

Finalmente, a veces se adoptan la notaciones

$$T = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_p, \quad t(v_1, v_2, \dots, v_p) = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_p,$$

cuando no hay confusión respecto del producto tensorial particular elegido.

— — —

EJERCICIO 57. Demostrar con detalle que el producto tensorial es único salvo isomorfismo único.

EJERCICIO 58. Exhibir elementos no descomponibles del producto tensorial.

2. Producto exterior

Consideremos un espacio vectorial V de dimensión finita y un entero $1 \leq p \leq n$, donde $n = \dim V$. Diremos que una aplicación p -multilinear

$$\phi : V \times V \times \cdots \times V \rightarrow W$$

es *alternada* si para toda permutación $\sigma \in S_p$ y toda lista de vectores $v_1, v_2, \dots, v_p \in V$ se tiene la propiedad

$$\phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma) \phi(v_1, v_2, \dots, v_p),$$

donde $\epsilon(\sigma) \in \{1, -1\}$ es la signatura de la permutación σ .

OBSERVACIÓN 19. Hemos denotado por S_p el grupo de permutaciones de p elementos, es decir, el grupo cuyos elementos son las biyecciones

$$\sigma : \{1, 2, \dots, p\} \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}.$$

La signatura $\epsilon(\sigma)$ representa la paridad de una cadena de trasposiciones que defina σ . Dicho de otro modo, se tiene un homomorfismo de grupos $\epsilon : S_p \rightarrow \{1, -1\}$ tal que $\epsilon(\tau) = -1$, cuando τ es una trasposición.

Denotaremos por $\text{Alt}_k^p(V; W)$ el espacio vectorial de las aplicaciones p -multilineales alternadas con llegada en W .

DEFINICIÓN 7. Diremos que un par (ex, E) formado por un k -espacio vectorial E y una aplicación p -multilineal alternada

$$\text{ex} : V \times V \times \dots \times V \rightarrow E$$

es un p -producto exterior de V si y sólo si se cumple la siguiente propiedad (propiedad universal del producto exterior):

“Para cada $\phi \in \text{Alt}_k^p(V; W)$, existe una única aplicación $f : E \rightarrow W$ lineal y tal que $\phi = f \circ \text{ex}$.”

Exactamente como en el caso del producto tensorial, dos productos exteriores, si existen, son isomorfos por medio de un isomorfismo natural único. Veamos la existencia de productos exteriores. Fijemos una base $\beta = \{e_i\}_{i=1}^n$ de V y consideremos el conjunto Λ_n^p cuyos elementos son las p -uplas $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ de números enteros tales que

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n.$$

Consideremos el espacio vectorial $k^{\Lambda_n^p}$ dotado de la base $\{\mathbf{e}^{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i} \in \Lambda_n^p}$ definida como en el caso del producto tensorial. Ahora podemos definir una aplicación multilineal alternada

$$\text{ex} : V \times V \times \dots \times V \rightarrow E$$

por la fórmula

$$\begin{aligned} \text{ex} \left(\sum_{i_1} \lambda_{i_1}^1 e_{i_1}, \sum_{i_2} \lambda_{i_2}^2 e_{i_2}, \dots, \sum_{i_p} \lambda_{i_p}^p e_{i_p} \right) &= \\ &= \sum_{\mathbf{i} \in \Lambda_n^p} \left(\sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma) \lambda_{i_{\sigma(1)}}^1 \lambda_{i_{\sigma(2)}}^2 \dots \lambda_{i_{\sigma(p)}}^p \right) \mathbf{e}^{\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

El lector comprobará que efectivamente se obtiene una aplicación p -multilineal alternada y que hemos construido un p -producto exterior de V , siguiendo las mismas pautas que en el caso del producto tensorial.

Nótese que la dimensión de todo p -producto exterior (ex, E) de V está dada por el número de elementos de Λ_n^p , es decir

$$\dim_k E = \binom{n}{p}.$$

En particular, si $p = n$ se trata de espacios de dimensión uno.

Lo mismo que en el caso del producto tensorial, hay notaciones habituales que se usan para denotar un producto exterior. Así, es habitual hacer uso de las siguientes

$$E = \Lambda^p V, \quad \text{ex}(v_1, v_2, \dots, v_p) = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p.$$

Los casos extremos se tratan como sigue. Por convenio si $p = 0$ se asume que $\Lambda^0 V = k$. Si $p > n$ se asume que $\Lambda^p V = \{0\}$. Si $p = 1$, vemos que cualquier par (f, V) donde $f : V \rightarrow V$ es un automorfismo, da un producto exterior, lo mismo en el caso del producto tensorial.

— — —

EJERCICIO 59. Sea V un k -espacio vectorial de dimensión n y consideremos una lista de p vectores v_1, v_2, \dots, v_p de V . Demuéstrese que dichos vectores son linealmente independientes si y solo si $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p \neq 0$.

3. El determinante de un endomorfismo

Consideremos un endomorfismo $f : V \rightarrow V$, donde $\dim_k V = n$ y fijemos un n -producto exterior (ex, E) de V . Recordamos que $\dim_k E = 1$ y que

$$\text{ex} : V \times V \times \dots \times V \rightarrow E$$

es una aplicación n -multilineal alternada de modo que (ex, E) satisface la propiedad universal del producto exterior. Ahora podemos obtener una aplicación n -multilineal alternada

$$\Phi_{(\text{ex}, E)}(f) : V \times V \times \dots \times V \rightarrow E,$$

dada por

$$\Phi_{(\text{ex}, E)}(f) : (v_1, v_2, \dots, v_n) \rightarrow \text{ex}(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)).$$

A la vista de la propiedad universal del producto exterior, existe un único endomorfismo lineal $\text{Det}_{(\text{ex}, E)}(f) : E \rightarrow E$ tal que

$$\text{Det}_{(\text{ex}, E)}(f) \circ \text{ex} = \Phi_{(\text{ex}, E)}(f).$$

Dado que E es un espacio vectorial de dimensión uno, existe un escalar bien definido $\det_{(\text{ex}, E)}(f) \in k$ tal que para todo $\mathbf{e} \in E$ se tiene

$$\text{Det}_{(\text{ex}, E)}(f)(\mathbf{e}) = \det_{(\text{ex}, E)}(f)\mathbf{e}.$$

LEMA 10. *El escalar $\det_{(\text{ex}, E)}(f)$ no depende del producto exterior elegido.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que (ex', E') es otro producto exterior. Sabemos que hay un isomorfismo único $\xi : E \rightarrow E'$ tal que $\text{ex}' = \xi \circ \text{ex}$. Si comprobamos que

$$(12) \quad \text{Det}_{(\text{ex}', E')}(f) = \xi \circ \text{Det}_{(\text{ex}, E)}(f) \circ \xi^{-1}$$

habremos terminado, dado que para todo $\mathbf{e}' \in E'$ se tiene

$$\det_{(\text{ex}', E')}(f)\mathbf{e}' = \text{Det}_{(\text{ex}', E')}(f)(\mathbf{e}') = \xi(\det_{(\text{ex}, E)}(f)\xi^{-1}(\mathbf{e}')) = \det_{(\text{ex}, E)}(f)\mathbf{e}'$$

y por consiguiente $\det_{(\text{ex}', E')}(f) = \det_{(\text{ex}, E)}(f)$.

Probemos la identidad en la ecuación 12 o, lo que es lo mismo, que se tiene $\text{Det}_{(\text{ex}', E')}(f) \circ \xi = \xi \circ \text{Det}_{(\text{ex}, E)}(f)$. Para esto, es suficiente probar que

$$(13) \quad \xi \circ \Phi_{(\text{ex}, E)}(f) = \Phi_{(\text{ex}', E')}(f).$$

En efecto, en ese caso se tiene que

$$(\xi \circ \text{Det}_{(\text{ex}, E)}(f)) \circ \text{ex} = \text{Det}_{(\text{ex}', E')}(f) \circ \text{ex}' = (\text{Det}_{(\text{ex}', E')}(f) \circ \xi) \circ \text{ex};$$

por la propiedad universal de (ex, E) vemos que $\xi \circ \text{Det}_{(\text{ex}, E)}(f) = \text{Det}_{(\text{ex}', E')}(f) \circ \xi$.

Falta probar la ecuación 13. Dados $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, tenemos

$$\begin{aligned} \xi \circ \Phi_{(\text{ex}, E)}(f)(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \xi(\text{ex}(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))) = \\ &= \text{ex}'(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) = \\ &= \Phi_{(\text{ex}', E')}(f)(v_1, v_2, \dots, v_n), \end{aligned}$$

con lo que se concluye la demostración. \square

Este escalar $\det_{(\text{ex}, E)}(f)$ se denomina *el determinante del endomorfismo f* y lo denotaremos $\det(f)$.

— — —

EJERCICIO 60. Sean $f, g : V \rightarrow V$ dos endomorfismos. Demuéstrase que

$$\text{Det}_{(\text{ex}, E)}(f \circ g) = \text{Det}_{(\text{ex}, E)}(f) \circ \text{Det}_{(\text{ex}, E)}(g).$$

Conclúyase que el determinante de $f \circ g$ es el producto de los determinantes de f y de g

EJERCICIO 61. Pruébese que el determinante de un endomorfismo coincide con el de cualquier matriz que lo representa.

4. La cuádrica de Klein

Consideremos un espacio vectorial V de dimensión cuatro sobre un cuerpo de característica distinta de dos y el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ de dimensión tres asociado. El objetivo de esta sección es dar una parametrización geométrica del espacio de rectas de $\mathbb{P}(V)$.

Consideremos un 2-producto exterior de V , que denotaremos $(\text{ex}, \Lambda^2 V)$ y emplearemos la notación $\text{ex}(v_1, v_2) = v_1 \wedge v_2$. Sabemos que $\Lambda^2 V$ tiene dimensión seis. Más aún, si $\beta = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ es una base de V , podemos encontrar una base de $\Lambda^2 V$ dada por los elementos

$$e_i \wedge e_j, \quad 0 \leq i < j \leq 3.$$

LEMA 11. *Sea $W \subset V$ un subespacio vectorial de dimensión dos. El conjunto $P_W = \text{ex}(W \times W) \subset \Lambda^2 V$ cuyos elementos son de la forma $w_1 \wedge w_2$, con $w_1, w_2 \in W$, es una recta vectorial de $\Lambda^2 V$. Además, si $W \neq W'$ tenemos que $P_W \neq P_{W'}$.*

Demostración: Elijamos una base β tal que W esté generado por los dos primeros elementos e_0 y e_1 de la base. Podemos escribir $w_i = a_i e_0 + b_i e_1$, para $i = 1, 2$. Entonces se tiene que

$$w_1 \wedge w_2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_0 \wedge e_1.$$

Concluimos que P_W es la recta vectorial de $\Lambda^2 V$ generada por $e_0 \wedge e_1$. Si $W' \neq W$, podemos elegir la base de forma que se cumpla una de las afirmaciones siguientes:

- W está generado por e_0, e_1 y W' por e_0, e_2 .
- W está generado por e_0, e_1 y W' por e_2, e_3 .

En ambos casos P_W es la recta generada por $e_0 \wedge e_1$. En el primer caso $P_{W'}$ está generado por $e_0 \wedge e_2$ y en el segundo por $e_2 \wedge e_3$. En ambos casos $P_W \neq P_{W'}$. CQD.

Los elementos descomponibles de $\Lambda^2 V$ son precisamente aquellos que están en alguna de las rectas P_W . Son los que nos permiten parametrizar las rectas de $\mathbb{P}(V)$.

DEFINICIÓN 8. *Llamamos cuádrica de Klein al subconjunto de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ formado por los elementos P_W , donde $W \subset V$ es un subespacio vectorial de dimensión dos.*

Así pues, la cuádrlica de Klein parametriza el conjunto de rectas ℓ de $\mathbb{P}(V)$.

Veamos por qué se llama “cuádrlica”. Consideremos la referencia proyectiva de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ asociada a la base $\Lambda^2 \beta$ y sea

$$\Phi_{\Lambda^2 \beta} : \mathbb{P}(\Lambda^2 \beta) \rightarrow \mathbb{P}(k^6) = \mathbb{P}_k^5$$

la proyectividad de coordenadas homogéneas correspondiente. A cada punto $[v]$ de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ le asociamos las coordenadas homogéneas

$$\Phi_{\Lambda^2 \beta}([v]) = [\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{03}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}],$$

donde $v = \sum_{0 \leq i < j \leq 3} \lambda_{ij} e_i \wedge e_j$. Consideremos dos puntos distintos $P, Q \in \mathbb{P}(V)$ de coordenadas homogéneas $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ y $[b_0, b_1, b_2, b_3]$ respectivamente. La recta $\ell = P + Q$ está representada en la cuádrlica de Klein por el punto $[\lambda_{ij}]$ de \mathbb{P}_k^5 , donde

$$\lambda_{ij} = a_i b_j - a_j b_i; \quad 0 \leq i < j \leq 3.$$

Este punto $[\lambda_{ij}]$ representa las *coordenadas de Plücker de la recta ℓ* . Adoptaremos la notación $\mathcal{P}_\beta(\ell) = [\lambda_{ij}]$. Las coordenadas de Plücker de ℓ cumplen la siguiente relación:

$$\lambda_{01} \lambda_{23} - \lambda_{02} \lambda_{13} + \lambda_{03} \lambda_{12} = 0.$$

Esta relación define una cuádrlica no degenerada en \mathbb{P}_k^5 , que coincide con la cuádrlica de Klein de acuerdo con la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 28. *Dado un punto $[\lambda_{ij}]$ de \mathbb{P}_k^5 que cumpla la relación*

$$\lambda_{01} \lambda_{23} - \lambda_{02} \lambda_{13} + \lambda_{03} \lambda_{12} = 0,$$

existe una recta ℓ de $\mathbb{P}(V)$ tal que $\mathcal{P}_\beta(\ell) = [\lambda_{ij}]$.

Demostración: Supongamos, para simplificar que $\lambda_{01} \neq 0$, en otro caso se aplica el mismo argumento con otros índices. Así pues, podemos suponer que $\lambda_{01} = 1$. Buscamos dos vectores independientes

$$a = (a_0, a_1, a_2, a_3), \quad b = (b_0, b_1, b_2, b_3) \in k^4$$

de manera que se tenga $\lambda_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$, con $0 \leq i < j \leq 3$. Decidamos que $a_0 = 0, b_0 = 1$. Esto nos da

$$a_j = -\lambda_{0j} \quad j = 1, 2, 3.$$

Tenemos entonces que $a = (0, -1, -\lambda_{02}, -\lambda_{03})$ y $b = (1, b_1, b_2, b_3)$. Debe ocurrir también que

$$\lambda_{1j} = -b_j + \lambda_{0j} b_1, \quad j = 2, 3.$$

Decidamos que $b_1 = 0$, entonces se tiene que

$$b = (1, 0, -\lambda_{12}, -\lambda_{13}).$$

Falta comprobar que $\lambda_{23} = a_2 b_3 - a_3 b_2$. Tenemos que

$$\lambda_{23} = \lambda_{01} \lambda_{23} = \lambda_{02} \lambda_{13} - \lambda_{03} \lambda_{12} = -a_2(-b_3) - (-a_3)(-b_2) = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

lo que termina la demostración. CQD.

Del mismo modo, pero con mayor complicación, se puede describir la *grassmanniana de subespacios de dimensión p de un espacio proyectivo ambiente $\mathbb{P}(V)$ de dimensión n* como un determinado subconjunto de $\mathbb{P}(\Lambda^{p+1} V)$. Para este y otros temas relacionados, recomendamos al lector hacer un recorrido por la bibliografía, con la esperanza de que estas notas hayan servido para facilitar el mismo.

— — —

EJERCICIO 62. (Planos en la Cuádrica de Klein) Consideremos el espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ y la cuádrica de Klein $\mathcal{K} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ asociada. Dado punto $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ consideremos el subconjunto Δ_P de \mathcal{K} cuyos elementos son la coordenadas de Plücker de las rectas $r \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ que pasan por P . Demuéstrese que Δ_P es un 2-plano de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ contenido en \mathcal{K} . Por otro lado, consideremos un hiperplano H de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ y definamos el subconjunto Δ^H de \mathcal{K} formado por las coordenadas de Plücker de las rectas $r \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ contenidas en H . Demuéstrese que Δ^H es un 2-plano de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ contenido en \mathcal{K} . Pruébese que todo 2-plano Δ de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ contenido en \mathcal{K} es de la forma Δ_P o Δ^H .

Por otro lado, sea ℓ una recta de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ contenida en \mathcal{K} . Demuéstrese que existe un plano H de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ y un punto $P \in H$ de modo que $\ell = \Delta_P \cap \Delta^H$.

Referencias básicas recomendadas

1. J.M. Aroca, J.M.; Fernández-Bermejo, M.J.: *Algebra Lineal y Geometría*. Secretariado de Publicaciones UVa, 1988.
2. Aroca, J.M.; Fernández-Bermejo, M.J.: *Geometría Proyectiva*. UVa, descargable desde la WEB de la Universidad de Valladolid.
3. Casas-Alvero, E.: *Analytic Projective Geometry*. European Mathematical Society, 2014.
4. Hartley, B.; Hawkes, T.O.: *Rings, modules and linear algebra*. Chapman and Hall, Ltd. 1970.
5. Rodríguez Sanjurjo, J.M.; Ruiz Sancho, J.M.: *Geometría Proyectiva*. Addison-Wesley, 1998.
6. Santaló, L.A.: *Geometría Proyectiva*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1966.

Bibliografía

- [1] Abbot, E.A.: *Planilandia* (Traducción de Flatland, 1884). Guadarrama, Madrid, 1976.
- [2] Abellanas, P.: *Unas reflexiones sobre la biografía de la Matemática* (Discurso de apertura del curso 1979-80). Ediciones de la Univ. Complutense Madrid, 1979.
- [3] Abellanas, P.: *Geometría Básica*. Ed. Romo sl. Madrid, 1969.
- [4] Adams, C.C.: *Knot Book: An elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. Freeman, Nueva York, 1994.
- [5] Alonso-Misol, F.: *Nociones de Geometría Projectiva*. Nuevas Gráfica, Madrid, 1933.
- [6] Apéry, F.: *Models of the Real Projective Plane*. Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [7] Aroca, J.M; Fernández-Bermejo, M.J.: *Algebra Lineal y Geometría*. Secretariado de Publicaciones UVA, 1988.
- [8] Aroca, J.M; Fernández-Bermejo, M.J.: *Geometría Projectiva*. UVA, descargable desde la WEB de la Universidad de Valladolid.
- [9] Ayres, F.: *Geometría Projectiva. Teoría y 200 problemas resueltos*. McGraw-Hill, México, 1971.
- [10] Beutelspacher, A.; Rosenbaum, U.: *Projective Geometry. From foundations to Applications*. Cambridge University Press, 1998.
- [11] Boi, L.: *Le problème mathématique de l'espace*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, 1995.
- [12] Boyer, C.B.: *Historia de la Matemática*. Alianza Universidad, Madrid, 1986.
- [13] Cartan, E.: *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- [14] Casas-Alvero, E.: *Analytic Projective Geometry*. European Mathematical Society, 2014.
- [15] Chasles, M.: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Gauthier-Villars, Paris, 1875.
- [16] Cornish, N.; Weeks, J.: *Measuring the shape of the universe*. Notices AMS, Vol. 45, pp. 1461-1469, 1998.
- [17] Coxeter, H.S.M.: *Projective Geometry*. Springer-Verlag, Nueva York, 1987.
- [18] Descartes, R.: *La Géométrie* (Reedición del apéndice al Discurso del Método). J. Gabay, París 1991.
- [19] Desargues, G.: *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plane*. (Versión de J Coolidge de 1940), 1639.
- [20] Donaldson, S.K.: *The Geometry of four manifolds*. Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [21] Enriques, F.: *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées, Volume III, 1. Chapter: Principes de la géométrie*. pp. 1-147 (Reedición de Gauthier - Villars, Paris, B. G. Teubner, Leipzig 1911), J. Gabay, París, 1991.
- [22] Enriques, F.: *Lezioni di Geometria Proiettiva*. Nicola Zanichelli Eds., 1926.
- [23] Fernando, J.F.; Gamboa, J.M.: *Geometría Lineal: Espacios Afines y Projectivos*. Sanz y torres, Madrid, 2017.
- [24] Flores de Lemus, A.I.: *Über die Existenz n-dimensionaler Komplexe, die nicht in den R_{2n} einbettbar sind* (Traducido en Theoria Vol VII, 1993). Erg. Math. Kolloq., Vol. 6, 1933.
- [25] Frege, G.: *Über die Grundlagen der Geometrie*. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Vol. XII, pp. 319-324,368-375, 1903.
- [26] Freudenthal, H.: *Neuere Fassungen des Riemann-Hemholz-Lieschen Raumproblem*. Math. Zeitschrift, Vol. 63, pp. 374-405, 1956.
- [27] Gray, J.: *Ideas de espacio*. Mondadori, Madrid, 1992.
- [28] Güell, V. de: *Espacio, relación y posición*. Calpe, Madrid, 1924.
- [29] Hartshorne, R.: *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer-Verlag Nueva York, 2000.
- [30] Hartshorne, R.: *Foundations of Projective Geometry*. Benjamin, Nueva York, 1967.
- [31] Hartley, B.; Hawkes, T.O.: *Rings, modules and linear algebra*. Chapman and Hall, ltd. 1970.

- [32] Heath, T.L.: *The Thirteen Books of Euclid's Elements (3 vol.)*. Dover, Nueva York, 1967.
- [33] Hemholtz, H.: *Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie*. Verhandlungen des nat. Vereins zu Heidelberg, Vol. 4, pp. 197-202, 1866.
- [34] Heyting, A.: *Axiomatic Projective Geometry*. North-Holland Publishing Company, 1964
- [35] Hilbert, D.: *Grundlagen der Geometrie* (Reedición de un original de 1899). Teubner, Stuttgart, 1968.
- [36] Hilbert, D.; Cohn-Vossen, S.: *Geometry and the Imagination* (Traducción de un original). Chelsea, Nueva York, 1952.
- [37] Hodge, W.V.D.; Pedoe, D.: *Methods of Algebraic Geometry. Projective Space*. Cambridge University Press, 1947.
- [38] Hugget, S.A.; Mason, L.J.; Tod, K.P.; Tsou, S.T.; Woodhouse, N.M.J.: *The Geometric Universe. Science, Geometry and the Work of Roger Penrose*. Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [39] Kadison, L.; Kromann, M.T.: *Projective Geometry and Modern Algebra*. Birkhäuser, Berlin, 1996.
- [40] Klein, F.: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Reedición corregida del Programa de Erlangen de 1872). Math. Ann., Vol. 43, 1893.
- [41] Klein, F.: *Matemática elemental desde un punto de vista superior Vol. 2 Geometría* (Traducción de un original). Biblioteca Matemática, Madrid, 1931.
- [42] Klein, F.: *Über die sogenannte Nicht-EuKlidische Geometrie* (Serie de seis artículos). Math. Ann., Vol. 4,5,6, 1871-1873.
- [43] Moebius, A.F.: *Der baryzentrische Calcul* (Original de 1827 recogido en sus obras completas). Hirzel, Leipzig, 1885.
- [44] Montesinos, J.M.: *Números, combinatoria y nudos: de lo discreto a lo continuo* (Discurso inaugural del curso 1996-97). Real Acad. de Ciencias, Madrid, 1996.
- [45] Nabonnand, P.: *Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19e siècle* (Documento presentado para la "Habilitation à Diriger des Recherches"). hal- 01082207, 2006.
- [46] Parrini, P.: *Física e Geometría dall'ottocento a oggi*. Loescher Ed., Torino, 1979.
- [47] Pasch, M.: *Vorlesungen Über Neuere Geometrie* Springer-Verlag. 1926.
- [48] Plücker, J.: *Analytisch-Geometrische Entwicklungen* (Reedición de un original de 1831). Wentworth Press, 2018.
- [49] Plücker, J.: *Neue Geometrie des Raumes* Teubner Leipzig. Accesible en Gallica (Biblioteca nacional de Francia). 1869.
- [50] Poncelet, J.-V.: *Traité des propriétés projectives des figures* (Reedición de un original de 1865). J. Gabay, Paris, 1994.
- [51] Poincaré, H.: *Des fondements de la géométrie*. Chiron, Paris, 1921.
- [52] Riemann, B.: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde Liegen*. Spriger-Verlag, Berlin, 1923.
- [53] Ramirez-Galarza, A.I.; Seade Kuri, J.: *Introducción a la Geometría avanzada*. Fac. Ciencias UNAM, Mexico, 2000.
- [54] Requejo-Fernández, B.: Notas en pdf:<http://matematicas.unex.es/brequejo>.
- [55] Reye, T.: *Die Geometrie der Lage*. Baumgartner's Buchhandlung, 1866.
- [56] Rodríguez Sanjurjo, J.M.; Ruiz Sancho, J.M.: *Geometría Projectiva*. Adisson-Wesley, 1998.
- [57] Russel, B.: *An Essay on the Foundations of Modern Geometry*. Dover, Nueva York, 2003.
- [58] San Agustín Chi, R.: *Dos representaciones del Hexagrama místico*. Tesis Doctoral, UNAM Mexico, 1996.
- [59] Santaló, L.A.: *Geometría Projectiva*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1966.
- [60] Schoenflies, A.: *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées, vol. III, 8. Chapter: Géométrie projective*. pp. 1-142 (Reedición de Gauthier-Villars, Paris, B. G. Teubner, Leipzig 1911), J. Gabay, Paris, 1991.
- [61] Schur, F.: *Über die Grundlagen der Geometrie* Math. Ann., 55, (1902), 265-292.
- [62] Sidler, J.C.: *Géométrie projective. Cours, exercices et problèmes corrigés*. Dunod, Paris, 2000.
- [63] von Staudt, K.G. Cr.: *Geometrie de Lage*. F. Korn, Nüremberg, 1847.
- [64] Steiner, J.: *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit Geometrischer Gestalten von Einander* (Reedición de un original de 1832). Forgotten Books, 2008.
- [65] Stevenson, F.W.: *Projective Planes*. Polygonal Publishing House, Washington-New Jersey. 1972.

- [66] Stillwell, J.: *Sources of Hyperbolic Geometry* (Contiene traducciones comentadas de los artículos fundacionales de Beltrami, 1868; Klein, 1871 y Poincaré, 1881- 1882). History of Math. Vol. 10, A.M.S. Providence, 1996.
- [67] Torretti, R.: *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. Reidel Pub. Dordrecht, 1978.
- [68] Taylor, B.: *Principles of Linear Perspective* 1715. Reedición: M. Taylor. Londres 1825.
- [69] Tisseron, C.: *Géométries affine, projective et euclidienne*. Hermann, Paris 1988.
- [70] Voelke, J.D.: *Le théorème fondamentale de la géométrie projective: Évolution de sa preuve entre 1847 et 1900* Archive for history of exact sciences, (2008) 62, 3, 243-296.
- [71] Weeks, J.R.: *The Shape of Space*. Marcel Dekker, Nueva York, 2002.
- [72] Yaglom, I.J.: *A simple Non-Euclidean Geometry and its Physical basis*. Springer Verlag Nueva York, 1969.

Índice alfabético

- Abbot, 10
- Abellanas, 3, 4
- Acción, 77
- Alexander, 17
- Ancochea, 3
- Aplicación
 - p -multilineal, 127
 - p -multilineal alternada, 128
 - de adjunción, 91
 - traspuesta, 61
- Apolonio, 32
- Artin, 16
- Atiyah, 17

- Balsler, 40
- Base
 - asociada a una referencia, 52
 - dual, 60
- Birkhoff, 36
- Bolyai, 8
- Brauner, 16
- Brianchon, 106
- Bureau, 16

- Cónica, 22, 86
- Cameron, 16
- Carnot, 33
- Cartan, 15
- Cartas afines, 81
- Cayley, 36
- Ceva, 82
- Chasles, 2, 32, 40
- Cohn - Vossen, 23
- Configuración, 23, 67
 - completa, 68
 - de Fano, 24, 68
- Coordenadas de Plücker, 132
- Coordenadas homogéneas, 54, 55, 87, 88
 - cambio de, 55
- Cornish, 17
- Cremona, 40, 116
- Cuádriga, 86
 - de Klein, 131
 - no degenerada, 91, 112
 - restricción, 87
- Cuadrivértice completo, 68
- Cuaterna armónica, 68

- Darboux, 2, 40
- Dedekind, 40
- Desargues, 23, 24, 32, 33, 65, 68, 71, 72
- Descartes, 33
- Determinante, 131
- Dimensión, 43
- Dupin, 34

- Elipse, 114
 - proyectiva, 109
- Elipsoide proyectivo, 111
- Enriques, 2, 3, 33, 40
- Espacio
 - afín, 77
 - de direcciones, 77
 - proyectivo, 43
 - proyectivo dual, 62
 - vectorial dual, 59
- Euclides, 3-7, 24, 33

- Feuerbach, 36
- Forma
 - bilineal, 85
 - bilineal simétrica, 85
 - cuadrática, 85
 - lineal, 59
- Forma normal, 106, 122
- Freedman, 13
- Frege, 3

- Güell, 3
- Galileo, 7-9
- Gauss, 8
- Gordon, 16
- Gram, 107, 112
- Grassmanianna, 132
- Grassmann, 36
- Gray, 5

- Hartshorne, 5
- Haz

- de cónicas, 35, 116
- de cónicas no degenerado, 116
- de rectas, 22
- Heath, 5
- Hemlholtz, 7, 8
- Hessenberg, 32
- Hilbert, 2, 3, 23, 40
- Hipérbola, 114
- Hiperboloide proyectivo, 111
- Hiperplano
 - polar, 96
 - proyectivo, 43
 - tangente, 96
- Homólogo, 24
- Homología, 51
 - centro de, 51
 - eje de, 51
- Involución, 76
- Janet, 15
- Jones, 16, 17
- Kelvin, 15
- Klein, 2, 8, 36, 39, 40
- Lüroth, 2
- La Hire, 33
- Lambert, 33
- Lie, 8
- Lobachevski, 8
- Luecke, 16
- Mac Laurin, 33
- Matrices de una cuádrica, 89
- Menelaus, 82
- Menger, 36
- Moebius, 2, 36, 38
- Monge, 33, 34
- Nabonnand, 2
- Newton, 7
- Pappus, 23, 29, 30, 66, 68
- Parábola, 114
- Pascal, 29, 30, 33, 106
- Pasch, 2, 40
- Peano, 40
- Penzias, 17
- Perelman, 13
- Perspectividad, 20, 22, 47, 49
- Pieri, 40
- Plücker, 36
- Poincaré, 3, 12, 14
- Polaridad, 95
- Polinomios de una cuádrica, 89
- Poncelet, 20, 22, 33, 34, 36, 38
- Posición homológica, 24, 27
- Producto
 - exterior, 129
 - tensorial, 127
- Programa de Erlangen, 8
- Propiedad universal, 127, 129
- Proyección, 20, 27, 47
 - central, 32
 - estereográfica, 104
- Proyectivamente equivalentes, 87, 106, 116
- Proyectividad, 20, 22, 46
- Punto unidad, 52
- Puntos proyectivamente independientes, 52
- Rango, 91
- Razón
 - doble, 20, 73
 - simple, 82
- Recta proyectiva, 43
- Referencia proyectiva, 52
 - de hiperplanos, 65
 - estándar, 54
- Retículo, 64
 - antiisomorfismo de, 64
 - isomorfismo de, 64
- Reye, 2, 38, 39
- Riemann, 7, 8
- Schlafi, 15
- Schoenflies, 2
- Schur, 2, 40
- Sección, 20, 47
- Signatura proyectiva, 108
- Smale, 13
- Soporte, 90
- Staudt, 38, 39
- Steiner, 2, 108
- Stiwell, 5
- Stolz, 40
- Subespacio
 - afín, 77
 - complementario, 45
 - ortogonal, 62, 99
 - polar, 99
 - proyectivo, 43, 44
- Tait, 15
- Taylor, 33
- Thales, 82
- Thurston, 13
- Vértice, 91, 92
- Veblen, 2
- Veronese, 40
- Voelke, 40
- von Staudt, 2, 34
- Wall, 13
- Weeks, 10, 17
- Weierstrass, 2, 40
- Wilson, 17
- Witten, 17

Yaglom, 8

Zariski, 16

Zeuthen, 2