



Universidad de Valladolid

# Escuela de Doctorado Universidad de Valladolid



## Introducción al análisis espectral de señales

Dr. Tomás Alberto García Calva  
Universidad de Valladolid



Junio 2024



Universidad de Valladolid

# Escuela de Doctorado Universidad de Valladolid



## Parte 2. Introducción al análisis espectral de señales no estacionarias mediante la STFT

Dr. Tomás Alberto García Calva  
Universidad de Valladolid



Junio 2024

# Contenido

---

- 1. Introducción al análisis tiempo-frecuencia
- 2. La transformada de Fourier en tiempo corto
- 3. La STFT en tiempo discreto
- 4. Aplicaciones
- 5. Conclusiones

# 1. Introducción al análisis tiempo-frecuencia

---

## Análisis matemático :

- Las señales se tratan como funciones
- El tiempo es la variable independiente, mientras que la amplitud y la frecuencia son variables dependientes
- Las funciones tienen propiedades y características determinísticas

# 1.1. Parámetros de las señales no estacionarias

---

## Propiedades :

- Continuidad
- Periodicidad
- Simetría
- Acotamiento
- Monotonía
- Integrable
- Estacionaria
- Aleatoria
- Continuidad en frecuencia
- Continuidad en fase
- Fase derivable

## Parámetros :

- Valor medio
- Valor pico
- Valor medio cuadrático
- Amplitud instantánea
- Frecuencia instantánea
- Fase instantánea

# 1.1. Parámetros de las señales no estacionarias

---

Ejemplo:

Propiedades :

- Continuidad en frecuencia
- Continuidad en fase
- Fase derivable

Parámetros :

- Amplitud instantánea
- Frecuencia instantánea

# 1.1. Parámetros de las señales no estacionarias

---

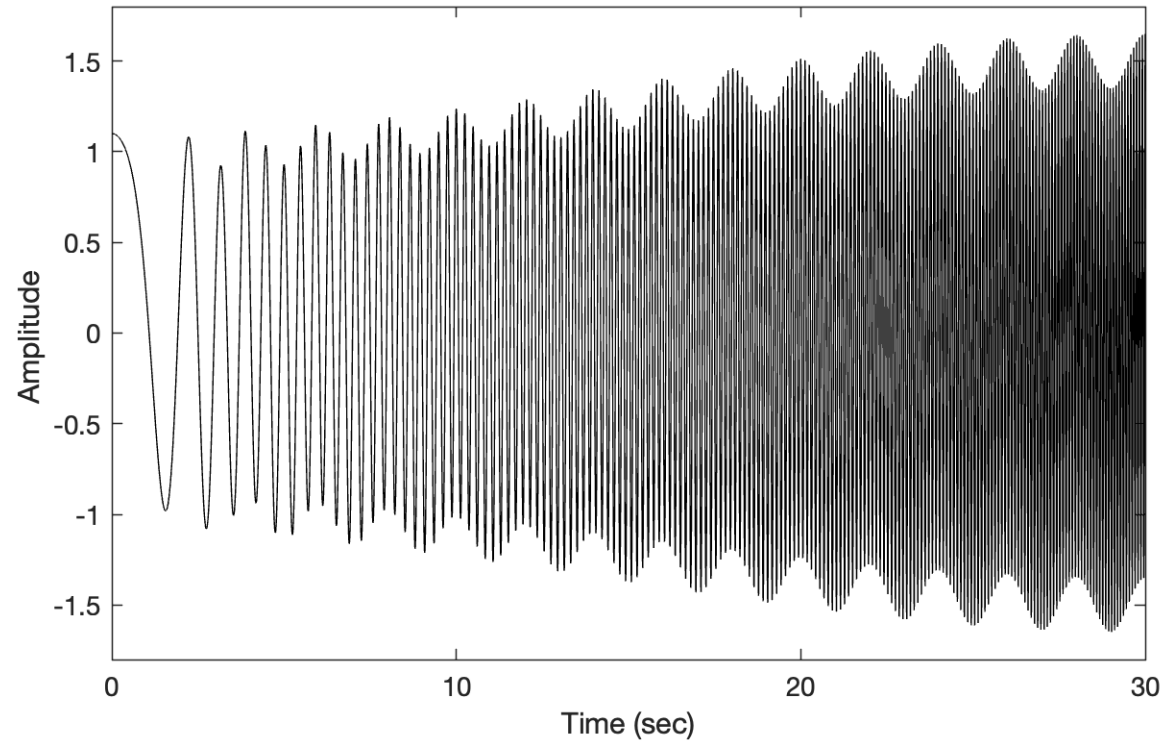
Ejemplo:

Propiedades :

- Continuidad en frecuencia
- Continuidad en fase
- Fase derivable

Parámetros :

- Amplitud instantánea
- Frecuencia instantánea



# 1.1. Parámetros de las señales no estacionarias

---

Ejemplo:

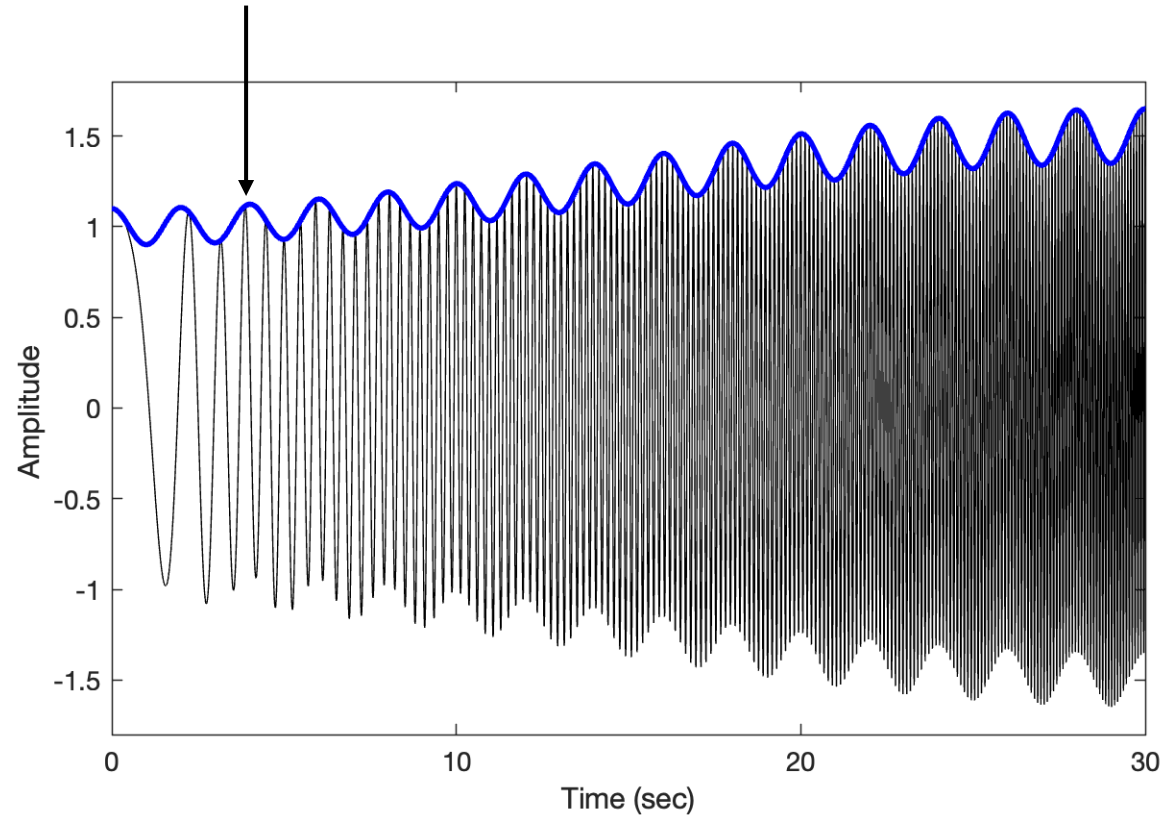
$$Z_i(t) = a_i(t)e^{j\theta_i(t)}$$

Propiedades :

- Continuidad en frecuencia
- Continuidad en fase
- Fase derivable

Parámetros :

- Amplitud instantánea
- Frecuencia instantánea





# 1.1. Parámetros de las señales no estacionarias

Ejemplo:

$$Z_i(t) = a_i(t)e^{j\theta_i(t)}$$

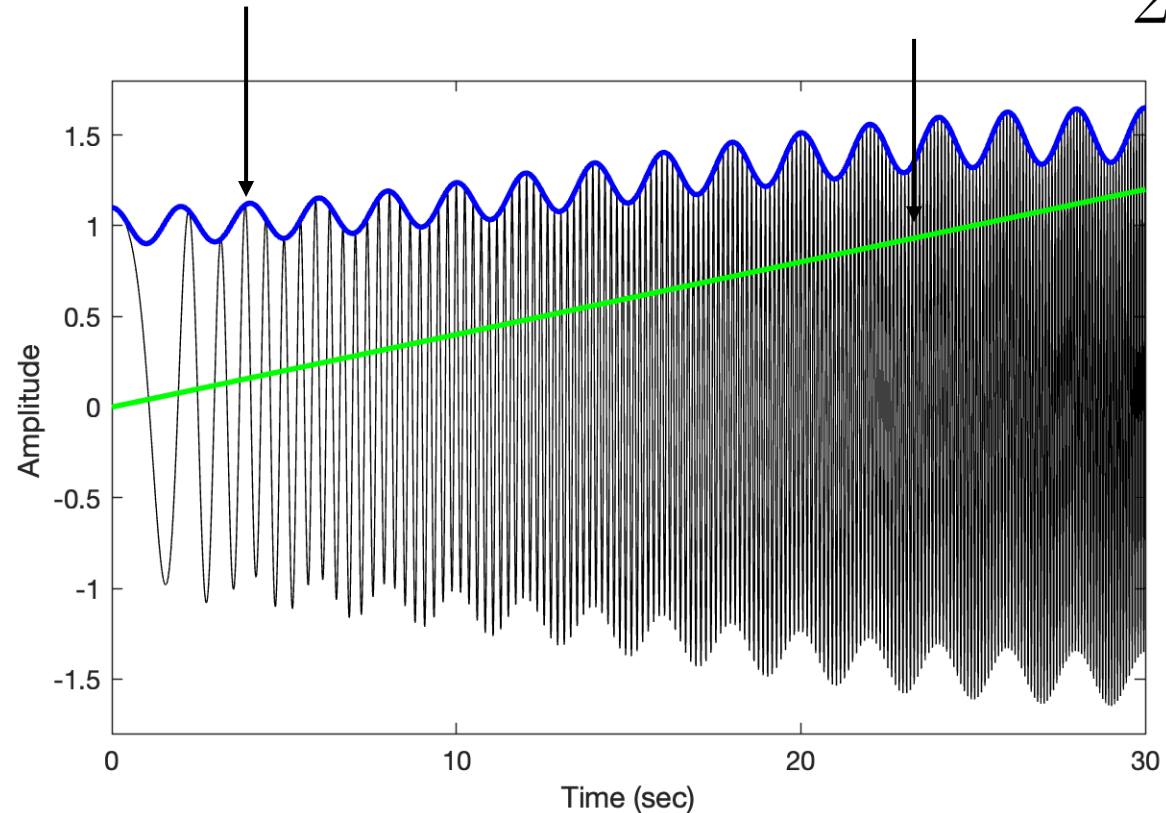
$$f_{inst}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}$$

Propiedades :

- Continuidad en frecuencia
- Continuidad en fase
- Fase derivable

Parámetros :

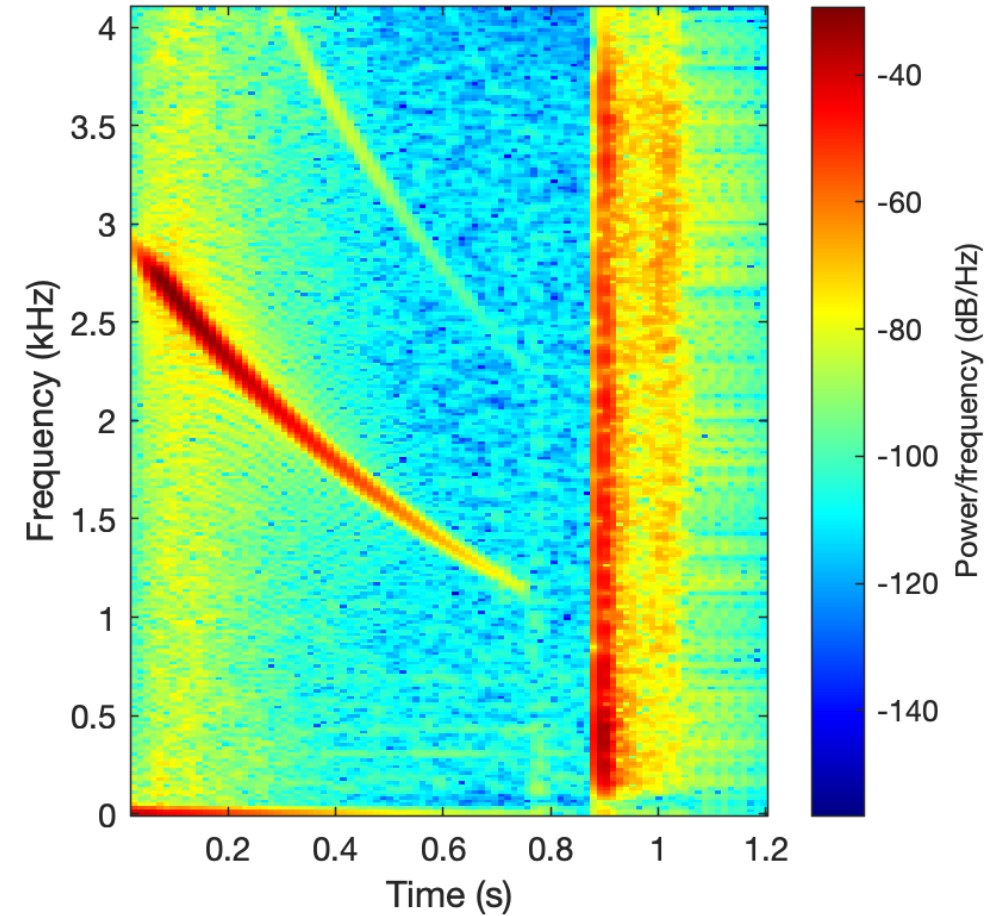
- Amplitud instantánea
- Frecuencia instantánea



## 2. La transformada de Fourier en tiempo corto

---

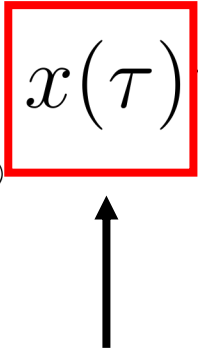
$$x(t) \leftrightarrow X(t, f)$$



## 2. La transformada de Fourier en tiempo corto

---

La STFT en tiempo continuo

$$X(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(\tau)} w(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$


Señal en el dominio del tiempo

## 2. La transformada de Fourier en tiempo corto

---

### La STFT en tiempo continuo

$$X(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Ventana de selección

Señal en el dominio del tiempo

## 2. La transformada de Fourier en tiempo corto

---

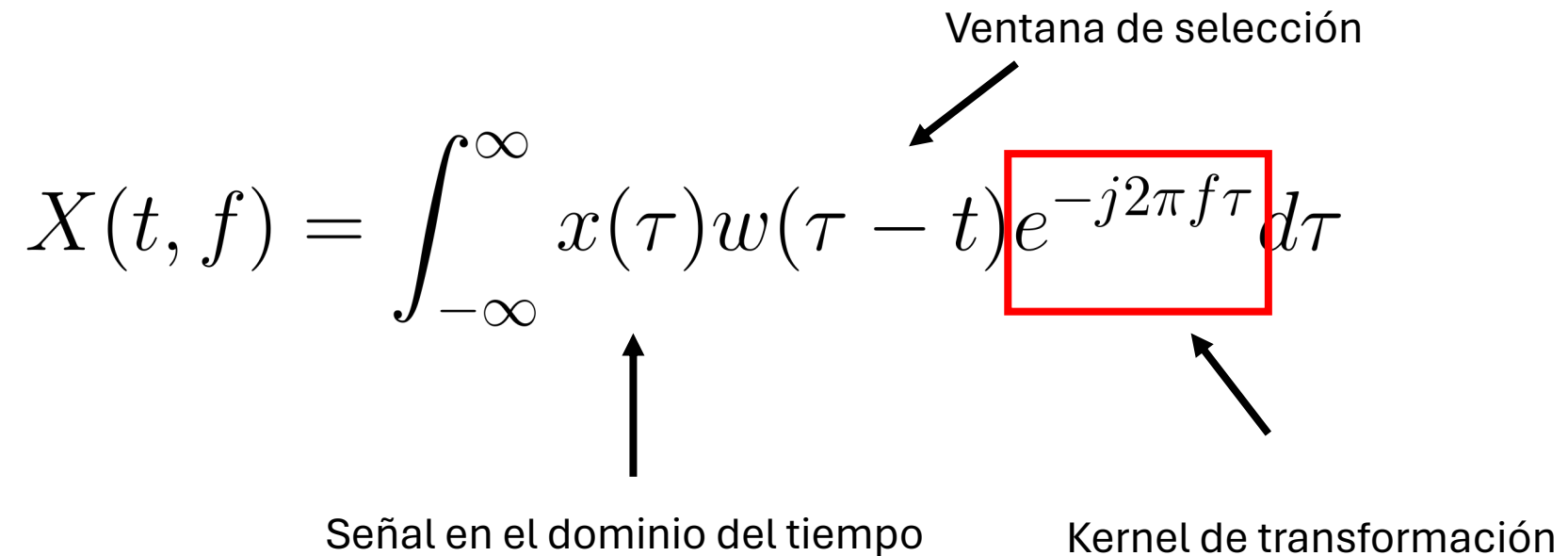
### La STFT en tiempo continuo

$$X(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Ventana de selección

Señal en el dominio del tiempo

Kernel de transformación



The diagram shows the continuous-time STFT equation. The term  $x(\tau)$  is identified as the 'Señal en el dominio del tiempo' (Signal in the time domain) with an upward arrow. The term  $w(\tau - t)$  is identified as the 'Ventana de selección' (Selection window) with a diagonal arrow. The term  $e^{-j2\pi f\tau}$  is identified as the 'Kernel de transformación' (Transformation kernel) with a diagonal arrow. A red rectangular box highlights the  $e^{-j2\pi f\tau}$  term.

## 2. La transformada de Fourier en tiempo corto

---

### Principales propiedades

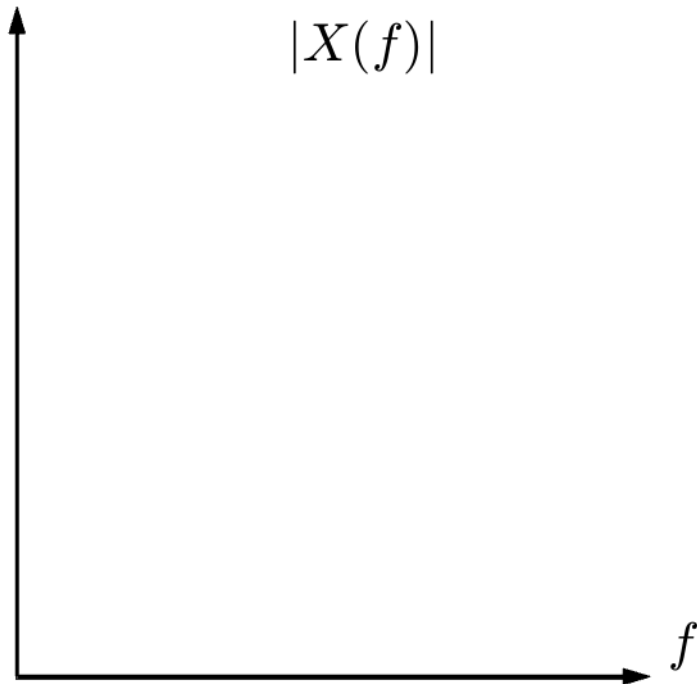
$$X(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

- Lineal
- Reversible
- Escalable
- Desplazable
- Dual

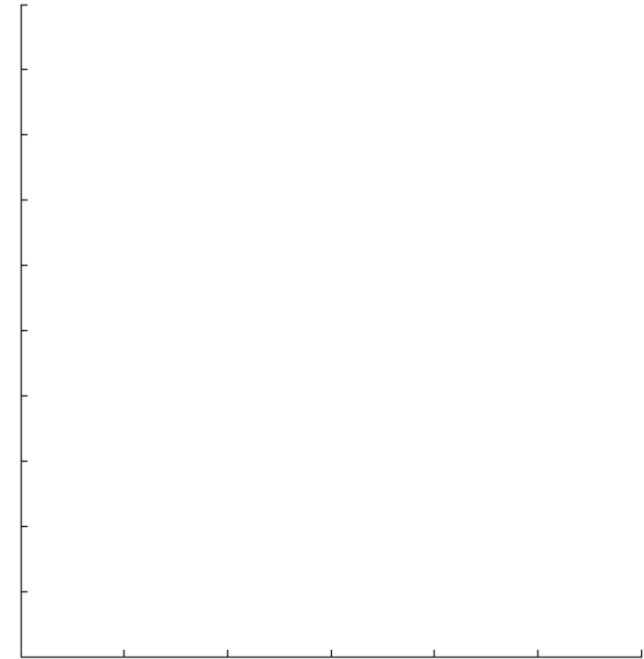
## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

---

➤ Dominio frecuencia

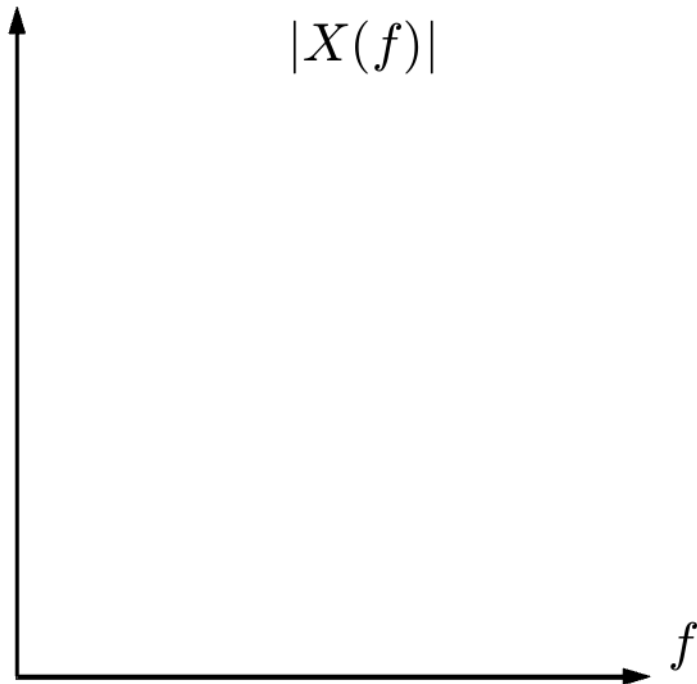


➤ Dominio tiempo-frecuencia

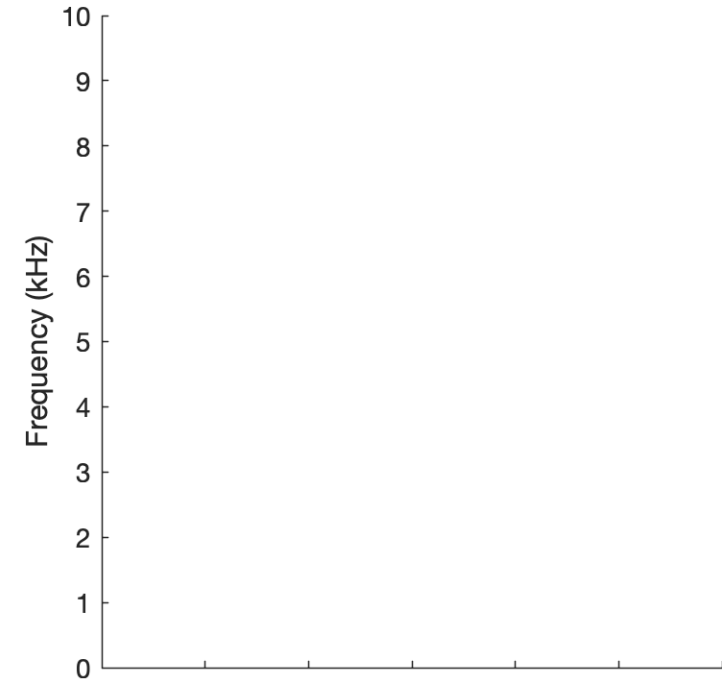


## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



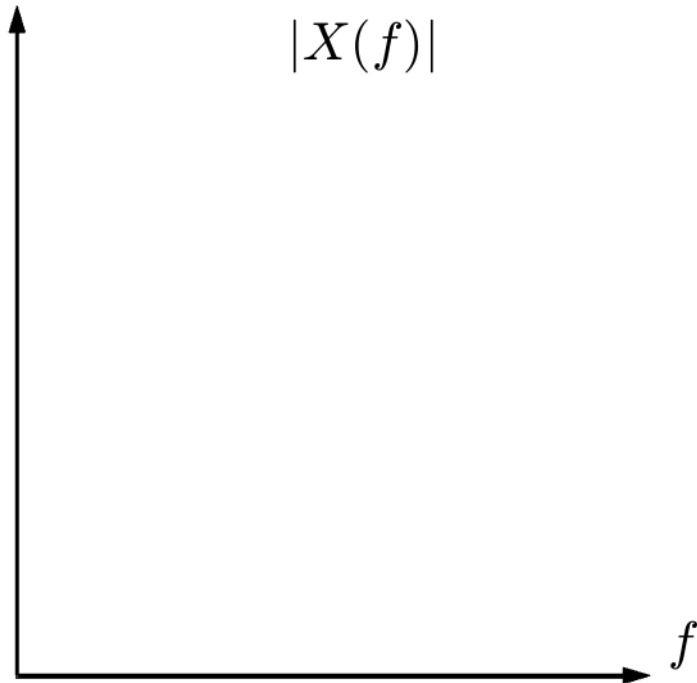
➤ Dominio tiempo-frecuencia



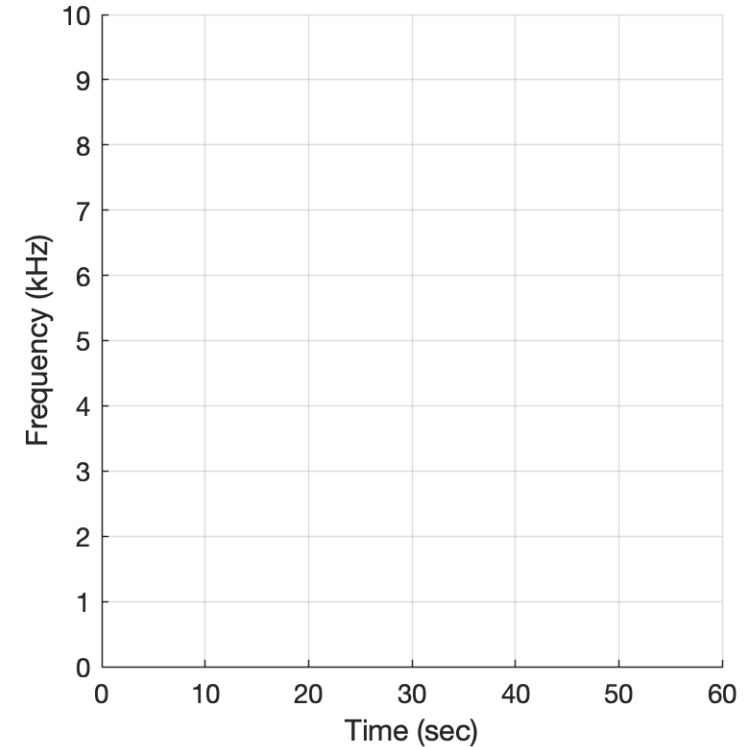


## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia

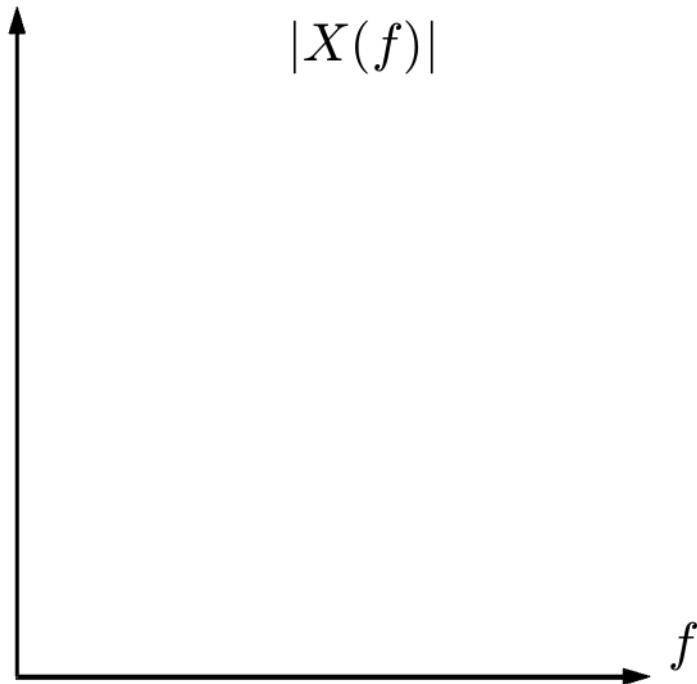


➤ Dominio tiempo-frecuencia

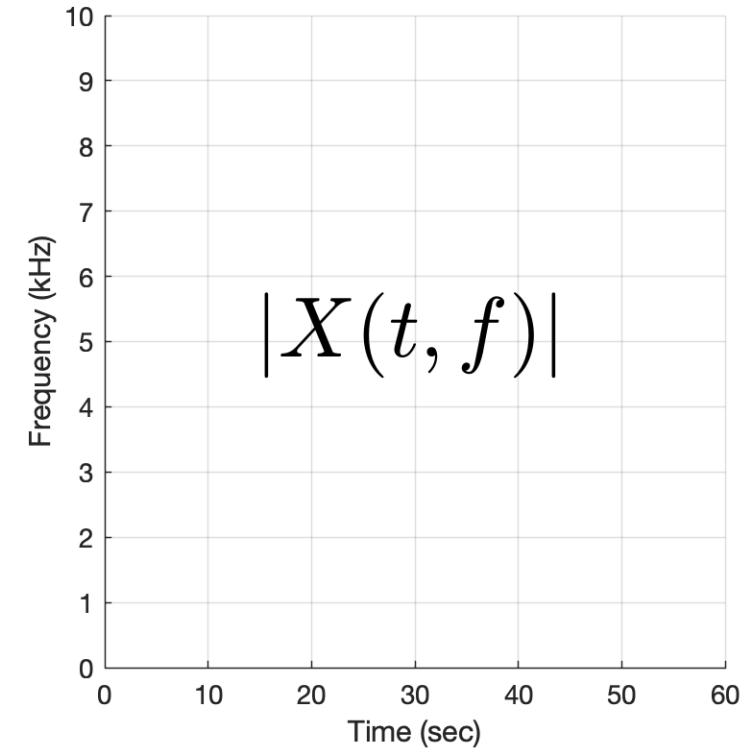


## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia

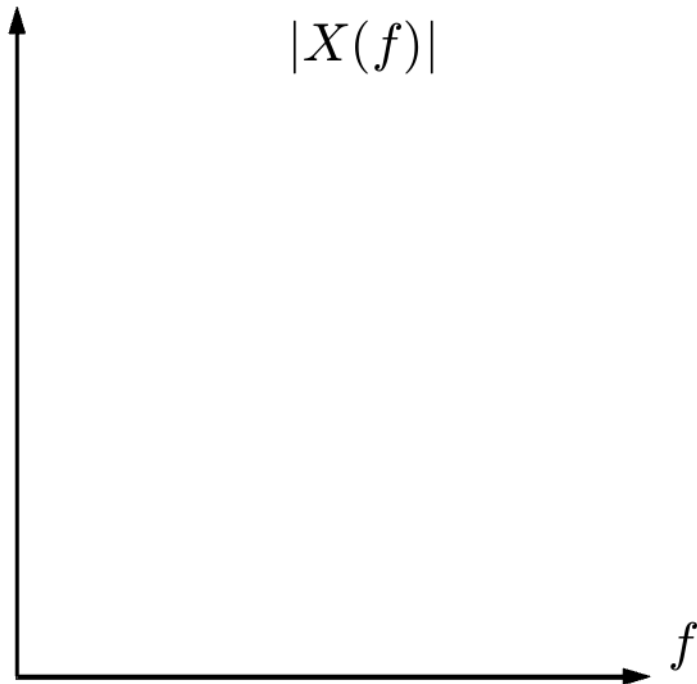


➤ Dominio tiempo-frecuencia

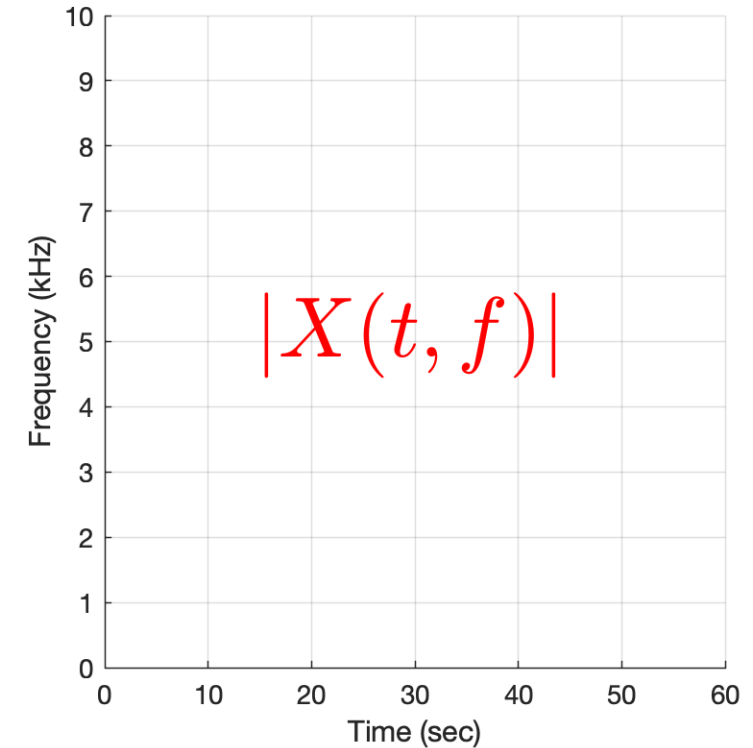


## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia

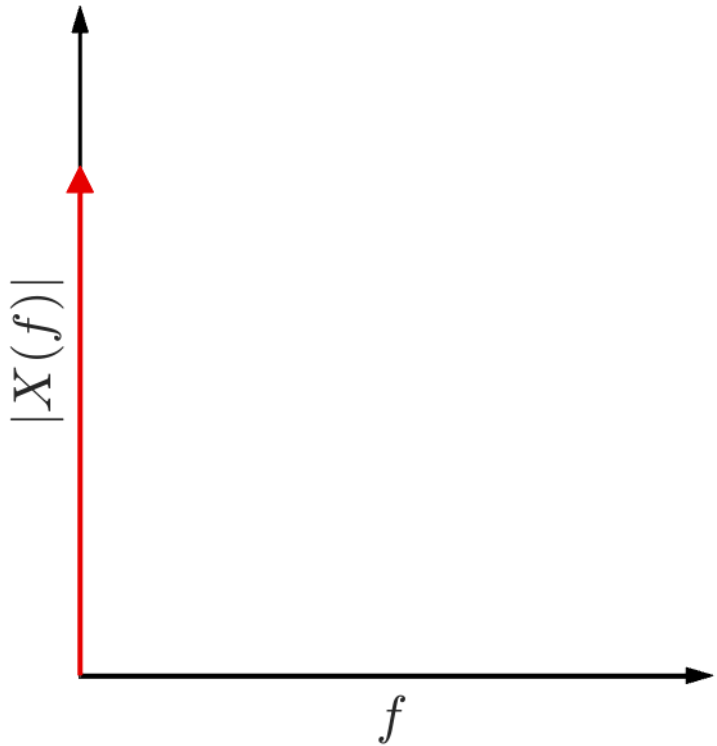


## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

---

➤ Dominio frecuencia

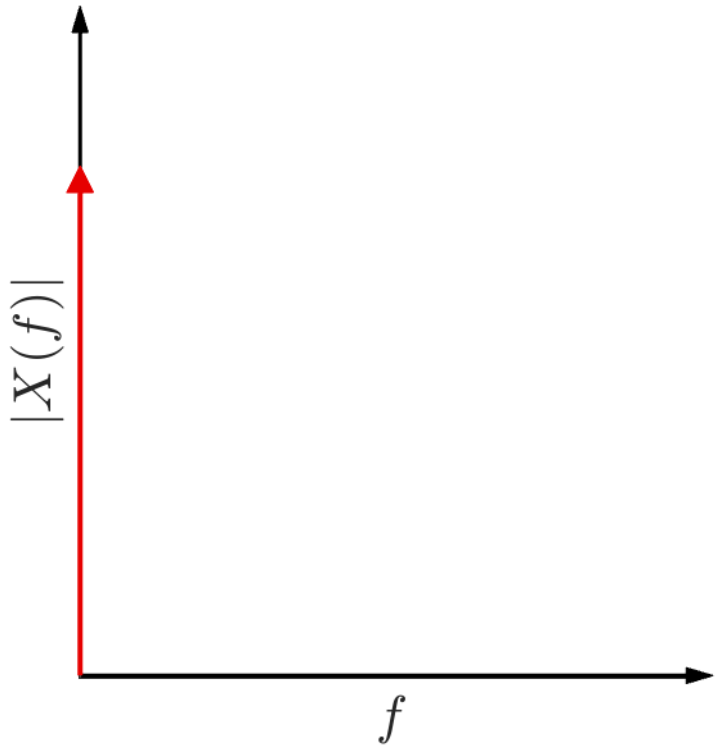
➤ Dominio tiempo-frecuencia



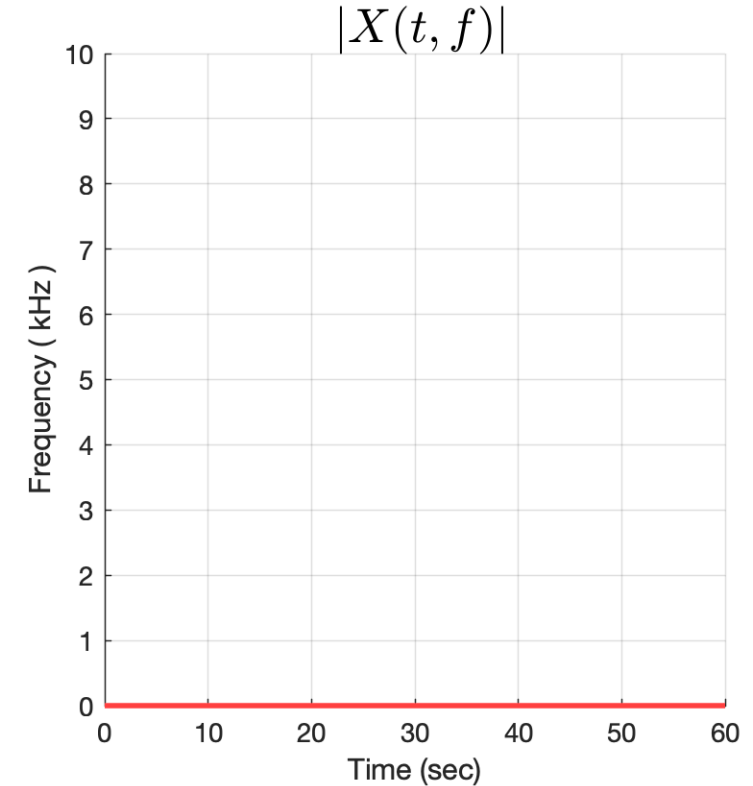
DC

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



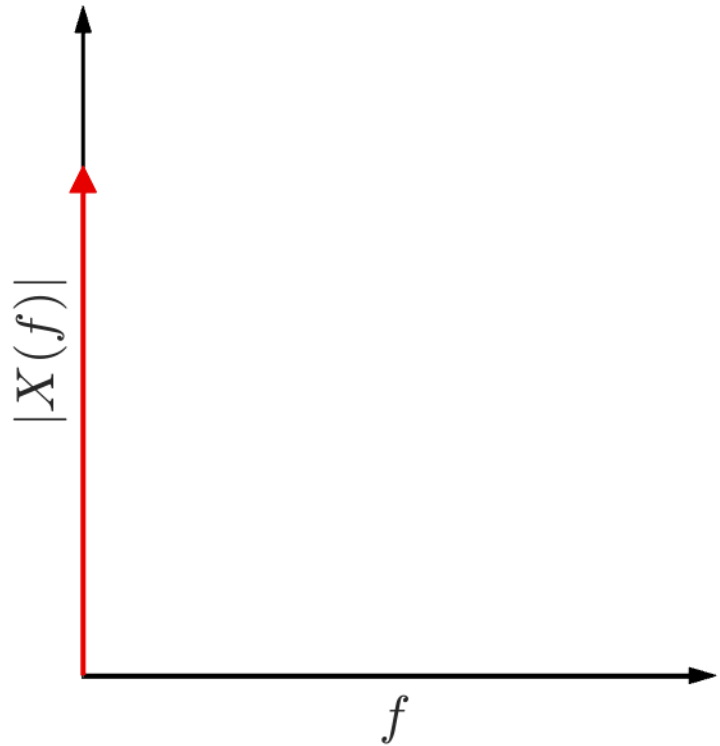
➤ Dominio tiempo-frecuencia



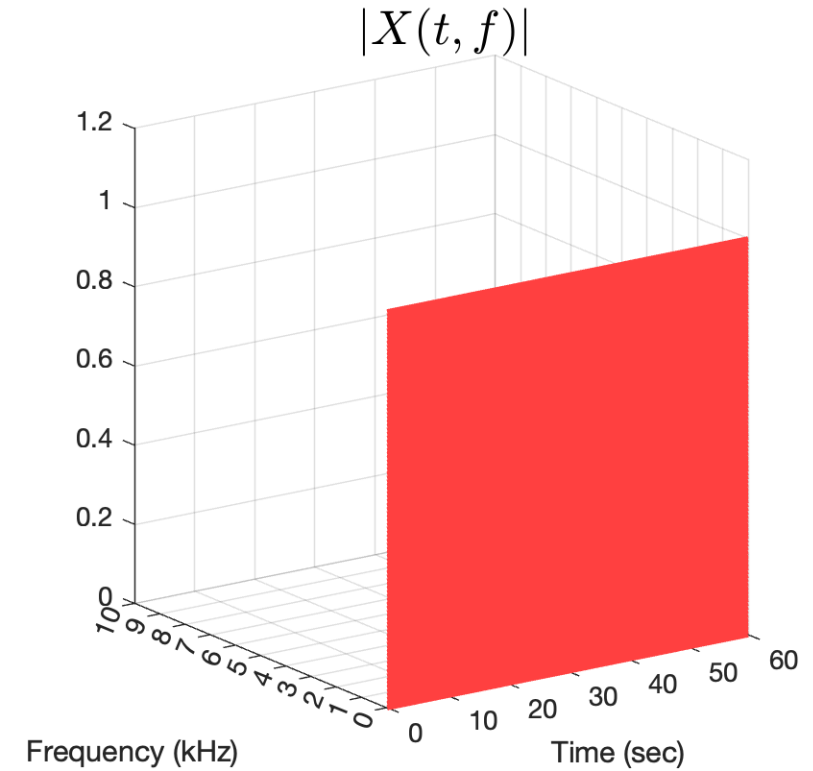
DC

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



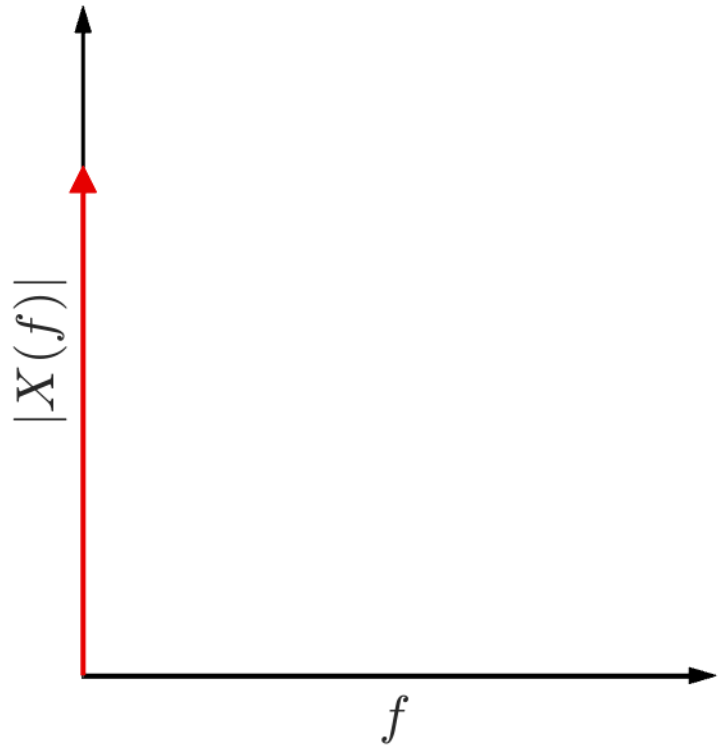
➤ Dominio tiempo-frecuencia



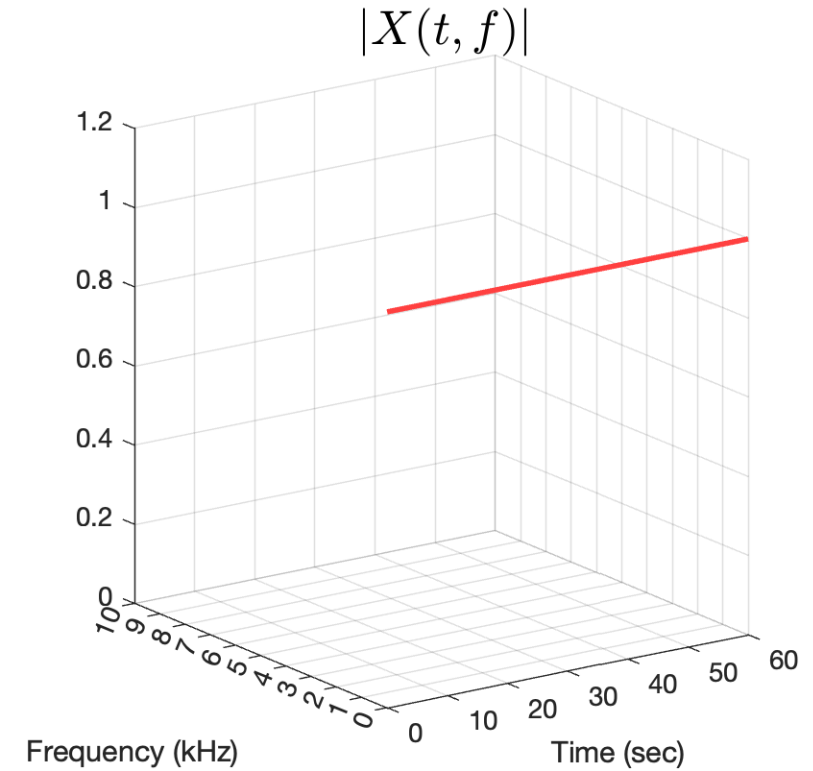
DC

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia

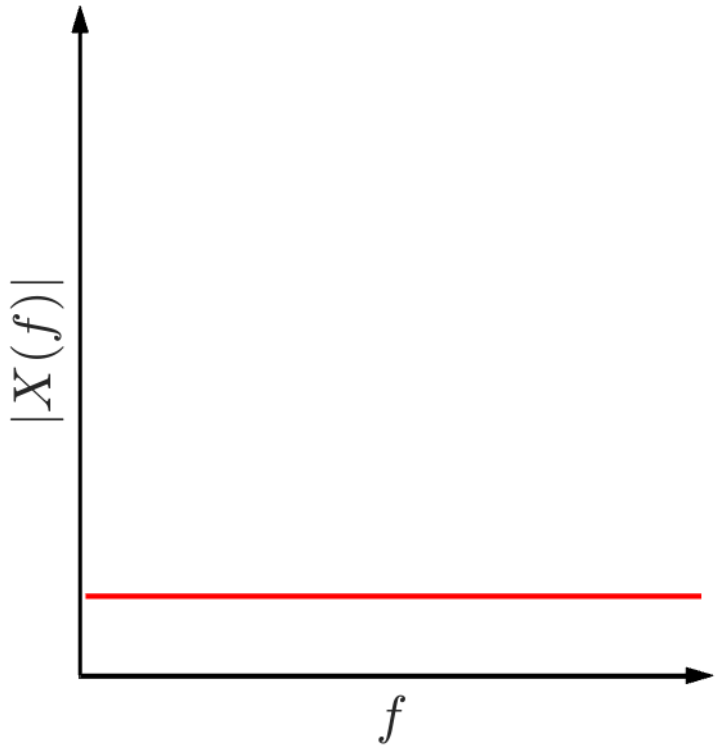


DC

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia

➤ Dominio tiempo-frecuencia

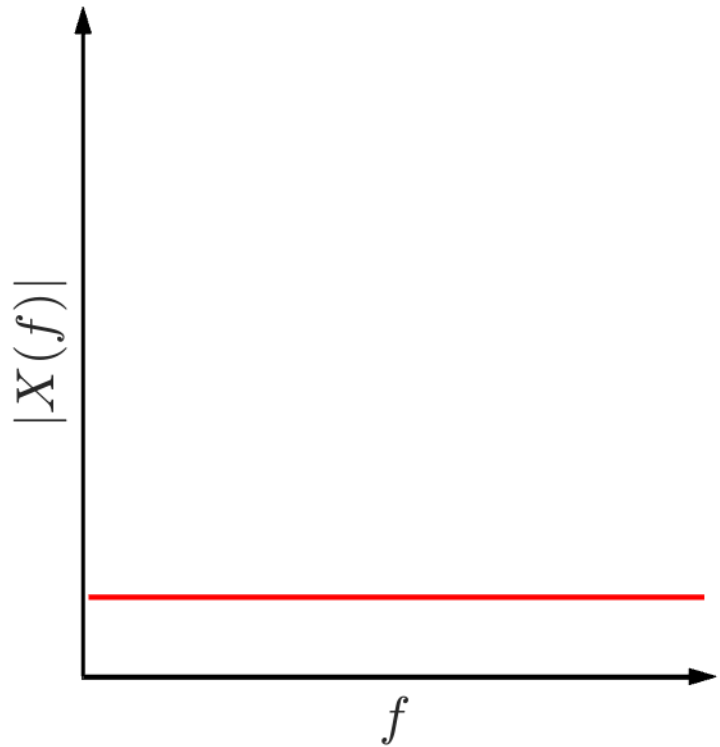


Impulso en  $t=0$

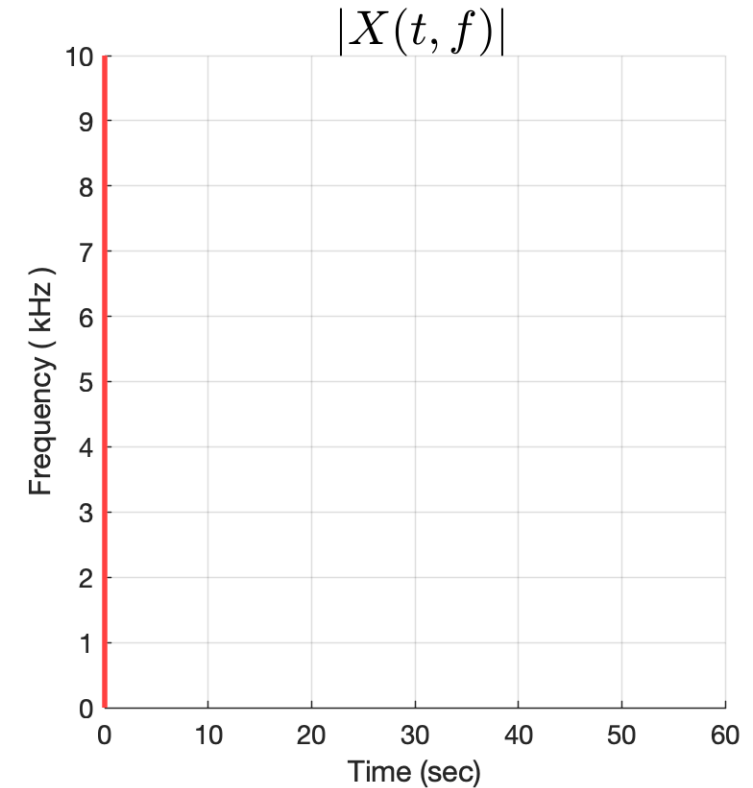


## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



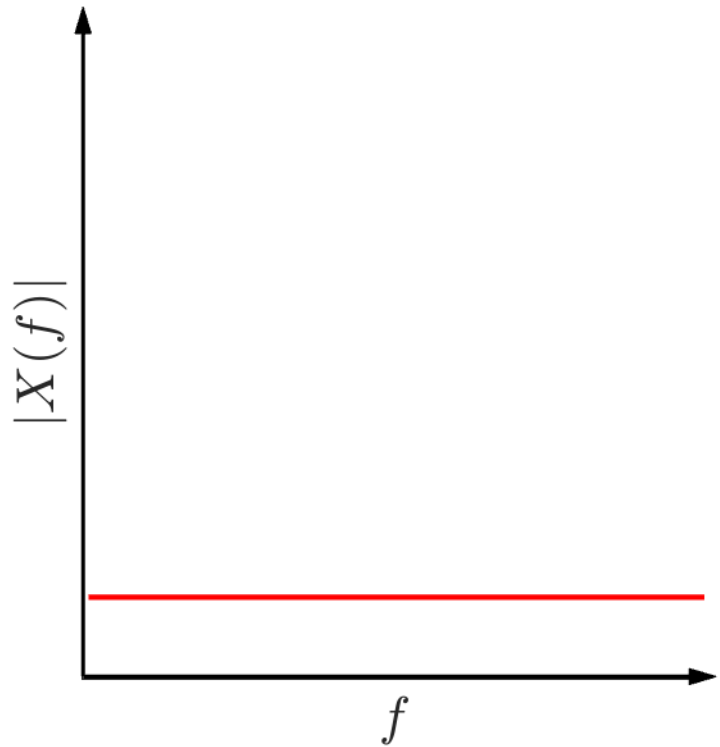
➤ Dominio tiempo-frecuencia



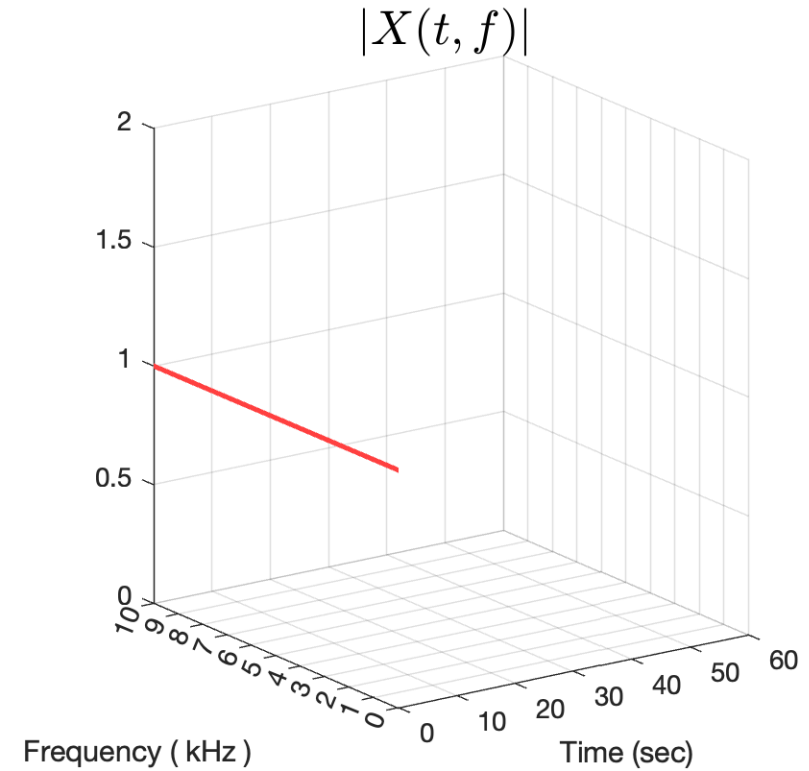
Impulso en  $t=0$

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia



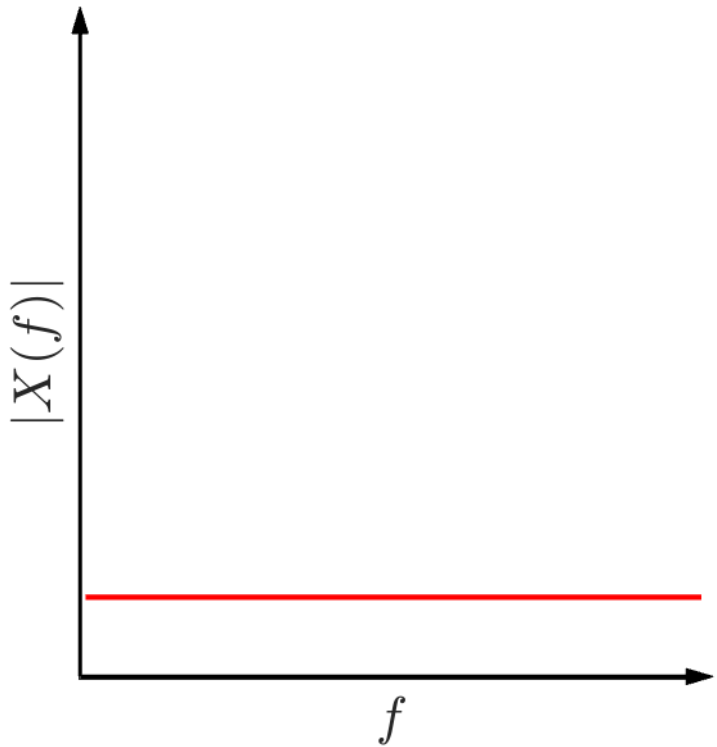
Impulso en  $t=0$

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

---

➤ Dominio frecuencia

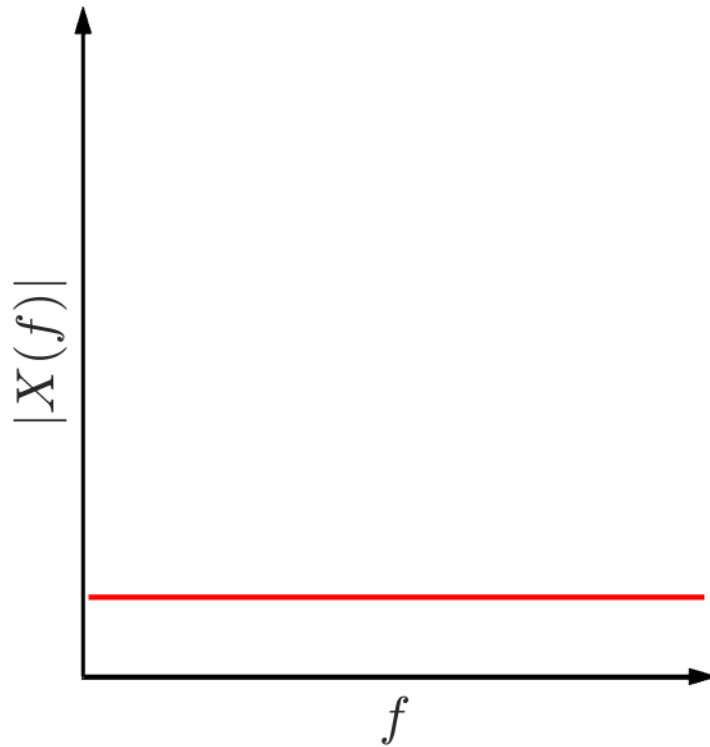
➤ Dominio tiempo-frecuencia



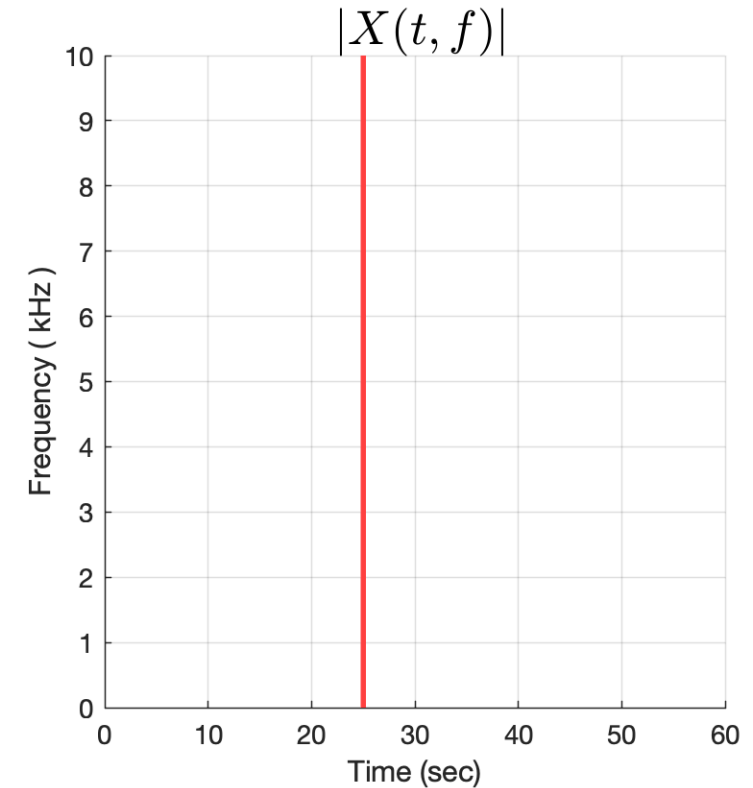
Impulso en  $t=t_a$

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



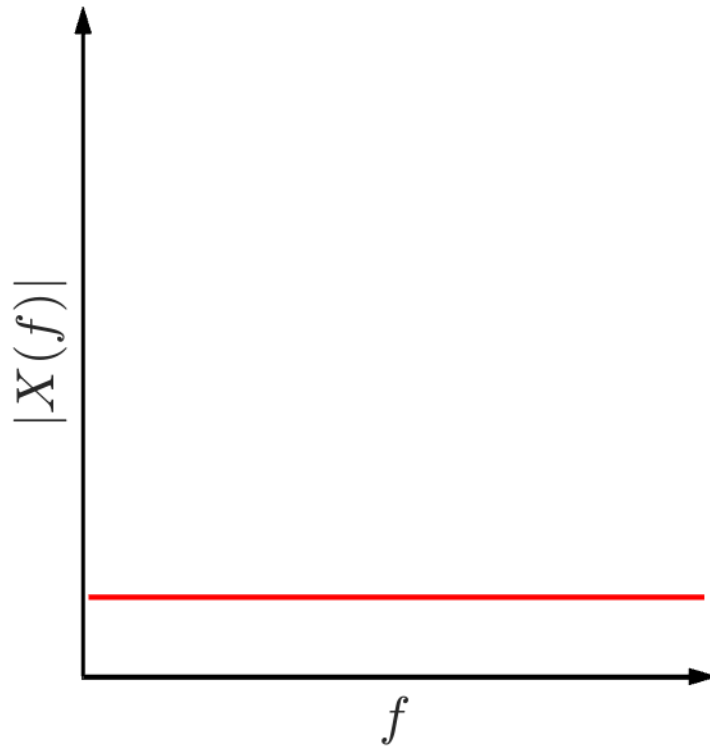
➤ Dominio tiempo-frecuencia



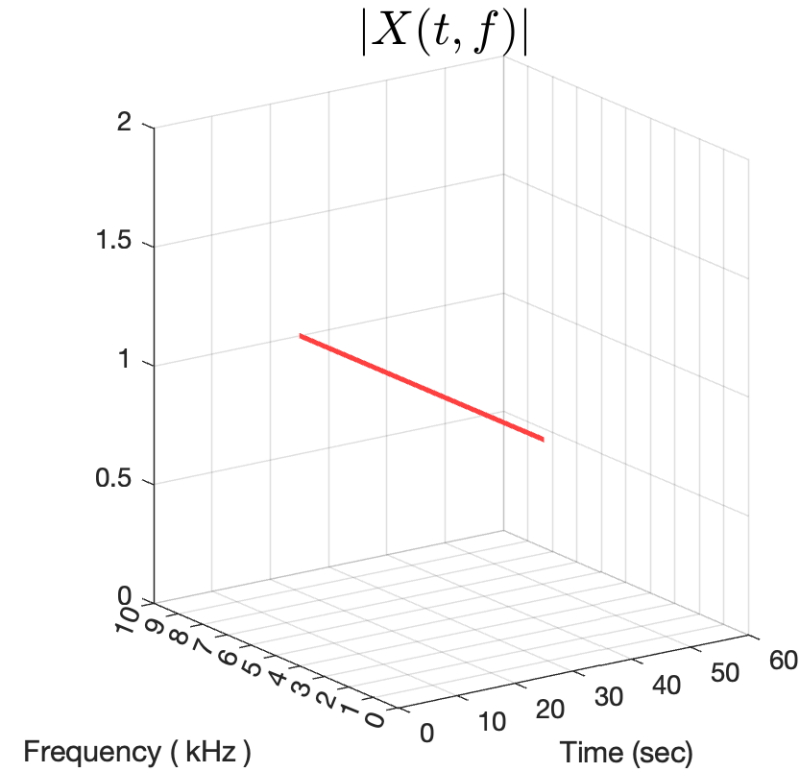
Impulso en  $t=t_a$

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia



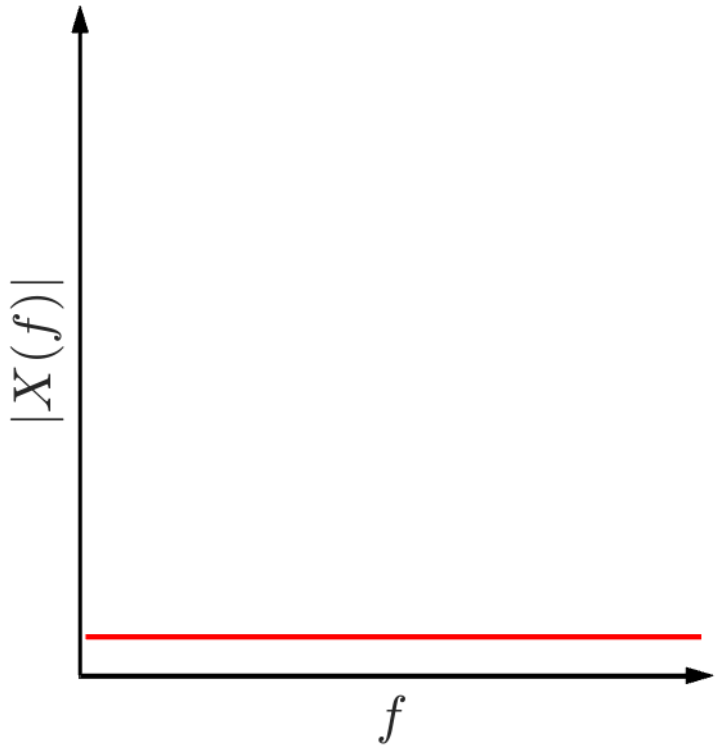
Impulso en  $t=t_a$

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

---

➤ Dominio frecuencia

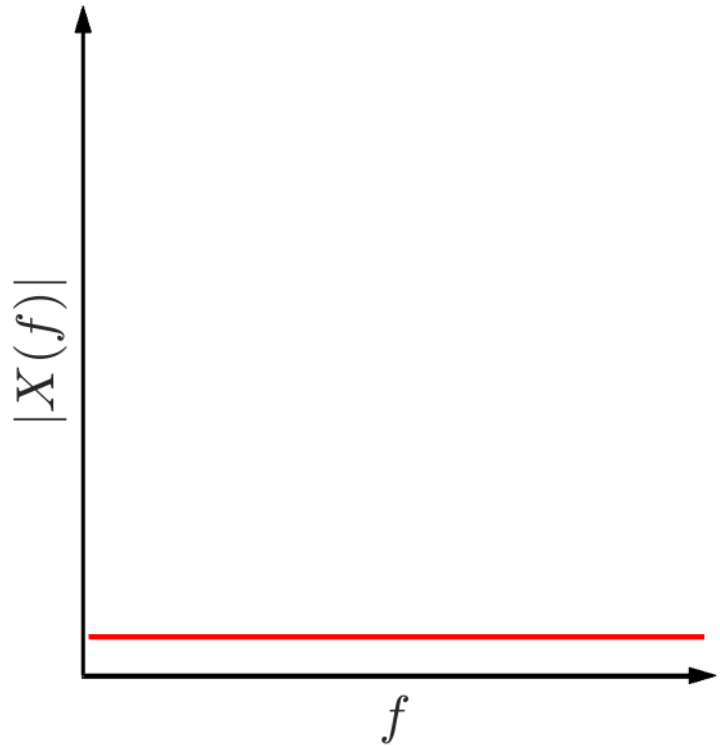
➤ Dominio tiempo-frecuencia



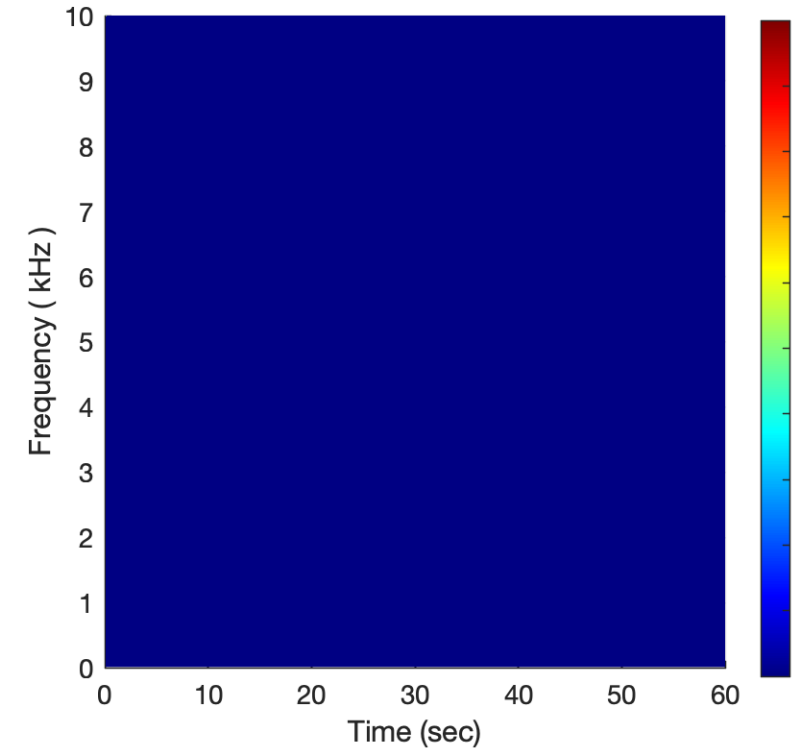
Ruido blanco Gaussiano

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



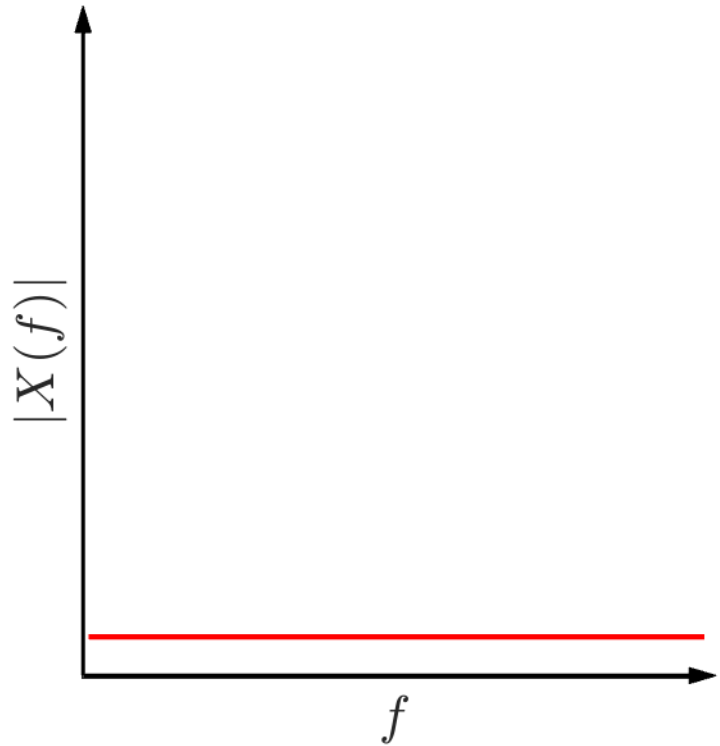
➤ Dominio tiempo-frecuencia



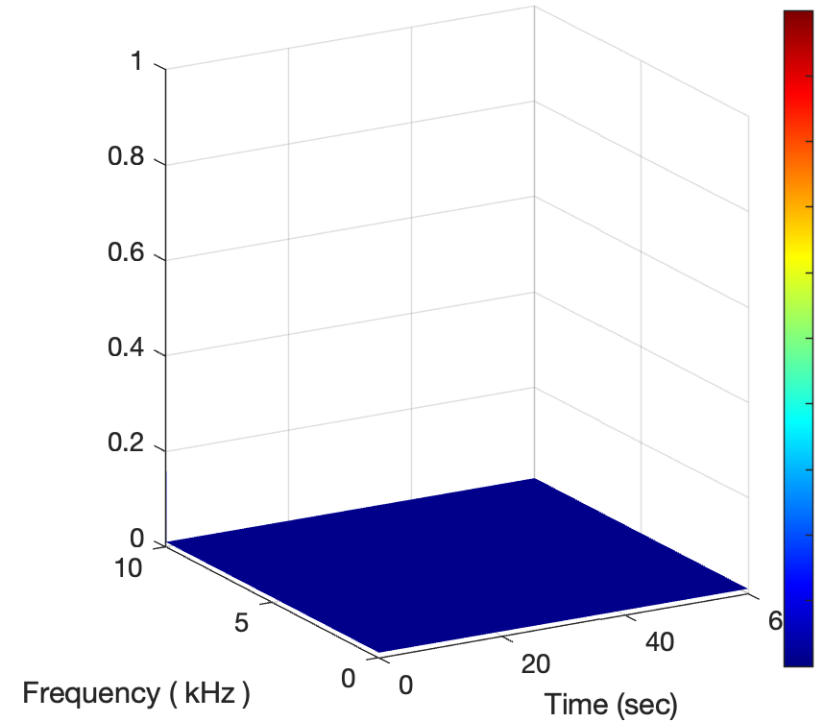
Ruido blanco Gaussiano

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia

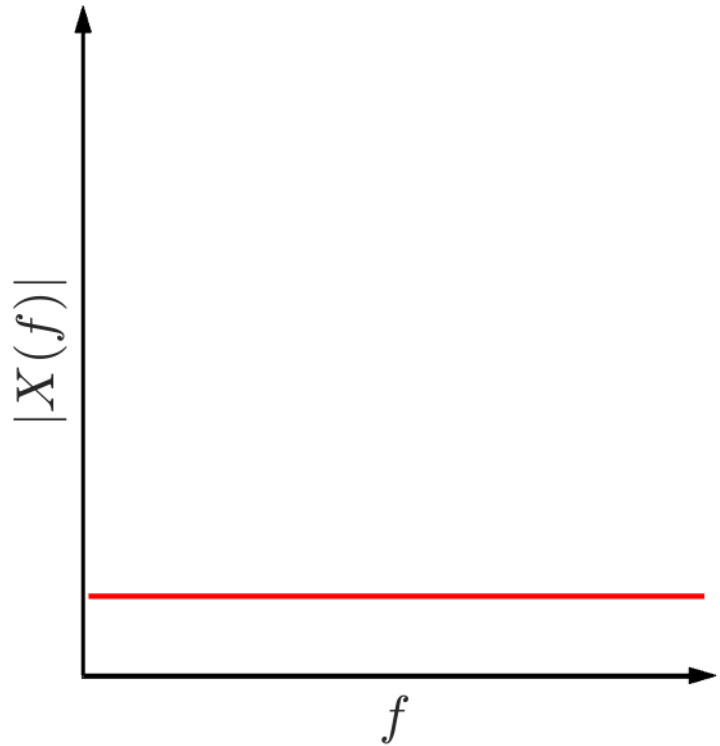


Ruido blanco Gaussiano

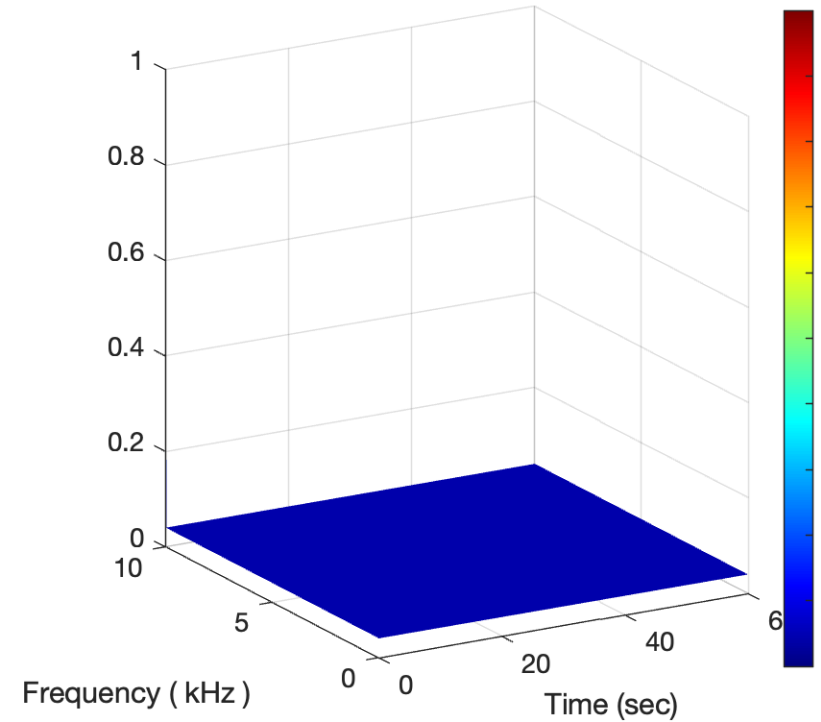


## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



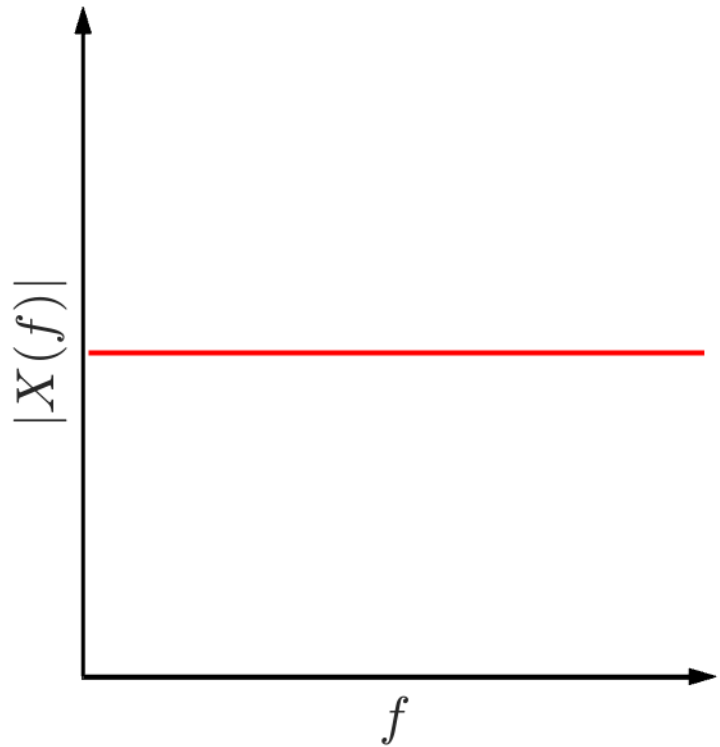
➤ Dominio tiempo-frecuencia



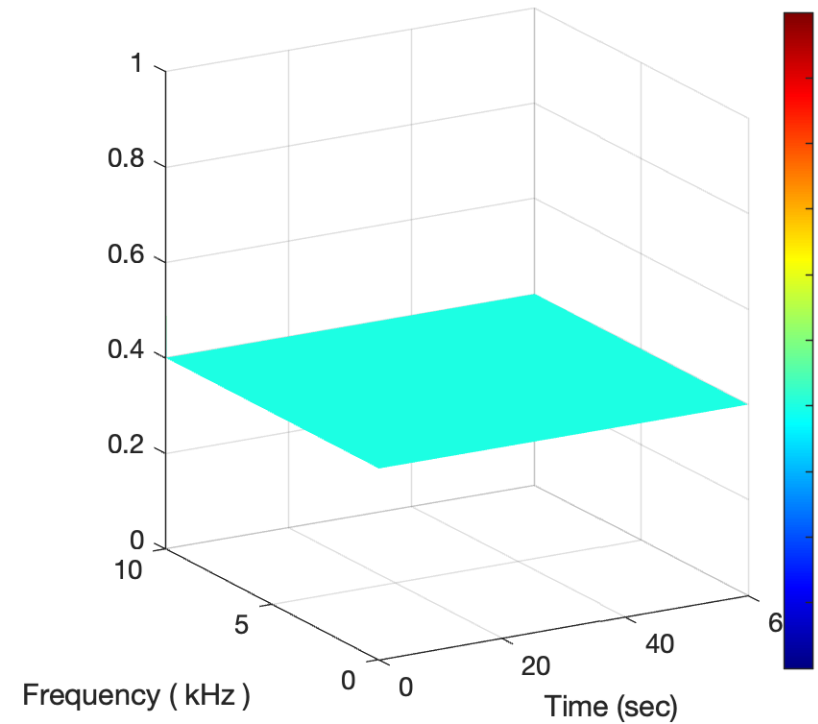
Ruido blanco Gaussiano

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



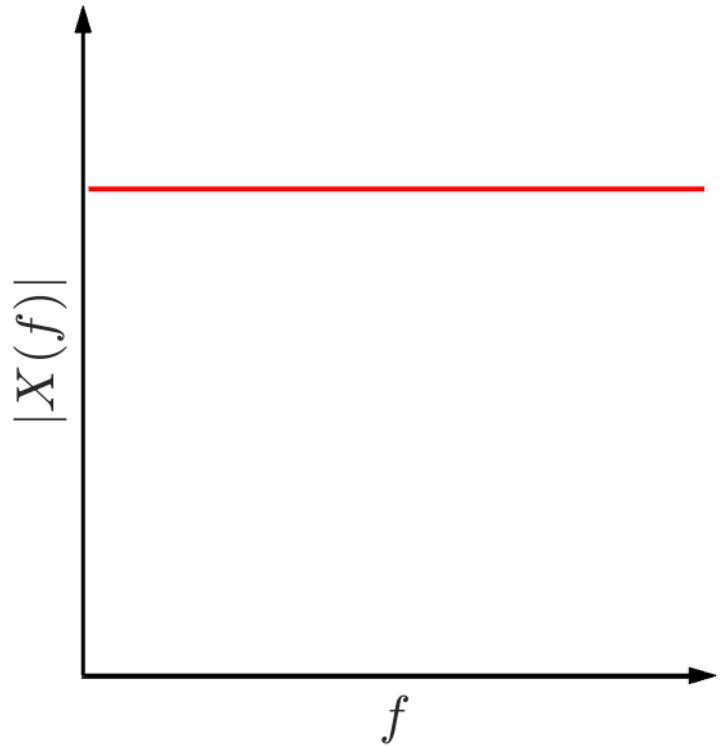
➤ Dominio tiempo-frecuencia



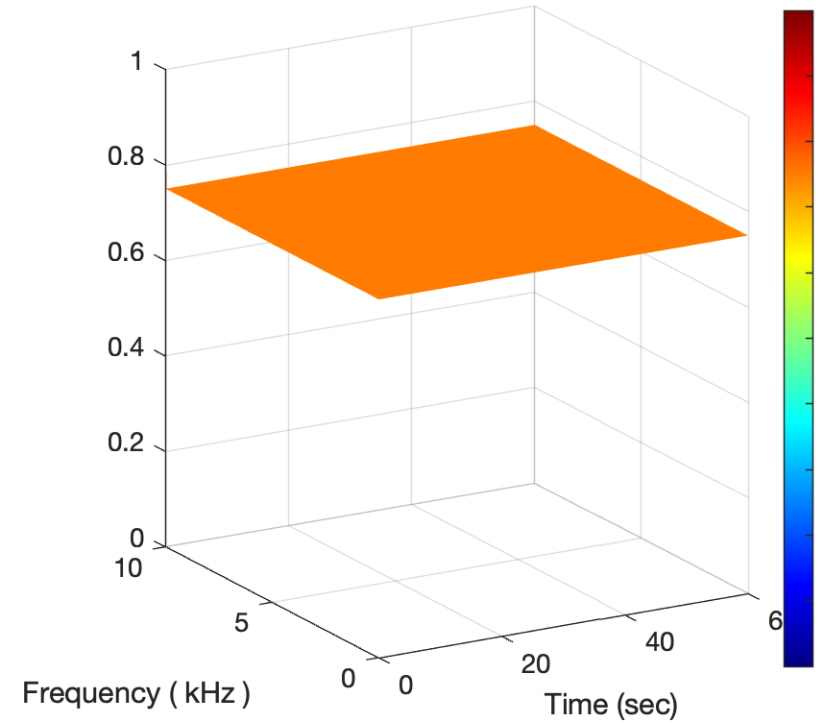
Ruido blanco Gaussiano

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



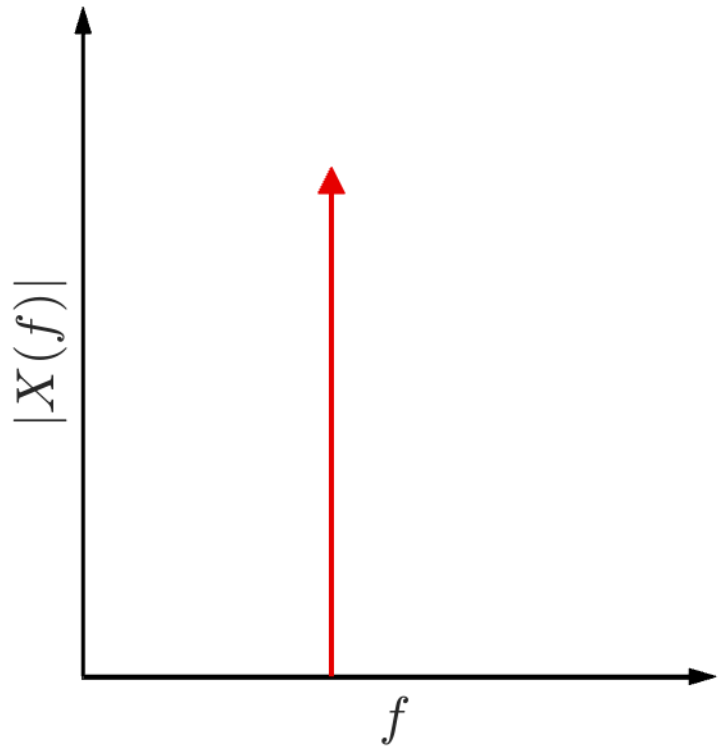
➤ Dominio tiempo-frecuencia



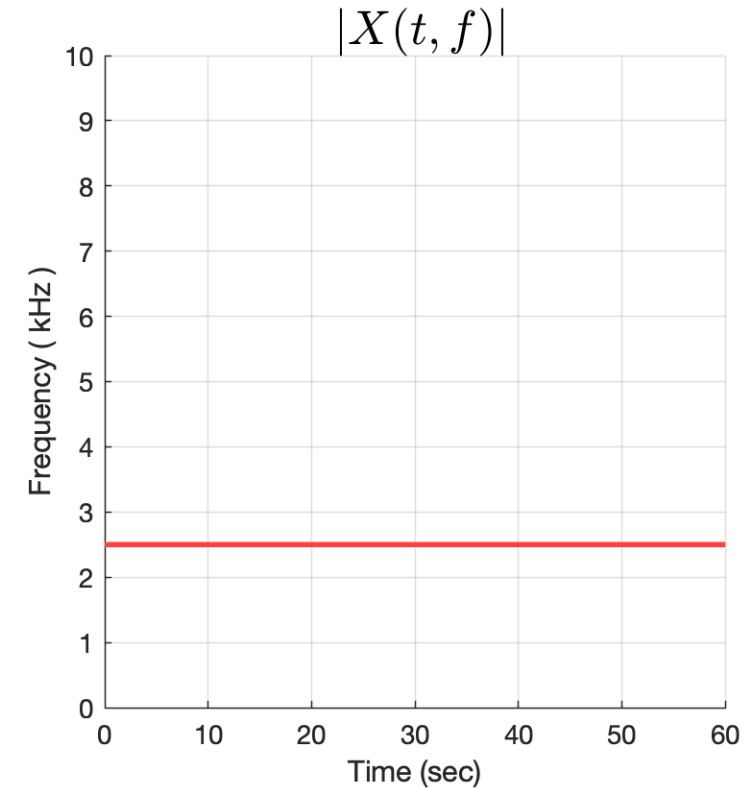
Ruido blanco Gaussiano

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



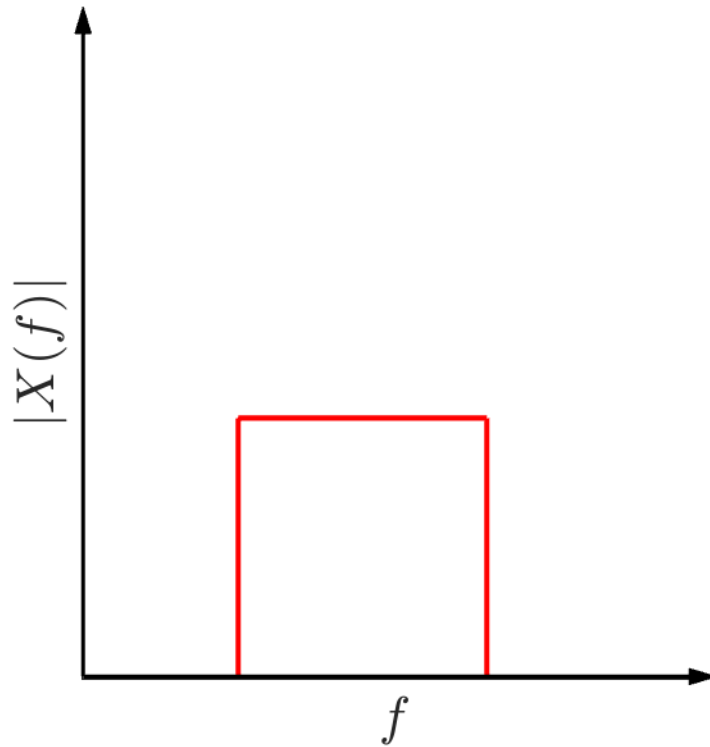
➤ Dominio tiempo-frecuencia



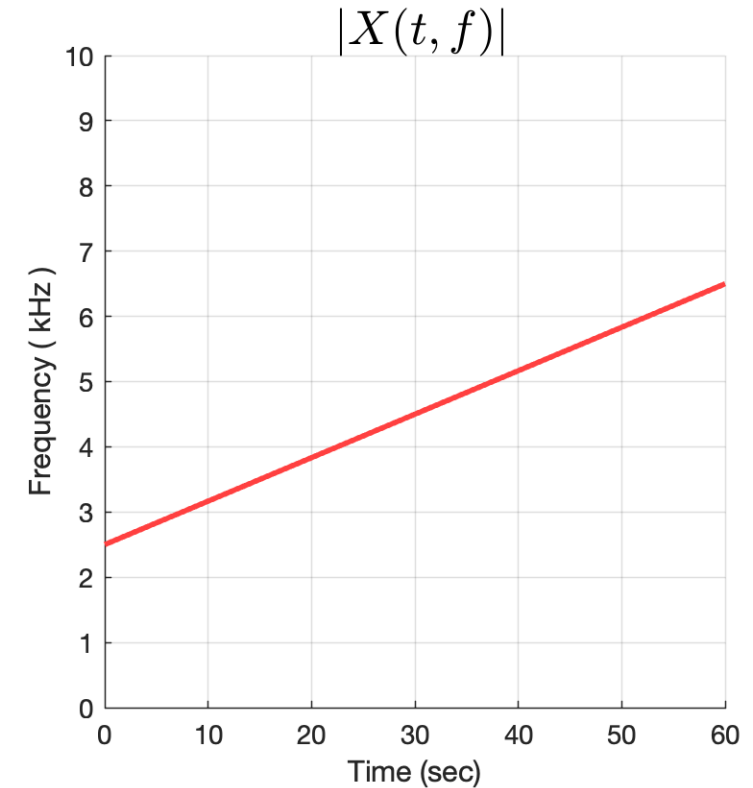
Coseno en  $f=f_a$

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



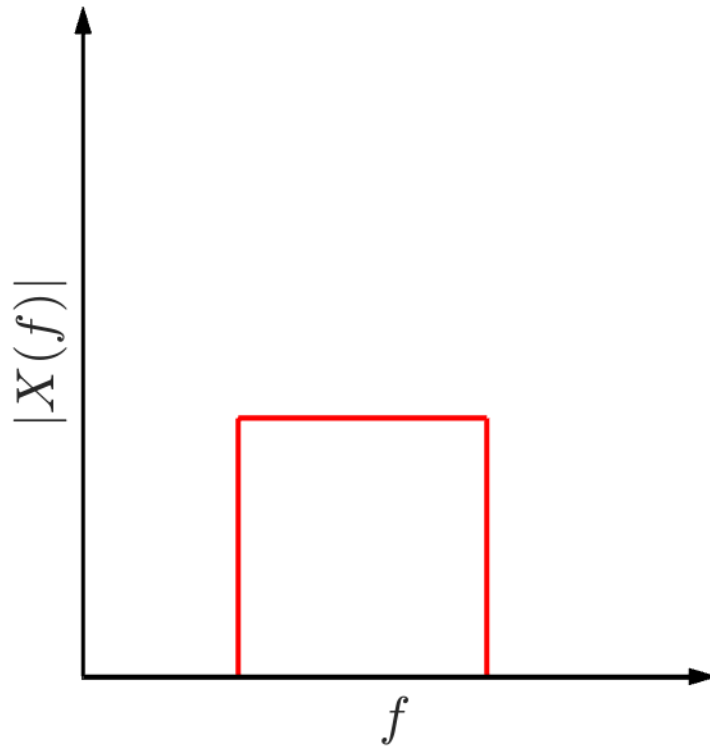
➤ Dominio tiempo-frecuencia



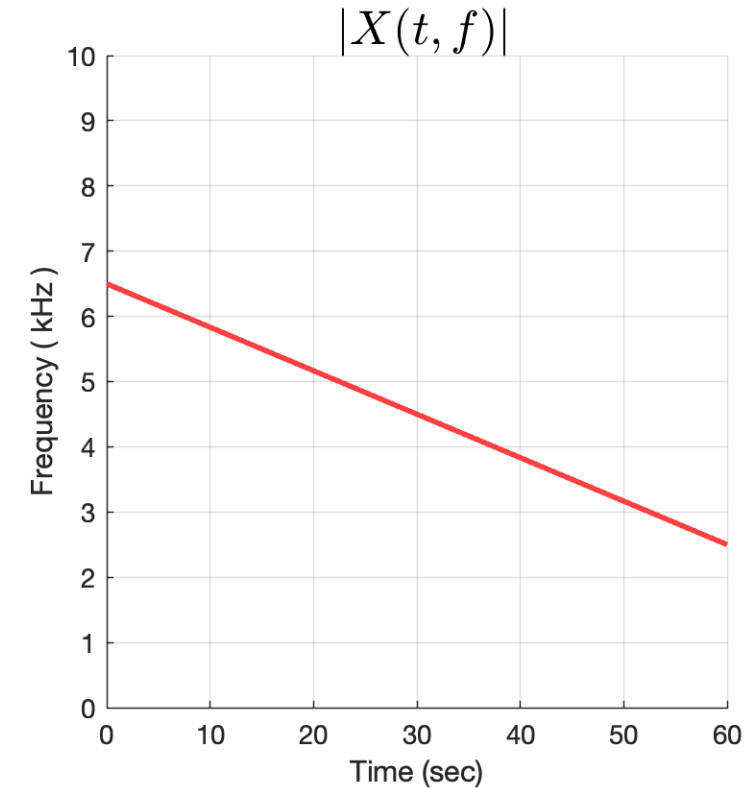
Coseno con frecuencia modulada linealmente

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



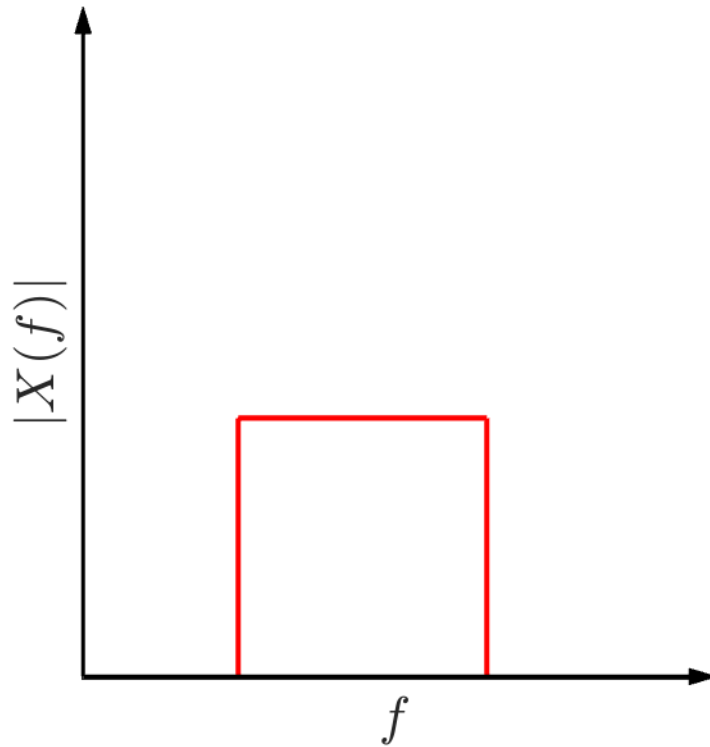
➤ Dominio tiempo-frecuencia



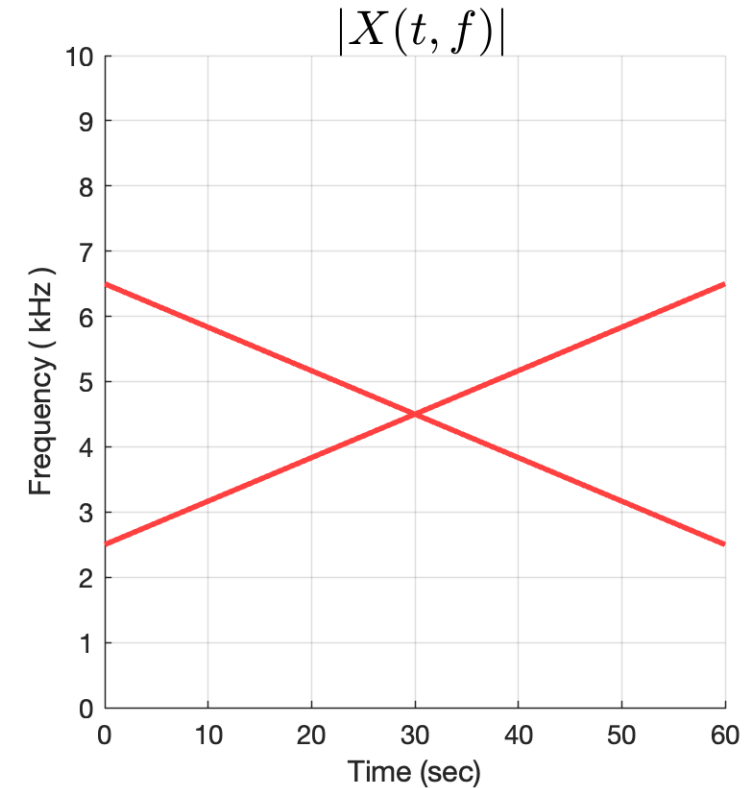
Coseno con frecuencia modulada linealmente

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



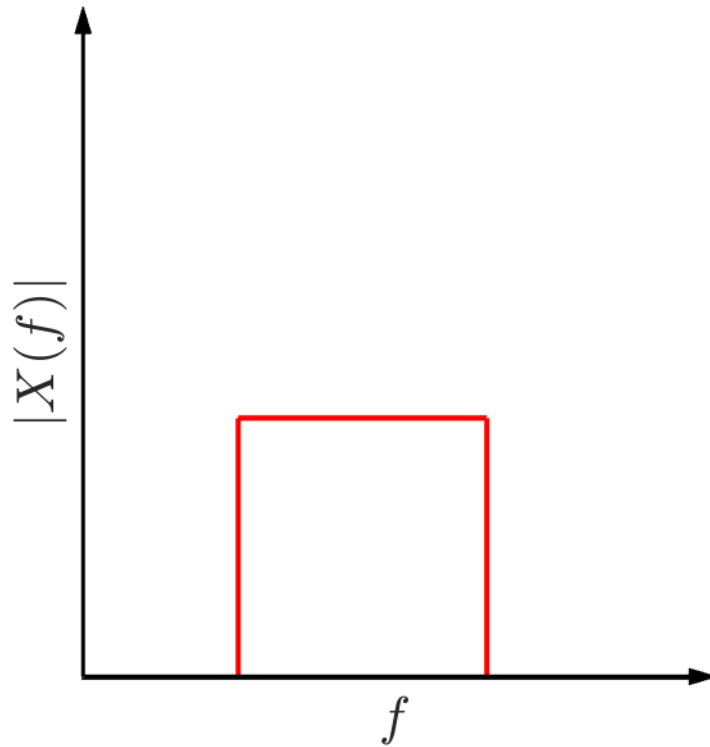
➤ Dominio tiempo-frecuencia



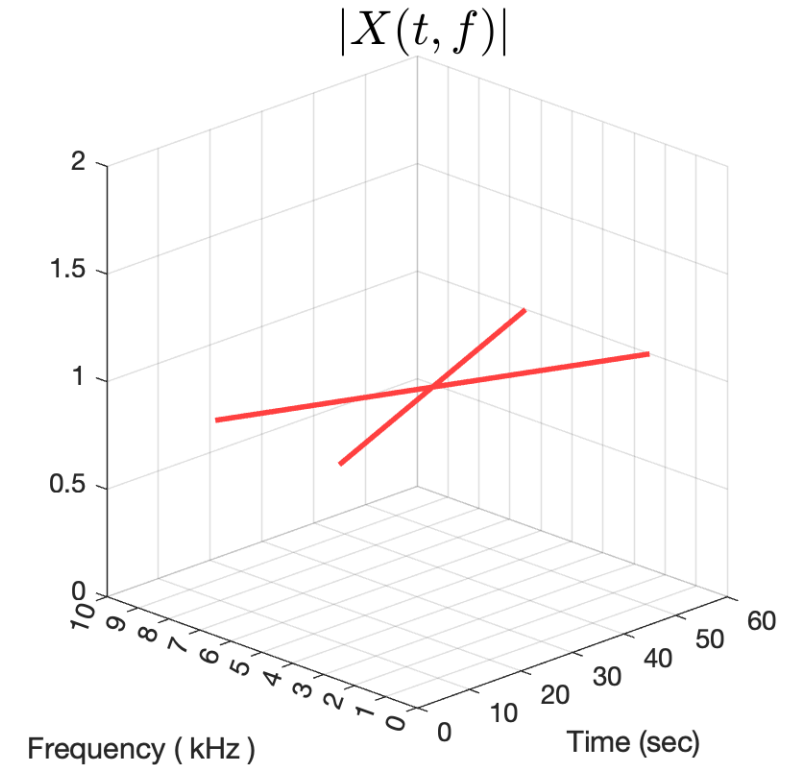
Señal multi componente

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia

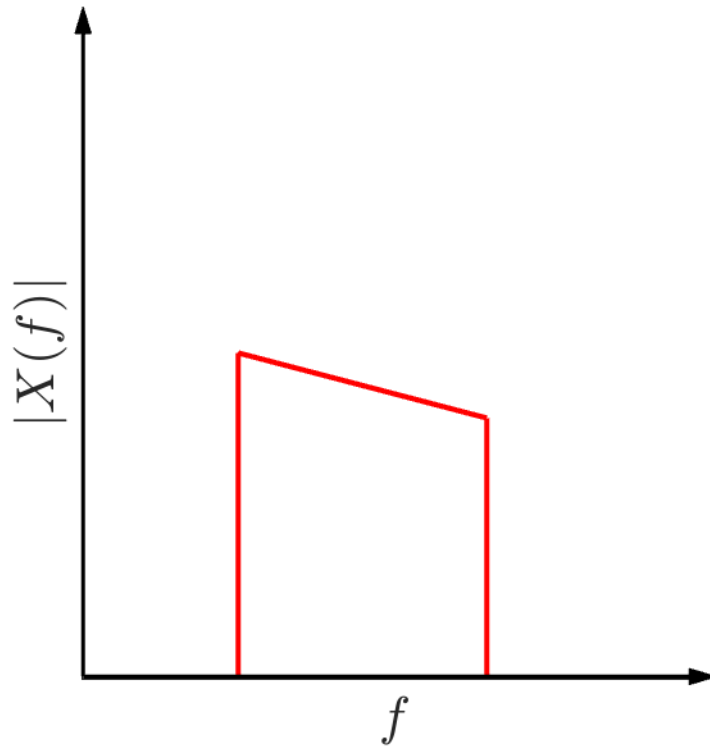


Señal multi componente

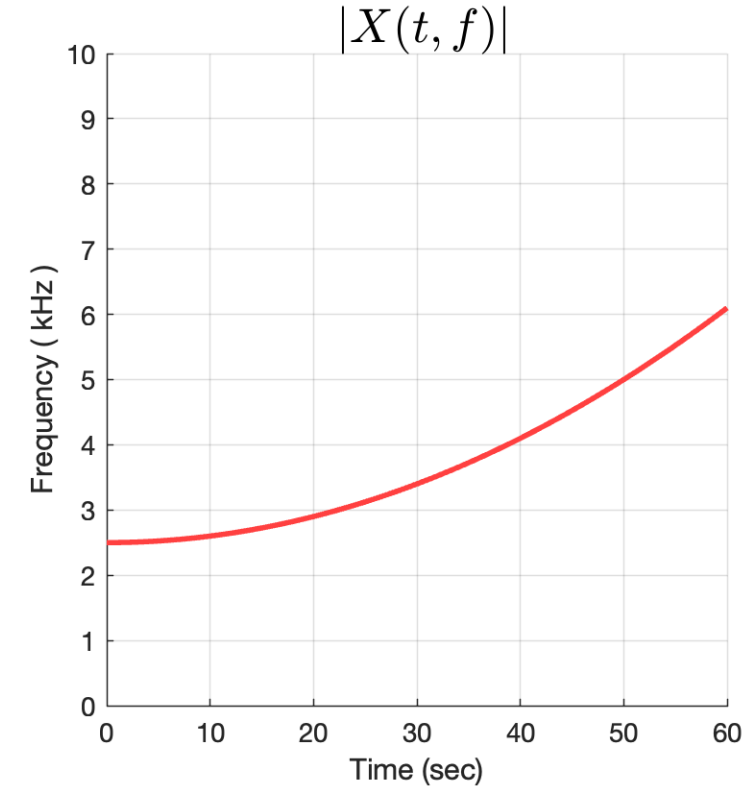


## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



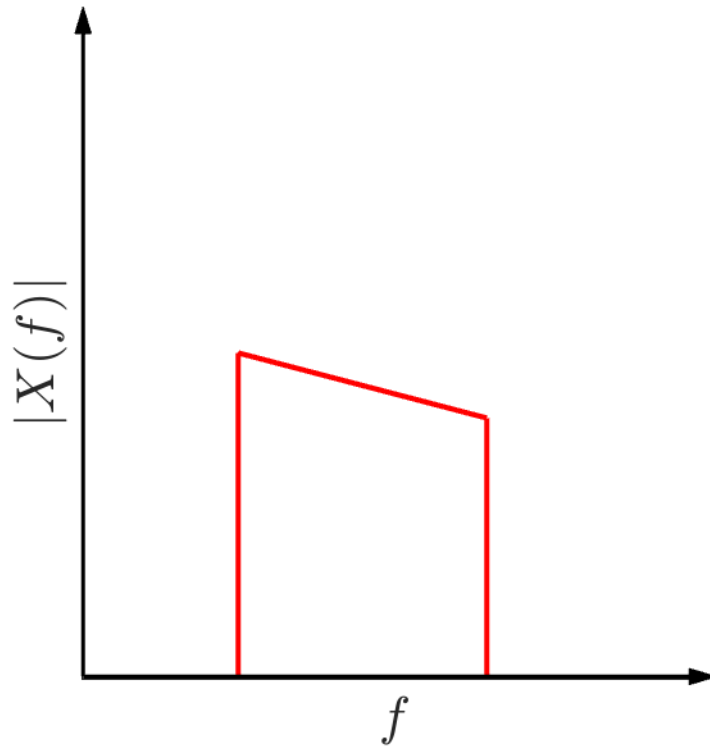
➤ Dominio tiempo-frecuencia



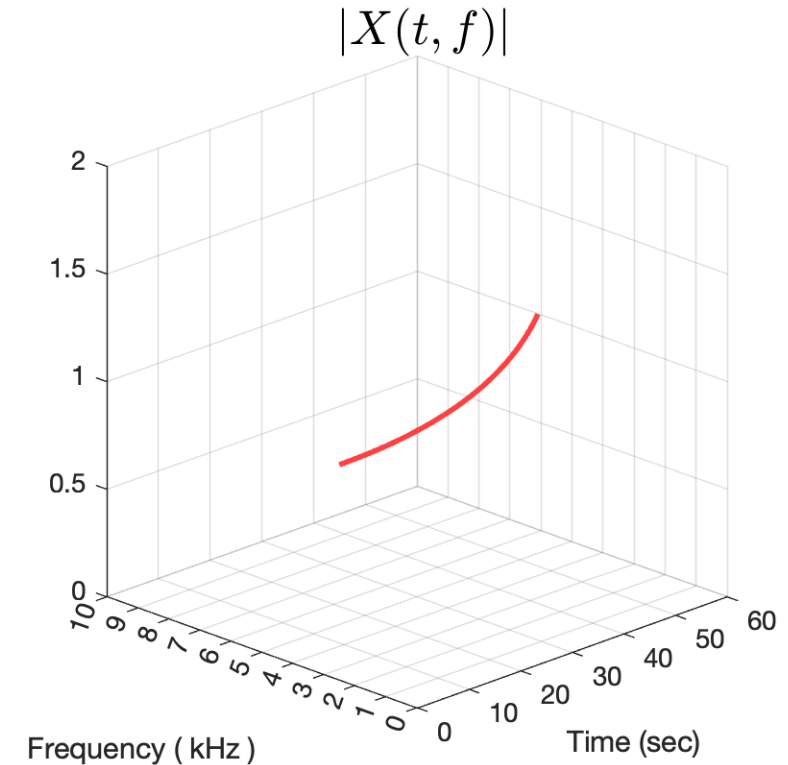
Señal con frecuencia modulada cuadráticamente

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



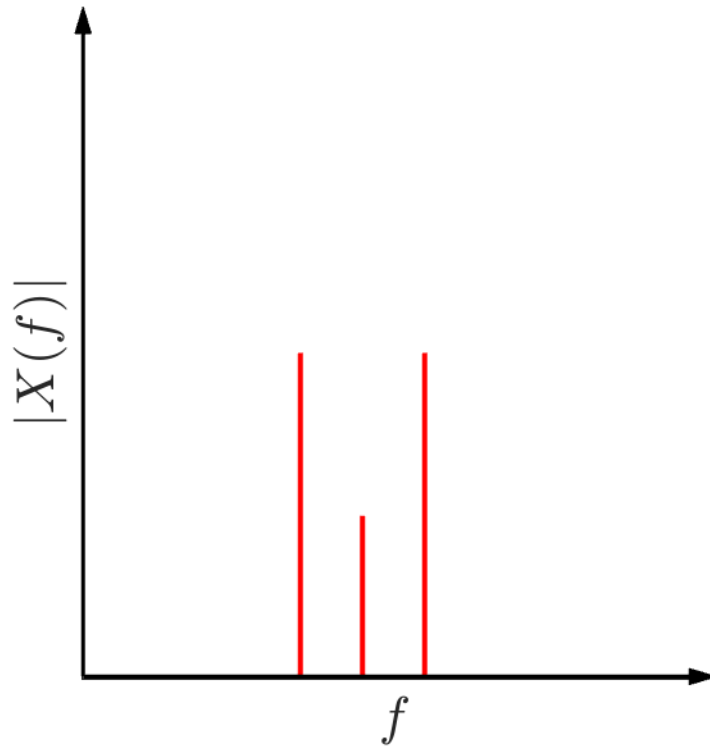
➤ Dominio tiempo-frecuencia



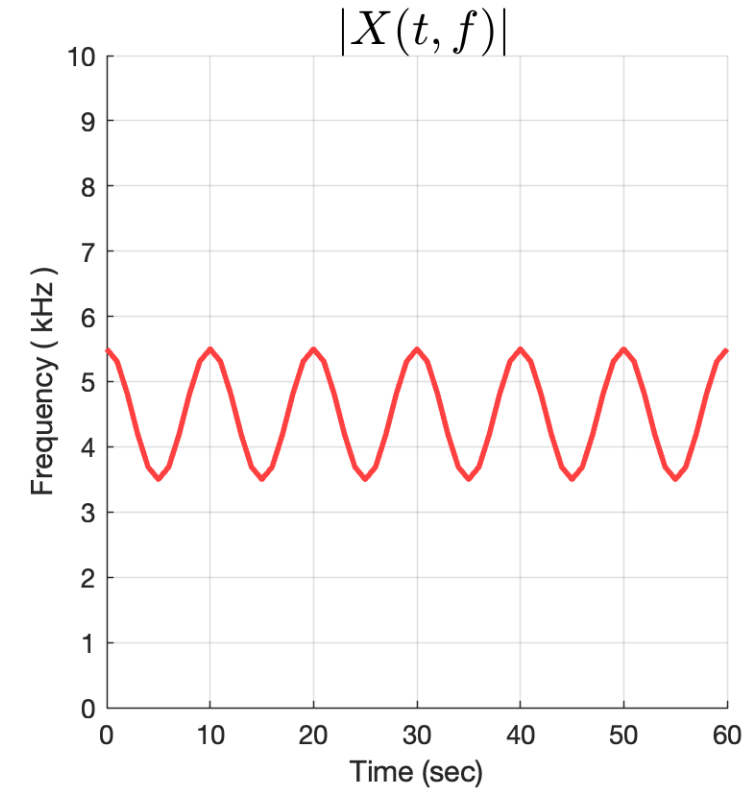
Señal con frecuencia modulada cuadráticamente

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



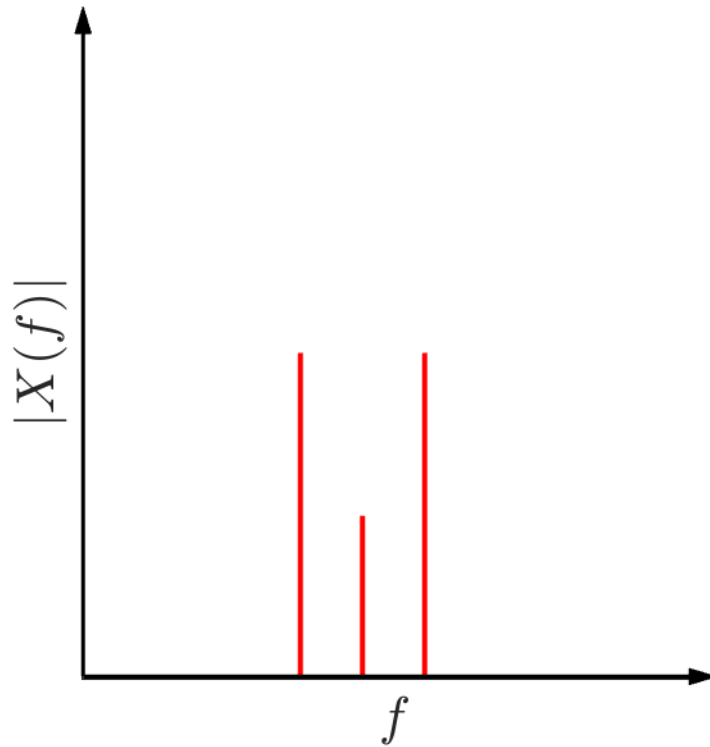
➤ Dominio tiempo-frecuencia



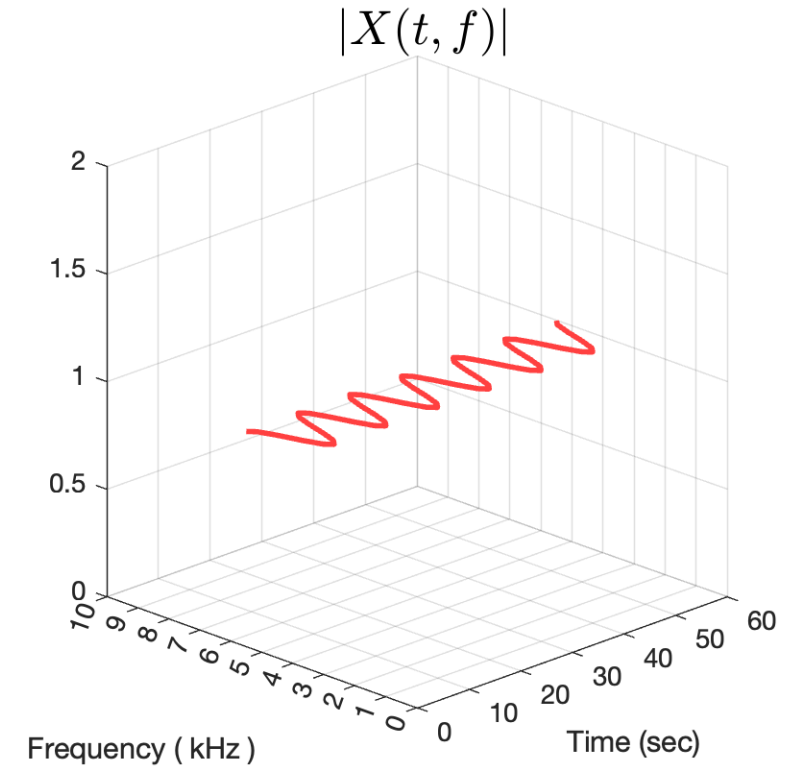
Señal con frecuencia modulada sinusoidalmente

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



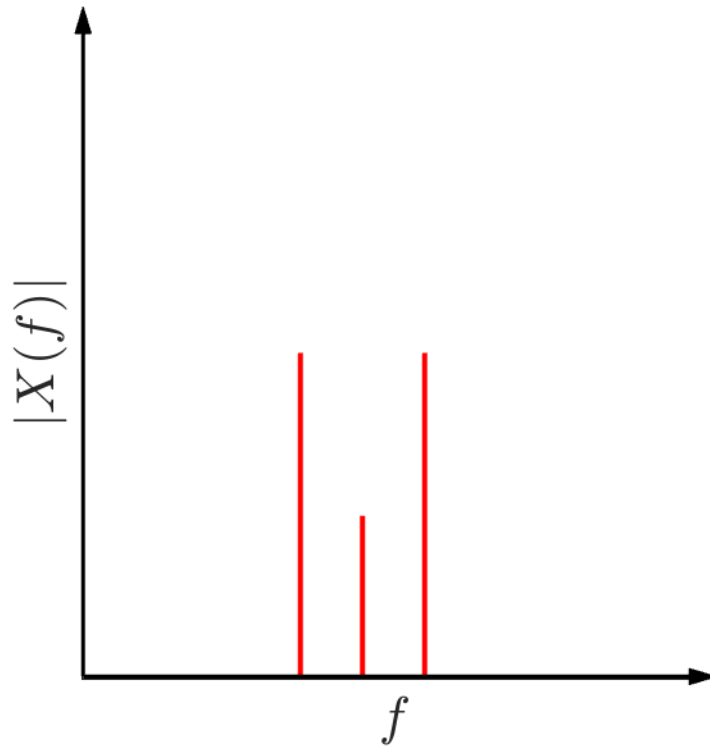
➤ Dominio tiempo-frecuencia



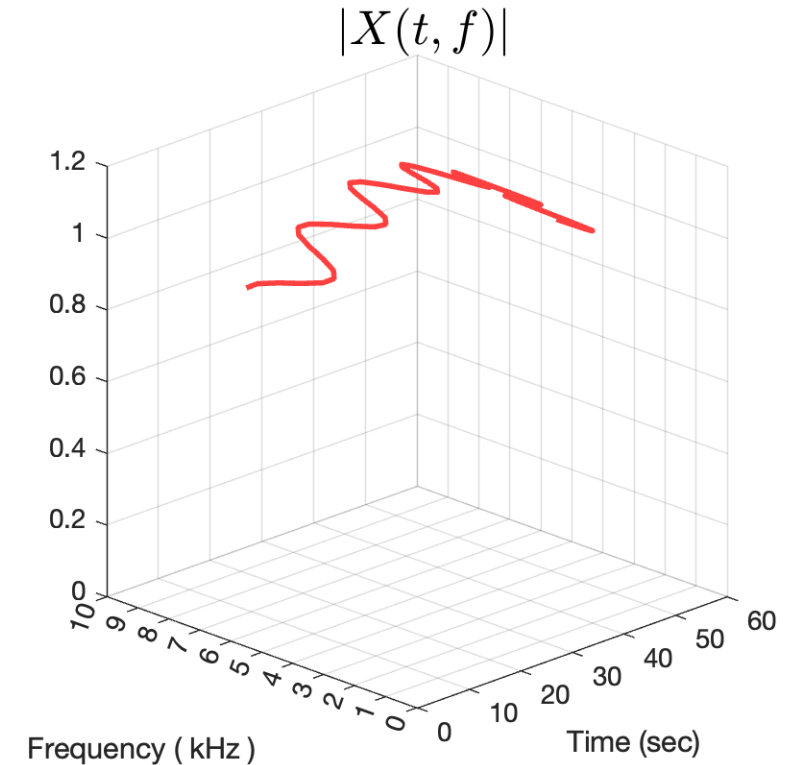
Señal con frecuencia modulada sinusoidalmente

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia



Señal con frecuencia y amplitud modulada sinusoidalmente

## 2.1. Señales en el dominio tiempo-frecuencia

---

### Ventajas de la STFT:

- El análisis t-f muestra que frecuencias están presentes en la señal
- El análisis t-f muestra cuando se presentan estas frecuencias
- El análisis t-f permite seguir el comportamiento de armónicos

individualmente

## 2.2. Consideraciones prácticas

---

### Idealmente :

- Analíticas
- Estacionarias
- Determinísticas
- Acotadas
- Limitadas en banda
- Libres de espurios
- No correlacionadas
- Continuidad en frecuencia
- Continuidad en fase
- Fase derivable

### Mundo real :

- No analíticas
- No estacionarias
- Aleatorias
- Limitadas (no acotadas)
- Banda amplia
- Transitorios
- Correlacionadas
- Discontinuidades en frecuencia
- Discontinuidades en fase
- Fase no derivable

### 3. La STFT en tiempo discreto

---

STFT en tiempo continuo

$$X(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

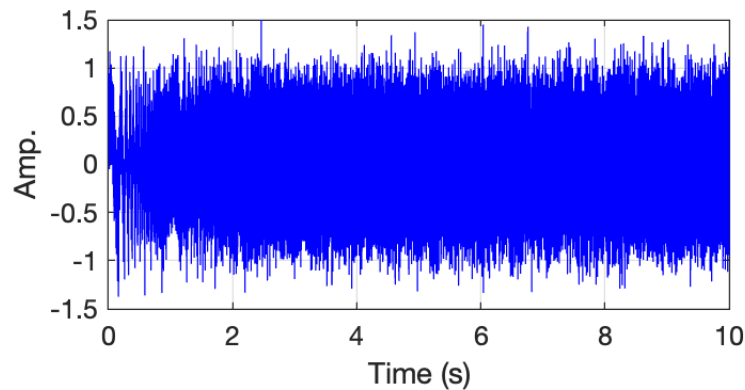
STFT en tiempo discreto

$$\hat{y}[k, m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w[mL - n] e^{-2\pi jkn/N}$$

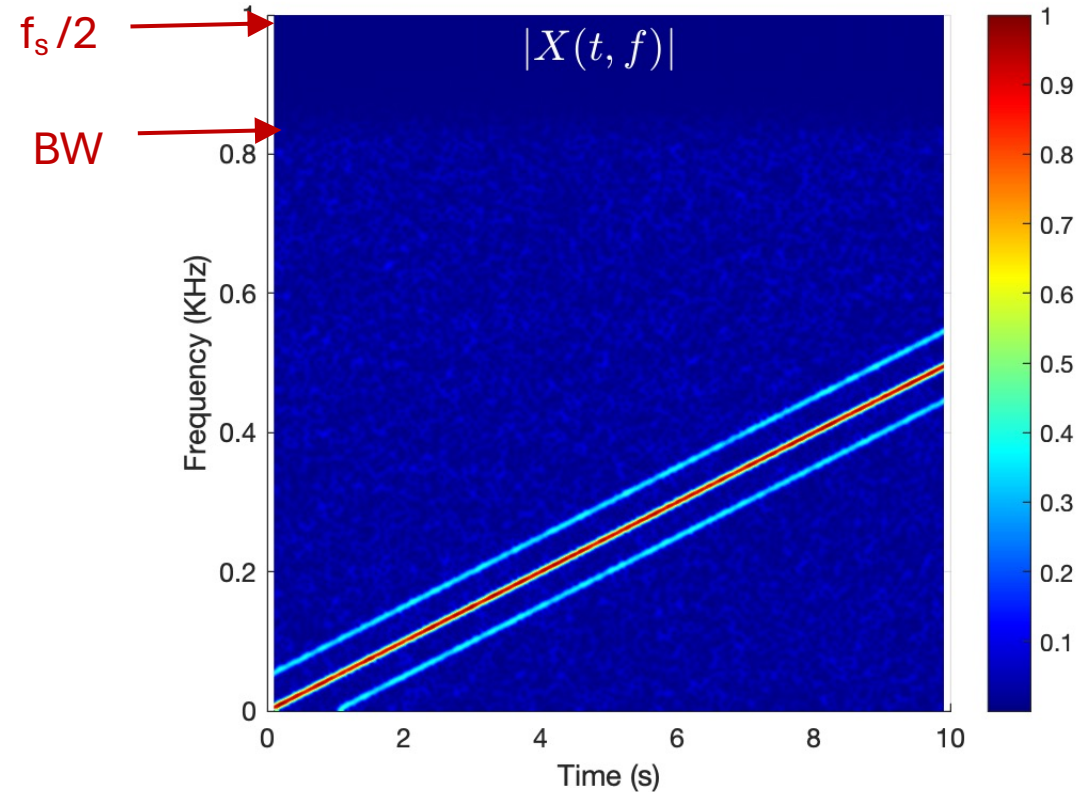


# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



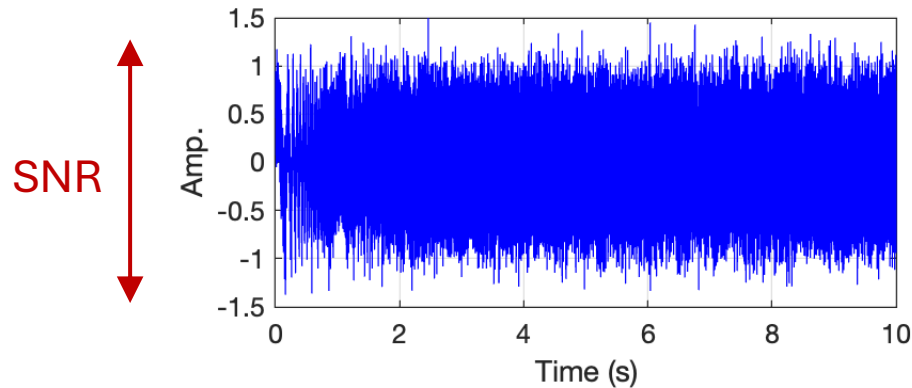
➤ Dominio tiempo-frecuencia



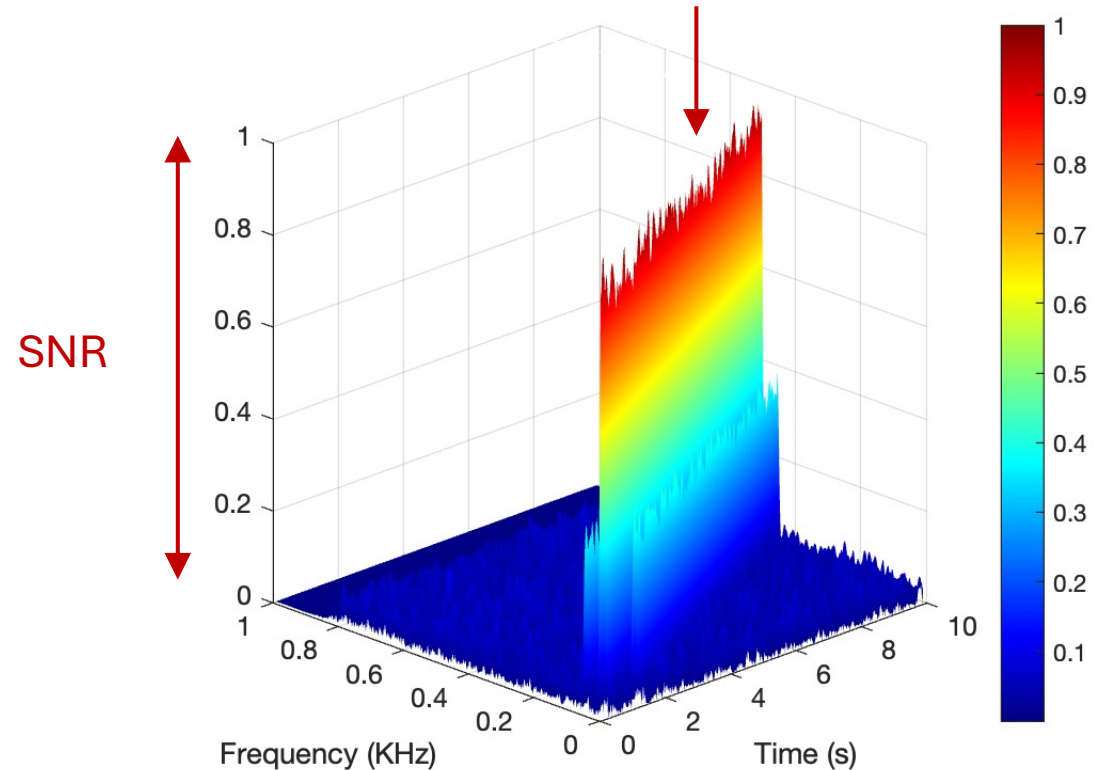
Señal con múltiples componentes FM lineal

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



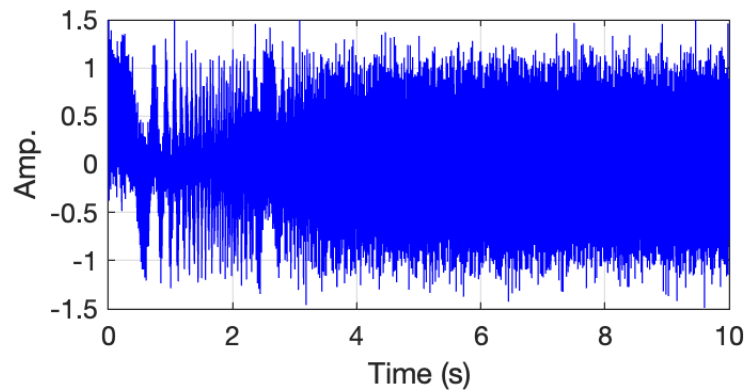
➤ Dominio tiempo-frecuencia



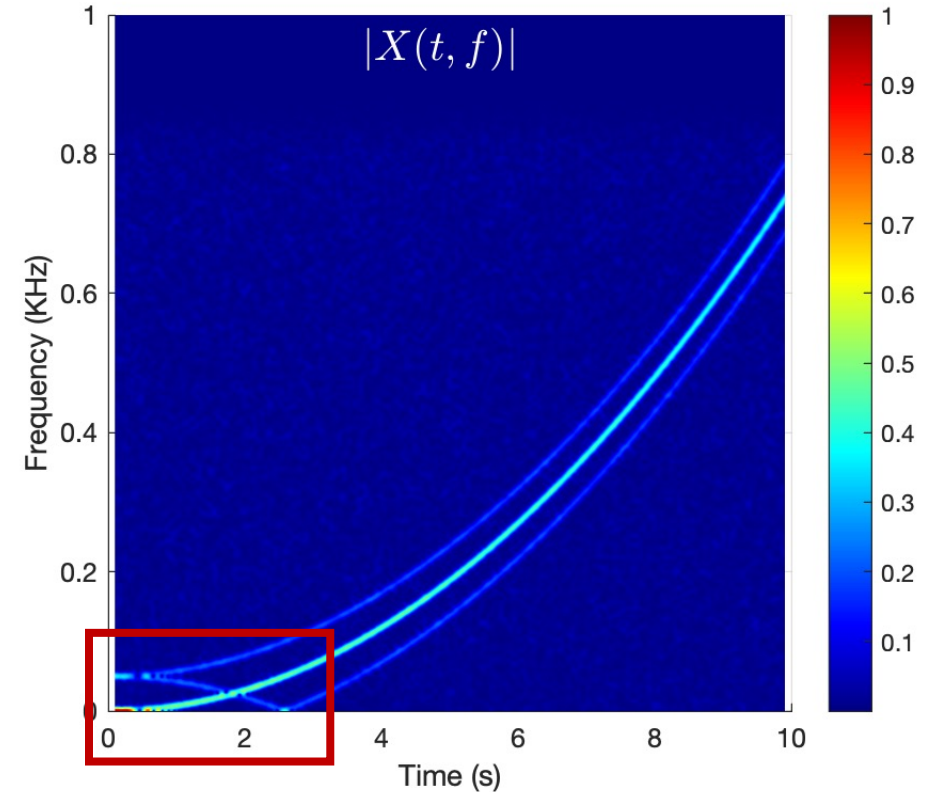
Señal con múltiples componentes FM lineal

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



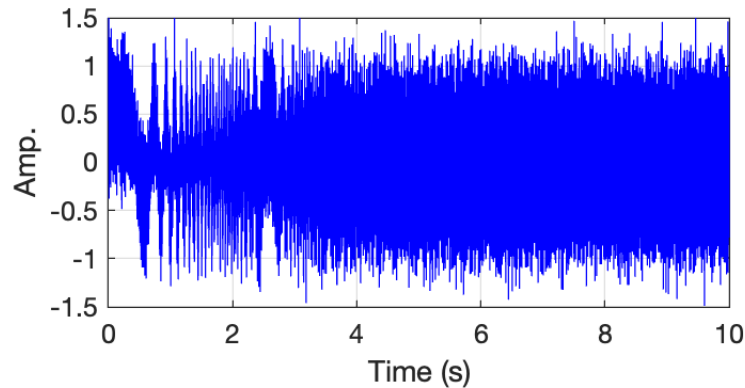
➤ Dominio tiempo-frecuencia



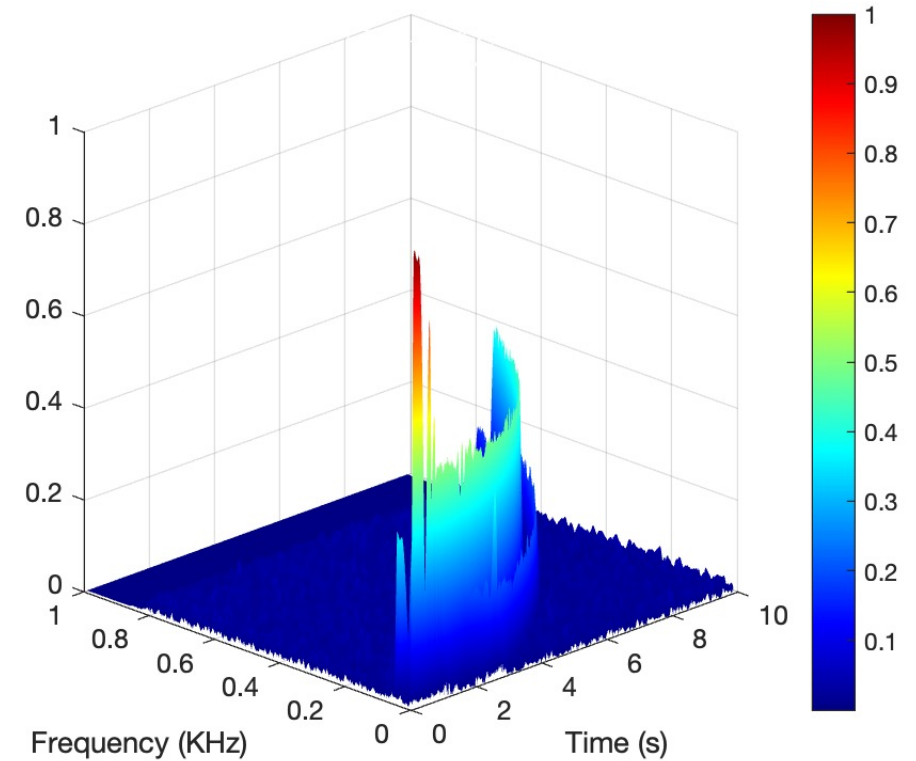
Señal con múltiples componentes FM cuadrática

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



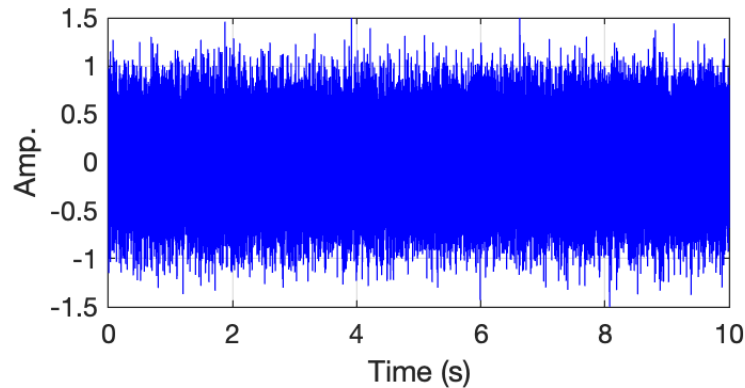
➤ Dominio tiempo-frecuencia



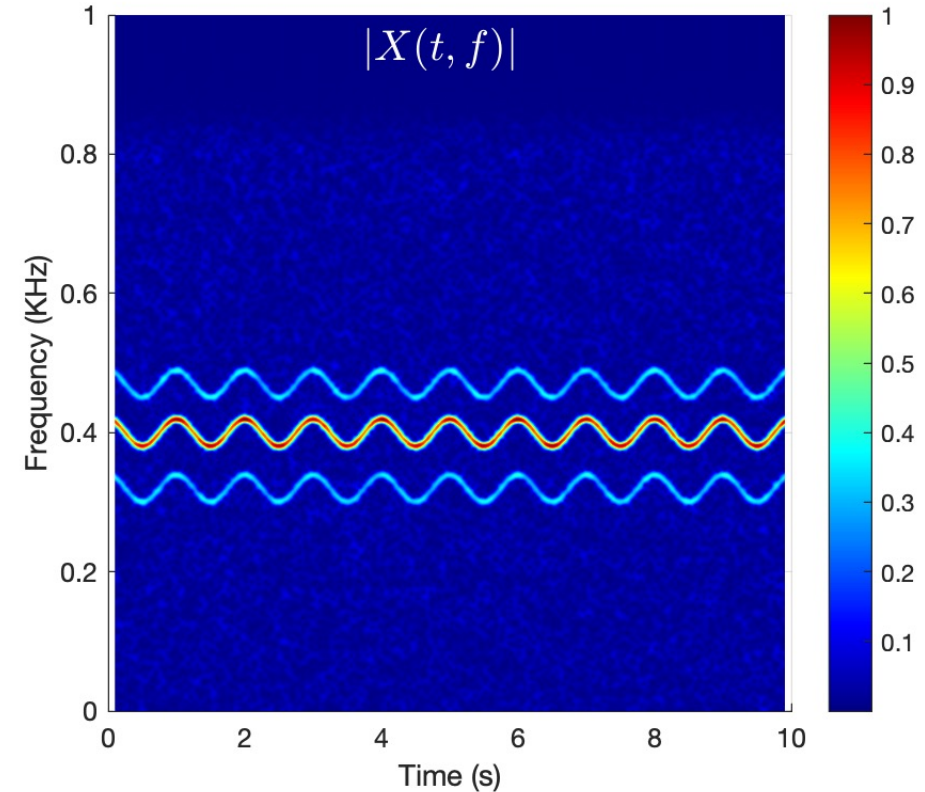
Señal con múltiples componentes FM cuadrática

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



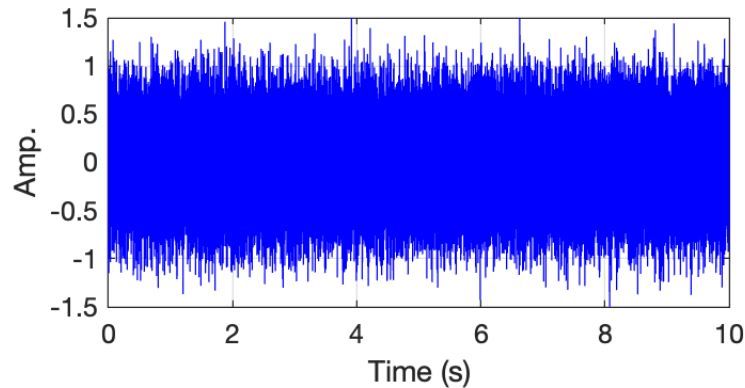
➤ Dominio tiempo-frecuencia



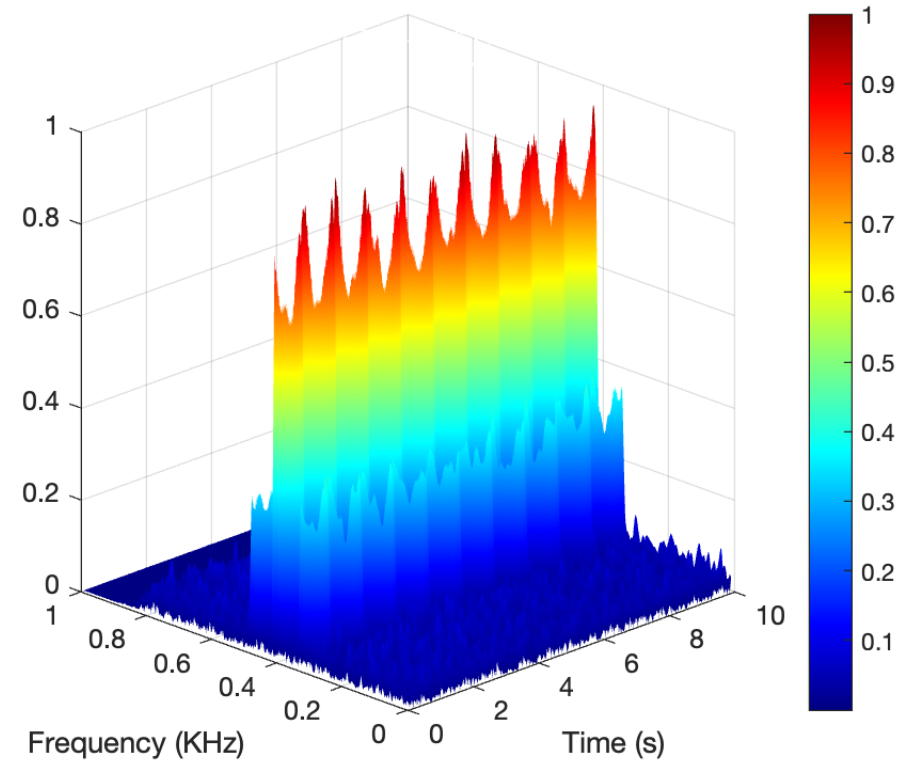
Señal con múltiples componentes FM coseno

## 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



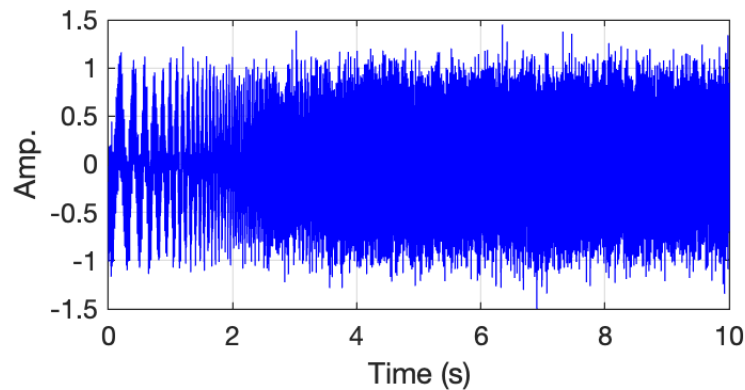
➤ Dominio tiempo-frecuencia



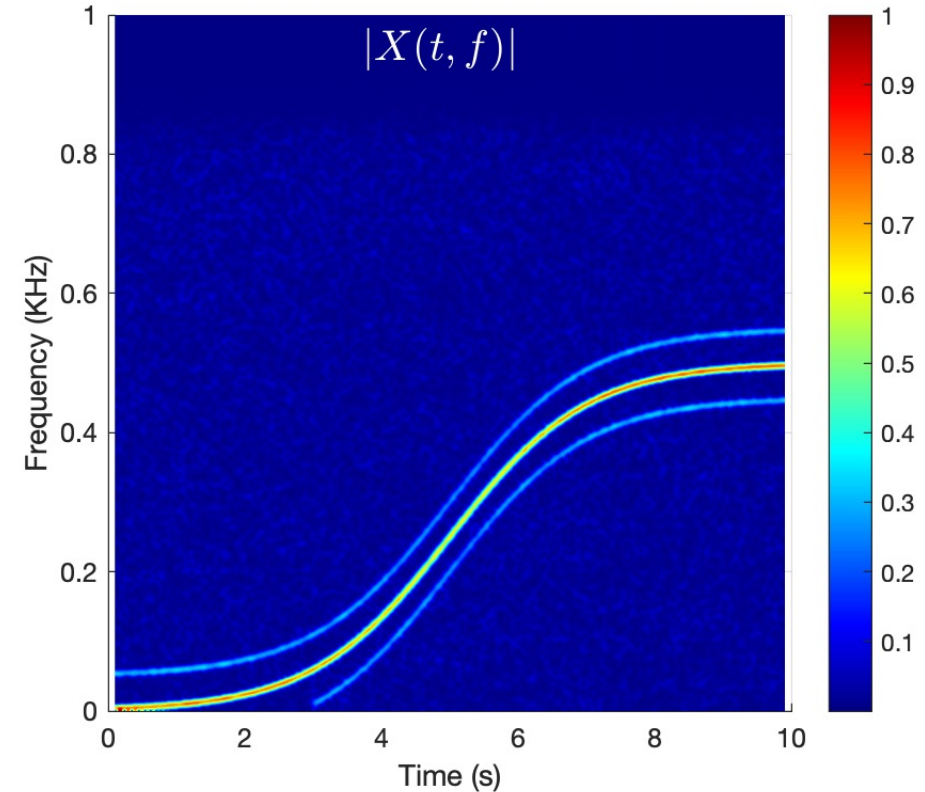
Señal con múltiples componentes FM coseno

## 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia

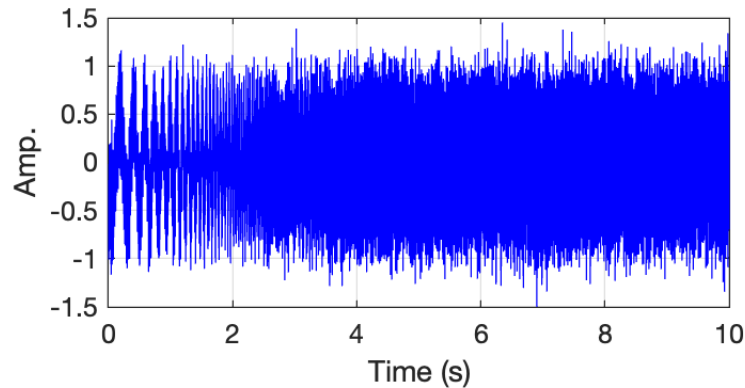


Señal con múltiples componentes FM sigmoide

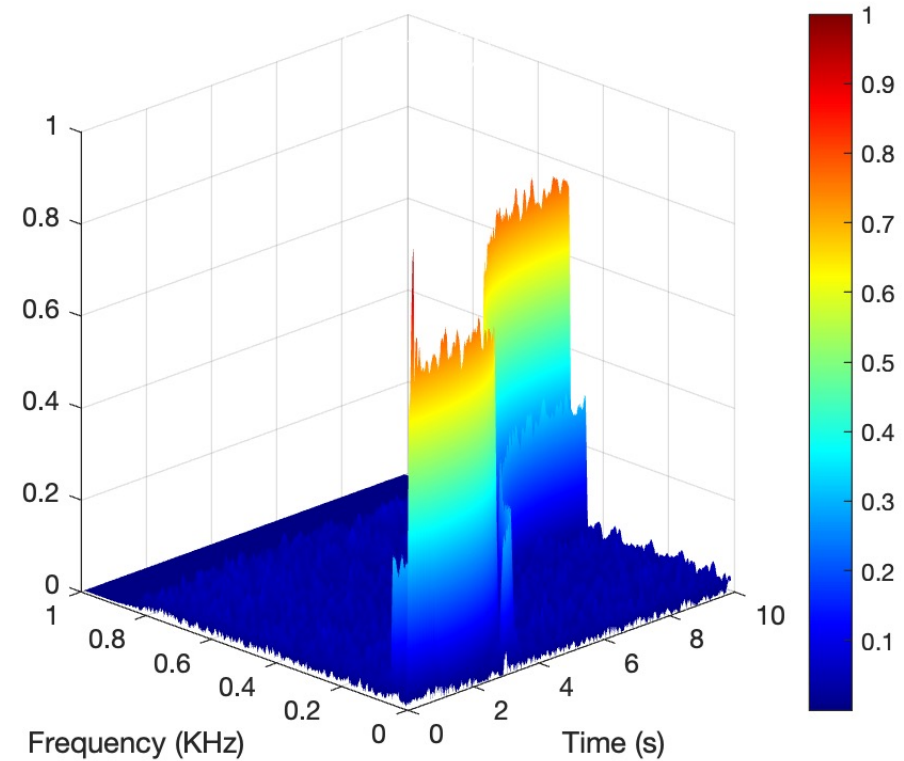


## 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia

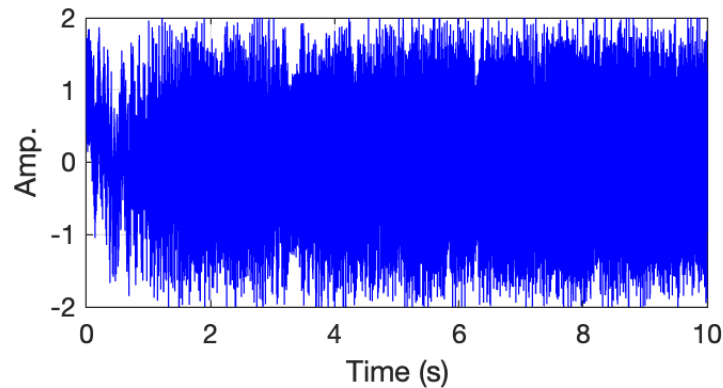


Señal con múltiples componentes FM sigmoide

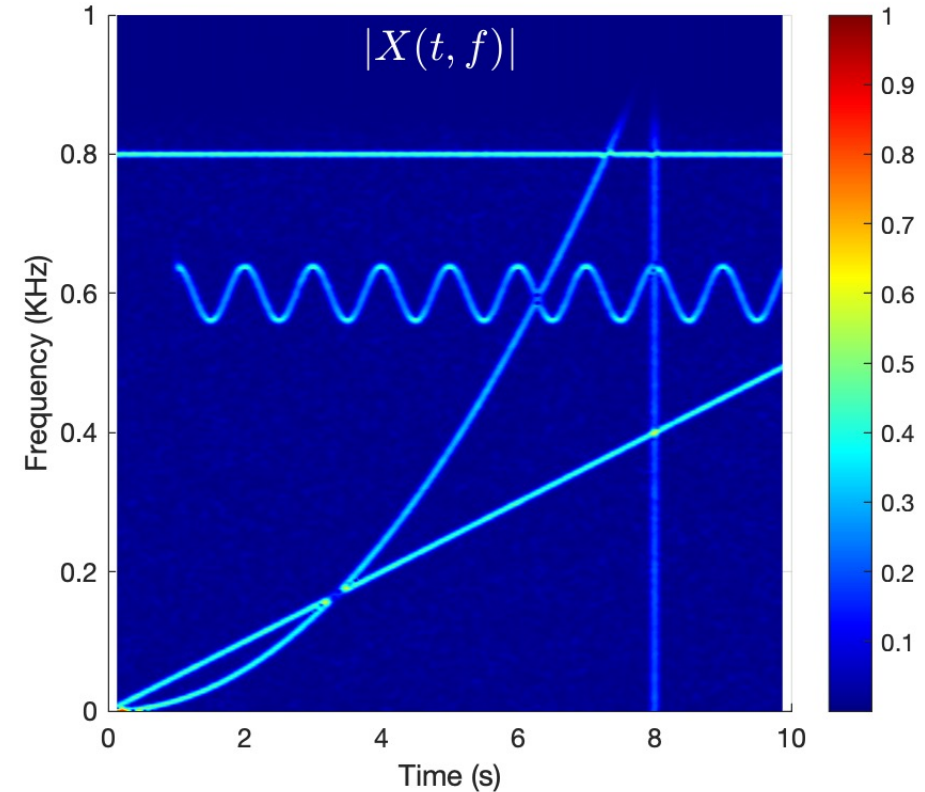


# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



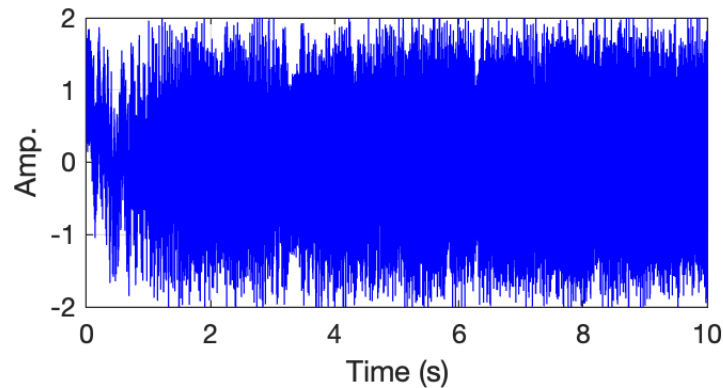
➤ Dominio tiempo-frecuencia



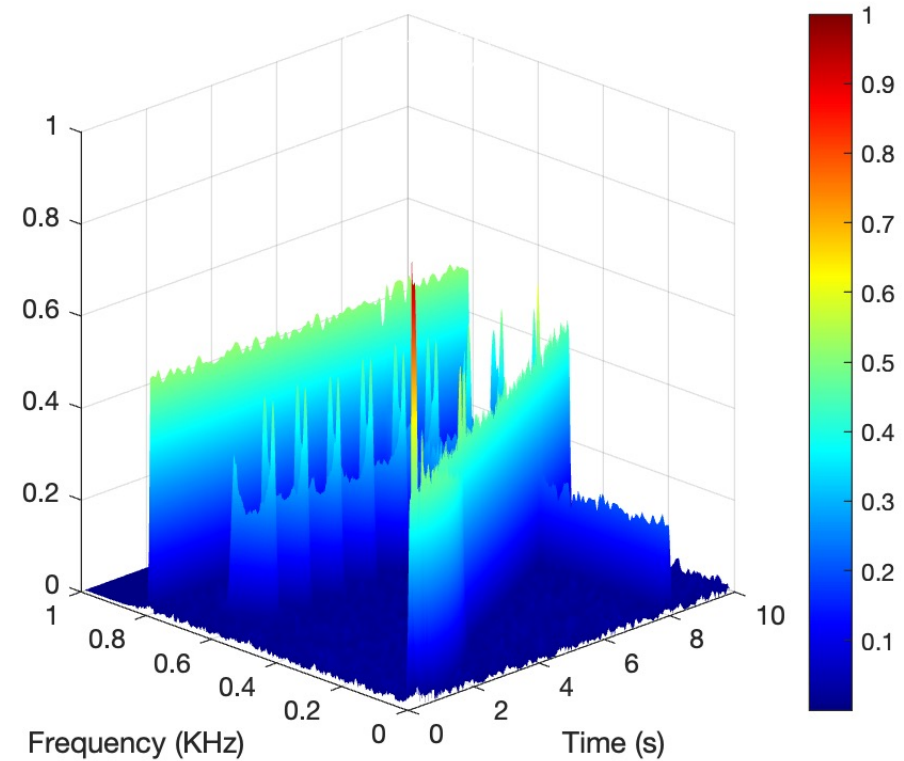
Señal con múltiples componentes FMs

## 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



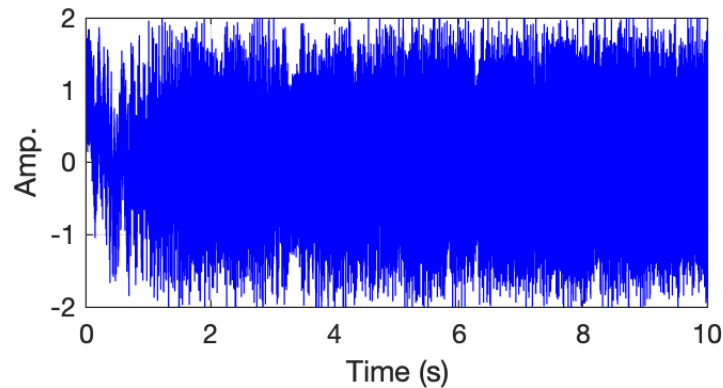
➤ Dominio tiempo-frecuencia



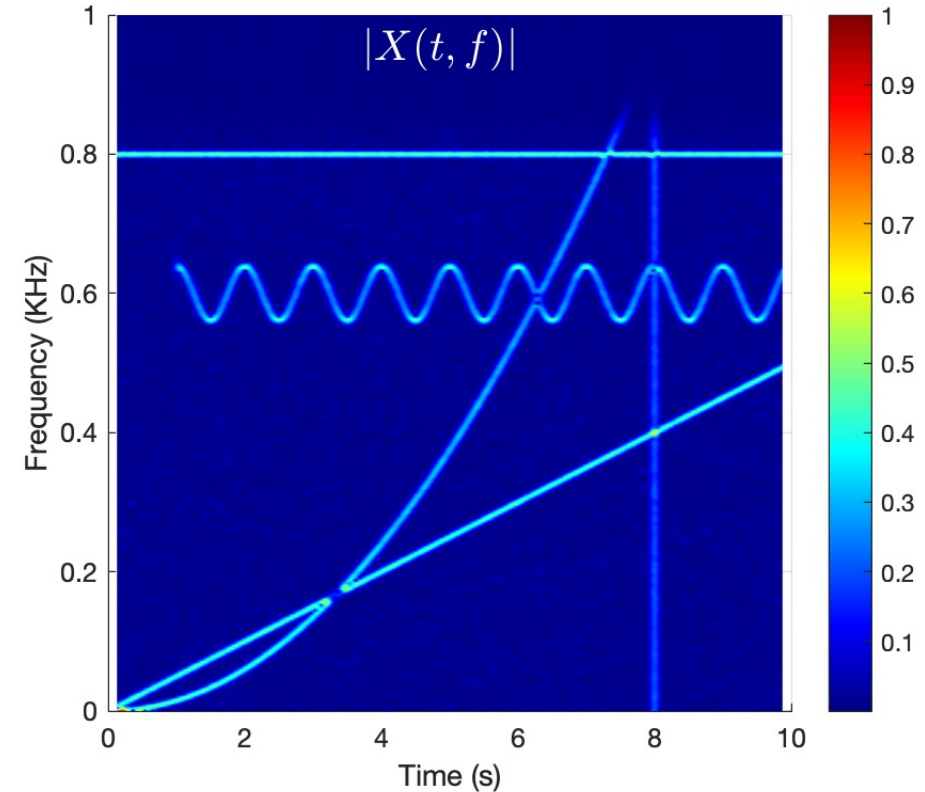
Señal con múltiples componentes FMs

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



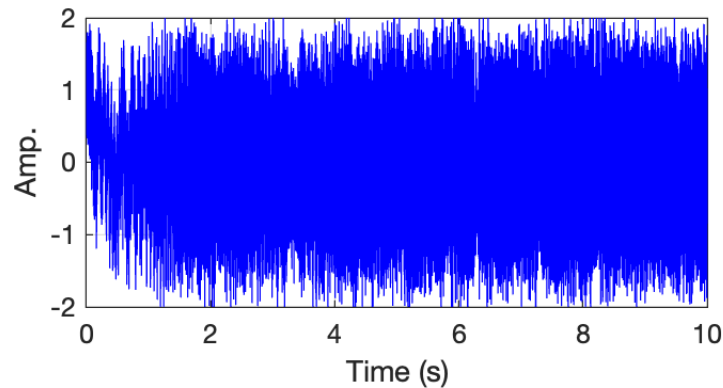
➤ Dominio tiempo-frecuencia



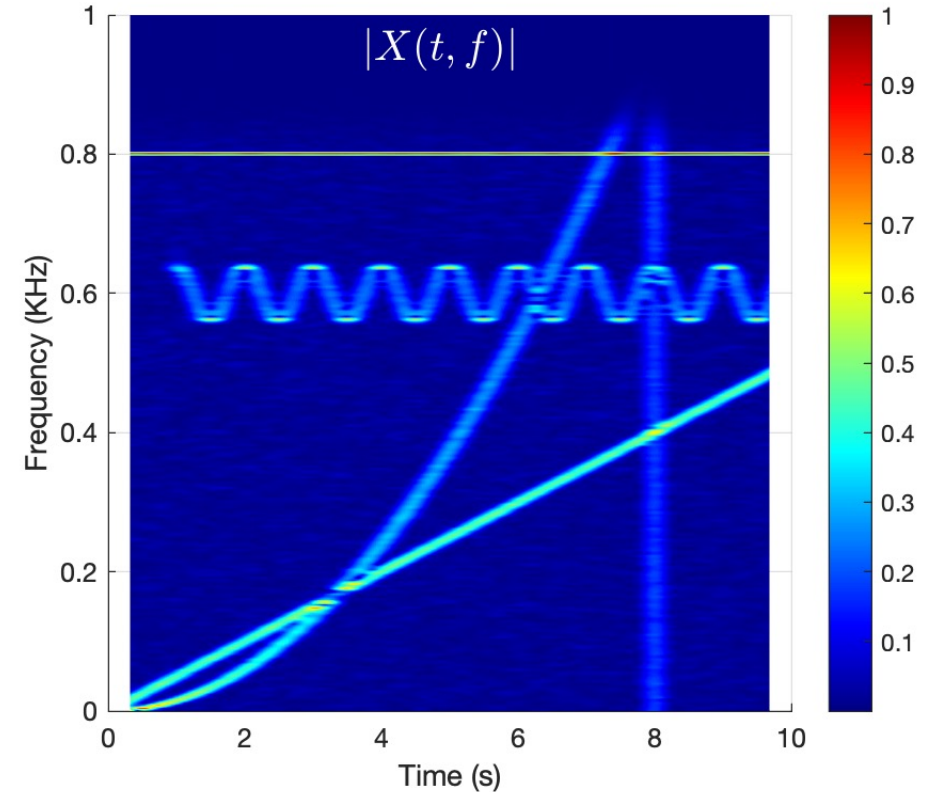
Señal con múltiples componentes FMs

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



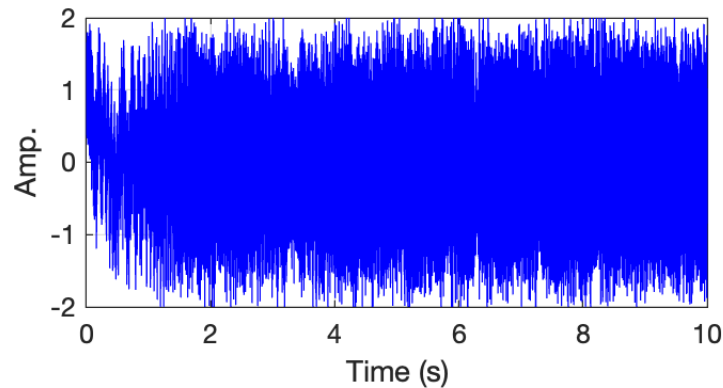
➤ Dominio tiempo-frecuencia



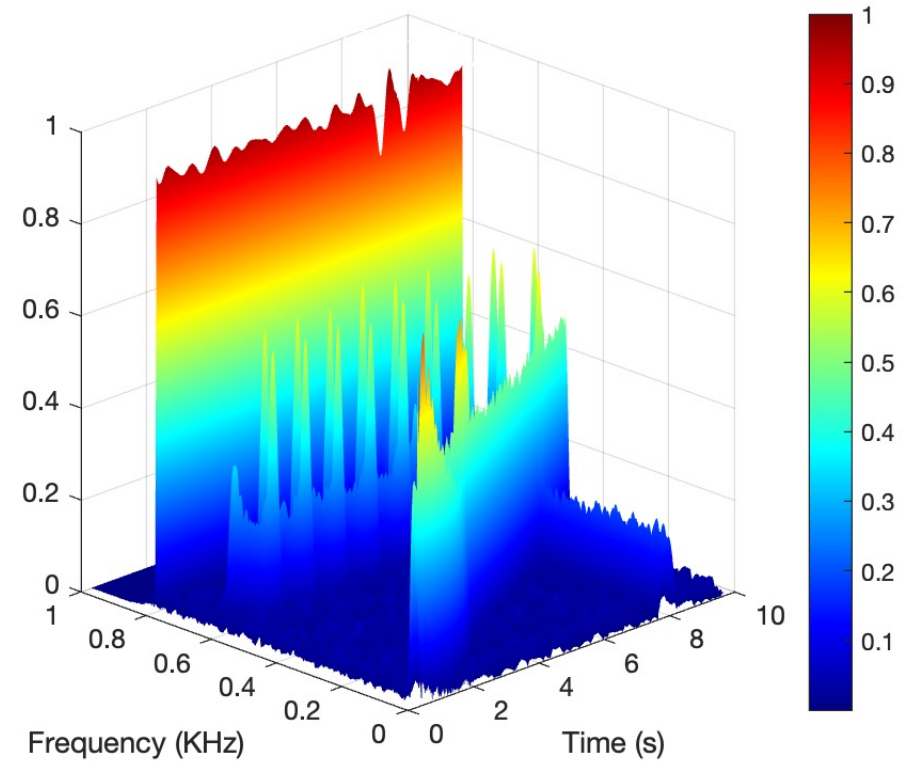
Señal con múltiples componentes

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



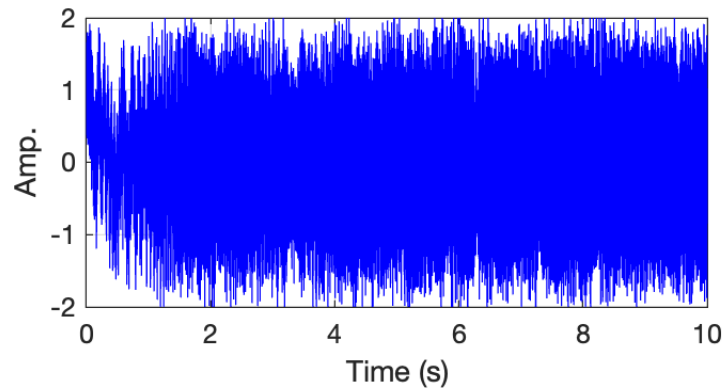
➤ Dominio tiempo-frecuencia



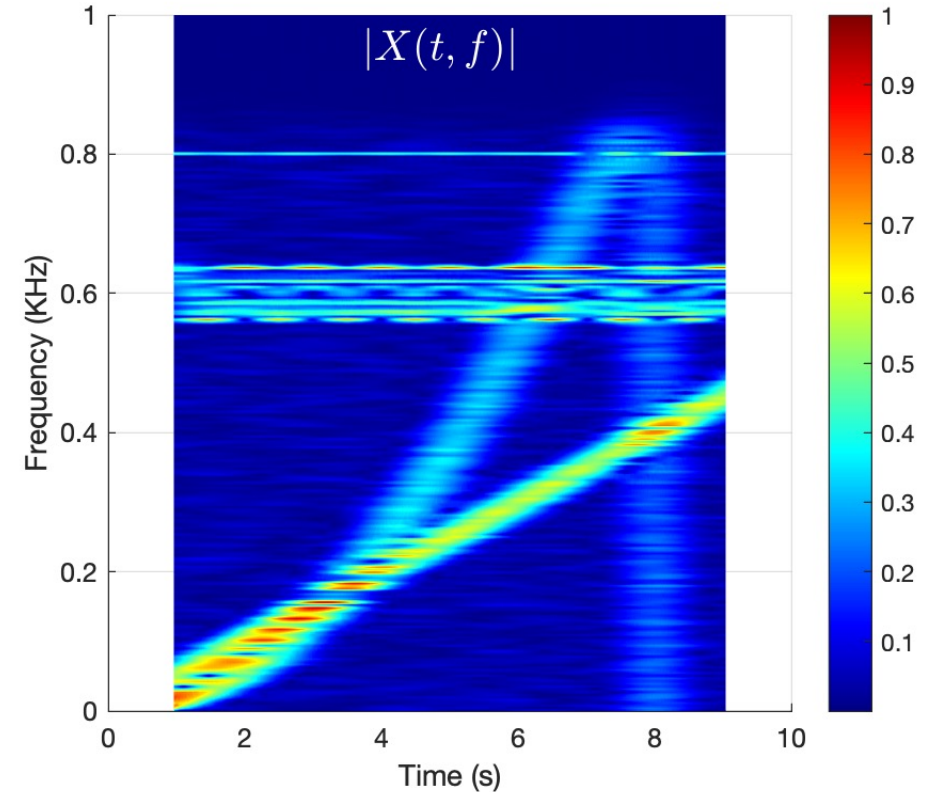
Señal con múltiples componentes

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



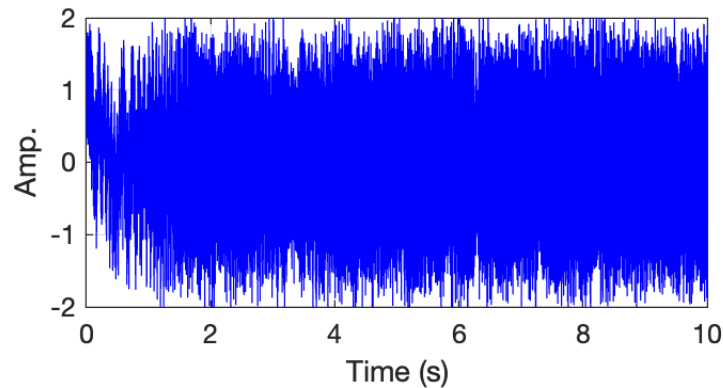
➤ Dominio tiempo-frecuencia



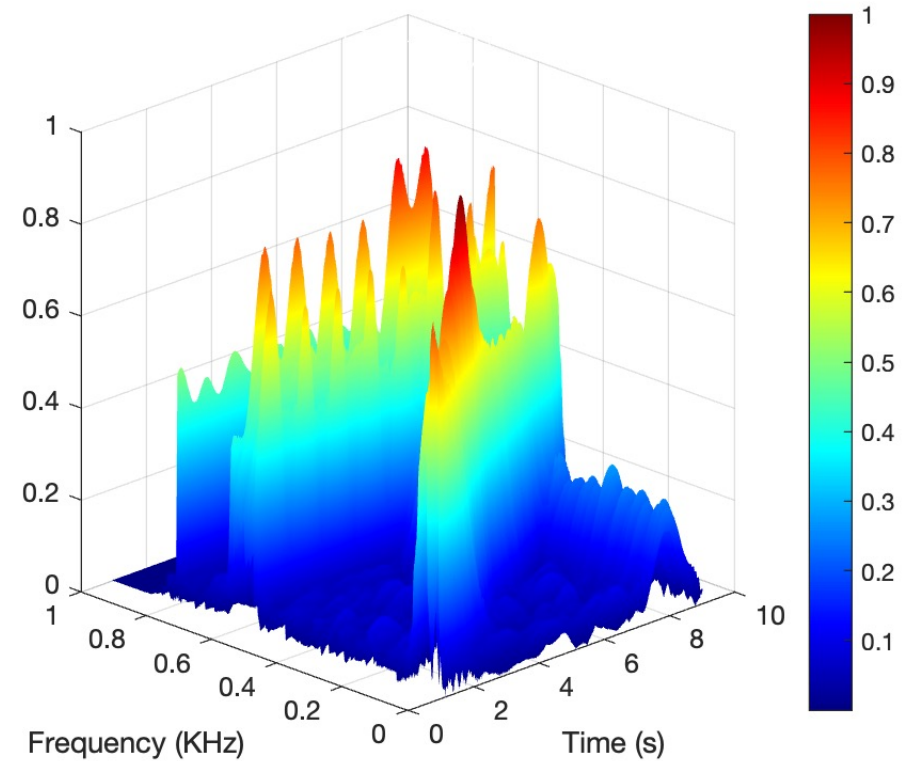
Señal con múltiples componentes

## 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia

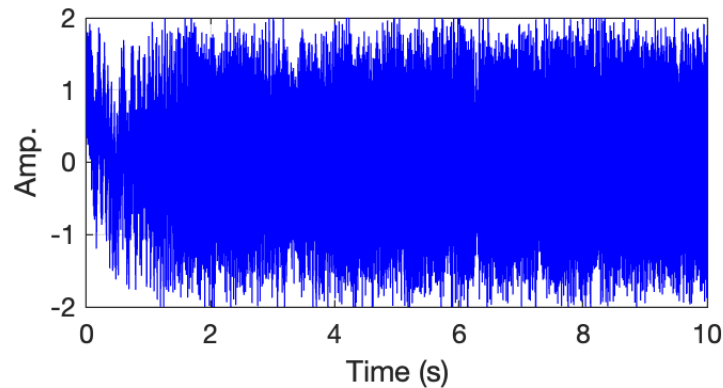


Señal con múltiples componentes

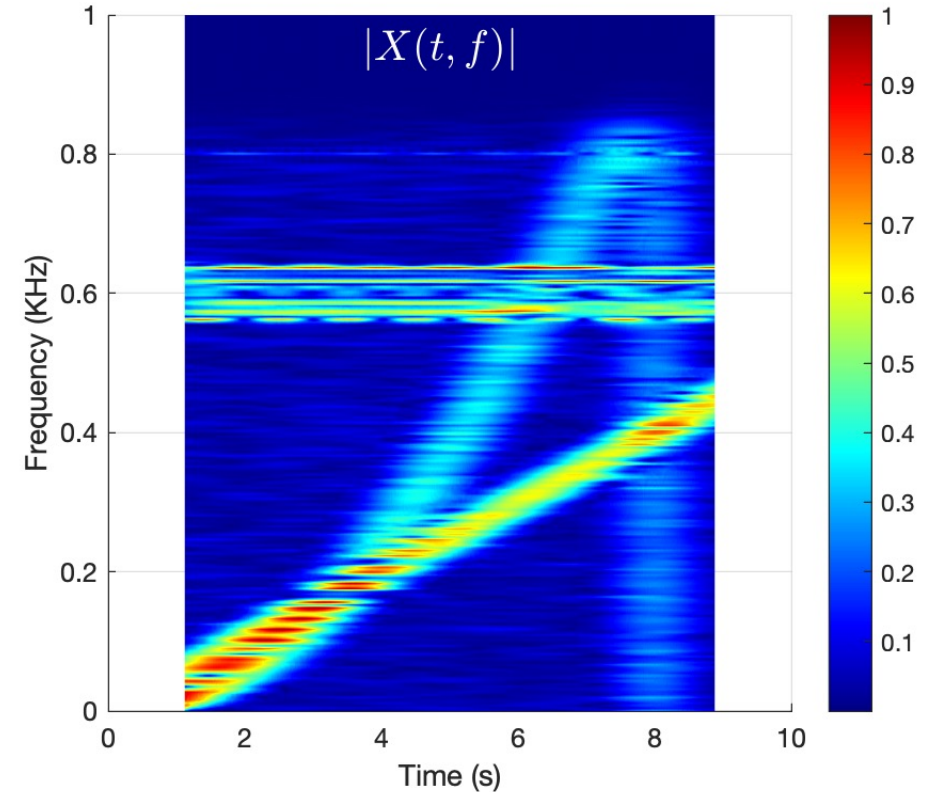


# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia

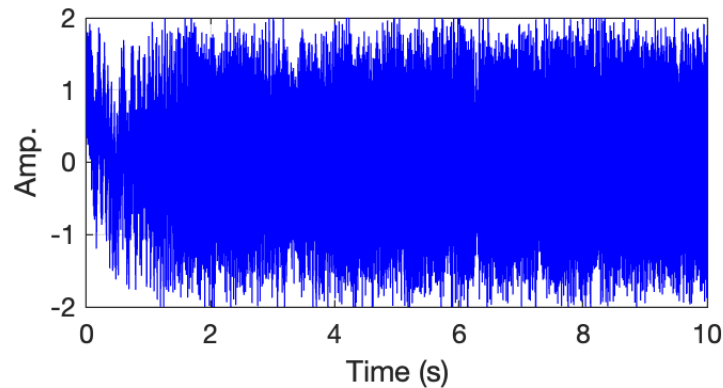


Señal con múltiples componentes

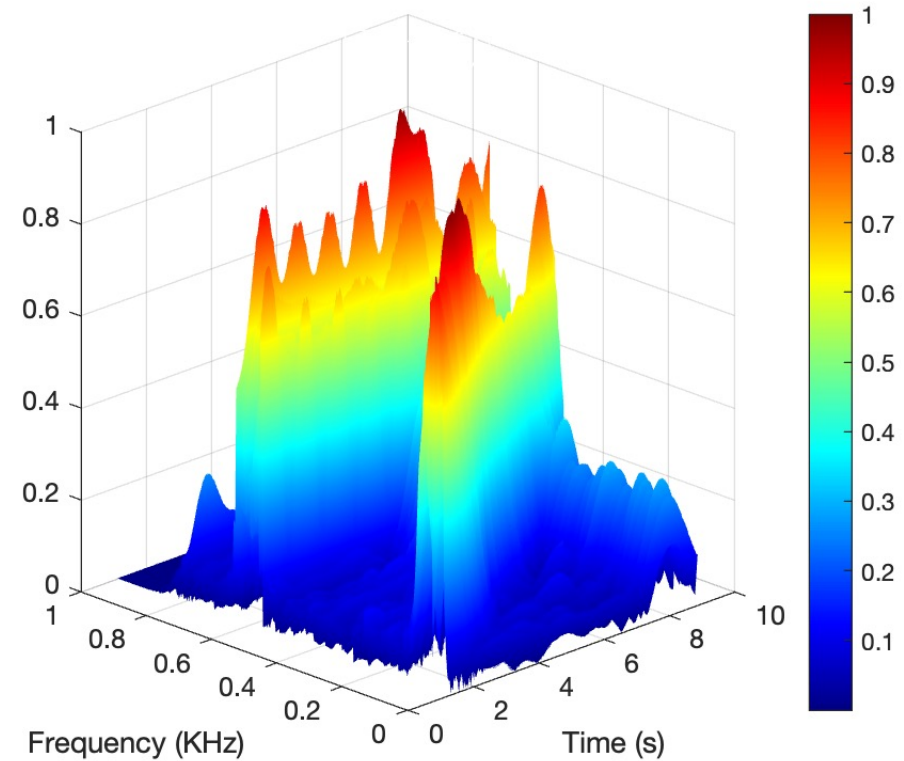


## 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



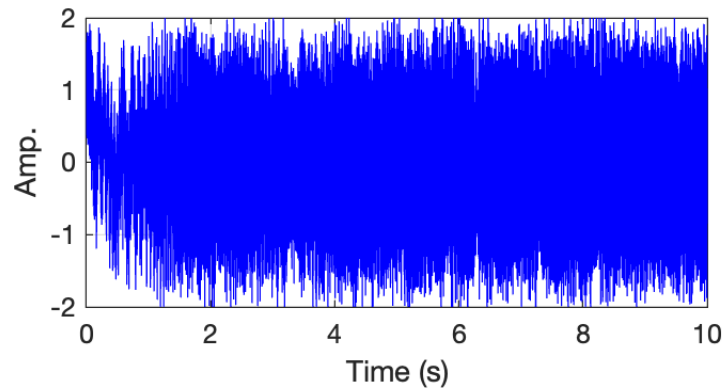
➤ Dominio tiempo-frecuencia



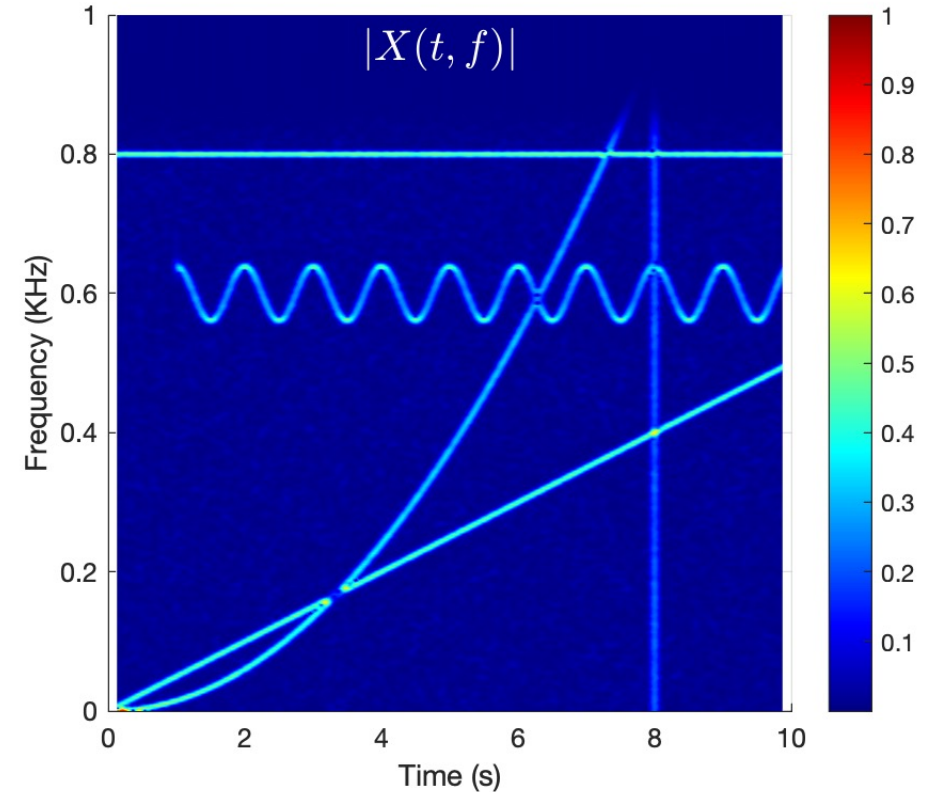
Señal con múltiples componentes

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



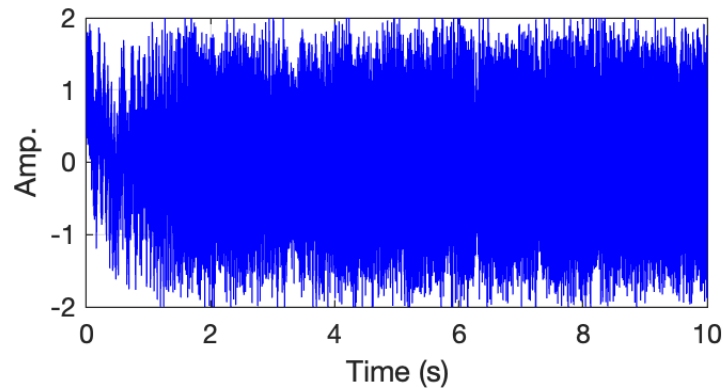
➤ Dominio tiempo-frecuencia



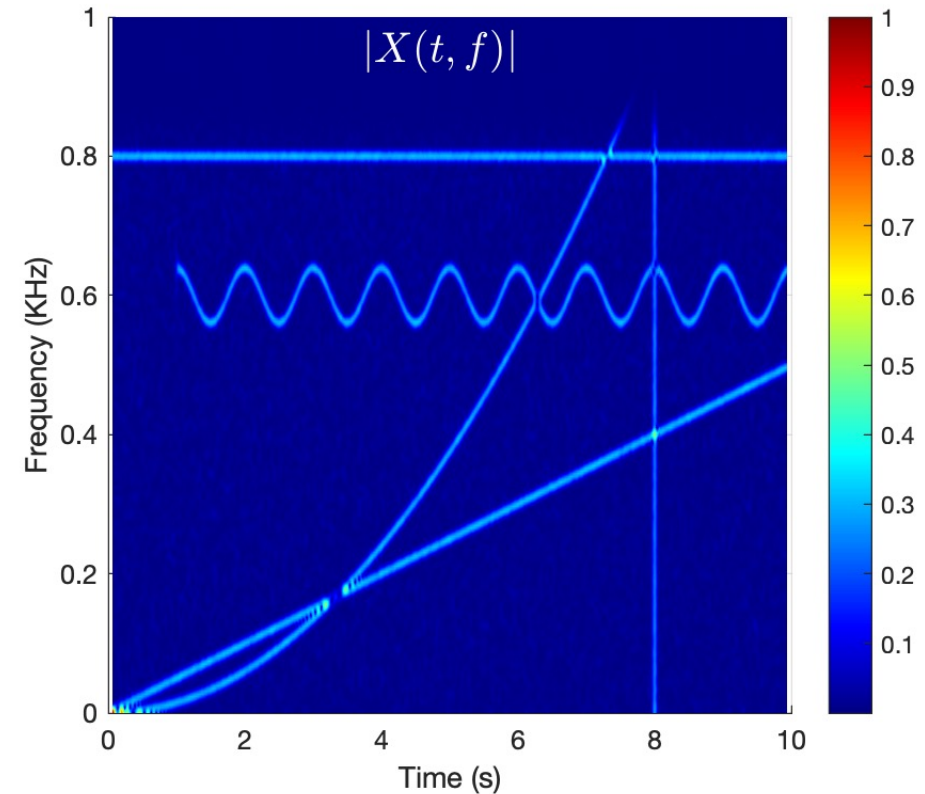
Señal con múltiples componentes

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



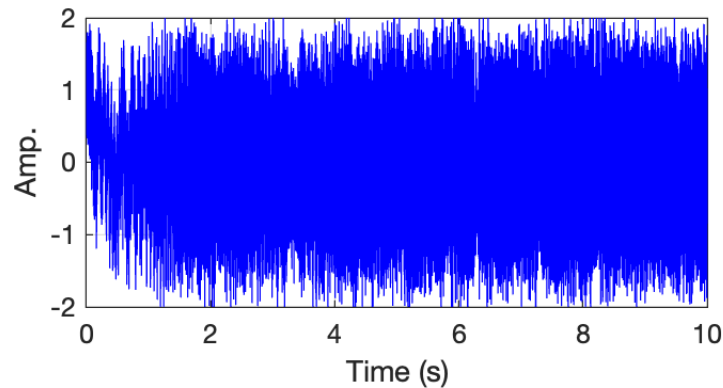
➤ Dominio tiempo-frecuencia



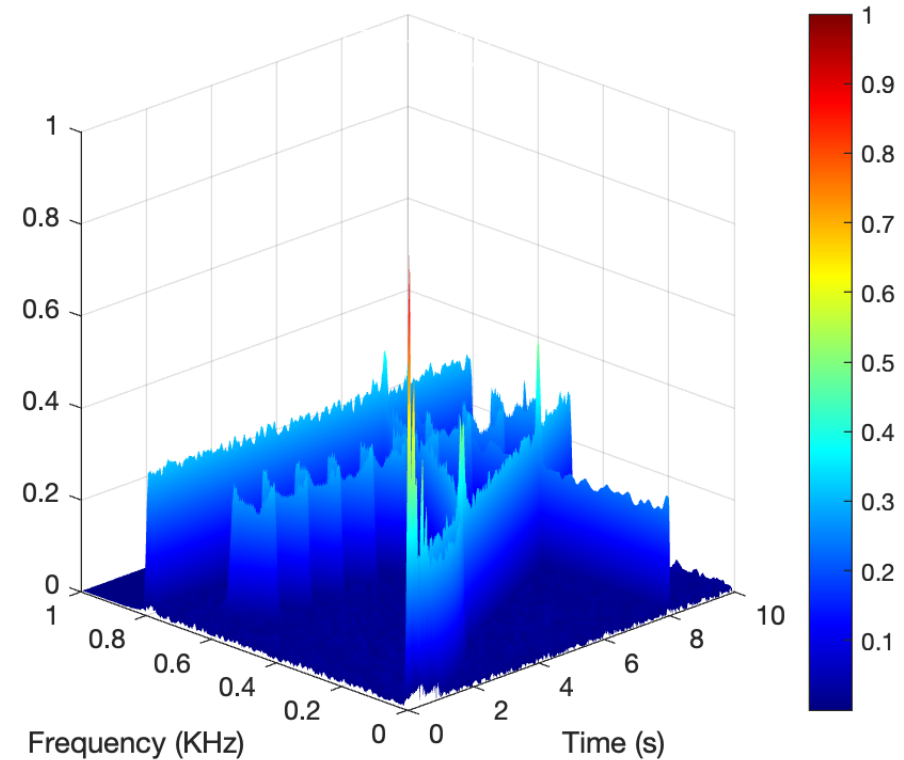
Señal con múltiples componentes

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



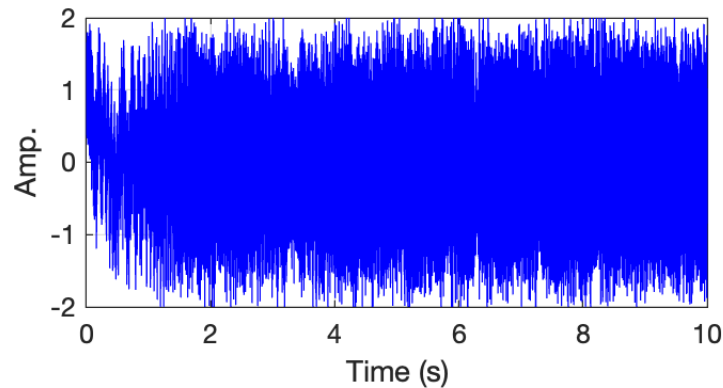
➤ Dominio tiempo-frecuencia



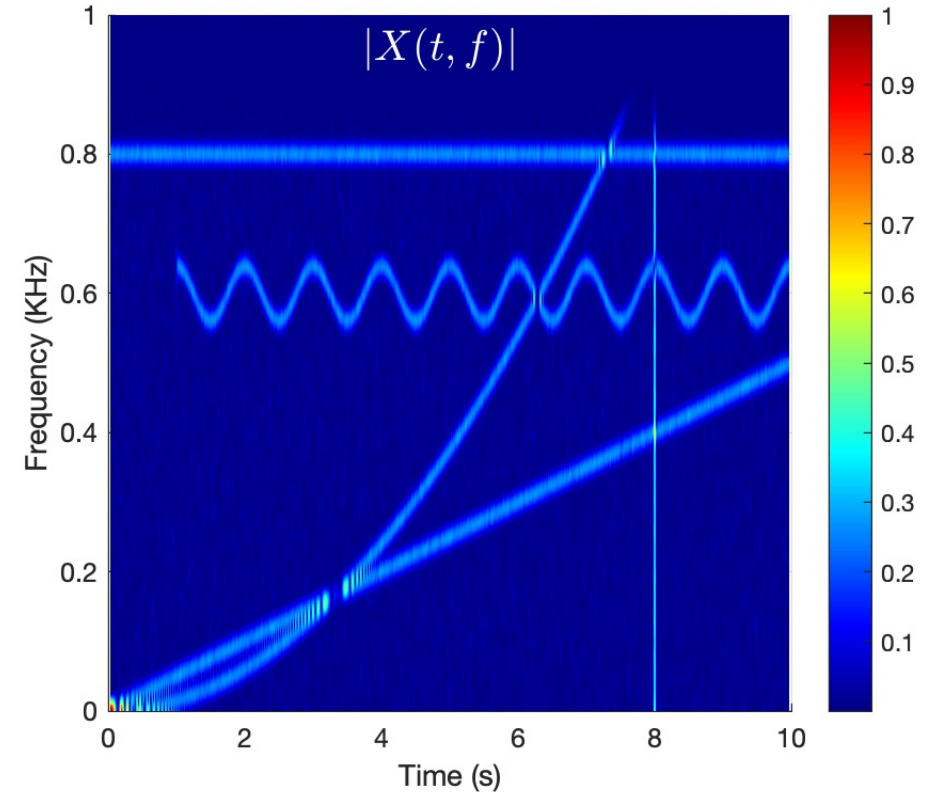
Señal con múltiples componentes

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



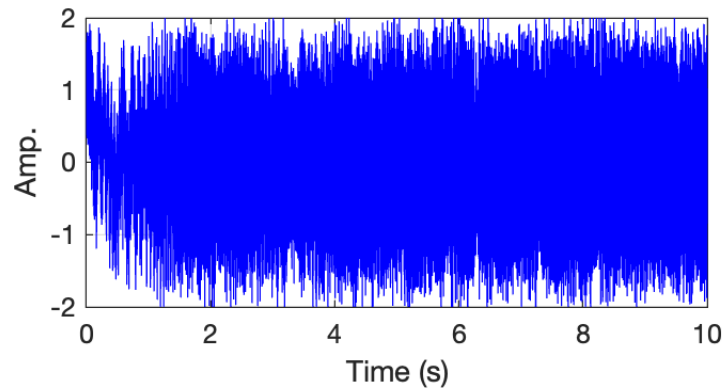
➤ Dominio tiempo-frecuencia



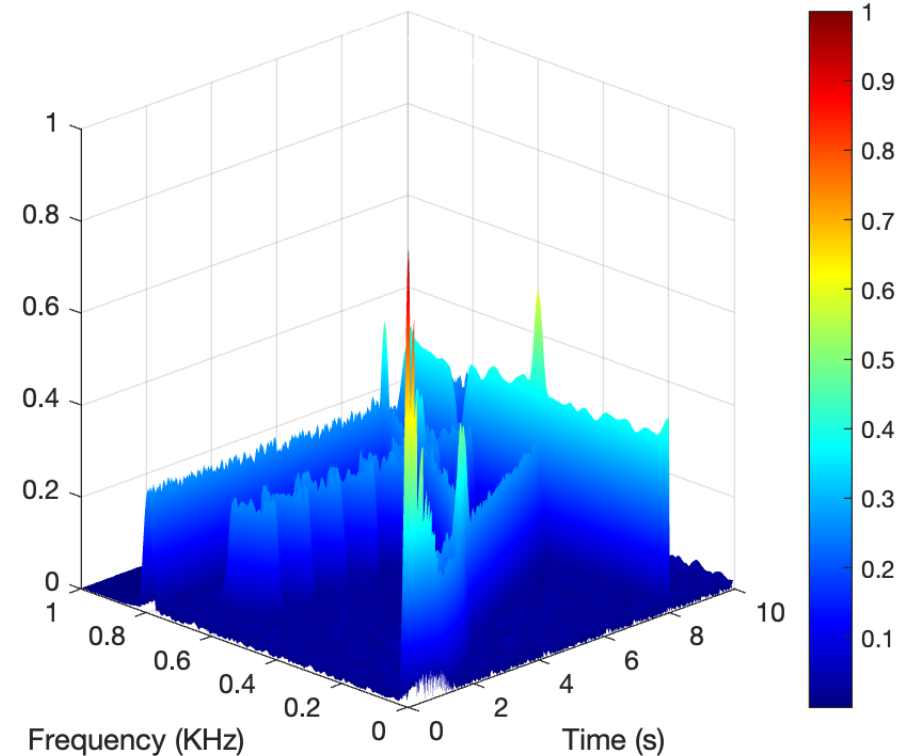
Señal con múltiples componentes

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



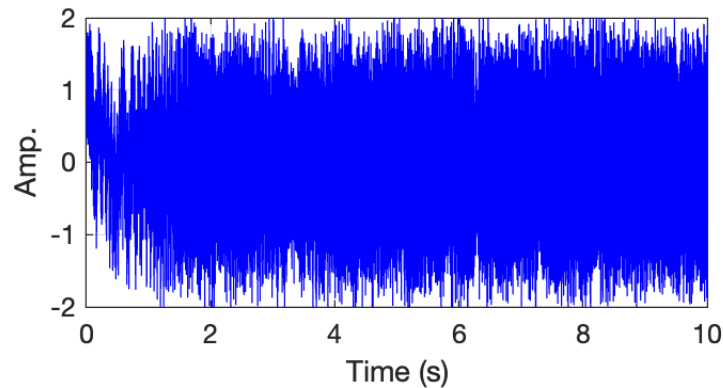
➤ Dominio tiempo-frecuencia



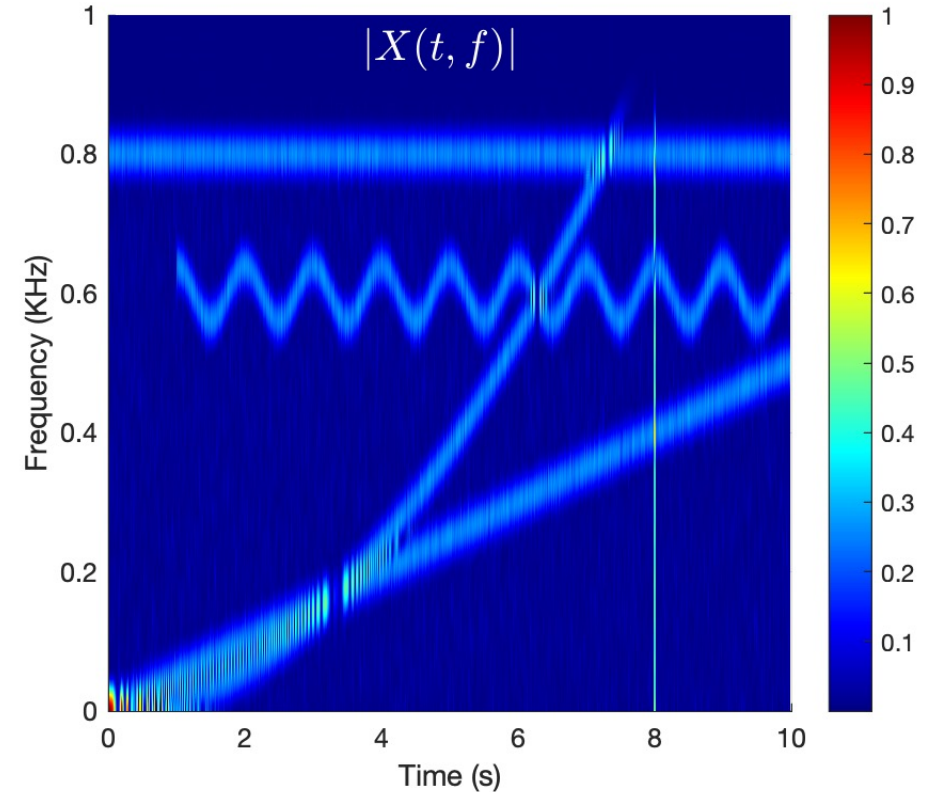
Señal con múltiples componentes

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



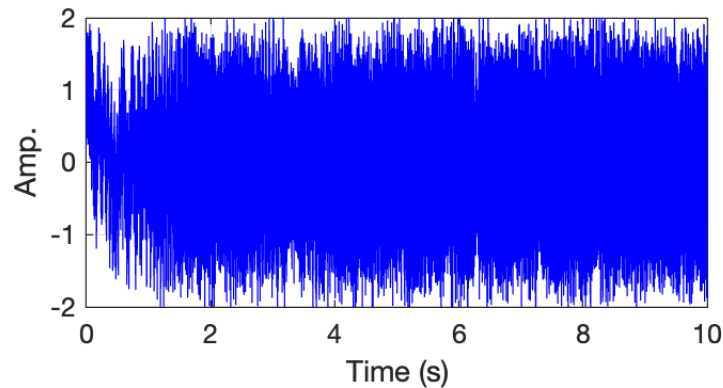
➤ Dominio tiempo-frecuencia



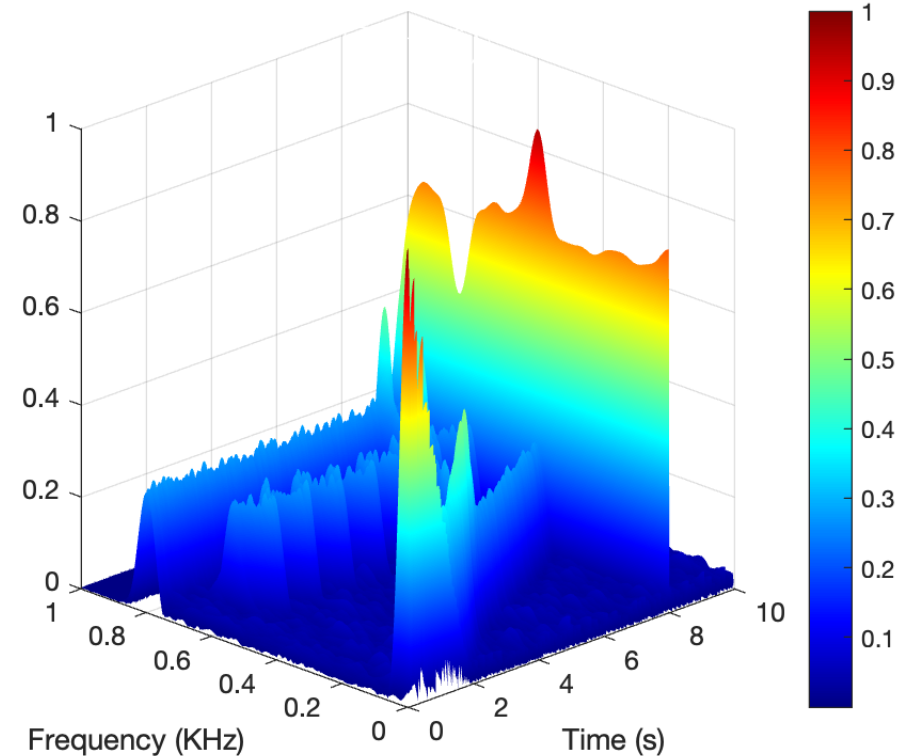
Señal con múltiples componentes

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia

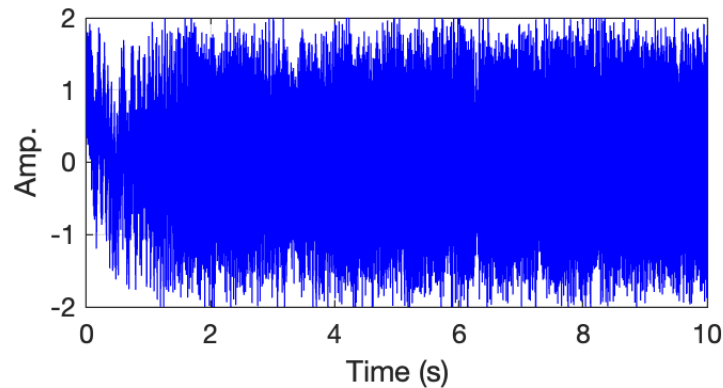


Señal con múltiples componentes

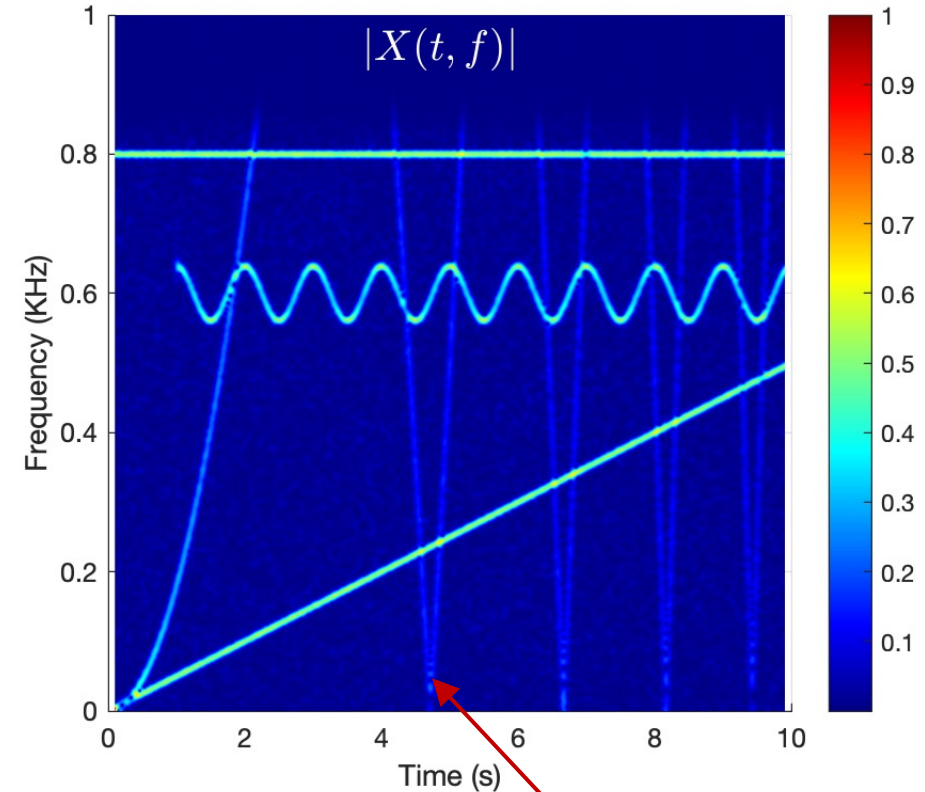


# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



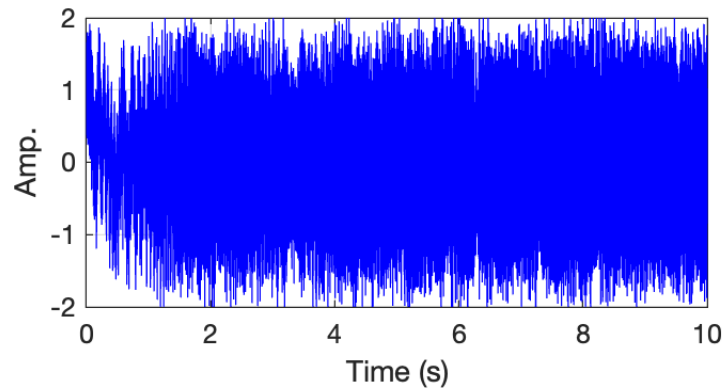
➤ Dominio tiempo-frecuencia



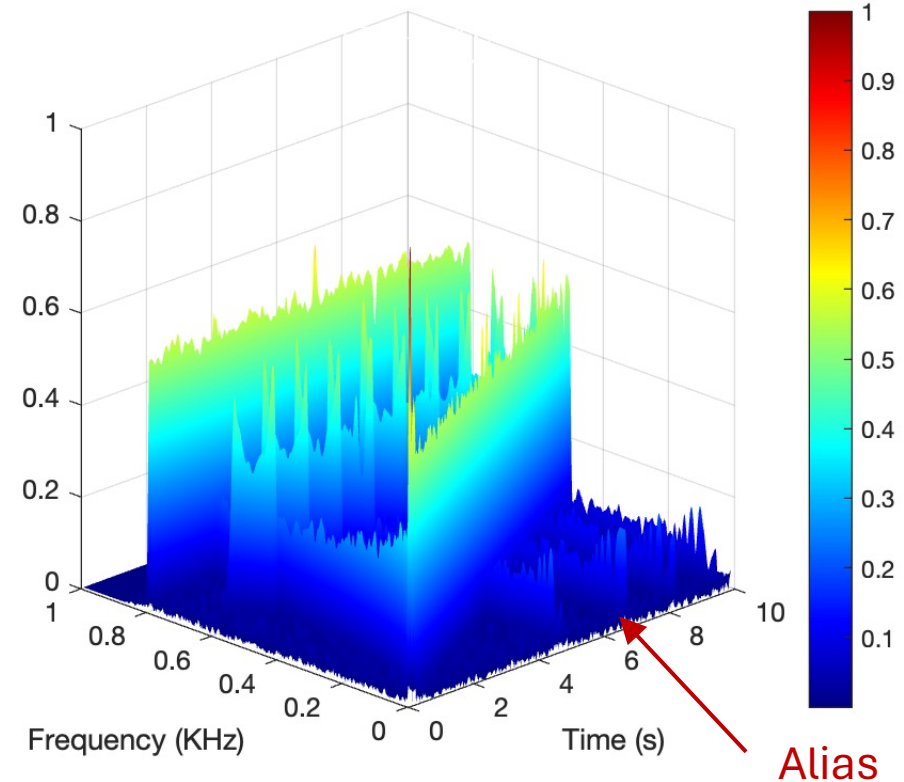
Señal con múltiples componentes

# 3.1. La DT STFT y la descomposición t-f

➤ Dominio frecuencia



➤ Dominio tiempo-frecuencia



Señal con múltiples componentes

## 3.2. Alcances y limitaciones de la STFT

---

El cálculo de la STFT :

- La señal se encuentre limitada en banda  $f$  y banda  $tf$
- La frecuencia de muestreo en  $t$  sea mayor a 2 veces el BW en frecuencia
- La frecuencia de muestreo en  $tf$  sea mayor a 2 veces el BW en  $tf$
- La señal sea periódica dentro de la ventana de tiempo corto
- Para que la STFT sea inversible,  $nfft$  debe ser igual a  $w$

## 3.2. Alcances y limitaciones de la STFT

---

### Implicaciones de las limitaciones:

- Ventana de análisis corta:

Las señales reales están limitadas en tiempo por lo que siempre existirá alteración adyacente en el espectro.

- Ventana de análisis larga

A mayor número de puntos, mayor es la velocidad de procesamiento requerida, mayor la cantidad de datos por segundo y menor la resolución en tiempo.

## 3.2. Alcances y limitaciones de la STFT

---

### Implicaciones de las limitaciones:

#### ➤ Dominio t-f discreto:

Si la señal original contiene una componente espectral que NO sea múltiplo exacto de  $f_s/n_{fft}$  y, además, múltiplo de  $tr/nw$ , se producirá el fenómeno de derrame. Esto producirá incertidumbre en la potencia estimada de esta componente y componentes vecinas.

# 4. Aplicaciones

---

# 4. Aplicaciones

---

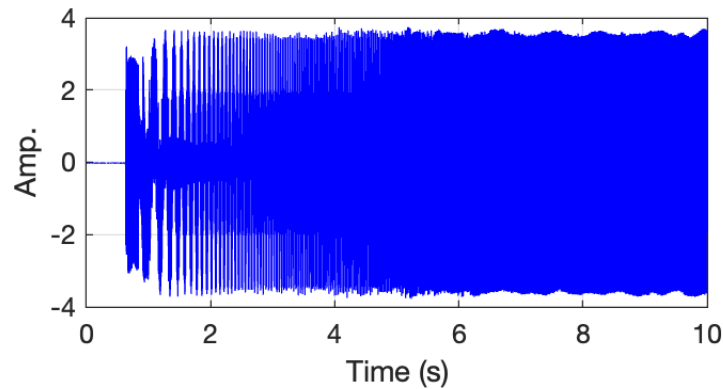
## 1. Análisis básico

De la carpeta: STFTscripts

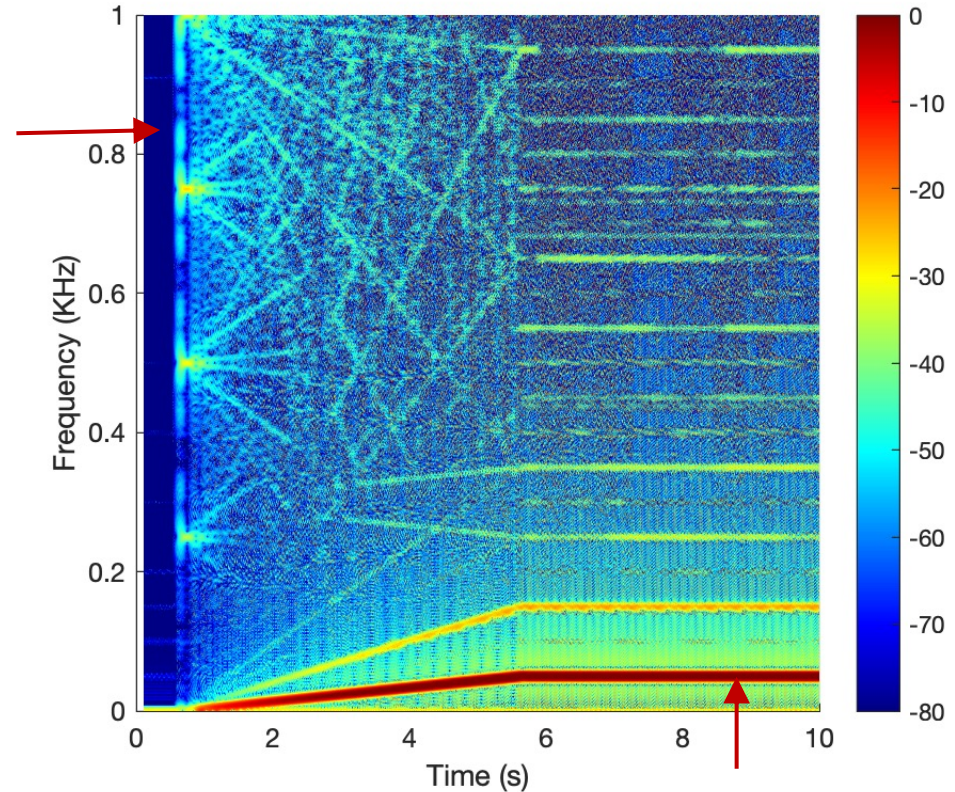
- Ejecute el script:
  - Ap1\_stft\_us

# 4. Aplicaciones

## ➤ Dominio frecuencia



## ➤ Dominio tiempo-frecuencia

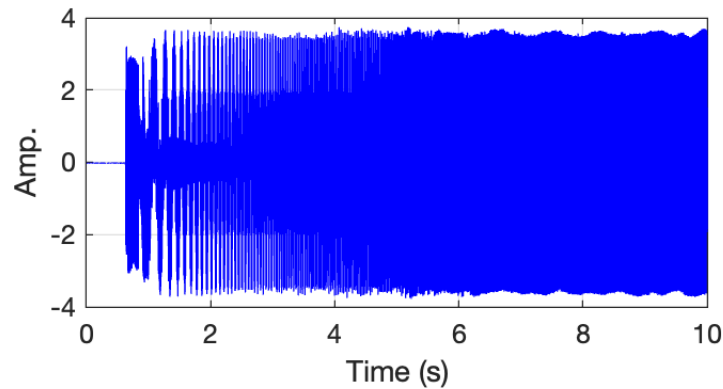


Voltaje de un motor alimentado por controlador PWM

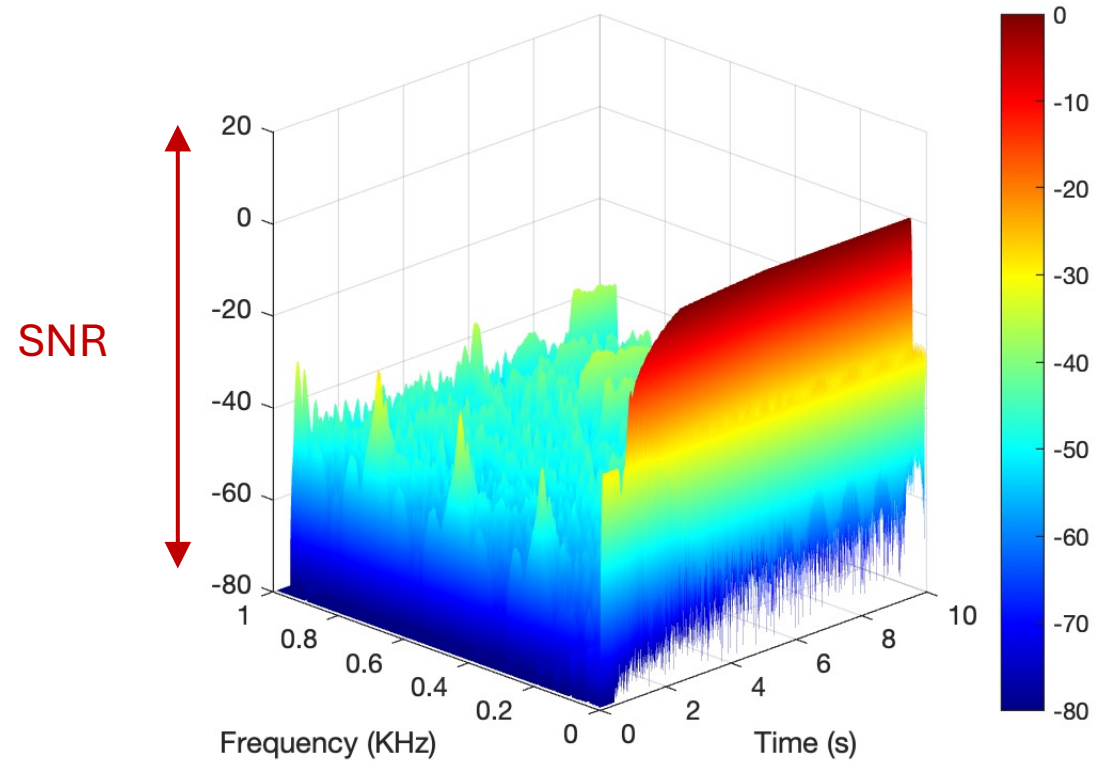


# 4. Aplicaciones

## ➤ Dominio frecuencia



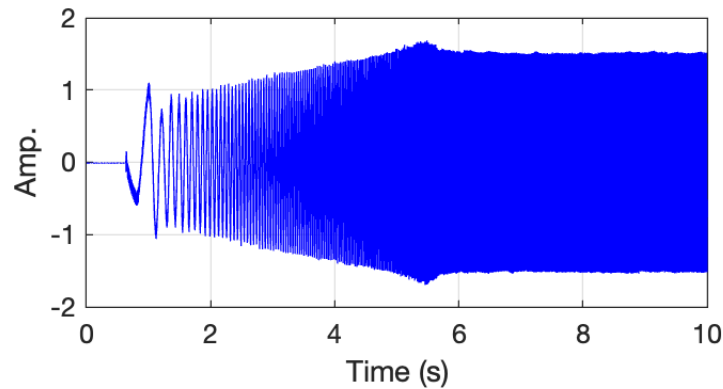
## ➤ Dominio tiempo-frecuencia



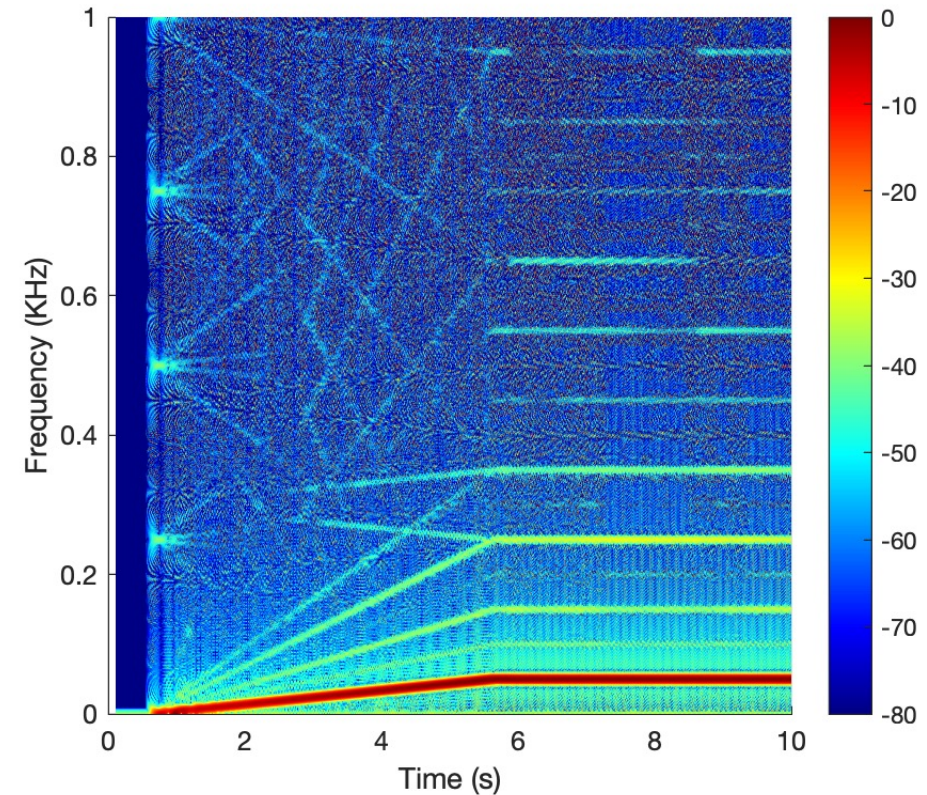
Voltaje de un motor alimentado por controlador PWM

# 4. Aplicaciones

## ➤ Dominio frecuencia



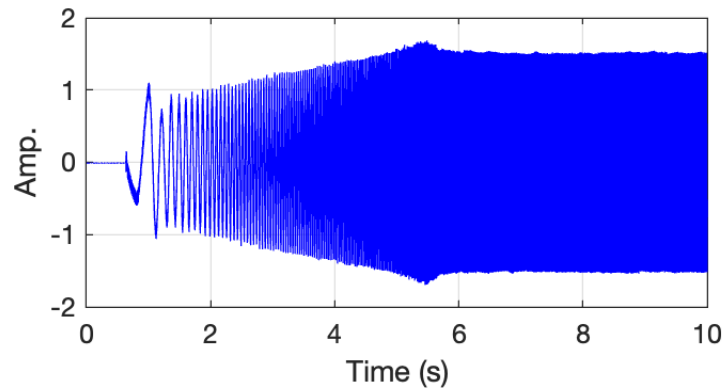
## ➤ Dominio tiempo-frecuencia



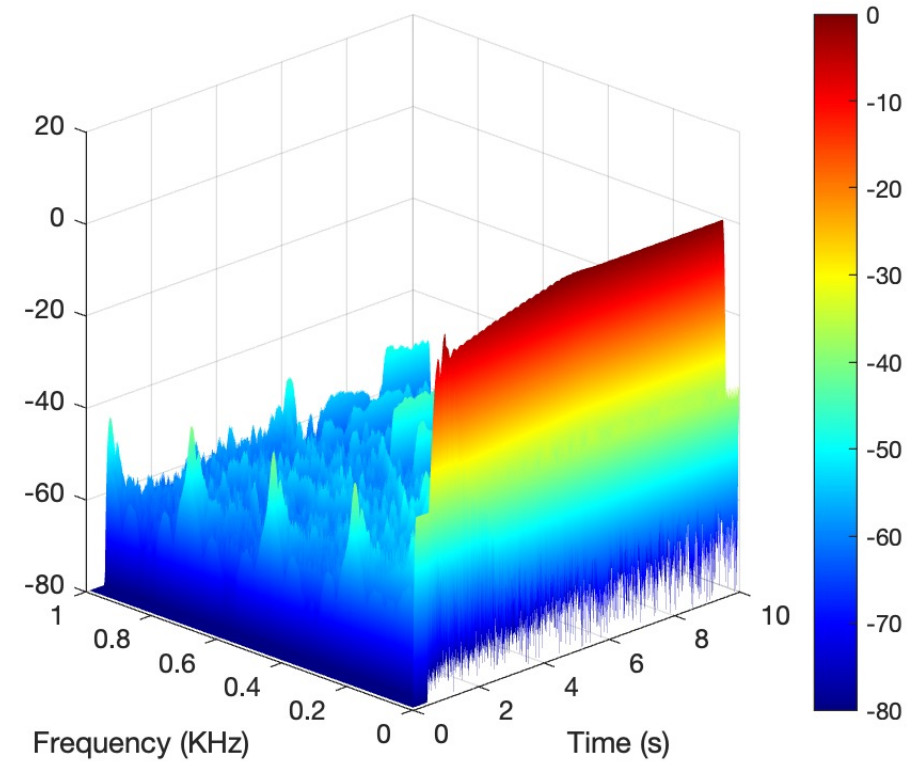
Corriente de un motor alimentado por controlador PWM

## 4. Aplicaciones

### ➤ Dominio frecuencia



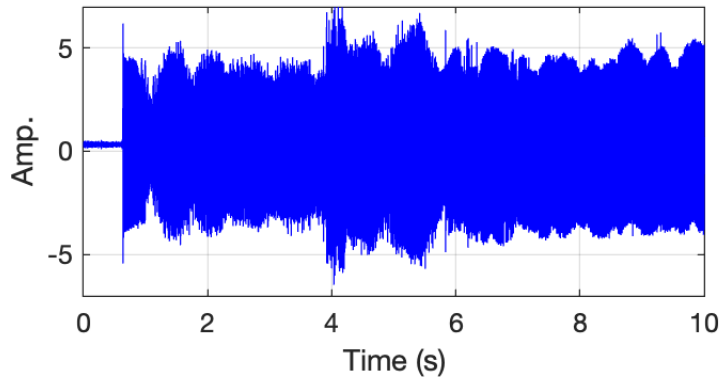
### ➤ Dominio tiempo-frecuencia



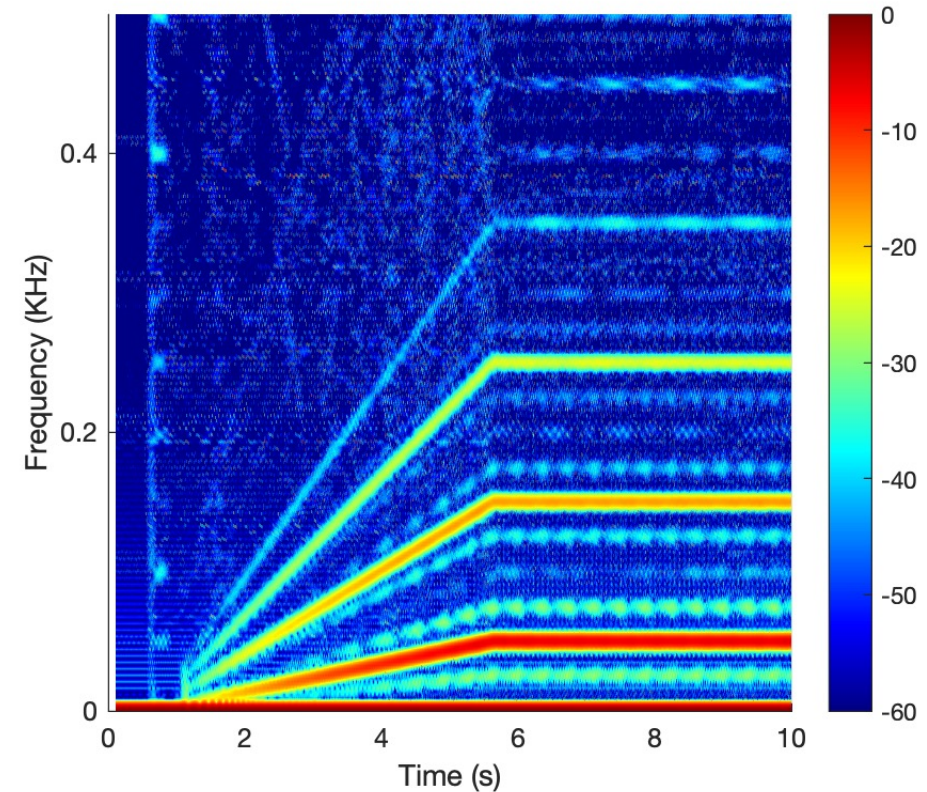
Corriente de un motor alimentado por controlador PWM

# 4. Aplicaciones

## ➤ Dominio frecuencia



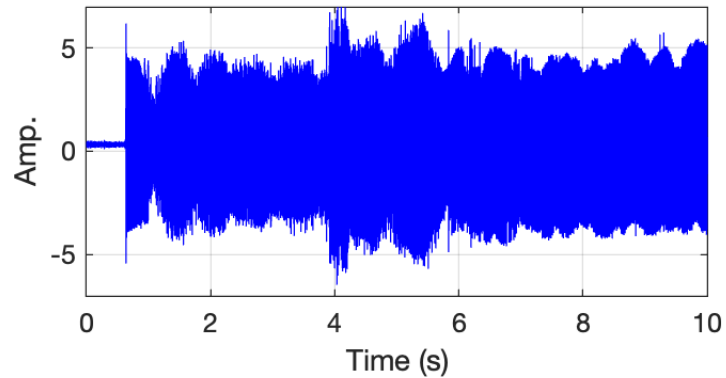
## ➤ Dominio tiempo-frecuencia



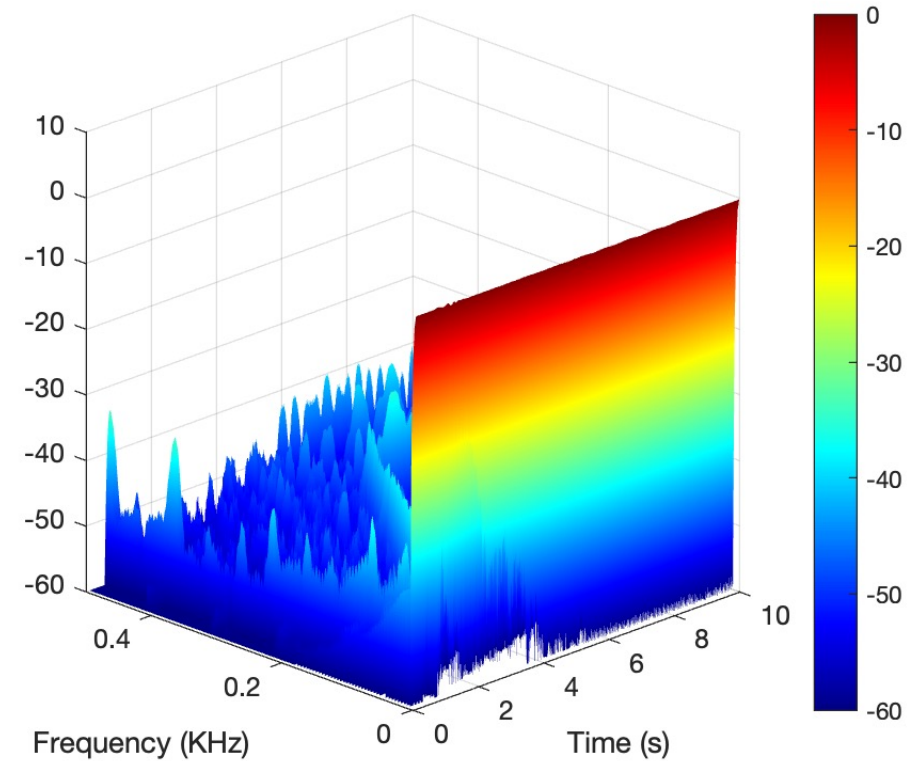
Flujo de un motor alimentado por controlador PWM

# 4. Aplicaciones

## ➤ Dominio frecuencia



## ➤ Dominio tiempo-frecuencia



Flujo de un motor alimentado por controlador PWM



# 5. Conclusiones

---

- El análisis en el dominio tiempo frecuencia permite extraer propiedades y parámetros de una señal no estacionaria que no son evidentes cuando la señal se analiza en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia.
- Sin embargo, este método de análisis tiene problemas tales como el derrame de densidad en dos direcciones, e incertidumbre en la estimación en la frecuencia.

# Como evitar o disminuir los problemas de la STFT:

---

- Leakage
  - Remuestreo
- Incertidumbre en la estimación de frecuencia
  - Técnicas paramétricas
- Otros métodos de análisis modernos



---

**Universidad de Valladolid**



Muchas gracias por su atención

Junio 2024