



**Universidad de Valladolid**



**ESCUELA DE INGENIERÍAS  
INDUSTRIALES**

**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

**ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES**

**Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales**

**Modelado mecánico y ajuste computacional  
de un tablero de madera.**

**Autor:**

**Alfageme Serrano, David**

**Tutor(es):**

**Magdaleno González, Álvaro  
Lorenzana Ibán, Antolín  
Departamento C.A., I.A., M.M.C. y  
Teoría de Estructuras.**

**Valladolid, mayo 2024.**



*A mi abuela, Gloria Alonso Alonso,  
por su amor y apoyo incondicional.*



## **RESUMEN**

Se va a trabajar con un modelo de una placa de madera. En este caso, la placa de dimensiones: largo 2,460 m, ancho 1,244 m y alto 0,02 m, va a ser sometida a diferentes situaciones de carga y apoyos, de manera que se puedan obtener todos los datos necesarios para su posterior modelización en SAP2000.

El propósito de este trabajo es realizar una identificación dinámica, seguida de un calibrado computacional para obtener un "gemelo digital" utilizando el potente software de cálculo SAP2000. De esta manera, se dispondrá de una réplica digital de la placa de madera para poder someterla a diferentes situaciones que se deseen ensayar sin necesidad de hacerlo físicamente. También permitirá realizar pruebas que podrían ser imposibles de llevar a cabo en el laboratorio.

Con esta simulación previa, se podrá verificar el diseño de la placa de estudio y estar preparados para situaciones extraordinarias que puedan ocurrir.

## **PALABRAS CLAVE:**

Placa de madera.

SAP2000.

Análisis Estático.

Análisis dinámico.

Gemelo Digital.

## **ABSTRACT**

*A model of an isotropic wooden plate will be used for this project. In this case, the plate with dimensions of length 2.460 m, width 1.244 m, and height 0.02 m will be subjected to different loading and support situations to obtain all the necessary data for its subsequent modeling in SAP2000.*

*The purpose of this work is to perform dynamic identification, followed by computational calibration to obtain a "digital twin" using the powerful SAP2000 calculation software. This way, a digital replica of the wooden plate will be available to subject it to different situations without having to do it physically. It will also allow tests that may be impossible to carry out in the laboratory.*

*With this prior simulation, the design of the walkway can be verified and preparedness for extraordinary situations can be achieved.*

## **KEY WORDS:**

*Wooden board.*

*SAP2000.*

*Static análisis.*

*Dynamic análisis.*

*Digital twin.*



# ÍNDICE

- Capítulo 1. Introducción y Objetivos: ..... 1
  - 1.1 Introducción: ..... 1
  - 1.2 Objetivos: ..... 2
  - 1.3 Antecedentes:..... 2
- Capítulo 2. Fundamento Teórico: ..... 3
  - 2.1 Elemento de estudio:..... 3
  - 2.2 Estudio Teórico Estático: ..... 4
    - 2.2.1 Hipótesis básicas del cálculo de placas: ..... 4
    - 2.2.2 Definición de esfuerzos: ..... 4
    - 2.2.3 Ecuaciones de equilibrio de la placa: ..... 5
    - 2.2.4 Ecuaciones de compatibilidad: ..... 6
    - 2.2.5 Ecuaciones de comportamiento: ..... 7
    - 2.2.6 Conclusiones del Estudio Teórico Estático: ..... 9
  - 2.3 Estudio Dinámico Modal:..... 9
  - 2.4 Cálculo de errores: ..... 10
- Capítulo 3. Análisis Experimental de la Placa en el Laboratorio: ..... 11
  - 3.1 Material utilizado:..... 11
  - 3.2 Descripción de los ensayos realizados en el laboratorio:..... 16
    - 3.2.1 Objetivos del ensayo:..... 16
    - 3.2.2 Realización del ensayo estático: ..... 16
- Capítulo 4. Calibrado de la Placa en SAP 2000: ..... 25
  - 4.1 Introducción SAP 2000: ..... 25
  - 4.2 Creación de la placa digital con SAP 2000: ..... 25
    - 4.2.1 Placa con cuatro apoyos. .... 25
    - 4.2.2 Placa con tres apoyos. .... 56
  - 4.3 Conclusiones previas de la placa de estudio: ..... 59
  - 4.4 Ajuste estático y modal de la placa: ..... 59
    - 4.4.1 Placa con cuatro apoyos: ..... 59
    - 4.4.2 Placa con tres apoyos: ..... 79
  - 4.5 Conclusiones del calibrado de la placa: ..... 87
- Capítulo 5. Conclusiones del Trabajo: ..... 89
  - 5.1 Conclusiones Finales: ..... 89
  - 5.2 Líneas de Mejora: ..... 89



---

5.2.1	Optimización del diseño: .....	90
5.2.2	Mejora de los equipos de medida: .....	90
5.2.3	Estudio de materiales ortotrópicos:.....	90
5.3	Aspectos a tener en cuenta: .....	90
5.3.1	Coste del trabajo: .....	90
5.3.2	Seguridad y medioambiente: .....	91

## Capítulo 1. Introducción y Objetivos:

### 1.1 Introducción:

La ingeniería estructural es un campo vital en el diseño y la construcción de infraestructuras seguras y eficientes. [1] Dentro de este ámbito, la investigación sobre materiales y estructuras se centra en comprender cómo responden a diferentes condiciones de carga y apoyos. Uno de los materiales más utilizados en la construcción es la madera, que ofrece propiedades únicas de resistencia y sostenibilidad. El estudio de su comportamiento bajo diversas condiciones es esencial para garantizar su uso seguro y eficiente en la ingeniería moderna.

En este Trabajo de Fin de Grado (TFG) se va a investigar el comportamiento de una placa de madera sometida a diferentes situaciones de carga y apoyos. A través de ensayos experimentales, se analizarán las respuestas de la placa de madera a cargas estáticas y dinámicas, considerando diferentes tipos de apoyo. Los resultados obtenidos permitirán comprender mejor las propiedades mecánicas de la madera y su capacidad para soportar diversas cargas.



*Figura 1, Tableros de madera Andina. [2]*

Además, se utilizará el software de cálculo estructural SAP2000 para crear un modelo digital de la placa de madera y simular su comportamiento bajo distintas condiciones de carga. Esto permitirá comparar los resultados experimentales con los simulados y validar la precisión del modelo.

Esta investigación tiene un impacto significativo en el campo de la ingeniería, ya que contribuirá al desarrollo de estructuras más seguras y eficientes hechas de madera. Al comprender cómo reacciona la madera a diferentes situaciones de carga, los ingenieros pueden diseñar construcciones más sostenibles y resistentes.

En los siguientes apartados, se detallará la metodología utilizada en los ensayos, los resultados obtenidos y las conclusiones extraídas del estudio.

## 1.2 **Objetivos:**

Con el desarrollo del presente Trabajo Fin de Grado se pretende perseguir los siguientes objetivos:

- Entender cómo se comportan las estructuras reales cuando se ven sometidas a fuerzas estáticas es fundamental. Al determinar cómo se desplazan bajo cargas puntuales, podemos conocer de qué manera se deforma la estructura cuando enfrenta dichas fuerzas.
- Evaluar las características dinámicas de la placa, o parámetros modales, bajo el efecto de fuerzas dinámicas con el fin de compararlas con modelos analíticos.
- Crear un "gemelo digital" de la placa de estudio en el programa SAP2000 para poder simular diversas situaciones, incluyendo aquellas que no se pueden analizar a escala de laboratorio.
- Llevar a cabo simulaciones en la placa, como pruebas de carga dinámica, y exponer la estructura a diferentes tipos de situaciones, entre una variedad de ensayos que se pueden realizar con SAP2000.

## 1.3 **Antecedentes:**

Se van a mencionar las asignaturas completadas durante los años de estudio en la carrera de Ingeniería en Tecnologías Industriales que han proporcionado conocimientos relacionados con el campo de las estructuras.

A lo largo del grado se han cursado varias asignaturas que guardan relación con el ámbito estructural directa o indirectamente, pero se van a resaltar las dos más importantes.

- Resistencia de Materiales.
- Elasticidad, Resistencia y Estructuras.

En la asignatura de resistencia de materiales, las habilidades adquiridas comprenden conocimientos sobre los distintos tipos de materiales utilizados, las formas estructurales y las acciones, así como la destreza para realizar análisis de equilibrio estático y tensión, junto con estudios de flexión, torsión y pandeo. En elasticidad, resistencia y estructuras, se destaca el estudio del comportamiento del sólido elástico frente a tensiones y deformaciones.

Los objetivos de estas dos materias son numerosos, pero se centran en el análisis estático de las estructuras, con poca atención a la parte dinámica. Por lo tanto, la realización de este Trabajo Fin de Grado no solo consolida los conocimientos adquiridos, sino que también los expande hacia el análisis dinámico.

## Capítulo 2. Fundamento Teórico:

En esta sección, se busca describir el comportamiento teórico del elemento bajo estudio para entenderlo antes de proceder con el estudio experimental. En este caso, la placa de estudio se modelará como una placa fijada a cuatro apoyos ubicada en el plano XY, donde la gravedad actúa a lo largo del eje Z.

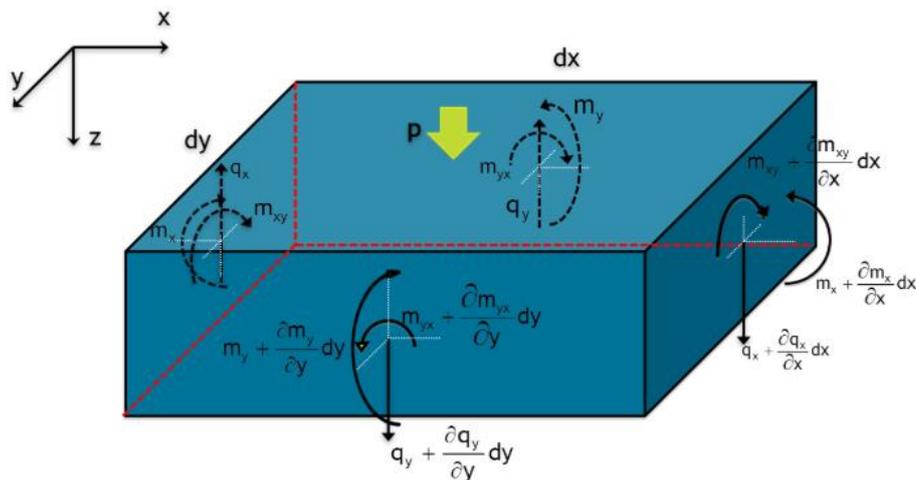


Figura 2, Esfuerzos en un elemento diferencial de placa [3].

### 2.1 Elemento de estudio:

[4] Una placa rectangular es una estructura plana y continua cuyos lados tienen una longitud mucho mayor que la de su espesor (también llamado canto)  $a, b \gg h$ , ver **Figura 2**. Si las cargas externas son verticales o también llamadas "transversales", la estructura se denomina "placa" y trabaja a flexión, si son en el plano X, Y, la estructura se denomina "laja" y la placa trabaja a tracción o compresión con la posibilidad de pandeo.

El aspecto general de una placa rectangular se muestra en la siguiente imagen.

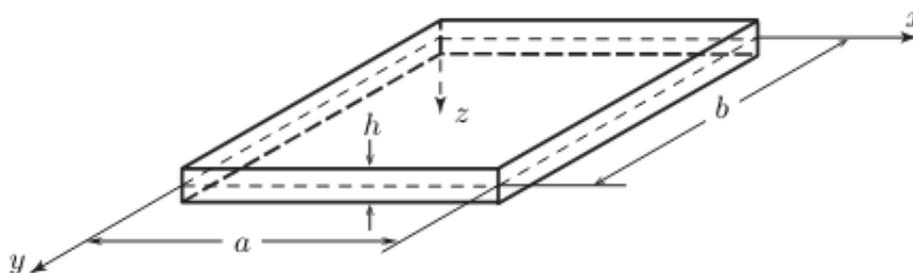


Figura 3, placa rectangular de largo "a", ancho "b", y alto "h" [4].

## 2.2 Estudio Teórico Estático:

El análisis estático estructural es un tipo de análisis de ingeniería que se utiliza para determinar las respuestas de las estructuras bajo cargas estáticas. En este tipo de análisis, se estudian las deformaciones, tensiones, esfuerzos internos y desplazamientos que experimentan las estructuras cuando se aplican cargas estáticas (cargas que no cambian con el tiempo).

El objetivo de este estudio es garantizar que las estructuras sean seguras y capaces de soportar las cargas aplicadas sin fallar o deformarse excesivamente.

Durante el análisis, se pueden considerar diferentes tipos de cargas, como cargas gravitacionales, fuerzas aplicadas, presiones o tensiones térmicas. Los métodos de análisis estático estructural pueden incluir cálculos manuales, métodos numéricos (como el método de los elementos finitos), o una combinación de ambos.

El análisis estático estructural es una parte fundamental del diseño de estructuras, ya que ayuda a los ingenieros a identificar problemas potenciales en el diseño antes de la construcción, asegurando que la estructura cumpla con las normas de seguridad y eficiencia requeridas.

### 2.2.1 Hipótesis básicas del cálculo de placas:

[5] Considerando que el plano medio de la placa es coincidente con el plano  $xy$  y la coordenada  $z$  se encuentra perpendicular a este plano, se pueden asumir una serie de hipótesis generales del cálculo de estructuras lineal, las cuales se especifican a continuación:

- El material de la placa es elástico, homogéneo e isótropo.
- La deflexión del plano medio es pequeño comparado con el espesor de la placa.
- Hipótesis de pequeños desplazamientos.
- Superposición.

### 2.2.2 Definición de esfuerzos:

[5] Los esfuerzos se representan en la siguiente imagen y se definen como:

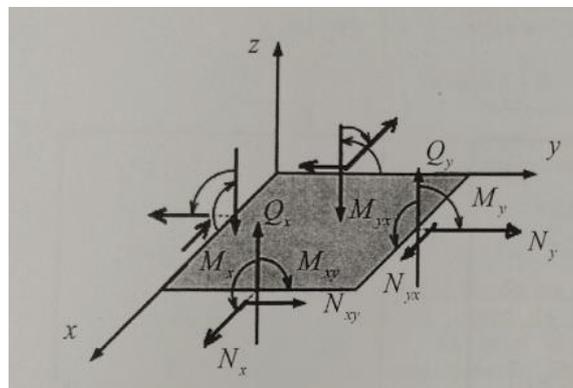


Figura 4, Esfuerzos en la placa [6].

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad (1)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (2)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (3)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} y dz \quad (4)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} x dz \quad (5)$$

### 2.2.3 Ecuaciones de equilibrio de la placa:

[5] Se planteará el equilibrio sobre un elemento diferencial en el que actúan cargas por unidad de superficie de valor "Pz". En la siguiente imagen se observan los esfuerzos sobre un elemento diferencial de placa.

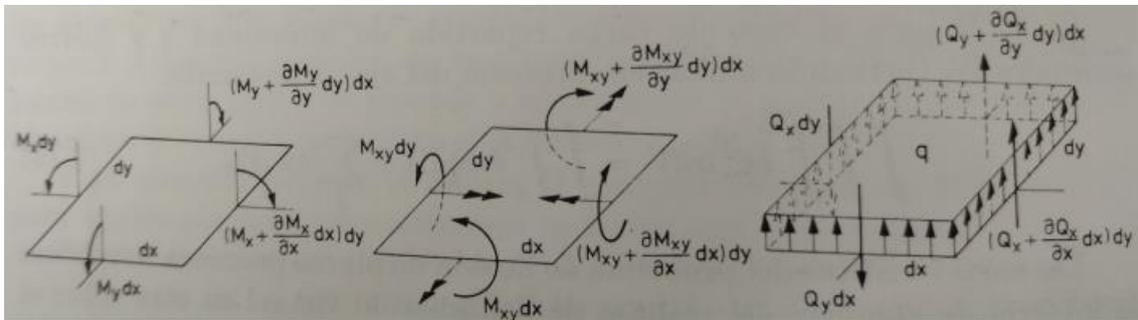


Figura 5, Esfuerzos en un elemento diferencial de placa [7].

- Equilibrio de fuerzas verticales.

$$\sum F_z = 0 \rightarrow \left( \frac{dQ_x}{dx} dx \right) dy + \left( \frac{dQ_y}{dy} dy \right) dx + p_2 dx dy = 0 \quad (6)$$

Si se divide la ecuación (6) entre dx, dy, se obtiene:

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{dQ_y}{dy} + Pz = 0 \quad (7)$$

- Equilibrio de momentos.

$$\begin{aligned} \Sigma M_x = 0 \rightarrow & \left( \frac{dM_y}{dy} dy \right) dx + \left( \frac{dM_{xy}}{dx} dx \right) dy - \left( Q_y + \frac{dQ_y}{dy} dy \right) dx \\ & - \left( \frac{dQ_x}{dx} dx \right) dy \frac{dy}{2} + Pz dx dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_y = 0 \rightarrow & \left( \frac{dM_x}{dy} dx \right) dy + \left( \frac{dM_{xy}}{dy} dy \right) dx - \left( Q_x + \frac{dQ_x}{dx} dx \right) dy \\ & - \left( \frac{dQ_y}{dy} dy \right) dx \frac{dx}{2} + Pz dx dy \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Si se desprecian los términos de segundo orden queda:

$$\frac{dM_x}{dx} + \frac{dM_{xy}}{dy} - Q_x = 0 \quad (10)$$

$$\frac{dM_y}{dy} + \frac{dM_{xy}}{dx} - Q_y = 0 \quad (11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (10) - (11) en la ecuación (7) se tiene:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + 2 \frac{d^2 M_{xy}}{dx dy} + \frac{d^2 M_y}{dy^2} + Pz = 0 \quad (12)$$

#### 2.2.4 Ecuaciones de compatibilidad:

[8] Las ecuaciones de compatibilidad son un conjunto de ecuaciones que garantizan que las deformaciones o desplazamientos de una estructura sean coherentes y compatibles con las condiciones físicas de la estructura y con las condiciones de contorno (restricciones) impuestas.

Estas ecuaciones son importantes porque aseguran que el modelo estructural utilizado para el análisis represente de manera precisa cómo se comportará la estructura bajo cargas. En otras palabras, las ecuaciones de compatibilidad aseguran que los elementos de la estructura estén conectados correctamente y que se comporten de manera continua.

[5] Aplicando las ecuaciones fundamentales de la elasticidad obtenemos:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d\theta_x}{dx} \quad (13)$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} = -z \frac{d\theta_y}{dy} \quad (14)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = -z \left( \frac{d\theta_x}{dy} + \frac{d\theta_y}{dx} \right) \quad (15)$$

Las tensiones tangenciales transversales no contribuyen a la deformación. Esto no implica que las tensiones sean despreciables. Asimismo, se definen las curvaturas como:

$$k_x = -\frac{d\theta_x}{dx} \quad (16)$$

$$k_y = -\frac{d\theta_y}{dy} \quad (17)$$

$$k_y = -\frac{d\theta_y}{dy} \quad (18)$$

Representando las curvaturas en función de los desplazamientos:

$$k_x = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (19)$$

$$k_y = -\frac{d^2w}{dy^2} \quad (20)$$

$$k_y = -\frac{d^2w}{dy^2} \quad (21)$$

Así, se establece la relación deformación-curvatura con lo desarrollado anteriormente. Con todo ello, la relación deformación-curvatura resultaría:

$$\varepsilon_x = zk_x \quad (22)$$

$$\varepsilon_y = zk_y \quad (23)$$

$$\gamma_{xy} = 2zk_{xy} \quad (24)$$

### 2.2.5 Ecuaciones de comportamiento:

Las ecuaciones de comportamiento estructural, también conocidas como ecuaciones constitutivas, son un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen cómo se comportan los materiales de una estructura cuando están sujetos a esfuerzos o tensiones. Estas ecuaciones relacionan las tensiones (esfuerzos) internas con las deformaciones experimentadas por el material.

[5] La relación entre las deformaciones y las tensiones implica, en el caso más general de elasticidad anisotrópica, una matriz constitutiva con 21 coeficientes independientes.

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (25)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (26)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (27)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (22), (23) y (24), se pueden escribir los esfuerzos de flexión como:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E z^2}{1 - \nu^2} (kx + \nu ky) dz \\ &= \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} (kx + \nu ky) = D(kx + \nu ky) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E z^2}{1 - \nu^2} (ky + \nu kx) dz \\ &= \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} (ky + \nu kx) = D(ky + \nu kx) \end{aligned} \quad (29)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = 2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G z^2 k_{xy} dz = 2G \frac{h^3}{12} k_{xy} = (1 - \nu) D k_{xy} \quad (30)$$

donde D es la constante de rigidez a flexión de la placa:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (31)$$

Sustituyendo las curvaturas correspondientes en las ecuaciones (28) - (30), se obtienen los esfuerzos de flexión en función de los desplazamientos:

$$M_x = -D \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \nu \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \quad (32)$$

$$M_y = -D \left( \frac{d^2 w}{dy^2} + \nu \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (33)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \left( \frac{d^2 w}{dx dy} \right) \quad (34)$$

### 2.2.6 Conclusiones del Estudio Teórico Estático:

Aunque existen fórmulas disponibles en la literatura para abordar condiciones de contorno específicas, como apoyos y cargas, no hemos encontrado soluciones exactas para el caso particular que nos ocupa, con cuatro puntos de apoyo en los vértices y una carga puntual central. Para el caso de tres apoyos, tampoco se dispone de soluciones. Por lo tanto, se modelará el problema mediante el uso de elementos finitos para obtener una solución precisa y adecuada.

### 2.3 Estudio Dinámico Modal:

[9] El análisis modal es una técnica de análisis dinámico de estructuras. Tiene como objetivo la estimación de propiedades dinámicas como las frecuencias y los modos naturales al igual que el amortiguamiento. El análisis modal puede ser teórico o experimental, el teórico se basa en técnicas analíticas o simulaciones, el experimental se basa en ensayos.

Las formas modales representan los patrones de vibración que una estructura exhibe a ciertas frecuencias naturales. Cada forma modal tiene una frecuencia característica asociada, que es la frecuencia natural a la cual la estructura tiende a vibrar. Además, el análisis modal permite determinar cómo se distribuye la energía de vibración a lo largo de la estructura.

Este tipo de análisis es crucial para evaluar la estabilidad y el rendimiento de estructuras y sistemas mecánicos, especialmente aquellos que están sujetos a cargas dinámicas o vibraciones, como puentes, edificios, aviones y vehículos. También es útil en la detección y diagnóstico de problemas estructurales y para el diseño de sistemas que sean más resistentes a vibraciones o impactos.

El análisis modal se realiza utilizando técnicas computacionales como el método de elementos finitos, así como experimentales mediante pruebas de vibración en laboratorio o en campo. Los resultados del análisis modal permiten a los ingenieros optimizar diseños y mejorar la seguridad y eficiencia de las estructuras y sistemas.

[10] La caracterización modal de una placa con cuatro apoyos fijos en sus vértices, sin estar afectada por ningún supuesto de carga, se puede entender de la siguiente expresión:

$$Frecuencia\ natural\ (Hz) = \frac{\lambda_i^2}{2\pi a^2} \left[ \frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} ; i = 1, 2, 3 \dots \quad (35)$$

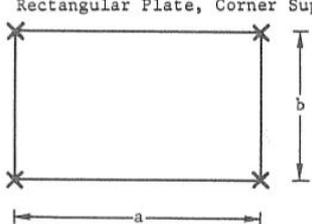
Description	$\lambda_1^2$ and Remarks		
	$\frac{a}{b}$	$\lambda_1^2$	$\lambda_2^2$
1. Rectangular Plate, Corner Supports			
	1.0	7.12	15.8
	1.5	8.92	21.5
	2.0	9.29	27.5
	2.5	9.39	35.5
	$\nu = 0.3$ ; Ref. 11-50		

Figura 6, detalle de la caracterización modal de una placa rectangular.

Significado de los parámetros:

a = ancho de la placa.

b = longitud de la placa.

h = altura de la placa.

C = Borde de sujeción.

E = Módulo de elasticidad.

$\gamma$  = Masa por unidad de área de la placa.

$\nu$  = Coeficiente de Poisson.

Para cualquier caso que conlleve una modificación de una placa con cuatro apoyos en los vértices sin masas adicionales, no existen soluciones exactas para otros escenarios que incluyan diferentes condiciones de masa. Por lo tanto, se recurrirá a la modelización por elementos finitos para abordar estos casos y obtener resultados precisos y confiables.

#### 2.4 Cálculo de errores:

Se van a calcular varios errores absolutos y relativos con la finalidad de establecer criterios para considerar parámetros como válidos o nulos. El cálculo del error absoluto y relativo es una forma de medir la precisión de una medición o cálculo en comparación con un valor verdadero o aceptado.

- Error absoluto: el error absoluto se calcula como la diferencia entre el valor medido (o calculado) y el valor verdadero (o aceptado). La fórmula es la siguiente:

$$\text{Error absoluto} = |\text{Valor medido} - \text{Valor verdadero}| \quad (36)$$

- Error relativo: El error relativo mide el error absoluto en relación con el valor verdadero. Se expresa como un porcentaje y se calcula con la siguiente fórmula:

$$\text{Error relativo} = \left( \frac{\text{Error Absoluto}}{\text{Valor verdadero}} \right) \times 100\% \quad (37)$$

### Capítulo 3. Análisis Experimental de la Placa en el Laboratorio:

#### 3.1 Material utilizado:

Antes de entrar en detalle con la ejecución de los análisis realizados, se van a nombrar y explicar los elementos utilizados en el proceso experimental.

##### Placa:

Se trata de una placa de madera con posibles características isotrópicas, lo que significa que sus propiedades físicas, como la resistencia y la densidad, son uniformes en todas las direcciones. Está diseñada en una forma prismática rectangular, con dimensiones precisas de 2.460 metros de largo, 1.244 metros de ancho y un grosor de 0.02 metros. Su superficie es plana y lisa, sin imperfecciones notorias. La madera utilizada es de alta calidad, proporcionando durabilidad y resistencia. Esta placa se utiliza comúnmente en aplicaciones que requieren materiales con estabilidad estructural y consistencia en sus propiedades mecánicas. En la siguiente imagen se muestra la sección de estudio (placa rectangular).

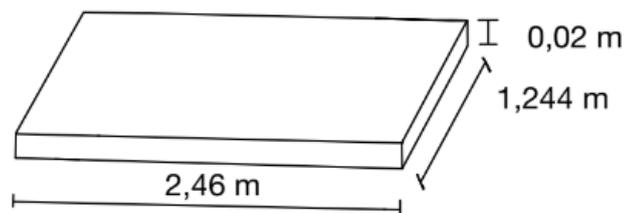


Figura 7, croquis de la sección de estudio.

Presenta un acabado superficial liso ya que está diseñada para un uso experimental de simulación de estructuras (Tableros, puentes...).

Las características del material no se conocen, las obtendremos más adelante en base a los distintos estudios realizados, por lo que vamos a partir de los siguientes valores:

<b>Propiedades iniciales de la placa de madera</b>	
Densidad	572 kg/m <sup>3</sup>
Límite Elástico	1 × 10 <sup>10</sup> Pa
Coeficiente de Poisson	0,3

Tabla 1, Características iniciales de la placa de madera.

En el estudio de la placa de madera isotrópica, es necesario un proceso de pesaje, cabe destacar la complejidad de pesar un objeto de dimensiones tan grandes, pero se pudo conseguir con la colocación (de la placa) en una posición de equilibrio sobre una báscula, cómo se puede observar en la siguiente imagen.



Figura 8, detalle del posicionado de la placa.

Se tomaron 5 medidas, para asegurar la repetibilidad, y se realizó un promedio para obtener la masa promedio. Los datos quedaron registrados en la **Tabla 2**:

<b>Medidas masa de la placa de madera</b>	
1º Medida	35,3 kg
2º Medida	35,4 kg
3º Medida	35,1 kg
4º Medida	35,7 kg
5º Medida	35,7 kg
<b>Media</b>	35,45 kg
<b>Dispersión</b>	0,300 kg

Tabla 2, Medidas de la masa de la placa de madera.

#### Caballetes:

La placa de estudio, mencionada anteriormente, queda apoyada gracias a cuatro caballetes de acero en el primero ensayo y tres en el segundo, mostrados en la siguiente imagen. Estos apoyos simulan el efecto de los apoyos fijos que, como veremos más adelante, restringen cualquier tipo de desplazamiento.



Figura 9, detalle de uno de los caballetes.

### Instrumentación:

A lo largo de los diferentes ensayos, se han utilizado diversos dispositivos, los cuales, han permitido tomar y registrar los diferentes datos de los estudios realizados.

- **Dispositivo láser:** equipo empleado para medir la diferencia de desplazamiento que sufre la placa a lo largo de los ensayos. Se sitúa en el punto medio de la placa para obtener la flecha



*Figura 10, dispositivo láser utilizado en los ensayos.*

Algunas de sus características más importantes son:

- Alta resolución: 8  $\mu\text{m}$ .
- Función del zoom-Linealidad:0,1%(modo-resolución).
- Tiempo de reacción: < 660  $\mu\text{s}$  (modo de velocidad).
- Capacidad de medición con reflejos, brillo o colores muy saturados.

El láser deberá estar a  $12\pm 6$  cm en eje z (eje vertical) del punto de medición para asegurar su precisión.

- **Tarjeta de adquisición de datos:** Utilizada para trasladar la información recogida por el dispositivo láser a un ordenador en el cual poder registrarla y procesarla. La tarjeta utilizada es SIRIUS HD-SGT, se puede observar su aspecto en la siguiente **Figura 11:**



*Figura 11, tarjeta de adquisición de datos SIRIUS HD-SGT.*

Este equipo está compuesto por varios puertos como:

- Salida tipo USB para conexión en ordenador.
  - 16 entradas tipo D-USB para conectar sensores.
  - Salida de alimentación para conectar el láser.
  - Entrada de alimentación de corriente eléctrica.
- **Software de procesamiento de datos:** Se ha utilizado el software "DEWESoftX2" versión SP10. Gracias a este software, se puede registrar a tiempo real la información recibida por el dispositivo láser, siendo capaz de grabarla y guardarla para una posterior gestión de datos.

Una vez se ha comentado los diferentes instrumentos que intervienen en el ensayo, se va a explicar la disposición de estos en los estudios a realizar. Se van a estudiar dos casos, un primero en el que se apoyará la placa sobre cuatro apoyos y un segundo en el que se apoyará sobre tres.

- **Caso 1: placa con cuatro apoyos.**

En primer lugar, se colocará la placa sobre los cuatro apoyos fijos, situados de forma simétrica sobre cada una de las cuatro esquinas. Los apoyos fijos, se van a simular con cuatro caballetes de acero fijados al suelo como se observa en las siguientes imágenes:



*Figura 12, detalle de la placa apoyada sobre los caballetes.*



Figura 13, detalle de la placa apoyada sobre los caballetes.

Después se situará el dispositivo láser de medición de la diferencia de desplazamiento de la placa, este equipo tiene que ir colocado en el centro de la placa para medir el delta en ese punto.



Figura 14, láser de medida situado en el centro de la placa

El último paso consistirá en conectar correctamente los cables con la tarjeta de adquisición de datos la cual registrará la información recibida en el ordenador a través del programa mencionado anteriormente (software " DEWESoftX2 ").

Una vez se han realizado todos los pasos mencionados hasta ahora, ya se puede comenzar con el ensayo.

- **Caso 2: Placa con tres apoyos.**

Al igual que en el caso 1 (Placa con cuatro apoyos), primero colocaremos la placa sobre tres apoyos fijos, los cuales han simulados con los caballetes de acero fijados al suelo.

La disposición de dichos apoyos va a estar distribuida de forma que la placa quede en una situación de equilibrio estático, para ello, se han de situar dos apoyos fijos (dos caballetes)

en dos extremos de la placa, mientras que el tercero quedará colocado en el centro del lado opuesto. Para una mayor comprensión de la situación, se puede observar la **Figura 15**.



*Figura 15, detalle de la placa con tres apoyos.*

El dispositivo láser y la conexión de los cables con la tarjeta de adquisición de datos, así como el registro en el software DEWESoft X2 se realizarán de la misma forma que en el caso 1 (Placa con cuatro apoyos).

### **3.2 Descripción de los ensayos realizados en el laboratorio:**

En este apartado se va a explicar en que ha consistido todo el proceso experimental con el objetivo de una mejor comprensión final del resto del TFG.

Se ha realizado un ensayo estático en dos condiciones distintas, una primera con la placa apoyada en cuatro puntos opuestos y una segunda, con la placa apoyada sobre tres puntos.

#### **3.2.1 Objetivos del ensayo:**

La realización de los ensayos en el laboratorio persigue dos claros objetivos:

- Estudiar el comportamiento de la placa ante unas situaciones de carga para poder estudiar diversos parámetros que nos ayudaran a caracterizarla.
- Obtener propiedades de la placa para comprobar que el "gemelo digital" que se va a reproducir con SAP2000 se corresponde con la placa de estudio.

#### **3.2.2 Realización del ensayo estático:**

Como se ha mencionado anteriormente, se va a realizar el ensayo estático experimental de dos formas distintas, primero con la placa apoyada en cuatro puntos fijos y segundo, con la placa apoyada en tres puntos fijos. Por ensayo estático se va a entender la parte del ensayo en la que se estudiarán parámetros estáticos, en este caso la flecha bajo carga.

### 3.2.2.1 Placa con cuatro apoyos fijos.

En este primer caso, se va a determinar el desplazamiento vertical del punto central de la placa tanto en respuesta libre, la única carga que soporta la placa es el propio peso de esta, como, para la respuesta libre con masas de 3kg situadas progresivamente en el punto central de la placa apoyada en cuatro puntos.

Para una mejor comprensión del ensayo, se van a definir 5 casos.

- Caso 1: respuesta libre bajo propio peso.
- Caso 2: respuesta libre bajo una masa de 3 kg.
- Caso 3: respuesta libre bajo dos masas de 3 kg.
- Caso 4: respuesta libre bajo tres masas de 3 kg.
- Caso 5: respuesta libre bajo cuatro masas de 3 kg.

En la siguiente imagen, se puede observar la situación del **caso 5** con las 4 masas situadas en el centro de la placa y el software de adquisición de datos interpretando la información.



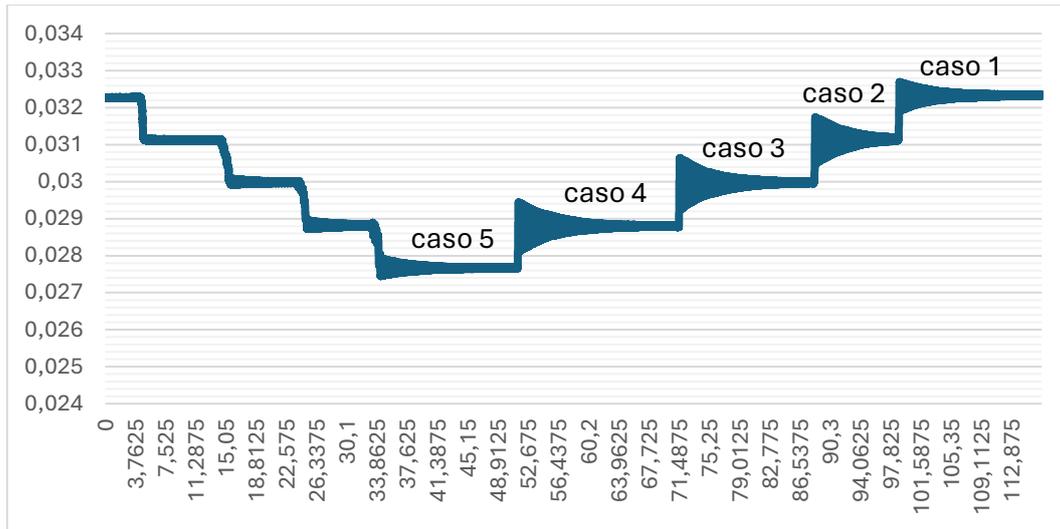
*Figura 16, detalle del ensayo con las 4 masas situadas.*

El software de adquisición de datos recibe diferentes valores del desplazamiento vertical a través del láser, estos valores los va tomando a lo largo de un tiempo de muestreo establecido antes de iniciar el ensayo.

Para tratar estos resultados, se ha utilizado la herramienta informática Microsoft Excel con la cual se ha podido generar un promedio de los diferentes datos de desplazamiento adquiridos en el ensayo y así generar un delta de desplazamiento en cada caso, tanto en respuesta libre bajo la influencia del propio peso de la placa como en respuesta libre con la colocación progresiva de masas de 3 kg.

Para calcular el desplazamiento promedio en cada uno de los cinco casos, se ha utilizado el comando "PROMEDIO" en Excel el cual genera la media aritmética para los valores seleccionados.

Con los datos obtenidos es posible generar una gráfica (**Gráfica 1**) en la cual se describe el desplazamiento medido por el láser frente al tiempo transcurrido. Como se puede observar, hay mucha oscilación en cada uno de los casos, se podrían haber dejado que cesasen las oscilaciones y obtener, en ese punto, la medida del desplazamiento, pero se han dejado ya que nos interesa "oscilar" para poder calcular, más adelante, la frecuencia propia y el amortiguamiento. Para poder generar el valor del desplazamiento, se ha calculado el promedio de los datos en cada una de las 5 situaciones.



Gráfica 1, definición de los datos experimentales en placa con cuatro apoyos.

En la siguiente **Tabla 4**, se reflejan los desplazamientos promedio en cada uno de los 5 casos de respuesta libre, así como la fuerza vertical que se genera en cada uno de los casos, aclarar que en caso 1 se va a tomar un caso de masa 0 como origen.

$$F_{\text{caso1}} = 0 \text{ kg} * 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0 \text{ N} \quad (38)$$

$$F_{\text{caso2}} = 3 \text{ kg} * 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 29,418 \text{ N} \quad (39)$$

$$F_{\text{caso3}} = 6 \text{ kg} * 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 58,836 \text{ N} \quad (40)$$

$$F_{\text{caso4}} = 9 \text{ kg} * 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 88,254 \text{ N} \quad (41)$$

$$F_{\text{caso5}} = 12 \text{ kg} * 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 117,672 \text{ N} \quad (42)$$

	Desplazamiento promedio (m)	Fuerza (N)
<b>Caso 1</b>	0,03232965	0
<b>Caso 2</b>	0,03113785	29,418
<b>Caso 3</b>	0,02996383	58,836
<b>Caso 4</b>	0,02879387	88,254
<b>Caso 5</b>	0,02766966	117,672

Tabla 3, resultados del análisis experimental en placa con cuatro apoyos.

Es necesario aclarar que el caso 1 no se trata de un desplazamiento promedio, es un desplazamiento referencia (offset), depende únicamente de la ubicación del láser.

Para calcular el delta (incremento de desplazamiento vertical) generado en cada una de las situaciones, debemos calcular la diferencia entre el valor inicial (valor generado en el caso 1) y los valores generados en el resto de los casos.

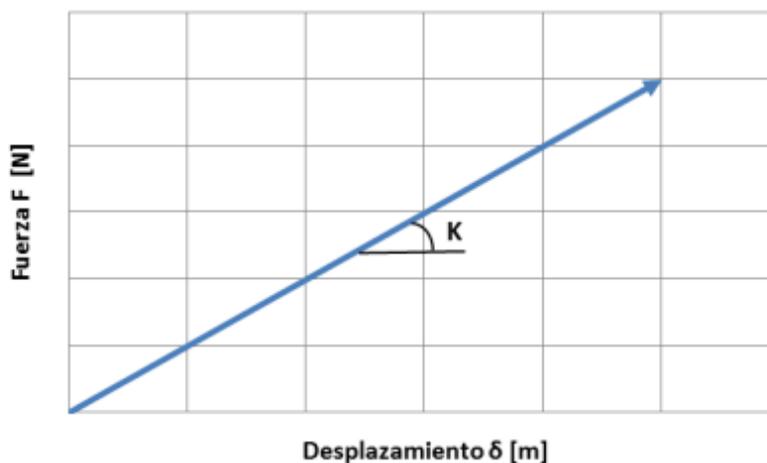
$$\Delta_{desplazamiento12} = 0,03232965 \text{ m} - 0,03113785 \text{ m} = 0,0011918 \text{ m} \quad (43)$$

$$\Delta_{desplazamiento13} = 0,03232965 \text{ m} - 0,02996383 \text{ m} = 0,0023658 \text{ m} \quad (44)$$

$$\Delta_{desplazamiento14} = 0,03232965 \text{ m} - 0,02879387 \text{ m} = 0,0035357 \text{ m} \quad (45)$$

$$\Delta_{desplazamiento15} = 0,03232965 \text{ m} - 0,02766966 \text{ m} = 0,0046599 \text{ m} \quad (46)$$

Con los datos obtenidos es posible el cálculo de la rigidez que posee la placa. La rigidez es la propiedad que posee un elemento estructural para oponerse a las deformaciones. La evolución de la rigidez (K) queda reflejada en la siguiente **Gráfica 2**:



Gráfica 2, definición de la rigidez K (N/m).

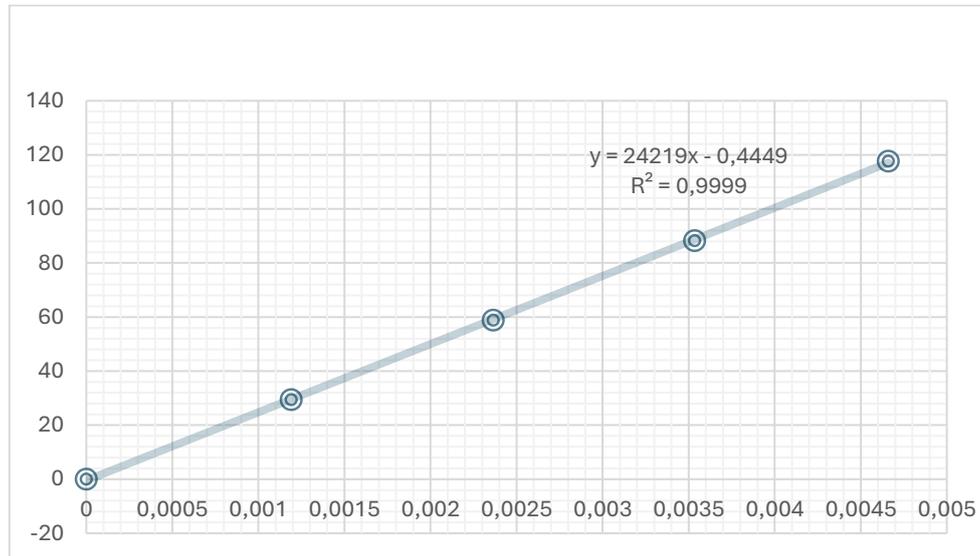
Descrito como expresión matemática, el cálculo de la rigidez queda de la siguiente manera:

$$K = \frac{\Delta F}{\Delta \text{Desplazamiento}} \quad (47)$$

Por lo tanto, podemos estimar que la rigidez de la placa de estudio es de:

$$K = \frac{29,418 \text{ N} - 0 \text{ N}}{0,03232965 \text{ m} - 0,03113785 \text{ m}} = \frac{29,418 \text{ N}}{0,0011918 \text{ m}} = 24488,33 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (48)$$

Para calcular la rigidez de una manera más exacta, teniendo en cuenta los cinco casos de carga, se puede crear una recta de regresión y, con la pendiente de esa recta (en la cual se tienen en cuenta todas las situaciones descritas previamente), podemos obtener la rigidez característica.



Gráfica 3, Recta de regresión para cálculo de la rigidez en placa con cuatro apoyos.

Como se observa en la **Gráfica 3**, el valor de la pendiente de la recta de regresión (24219 N/m) coincide prácticamente con el valor de la rigidez calculado en la **ec.(6)** (24488,33 N/m), el error absoluto y relativo generado es muy bajo (269,33 y 1,099 % respectivamente), por lo que se puede afirmar que el valor de la rigidez está calculado de forma coherente.

### 3.2.2.2 Placa con tres apoyos fijos.

En este segundo caso, se va a proceder igual que en el primero (placa apoyada sobre cuatro apoyos), se va a determinar el desplazamiento vertical del punto central de la placa tanto en respuesta libre, la única carga que soporta la placa es el propio peso de esta, como, para la respuesta libre con masas de 3kg situadas progresivamente en el punto central de la placa apoyada en tres puntos.

Aunque en la **Gráfica 1** se van a apreciar 7 casos distintos, se van a estudiar los 5 primeros casos, ya que así, más adelante, va a ser posible comparar las dos situaciones diferentes de estudio.

- Caso 1: respuesta libre bajo propio peso.
- Caso 2: respuesta libre bajo una masa de 3 kg.
- Caso 3: respuesta libre bajo dos masas de 3 kg.
- Caso 4: respuesta libre bajo tres masas de 3 kg.
- Caso 5: respuesta libre bajo cuatro masas de 3 kg.

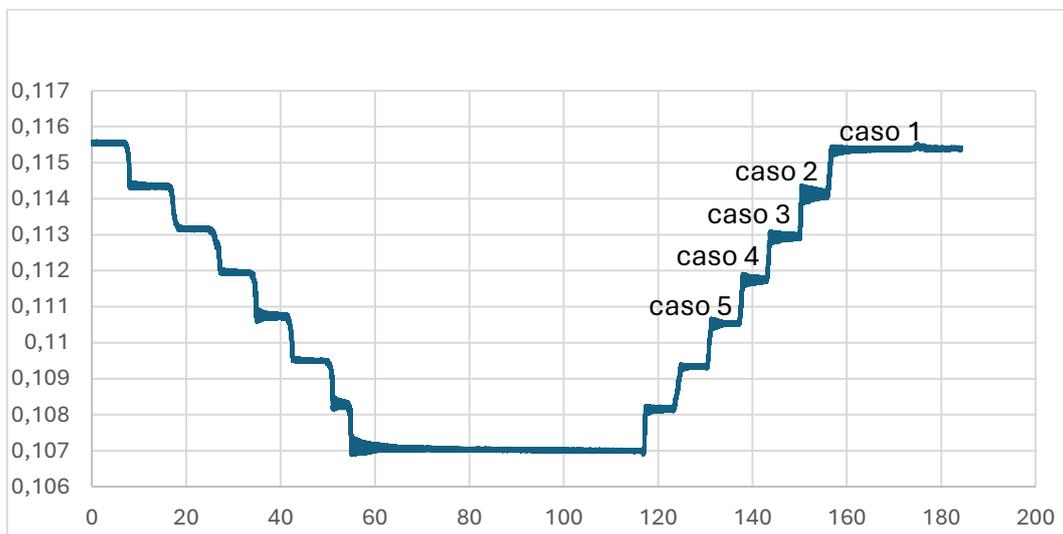


Figura 17, detalle de la placa cargada en situación "triapoyada".

El software de adquisición de datos recibe diferentes valores del desplazamiento vertical a través del láser, estos valores los va tomando a lo largo de un tiempo de muestreo establecido antes de iniciar el ensayo.

Para el tratamiento de datos se va a utilizar la misma herramienta informática que en el primer caso de ensayo. Con la ayuda de Microsoft Excel, se ha podido generar un promedio de los diferentes datos de desplazamiento adquiridos a lo largo del ensayo y así, generar un delta de desplazamiento en cada caso de carga.

Con los datos obtenidos es posible generar una gráfica (**Gráfica 4**) en la cual se describe el desplazamiento medido por el láser frente al tiempo transcurrido. Como se puede observar, hay mucha oscilación en cada uno de los casos, es por eso por lo que generamos el promedio para obtener un dato válido en cada una de las 5 situaciones.



Gráfica 4, definición de datos experimentales en placa "triapoyada"

En la siguiente **Tabla 4**, se reflejan los desplazamientos promedio en cada uno de los 5 casos de respuesta libre, así como la fuerza vertical que se genera en cada uno de los casos, aclarar que en caso 1 se va a tomar un caso de masa 0 como origen.

$$F_{\text{caso1}} = 0 \text{ Kg} * 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0 \text{ N} \quad (49)$$

$$F_{\text{caso2}} = 3 \text{ Kg} * 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 29,418 \text{ N} \quad (50)$$

$$F_{\text{caso3}} = 6 \text{ Kg} * 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 58,836 \text{ N} \quad (51)$$

$$F_{\text{caso4}} = 9 \text{ Kg} * 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 88,254 \text{ N} \quad (52)$$

$$F_{\text{caso5}} = 12 \text{ Kg} * 9,806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 117,672 \text{ N} \quad (53)$$

	Desplazamiento promedio (m)	Fuerza (N)
<b>Caso 1</b>	0,11536936	0
<b>Caso 2</b>	0,11412339	29,418
<b>Caso 3</b>	0,11293908	58,836
<b>Caso 4</b>	0,1117389	88,254
<b>Caso 5</b>	0,11052518	117,672

Tabla 4, resultados experimentales en placa "triapoyada".

Para calcular el delta (incremento de desplazamiento vertical) generado en cada una de las 5 situaciones, debemos calcular la diferencia entre el valor inicial (valor generado en el caso 1) y los valores generados en el resto de los casos.

$$\Delta_{\text{desplazamiento12}} = 0,11536936 \text{ m} - 0,11412339 \text{ m} = 0,001245976 \text{ m} \quad (54)$$

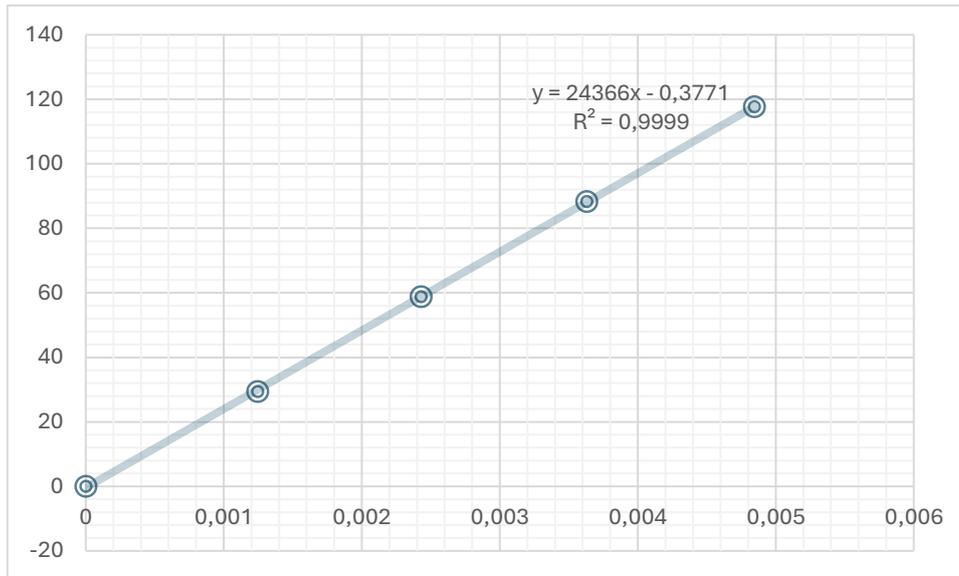
$$\Delta_{\text{desplazamiento13}} = 0,11536936 \text{ m} - 0,11293908 \text{ m} = 0,002430293 \text{ m} \quad (55)$$

$$\Delta_{\text{desplazamiento14}} = 0,11536936 \text{ m} - 0,1117389 \text{ m} = 0,003630469 \text{ m} \quad (56)$$

$$\Delta_{\text{desplazamiento15}} = 0,11536936 \text{ m} - 0,11052518 \text{ m} = 0,004844184 \text{ m} \quad (57)$$

Para el cálculo de la rigidez en esta situación se va a actuar de la misma forma que en la situación anterior, es decir, haciendo uso de la **ec.(47)** se va a calcular un valor de la rigidez estimado para un solo caso de carga, después, se calculará el valor de forma más exacta calculando la pendiente de la recta de regresión (**Gráfica 5**) de los cinco casos de carga y, se comprobará que los resultados coinciden.

$$K = \frac{29,418 \text{ N} - 0 \text{ N}}{0,11536936 \text{ m} - 0,11412339 \text{ m}} = \frac{29,418 \text{ N}}{0,001245976 \text{ m}} = 23610,4 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (58)$$



Gráfica 5, Recta de regresión para cálculo de la rigidez en placa con tres apoyos.

Se observa que, efectivamente, los valores de la rigidez son muy similares entre sí, en un caso de cálculo, utilizando una carga, obtenemos (23610,4 N/m) y, en el caso del cálculo de la recta de regresión utilizando todos los casos de carga, se obtiene un valor de pendiente (de rigidez) de 24366 N/m, los errores absolutos y relativos asociados (755,6 y 3,101% respectivamente), son lo suficientemente pequeños para determinar que el cálculo de la rigidez es correcto.

Como se puede apreciar en la **Gráfica 3** y **Gráfica 5**, la rigidez de la placa en la situación "triapoyada" es ligeramente más baja que en el caso "tetrapoyado". La rigidez de una placa depende en gran medida del tipo y la cantidad de apoyos que tenga. En general, una placa con más apoyos tenderá a ser más rígida porque los apoyos adicionales limitan más los desplazamientos y las deformaciones.



## **Capítulo 4. Calibrado de la Placa en SAP 2000:**

### **4.1 Introducción SAP 2000:**

Este proyecto ha sido ejecutado con el apoyo del programa informático SAP2000, una herramienta ampliamente reconocida a nivel global para el cálculo de estructuras.

SAP2000 es un programa de elementos finitos con una interfaz gráfica 3D basada en objetos, ofrece una integración completa para el modelado, análisis y diseño de una amplia gama de problemas de ingeniería estructural. Su versatilidad permite su aplicación en el diseño de puentes, edificios, estadios, presas, estructuras industriales, marítimas y otras infraestructuras.

El software cuenta con la capacidad de generar automáticamente cargas que simulan terremotos, vientos y tráfico vehicular, así como de realizar el dimensionamiento y la verificación automática de estructuras de hormigón armado, perfiles metálicos, aluminio y conformados en frío, siguiendo diversas normativas internacionales como las europeas, americanas, canadienses, turcas, indias, chinas, entre otras.

SAP2000 es una herramienta completa e intuitiva que permite realizar cálculos y análisis de estructuras complejas, incluyendo estudios estáticos y dinámicos, envolventes, aplicación de normativas de diseño, simulación de cargas de viento y frecuencias peatonales, así como análisis lineales, modales, de cargas móviles y en el dominio de la frecuencia, empleando una variedad de elementos como barras, elementos de cáscara y sólidos.

Para resolver cualquier duda surgida durante la utilización del programa, se ha hecho uso de la ayuda integrada en SAP2000 o de manuales de usuario disponibles [11]

### **4.2 Creación de la placa digital con SAP 2000:**

En este apartado se van a mostrar los pasos seguidos para la implementación de la placa de madera en SAP 2000, se van a diferenciar dos casos, un primero en el que la placa está fija gracias a cuatro apoyos y, un segundo caso en el que la placa está fija gracias a tres apoyos.

#### **4.2.1 Placa con cuatro apoyos.**

##### **4.2.1.1 Diseño de la Estructura.**

El primer paso va a ser la definición de la geometría del ensayo, para ello, el programa SAP 2000, contiene un catálogo con las geometrías más comunes para facilitar la creación de éstas, de esta manera se pretende simplificar la creación de los modelos pues solo habría que introducir ciertos parámetros para lograr el diseño seleccionado. Los pasos a seguir para la creación de la misma son los siguientes:

- Arrancar el programa, seleccionar la opción *“file”* → *“new model”*

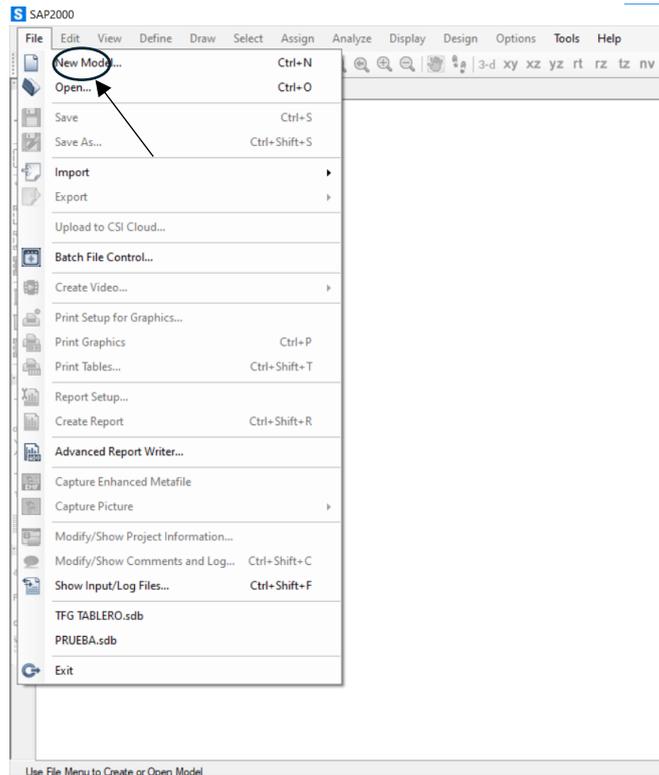


Figura 18, Pantalla de inicio SAP 2000.

- Aparecerá la siguiente ventana donde se podrá seleccionar el modelo con el que se va a trabajar. Seleccionar las unidades con las que se va a trabajar, en nuestro caso se va a trabajar con las unidades: Newton (N), metro (m) y grados centígrados (°C).
- También se va a seleccionar "Europe" en el apartado de "Default Materials" puesto que es la región en la que se está trabajando.
- Hecho esto, se va a seleccionar la geometría de estudio, al ser una placa de poco espesor, no se tiene una geometría definida por defecto, por lo que se seleccionará la opción "Grid Only".

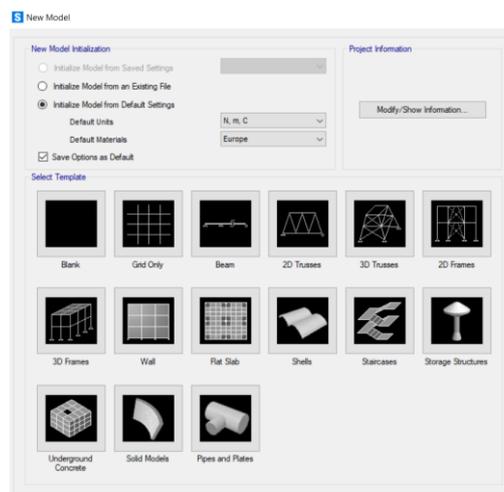


Figura 19, definición del modelo SAP2000.

- En la ventana disponible, se podría realizar directamente la simulación de la geometría de la placa con la aplicación de un modelo de elementos finitos adecuado, pero se va a proceder de otra manera usando el comando “extrusión” como se explicará más adelante, por lo que se dejarán los parámetros que aparecen por defecto y se seleccionará “OK”.

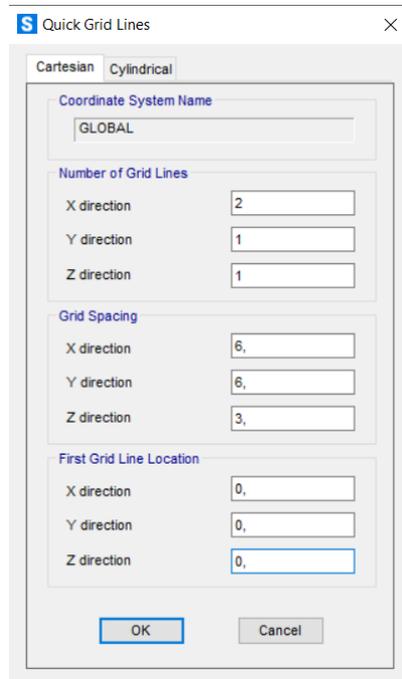


Figura 20, definición de las propiedades de la rejilla.

- A continuación, se va a cerrar la vista 3D haciendo “click” en la “x” del extremo superior derecho para trabajar con mayor comodidad, también aclarar que se va a trabajar en el plano XY ya que z va a ser el ancho.

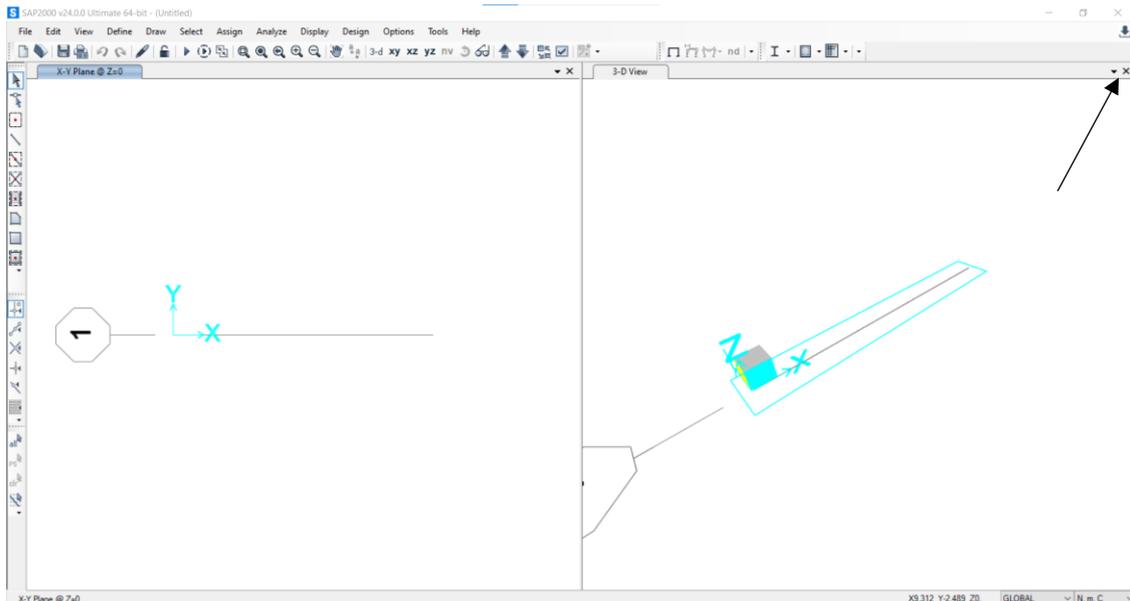


Figura 21, Pantalla completa SAP 2000.

- Se va a proceder a la creación de la geometría del problema, para ello, como se mencionó anteriormente, se va a utilizar la herramienta "extrude", es decir, se van a extruir una serie de puntos teniendo en cuenta la geometría real de la placa y la posición de los cuatro apoyos. Para una mayor claridad de los parámetros dimensionales que se han de introducir, observar los siguientes croquis de definición:

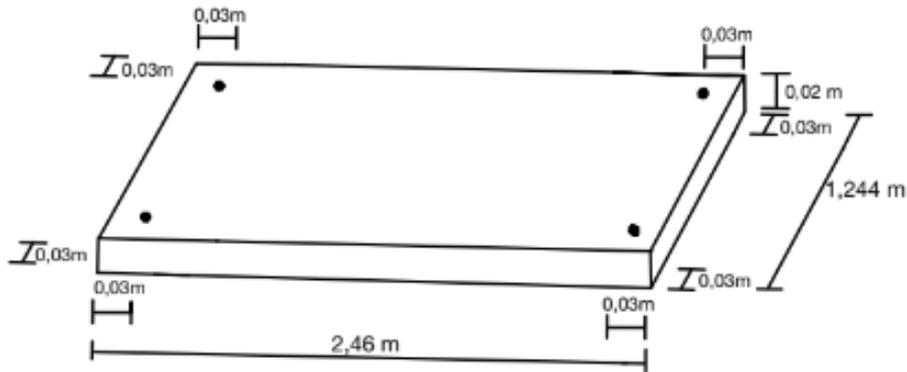


Figura 22, croquis de definición 3d.

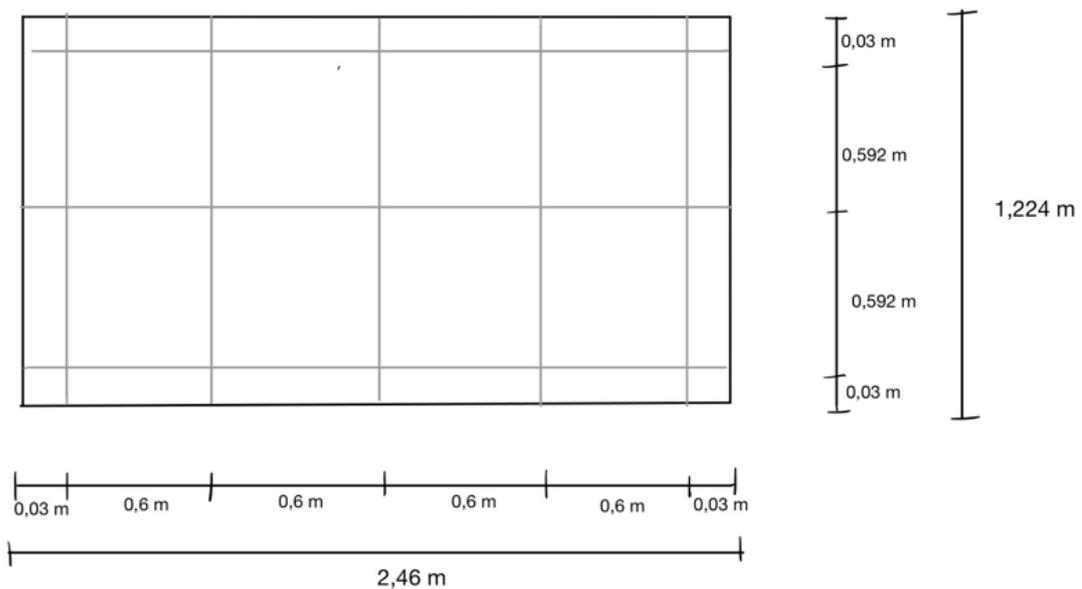


Figura 23, croquis de definición plano xy.

- Primero se va a crear un punto en el origen de coordenadas y con el punto seleccionado, se va a proceder a la extrusión.

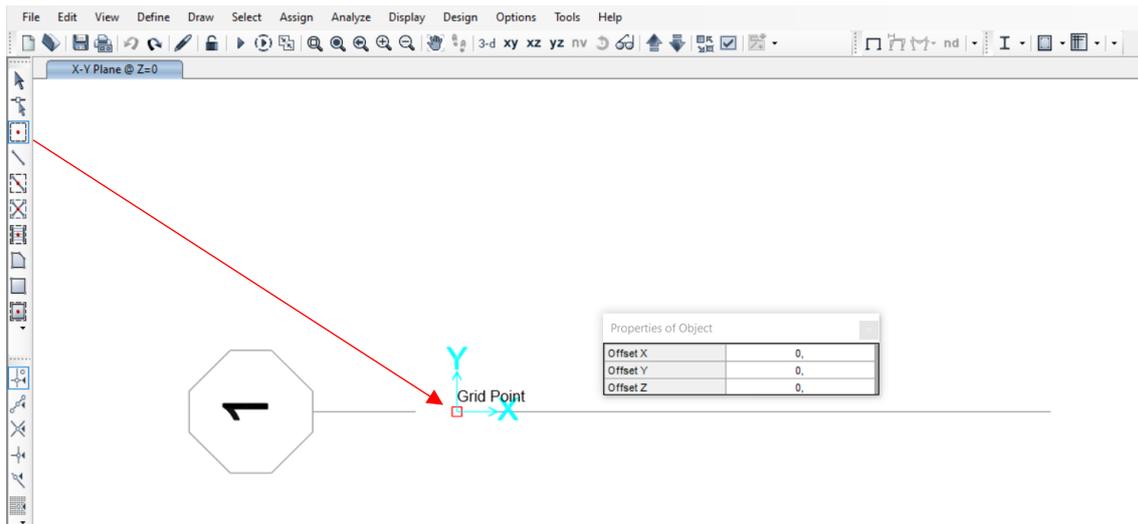


Figura 24, creación de un punto en el origen de coordenadas.

- Con el punto seleccionado, hay que seguir los siguientes pasos: (*Edit*) → (*Extrude*) → (*Extrude Points to Frames/Cables...*).

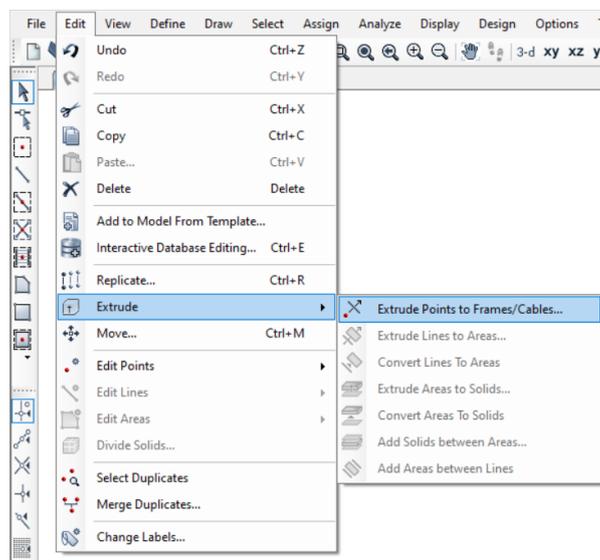


Figura 25, detalle del panel de selección de extrusión.

- Una vez se ha seleccionado la opción “*Extrude Points to Frames/Cables*”, aparecerá una nueva ventana en la cual hay que introducir los parámetros dimensionales para ir creando la geometría deseada, para ello es muy importante tener en cuenta las cotas tomadas de **Figura 22** y **Figura 23**. En primer lugar, vamos a extruir un segundo punto en la dirección x, punto a 0,03 m.

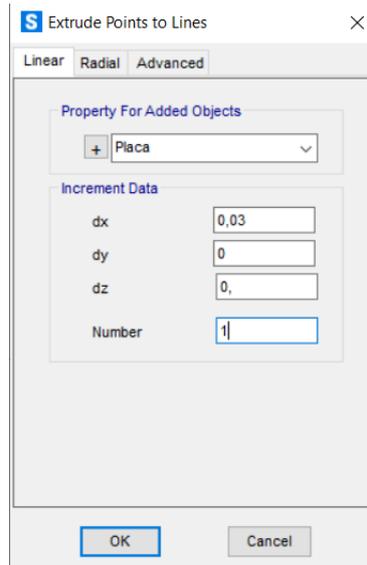


Figura 26, detalle de la creación del segundo punto por extrusión.

- Una vez tenemos creado el segundo punto, se procede a la creación de los cuatro puntos contiguos, los cuales, al ser equidistantes unos de los otros en el eje x (0,6 m), se van a crear de una sola vez añadiendo en "number" un 4.

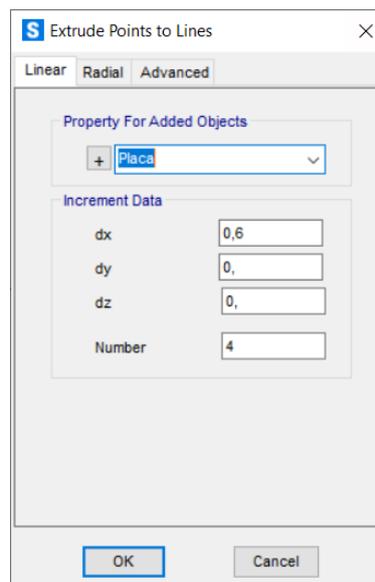


Figura 27, detalle de la extrusión de los cuatro puntos equidistantes.

- Para terminar con la fila de puntos del eje x, se seleccionará el último punto creado y se actuará de manera idéntica que en los pasos anteriores añadiendo en el eje x la distancia correspondiente (0,03 m). Si se han seguido todos los pasos correctamente, se debería tener algo idéntico a lo mostrado en la siguiente imagen:



Figura 28, detalle de los siete primeros puntos.

- Para continuar, se podría actuar como hasta ahora extruyendo puntos de uno en uno, pero existe una forma más rápida la cual consiste en replicar las barras (líneas azules) en la dirección del eje Y hasta tener una geometría final casi definida.
- Para replicar la barra creada en el eje x con sus siete puntos, primero se debe seleccionar la barra completa y actuar de la siguiente manera: (*Edit*) → (*Replicate*).

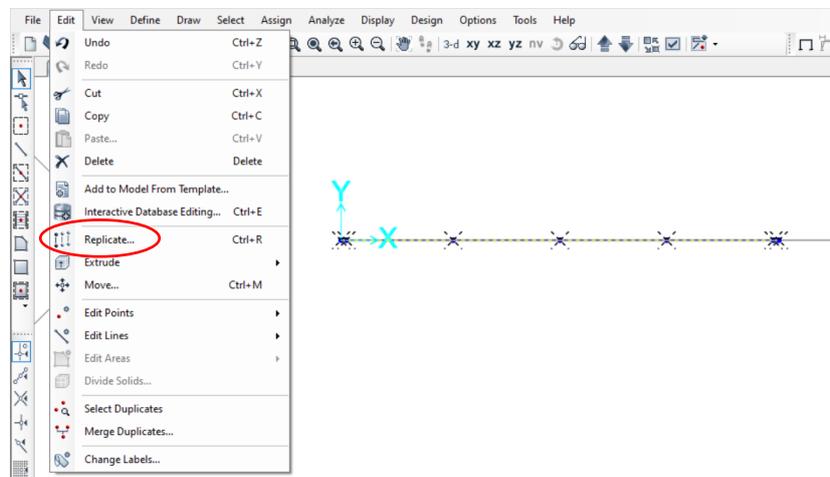


Figura 29, selección de la opción "Replicate".

- Una vez se ha seleccionado la opción "Replicate", aparecerá una ventana en la cual habrá que introducir los parámetros dimensionales que sean necesarios, en este caso, se va a replicar una vez en dirección eje Y: 0,03 m.

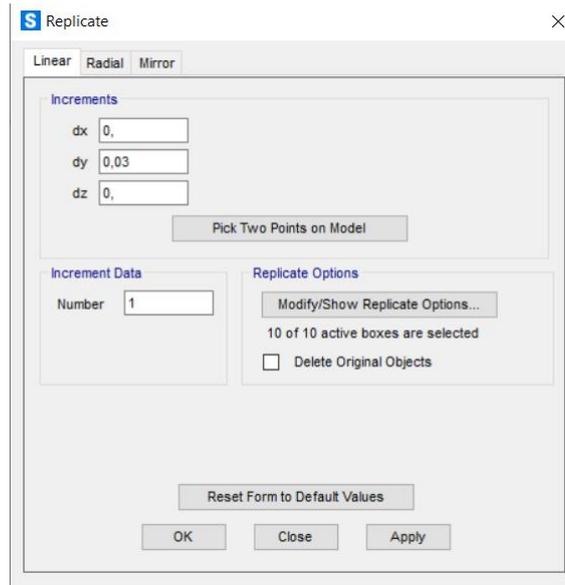


Figura 30, propiedades de la ventana "Replicate".



Figura 31, resultado de replicar la primera barra.

- Continuar replicando en dirección del eje Y, se puede replicar esta última barra creada en el paso anterior dos veces 0,592 m en el eje vertical, para ello, se debe seleccionar la barra mencionada y, en el desplegable de la **Figura 30**, añadir lo siguiente:

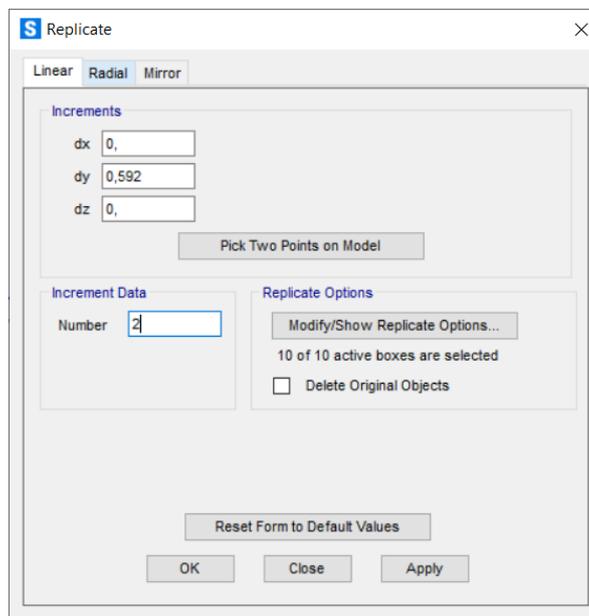


Figura 32, propiedades del menú "Replicate".

- En este punto se deben tener 4 barras creadas en la dirección Y, por lo que solo faltaría una a 0,03 m en vertical de la última para cumplir con esta etapa de creación

del croquis de definición. Para ello se ha de actuar como hasta ahora, se seleccionará la última barra creada en el anterior paso y se replicará 0,03 m en dirección Y.

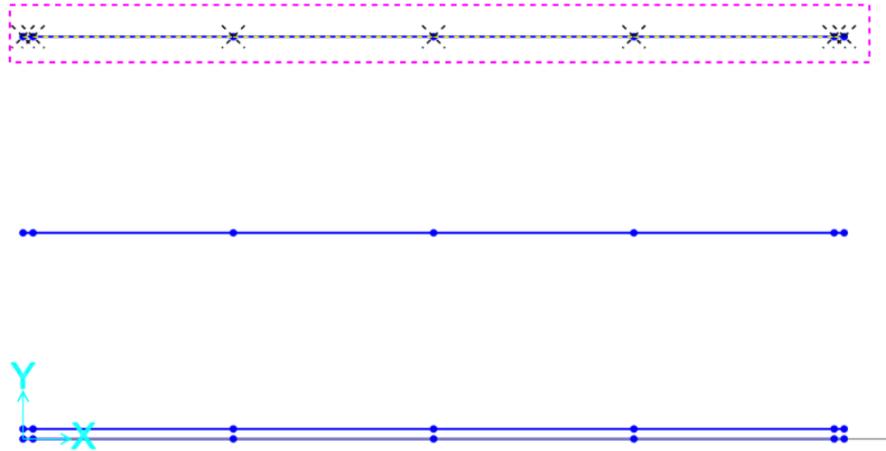


Figura 33, detalle de la selección de la última barra.

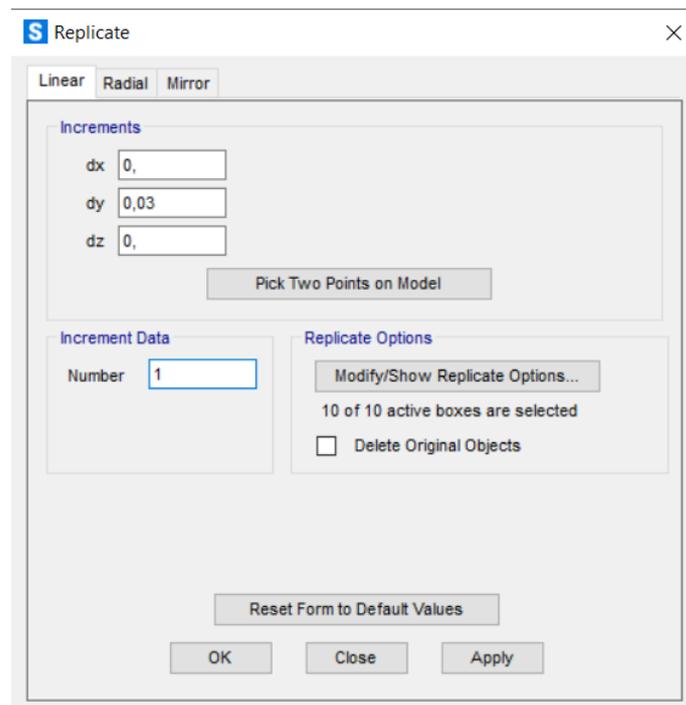


Figura 34, propiedades del menú "Replicate".

- Una vez se han realizado estas atapas de creación geométricos, se ha de tener algo idéntico a lo siguiente:

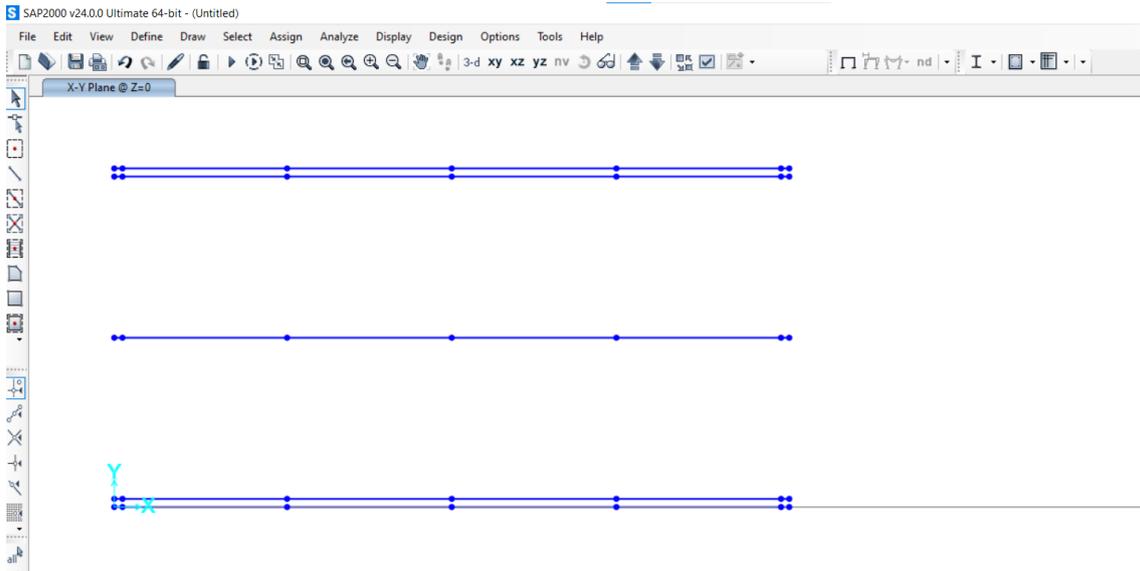


Figura 35, pantalla completa SAP 2000.

Para terminar con la creación del modelo, se ha de crear el mallado, para ello se va a actuar de la siguiente manera:

- Seleccionar la primera barra (barra azul de cota Y=0m) y seguir el siguiente orden de instrucciones: "Edit" → "Extrude" → "Extrude lines to areas".

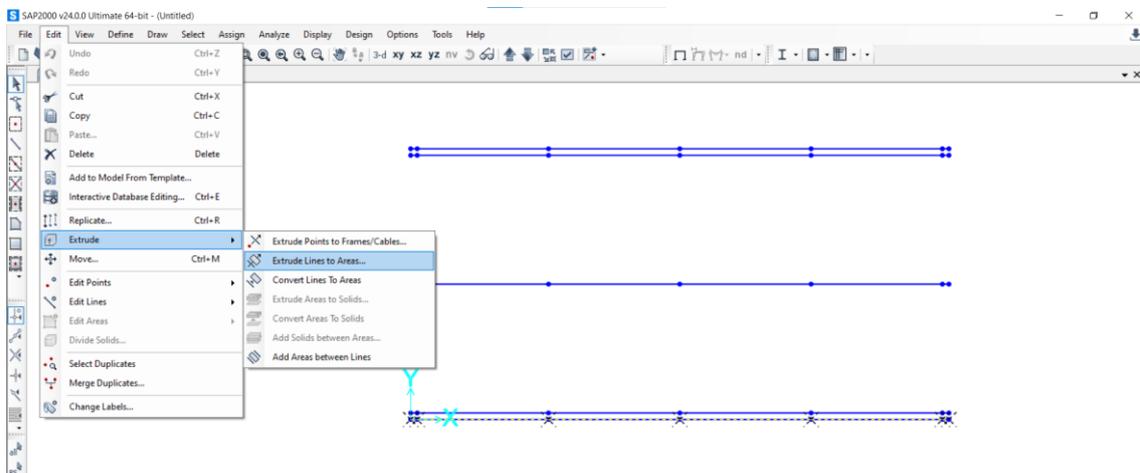


Figura 36, detalle del panel de selección "Extrude".

- En la ventana emergente, añadir la cota vertical 0,03 m una vez.

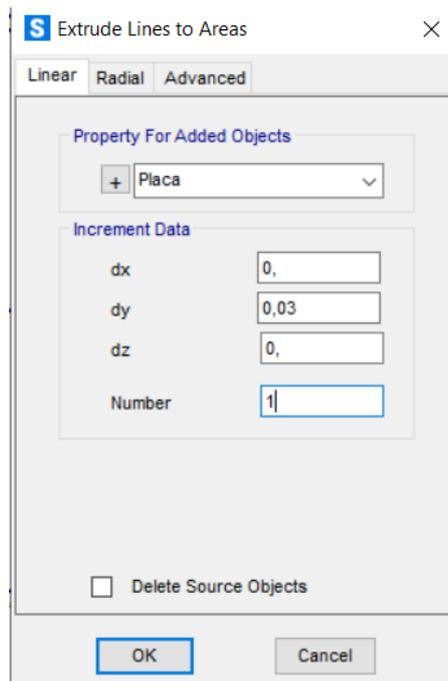


Figura 37, propiedades de cotas.

- Se observará que se han creado unas líneas de color rojo cerrando un mallado entre las dos barras azules en las cotas verticales más bajas, observar la siguiente imagen:

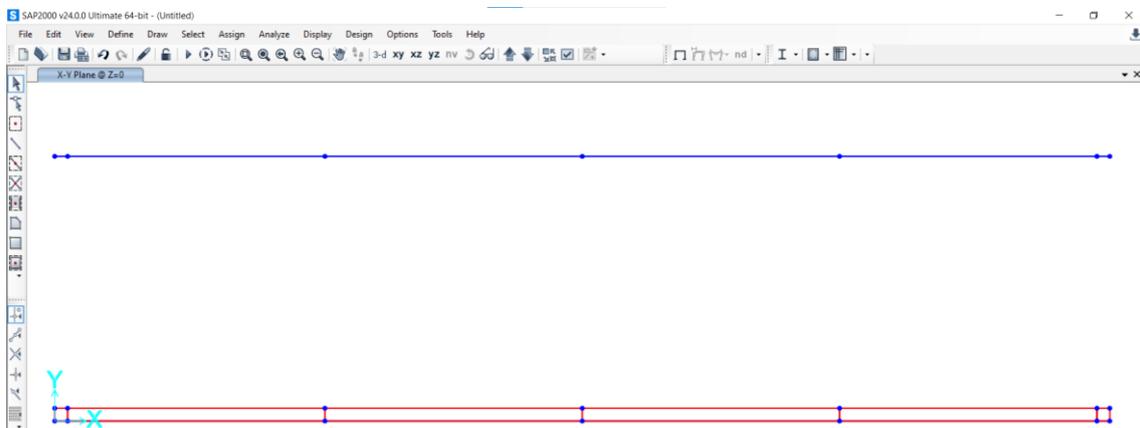


Figura 38, detalle del mallado.

- Continuar de la misma forma, seleccionar la segunda barra (cota Y = 0,03m), seleccionar "Edit" → "Extrude" → "Extrude lines to areas".

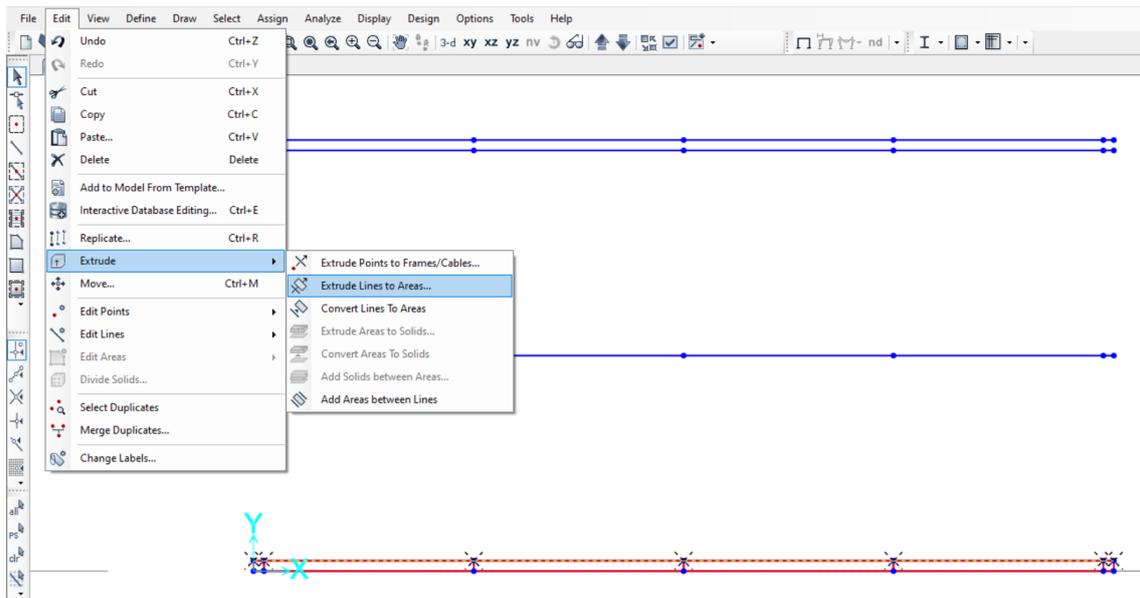


Figura 39, detalle del comando "Extrude" con la segunda barra seleccionada.

- En la ventana emergente se añadirán las propiedades necesarias para completar el mallado de las dos siguientes barras. Cota  $dy = 0,592$  m,  $Number = 2$ . Una vez se han cumplimentado esas celdas, seleccionar "OK".

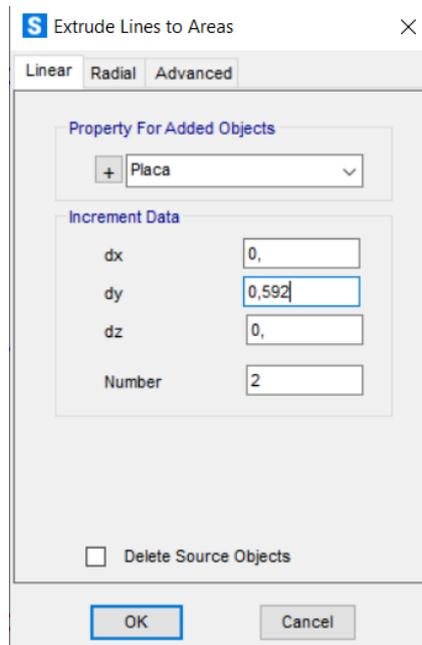


Figura 40, propiedades de la extrusión.

- En este punto se debería tener algo idéntico a lo siguiente:

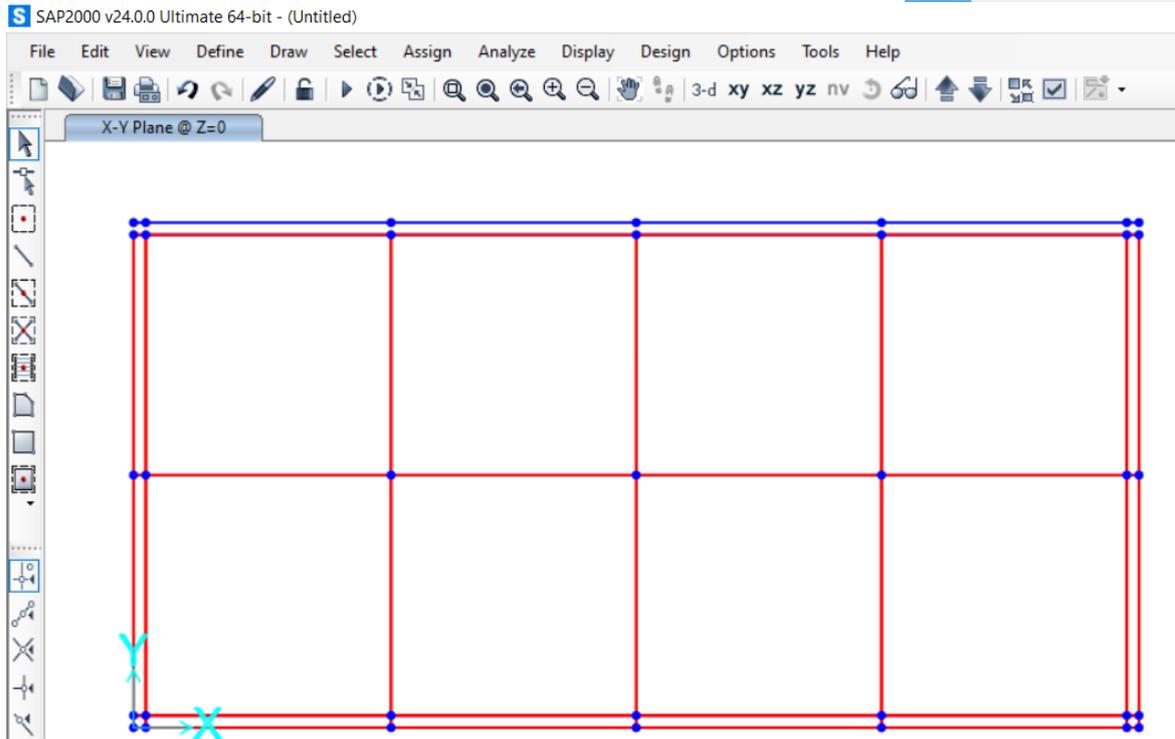


Figura 41, pantalla general SAP 2000.

- Como se observa en la **Figura 41**, falta por cerrar la malla entre las dos últimas barras (cotas Y = 1,214 m y cota Y = 1,244 m), para ello actuar como hasta ahora, seleccionamos la penúltima barra y seleccionamos: 'Edit' → "Extrude" → "Extrude lines to areas".

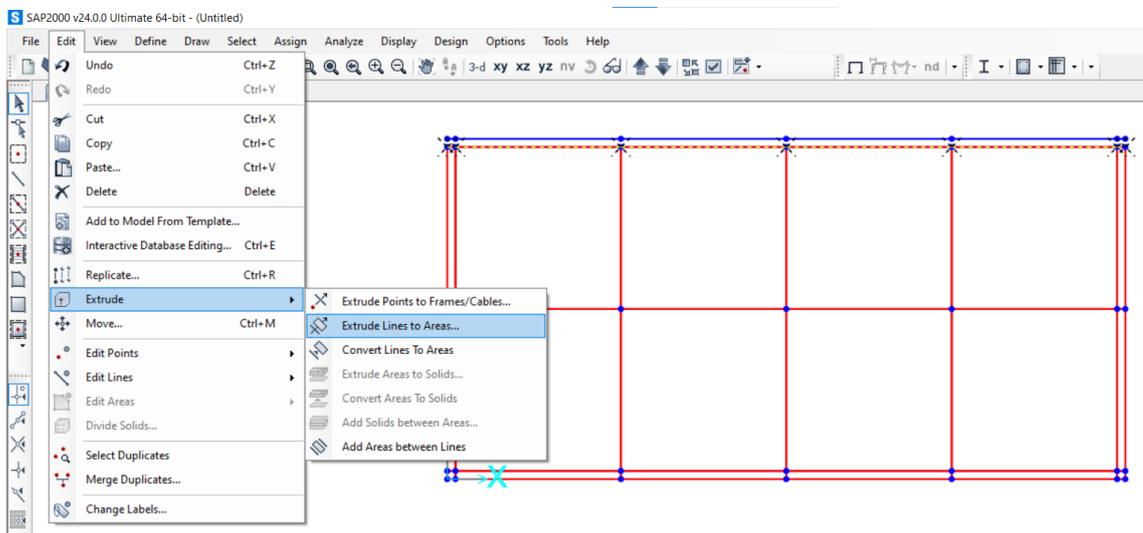


Figura 42, detalle del comando "Extrude" con la cuarta barra seleccionada.

- En la ventana emergente, añadir la cota Y = 0,03 m, en "number" → 1, para mayor claridad observar la siguiente imagen:

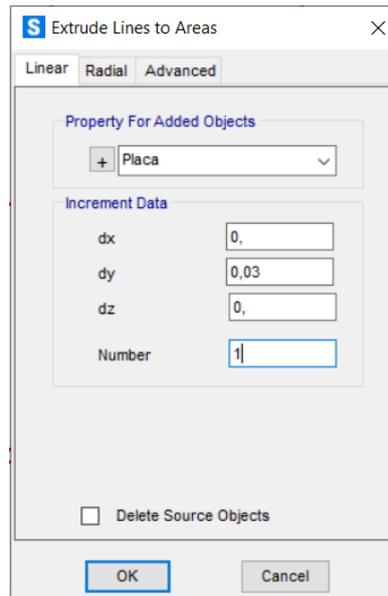


Figura 43, propiedades de la extrusión.

- En este punto se deben tener todas las líneas segmentadas en rojo y, creando una red de elementos finitos entre ellas, como se muestra en la siguiente imagen:

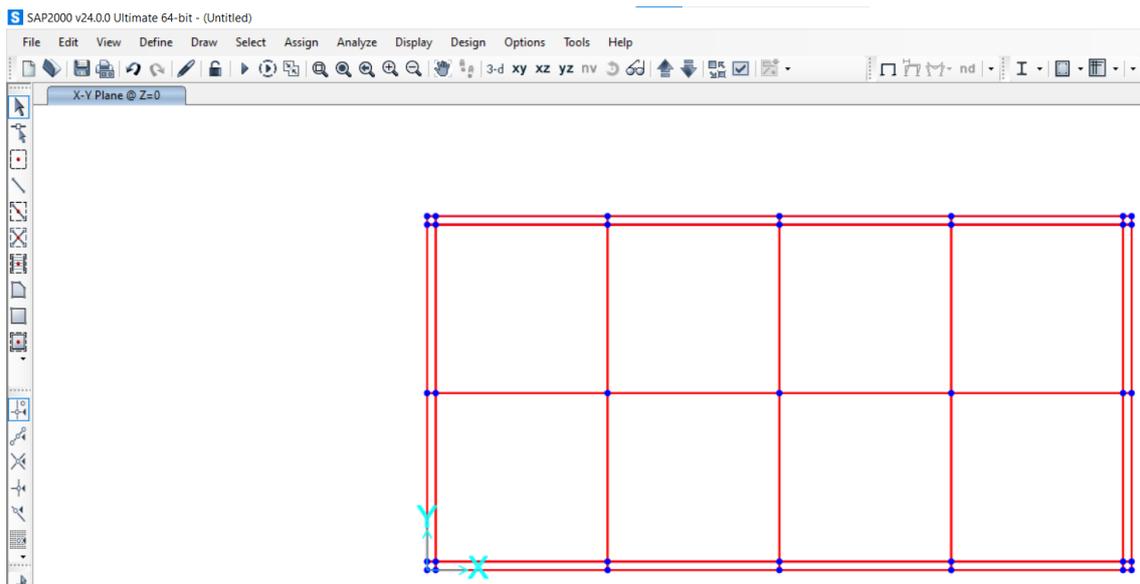


Figura 44, Pantalla general SAP 2000 con el mallado creado.

Para terminar con la creación de la geometría hay que asegurarse de que no hay ninguna barra creada (*Frame*), esto se debe a que las barras falsearían los resultados ya que tienen peso propio, para asegurarse, se puede seleccionar todo el conjunto y leer en el extremo izquierdo inferior si existe algún “*Frame*”.

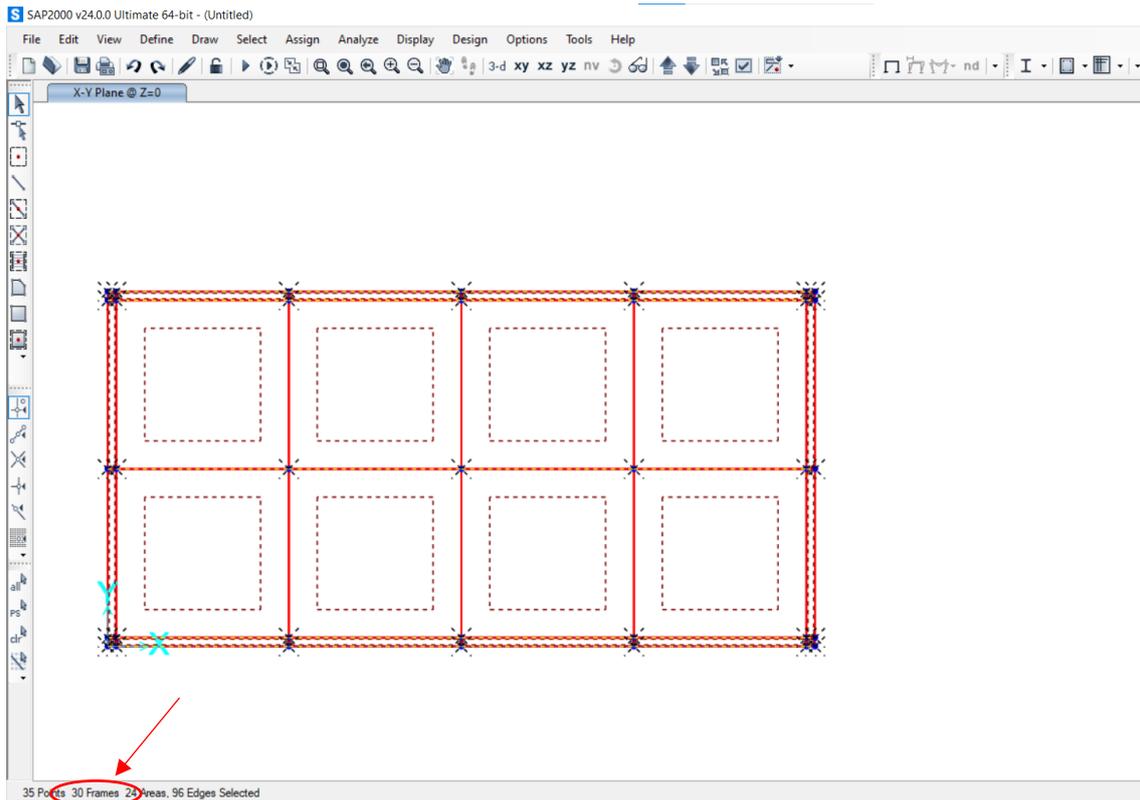


Figura 45, detalle de pantalla completa SAP 2000 con conjunto seleccionado.

Como se visualiza en la **Figura 45**, existen 30 frames creadas, para eliminarlas, se puede actuar de varias formas, se podría ir borrándolas de una en una o, se pueden seguir los siguientes pasos: "Select" → "Select" → "Properties" → "Frame Sections"

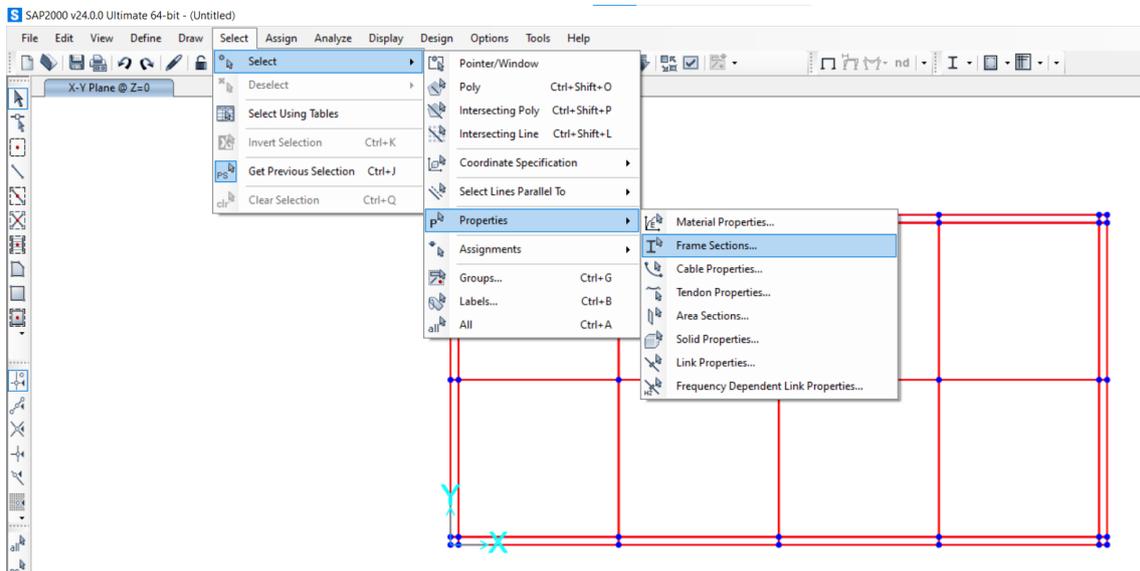


Figura 46, detalle de comandos a seleccionar.

En la ventana emergente, se ha de seleccionar "FSEC1" (única sección de barra creada por defecto) y se observará que todas las "frames" quedan marcadas.

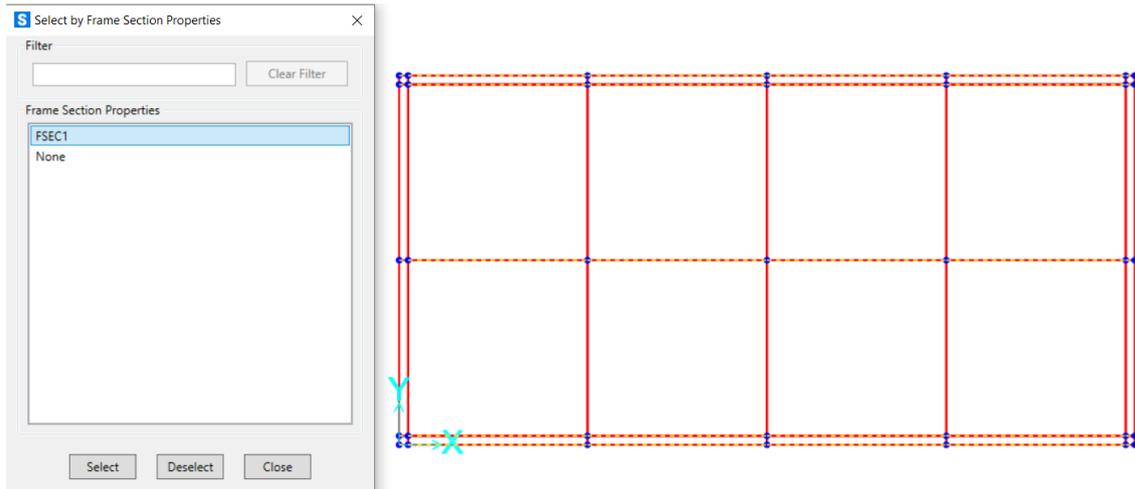


Figura 47, detalle del editor de "Frames".

Por último, presionar la tecla "supr" del teclado, todas las barras se habrán borrado y solo quedarían los segmentos delineados en rojo.

#### 4.2.1.2 Creación del Material.

Para la creación de materiales, SAP2000 cuenta con una base de datos con los principales materiales utilizados en construcción: hormigón, acero, aluminio... En este caso se va a utilizar otra propiedad en la que se diseñará el material deseado utilizando diferentes propiedades físicas.

Para ello, debemos seguir los siguientes pasos:

- Primero se seleccionará "Define" → "Materials"

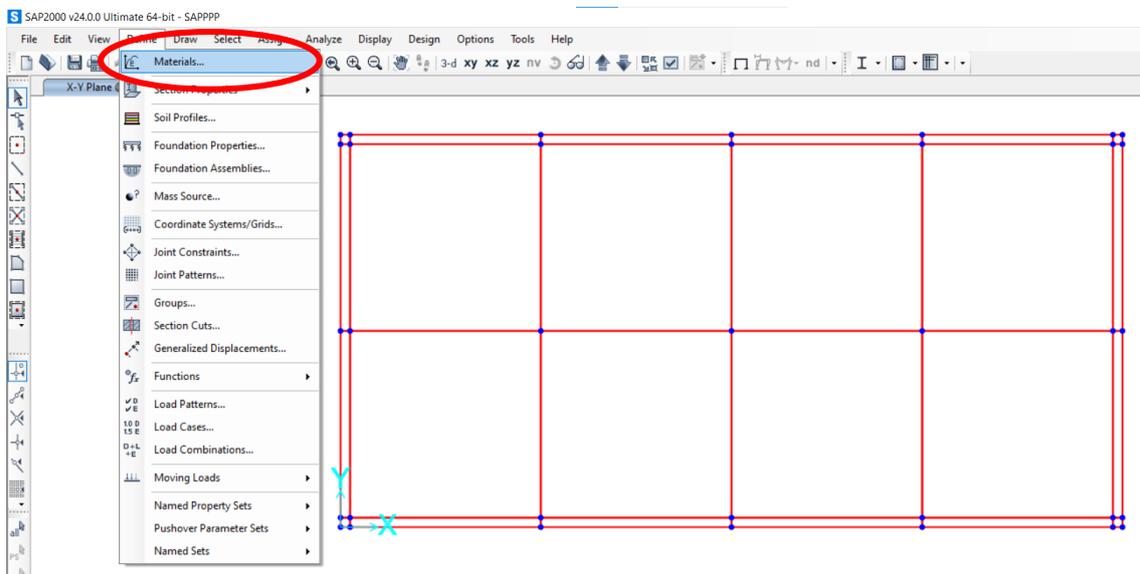


Figura 48, detalle de selección de la celda "Materials".

- Seleccionar "Add new material".

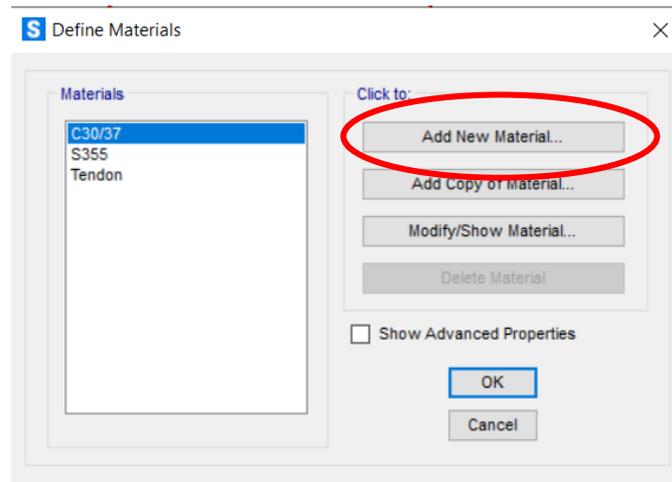


Figura 49, Ventana "Define Materials".

- En la venta emergente aparecerán varios desplegable, en este caso se seleccionará "Region" → "Europe"; "Material Type" → "Other". Escogiendo esas opciones los dos últimos desplegable dejaran de mostrarse seleccionables.

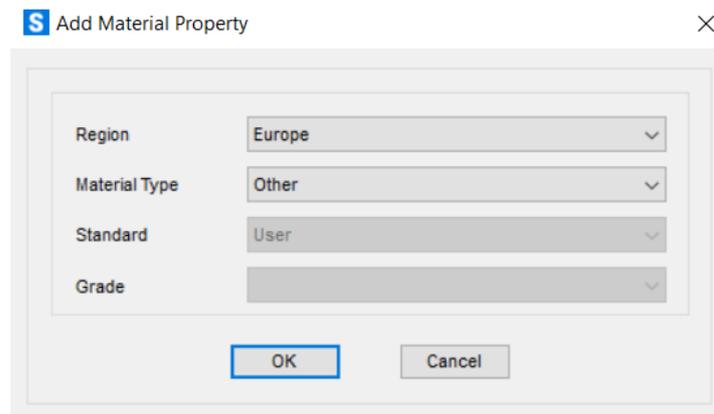


Figura 50, detalle de las propiedades a seleccionar.

- A continuación, habrá que rellenar varias celdas con datos de propiedades del material, en este caso el material es madera isotrópica, se le añadirá un peso por unidad de volumen aproximado de:

$$Weight\ per\ unit\ of\ volume = \frac{35,45\ kg \times 9,8\ \frac{m}{s^2}}{2,46\ m \times 1,244\ m \times 0,02\ m} = 5615,02\ \frac{N}{m^3} \quad (59)$$

Una densidad de:

$$Mass\ per\ unit\ of\ volume = \frac{35,45\ kg}{2,46\ m \times 1,244\ m \times 0,02\ m} = 572,5727\ \frac{kg}{m^3} \quad (60)$$

El módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson se van a estimar ya que el objetivo del ensayo consiste en la creación del "gemelo digital" que simule la placa de estudio. Para introducir unos datos que no sean muy "disparatados", se van a introducir un módulo de elasticidad de  $E = 1 \times 10^{10}$  Pa y un coeficiente de poisson de  $\nu = 0,3$ .

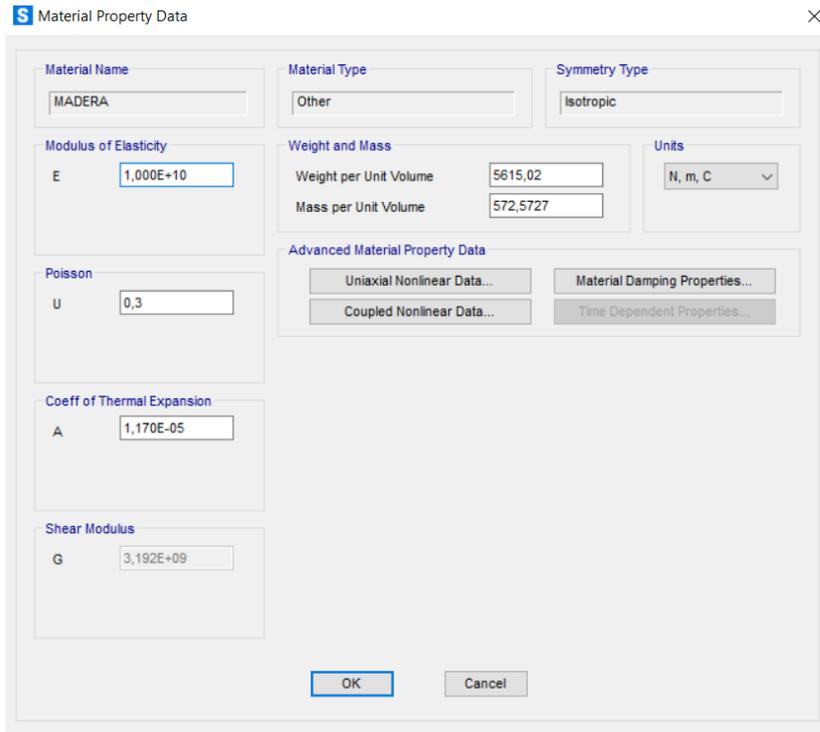


Figura 51, detalle de la ventana de definición del material.

#### 4.2.1.3 Definición y Asignación del Área.

Para la creación del área de estudio (con su grosor), SAP2000 cuenta con una base de datos donde poder crear la sección deseada, en este caso interesa una sección de grosor 0,02 m y con el material creado anteriormente (Madera).

Para llevar a cabo la creación de esta sección, debemos seguir los siguientes pasos:

- Primero se seleccionará "Define" → "Section Properties" → "Area sections".

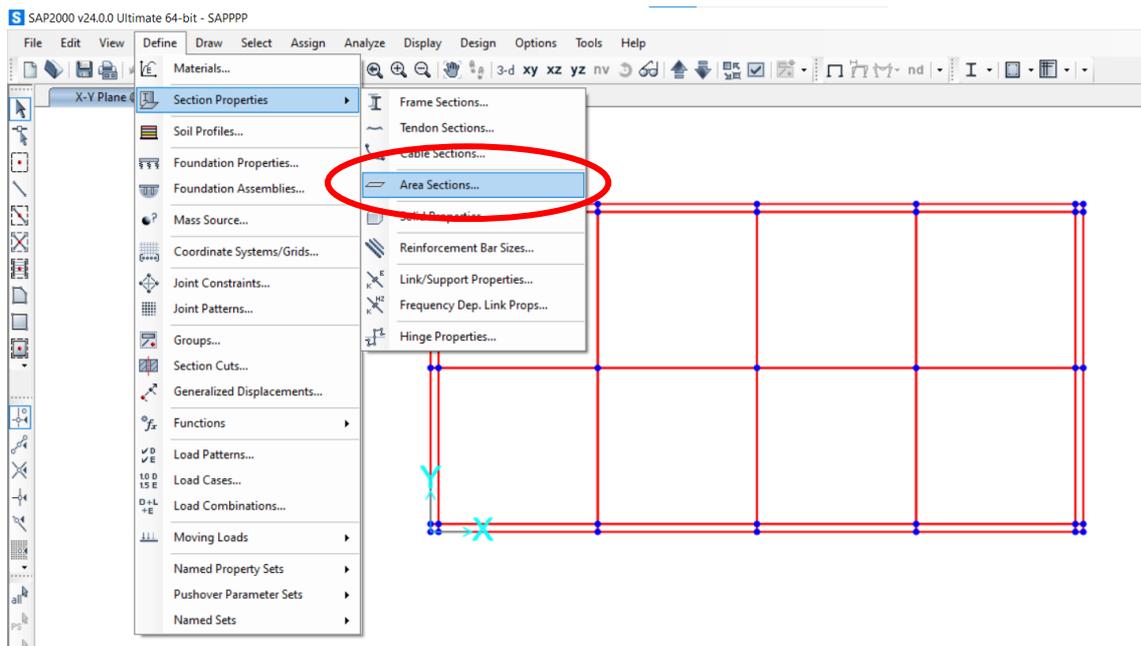


Figura 52, detalle de las celdas a seleccionar para la creación del área.

- En la ventana emergente al seguir los pasos de la imagen h, seleccionar ‘Add New Section’ para poder crear el área deseada.

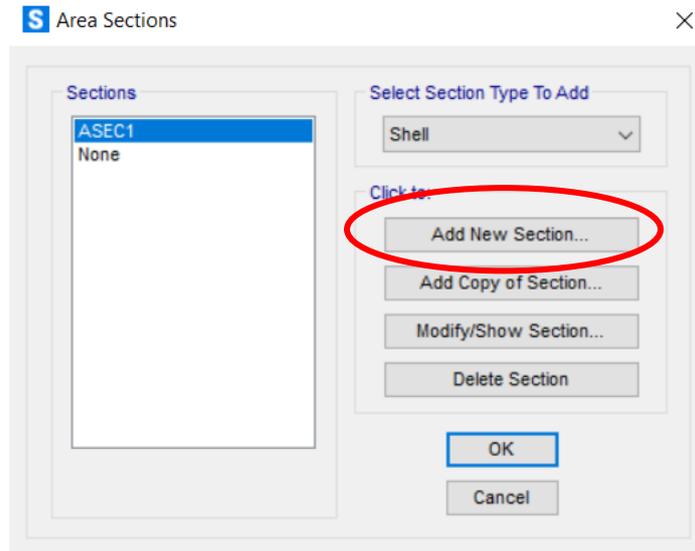


Figura 53, ventana emergente ‘Area Section’.

- En la ventana nueva, aparecerán varias celdas cumplimentables, en este caso se rellenarán o seleccionarán las siguientes opciones mostradas en la siguiente **Tabla 5**.

Opciones de selección ‘Add New Section’		
‘Section Name’	‘Tablero’	
‘Type’	‘Shell-Thin’	
‘Thickness’	‘Membrane’	0,02
‘Thickness’	‘Membrane’	0,02
‘Material Name’	‘MADERA’	

Tabla 5, parámetros a rellenar en la ventana de selección.

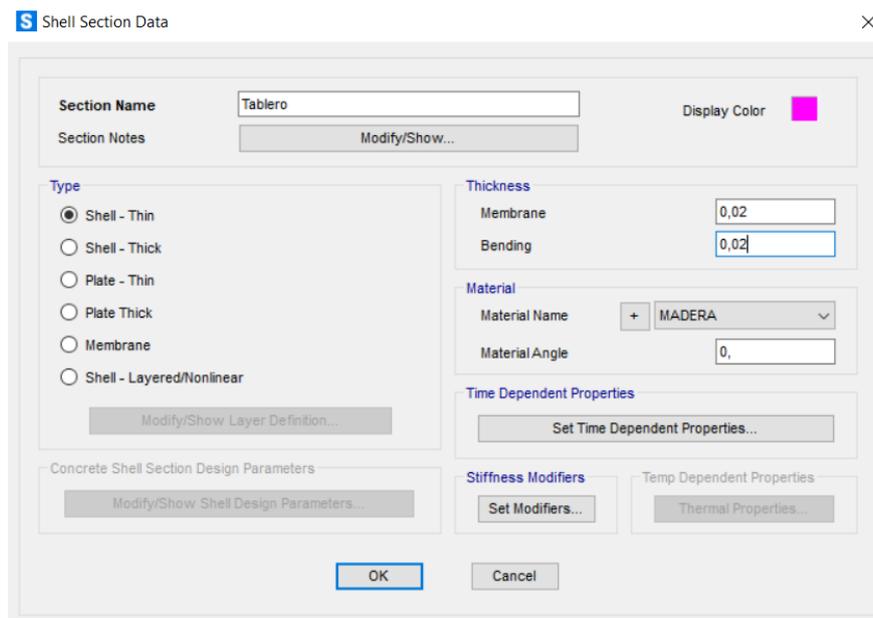


Figura 54, ventana ‘Shell Section Data’.

- Una vez se ha creado la sección de estudio correctamente, se debe asignar a el modelo creado, para ello, seleccionar todo el conjunto y seleccionar: "Assign" → "Area" → "Sections".

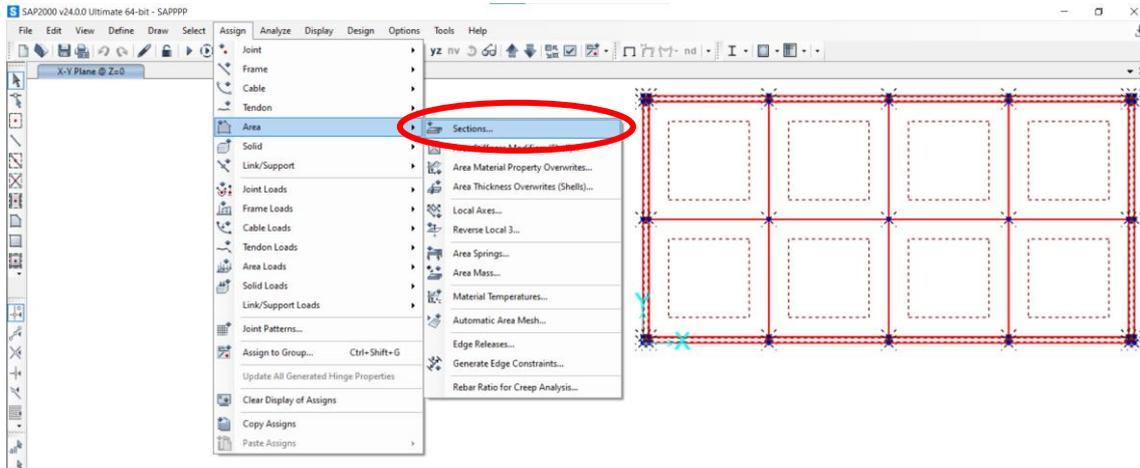


Figura 55, detalle de los pasos a seguir (con el conjunto seleccionado) para la asignación del área.

- Para la conclusión de este apartado de creación y definición de la sección de estudio, solo quedaría asignar el área, para ello, en la ventana emergente que aparecerá una vez se hayan seguido los pasos de la **Figura 55**, seleccionar "Tablero".

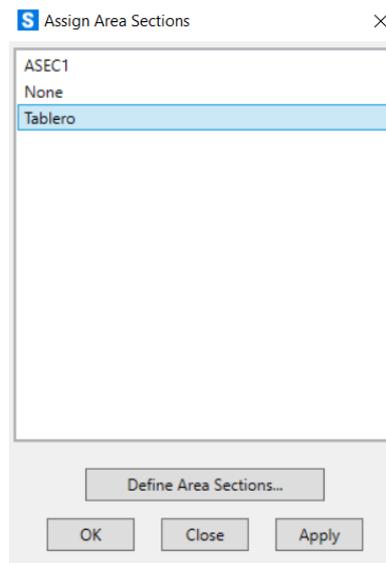


Figura 56, selección de la opción "Tablero".

- Una vez se han seguido correctamente todos los pasos hasta aquí, se ha de tener algo idéntico a lo mostrado en la siguiente imagen:

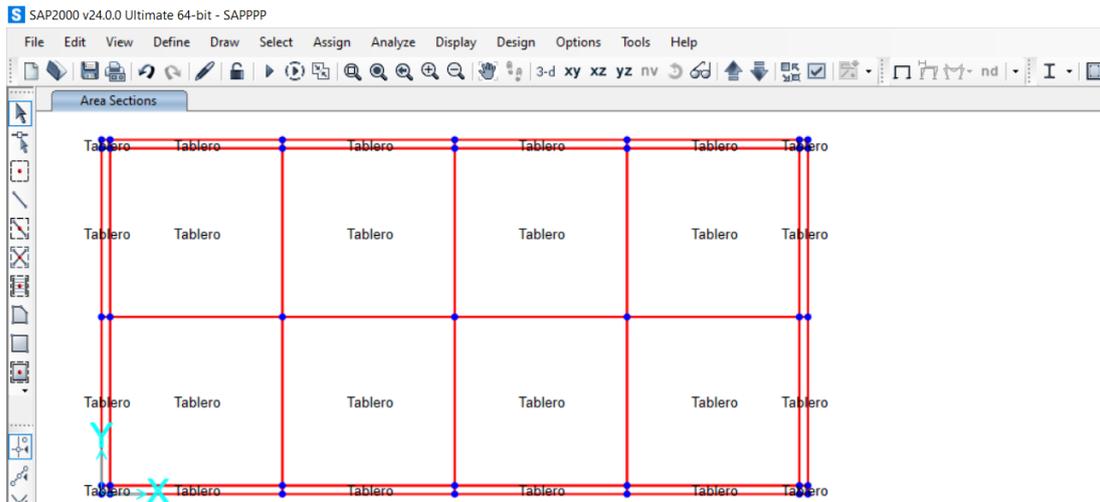


Figura 57, detalle del conjunto con la sección asignada.

#### 4.2.1.4 Creación y Asignación de los Apoyos.

La placa de madera quedaría completamente modelizada tras la colocación de los apoyos pertinentes, en este caso, la placa queda apoyada en cuatro apoyos fijos situados a 0,03 m horizontales y verticales de cada vértice.

Se seguirán los siguientes pasos para la creación de dichos apoyos:

- En primer lugar, seleccionar los cuatro puntos donde se desea tener dichos apoyos, después se elegirán los siguientes comandos: 'Assign' → 'Joint' → 'Restraints'.

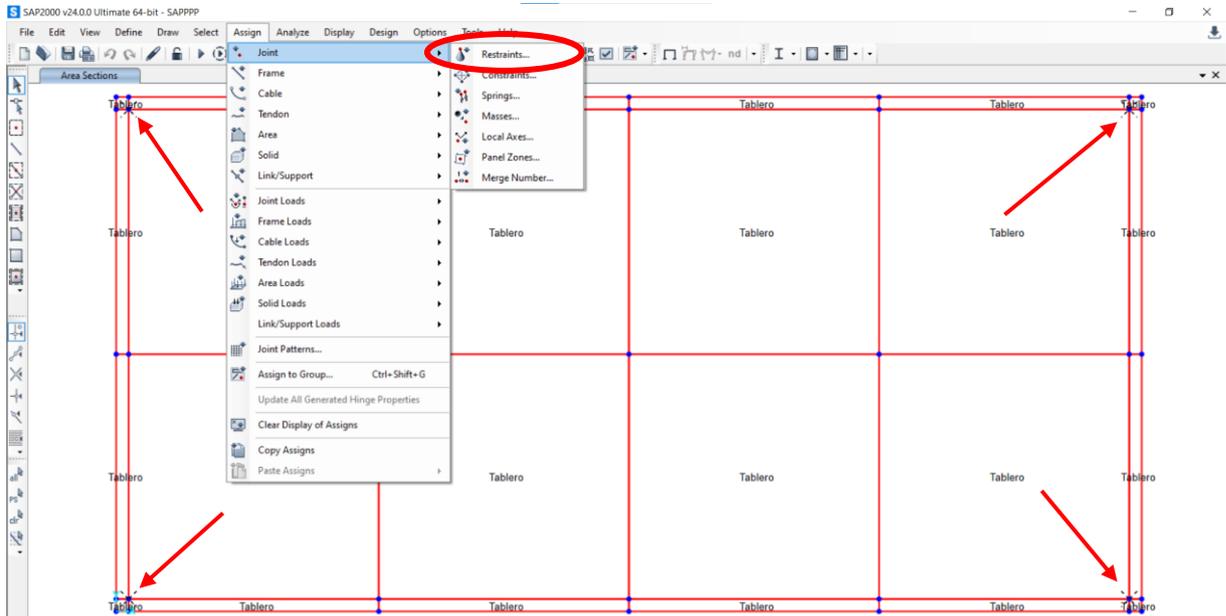


Figura 58, pasos a seguir para la creación de los cuatro apoyos.

- Aparecerá una nueva ventana en la cual se pide especificar el tipo de apoyo, en este caso se trata de crear cuatro apoyos fijos, es decir, a la hora de seleccionar que restricciones de movimiento se presentan, se van a seleccionar todas las restricciones de movimiento longitudinal y se dejan sin marcar las restricciones de giro ya que los apoyos fijos permiten el giro en cualquiera de los tres ejes.

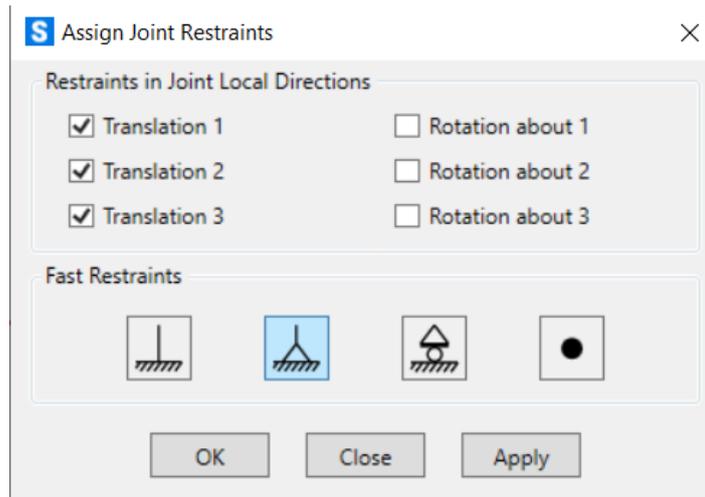


Figura 59, selección de apoyo fijo en SAP2000.

- Seleccionar "Apply" y, después "OK", una vez se ha realizado esa secuencia, se observará que ha aparecido una cruz verde sobre las posiciones donde se ha escogido tener los cuatro apoyos, observar la siguiente imagen para una mejor comprensión.

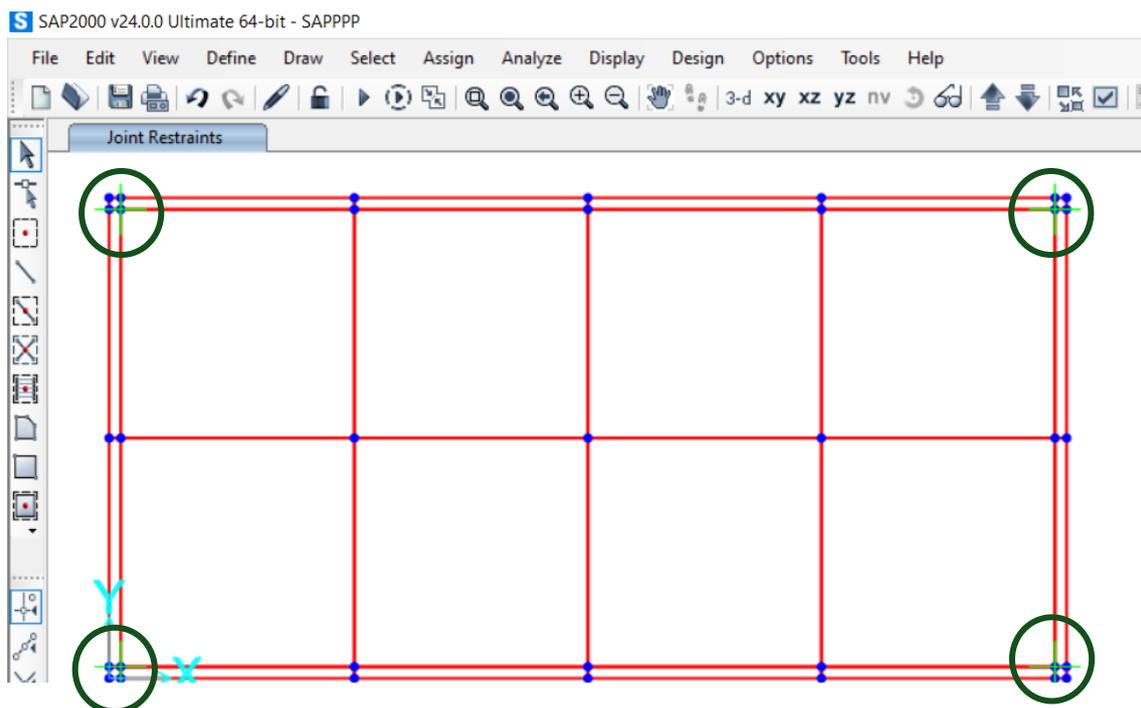


Figura 60, detalle del conjunto completo con los cuatro apoyos situados.

#### 4.2.1.5 Aumento de Elementos Finitos.

SAP2000 es un programa que utiliza elementos finitos para realizar, de forma totalmente integrada, la modelación, análisis y dimensionamiento de lo más amplio conjunto de problemas de ingeniería de estructuras.

Es por ello por lo que cuantos más elementos finitos se creen, mayor será la precisión de los resultados obtenidos. Para crear un mayor número de elementos finitos, basta con aumentar el mallado. Para una mayor comodidad, se va a trabajar en la vista 3D.

Para aumentar el mallado se ha de seleccionar el área del cual se quiere aumentar el mallado, se van a distinguir dos casos, un primero en el que se va a aumentar el número de elementos finitos de las secciones internas del conjunto y un segundo en el que se hará lo mismo, pero con las secciones de las caras externas del conjunto.

- **Caso 1:** Aumento del número de elementos finitos de las secciones internas del conjunto.

Primeramente, se deberá seleccionar las secciones en las cuales se desea aumentar el mallado, después seleccionar: "Assign" → "Area" → "Automatic Area Mesh".

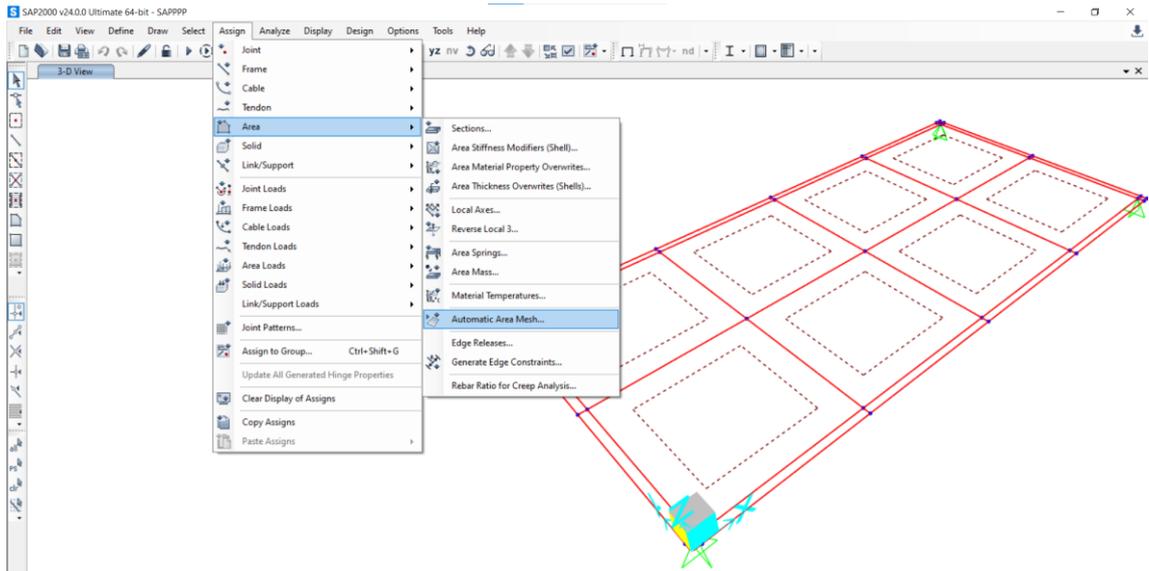


Figura 61, detalle de los comandos a seleccionar para aumentar el mallado de las secciones internas.

En la ventana emergente seleccionar la opción "Auto Mesh Area Into This Number of Objects" y añadir 10 columnas y 10 filas, para una mejor comprensión de este apartado, observar la siguiente imagen.

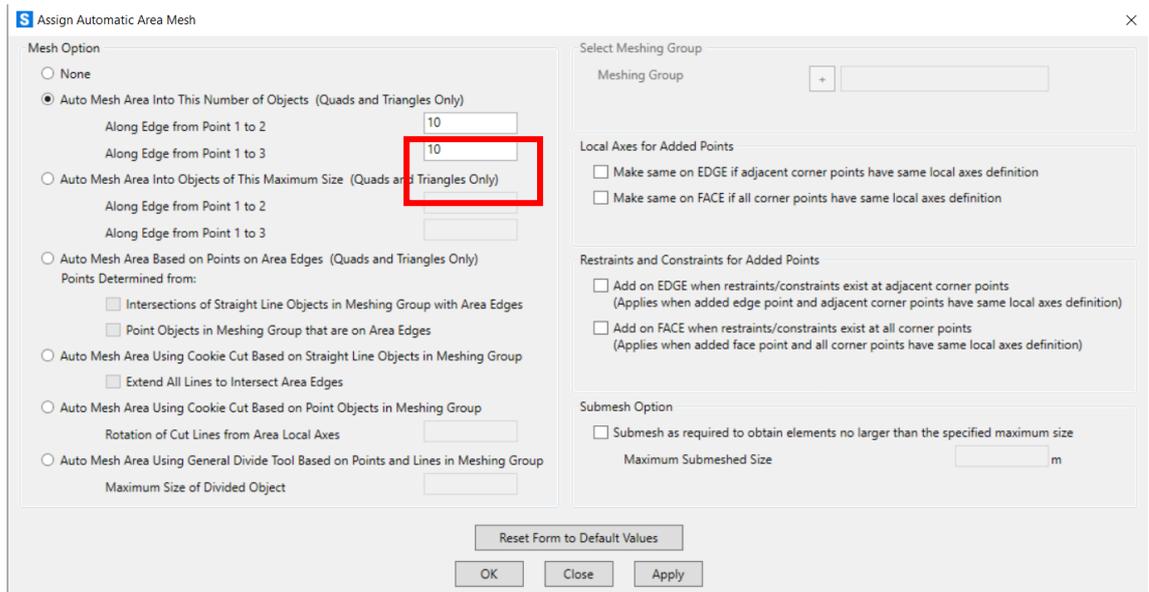


Figura 62, ventana de selección de la división del mallado.

Por último, seleccionar ‘Apply’ y luego ‘OK’, se observará que todas las secciones internas tienen escrito 10x10 en su interior.

- **Caso 2:** Aumento del número de elementos finitos de las secciones externas del conjunto.

Al igual que en el caso anterior, primero se escogerán las secciones a mallar, se van a seleccionar primero las secciones superiores e inferiores y luego las laterales, esto se debe a que el número de filas y columnas es distinto en cada caso.

Se actuará de la misma forma que en el caso 1, observar las siguientes imágenes para una mejor comprensión.

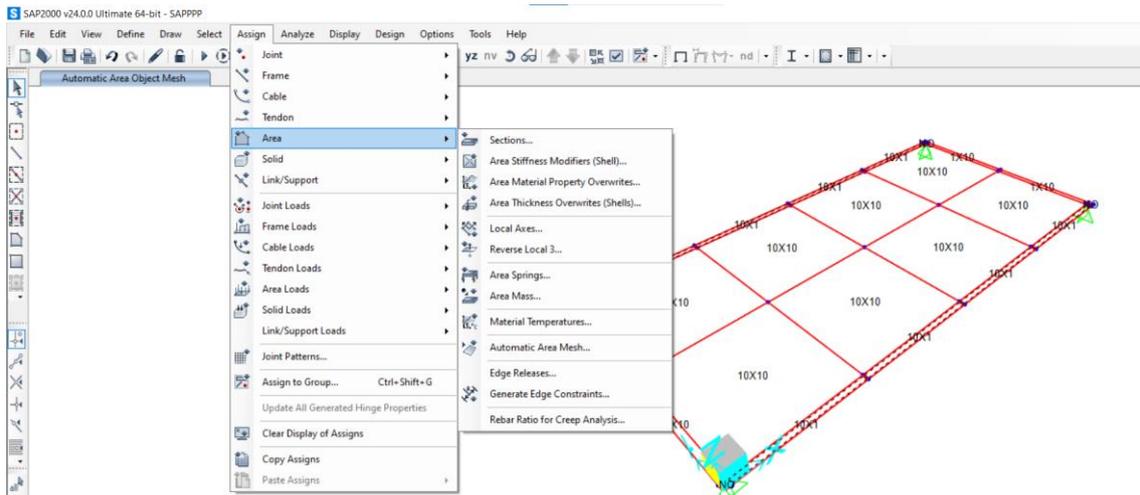


Figura 63, comandos a seleccionar para aumentar el mallado de las secciones superiores e inferiores.

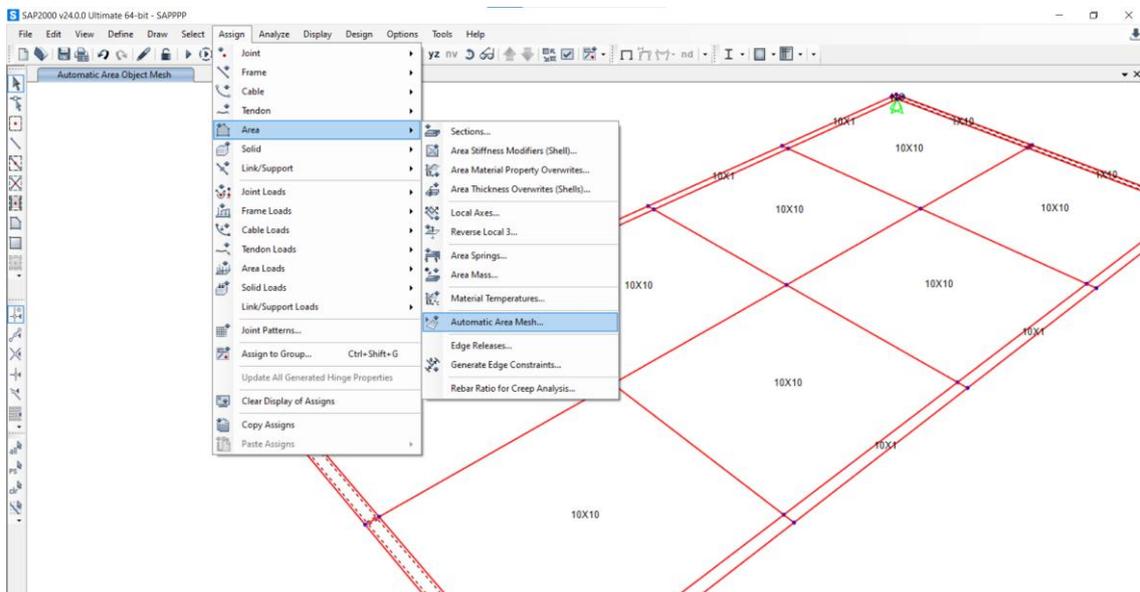


Figura 64, comandos a seleccionar para aumentar el mallado de las secciones laterales.

En la ventana emergente de la **Figura 63**, se ha de seleccionar la opción ‘Auto Mesh Area Into This Number of Objects’ y añadir 10 columnas y 1 fila. En el caso de **Figura 64**, seleccionar lo opuesto, 1 columna y 10 filas.

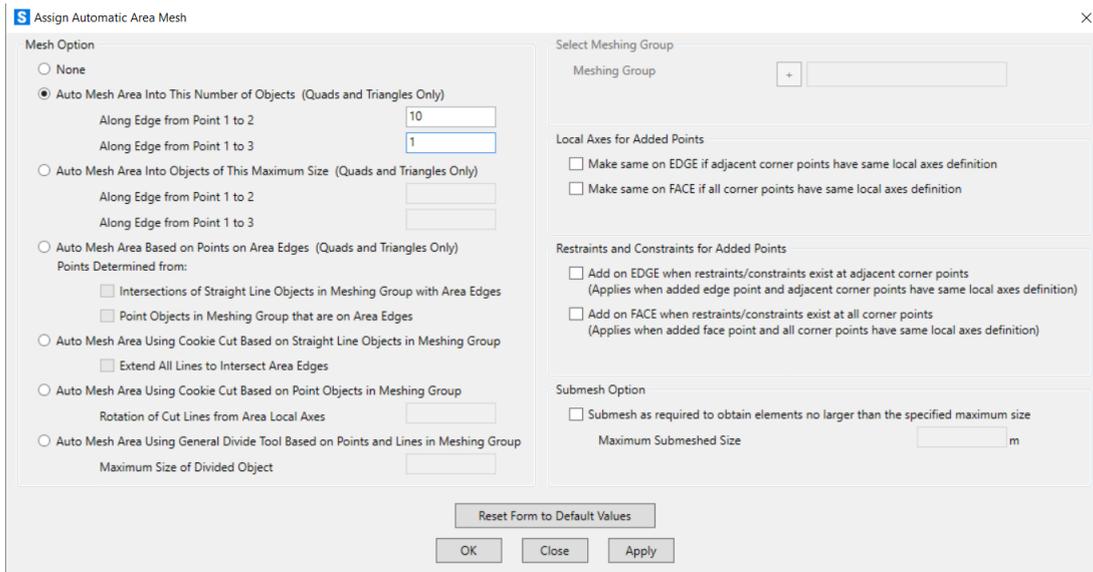


Figura 65, ventana de selección de la división del mallado, 10 columnas y 1 fila.

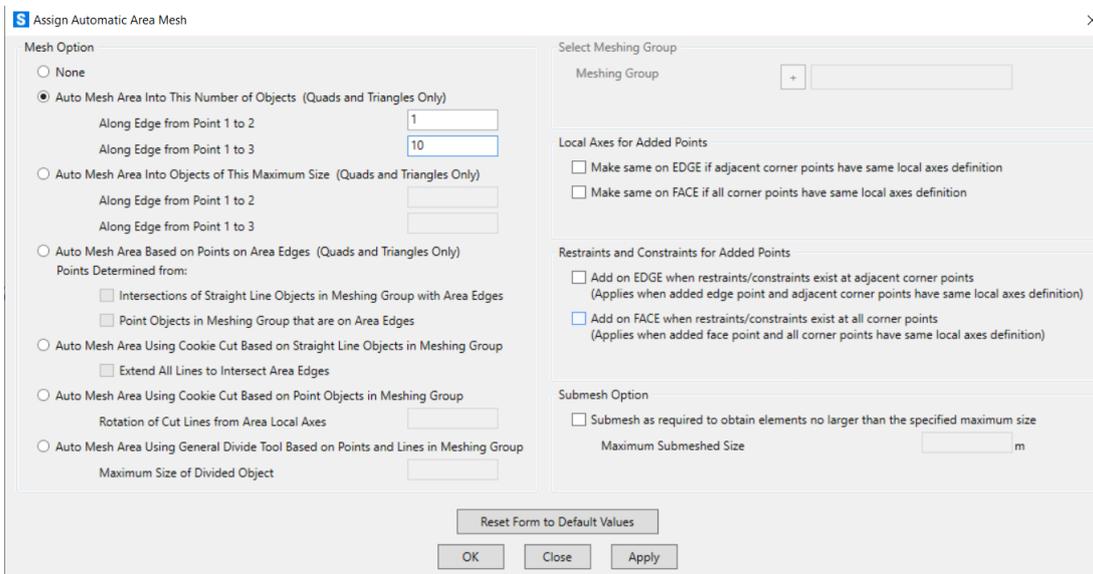


Figura 66, ventana de selección de la división del mallado, 1 columna y 10 filas.

#### 4.2.1.6 Obtención de los modelos de carga con SAP2000.

A la hora de ejecutar la simulación del comportamiento de la placa con SAP2000, se deben crear diferentes casos.

SAP2000 cuenta con dos modos de ejecución por defecto, el análisis "MODAL" y el análisis "DEAD" el cual hace referencia a la deformada creada bajo el peso propio de la placa.

Para llevar a cabo la ejecución del análisis estructural, se debe dar al símbolo de "run analysis" en la barra superior de herramientas y, en la ventana emergente "Run Now", de este modo se ejecutarán los dos casos "MODAL" y "DEAD".

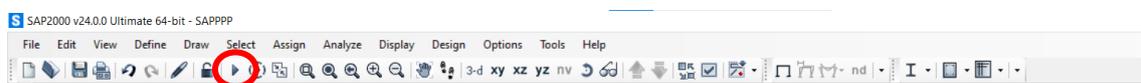


Figura 67, Localización de la opción "Run analysis"

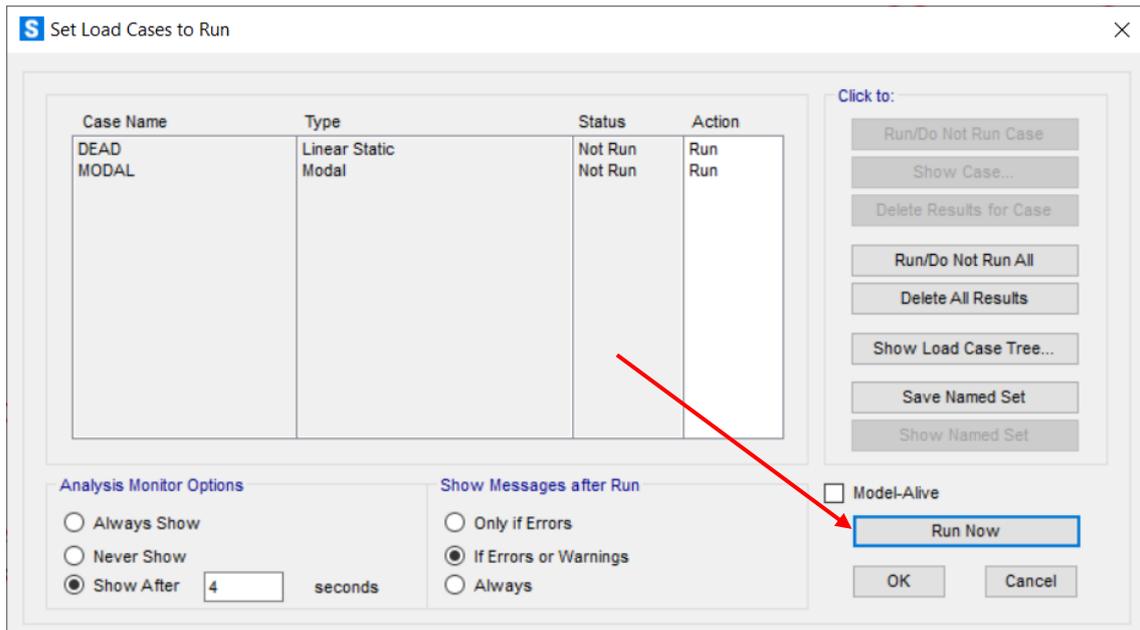


Figura 68, Ventana para ejecutar modos de simulación en SAP2000.

Seleccionar, en el símbolo de "Show Deformed Shape" situado en la barra de herramientas, el caso que se desea.



Figura 69, Localización de la opción "Show Deformed Shape"

Por ejemplo, se puede observar la reacción de los cuatro apoyos ante el peso propio de la placa.

Para ello se seleccionará la opción "DEAD" en la ventana emergente a "Show Deformed Shape".

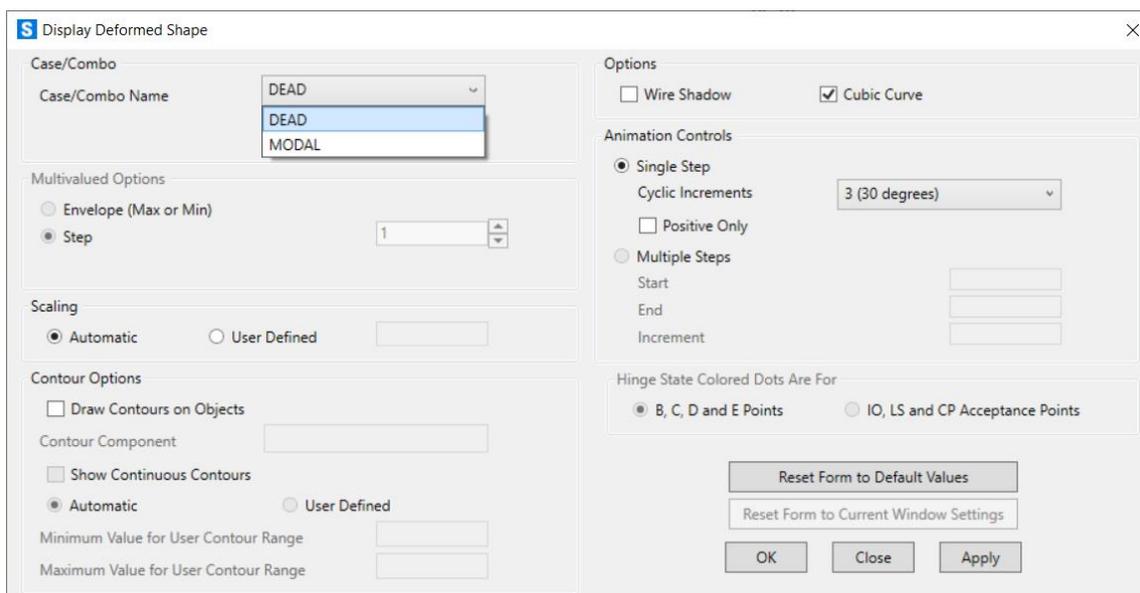


Figura 70, Selección de la opción "DEAD".

Escoger la opción de “Show Forces/Stresses” → “Joints” y, manteniendo la opción del peso “muerto”, aplicar y observar cómo salen las reacciones verticales en los apoyos fijos.

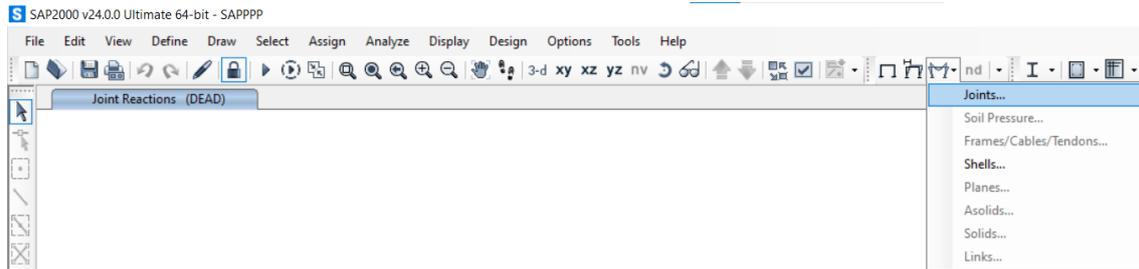


Figura 71, Localización de la opción “Show Forces/Stresses”.

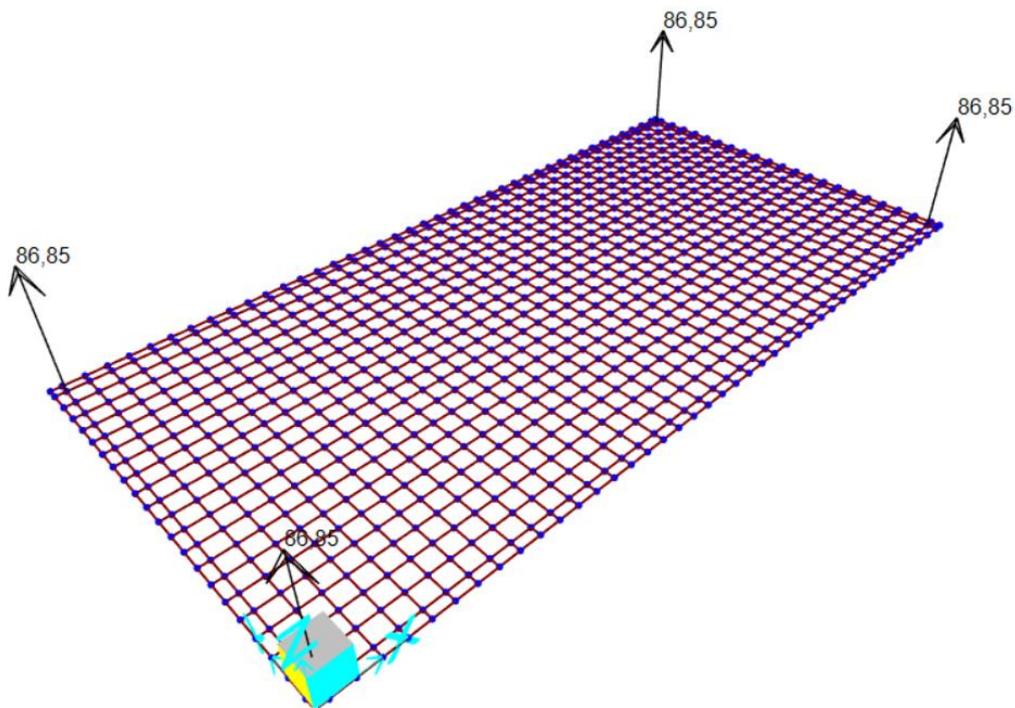


Figura 72, Detalle del conjunto con las cuatro reacciones verticales.

Una vez se ha explicado el modo de proceder para la obtención de resultados en la simulación, se va a explicar cómo se han de crear los modos de estudio necesarios para la correcta realización del ensayo.

Se van a distinguir dos casos aparentemente similares, pero con finalidades distintas, el primero consistirá en la realización del estudio estático del ensayo, para ello, se ha de implementar cuatro fuerzas puntuales distintas en el centro de la placa, el segundo, hace referencia al estudio dinámico de la placa, se introducirán masas puntuales en el centro de la placa y se observará su frecuencia característica.

**- Caso 1: creación de los modelos de carga para el ensayo estático.**

Como se ha explicado anteriormente, se van a aplicar cuatro fuerzas puntuales en el centro de la placa, estas fuerzas ya han sido calculadas en apartados anteriores por lo que para conocer sus valores sería adecuado observar la **Tabla 3**.

Primero se ha de definir el tipo de carga y asignarle un nombre, para ello ir a *“Define”* → *“Load Patterns”*.

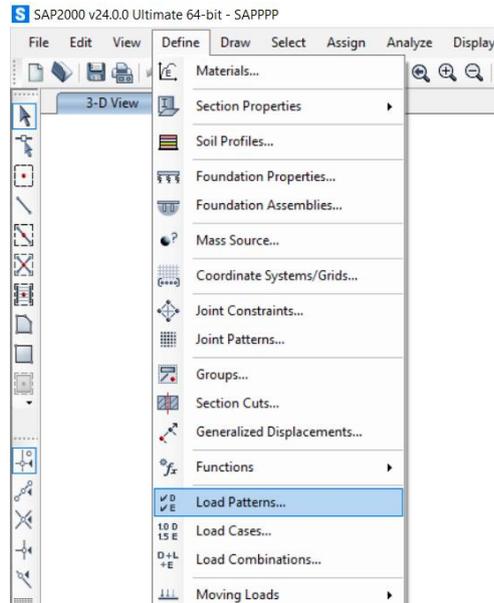


Figura 73, Ventana de selección *“Load Patterns”*.

En la ventana emergente, definir los cuatro casos de carga (P1, P2, P3, P4), para ello es importante marcar en el desplegable de *“Type”* el valor *“Other”* ya que no se trata de una carga que involucre una característica de las opciones mostradas.

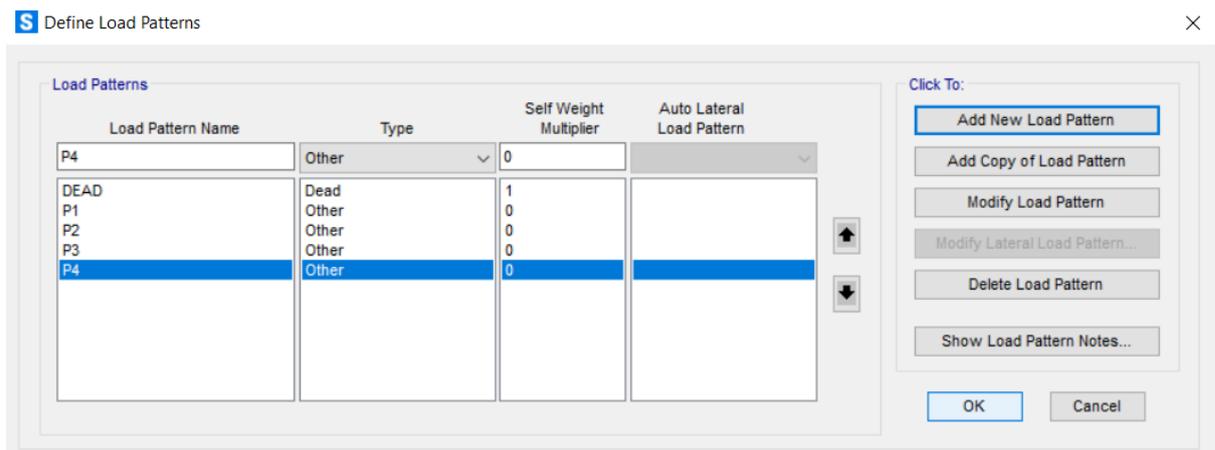


Figura 74, ventana de asignación de los casos de carga.

Se pueden observar los casos de carga creados en *“Define”* → *“Load cases”*.

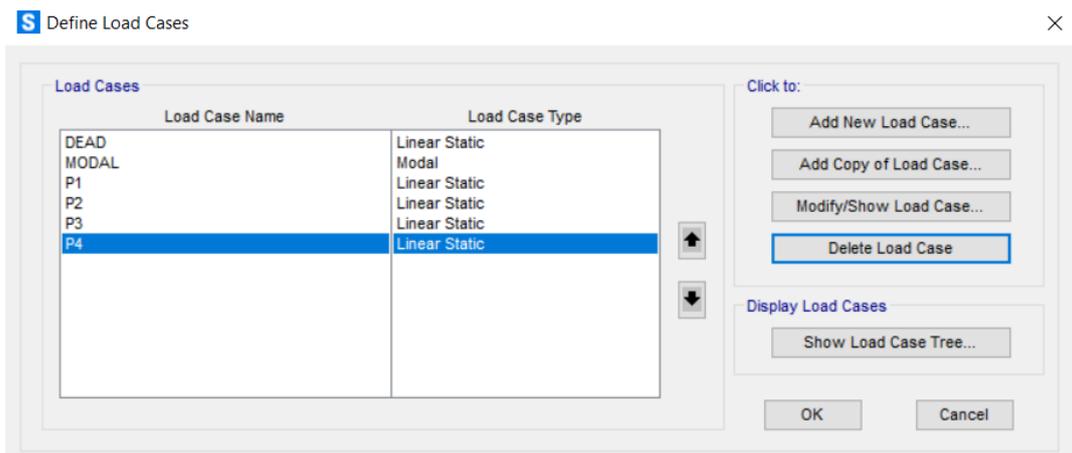


Figura 75, Ventana "Load cases".

Por último, se ha de asignar el lugar donde se desea aplicar cada caso de carga (en este caso punto central de la placa) y el valor de dicha carga. "Assign" → "Joint Loads" → "Forces".

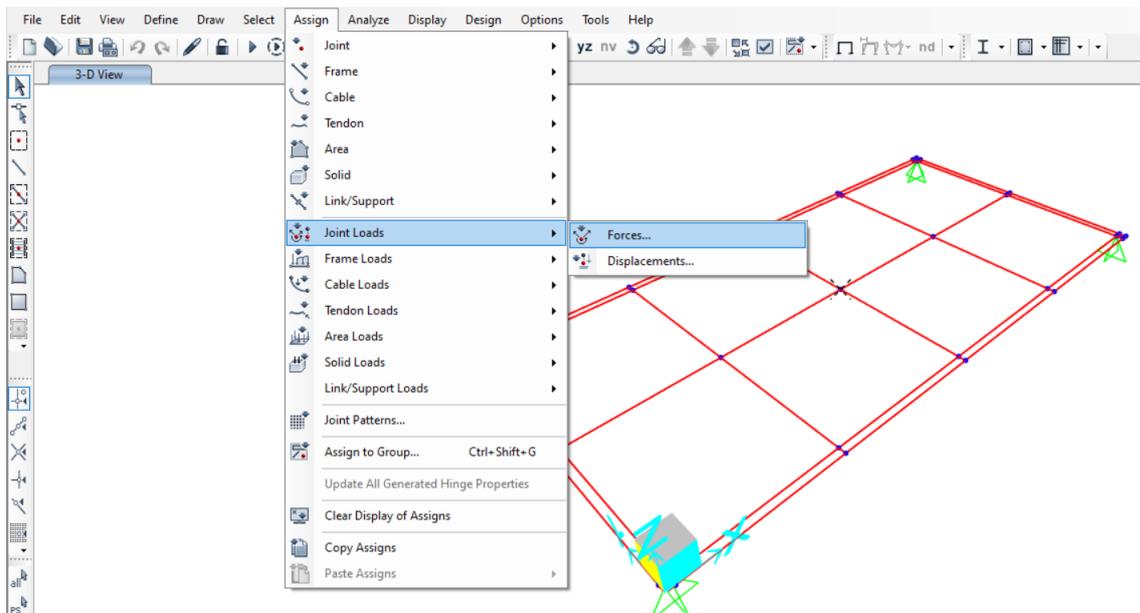


Figura 76, Detalle de comandos a seguir para aplicar cargas.

En la ventana resultante, añadir el valor de cada caso acorde a lo calculado en la **Tabla 3**, lógicamente se ha de añadir en el eje z con valor negativo. En la siguiente imagen se muestra el último caso ("P4"), para los otros tres se ha de actuar de la misma forma.

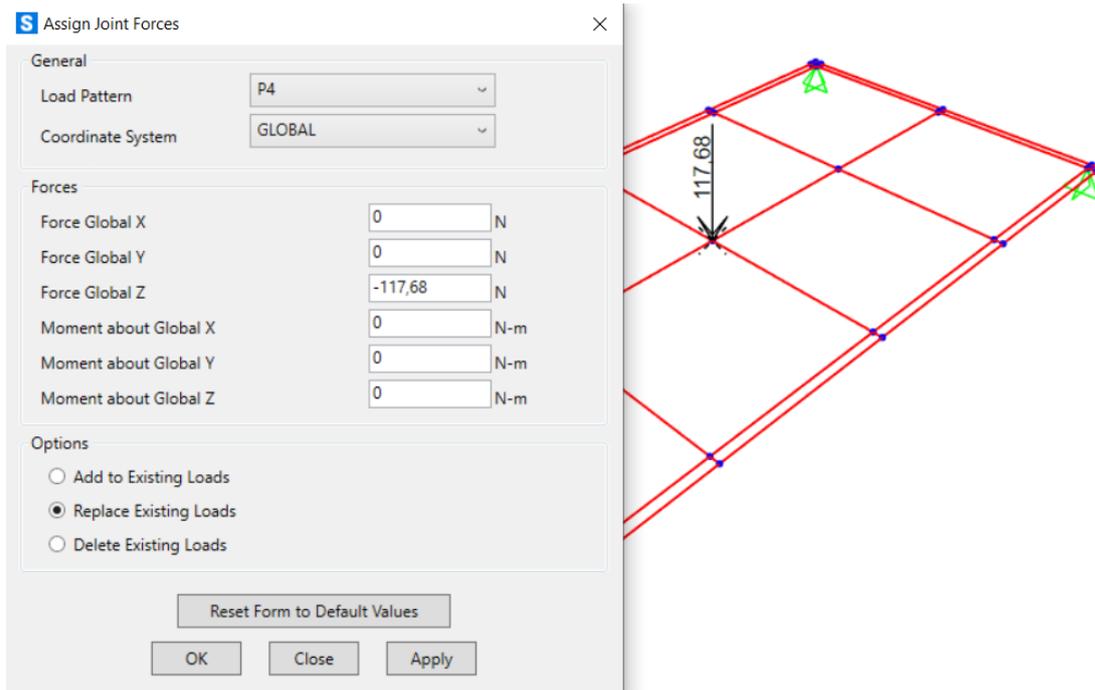


Figura 77, detalle de la asignación del valor de la carga "P4".

Hay que destacar que se han creado los cuatro casos de carga (P1, P2, P3, P4) para un entendimiento mejor del proceso de obtención del desplazamiento, pero la realidad es que no sería necesario crear más que el primero ya que SAP2000 trabaja con un sistema lineal, si una carga se duplica, el desplazamiento resultante también se duplica. Por lo tanto, si P2 es el doble de P1, entonces el desplazamiento  $\delta_2$  será el doble de  $\delta_1$ . Esta relación de proporcionalidad se aplica también a P3 y P4 en relación con P1, y a  $\delta_3$  y  $\delta_4$  en relación con  $\delta_1$ .

#### - **Caso 2: creación de los modelos de carga para el ensayo dinámico.**

En el ensayo dinámico se va a estudiar el parámetro de frecuencia característica que genera SAP2000 en su versión simulada en "MODAL", como se tienen cinco casos distintos (a cada uno se le va a añadiendo progresivamente una masa de 3 kg), se va a estudiar cada caso por separado.

SAP2000 no guarda casos de carga para masas por lo que hay que crearlos justo antes de ejecutar la simulación.

Se va a realizar un ejemplo de cómo realizar el caso de una masa puntual de 3kg en el centro de la placa, para los otros casos (masa de 6 kg, masa de 9 kg, masa de 12 kg), hay que actuar de la misma manera.

Primero seleccionar el punto central de la placa (lugar donde se va a situar la masa de 3 kg) y seguir estos pasos: "Assign" → "Joint" → "Masses"

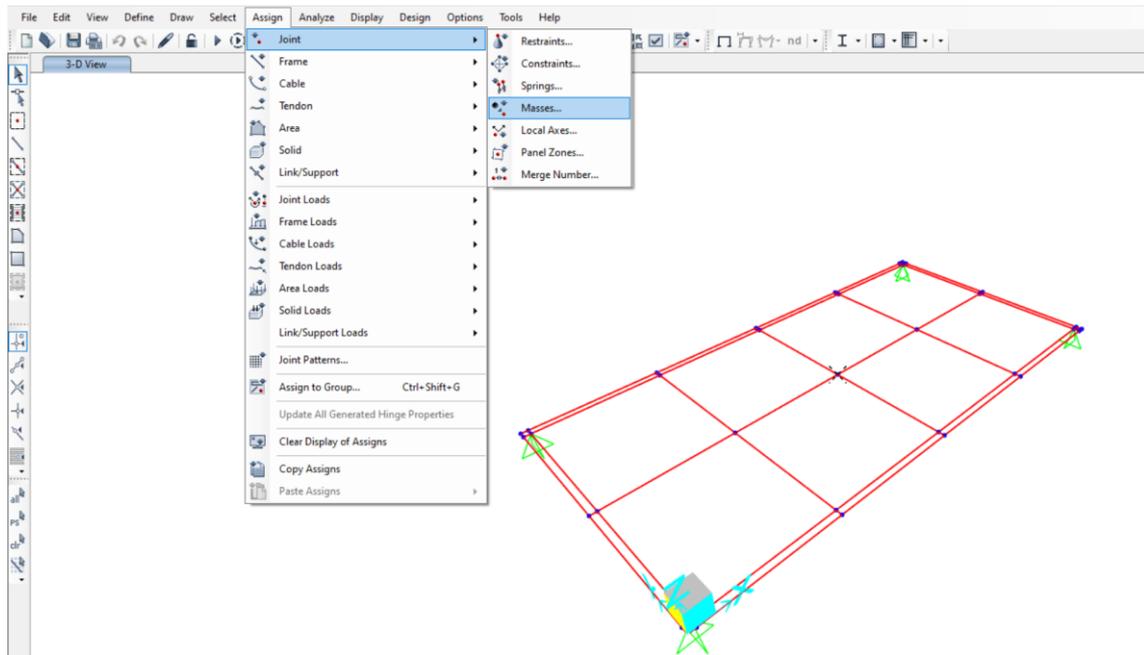


Figura 78, Detalle de comandos a seguir para aplicar masas puntuales.

En la ventana emergente con la opción “as mass” seleccionada añadir la masa que se desea en las tres direcciones posibles, en la siguiente imagen se muestra el caso de 3kg.

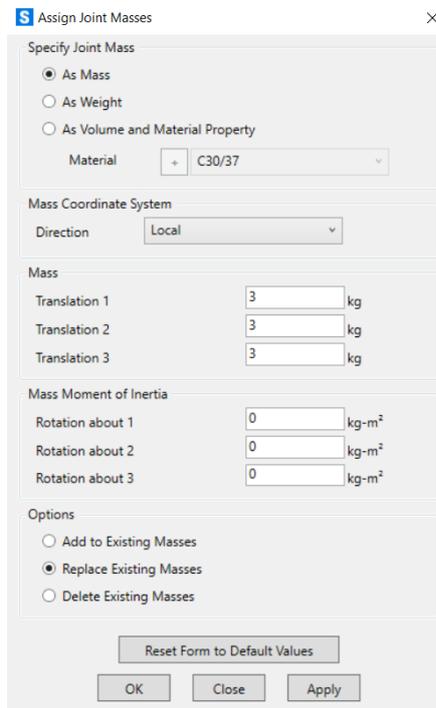


Figura 79, detalle de asignación de una masa de 3 kg.

Una vez se tiene la masa situada, ejecutar la simulación en “MODAL” y observar el valor de la frecuencia característica ya que será necesario para comparar con el modelo experimental más adelante.

#### 4.2.2 Placa con tres apoyos.

Los pasos por seguir para la creación de la placa en SAP2000 en la placa con tres apoyos son los mismos que en la placa con cuatro apoyos, la única diferencia aparece en el “paso de creación y asignación de apoyos” por lo que es el paso que se va a explicar en profundidad.

Podría crear confusión que el paso de “Diseño de la estructura” se realizara sin ninguna diferencia con respecto al caso anterior, aclarar que no es necesario realizar ninguna modificación ya que el mallado creado cubre la posición de los tres apoyos fijos.

##### 4.2.2.1 Creación y asignación de apoyos.

Para crear y situar correctamente los tres apoyos es importante tener claro dónde van colocados. Los apoyos se van a situar de manera que la placa quede en equilibrio estático y dinámico, para ello, se situarán dos en dos vértices consecutivos de la placa y, un tercero en el centro del lado contrario. Observar la siguiente imagen en la cual los puntos negros representan la posición de los apoyos.

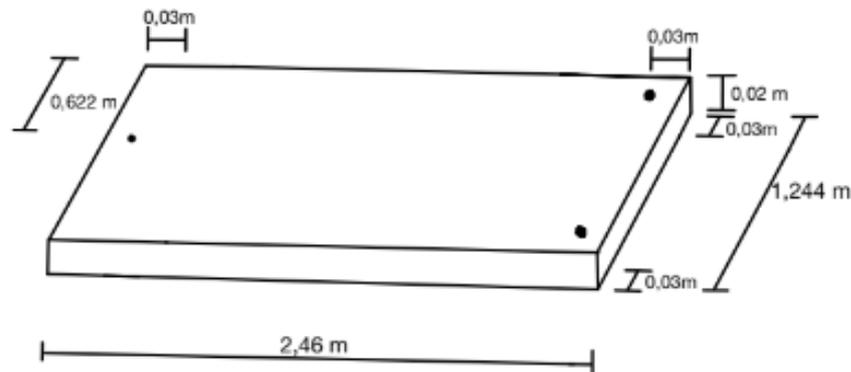


Figura 80, Croquis de definición de la placa con tres apoyos fijos.

Para la creación de los tres apoyos se van a seguir los siguientes pasos:

- En primer lugar, seleccionar los tres puntos donde se desea tener dichos apoyos, después elegir los siguientes comandos: ‘Assign’ → ‘Joint’ → ‘Restrains’.

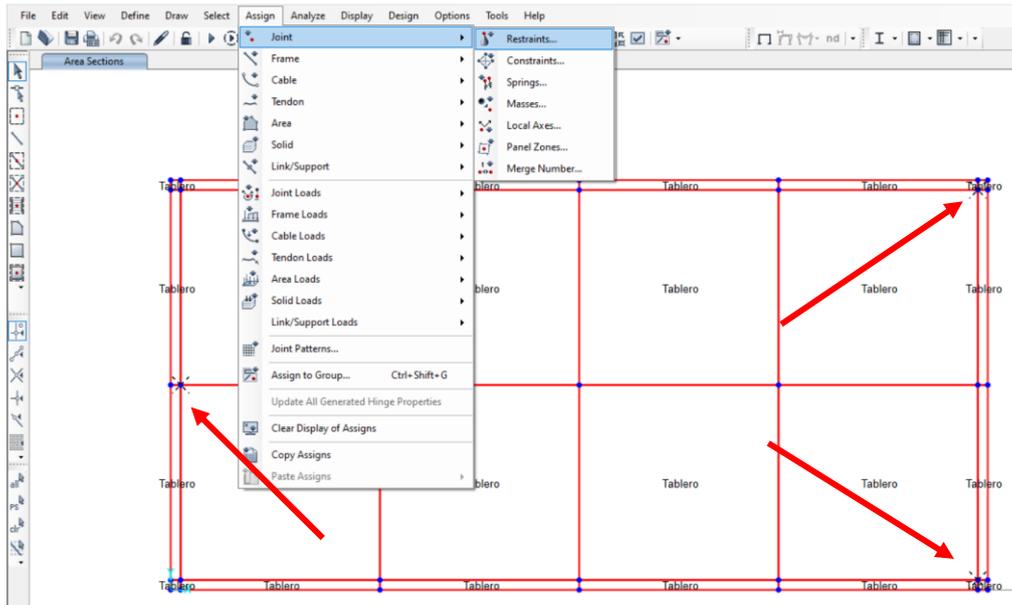


Figura 81, Detalle de comandos a seguir para aplicar los apoyos fijos.

- Se abrirá una ventana adicional solicitando la especificación del tipo de soporte. En este escenario, se trata de establecer cuatro soportes fijos. Por lo tanto, al elegir las restricciones de movimiento, se seleccionarán todas las restricciones de movimiento longitudinal, mientras que se dejarán sin marcar las restricciones de giro, ya que los soportes fijos permiten el giro en cualquiera de los tres ejes.

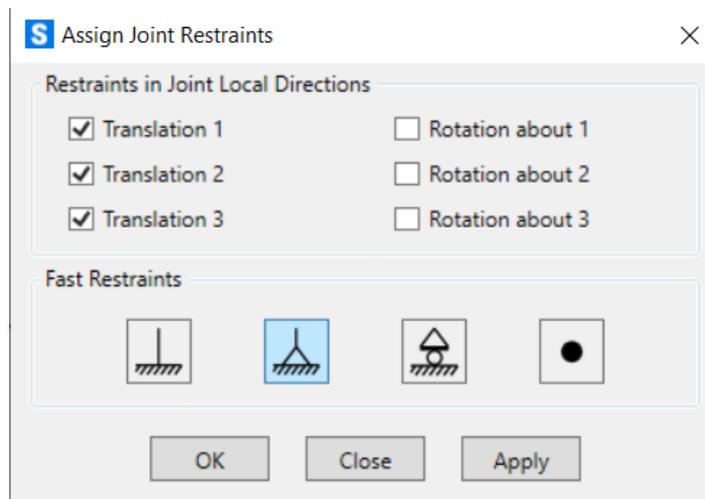


Figura 82, parámetros a seleccionar para crear los apoyos fijos.

- Seleccionar "Apply" → "OK". Una vez se ha completado esta secuencia, se podrá observar la adición de una cruz verde en las ubicaciones donde se ha seleccionado establecer los tres apoyos. Consultar la siguiente imagen para una comprensión más clara.

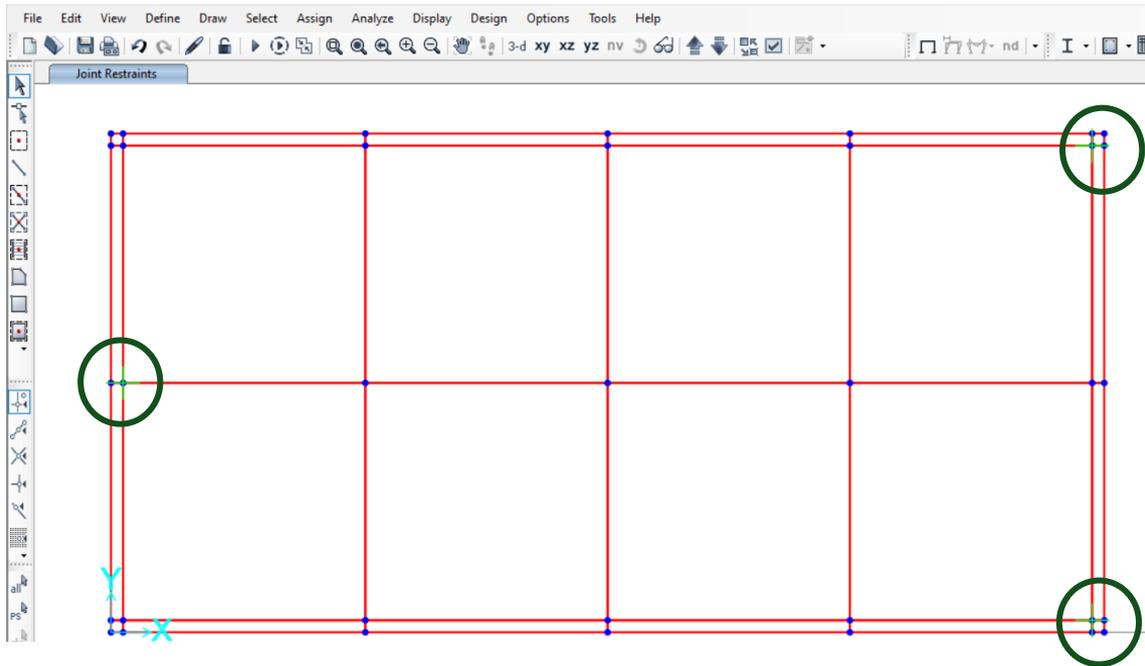


Figura 83, detalle del conjunto completo con los tres apoyos situados.

A partir de aquí los pasos a seguir para completar la creación del modelo en SAP2000 de la placa con tres apoyos fijos son idénticos a los del caso con cuatro apoyos fijos (al igual que sucedía con los pasos anteriores a “creación y asignación de apoyos”).

Es importante comprobar que la placa está en equilibrio una vez se han definido todos los casos de carga (P1, P2, P3, P4), para ello podemos observar el valor de las reacciones verticales en los apoyos. La suma de las dos contiguas debe dar el valor de la reacción en el punto medio del extremo opuesto por simetría.

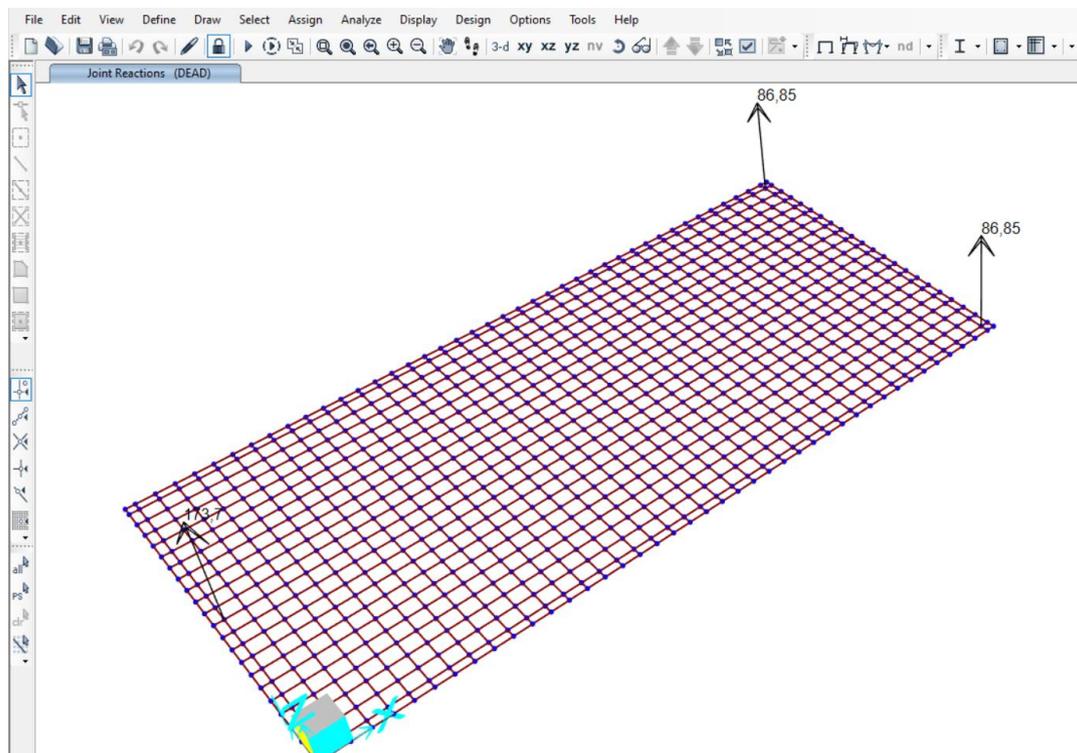


Figura 84, detalle del conjunto con las reacciones verticales visibles.

Efectivamente, la placa está bien definida puesto que se cumple la igualdad mencionada anteriormente.

$$86,85 \text{ N} + 86,85 \text{ N} = 173,7 \text{ N} \quad (61)$$

#### **4.3 Conclusiones previas de la placa de estudio:**

Como se va a observar a continuación, los resultados obtenidos con el análisis experimental y con el realizado por SAP2000 no son los mismos, esto puede deberse a varios factores:

- La masa de la placa se ha estimado a raíz de 5 medidas realizadas con una báscula la cual tiene una incertidumbre asociada, por lo que el cálculo de la densidad y del peso por unidad de volumen llevan asociado un error corregible.
- El módulo de elasticidad (E) introducido en los modelos creados con SAP2000 ha sido un módulo de elasticidad escogido de manera coherente pero no exacta.
- El módulo de Young ( $\nu$ ), al igual que con el de elasticidad, se ha seleccionado de forma coherente dentro de un rango adaptable a la madera, pero en el caso de esta placa, se debe ajustar.

Además, la discrepancia en el aumento de desplazamiento del punto central de la placa en SAP2000 no concuerda con el obtenido físicamente en el laboratorio. Esto podría deberse a errores en las propiedades del material o en las mediciones físicas realizadas en el laboratorio, como una medición inexacta de la longitud, el ancho, el espesor o la altura de la placa, efectuadas con láser y/o flexómetro.

Dadas las circunstancias mencionadas, es esencial ajustar las propiedades disponibles de la placa de madera en SAP2000 para alinear, en la mayor medida posible, el "gemelo digital". Una vez logrado esto, se garantizará la disponibilidad de una réplica de la placa en la computadora, lo que permitirá llevar a cabo todos los ensayos deseados sin necesidad de realizarlos físicamente.

#### **4.4 Ajuste estático y modal de la placa:**

Al igual que ha sucedido a lo largo de este TFG, se van a distinguir dos casos de estudio: estudio de la placa con cuatro apoyos y, estudio de la placa con tres apoyos.

##### **4.4.1 Placa con cuatro apoyos:**

Se van a realizar dos tipos de estudio, el estudio estático y el estudio dinámico.

##### **ESTUDIO ESTÁTICO:**

El estudio estático de la placa se ha realizado gracias a la intercomparación de los valores de la flecha máxima de la placa, obtenidos mediante el análisis experimental (valores obtenidos mediante el uso del láser en el laboratorio) y, de los valores obtenidos utilizando SAP2000.

Se trata de un estudio en el que se van a comparar distintos resultados en distintas situaciones de carga.

Los resultados de los desplazamientos obtenidos de forma experimental están reflejados en la **Tabla 3**, para obtener los resultados de los desplazamientos utilizando SAP2000, se ha de operar de la siguiente forma:

- Ejecutar el análisis del modelo terminado, en “*show deformed shape*” seleccionar primeramente “P1”. Se puede seleccionar la opción “*Draw Contours on Objects*” en Uz para que nos dibuje un mapa de colores del desplazamiento.

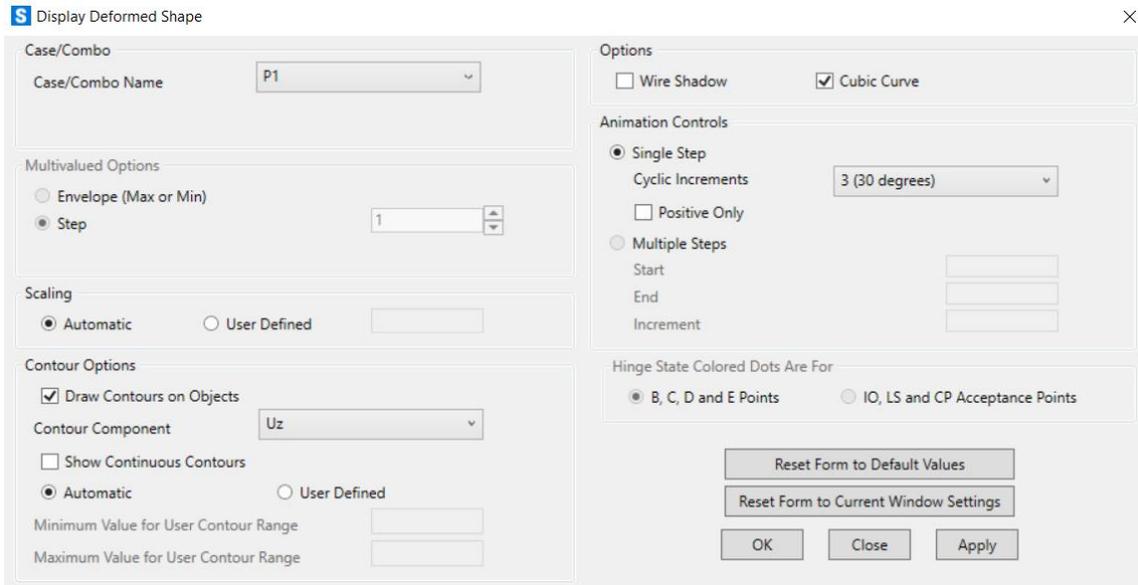


Figura 85, ventana “*show deformed shape*” con “P1” seleccionado.

- Se obtendrá lo siguiente:

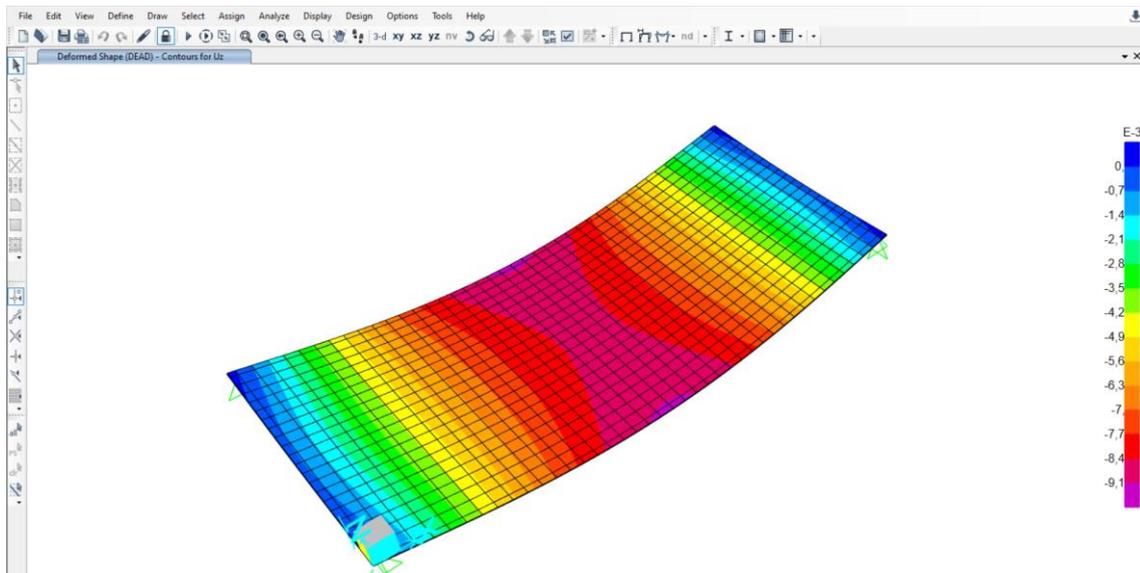


Figura 86, Placa completa con un mapa de colores de las deformaciones creadas.

- Situar el cursor sobre el punto medio de la placa y con un clic derecho en el ratón, observar el valor del desplazamiento.

**S** Joint Displacements ×

	Joint Object 21			Joint Element 21		
	1	2	3	1	2	3
Trans	0,	0,	-0,00111	0,	0,	0,
Rotn	0,	0,	0,	0,	0,	0,

Figura 87, Valor del desplazamiento en el caso P1.

Actuar de la misma forma con P2, P3, P4 y, observar el valor del desplazamiento vertical en el punto central de la placa. Observar las siguientes imágenes

**S** Joint Displacements ×

	Joint Object 21			Joint Element 21		
	1	2	3	1	2	3
Trans	0,	0,	-0,00222	0,	0,	0,
Rotn	0,	0,	0,	0,	0,	0,

Figura 88, Valor del desplazamiento en el caso P2.

**S** Joint Displacements ×

	Joint Object 21			Joint Element 21		
	1	2	3	1	2	3
Trans	0,	0,	-0,00333	0,	0,	0,
Rotn	0,	0,	0,	0,	0,	0,

Figura 89, Valor del desplazamiento en el caso P3.

**S** Joint Displacements ×

	Joint Object 21			Joint Element 21		
	1	2	3	1	2	3
Trans	0,	0,	-0,00444	0,	0,	0,
Rotn	0,	0,	0,	0,	0,	0,

Figura 90, Valor del desplazamiento en el caso P4.

Como se comentó anteriormente, el desplazamiento sigue un sistema lineal, si una carga aumenta en una proporción definida, el desplazamiento también se observa perfectamente en las imágenes anteriores, por ejemplo: el desplazamiento en P1 es: -0,00111 m y en el caso P2 es: -0,00222 m. Si calculamos la evolución del desplazamiento por situación de carga:  $-0,00222\text{ m} + 0,00111\text{ m} = -0,00111\text{ m}$  por lo que, en cada situación, la placa se desplaza -0,00111 m más que en el caso anterior.

Se puede demostrar utilizando como ejemplo los desplazamientos en P2 y P3.

- Desplazamiento en el caso P2 = -0,00222 m
- Desplazamiento en el caso P3 = -0,00333 m

Si se calcula, el desplazamiento en P3 debería ser -0,00111 m más que en la situación P2:

$$-0,00222 \text{ m} - 0,00111 \text{ m} = -0,00333 \text{ m} \quad (62)$$

Observando al **ec.(62)**, el desplazamiento cumple a la perfección.

En la siguiente tabla se muestra la situación inicial de los valores del desplazamiento.

Situación inicial de los desplazamientos				
Situación	$\Delta$ desplazamiento experimental (m)	$\Delta$ Desplazamiento SAP2000 (m)	Error Generado (m)	Error Relativo (%)
P1	0,00119	0,00111	0,00008	6,72
P2	0,00237	0,00222	0,00015	6,32
P3	0,00354	0,00333	0,00021	5,93
P4	0,00466	0,00444	0,00022	4,72

Tabla 6, Comparativa de los desplazamientos en situación inicial.

Como se puede observar en la **Tabla 6**, los resultados obtenidos mediante el análisis experimental y los resultados obtenidos haciendo uso de la herramienta SAP2000, son similares, pero no idénticos, todos tienen un error relativo de cálculo alto por lo que, para minimizarlo, es necesario realizar un ajuste.

Para realizar el ajuste de la placa digital, es necesario modificar los parámetros estimados en pasos anteriores. Un valor muy significativo en el cálculo de la flecha bajo carga es el módulo de elasticidad.

El módulo de elasticidad (E), se definió de forma estimada en el material (MADERA), se estableció un valor base de  $1 \times 10^{10}$  Pa. Se va a aprovechar que SAP2000 trabaja con un sistema lineal para obtener el valor del módulo de elasticidad con el cual los valores del desplazamiento experimental y los calculados en SAP son idénticos, para ello se va a calcular la proporción entre los dos desplazamientos iniciales y se aplicará al módulo de elasticidad inicial, se obtendrá lo siguiente:

$$E_{final} = \frac{\Delta \text{ Desplazamiento SAP2000 ini (m)}}{\Delta \text{ desplazamiento exp ini (m)}} \times E_{inicial} = 9,32773 \times 10^9 \text{ Pa} \quad (63)$$

Con ese valor del módulo de elasticidad se debería satisfacer con exactitud el ajuste de los parámetros de desplazamiento, se va a comprobar introduciéndolo en SAP2000 y obteniendo los nuevos desplazamientos bajo carga.

Seguir los siguientes pasos para modificar el valor:

- En la barra de herramientas superior: "Define" → "Materials".

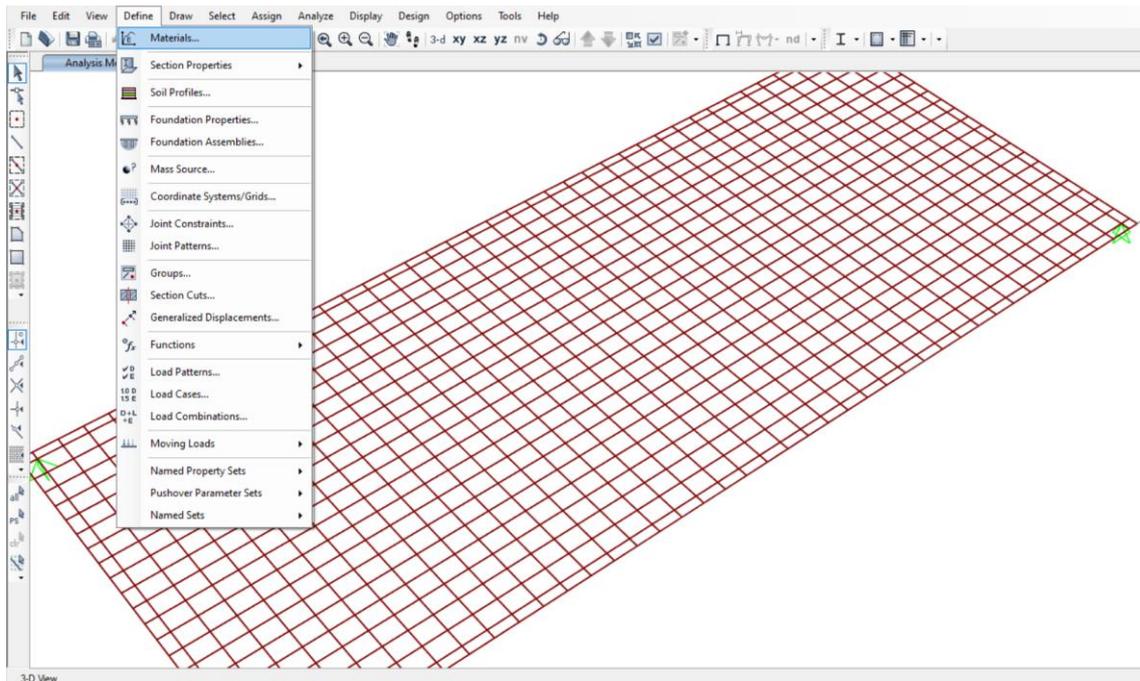


Figura 91, Comandos a seleccionar para modificar el material creado.

- Seleccionar "MADERA" → "Modify/Show Material".

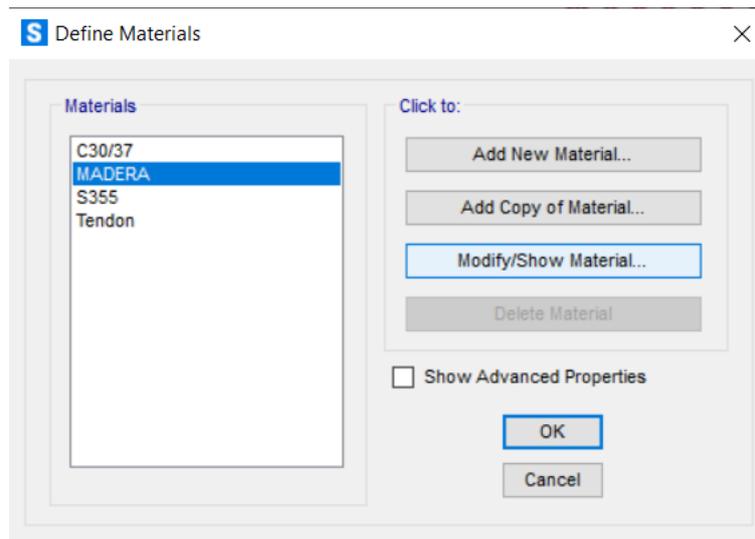


Figura 92, Detalle de la selección "Modify/Show Material".

- En la ventana emergente, modificar el valor de "Modulus of elasticity E". Observar siguiente imagen.

Figura 93, Propiedades del material.

Una vez modificado el parámetro "E" a un valor inferior de:  $9,32773 \times 10^9$  Pa, seleccionar "OK" y se vuelven a cargar los resultados.

Ejemplo del valor de desplazamiento en el primer caso:

	Joint Object 21	Joint Element 21	
	1	2	3
Trans	0,	0,	-0,00119
Rotn	0,	0,	0,

Figura 94, Valor del desplazamiento en el caso P1.

En la siguiente tabla se muestra la situación final de los valores del desplazamiento tras la modificación realizada.

Situación final de los desplazamientos				
Situación	$\Delta$ desplazamiento experimental (m)	$\Delta$ Desplazamiento SAP2000 (m)	Error Generado (m)	Error Relativo (%)
P1	0,00119	0,00119	0	0
P2	0,00237	0,00238	-0,00001	0,422
P3	0,00354	0,00357	-0,00003	0,847
P4	0,00466	0,00476	-0,00010	2,145

Tabla 7, Comparativa de los desplazamientos en situación inicial.

Como se observa en la **Tabla 7**, los valores experimentales y los calculados con SAP2000 son mucho más similares que en el caso inicial, el error relativo en los cuatro casos ha disminuido significativamente, lo cual significa que el ajuste realizado ha funcionado y los valores obtenidos son válidos.

Se va a realizar otro tipo de estudio (modal), para determinar si los parámetros dinámicos de la placa son válidos o no, y en caso de que no lo sean se realizará un ajuste.

### **ESTUDIO MODAL:**

El estudio modal de estructuras se va a basar en el estudio incisivo del movimiento armónico simple (MAS), implica analizar cómo las estructuras responden a cargas oscilatorias o vibraciones periódicas. En este caso, se consideran las oscilaciones de la placa de estudio como si fuera un MAS, donde la estructura se mueve alrededor de una posición de equilibrio, en este caso cuatro apoyos fijos, debido a la aplicación de una fuerza exterior creada por las masas añadidas progresivamente.

La definición del desplazamiento (también válida para velocidad y aceleración) de una señal amortiguada sigue la siguiente fórmula: [12]

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \times e^{-\omega \xi t} \quad (64)$$

Siendo:

x: desplazamiento (m).

A: Amplitud del desplazamiento(m).

w: Frecuencia propia del modo del que queremos saber el amortiguamiento (Hz).

t: tiempo de cada instante (segundos).

$\xi$ : Factor de amortiguamiento.

$\varphi$ : Fase inicial (rad).

Para estudiar el comportamiento dinámico de una estructura en un MAS, se utilizan métodos de análisis vibratorio y herramientas computacionales como el software DEWESoft X2 versión SP10, cuya finalidad es la de modelar el sistema estructural y predecir su respuesta bajo diferentes condiciones de carga. Esto implica la evaluación de parámetros como la frecuencia natural de vibración, la amplitud de la respuesta... En este caso se va a analizar la variable de la frecuencia propia del sistema ya que es el parámetro condicionante en el estudio modal en SAP2000.

El análisis dinámico de estructuras en un MAS es fundamental en numerosas aplicaciones, incluyendo el diseño sísmico de edificios, puentes y otras infraestructuras, así como en la evaluación de la fatiga estructural causada por cargas cíclicas. Además, permite identificar potenciales problemas de resonancia estructural y diseñar sistemas de amortiguación adecuados para mitigar vibraciones no deseadas.

Para que el estudio sea concluyente el valor de la frecuencia obtenido por el método experimental y el obtenido por la simulación en SAP2000 han de ser idénticos o muy similares, para ello, se comenzará obteniendo el valor de la frecuencia de forma experimental.

El proceso de obtención de la frecuencia de forma experimental se ha realizado gracias a la herramienta Excel en la cual se han registrado, procesado y tratado todos los datos resultantes extraídos del láser.

Pasos que seguir para el procesado de los datos brutos generados en el ensayo experimental:

- Cargar los resultados del láser en EXCEL, abrir archivo y observar en “*DataInfo*” el valor de “*Sample rate*” puesto que es el valor del tiempo de muestreo, en este caso el valor es de 400 muestras por segundo.

<b>Number of channels</b>	1
<b>Sample rate</b>	400
<b>Store type</b>	always fast

Tabla 8, Detalle de la celda “*Sample rate*”

- En “*Data1*” están situados todos los valores del desplazamiento de la placa a lo largo del ensayo, Se ha de situar una columna paralela con el tiempo de muestreo en segundos. Se va a mostrar un ejemplo de unos pocos datos para una mejor comprensión de lo explicado.

<b>Time (s)</b>	<b>Laser (m)</b>
0	0,032277
0,0025	0,032261
0,005	0,032278
0,0075	0,032264
0,01	0,032274
0,0125	0,03227
0,015	0,032266
...	...

Tabla 9., Detalle de la hoja “*Data 1*”

- Con estas dos columnas se genera la **Gráfica 1**, y podemos observar los tramos de datos correspondientes a cada situación de carga.

Se va a explicar el proceso de obtención de la frecuencia para el caso 1 (carga 0 kg), para los otros cuatro se ha de actuar de la misma forma con sus respectivos datos.

Lo primero será identificar el rango de datos que están involucrados en el primer caso de estudio, copiar y, en la nueva hoja definida previamente, pegar. También se generarán tres nuevas columnas cuya finalidad se explicará a continuación.

time (s)	desp (m)	desp_laser (m)	desp_aj (m)	Error abs (m)
0	0,03234705	1,74007E-05	0,000117647	0,00056142
0,0025	0,03237907	4,94233E-05	0,000140535	0,00069373
0,005	0,03240386	7,42114E-05	0,000162197	0,00080873
0,0075	0,03244038	0,000110727	0,000182449	0,00092397
0,01	0,03245576	0,000126108	0,000201119	0,00100536
0,0125	0,03249348	0,000163827	0,00021805	0,00109536
0,015	0,03250824	0,000178594	0,000233099	0,00114786
0,0175	0,03253153	0,000201881	0,000246139	0,00119375
...	...	...	...	...

Tabla 10, Parámetros de la hoja de Excel en situación previa al ajuste.

- Las dos primeras columnas (time (s) y desp (m)) representan el rango de datos tomado del conjunto de datos brutos experimental.
- Desp\_laser (m): Se trata de un ajuste a cero ya que los datos no vienen ajustados a ningún cero de gráfica, para ello simplemente se ha de tomar el primer valor de desplazamiento (0,03234705 m en este caso) y restarlo del promedio de todos los datos. Utilizar el comando PROMEDIO para generar la media aritmética de los valores seleccionados y así conseguir que oscile entorna a cero y sea de aplicación la fórmula (64).
- Desp\_aj (m): Son los datos del desplazamiento teórico generados del uso de la expresión del MAS (64), para la realización de esta columna, previamente, se ha de crear una tabla con unos valores iniciales de los parámetros a definir (Amplitud, Frecuencia propia, amortiguamiento y desfase).

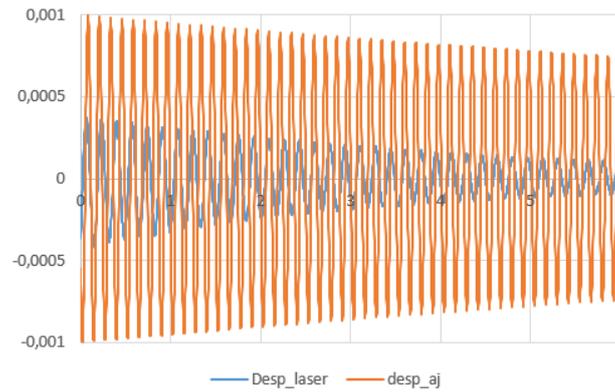
A1	m	0,001		
w1	rad/seg	50	Hz	7,95774715
d1		0,001		
f1	rad	10	Hz	1,59154943

Tabla 11, Parámetros del MAS en situación inicial.

- Error abs (m): Estos datos se generan simplemente para observar una estimación de la precisión en la comparación de datos teóricos y experimentales. Los valores se obtienen restando el valor de (desp\_laser – desp\_aj).

Realizar dos gráficas (desp\_laser y desp\_aj frente al tiempo), es aconsejable superponer las dos gráficas en una misma puesto que se va a realizar un ajuste.

En las condiciones iniciales mostradas en la **Tabla 11**, las gráficas generadas quedarían de la siguiente manera:



Gráfica 6, situación inicial del primer caso.

Como se observa, la gráfica generada a partir de los datos experimentales (desp\_laser de color azul) no coincide con la generada por los datos teóricos (desp\_aj de color naranja), lógicamente, el objetivo es ajustar la gráfica teórica modificando sus parámetros de amplitud, desfase, frecuencia y amortiguamiento hasta que las dos trazas sean prácticamente idénticas.

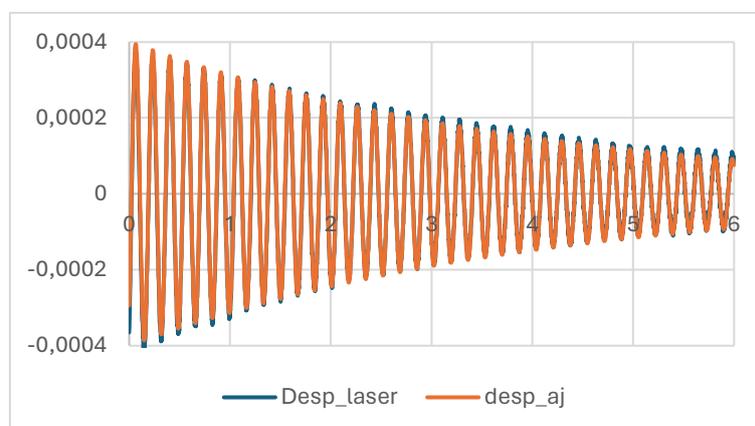
Para realizar el ajuste se va a crear una celda "objetivo", se trata de una celda en la que se calculará el error cuadrático medio (promedio de los errores al cuadrado que comete un modelo de predicción).

Para realizar el ajuste se va a utilizar la herramienta "solver" la cual, fijando un parámetro (celda error cuadrático medio) y, exigiéndole que se minimice lo máximo posible, obtiene los demás parámetros realizando un ajuste muy preciso. Se han obtenido los siguientes valores finales para la modificación de los parámetros teóricos, estos valores se muestran en la siguiente tabla:

<b>A1</b>	m	0,000401048		
<b>w1</b>	rad/seg	37,15014714	Hz	5,9126295
<b>d1</b>		0,006649568		
<b>f1</b>	rad	11,74272861	Hz	1,8689134

Tabla 12, Parámetros del MAS en situación final.

Con estas condiciones finales mostradas en la **Tabla 12**, la gráfica generada quedaría de la siguiente manera:



Gráfica 7, situación final del primer caso.

Los nuevos valores del desplazamiento obtenidos, junto con el error absoluto calculado se observan en la siguiente **Tabla 13**:

time (s)	desp (m)	desp_laser (m)	desp_aj (m)	Error abs (m)
0	0,03234705	-0,000365646	-0,00029421	7,1426E-05
0,0025	0,03237907	-0,00034921	-0,00026751	8,1699E-05
0,005	0,03240386	-0,000299946	-0,00023853	6,1458E-05
0,0075	0,03244038	-0,000256234	-0,00020753	4,8702E-05
0,01	0,03245576	-0,000223377	-0,00017478	4,8594E-05
0,0125	0,03249348	-0,00017617	-0,00014056	3,5601E-05
0,015	0,03250824	-0,00014652	-0,00010518	4,1334E-05
0,0175	0,03253153	-9,78122E-05	-6,8940E-05	2,8871E-05
...	...	...	...	...

Tabla 13, Parámetros de la hoja de Excel en situación posterior al ajuste.

Como se observa en la **Gráfica 7** y en la **Tabla 13**, en esta situación final, el análisis experimental (desp\_laser) y el análisis teórico (desp\_aj), coinciden con una muy buena precisión puesto que no se distinguen apenas diferencias y, el error absoluto cometido entre ambos parámetros ha disminuido significativamente, esto quiere decir que el valor del amortiguamiento es el adecuado para la placa de estudio en situación inicial (0 kg).

- Frecuencia propia en el caso 1: 5,9126 Hz
- Factor de amortiguamiento en el caso 1: 0,0066

Los parámetros obtenidos de amplitud y fase son propiedades que dependen de cómo se ha generado o excitado la onda, y no de la onda misma como una entidad modal o independiente. Esto significa que si se cambia la forma en que se excita la onda, la amplitud y la fase también cambiarán por lo que no son valores significativos del estudio modal.

Para comprobar la validez del resultado obtenido, se va a hacer uso de la aplicación “Sigview”, un software utilizado principalmente para el análisis de señales y datos en tiempo real o grabados. Ofrece una variedad de herramientas que permiten visualizar, procesar y analizar datos de diferentes fuentes.



Figura 95, detalle del icono de “Sigview”.

Se va a explicar brevemente el funcionamiento del software:

- El primer paso será la creación de un archivo de texto dónde pegar los datos del ensayo a realizar, en este caso (placa con cuatro apoyos fijos), se añadirán todos los datos brutos temporales y de desplazamiento resultantes del estudio experimental en el laboratorio.
- Abrir el programa “Sigview” y seleccionar “File”→”ASCII Files”→”Import signal decimal comma...”, escoger el archivo de texto creado en el paso anterior.

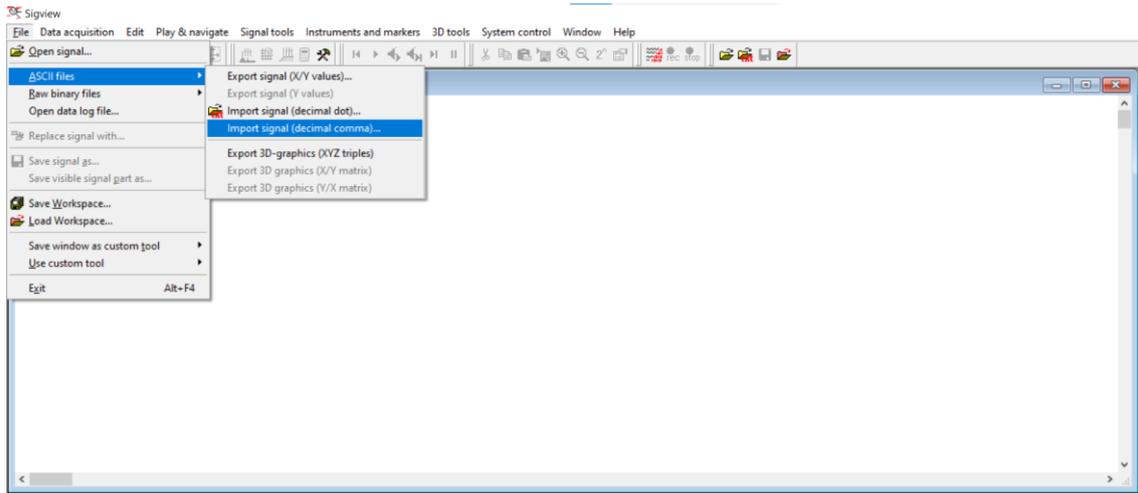


Figura 96, Pantalla de inicio "Sigview".

- Aparecerá una gráfica como la obtenida en Excel cuando se trataron los datos brutos, escoger el caso de estudio deseado (en este caso se va a escoger el primer caso para la posterior comparación del resultado de la frecuencia) y, con el botón derecho del ratón, seleccionar "Zoom in".

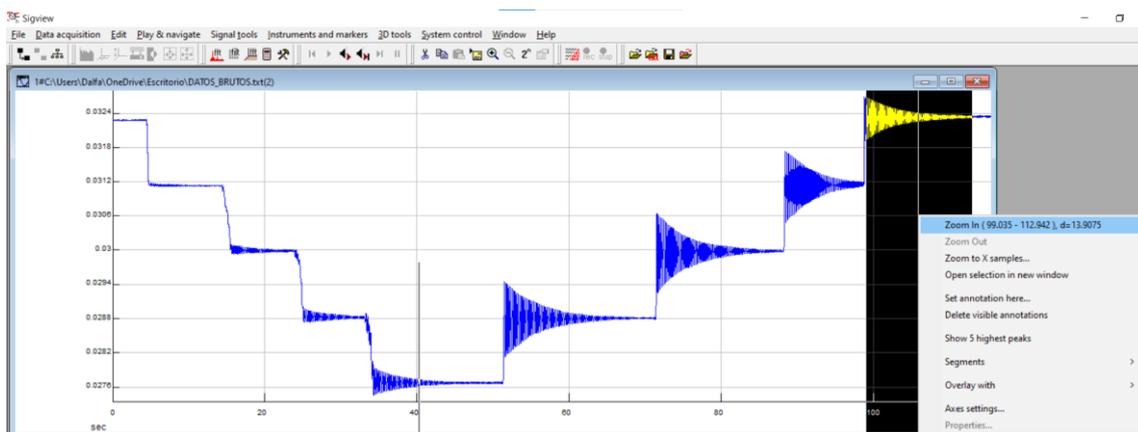


Figura 97, detalle del comando "zoom in".

- Sobre la sección ampliada, seleccionar la opción "FFT spectrum analysis".

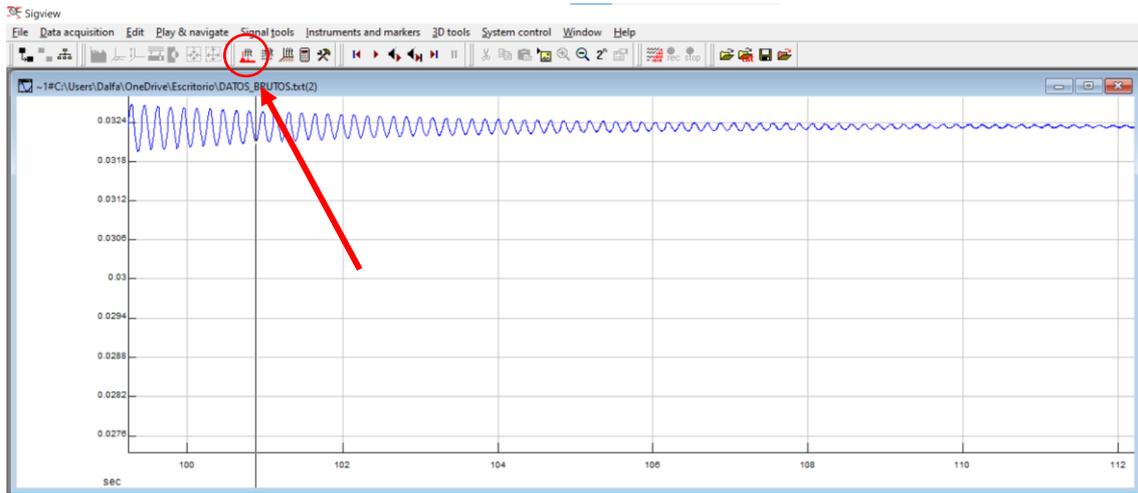


Figura 98, Pantalla principal ampliada.

- En la nueva ventana mostrada, hacer “click” derecho y seleccionar “show 5 highest peaks”, de esta manera se obtendrán los valores de la frecuencia de los cinco puntos más significantes.

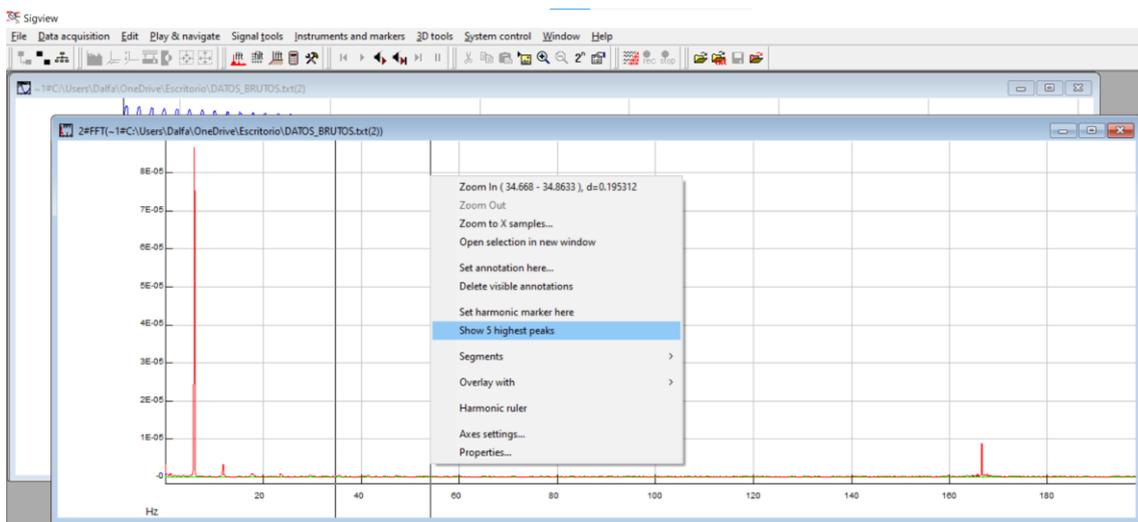


Figura 99, detalle del espectro ampliado.

- Observar el valor de la frecuencia del pico más alto, ese valor debe corresponderse con el resultado obtenido con el procedimiento en EXCEL.

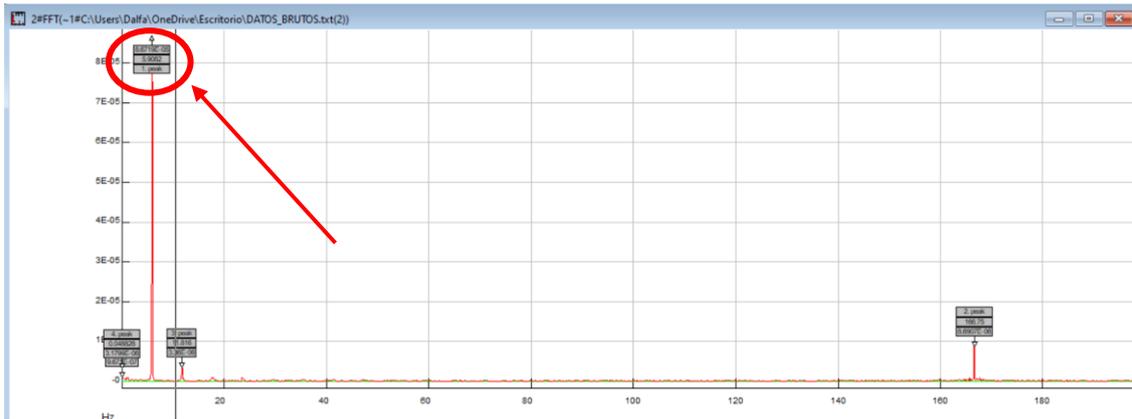


Figura 100, Visual del valor de la frecuencia de los cinco puntos más significativos.

El valor de la frecuencia en el primer caso (0 kg de carga) utilizando el software “sigview” es de 5,9082 Hz, se va a realizar una tabla comparativa con la frecuencia obtenida utilizando Excel y la obtenida con “sigview” para verificar la validez de los resultados obtenidos.

Siguiendo el mismo procedimiento que se ha aplicado para llegar a este punto, se obtiene la frecuencia de los otros cuatro casos, los resultados de la frecuencia propia de cada caso se pueden observar en la siguiente tabla:

Caso de estudio	Masa aplicada (kg)	Frecuencia Excel (Hz)	Frecuencia Sigview (Hz)	Error Generado (Hz)	Error Relativo (%)
Caso 1	0	5,9126	5,9082	0,0044	0,074
Caso 2	3	5,5621	5,5664	-0,0043	0,077
Caso 3	6	5,2543	5,2734	-0,0191	0,364
Caso 4	9	4,9826	4,9805	0,0021	0,042
Caso 5	12	4,7608	4,7852	-0,0244	0,512

Tabla 14, Tabla con los resultados obtenidos de la frecuencia experimental.

Como se observa en **Tabla 14**, los valores de la frecuencia propia obtenidos por medio del estudio experimental en Excel y los obtenidos por medio de “sigview”, son bastante similares, el error relativo obtenido es muy bajo y, por tanto, los resultados obtenidos en Excel son válidos.

Una vez se han obtenido todos los valores de la frecuencia propia por el método experimental, se deben obtener los valores de la frecuencia por medio de SAP2000 y posteriormente compararlos.

Para obtener el valor de la frecuencia se deben crear situaciones de carga con masas situadas en la posición central de la placa. SAP2000 no permite crear todas las situaciones para posteriormente tratarlas en un desplegable en la simulación, sino que se deben ir generando y simulando de una en una.

Para una mejor comprensión se va a explicar el procedimiento para la extracción del valor de la frecuencia en los cinco casos:

- Primeramente, se ha de situar la primera masa caso 1 (0 kg), para ello, seleccionar el punto central de la placa e ir a: “Assign” → “Joint” → “Masses”.

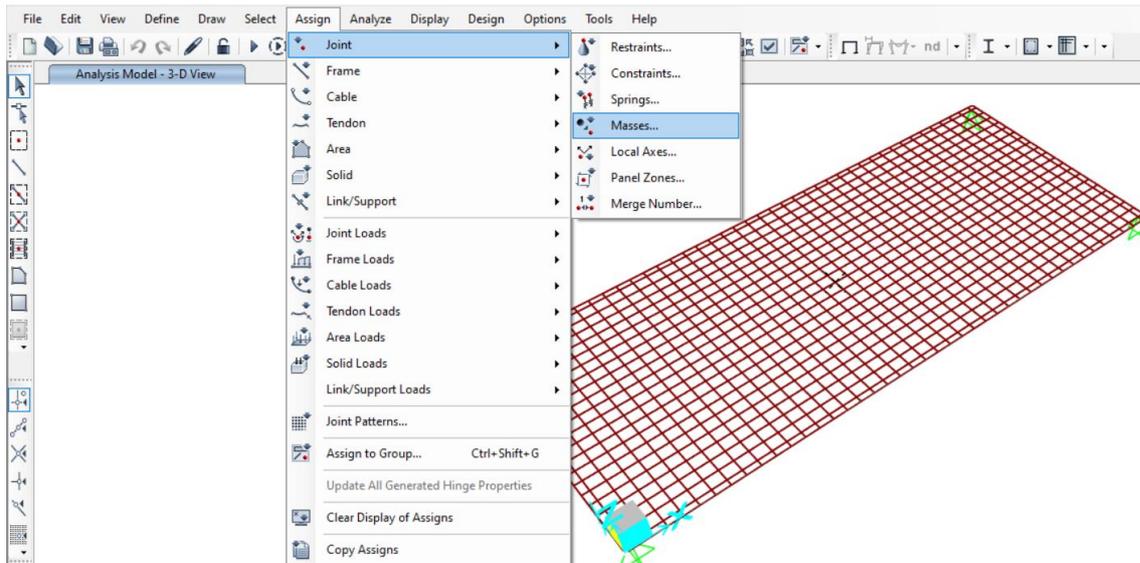


Figura 101, Selección de la opción "Masses".

- En la ventana emergente situar la masa correspondiente al caso de estudio en las tres direcciones de traslación. En este caso se ha añadido el valor de 0 kg puesto que estamos en el caso 1.

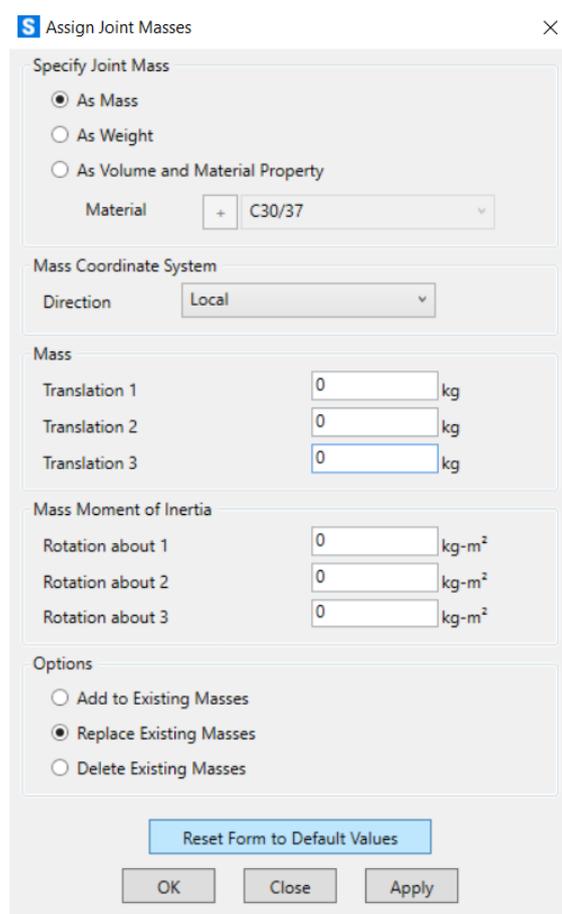


Figura 102, Detalle de la ventana de asignación de la masa.

- Después de aplicar la masa del paso anterior, ejecutar el modelo, abrir la ventana "show deformed shape" y en el desplegable seleccionar la opción "MODAL".

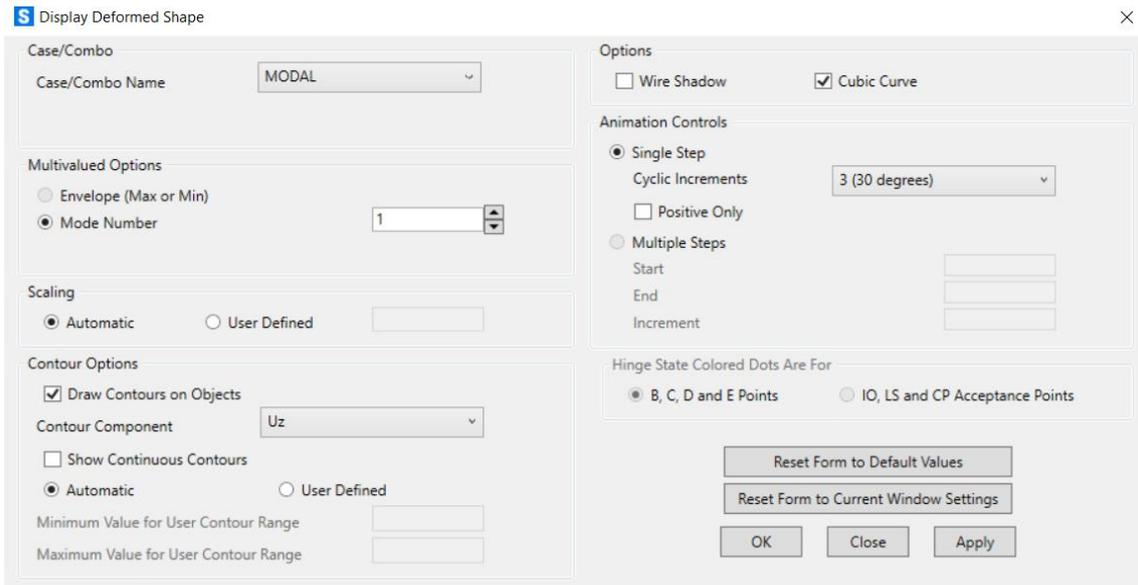


Figura 103, Detalle de la ventana “show deformed shape” con la opción “MODAL” marcada.

- Se observará que existen varios modos de simulación, en este caso, se deben tomar los resultados del primer modo puesto que es el que representa el ensayo realizado. El valor de la frecuencia para el primer caso, como se muestra en la siguiente imagen, es de 5,96498 Hz.

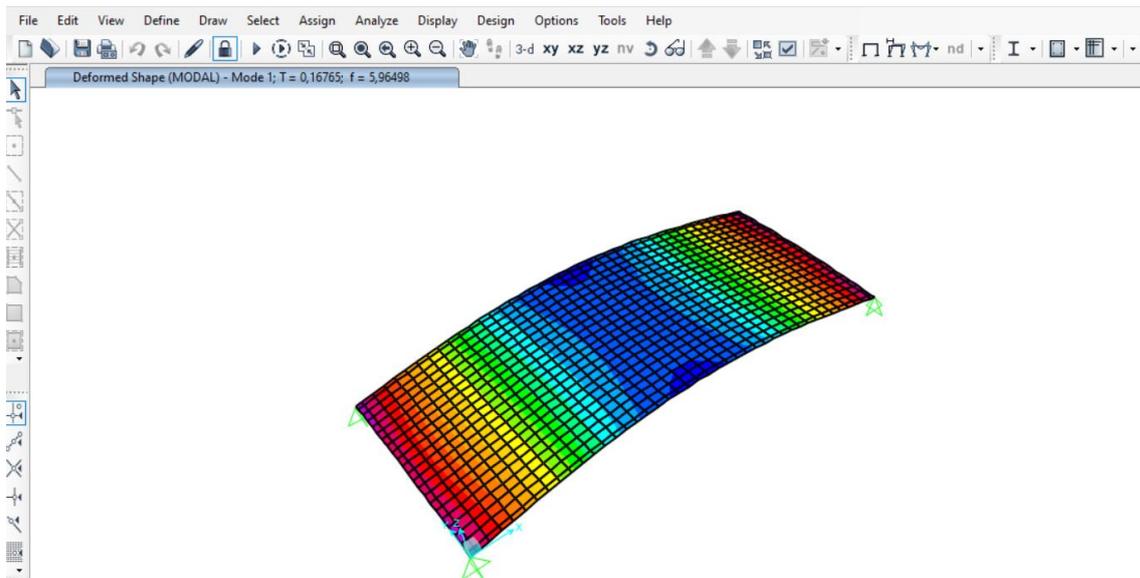


Figura 104, Simulación inicial con la opción modal 1 y el caso 1 seleccionados.

- Seguir los mismos pasos con los otros cuatro pasos cambiando las masas a situar en el centro de la placa. Observar las siguientes imágenes con los resultados obtenidos:

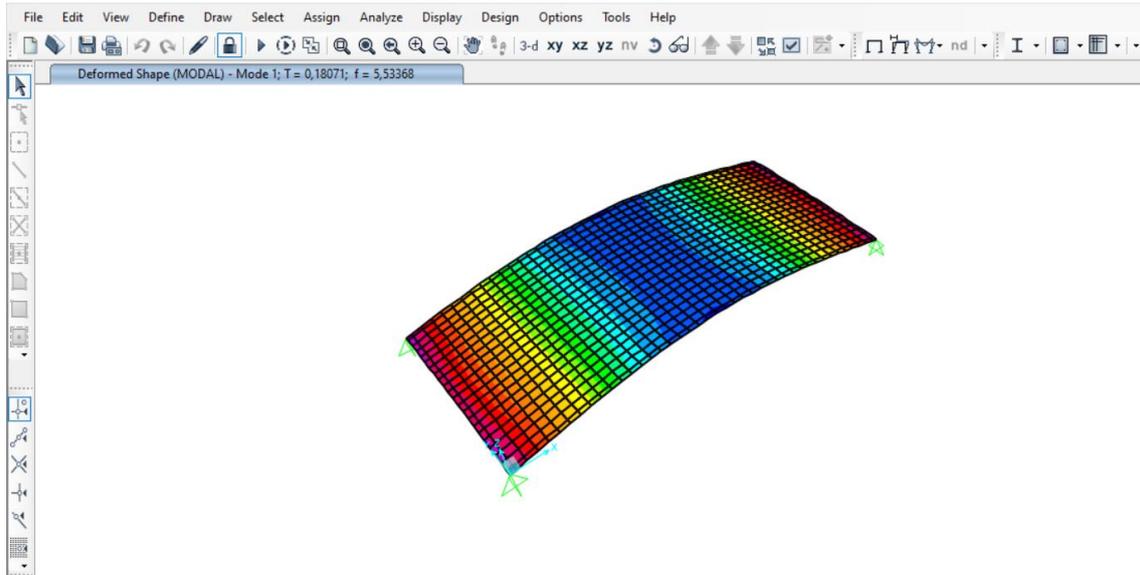


Figura 105, Simulación inicial con la opción modal 1 y el caso 2 seleccionados.

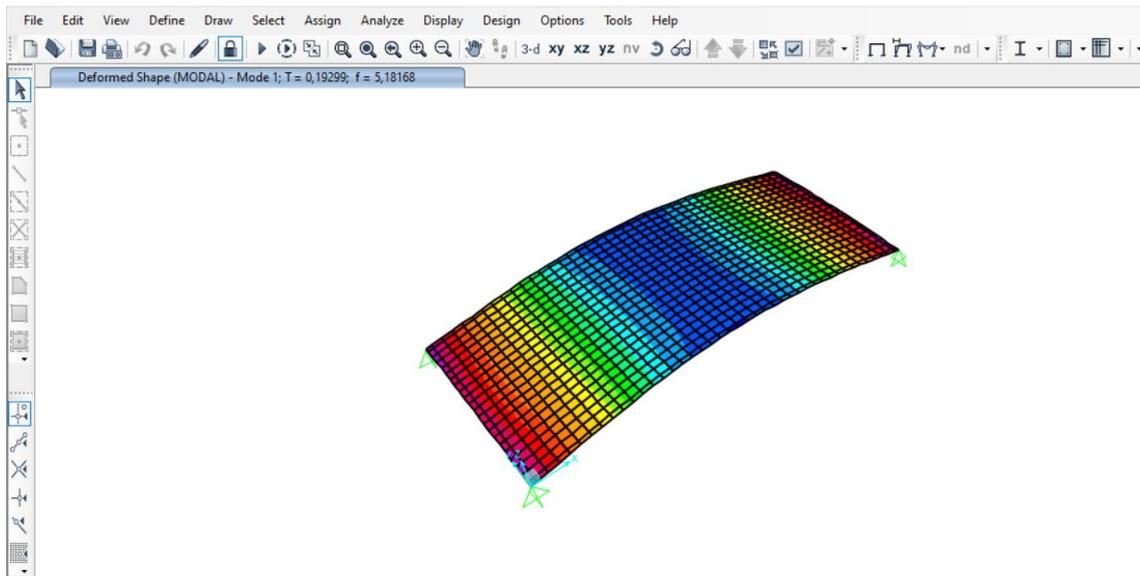


Figura 106, Simulación inicial con la opción modal 1 y el caso 3 seleccionados.

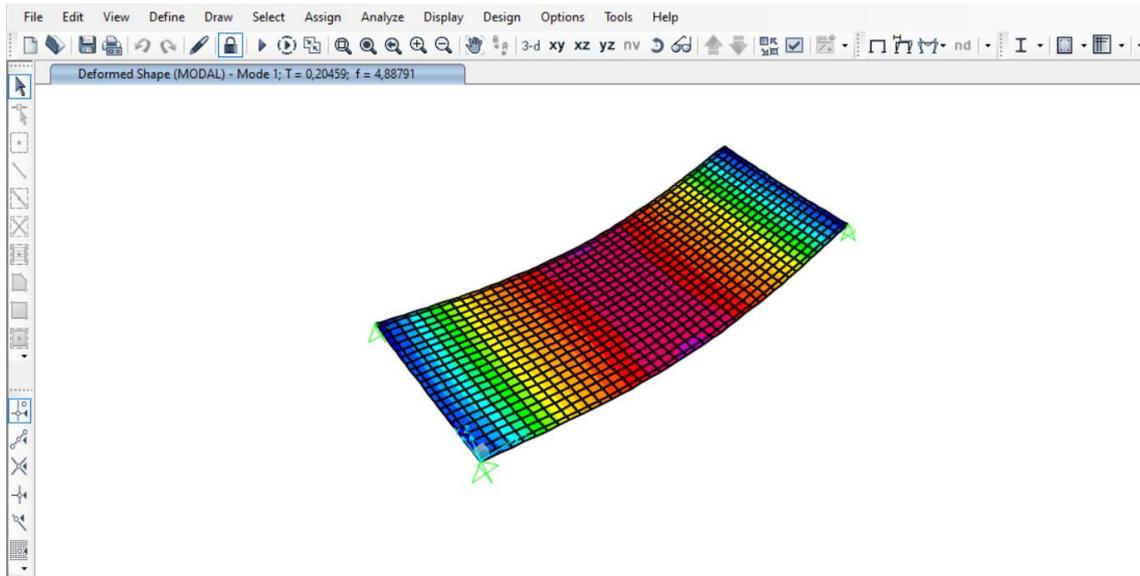


Figura 107, Simulación inicial con la opción modal 1 y el caso 4 seleccionados.

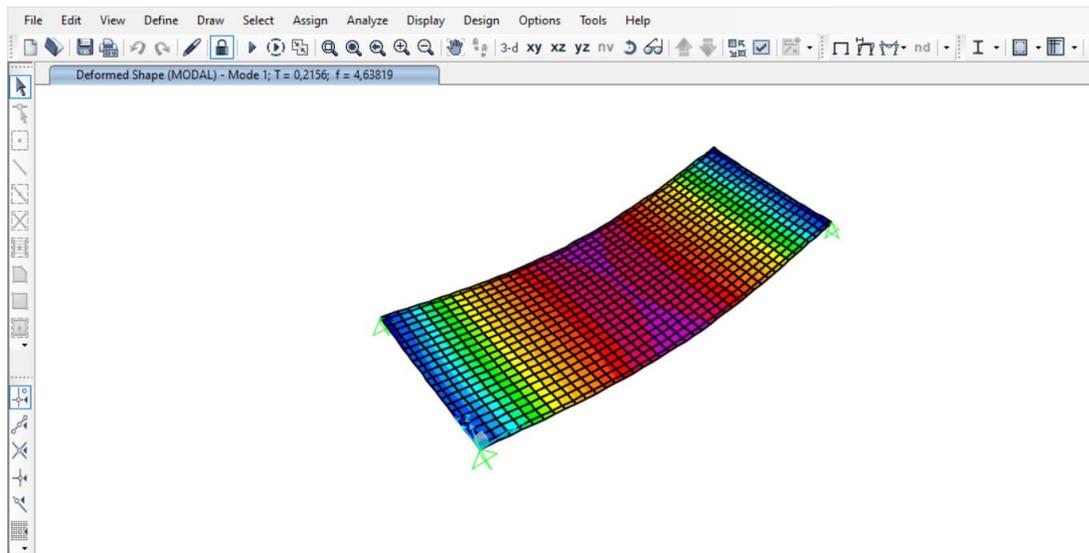


Figura 108, Simulación inicial con la opción modal 1 y el caso 5 seleccionados.

Se va a mostrar una tabla comparativa de los resultados iniciales de la frecuencia propia obtenidos por el método experimental y los obtenidos aplicando el análisis modal en SAP2000, también se añadirán los valores del factor de amortiguamiento puesto que es un resultado relevante en el análisis modal.

Caso de estudio	Masa (kg)	Factor de Amortiguamiento	Frec. exp (Hz)	Frec. SAP2000 (Hz)	E. Generado (Hz)	E. Relativo (%)
Caso 1	0	0,0066	5,9126	5,9649	-0,0523	0,884
Caso 2	3	0,0074	5,5621	5,5336	0,0285	0,512
Caso 3	6	0,0071	5,2543	5,1816	0,0727	1,384
Caso 4	9	0,0070	4,9826	4,8879	0,0947	1,900
Caso 5	12	0,0081	4,7608	4,6381	0,1227	2,577

Tabla 15, Tabla comparativa inicial de los valores de la frecuencia.

Demostración de la aplicación de **ec.(35)** para el estudio de la frecuencia propia en un estudio del movimiento armónico simple (en una placa con cuatro apoyos en sus vértices) para el Caso 1:

Valores de las variables involucradas en la **ec.(35)** para este caso:

$$\lambda i^2 = 9,29$$

$$a = 2,46 \text{ m}$$

$$E = 9,33 \times 10^9$$

$$h = 0,02 \text{ m}$$

$$\gamma = 11,4592 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$\nu = 0,02$$

$$\text{Frecuencia Propia (Hz)} = \frac{9,29}{2 \times \pi \times 2,46^2} \times \left[ \frac{(9,33 \times 10^9) \times 0,02^3}{12 \times 11,4592 \times (1-0,3)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 5,9664 \text{ Hz} \quad (65)$$

La siguiente tabla muestra la comparativa de las frecuencias propias calculadas por los diversos métodos mostrados anteriormente y el error generado de la obtención de la frecuencia propia aplicando la fórmula teórica **ec.(65)** en comparación con la obtenida por el método experimental teórico.

Caso de estudio	Masa (kg)	Frec. exp (Hz)	Frec. SAP2000 (Hz)	Frec. Fórmula teórica (Hz)	E. Generado (Hz)	E. Relativo (%)
Caso 1	0	5,9126	5,9649	5,9664	-0,0538	0,909

Tabla 16, comparativa de las frecuencias propias del estudio.

Como se puede observar en **Tabla 15** y en **Tabla 16**, los resultados obtenidos de la frecuencia mediante el análisis modal son bastante similares entre sí, esto se refleja en el error relativo generado el cual, no es muy elevado en ningún caso, se podría intentar ajustar estos valores para obtener un error menor. La problemática viene de que ahora, para realizar un ajuste, no se puede modificar el valor de E puesto que se comprometería el estudio estático (ajustado previamente), por lo que se va a modificar el valor de la masa de la placa dentro del rango de tolerancia establecido en **Tabla 2**.

Se va a tratar de bajar el valor del error relativo del Caso 1, mostrado en la **Tabla 15**, al mínimo posible, para ello, se deberá cambiar la masa de la placa (35,45 kg) dentro de la tolerancia permitida ( $\pm 0,300$  kg). Para bajar la frecuencia, la masa ha de aumentar como se observa en la **ec.(64)**, ya que el valor de la masa por unidad de área de la placa es un término ubicado en el denominador entonces, cuanto mayor sea este, menor la frecuencia.

Es necesario incrementar la masa hasta llegar al valor que haga coincidir los valores de la frecuencia experimental y la simulada en SAP2000, tras varias simulaciones, se ha obtenido el siguiente valor de masa: 35,67 kg (valor perteneciente a la tolerancia y por tanto válido), se mostrará como calcular la nueva frecuencia obtenida en la simulación en SAP2000. Para ello es preciso calcular la nueva densidad y peso por unidad de volumen.

$$\text{Weight per unit of volume} = \frac{35,67 \text{ kg} \times 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2,46 \text{ m} \times 1,244 \text{ m} \times 0,02 \text{ m}} = 5711,44 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \quad (66)$$

$$\text{Mass per unit of volume} = \frac{35,67 \text{ kg}}{2,46 \text{ m} \times 1,244 \text{ m} \times 0,02 \text{ m}} = 582,80 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (67)$$

Aplicando este ajuste se van a volver a obtener los resultados de la frecuencia en la simulación de SAP2000. Para modificar las propiedades del material, se ha de actuar como en el ajuste realizado en el estudio estático.

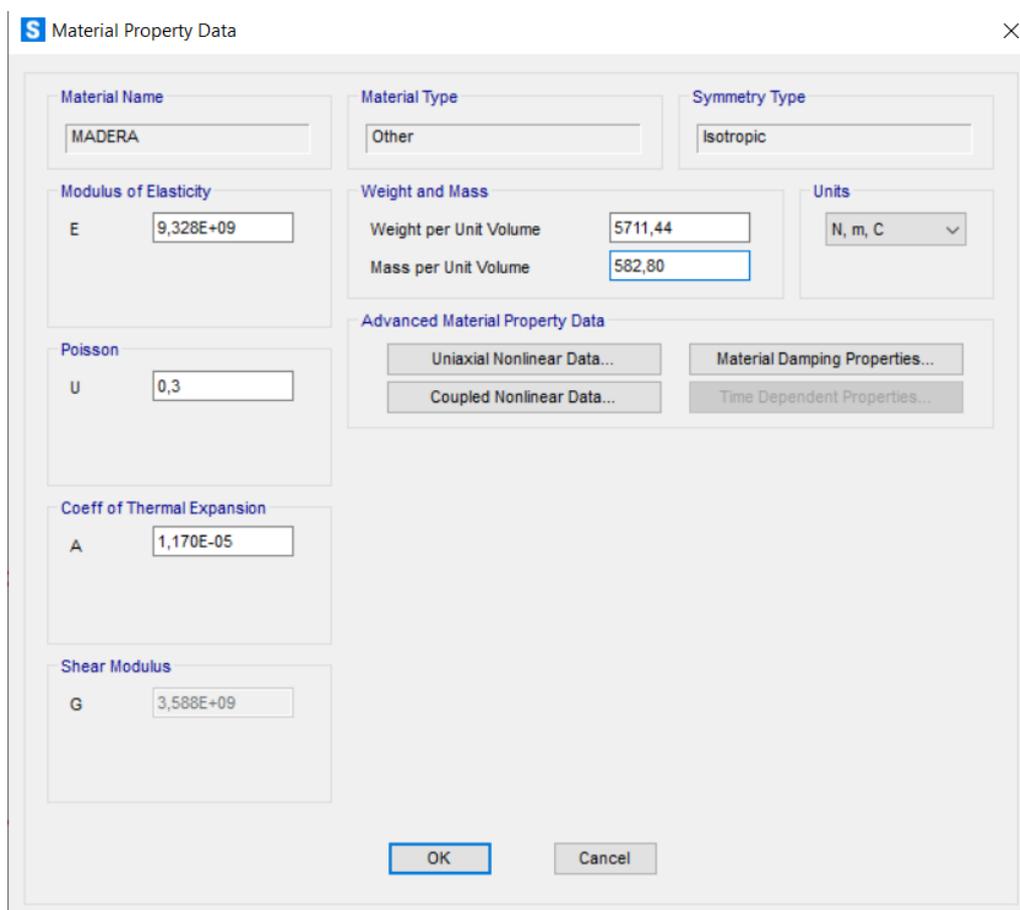


Figura 109, Detalle de la ventana de definición de los parámetros de la madera.

- Con las nuevas propiedades del material, se van a obtener las nuevas frecuencias propias del material. A continuación, se mostrará una imagen con la simulación del Caso 1 (masa 0 kg) como ejemplo de los resultados que se obtienen en la compilación del estudio.

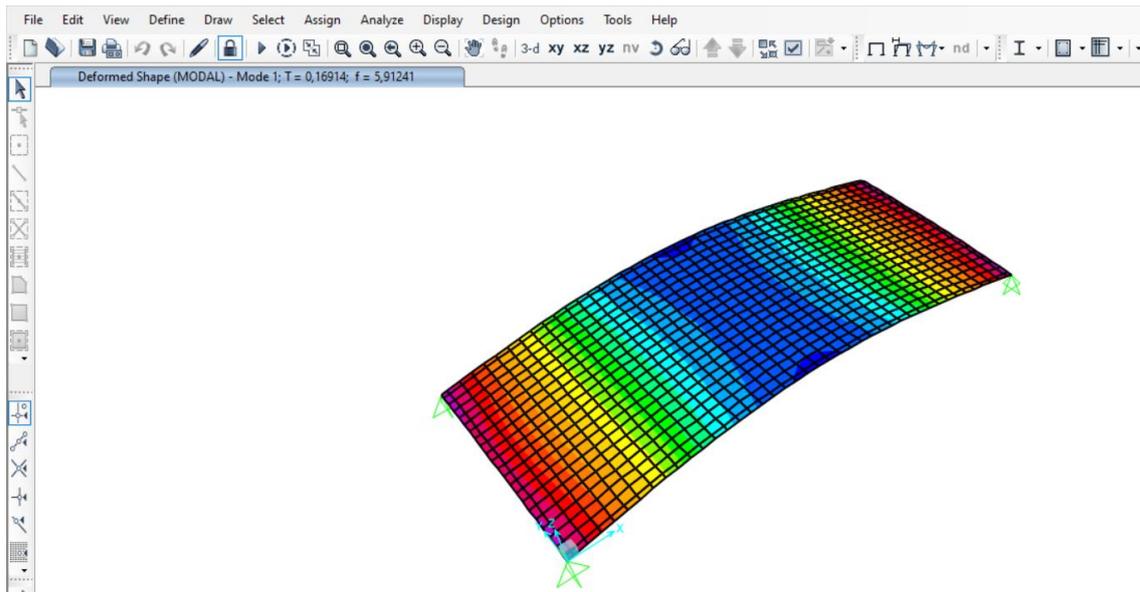


Figura 110, Simulación final con la opción modal 1 y el caso 1 seleccionados.

Tabla comparativa de los resultados finales de la frecuencia propia obtenidos por el método experimental y los obtenidos aplicando el análisis modal en SAP2000

Caso de estudio	Masa (kg)	Factor de Amortiguamiento	Frec. exp (Hz)	Frec. SAP2000 (Hz)	E. Generado (Hz)	E. Relativo (%)
Caso 1	0	0,0066	5,9126	5,9124	0,0002	0,003
Caso 2	3	0,0074	5,5621	5,4916	0,0705	1,267
Caso 3	6	0,0071	5,2543	5,1472	0,1071	2,038
Caso 4	9	0,0070	4,9826	4,8589	0,1237	2,482
Caso 5	12	0,0081	4,7608	4,6135	0,1473	3,094

Tabla 17, Tabla comparativa final de los valores de la frecuencia.

Al evaluar los resultados obtenidos en la **Tabla 17**, se puede observar cómo el valor de la frecuencia en el caso 1 ahora coincide con el calculado de forma experimental pero, el resto de los casos han empeorado significativamente sus resultados, es por esto que sería mejor no haber tocado la masa y por tanto, nos vamos a quedar con los resultados obtenidos en la situación previa al cambio de densidad y peso por unidad de volumen (situación de la **Tabla 15**, masa 35,45 kg).

La mejor solución se obtendría de una supuesta optimización en la cual se calcularían los valores de densidad y masa por unidad de volumen con los cuales conseguiríamos que los cinco errores disminuyeran al mínimo posible a la vez, cosa que se excede del trabajo a realizar en este TFG, además no procede realizarlo puesto que el error obtenido ya es muy pequeño.

#### 4.4.2 Placa con tres apoyos:

Se han de realizar los mismos dos estudios que en el caso de la placa con cuatro apoyos fijos, estudio estático y modal, lógicamente se van a realizar con los parámetros ya calculados en el caso anterior, puesto que el tablero es el mismo y, por tanto, las propiedades también:  $E = 9,32773 \times 10^9$  Pa,  $\nu = 0,3$ , se va a utilizar la primera masa

(situación previa al ajuste) puesto que los errores en el global de los cinco casos eran más bajos (35,45 kg)

### ESTUDIO ESTÁTICO:

El estudio estático de la placa en esta situación de apoyos se ha de realizar de la misma manera que se hizo en el caso de la placa con cuatro apoyos, es decir, se va a realizar una intercomparación de los valores de la flecha máxima obtenidos en el análisis experimental y los obtenidos mediante la simulación en SAP2000.

Valores obtenidos en la situación inicial para la flecha máxima en SAP2000:

**S** Joint Displacements ×

Joint Object	31	Joint Element	31
	1	2	3
Trans	0,	0,	-0,00109
Rotn	0,	-3,247E-06	0,

Figura 111, valor del desplazamiento inicial en el caso P1.

**S** Joint Displacements ×

Joint Object	31	Joint Element	31
	1	2	3
Trans	0,	0,	-0,00217
Rotn	0,	-6,472E-06	0,

Figura 112, valor del desplazamiento inicial en el caso P2.

**S** Joint Displacements ×

Joint Object	31	Joint Element	31
	1	2	3
Trans	0,	0,	-0,00326
Rotn	0,	-9,719E-06	0,

Figura 113, valor del desplazamiento inicial en el caso P3.

**S** Joint Displacements ×

Joint Object	31	Joint Element	31
	1	2	3
Trans	0,	0,	-0,00435
Rotn	0,	-1,295E-05	0,

Figura 114, valor del desplazamiento inicial en el caso P4.

En la siguiente tabla se muestra la situación inicial de los valores del desplazamiento para la situación de placa sobre tres apoyos fijos:

Situación inicial de los desplazamientos				
Situación	$\Delta$ desplazamiento experimental (m)	$\Delta$ Desplazamiento SAP2000 (m)	Error Generado (m)	Error Relativo (%)
P1	0,00125	0,00109	0,00016	12,801
P2	0,00243	0,00217	0,00026	10,691
P3	0,00363	0,00326	0,00037	10,192
P4	0,00484	0,00435	0,00049	10,124

Tabla 18, Comparativa de los desplazamientos en situación inicial.

Al observar la **Tabla 18**, se aprecia claramente una ligera diferencia en los resultados obtenidos mediante el análisis experimental y los resultados obtenidos haciendo uso de la herramienta SAP2000, aunque el error relativo cometido en todos los casos no es significativamente alto, es más alto que en el caso anterior, en esta situación no es posible realizar ningún ajuste puesto que comprometeríamos el estudio anterior del caso de la placa con cuatro apoyos.

Se va a realizar el estudio modal de la placa situada sobre tres apoyos fijos con el cual obtendremos los valores de la frecuencia propia y del factor de amortiguamiento para cada uno de los cinco casos de carga.

#### **ESTUDIO MODAL:**

Se va a realizar el mismo estudio que en el caso de la placa sobre cuatro apoyos fijos, es decir, se va a estudiar el comportamiento del movimiento armónico simple (MAS) de la placa situada en una posición de equilibrio sobre tres apoyos fijos estáticos a medida que se van aplicando diversas cargas progresivamente en el centro de la placa (centro de gravedad de esta).

La fórmula del desplazamiento de una señal amortiguada sigue la fórmula descrita anteriormente, **ec. (64)**.

En el estudio del comportamiento dinámico de la estructura, se va a evaluar el valor de la frecuencia propia del sistema en dos casos, un primero experimental en el que se obtiene el resultado mediante un análisis analítico gracias a la herramienta informática Excel y, un segundo, en el que se extraen los datos de la frecuencia mediante la simulación en el software SAP2000.

Primero se van a mostrar los resultados obtenidos tras el análisis experimental, para ello, se han realizado las mismas acciones que en el caso anterior. Se enseñará la situación inicial del caso 0 (0 Kg aplicados), así como los resultados en "sigview" para asegurar la veracidad de esos resultados.

Una vez se ha realizado el proceso de tratamiento de datos brutos obtenidos por el ensayo experimental, se procede a la obtención de la frecuencia propia en cada caso de carga, para ello se ha de actuar de la siguiente manera.

- Valores tomados como situación inicial:

time (s)	desp (m)	desp_laser (m)	desp_aj (m)	Error abs (m)
0	0,11537921	1,9481E-05	-0,00029422	0,0003137
0,001	0,11539946	3,9724E-05	-0,00028382	0,00032355
0,002	0,11540823	4,8501E-05	-0,00027304	0,00032154
0,003	0,11541802	5,8291E-05	-0,00026189	0,00032018
0,004	0,11542451	6,4773E-05	-0,00025038	0,00031515
0,005	0,11541259	5,286E-05	-0,00023853	0,00029139
0,006	0,11538945	2,9718E-05	-0,00022636	0,00025608
0,007	0,11538909	2,9353E-05	-0,00021388	0,00024323
...	...	...	...	...

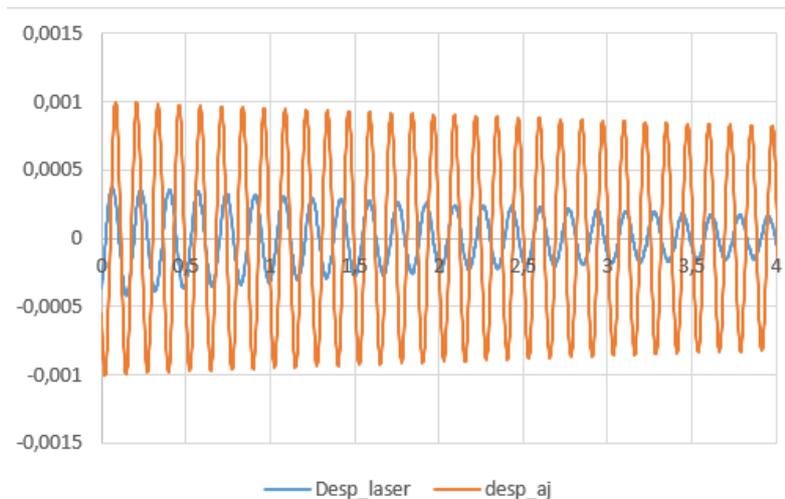
Tabla 19, Parámetros de la hoja de Excel en situación previa al ajuste.

- Parámetros iniciales para el desplazamiento ajustado:

<b>A1</b>	m	0,001		
<b>w1</b>	rad/seg	50	Hz	7,95774715
<b>d1</b>		0,001		
<b>f1</b>	rad	10	Hz	1,59154943

Tabla 20, Parámetros del MAS en situación inicial.

- Gráficas generadas en la situación inicial (previa al ajuste):



Gráfica 8, situación inicial del movimiento armónico simple.

Los valores no coinciden, el error absoluto generado con los parámetros de amplitud, desfase, frecuencia y amortiguamiento, supuestos inicialmente es muy elevado, por lo que hay que realizar el ajuste de los parámetros para obtener una buena similitud entre ambas gráficas y así poder disminuir el error generado.

Al igual que en el caso anterior, para realizar el ajuste se va a crear una celda "objetivo", se trata de una celda en la que se calculará el error cuadrático medio (promedio de los errores al cuadrado que comete un modelo de predicción).

Se utilizará la herramienta de Excel "solver" para obtener los resultados óptimos de amplitud, frecuencia propia, factor de amortiguamiento y desfase que minimicen el error cuadrático medio lo máximo posible.

- Resultados obtenidos tras el ajuste realizado en "solver" para la primera situación de carga:

time (s)	desp (m)	ajuste 0 (m)	desp_aj (m)	Error abs (m)
0	0,115379214	1,94812E-05	4,1731E-05	2,225E-05
0,001	0,115399458	3,97245E-05	4,1638E-05	1,914E-06
0,002	0,115408234	4,85013E-05	4,1489E-05	7,0126E-06
0,003	0,115418024	5,82913E-05	4,1282E-05	1,7009E-05
0,004	0,115424506	6,47733E-05	4,1019E-05	2,3755E-05
0,005	0,115412593	5,28598E-05	4,0699E-05	1,2161E-05
0,006	0,115389451	2,97183E-05	4,0324E-05	1,0606E-05
0,007	0,115389086	2,93533E-05	3,9894E-05	1,0541E-05
...	...	...	...	...

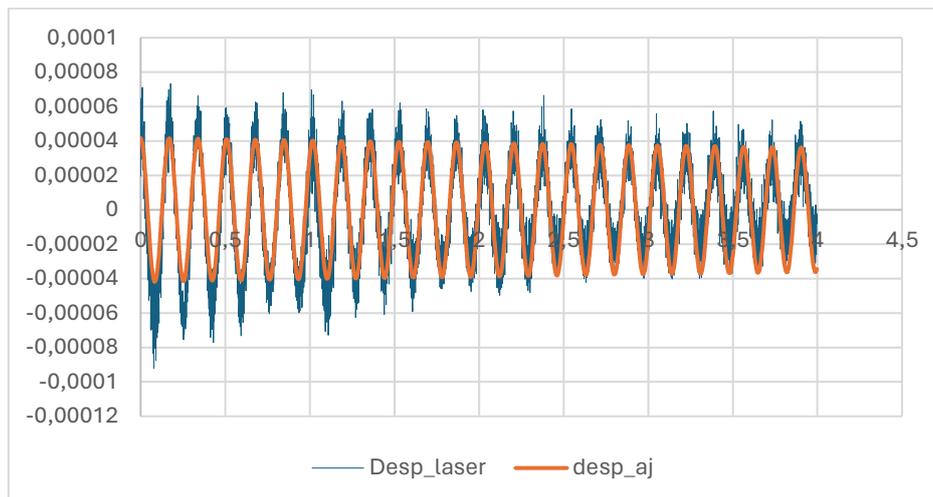
Tabla 21, Parámetros de la hoja de Excel en situación posterior al ajuste.

- Parámetros finales para del MAS tras el ajuste en la primera situación de carga:

<b>A1</b>	m	4,17675E-05		
<b>w1</b>	rad/seg	37,0075416	Hz	5,8899331
<b>d1</b>		0,0012		
<b>f1</b>	rad	14,17876876	Hz	2,2566211

Tabla 22, Parámetros del MAS en situación final.

- Gráficas generadas en la situación final (posterior al ajuste) para la primera situación de carga:



Gráfica 9, situación final del movimiento armónico simple.

Como se observa en la **Gráfica 9**, situación final del movimiento armónico simple., en esta situación final, el análisis experimental (desp\_laser) y el análisis teórico (desp\_aj), coinciden con una muy buena precisión puesto que no se distinguen apenas las trazas de las dos gráficas, el error absoluto cometido entre ambos parámetros ha disminuido

significativamente, esto quiere decir que el valor obtenido de la frecuencia propia es el adecuado para la placa de estudio en situación inicial (0 kg).

- Frecuencia propia en el caso 1: 5,8899 Hz.
- Factor de amortiguamiento en el caso 1: 0,0012.

Si se utiliza "sigview" para obtener una "segunda opinión", obtenemos el siguiente valor de la frecuencia propia:

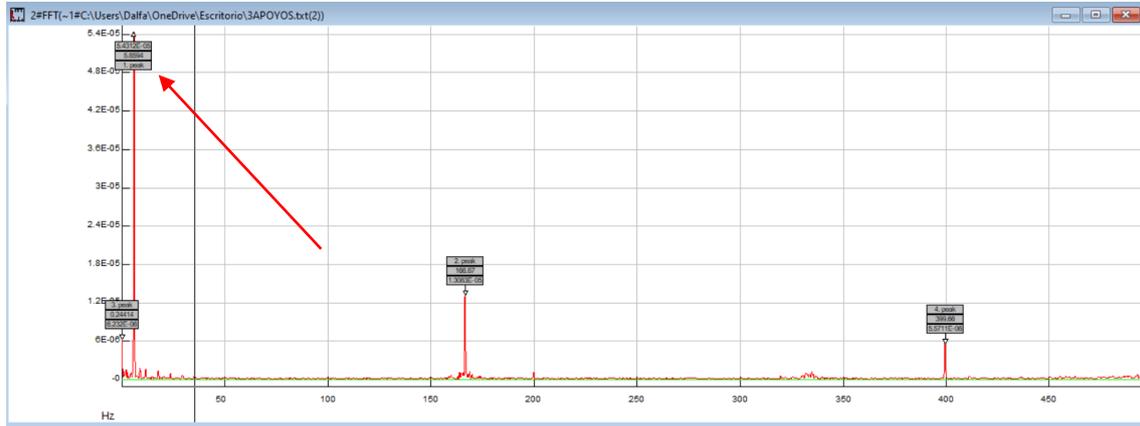


Figura 115, resultado de la frecuencia en caso 0, sigview.

- Frecuencia propia en el caso 1 (sigview): 5,8594 Hz.

Al igual que en el caso "tetrapoyado", se va a realizar una tabla comparativa con la frecuencia obtenida utilizando Excel y la obtenida con "sigview" para verificar la validez de los resultados obtenidos.

Realizando las mismas operaciones con el resto de los casos, obtenemos los siguientes valores de frecuencia propia en el caso experimental:

Caso de estudio	Masa aplicada (kg)	Frecuencia Excel (Hz)	Frecuencia Sigview (Hz)	Error Generado (Hz)	Error Relativo (Hz)
Caso 1	0	5,8899	5,8594	0,0305	0,517
Caso 2	3	5,5112	5,5152	-0,0040	0,072
Caso 3	6	5,2077	5,2490	-0,0413	0,793
Caso 4	9	4,9550	4,8928	0,0622	1,255
Caso 5	12	4,6853	4,6387	0,0466	0,994

Tabla 23, Valores de la frecuencia experimental.

Como se observa en la **Tabla 23**, los valores de la frecuencia propia obtenidos mediante "sigview" y los calculados con el ajuste realizado en Excel son muy similares, esto se refleja en los errores calculados ya que son muy pequeños, demostrando así que son resultados válidos.

Después de obtener todos los valores de frecuencia natural a través del método experimental, es necesario obtener los valores de frecuencia utilizando SAP2000 y luego compararlos. Para determinar el valor de la frecuencia, se requiere generar situaciones de carga con masas colocadas en la posición central de la placa. Sin embargo, SAP2000 no posibilita la creación simultánea de todas estas situaciones para su posterior manejo en

un menú desplegable dentro de la simulación; en su lugar, es necesario generarlas y simularlas de forma individual y secuencialmente.

El proceso de obtención de la frecuencia ya se explicó en la situación anterior (placa sobre cuatro apoyos fijos), por lo que se van a mostrar directamente los resultados.

- Valores de la frecuencia calculados por medio de SAP2000:

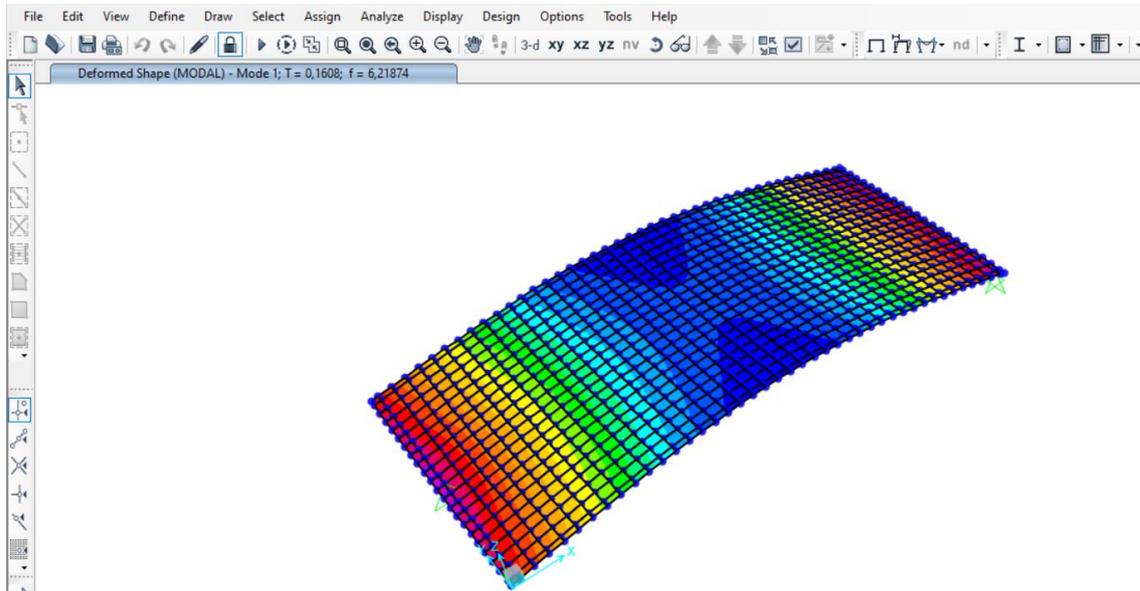


Figura 116, Simulación inicial con la opción modal 1 y el caso 1 seleccionados.

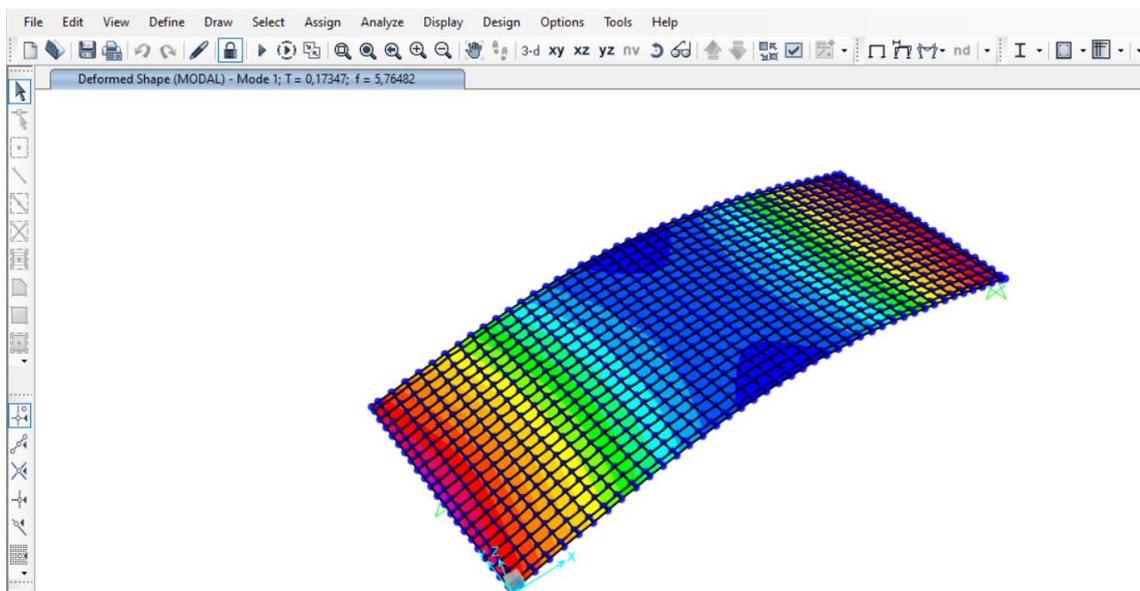


Figura 117, Simulación inicial con la opción modal 1 y el caso 2 seleccionados.

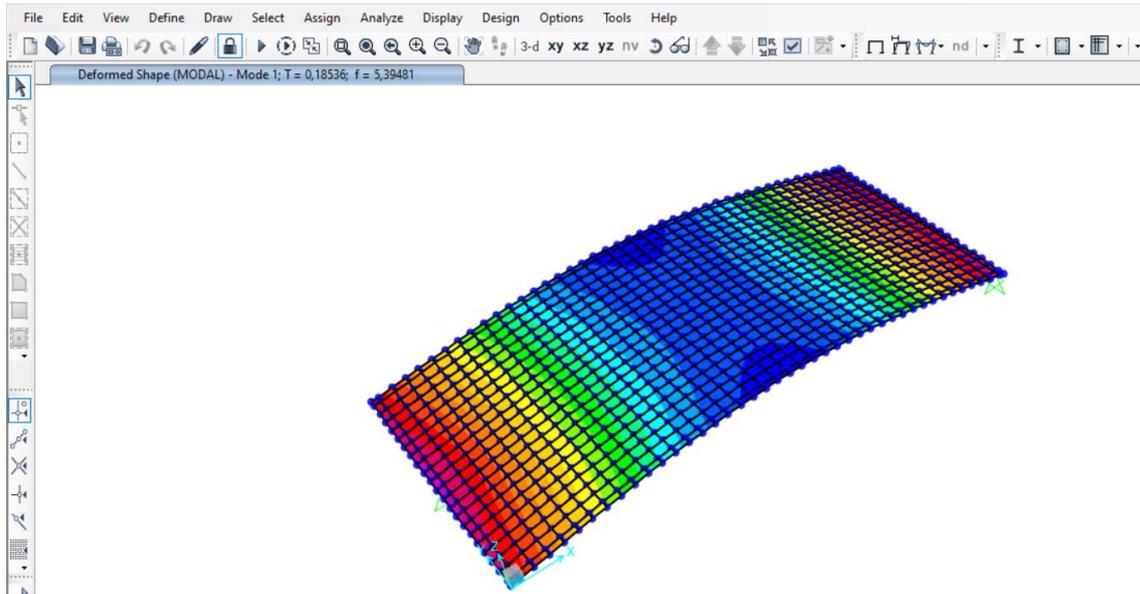


Figura 118, Simulación inicial con la opción modal 1 y el caso 3 seleccionados.

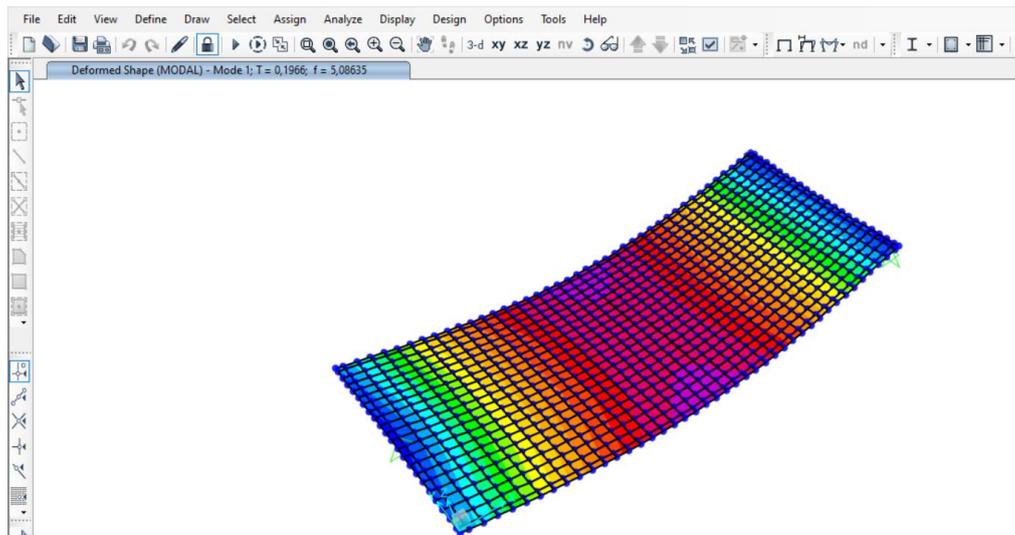


Figura 119, Simulación inicial con la opción modal 1 y el caso 4 seleccionados.

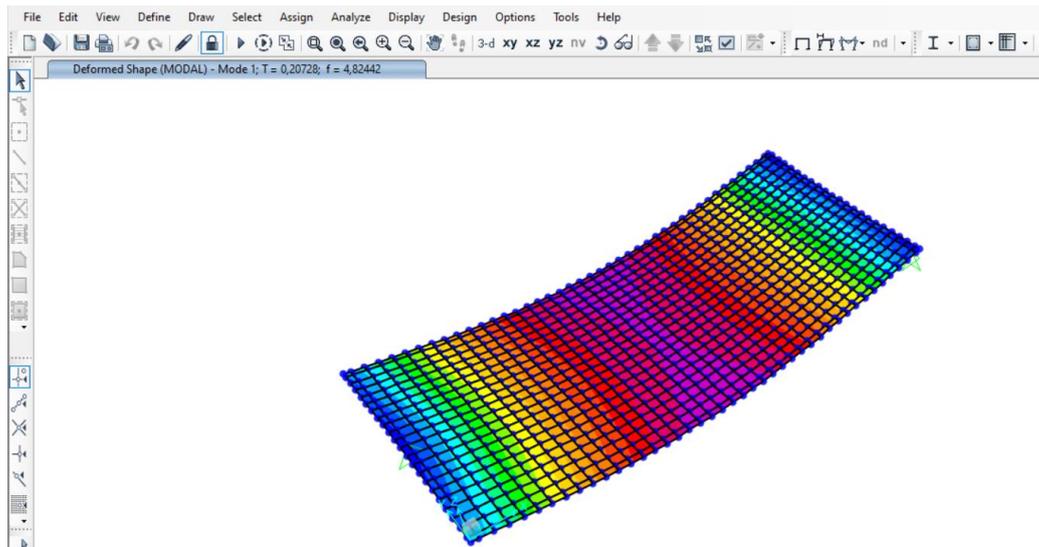


Figura 120, Simulación inicial con la opción modal 1 y el caso 5 seleccionados.

Se ha preparado una tabla comparativa que contrasta los resultados iniciales de las frecuencias naturales obtenidas a través del método experimental con aquellas derivadas del análisis modal en SAP2000:

Caso de estudio	Masa (kg)	Factor de Amortiguamiento	Frec.exp (Hz)	Frec. SAP2000 (Hz)	E. Generado (Hz)	E. Relativo (%)
Caso 1	0	0,0012	5,8899	6,2187	-0,3286	5,579
Caso 2	3	0,0063	5,5112	5,7648	-0,2536	4,601
Caso 3	6	0,0058	5,2077	5,3948	-0,1871	3,592
Caso 4	9	0,0112	4,9550	5,0863	-0,1313	2,649
Caso 5	12	0,0291	4,6853	4,8244	-0,1391	2,969

Tabla 24, Tabla comparativa de los valores de la frecuencia en situación "trapoyada".

Como se puede apreciar en la **Tabla 24**, los resultados obtenidos mediante el estudio modal son bastante similares, el error relativo obtenido es pequeño relativamente. Como se explicó previamente, estos resultados no pueden ser ajustados debido a que afectaría al ajuste realizado en la placa con cuatro apoyos.

#### 4.5 Conclusiones del calibrado de la placa:

Observando los resultados obtenidos en el estudio estático (con el cálculo del delta de desplazamiento) y, en el estudio modal (calculando la frecuencia propia y el factor de amortiguamiento), para ambos casos (placa "tetrapoyada" y placa "tripoyada"), se puede concluir que el ajuste realizado cumple con las exigencias técnicas puesto que los resultados llevan asociados errores bastante pequeños y pueden servir de utilidad para un futuro ensayo.

Esto justifica que el "gemelo digital" creado en el software SAP2000 refleja con precisión la placa física del laboratorio. Por lo tanto, los resultados obtenidos de cualquier ensayo simulado en SAP2000 pueden aplicarse a la placa de madera física del laboratorio con un alto nivel de exactitud.



## Capítulo 5. Conclusiones del Trabajo:

Al finalizar este documento, se cuenta con una cantidad significativa de información que permite dar un enfoque integral al Trabajo Fin de Grado y extraer conclusiones relevantes.

### 5.1 Conclusiones Finales:

Lo más destacado ha sido la introducción a la dinámica de estructuras, un área que no se abordó en la titulación de grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales, y que resultó ser muy interesante y útil.

Otra valiosa experiencia adquirida en este trabajo es el conocimiento sobre el software SAP2000 utilizado. Aunque cuenta con numerosas funcionalidades que no se han empleado en el trabajo, se ha logrado dominar las que se han utilizado. Esto ha permitido calibrar con éxito la placa física del laboratorio en el software, logrando así el "gemelo digital" buscado.

Las comparaciones realizadas para validar la precisión del ajuste entre la placa de madera física y su réplica en el software han demostrado que cualquier simulación realizada en la placa virtual tendría una respuesta muy similar a la obtenida de ensayos en la placa real. Las ligeras diferencias pueden atribuirse a errores de precisión en los instrumentos de medida utilizados o variantes ambientales.

En conclusión, el Trabajo Fin de Grado ha ampliado mis conocimientos en el ámbito de las estructuras y me ha mostrado la importancia y los beneficios de las herramientas de simulación por varias razones:

- Permite realizar análisis detallados y precisos de estructuras y sistemas, proporcionando información crucial sobre su comportamiento bajo distintas condiciones.
- La rápida evaluación de la respuesta de la placa ante distintas situaciones de carga.
- Facilita la detección de posibles problemas o debilidades en el diseño antes de la construcción, lo que ayuda a prevenir errores costosos.
- Resulta mucho más económico, además de ahorrar tiempo y esfuerzo con muy poco riesgo ya que se trabaja sobre un software y no con pruebas sobre la realidad física.
- Permite obtener resultados concluyentes que pueden trasladarse al ámbito experimental con un alto grado de validez.

### 5.2 Líneas de Mejora:

A continuación, se presentan las áreas de mejora para futuros estudios.

### 5.2.1 Optimización del diseño:

Una primera línea de mejora del TFG podría consistir en revisar y optimizar el diseño de la placa de madera para mejorar su resistencia y durabilidad bajo cargas progresivas. Esto puede incluir cambios en la geometría, el grosor de la placa o el tipo de madera utilizado.

### 5.2.2 Mejora de los equipos de medida:

Una mejora de los equipos de medida es importante por varios motivos:

- **Precisión en los datos:** Los equipos de medida más avanzados y precisos pueden proporcionar datos exactos sobre cómo se comporta la placa de madera bajo diferentes condiciones de carga. Esto es esencial para comprender su rendimiento y tomar decisiones informadas sobre el diseño y los materiales.
- **Precisión en los datos:** Los equipos de medida más avanzados y precisos pueden proporcionar datos exactos sobre cómo se comporta la placa de madera bajo diferentes condiciones de carga. Esto es esencial para comprender su rendimiento y tomar decisiones informadas sobre el diseño y los materiales.
- **Cumplimiento normativo:** Los equipos de medida avanzados permiten garantizar el cumplimiento de normativas y estándares de seguridad y calidad en el trabajo con madera.

En resumen, mejorar los equipos de medida es fundamental para obtener datos precisos, validar modelos, mejorar la seguridad, optimizar el diseño y desarrollo.

### 5.2.3 Estudio de materiales ortotrópicos:

Los materiales ortotrópicos son aquellos que tienen propiedades físicas diferentes a lo largo de tres direcciones ortogonales entre sí. Esto significa que tienen distintas respuestas mecánicas o físicas según la dirección en la que se estudien. A diferencia de los materiales isótropos, que presentan propiedades uniformes en todas las direcciones, los materiales ortotrópicos tienen un comportamiento anisotrópico, es decir, varían según la dirección en la que se sometan a fuerzas o se midan otras propiedades.

Es importante entender que los materiales ortotrópicos tienen propiedades establecidas para cada eje de estudio independiente, tienen un coeficiente de poisson para cada par de direcciones, un módulo de cizallamiento (G) distinto para cada par de direcciones y un módulo de elasticidad para cada dirección ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ )

El estudio de materiales ortotrópicos puede ser un área de investigación futura, ya que podría permitir ajustar los modelos con mayor precisión. Sin embargo, esto requiere una base sólida en materiales isótropos antes de abordar la complejidad adicional.

## 5.3 Aspectos a tener en cuenta:

### 5.3.1 Coste del trabajo:

Este apartado se podría dividir en dos partes, coste del trabajo en horas y coste del trabajo económicamente:

### 5.3.1.1 Coste del trabajo en horas:

Se van a estimar el total de horas dedicadas a la ejecución del presente trabajo. Asimismo, se convertirá este tiempo a un valor monetario en euros, tomando como base el salario estimado de un ingeniero en formación. La distribución del tiempo trabajado se presenta de la siguiente forma:

- Planificación y propuestas de ideas: 10 horas.
- Trabajo presencial en el laboratorio: 50 horas.
- Desarrollo del modelo virtual de la Placa: 40 horas.
- Redacción del documento: 160 horas.
- Elaboración de la presentación: 30 horas.

Si juntamos todas las horas dedicadas a la realización de este TFG obtendríamos 290 horas, el salario de un ingeniero en formación anualmente se estima de 25000 €, según el boletín oficial del estado la jornada ordinaria máxima de trabajo efectivo, en cómputo anual, es de 1.752 horas [13]. Se calcularán las horas efectivas de trabajo con el sueldo anual propuesto y el resultado es de 14,26 € por hora de trabajo.

Si se multiplican las horas dedicadas al TFG por el precio de una hora de trabajo efectivo se obtiene que se han consumido 4135,4 € en la realización de este trabajo de fin de grado.

### 5.3.1.2 Coste del trabajo económicamente:

Realmente no se ha necesitado gastar dinero en la realización del TFG, esto se debe a que el laboratorio de estructuras ha proporcionado todo el material necesario para la realización del TFG, si se cuantifica el coste de los materiales sin tener en cuenta lo mencionado anteriormente, obtendríamos lo siguiente:

- Importante, hay que matizar que todos los precios mostrados son estimados.

Material	Coste (€)
Placa de Madera	25
Caballetes	54
Báscula	20
Instrumentación utilizada	36
Masas de 3 kg	12
Gasolina de desplazamiento	40
<b>TOTAL</b>	<b>187</b>

Tabla 25, precio estimado de los materiales empleados en €.

### 5.3.2 Seguridad y medioambiente:

Durante la realización de este Trabajo de Fin de Grado, es importante señalar que no se utilizaron materiales peligrosos ni se causó daño al medio ambiente. El único impacto ambiental potencial se refiere al futuro desecho de los materiales empleados. Entre estos, se encuentra la placa de madera utilizada en el proceso experimental, así como el posible impacto al final de la vida útil de los caballetes, masas de 3 kg...

Para minimizar el impacto, toda la instrumentación empleada está disponible para futuros estudiantes que la utilicen en sus propios proyectos de TFG o TFM, extendiendo así su vida útil hasta que ya no sea funcional. Además, para disminuir aún más el impacto ambiental, se puede reciclar todo el material utilizado.

## **BIBLIOGRAFIA:**

- [1] L. O. Berrocal, Resistencia de Materiales (3º ed), MCGRAW-HILL / INTERAMERICANA DE ESPAÑA, 2007.
- [2] GrupoAndina, «Madera Andina / Tipos de Tablero de Madera,» 8 Marzo 2023. [En línea]. Available: <https://maderera-andina.com/tipos-de-tableros-de-madera/>.
- [3] M. O. Oyarzábal, «Esfuerzos en un Elemento Diferencial de Placa,» de *Cálculo de Placas a través de Distintas Metodologías.*, Madrid, Universidad Carlos III de Madrid, 2013, p. 162.
- [4] J. L. p. Aparicio, «Análisis de Placas,» de *TEORIA DE PLACA Y LAMINAS EN INGENIERÍA AEROESPACIAL*, Valencia, Universitat Politècnica de Valencia, 2020, p. 57.
- [5] A. H. Huertas, «Modelo de Placa,» de *Análisis de Placas Ortótropas: Soluciones Análíticas y Numéricas mediante el MEF.*, Sevilla, Universidad de Sevilla, 2018, p. 125.
- [6] L. R.-T. Solano, de *Apuntes de Placas y Láminas*, Sevilla, Universidad de Sevilla, 2016, p. 129.
- [7] E. O. I. d. Navarra, «Esfuerzos en un elemento diferencial de placa.,» de *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos*, Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), 1992, p. 43.
- [8] J. P. Botello, de *Resistencia de Materiales, Elasticidad y Plasticidad*, 2016, p. 830.
- [9] CATEC, «CATEC.AERO,» 2023. [En línea]. Available: <https://www.catec.aero/es/materiales-y-procesos/l%C3%ADnea-de-investigaci%C3%B3n/an%C3%A1lisis-modal>.
- [10] R. D. Blevins, «Caracterización Modal de una Placa,» de *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Krieger Pub Co, 1993.
- [11] L. Q. Torres, de *Análisis y Diseño de Estructuras con SAP2000*, Marcombo, 2016, p. 478.
- [12] C. A. J. Carballo, «Movimiento Armónico Simple (MAS),» TEC, 2018, p. 34.
- [13] BOE, «Capítulo II, Régimen de Trabajo,» de *BOE, Otras Disposiciones.*, 2024, p. 27.