



Escuela de Doctorado Universidad de Valladolid



Universidad de Valladolid

Introducción al análisis espectral de señales

Parte 1: Introducción al análisis espectral estacionario mediante la FFT

Dr. René de Jesús Romero Troncoso
Universidad Autónoma de Querétaro – México



Junio 2024

Contenido

- ▶ 1 Introducción al análisis espectral
- ▶ 2 La transformada discreta de Fourier
- ▶ 3 Alcances y limitaciones
- ▶ 4 Ejemplos prácticos
- ▶ 5 Conclusiones

1 Introducción al análisis espectral

- ▶ 1.1 Señales en tiempo continuo
- ▶ 1.2 Parámetros característicos de las señales en el dominio del tiempo
- ▶ 1.3 La transformada de Fourier y el espectro de una señal
- ▶ 1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia
- ▶ 1.5 Consideraciones prácticas sobre las señales reales

1.1 Señales en tiempo continuo

- ▶ **Análisis matemático:**
- ▶ Herramienta matemática que nos permite estudiar las características y propiedades de las funciones y relaciones
 - ▶ Las señales se tratan como funciones
 - ▶ El tiempo es la variable independiente
 - ▶ Las señales tienen propiedades y parámetros característicos

1.2 Parámetros característicos de las señales en el dominio del tiempo

▶ Propiedades:

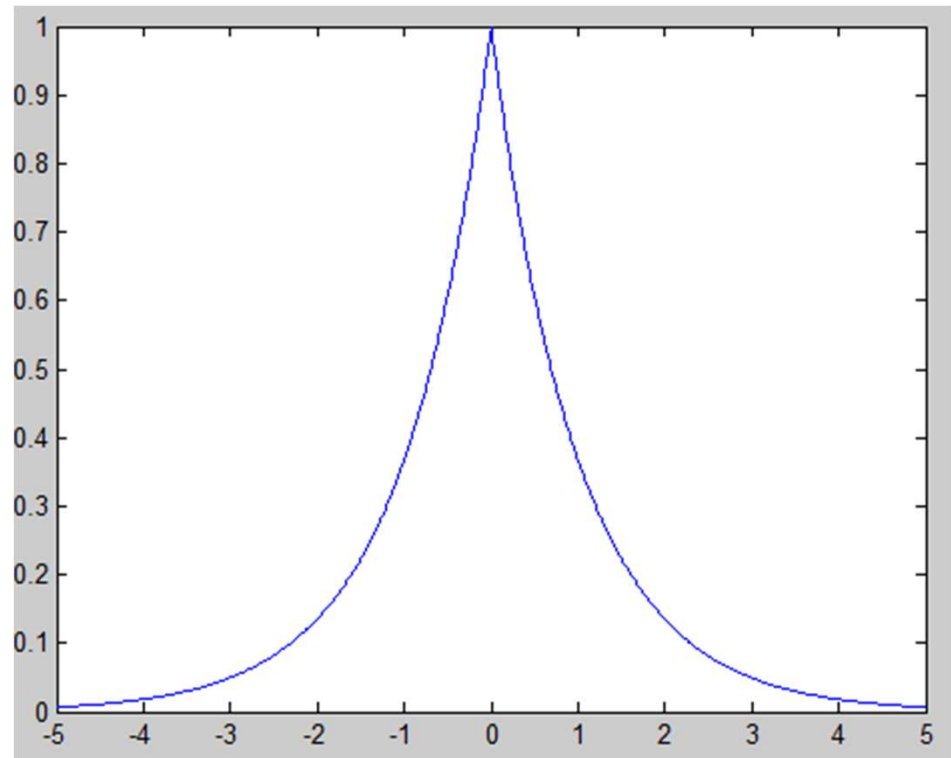
- ▶ Continuidad
- ▶ Periodicidad
- ▶ Simetría
- ▶ Acotamiento
- ▶ Monotonía
- ▶ Derivable
- ▶ Integrable
- ▶ Estacionaria
- ▶ Aleatoria

▶ Parámetros:

- ▶ Valor medio
- ▶ Valor medio cuadrático
- ▶ Valores pico
- ▶ Transitorios
- ▶ Distorsiones

Ejemplo

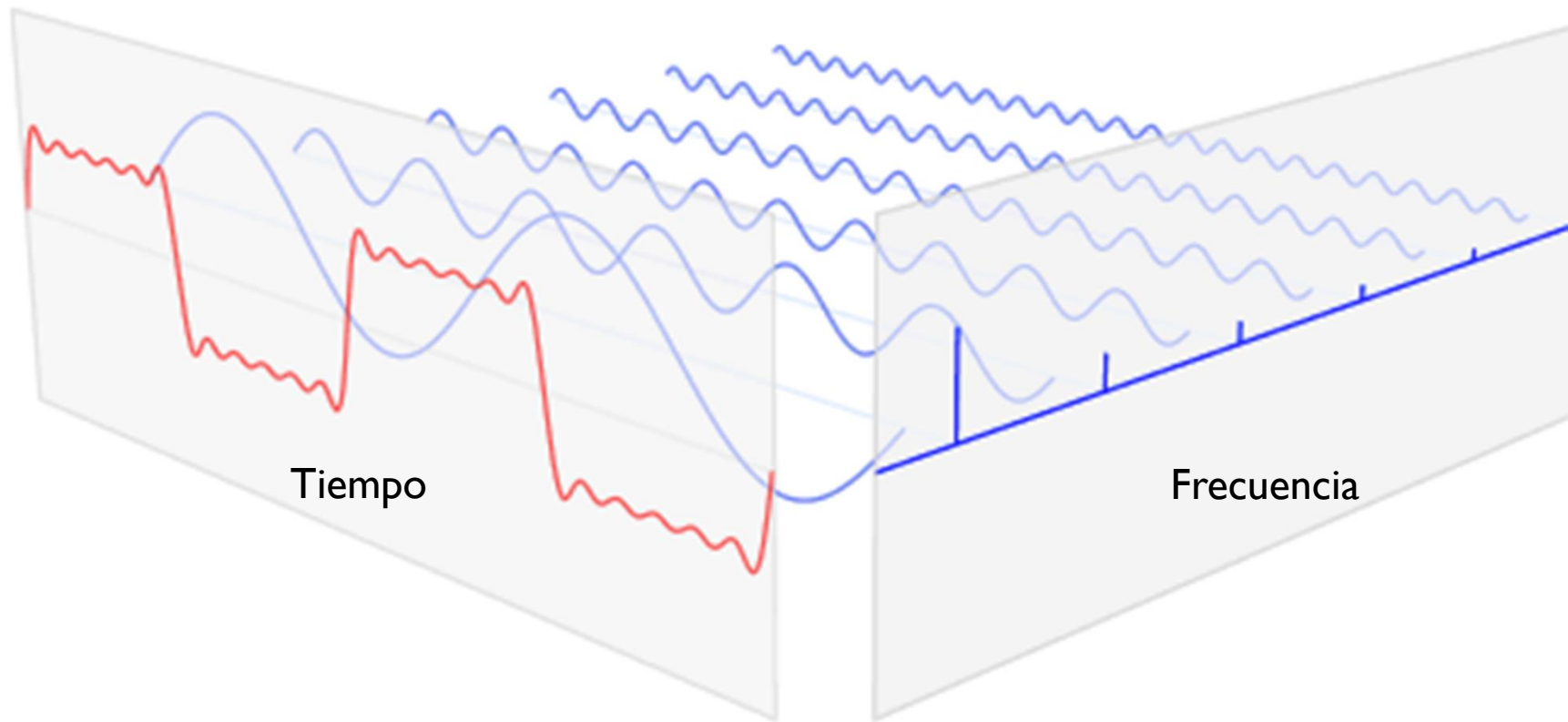
- ▶ Propiedades:
- ▶ Continua
- ▶ Aperiódica
- ▶ Simetría par
- ▶ Acotada
- ▶ No monótona
- ▶ Derivable
- ▶ Integrable
- ▶ Estacionaria
- ▶ Analítica



$$x(t) = e^{-|t|}$$

1.3 La transformada de Fourier y el espectro de una señal

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$



Definición y principales propiedades

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} x(t) dt$$

► Lineal

► Reversible

Espectro de amplitud: $|X(f)|$

► Escalable

► Desplazable

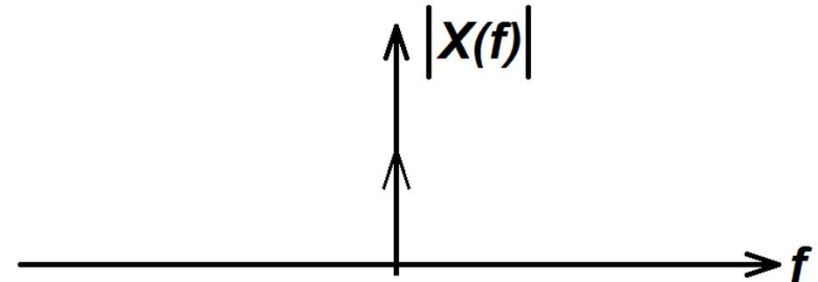
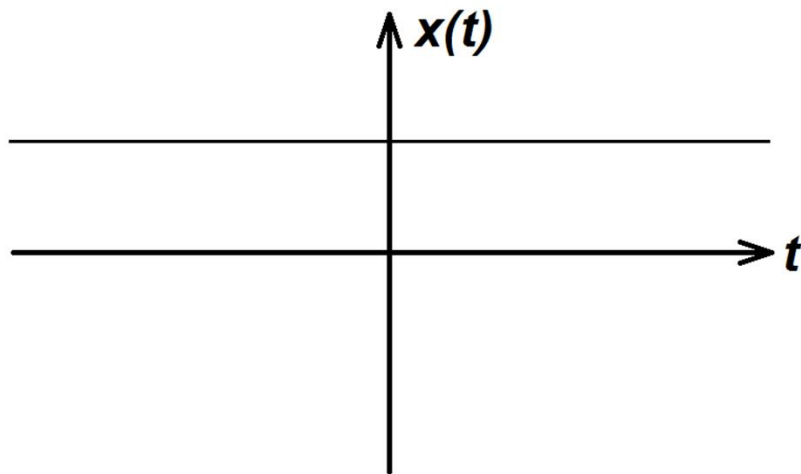
La transformada de Fourier
se considera un método
clásico de análisis de señales

► Dual



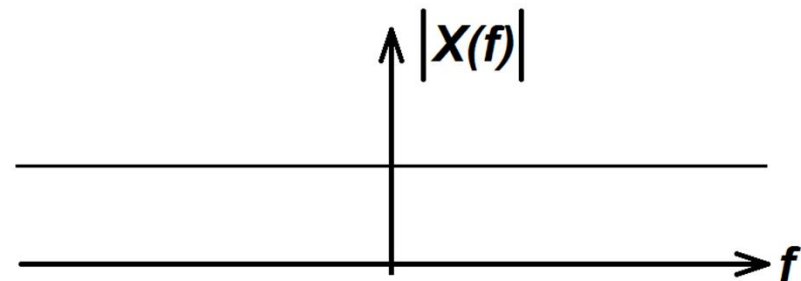
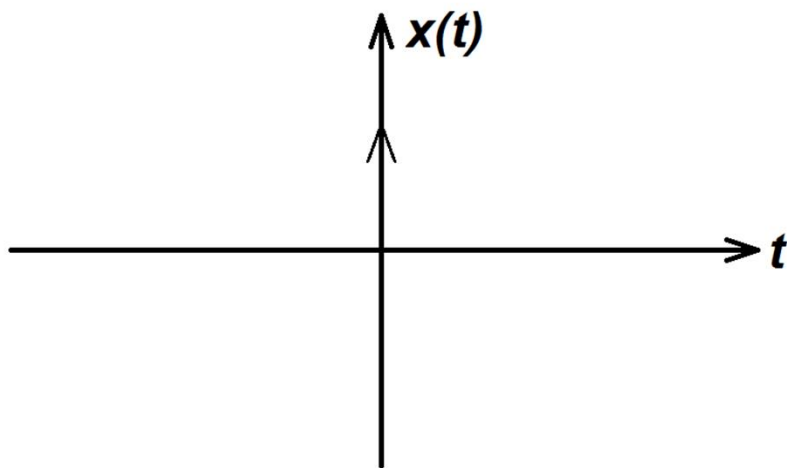
1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia

- ▶ Señal en tiempo
- ▶ DC continua
- ▶ Transformada de Fourier
- ▶ Impulso en frecuencia cero



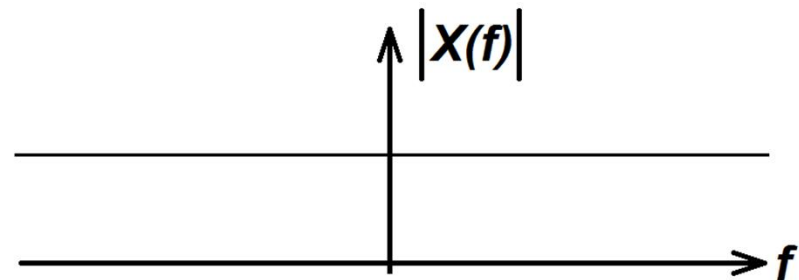
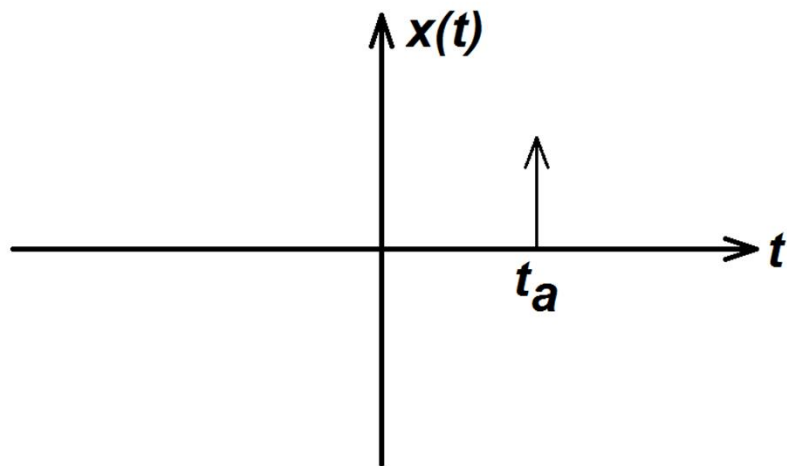
1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia

- ▶ Señal en tiempo
- ▶ Transformada de Fourier
- ▶ Impulso en tiempo cero
- ▶ Continua



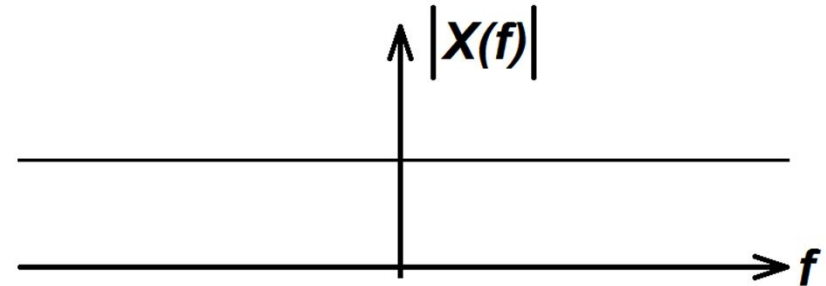
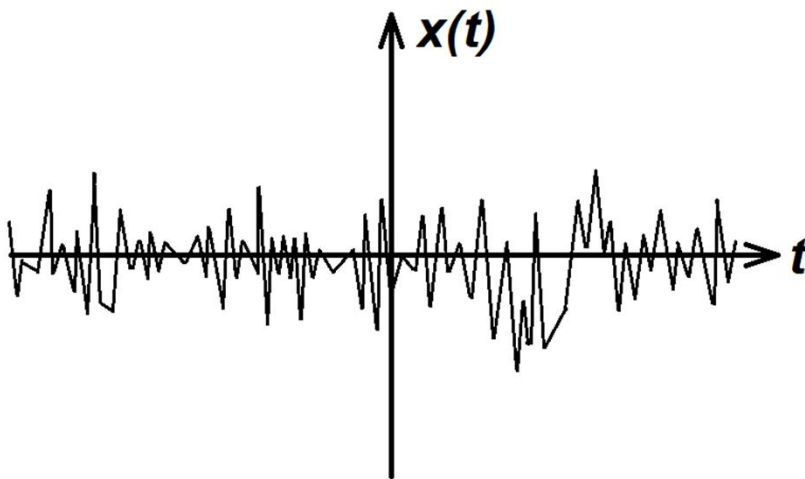
1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia

- ▶ Señal en tiempo
- ▶ Transformada de Fourier
- ▶ Impulso en tiempo t_a
- ▶ Continua



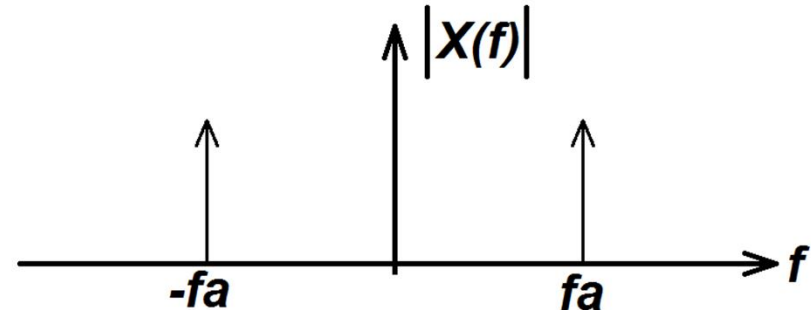
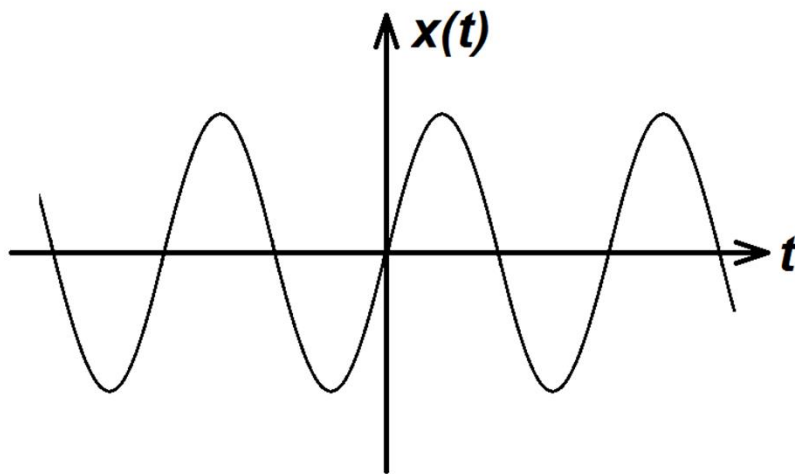
1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia

- ▶ Señal en tiempo
- ▶ Transformada de Fourier
- ▶ Ruido blanco gaussiano
- ▶ Continua



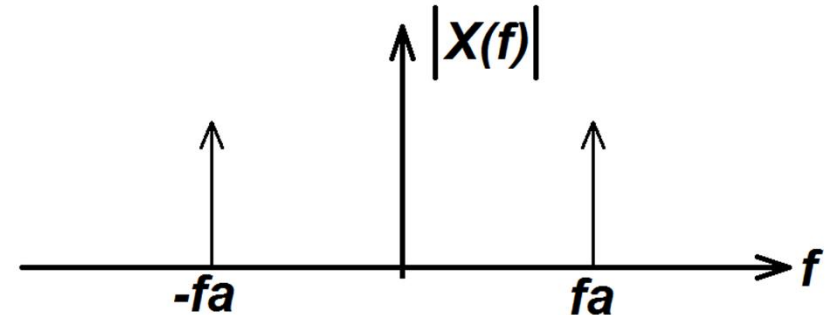
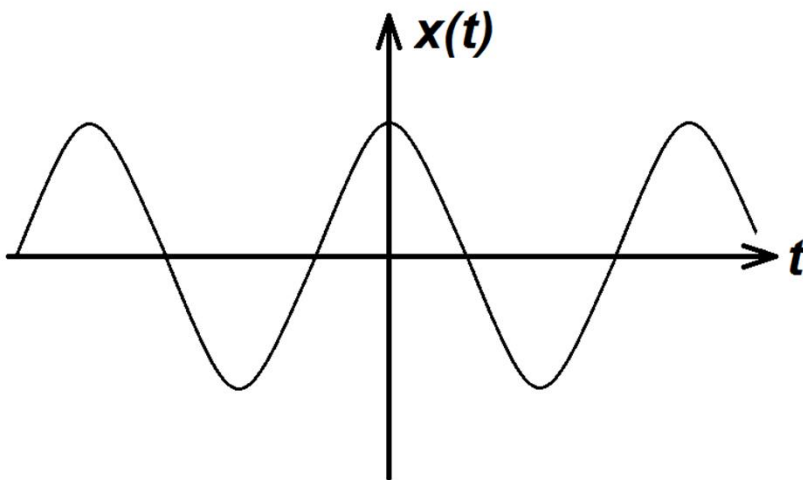
1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia

- ▶ Señal en tiempo
- ▶ Transformada de Fourier
- ▶ Seno con frecuencia f_a
- ▶ Impulso en f_a



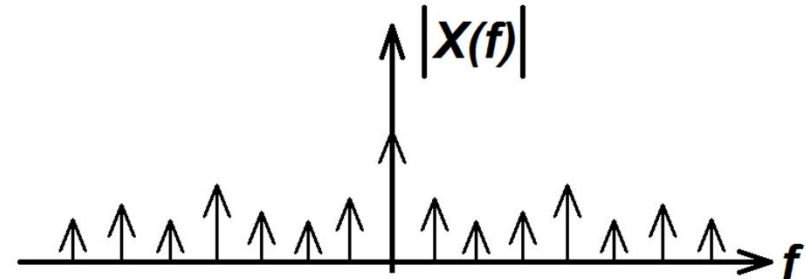
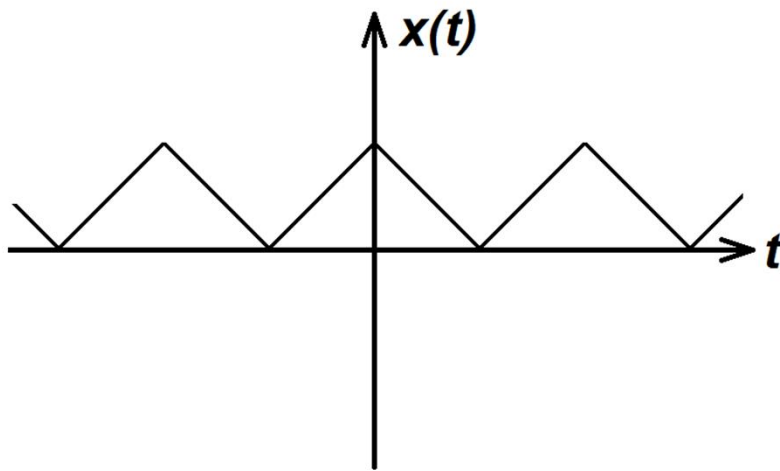
1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia

- ▶ Señal en tiempo
- ▶ Transformada de Fourier
- ▶ Coseno con frecuencia f_a
- ▶ Impulso en f_a



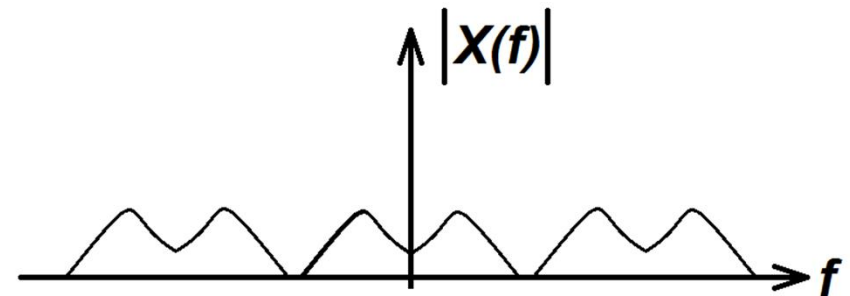
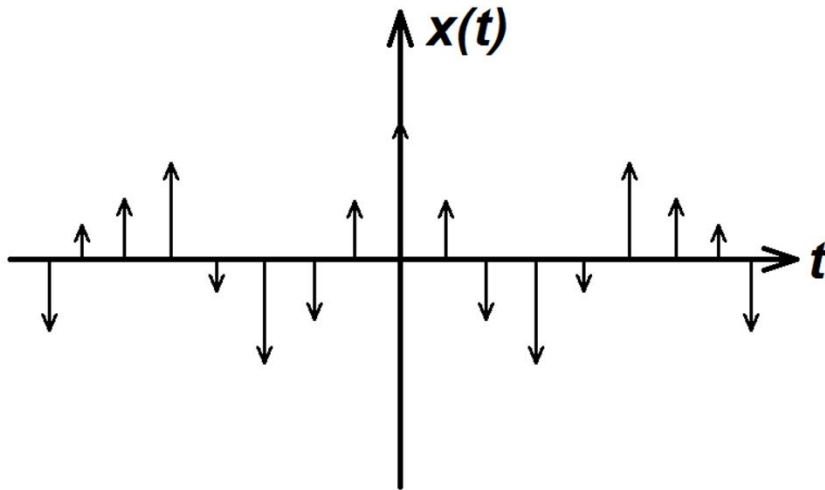
1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia

- ▶ Señal en tiempo
- ▶ Señal periódica
- ▶ Transformada de Fourier
- ▶ Discreto



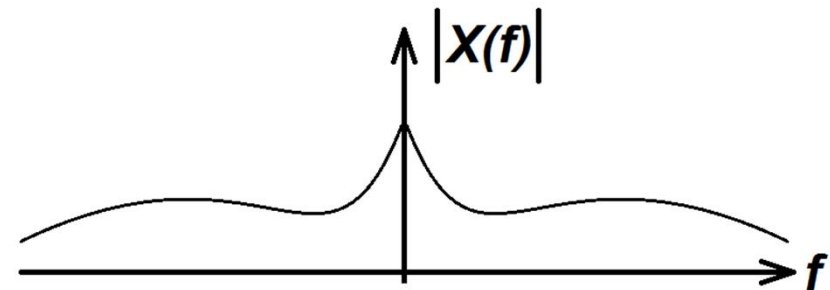
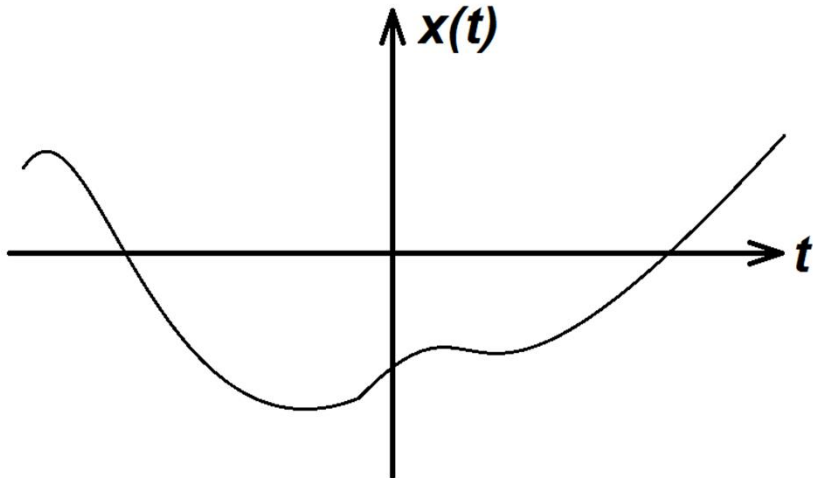
1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia

- ▶ Señal en tiempo
- ▶ Discreta
- ▶ Transformada de Fourier
- ▶ Espectro periódico



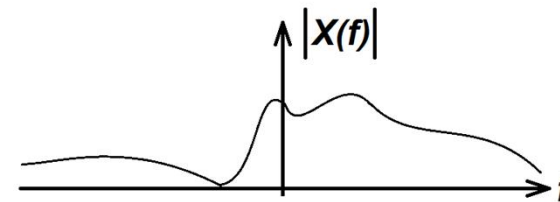
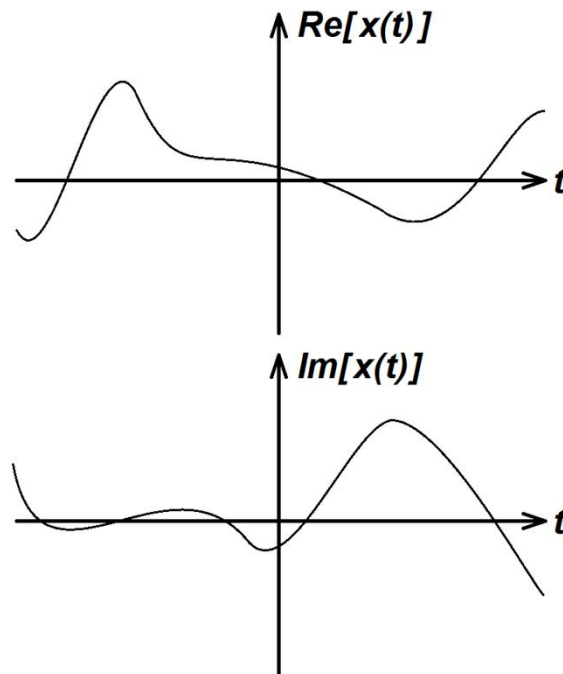
1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia

- ▶ Señal en tiempo
- ▶ Transformada de Fourier
- ▶ Real
- ▶ Espectro simétrico



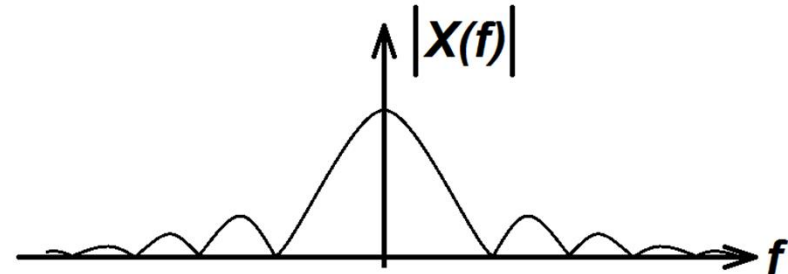
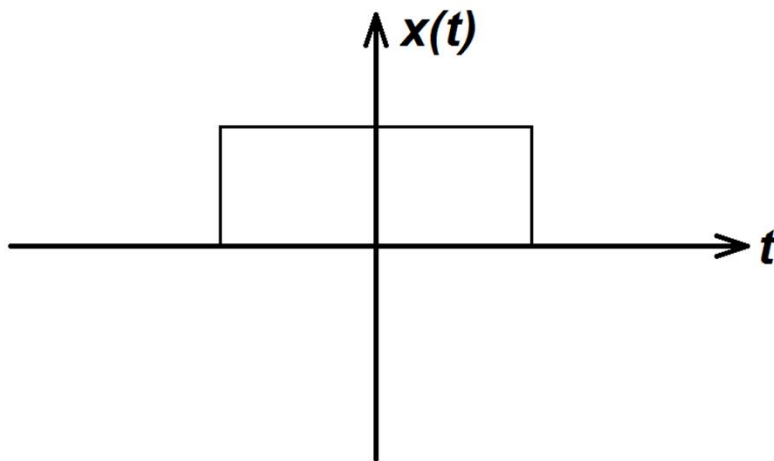
1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia

- ▶ Señal en tiempo
- ▶ Compleja
- ▶ Transformada de Fourier
- ▶ Espectro asimétrico



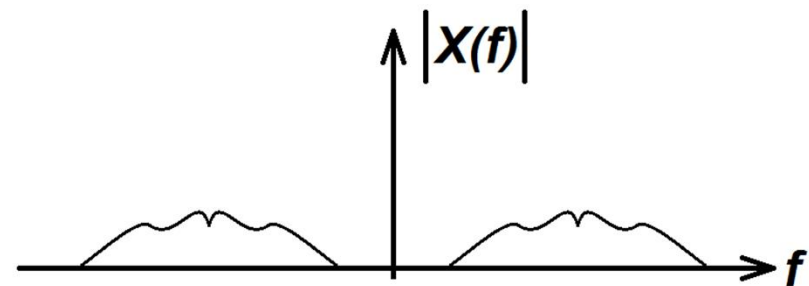
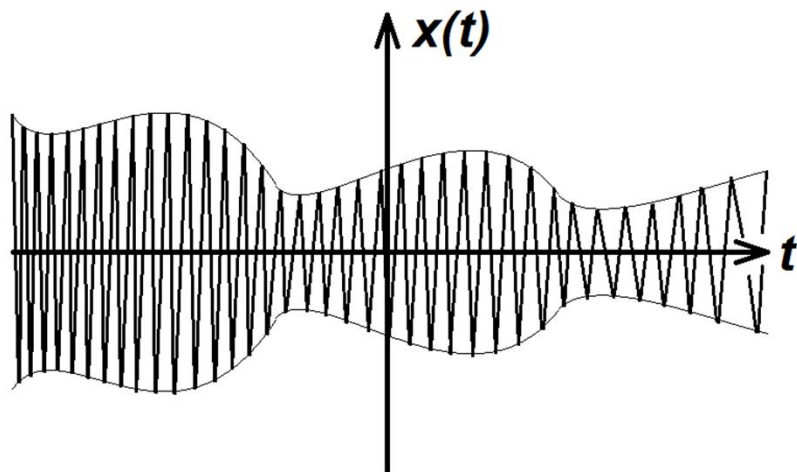
1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia

- ▶ Señal en tiempo
- ▶ Transformada de Fourier
- ▶ Pulso
- ▶ Senc continua



1.4 Parámetros característicos de las señales en el dominio de la frecuencia

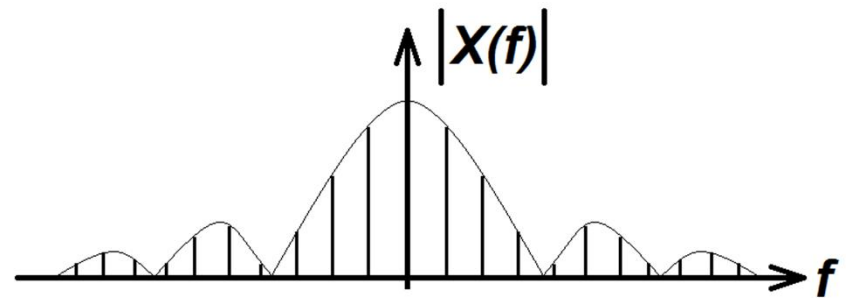
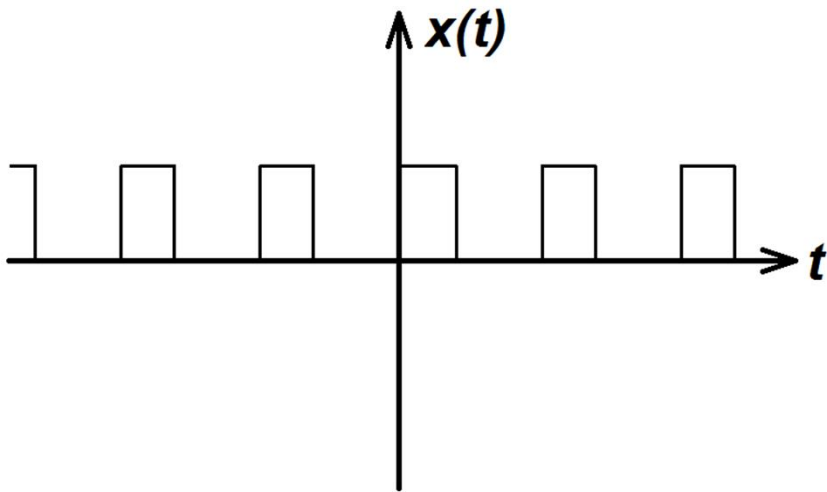
- ▶ Señal en tiempo
- ▶ Transformada de Fourier
- ▶ Modulación
- ▶ Desplazamiento en frecuencia



Ejemplo

► Onda cuadrada

► Senc discreta



1.5 Consideraciones prácticas sobre las señales reales

- ▶ Idealmente
- ▶ Mundo real
- ▶ Analíticas
- ▶ Estacionarias
- ▶ Determinísticas
- ▶ Acotadas
- ▶ Limitadas en banda
- ▶ Libres de espurios
- ▶ No correlacionadas

1.5 Consideraciones prácticas sobre las señales reales

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| ▶ Idealmente | ▶ Mundo real |
| ▶ Analíticas | ▶ No analíticas |
| ▶ Estacionarias | ▶ No estacionarias |
| ▶ Determinísticas | ▶ Aleatorias |
| ▶ Acotadas | ▶ Limitadas (no acotadas) |
| ▶ Limitadas en banda | ▶ Banda amplia |
| ▶ Libres de espurios | ▶ Transitorios |
| ▶ No correlacionadas | ▶ Correlacionadas |

2 La transformada discreta de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} x(t) dt$$

Transformada continua de Fourier

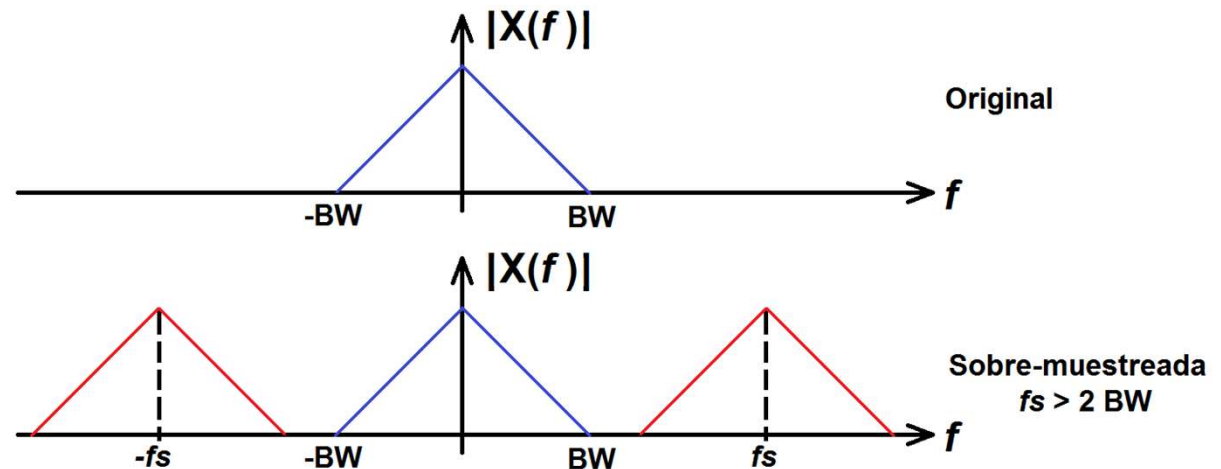


2 La transformada discreta de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} x(t) dt$$

Transformada continua de Fourier

Si la señal $x(t)$ está limitada en banda, se puede discretizar con $f_s > 2BW$



2 La transformada discreta de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} x(t) dt$$

Transformada continua de Fourier

Transformada discreta de Fourier

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nk} x(k)$$



2 La transformada discreta de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} x(t) dt$$

Transformada continua de Fourier

Transformada discreta de Fourier

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nk} x(k)$$

Problemas:

No causal

Dominio infinito



2 La transformada discreta de Fourier

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nk} x(k)$$

Transformada discreta de Fourier

Causal

$$X(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j2\pi nk} x(k)$$



2 La transformada discreta de Fourier

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nk} x(k)$$

Transformada discreta de Fourier

Causal

$$X(n) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j2\pi nk} x(k)$$

Finita - Periódica

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi nk/N} x(k)$$



2 La transformada discreta de Fourier

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi nk/N} x(k)$$

Transformada discreta de Fourier
DFT

Al algoritmo computacionalmente eficiente para el cálculo de la DFT se le llama FFT o transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*)



3 Alcances y limitaciones

- ▶ El cálculo de la DFT implica que:
 - ▶ 1. La señal se encuentre limitada en banda
 - ▶ 2. La frecuencia de muestreo sea mayor a 2 veces el ancho de banda
 - ▶ 3. La señal sea causal
 - ▶ 4. La señal sea periódica con periodo $T_0 = N/f_s$
 - ▶ 5. El espectro estimado resultante es discreto con $n=0, 1, 2, \dots, N/2-1$
 - ▶ 6. La resolución en frecuencia es igual f_s/N
 - ▶ 7. Para que la FFT sea eficiente, N debe ser potencia de 2

Implicaciones de las limitaciones

- ▶ **Ancho de banda limitado**
 - ▶ Las señales reales NO están limitadas en banda por lo que SIEMPRE habrá traslape espectral en el cálculo de la DFT
- ▶ **$F_s > 2 \text{ BW}$**
 - ▶ A mayor f_s , mayor es la velocidad de procesamiento requerida y mayor la cantidad de datos por segundo
- ▶ **Causal**
 - ▶ La señal solamente existe a partir de $k=0$
- ▶ **Periódica a $T_0 = N/f_s$**
 - ▶ N y f_s deben escogerse de tal forma que coincidan con un periodo de la señal original que debe ser T_0 . Como no siempre es posible, se produce un fenómeno de chorreo espectral (leakage)

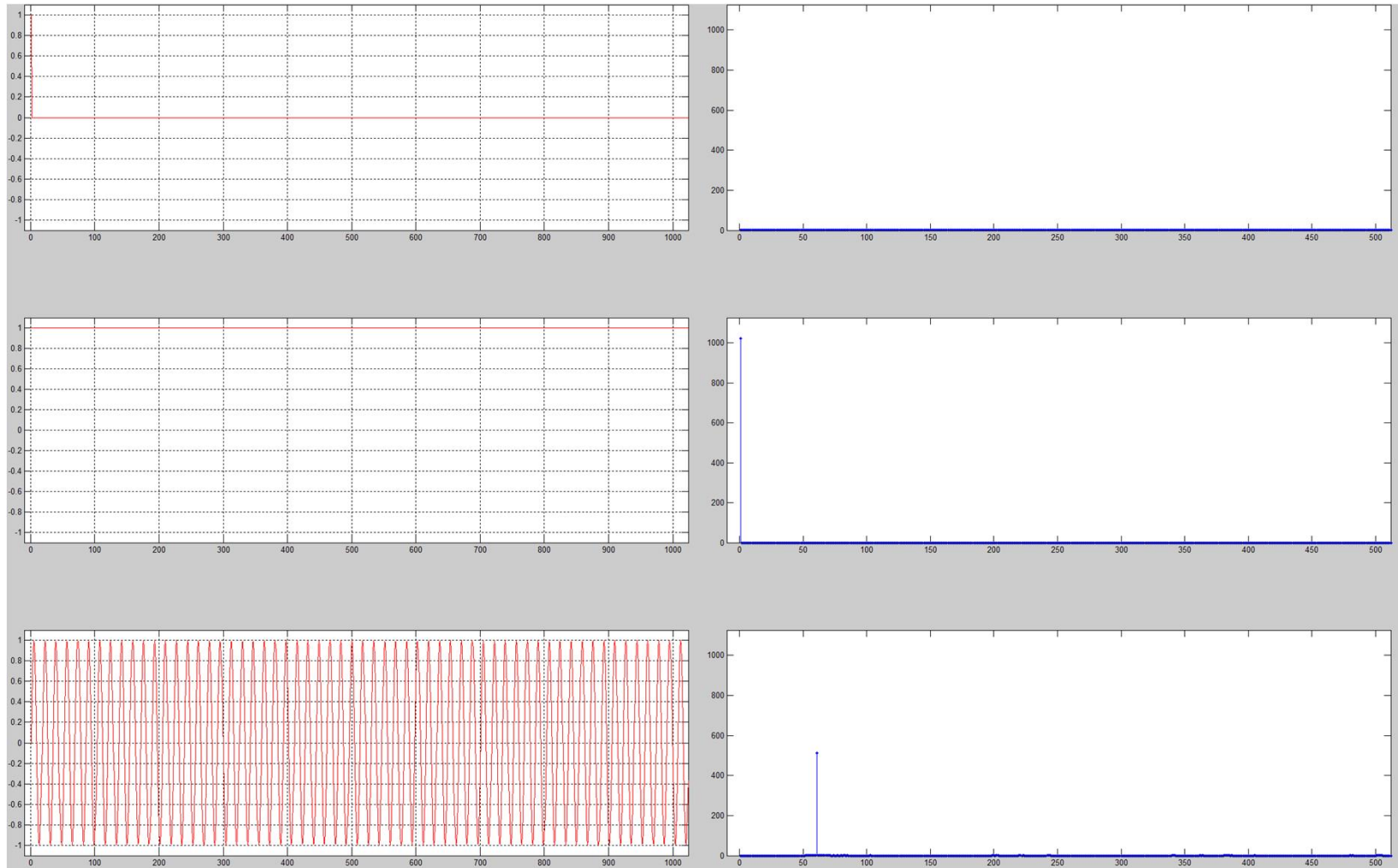
Implicaciones de las limitaciones

- ▶ Espectro discreto con resolución en frecuencia igual a f_s/N
 - ▶ Si la señal original contiene un componente espectral que NO sea múltiplo exacto de f_s/N , se producirá el fenómeno de leakage que produce incertidumbre en la potencia estimada del componente y su localización espectral
- ▶ N potencia exacta de 2
 - ▶ Si N no es potencia exacta de 2, el cálculo de la DFT no es computacionalmente eficiente
 - ▶ Los algoritmos implementados llenan con ceros para ajustar N a potencia exacta de 2
 - ▶ N no puede ser arbitrariamente grande puesto que hay un límite en cuanto a la resolución

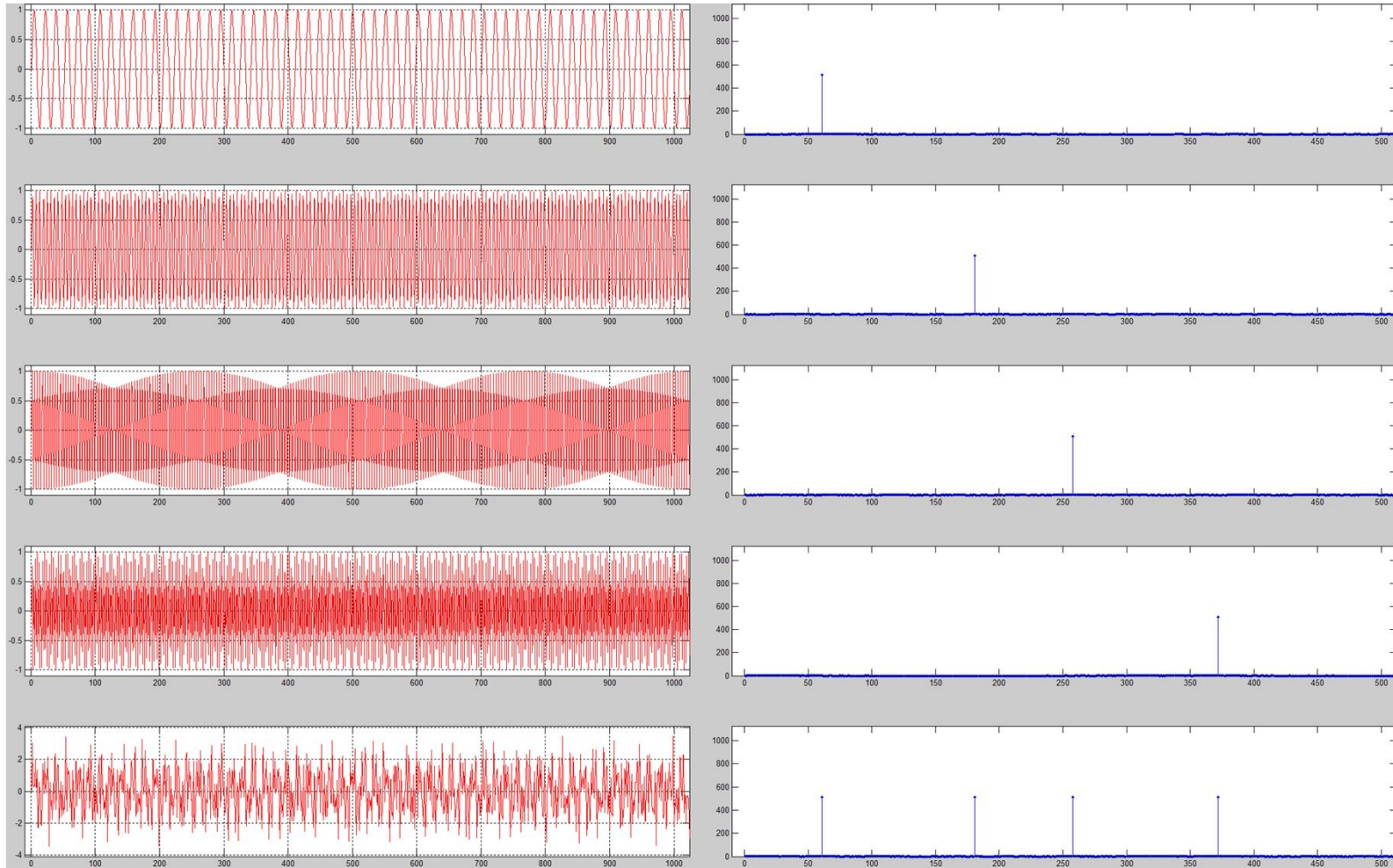
4 Ejemplos prácticos

- ▶ 4.1 Análisis básico
- ▶ De la carpeta: FFT 01 Basico
- ▶ Ejecute el script:
 - ▶ basicFFT01
- ▶ Discuta los resultados

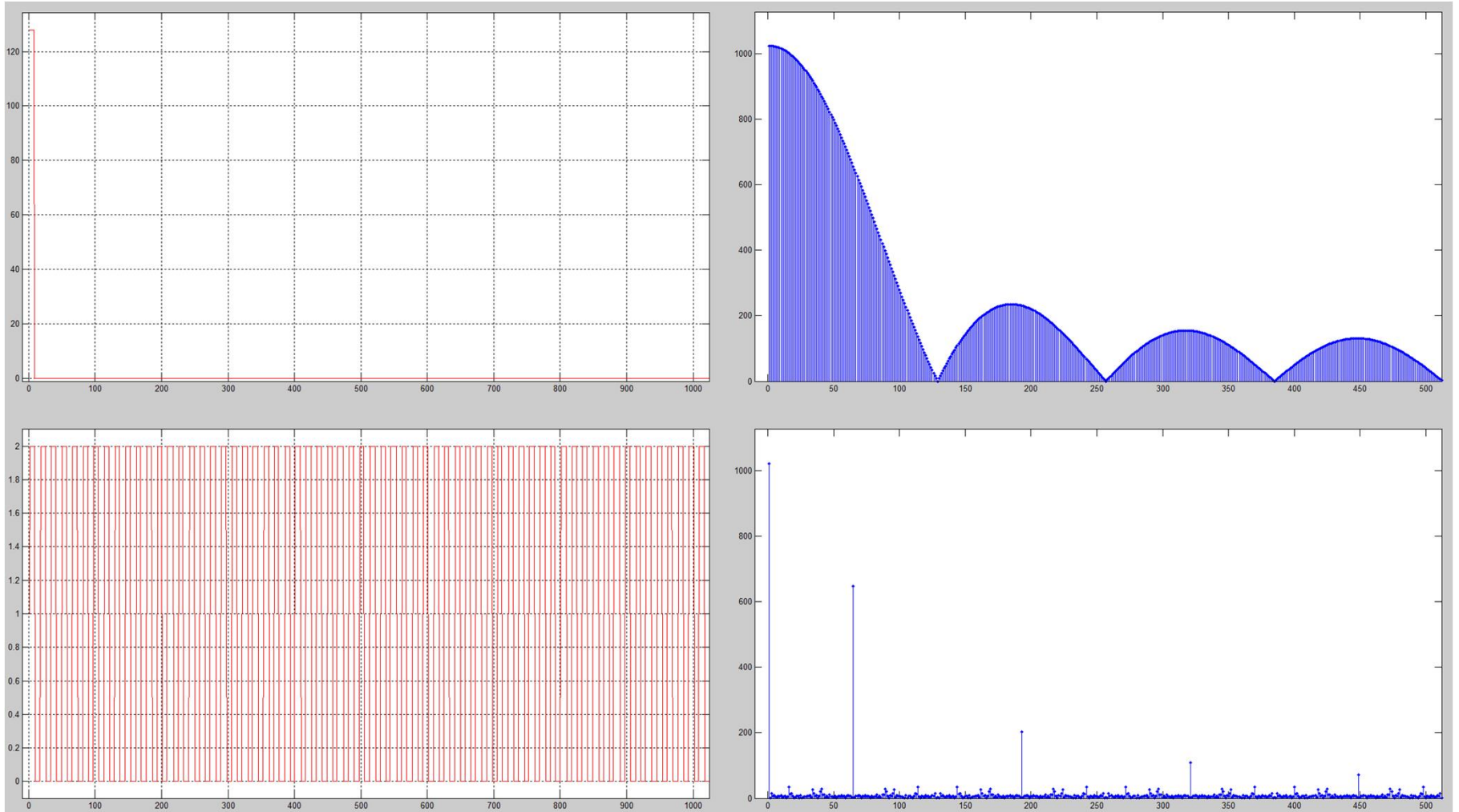
Señales básicas



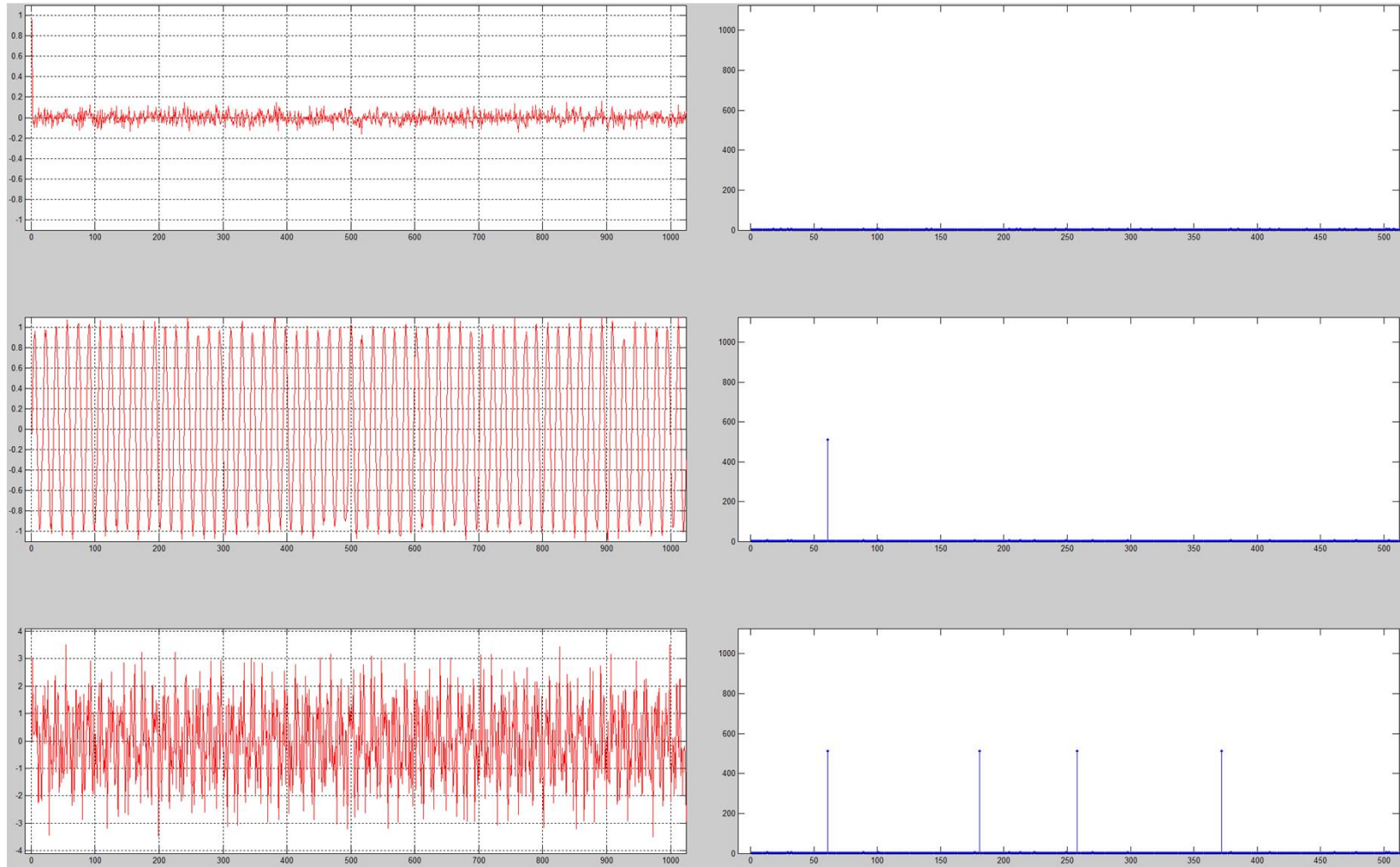
Sinusoides



Pulso y cuadrada



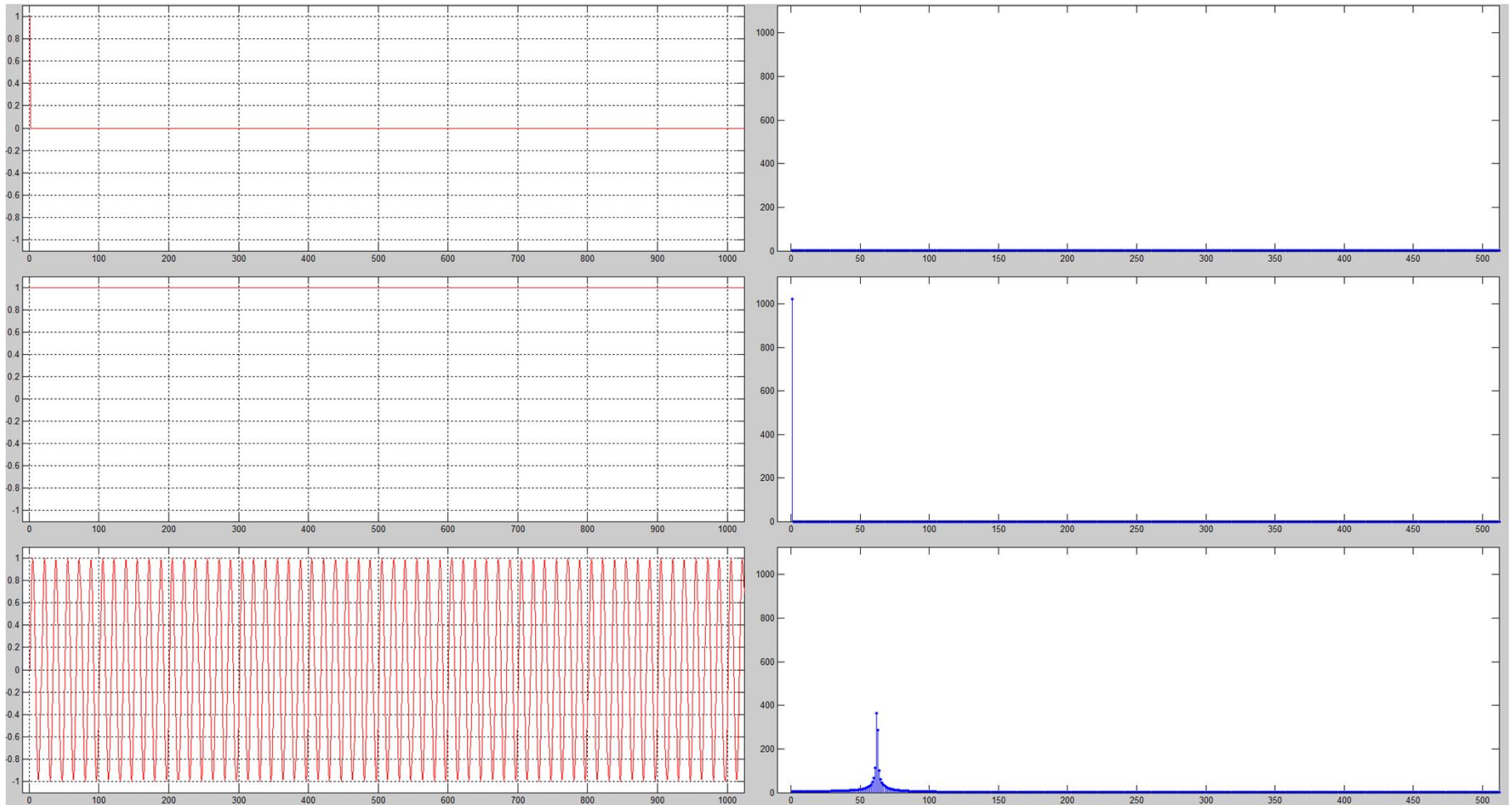
Señales con ruido



4.2 Chorreo espectral

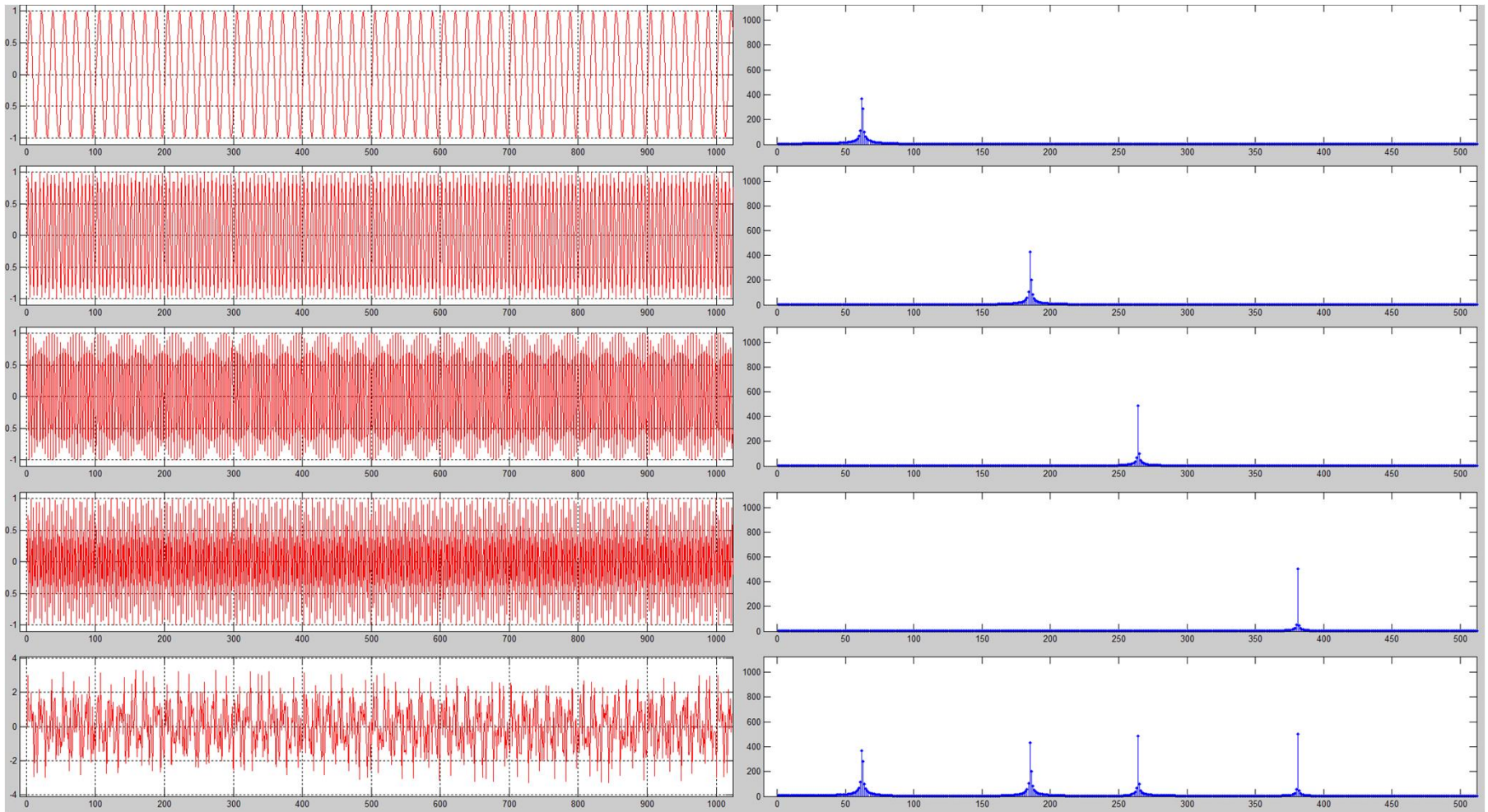
- ▶ De la carpeta: `FFT 02 Leakage`
- ▶ Ejecute el script:
 - ▶ `leakageFFT`
- ▶ Discuta los resultados
- ▶ Cambie la frecuencia de muestreo a 1024 Hz
- ▶ Explique

Señales básicas



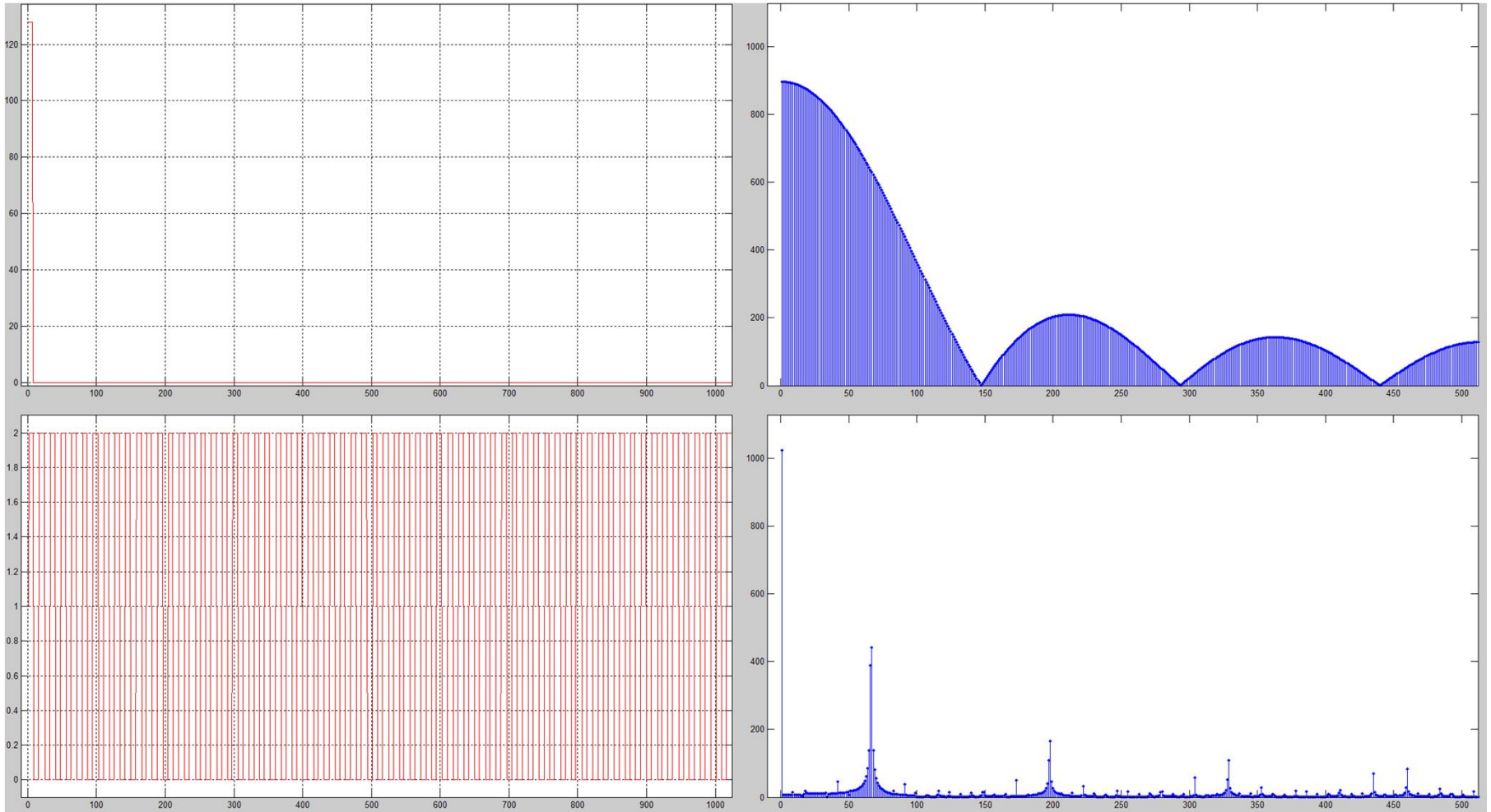
René de Jesús Romero Troncoso

Sinusoides

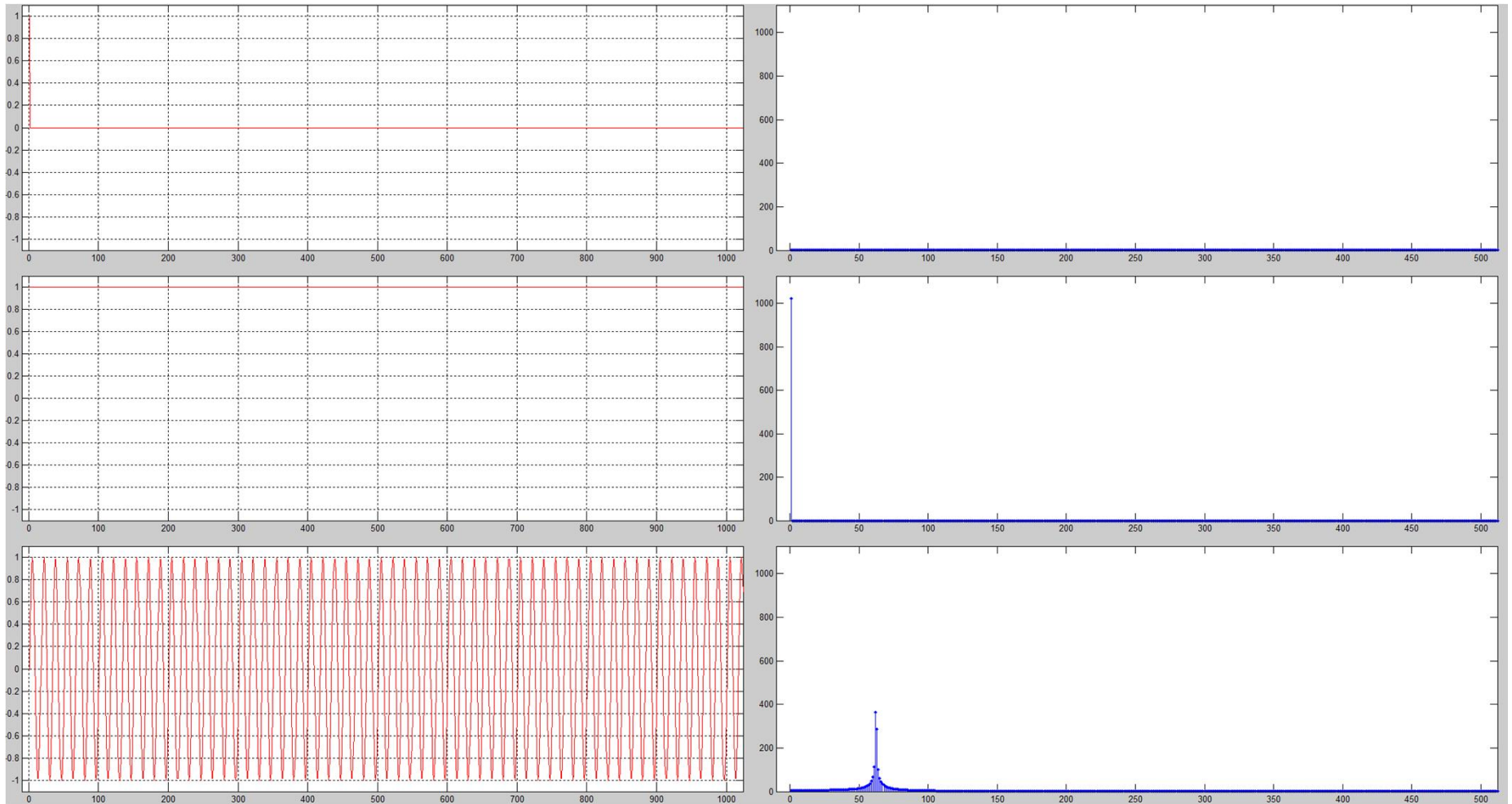


René de Jesús Romero Troncoso

Pulso y cuadrada



Señales con ruido

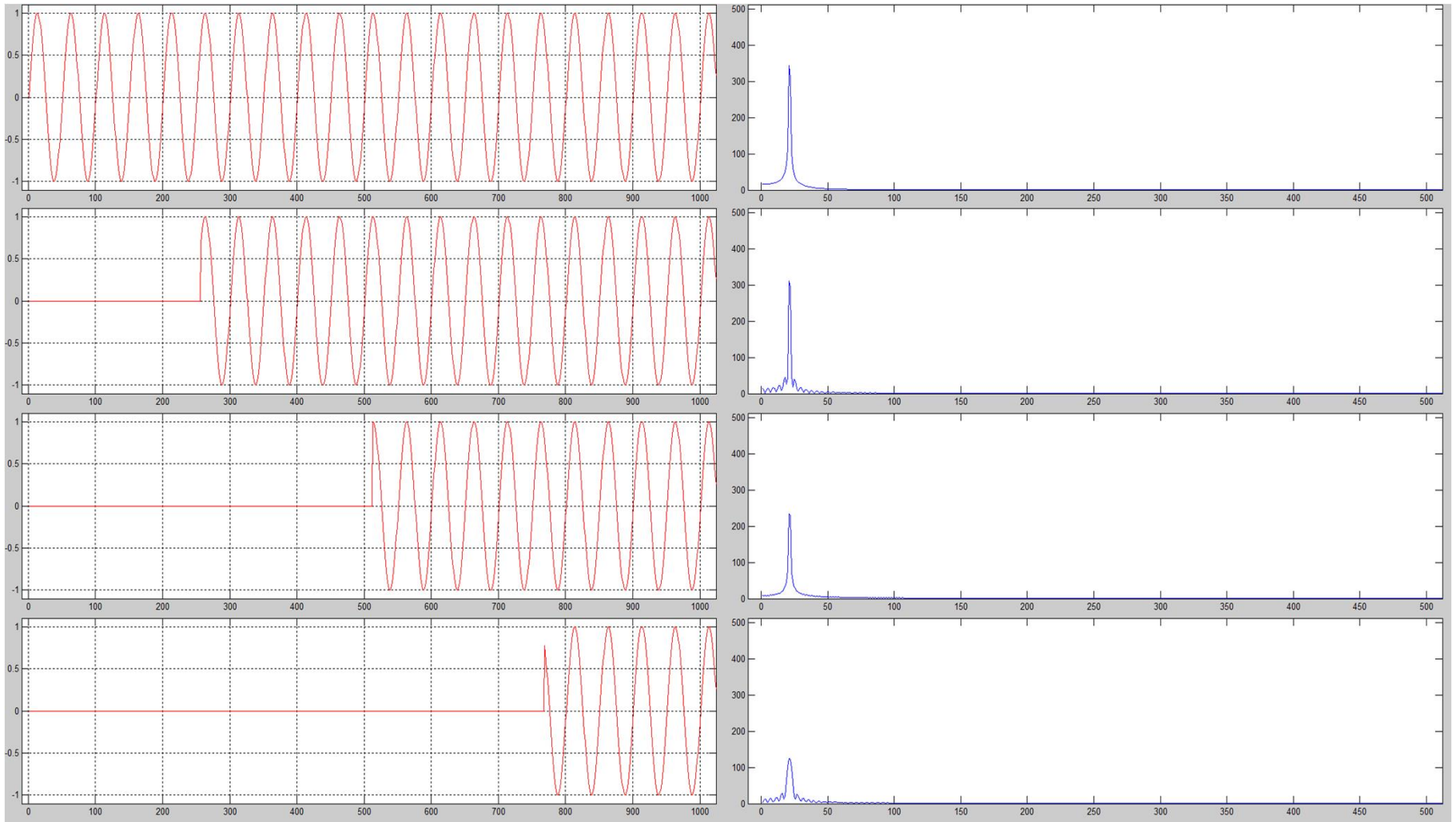


René de Jesús Romero Troncoso

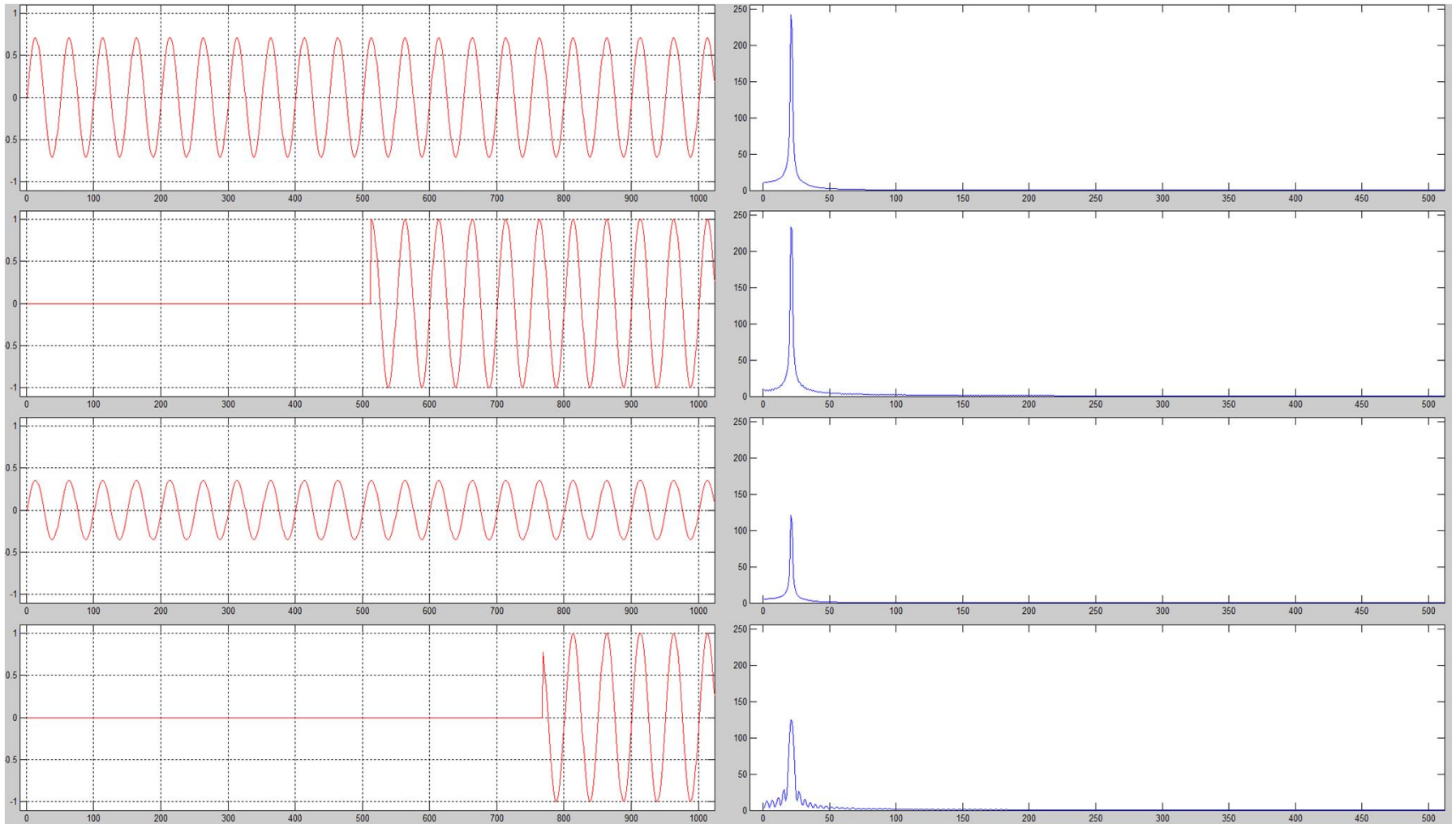
4.3 Invarianza en el tiempo

- ▶ De la carpeta: `FFT 03 Time`
- ▶ Ejecute el script:
 - ▶ `timeFFT`
- ▶ Discuta los resultados
- ▶ Cuál es resultado de la FFT ante señales localizadas en tiempo?

Sinusoides temporizadas

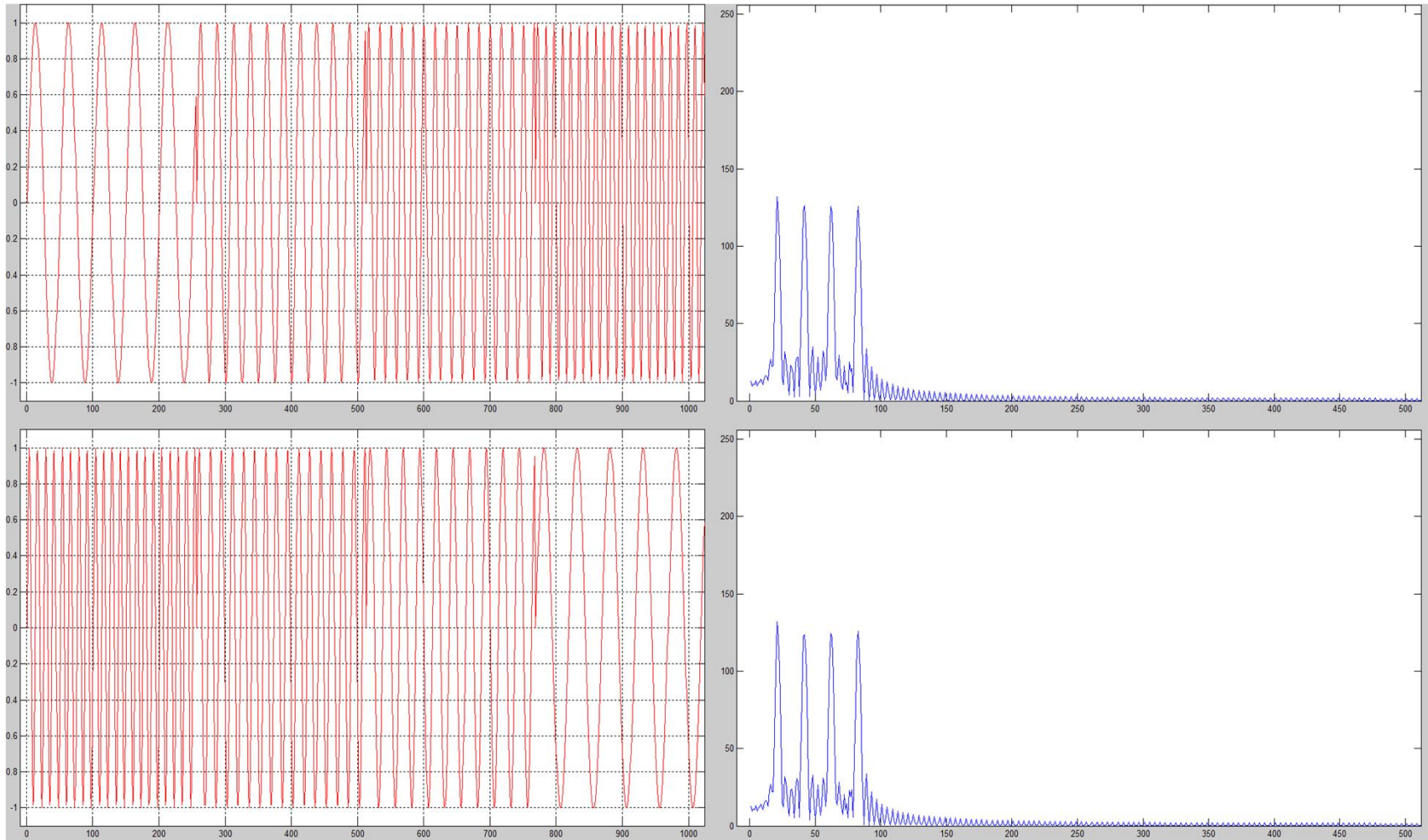


Sinusoides graduales



René de Jesús Romero Troncoso

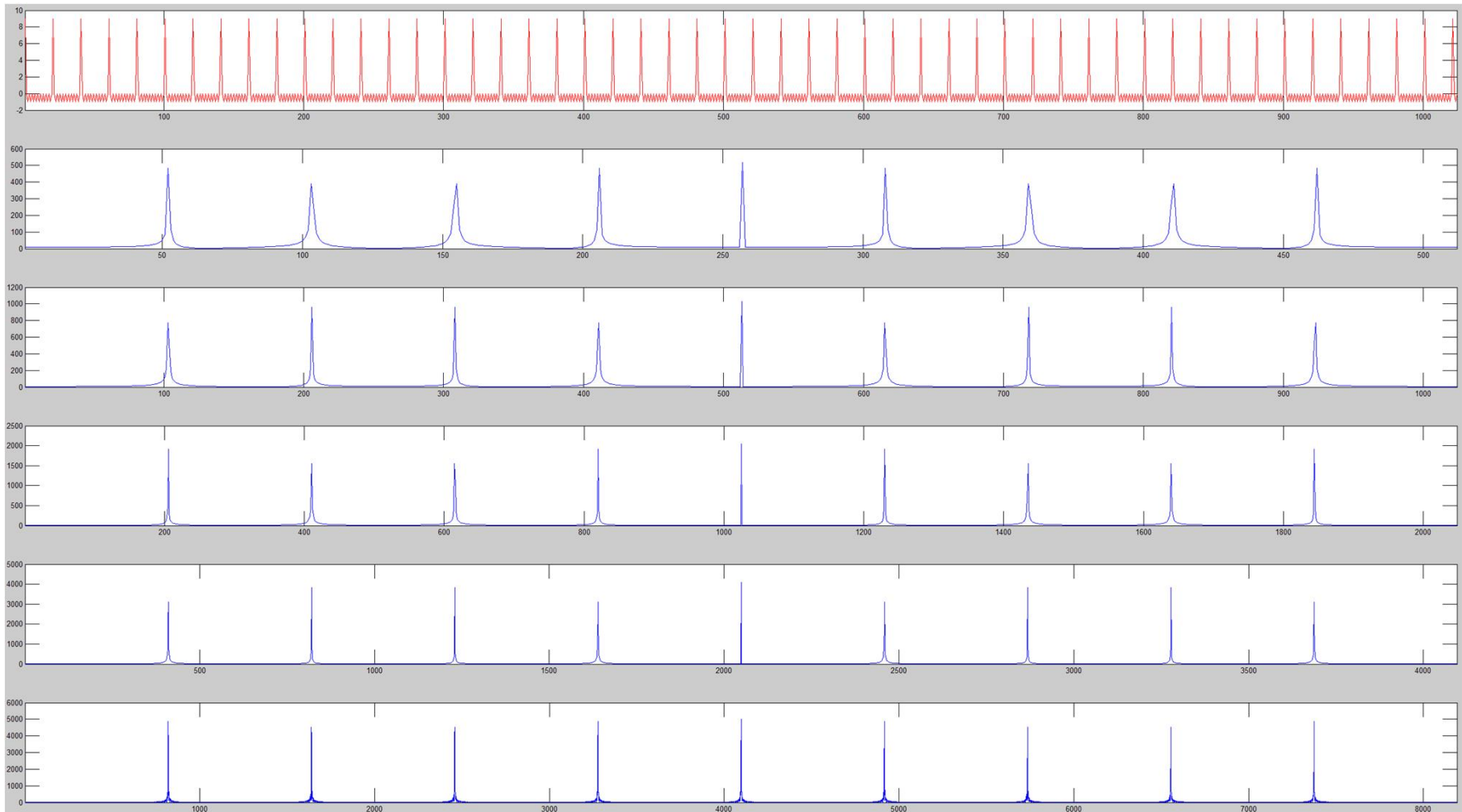
Sinusoides localizadas



4.4 Aplicación de la transformada discreta de Fourier a señales sintéticas

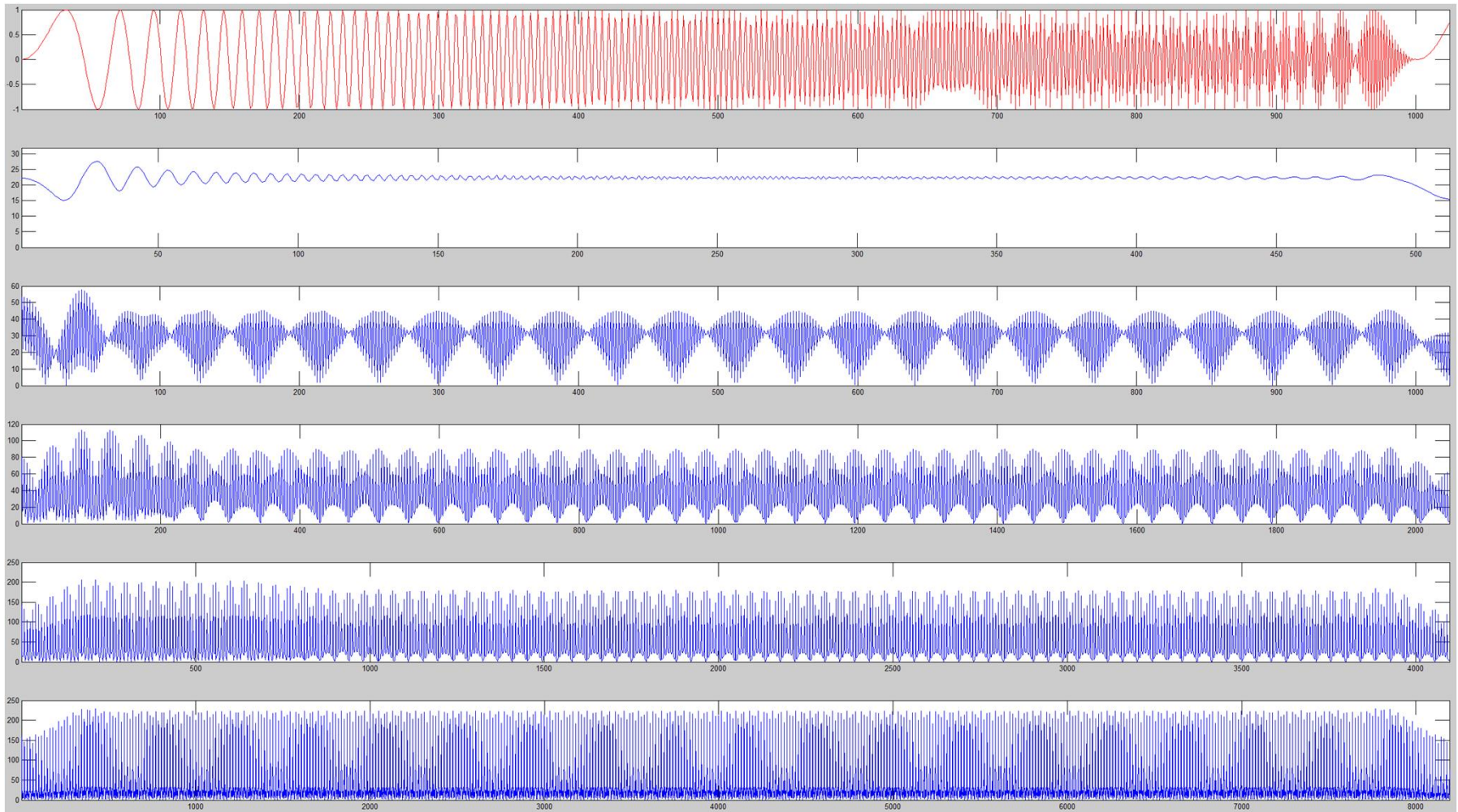
- ▶ De la carpeta: **FFT 04 Sinteticas**
- ▶ Ejecute el script:
 - ▶ `X_FFT_Sinteticas`
- ▶ Discuta los resultados
- ▶ Realice el análisis para las 5 formas de onda sintéticas

Suma armónica



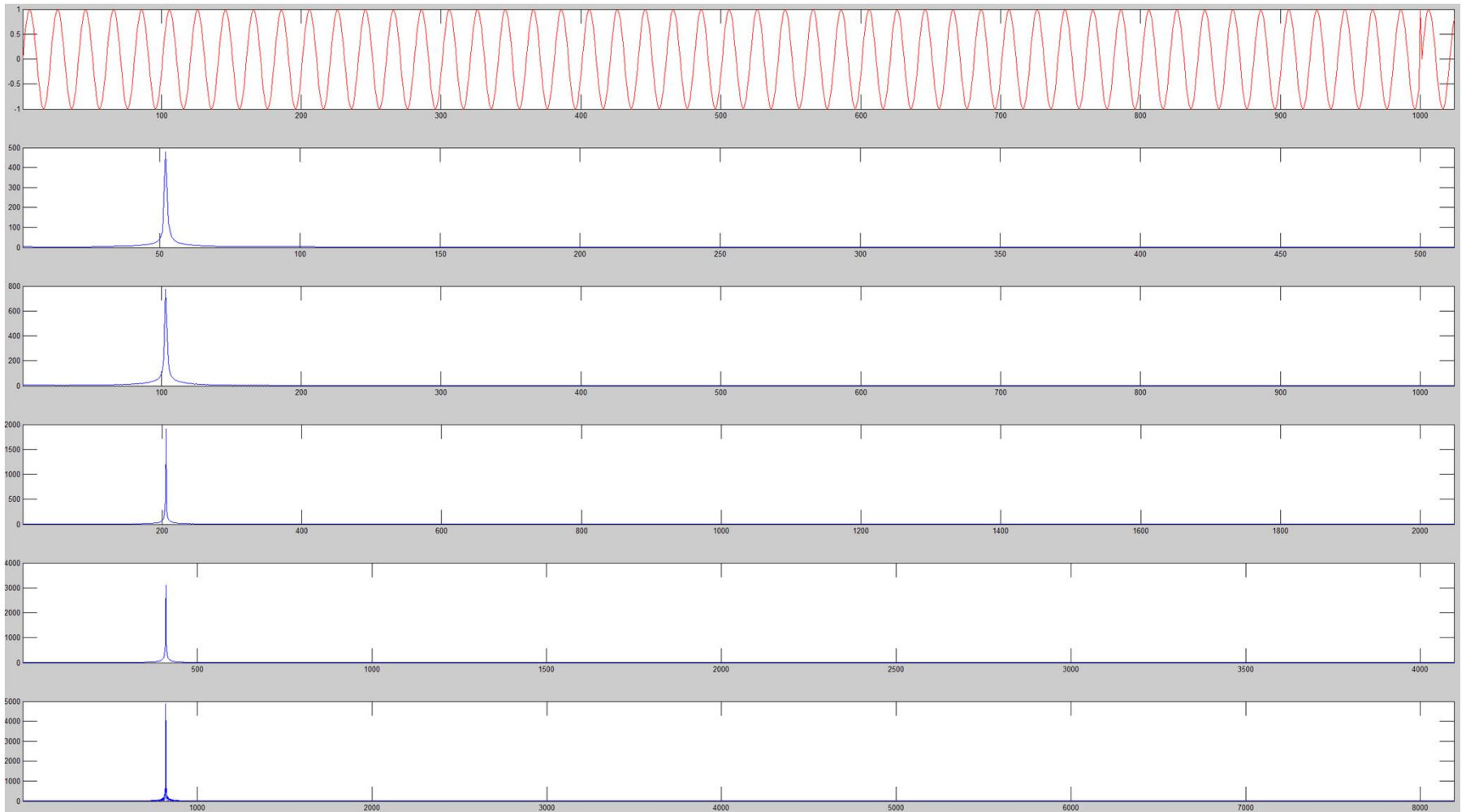
René de Jesús Romero Troncoso

Chirp periódica



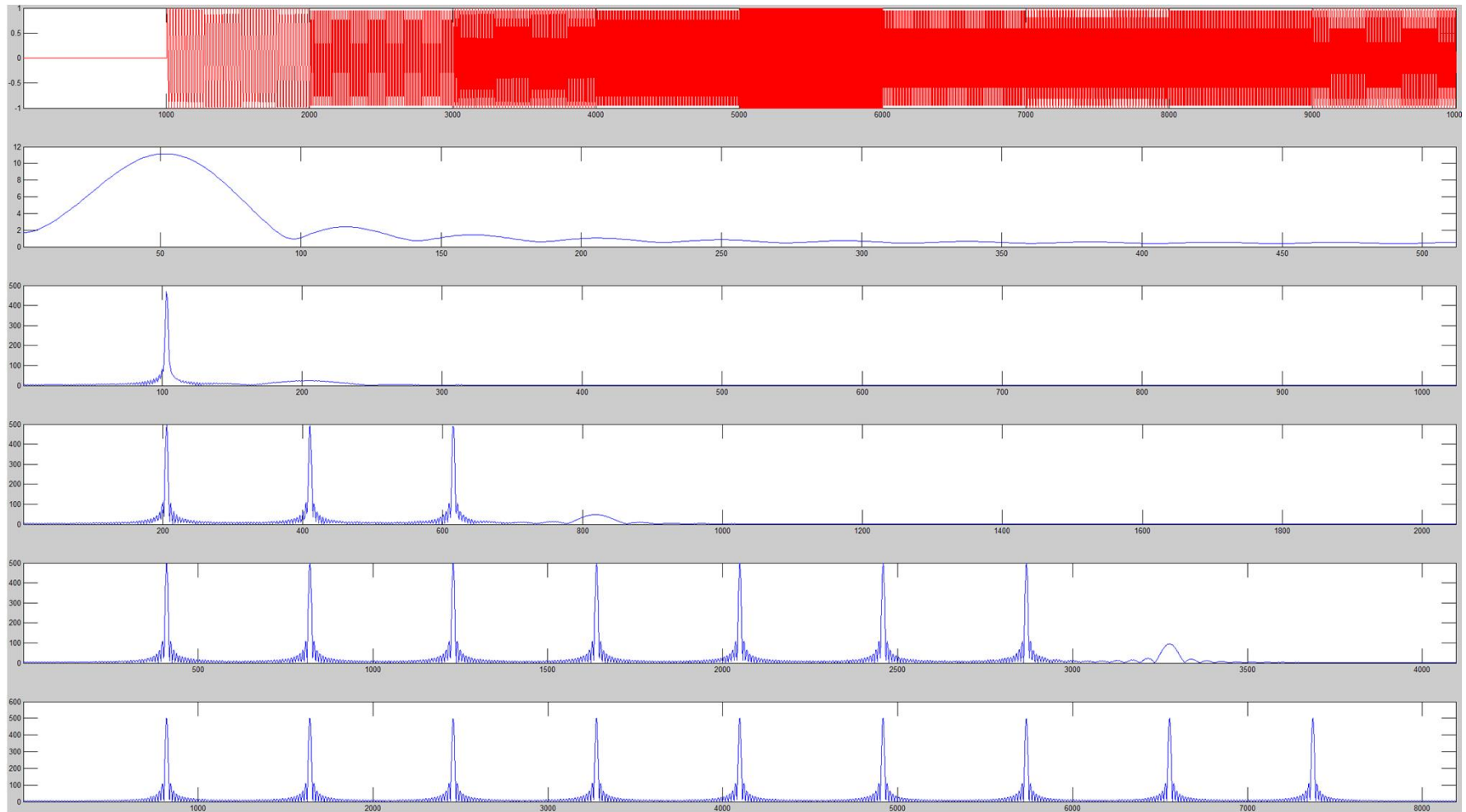
René de Jesús Romero Troncoso

Seno con impulsos



René de Jesús Romero Troncoso

Seno con frecuencia incremental



The figure displays a sequence of six plots illustrating the effect of a series of bandpass filters on a noisy signal. The top plot shows the original noisy signal (red line) over a frequency range from 0 to 10000. The subsequent five plots show the signal after applying a series of bandpass filters, with the noise being progressively removed and the underlying peaks becoming clearer. The x-axis for the top plot ranges from 0 to 10000, while the other plots have varying x-axis ranges focusing on specific frequency bands.

4.5 Aplicación de la transformada discreta de Fourier a señales reales

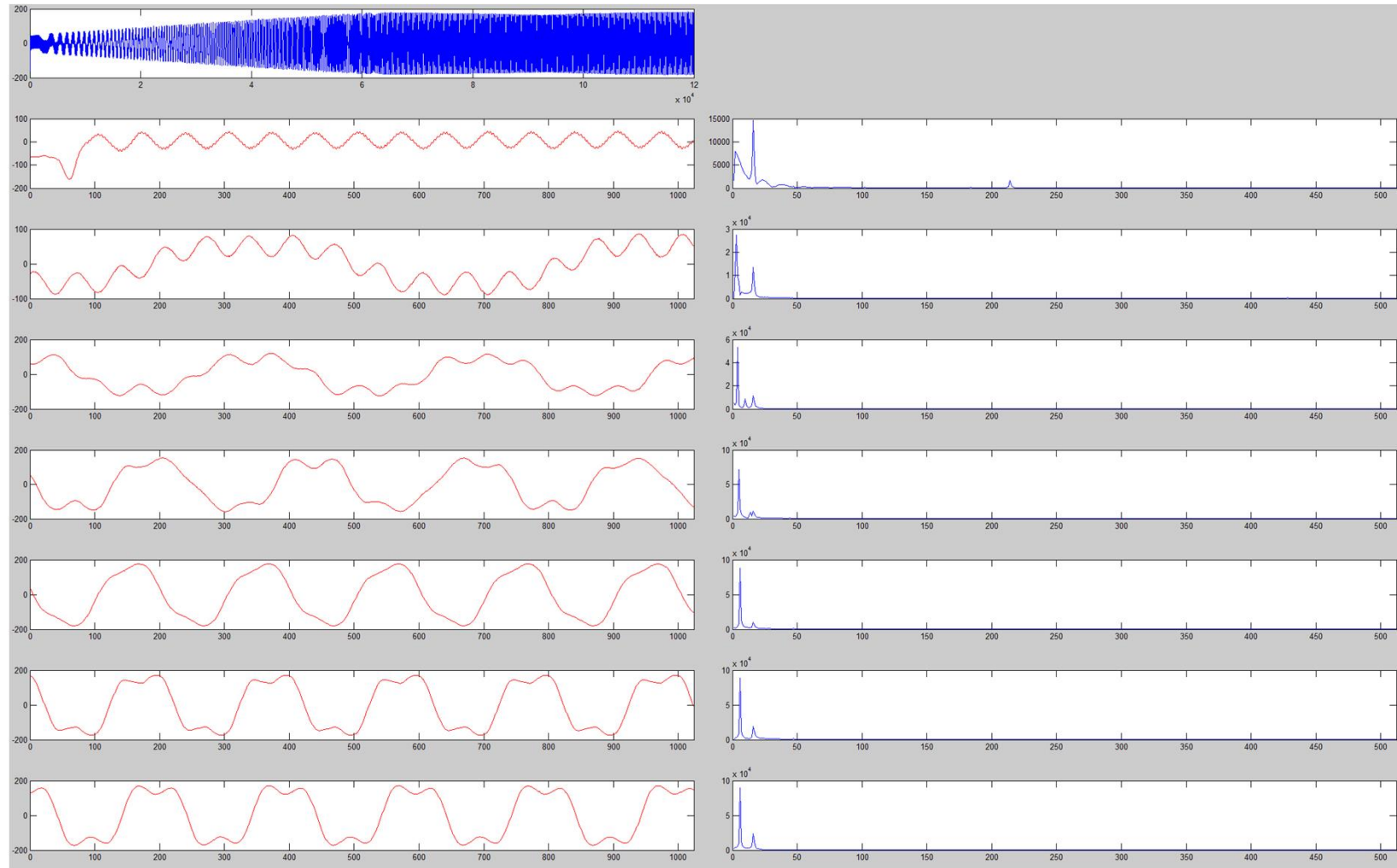
- ▶ De la carpeta: **FFT 05 Reales**

- ▶ Ejecute los scripts:

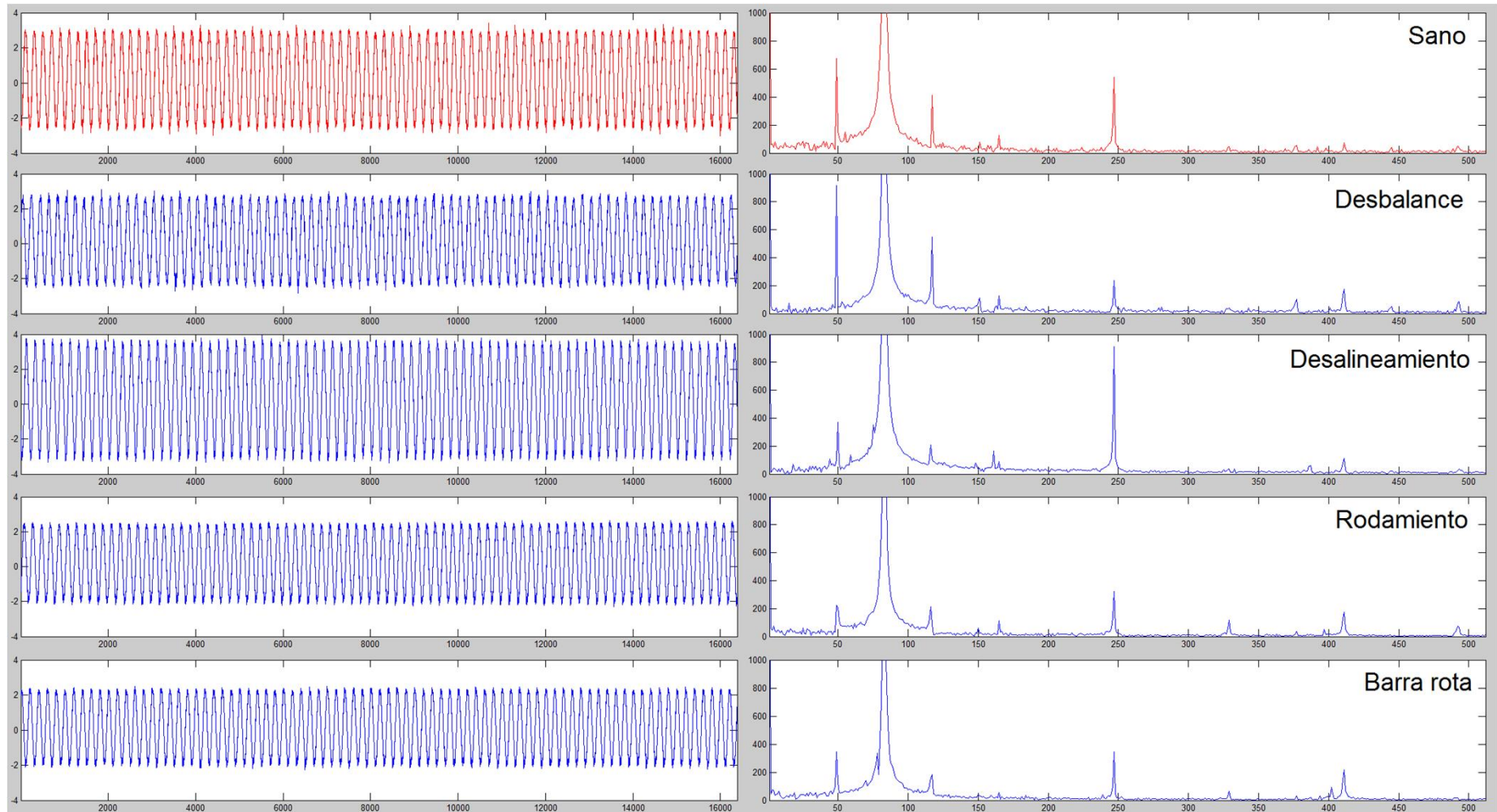
- ▶ X_FFT_Calidad
- ▶ X_FFT_Corriente
- ▶ X_FFT_Vibraciones
- ▶ X_FFT_Emision

- ▶ Discuta los resultados

Calidad de la energía

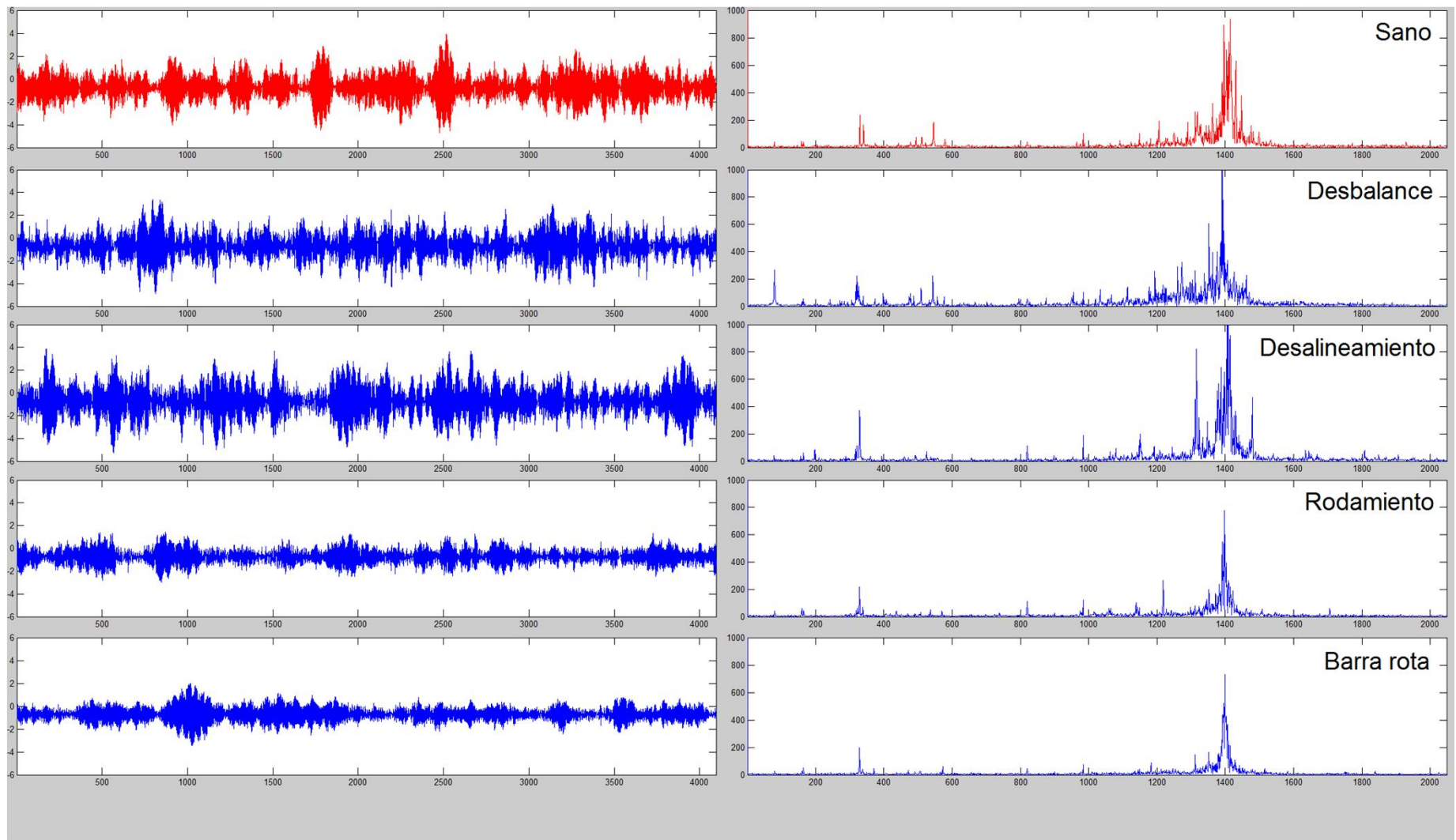


Corriente en motor de inducción

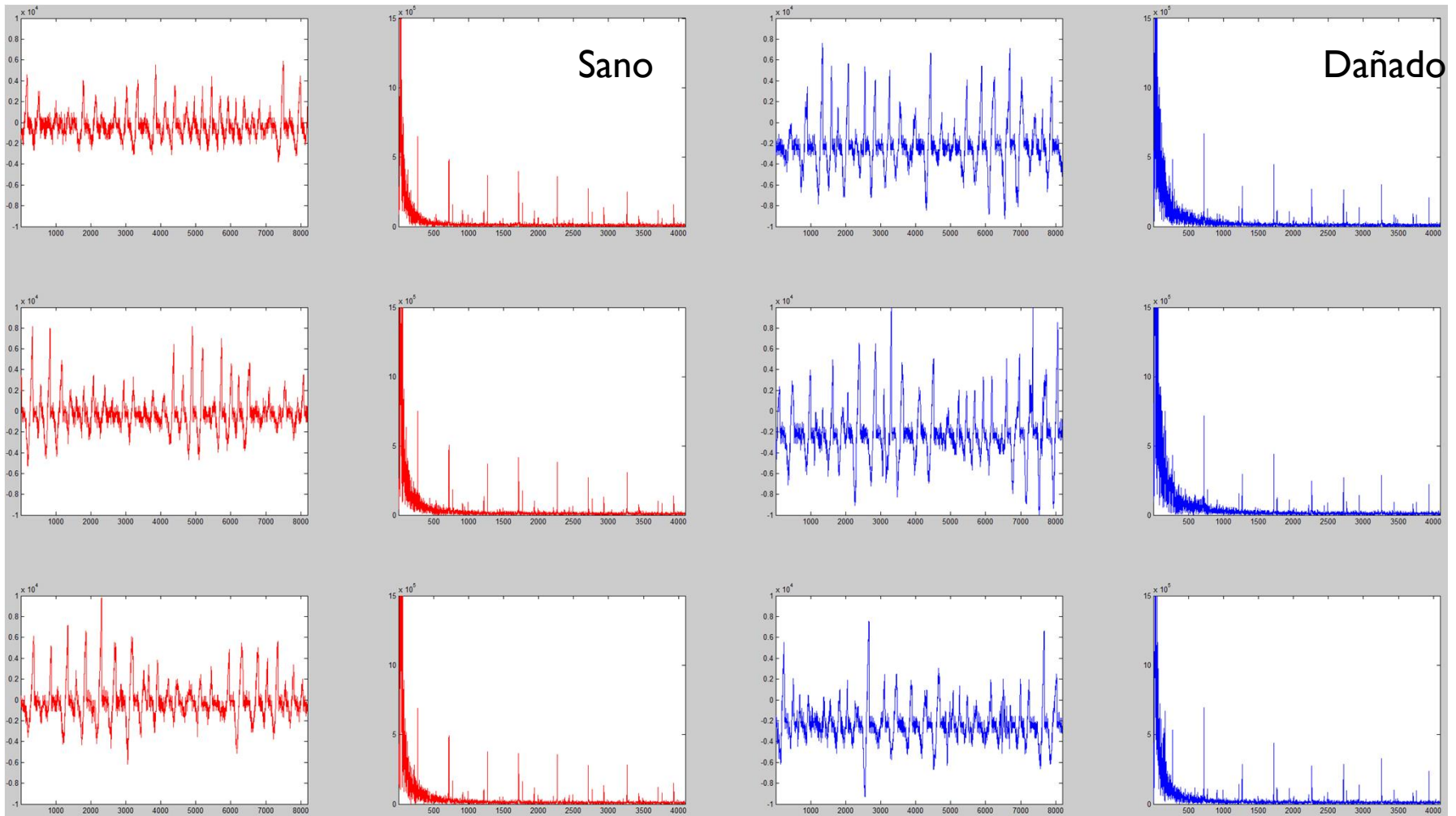


René de Jesús Romero Troncoso

Vibraciones en un motor de inducción



Emisión acústica en rodamientos



5 Conclusiones

- ▶ El análisis espectral a través de la FFT es una herramienta matemática de cálculo numérico muy poderosa que permite extraer propiedades y parámetros de una señal en el dominio de la frecuencia, de manera simple y rápida, que no son evidentes cuando la señal se analiza en el dominio del tiempo
- ▶ Sin embargo, este método de análisis tiene problemas tales como el chorreo espectral (leakage), insensibilidad a fenómenos transitorios y errores en señales variantes en el tiempo (no estacionariedad)

Cómo evitar o disminuir los problemas de la FFT ante los problemas de:

- ▶ Leakage:
 - ▶ Periodograma
 - ▶ Remuestreo
- ▶ No estacionariedad:
 - ▶ Transformada de Fourier en tiempo corto (STFT)
- ▶ Señales transitorias:
 - ▶ No hay solución con esta técnica
- ▶ Otros métodos de análisis:
 - ▶ Modernos (paramétricos y no paramétricos)
 - ▶ Heurísticos
 - ▶ Transformaciones tiempo-frecuencia
 - ▶ Empíricos



Universidad de Valladolid

Muchas gracias por su atención !!!!!!!!



Junio 2024