

Leg 14 paquete 1º

~~1076~~

TEORÍA

1077

DE LOS SISTEMAS

DE

NUMERACION

Y

DIVISIBILIDAD.

V. F. G.



VALLADOLID:

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE F. SANTAREN,
Fuente dorada, número 27.

UVA. BHSC. LEG 14-1 n°1077

SISTEMAS DE NUMERACION Y DIVISIBILIDAD.

HTCA
U/Bc LEG 14-1 nº1077



1>0 0 0 0 5 5 7 5 6 0

UVA. BHSC. LEG 14-1 nº1077

TEORÍA GENERAL

DE LOS

SISTEMAS DE NUMERACION Y DIVISIBILIDAD

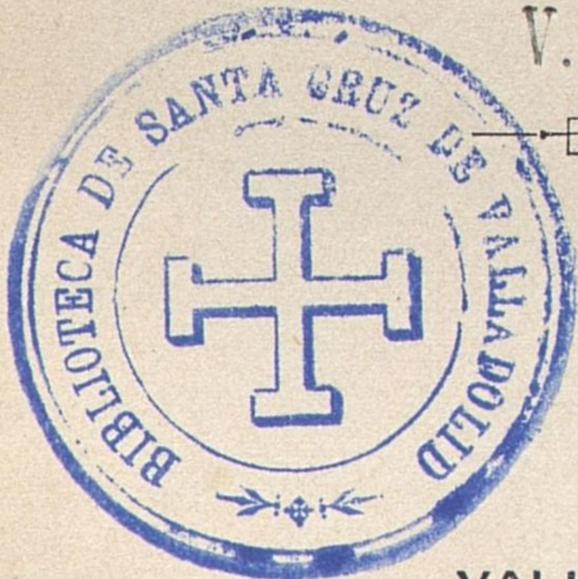
POR

EDUARDO GARCIA ROBLES,

PROFESOR DE LA ASIGNATURA

Y

Jefe de Trabajos Estadísticos de la provincia
de Valladolid.



V. F. C.

VALLADOLID:

Establecimiento tipográfico de Fernando Santaren.

Fuente dorada, número 27.

1880.

UVA. BHSC. LEG 14-1 n°1077

TEORÍA GENERAL

SISTEMA DE NUMERACIÓN Y DISTRIBUCIÓN

José María Robles

~~~~~  
*Es propiedad del Autor, único que podrá autorizar la reimpression, y cuya rúbrica deberán llevar todos los ejemplares.*  
~~~~~



A LA DIPUTACION PROVINCIAL

Y

AYUNTAMIENTO DE VALLADOLID

*dedica este pequeño trabajo en testimonio
de sincera adhesion,*

Eduardo Garcia Robles.

PROVINCIAL DEPARTMENT

DEPARTMENT OF AGRICULTURE

OFFICE OF THE SECRETARY

AGRICULTURE

A LOS PROFESORES Y ALUMNOS

DE

PREPARACION PARA CARRERAS ESPECIALES.

EN la enseñanza elemental de Matemáticas, y principalmente en la enseñanza preparatoria, he sentido frecuentemente la necesidad de recomendar al discípulo el estudio de un autor distinto para cada una de ciertas teorías, comunmente mal tratadas ó de un modo incompleto por lo menos, en la generalidad de las obras adoptadas como texto: lo que ha producido para él mayor desembolso y coleccion de libros, y más trabajo y atencion de los necesarios para mí.

Esto me hace pensar en la conveniencia de publicar separadamente algunas de dichas teorías; esperando prestar con ello un servicio á los Profesores y discípulos, y conseguir por mi parte, sinó honra ni provecho material, por no permitirlo la insignificancia de tales

publicaciones, las ventajas de mayor facilidad en la enseñanza que deseo ofrecer á los primeros, y de una acción más eficaz sobre la inteligencia ménos distraída de los últimos.

Habiendo pues de responder á lo que juzgo una necesidad del momento, he de comenzar por donde esta necesidad se presente en condiciones que la hagan más indudable: circunstancia que encuentro en la TEORÍA GENERAL DE LOS SISTEMAS DE NUMERACION Y DIVISIBILIDAD, objeto de estas páginas; en las que invito al lector á nó buscar gran novedad, pues solo puedo ofrecerle una pequeña parte con ese carácter; ni siquiera una originalidad completa en las formas de enunciaci3n y demostracion, que no ha debido preocuparme tanto como la claridad y utilidad de las explicaciones.

TEORÍA GENERAL

DE LOS

SISTEMAS DE NUMERACION Y DIVISIBILIDAD.

CAPÍTULO I.

SISTEMAS DE NUMERACION.

§ I. *Idea de los sistemas distintos de numeracion.*

1. La *Algorítmia* (1) ó *Ciencia de los números*, que comprende el estudio de la *Aritmética* y el *Algebra*, trata en la primera de estas, de la *Numeracion* ó *teoría de la formacion y expresion de los números*, y del *Cálculo aritmético*, donde se determinan las formas de composicion y descomposicion de los mismos números, y las relaciones que entre ellos existen.

2. La ley de expresion verbal ó simbólica de los números en uso, parte del doble convenio de que, *diez unidades de un orden constituyen una del orden inmediatamente superior*: y que, *todo signo, cifra ó guarismo colocado á la izquierda de otro, representa unidades*

(1) Wronski fué el primero que le dió este nombre en su *Filosofía de las Matemáticas*.

diez veces mayores que las que ese otro representa. Con la adopción de las cifras árabes, (1) el lenguaje numerativo propio de cada idioma, y los convenios anteriores, se ha organizado el *sistema* completo de nuestra numeración, que reconoce por base el número *diez*.

Pero como en vez de éste pudiera adoptarse otro número, conservando la forma de los convenios de numeración independientemente de la base; fácil es comprender y formular la existencia de una ley general numerativa, afectando tantas formas, ó lo que es lo mismo, dando lugar á tantos *sistemas* distintos de numeración, cuantas *bases* diferentes lleguen á adoptarse.

Contenida pues en la *Numeración* la *ley general de formación y expresión de los números; constituyen un sistema de numeración, los convenios particulares, el lenguaje y los signos adoptados para expresar dichos números.*

Es base del sistema, *el número de unidades de un orden que componen una del inmediato.* La base dá nombre al sistema. Así el número *diez* es la base del sistema universalmente en uso, llamado sistema *decimal*: del mismo modo que se denominan *binario, ternario, cuaternario ó tetráctico, duodecimal*, etc., los sistemas que tienen respectivamente por bases los números *dos, tres, cuatro y doce.*

La distinción de sistemas se funda, pues, en la diversidad de las bases y altera la forma particular de los convenios referentes á cada uno, solo en cuanto hace relación á las bases mismas. Vamos á dar una forma general á estos convenios, ya establecidos para el sistema decimal.

3. En un sistema dado de numeración, *una unidad de cualquier orden, se compone de un número de unidades del orden anterior, igual á la base.*

En la expresión simbólica de los números, *toda cifra colocada á la izquierda de otra, representa unidades tantas veces mayores que las de esta otra, como unidades contiene la base del sistema.* En número igual al de estas mismas unidades serán, contando con el cero, las cifras que se emplearán en dicha expresión.

Como la formación de un lenguaje especial para cada sistema exigiría un trabajo largo é innecesario para estos estudios; y como por

(1) Suelen tenerse por tales, por haberlas importado los árabes en Europa, por más que antiguas investigaciones hicieran creer, y recientes estudios filológicos permitan afirmar que dichas cifras tienen un origen mucho más remoto que la misma existencia de los pueblos semíticos.

otra parte, teniendo en cuenta las ideas que por las voces usadas han de representarse, puede atribuirse una acepcion general á las palabras empleadas en el sistema decimal; único que por la universalidad de su uso ha tenido parte en la formacion de los idiomas conocidos, resultando con lenguaje propio; emplearemos convencionalmente y con alguna ligera variacion etimológica las mismas palabras usadas en el sistema decimal, para la numeracion verbal de todos los demás; y las mismas cifras con igual valor absoluto: agregando cuando la base exceda de diez, para representar este y los siguientes números dígitos, las letras necesarias de nuestro alfabeto, en el orden del mismo. Sentado esto, vamos á dar idea de algunos sistemas particulares de numeracion.

4. A principios del siglo pasado presentó Leibnitz á la *Academia de Ciencias* de París, un *sistema de numeracion binaria*. Las cifras del sistema, de acuerdo con lo expuesto anteriormente, son 1 y 0; y sus convenios fundamentales, que, *dos unidades de un orden componen una del inmediato*; y que, *una cifra colocada á la izquierda de otra representa unidades dobles de las que representa esa otra*.

5. Si tratamos pues de expresar simbólicamente en el sistema binario un número escrito en el nuestro, el número 25 por ejemplo, observaremos que este se compone de veinticinco unidades de primer orden, que contienen doce veces la base, ó doce unidades de segundo orden ó pares; y una unidad simple que dejaremos representada en la forma 1. Doce unidades de segundo orden, forman exactamente seis de tercero; por lo que representaremos las unidades de segundo orden con la cifra 0. Seis unidades de tercer orden, componen exactamente tres de cuarto: se expresarán pues con 0 las de tercero. Tres unidades de cuarto orden, forman una del mismo y una de quinto; debiendo por tanto consignarse para unas y otras la cifra 1.

Reuniendo en un solo número las cifras representantes de unidades de los distintos órdenes que expresan estos resultados, tendremos:

<u>Sistema decimal.</u>	<u>Sistema binario.</u>																	
N.º 25.	<table border="0" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="font-size: 3em; vertical-align: middle;">{</td> <td style="padding: 0 10px;">Unidades de 1.^{er} orden.</td> <td style="padding: 0 10px;">1.</td> <td rowspan="5" style="font-size: 3em; vertical-align: middle;">}</td> <td rowspan="5" style="padding: 0 10px;">N.º 11.001.</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 0 10px;">Id. de 2.º</td> <td style="padding: 0 10px;">0.</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 0 10px;">Id. de 3.º</td> <td style="padding: 0 10px;">0.</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 0 10px;">Id. de 4.º</td> <td style="padding: 0 10px;">1.</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 0 10px;">Id. de 5.º</td> <td style="padding: 0 10px;">1.</td> </tr> </table>	{	Unidades de 1. ^{er} orden.	1.	}	N.º 11.001.		Id. de 2.º	0.		Id. de 3.º	0.		Id. de 4.º	1.		Id. de 5.º	1.
{	Unidades de 1. ^{er} orden.	1.	}	N.º 11.001.														
	Id. de 2.º	0.																
	Id. de 3.º	0.																
	Id. de 4.º	1.																
	Id. de 5.º	1.																

Si por el contrario tratásemos de expresar en el sistema decimal el número 11.001 escrito en el binario, haremos el siguiente razonamiento. Una unidad de quinto orden contiene dos de cuarto, de las cuales hay una mas en el número propuesto, siendo pues tres las unidades de dicho orden que este contiene; y como cada una vale dos del inmediato, las tres de cuarto contienen seis de tercero, y por la misma razon equivalen á doce de segundo orden ó á veinticuatro de primero; las cuales aumentadas en una del mismo orden contenida en el número, componen veinticinco unidades simples; que en el sistema decimal constituyen dos unidades de segundo orden y cinco de primero.

Esto puede expresarse bajo la forma siguiente:

Sistema binario.	Sistema decimal.
N.º 11.001..	N.º 25.
$\left\{ \begin{array}{l} 10.000. . . . = \\ 1.000. . . . = \\ 0 = \\ 0 = \\ 1.. . . . = \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} . . . 16. \\ . . . 8. \\ . . . 0. \\ . . . 0. \\ . . . 1. \end{array} \right.$

6. El sistema duodecimal ha tenido muchos partidarios, (1) y aún tiene algunos. (2) Sus cifras son las de nuestro sistema, con más las *diez* y *once* que representaremos con las letras *a* y *b*. En este sistema, *doce unidades de un orden componen una del inmediato; y toda cifra colocada á la izquierda de otra, representa unidades doce veces mayores que las de esta.*

7. El traslado de la expresion simbólica de un número del sistema decimal al duodecimal y vice-versa, se llevará á cabo teniendo presentes estas indicaciones, en la misma forma del ejemplo anterior.

Suponiendo que se trata del número decimal 1234; veremos desde luego por medio de la division, que contiene ciento dos docenas ó unidades de segundo orden, y diez unidades simples que dejaremos consignadas con la cifra *a*. Las ciento dos docenas contienen á su vez ocho docenas de ellas (3) ó unidades de tercer orden y seis de segundo; representaremos pues estas con la cifra 6, y con la cifra 8 aquellas: siendo por tanto 86*a* el número duodecimal buscado, obtenido en la siguiente forma:

(1) Buffon, D'Alembert y otros.

(2) Entre ellos Pujals de la Bastida; autor de un libro originalísimo, titulado si no recuerdo mal, *Filosofía de la numeración*: que defiende la adopción de la base doce con razones sumamente curiosas.

(3) En el comercio se llama *gruesa* á la docena de docenas.

Sistema decimal.

Sistema duodecimal.

$$N.^\circ 1.234. \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Unidades de 1.}^\text{er} \text{ orden. } \dots a. \\ \text{Id. de 2.}^\circ \dots \dots \dots 6. \\ \text{Id. de 3.}^\circ \dots \dots \dots 8. \end{array} \right\} N.^\circ 86a.$$

Sea al contrario el número duodecimal 86a: en él, cada unidad de tercer orden vale doce de segundo; luego las ocho existentes de aquel equivaldrán á ocho veces doce, es decir, noventa y seis de este; que con seis más que el número propuesto contiene, componen ciento dos. Cada unidad de segundo orden vale doce unidades simples; luego las ciento dos contendrán el mismo número de veces doce, es decir, mil doscientas veinticuatro; que aumentadas con las *a* ó diez existentes, dan un total de mil doscientas treinta y cuatro unidades. Esta traducción puede realizarse en la forma siguiente:

Sistema duodecimal.

Sistema decimal.

$$N.^\circ 86a. \dots \left\{ \begin{array}{l} 800. \dots \dots = \dots \dots 1,152. \\ 60. \dots \dots = \dots \dots 72. \\ a. \dots \dots = \dots \dots 10. \end{array} \right\} 1.234.$$

8. El traslado de la expresion de un número entre dos sistemas distintos del decimal, se hará pasando por este, sin dificultad alguna: así, para traducir al sistema *octaval* el número *vigesimal* 4cd, podremos hacer las dos reducciones que siguen; teniendo presente que *c* y *d* son respectivamente las cifras *doce* y *trece* del sistema dado:

SISTEMA VIGESIMAL.

Sistema decimal.

Sistema octaval.

$$N.^\circ 4cd. \dots \left\{ \begin{array}{l} 4. 20^2 = 1.600. \\ c. 20 = 240. \\ d. = 13. \end{array} \right\} N.^\circ 1853. \left\{ \begin{array}{l} \text{Unidades de 1.}^\text{er} \text{ orden. } 5 \\ \text{Id. de 2.}^\circ \dots 7 \\ \text{Id. de 3.}^\circ \dots 4 \\ \text{Id. de 4.}^\circ \dots 3 \end{array} \right\} N.^\circ 3475.$$

Es decir, que 4cd en el sistema de base veinte, equivale á 1853 en el decimal, y á 3475 en el octaval: mas tarde sin embargo, (n.ºs 19 y 34) verificaremos directamente esta traducción.

9. Además de los sistemas anteriormente expuestos, se ha estudiado algun otro; como el *cuaternario* explicado por Erad Weigel en su *Aritmética tetráctica*, publicada el año 1670: pero todos ellos, á pesar

de las ventajas reales (1) ó imaginarias que para su adopción se ha tratado de hacer valer, han cedido hasta ahora y creemos que cederán en el porvenir, ante la universalidad del uso del decimal: universalidad que, prescindiendo de toda otra circunstancia, haría demasiado costosa para la Ciencia y para los hábitos de la vida práctica cualquier sustitución.

§ II. *Cálculo aritmético.*

10. Definidas ya las operaciones que constituyen el cálculo aritmético, cuyas definiciones así como las demostraciones de principios que de ellas se han deducido, son independientes de la base del sistema en que se opera; podemos realizar dichas operaciones en cualquier sistema sin otra modificación en los procedimientos que la que exija el cambio de base, y previa la formación de los datos elementales que para el sistema decimal conservamos en la memoria por la continuidad de su uso.

Adición.

11. Para realizarla en un sistema de base B, colocaremos los sumandos de modo que sea fácil ver en correspondencia simétrica las unidades de cada orden, y procederemos á sumarlos; teniendo presente que B unidades de un orden constituyen una del orden superior inmediato, que debe sumarse con las de este.

Así, para reunir en uno solo los números del sistema *quincenal* $3.250b2a$, $40d3$ y $acd40$, dispondremos el cálculo en la siguiente forma:

$3,250b2a$	y teniendo presente que a vale <i>diez</i> unidades
$40d3$	b » <i>once</i>
$acd40$	c » <i>doce</i> , y
<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>	d » <i>trece</i> ; diremos:
$3,312a4d$	

a mas 3, igual d ; cuya cifra de unidades dejaremos escrita: 2 y d son 10, y 4, 14; ó sean, 1 unidad de tercer orden y 4 de segundo que escribi-

(1) La mas importante de todas, correspondiente al sistema duodecimal, es la variedad de los divisores 2, 3, 4 y 6 de su base.

remos: 1 y b , forman c ; mas d , $1a$; ó sea una unidad de cuarto orden, y a de tercero que escribiremos: 1 y 4, 5; mas c , son quince y dos, ó bien 1 unidad de quinto orden y 2 de cuarto que se dejarán escritas: 1 y 5, 6; y a , quince y uno, ó sea 1 unidad de sexto orden, y 1 de quinto que consignaremos: 1 y 2, 3 unidades de sexto orden, que se escribirán; así como las 3 de sétimo existentes en el primer sumando.

Sustraccion.

12. Despues de convenientemente colocados los términos de la sustraccion, se procederá á restar cada cifra del sustraendo de la que en el minuendo representa unidades del mismo orden, aumentada si preciso fuere en una del superior inmediato; cuyo aumento se neutralizará con otro de una unidad en la cifra inmediata del sustraendo.

Si se trata por ejemplo en el sistema de base catorce de realizar la sustraccion.

$28a4b50 - 7d20a6 = 20b2a88$, dispondremos la operacion como sigue:

$$\begin{array}{r} 28a4b50 \\ - 7d20a6 \\ \hline 20b2a88. \end{array}$$

y diremos: de seis á catorce, 8, que dejaremos escrito: a mas uno son b , hasta diez y nueve, 8; cuya cifra se consignará: de uno á b , faltan a unidades de tercer orden, que escribiremos: de 2 á 4, 2: de d hasta a aumentada en catorce ó sean veinticuatro, faltan b unidades de quinto orden, que se escribirán: una y 7, 8; hasta 8, cero unidades de sexto orden, que consignaremos: así como las dos de sétimo existentes en el minuendo.

La adicion del sustraendo y el resto, comprobará la sustraccion.

Multiplicacion.

13. Fundándose el procedimiento para multiplicar números cualesquiera en el conocimiento de los productos de los números dígitos, formaremos ante todo el cuadro de estos productos en el sistema que

haya de ocuparnos, siguiendo para ello el procedimiento de adiciones llamado pitagórico; y pasaremos despues á aplicar la regla general de multiplicacion á números del sistema dado, cuya base tendremos presente.

Así, para efectuar la multiplicacion de los números *duodecimales* $a45b0$, y $32a$, formaremos la tabla pitagórica y dispondremos los cálculos en la siguiente forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>a</i>	<i>b</i>	
2	4	6	8	<i>a</i>	10	12	14	16	18	1 <i>a</i>	
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29	
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38	
5	<i>a</i>	13	18	21	26	2 <i>b</i>	34	39	42	47	<i>a45b0</i>
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56	32 <i>a</i>
7	12	19	24	2 <i>b</i>	36	41	48	53	5 <i>a</i>	65	878 <i>b2</i>
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74	188 <i>ba</i>
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83	27159
<i>a</i>	18	26	34	42	50	5 <i>a</i>	68	76	84	92	
<i>b</i>	1 <i>a</i>	29	38	47	56	65	74	83	92	<i>a1</i>	296 <i>a5920</i>

Hecho esto, diremos: *b* por *a*, 92, cuya cifra 2 escribiremos debajo de las unidades del multiplicador: 5 por *a*, 42, y 9, 4*b*: 4 por *a*, 34, y 4, 38: *a* por *a*, 84, y 3, 87, que escribiremos representando las unidades superiores del primer producto parcial. Para obtener el segundo, se dirá: *b* por 2, 1*a*; se escribirá la cifra *a* debajo de las docenas del multiplicador y se reservará la unidad obtenida de orden superior, para aumentarla al producto siguiente, continuando: 5 por 2, *a*, y 1, *b*; 4 por 2, 8; *a* por 2, 18, que se escribirá. Para el tercer producto: *b* por 3, 29; 5 por 3, 13, y 2, 15; 4 por 3, 10, y 1, 11; *a* por 3, 26, y 1, 27 que escribiremos. Despues de obtenidos los productos parciales del multiplicando por las diferentes cifras del

multiplicador, escribiendo debajo de cada una de estas la primera cifra del producto correspondiente; y efectuada la adición de todos ellos, se escribirá á la derecha del resultado un cero para neutralizar el efecto de la omisión del que termina el multiplicando; teniendo finalmente:

$$a45b0. 32a = 296a5920.$$

La multiplicación se comprobará del mismo modo en cualquier sistema que se opere. Sin embargo, si se hubiera de utilizar para ello el principio demostrado al tratar en el sistema decimal de la prueba por nueve de la multiplicación, convendrá elegir por divisor el número que represente la base del sistema disminuida en una unidad; lo que nos permitirá referir las condiciones de divisibilidad de los números, á las de la suma de sus cifras (n.º 26), disfrutando las ventajas que en el sistema decimal nos hicieron preferir el divisor nueve á cualquier otro.

Así en el ejemplo propuesto, elegiremos el divisor b que representa once unidades, y haremos la comprobación en la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} a45b0 = mb + 8 \\ 32a = mb + 4 \end{array} \right\} 8.4 = 28 = mb + a$$

$$296a5920 \dots \dots \dots = mb + a$$

Division.

14. Para efectuar la de dos números en cualquier sistema de numeración, conviene formar previamente el cuadro de los productos del divisor por cada una de las cifras del sistema, y se aplicará después la regla general de división; teniendo presente la base sobre que se opera, y lo expuesto anteriormente acerca de las operaciones auxiliares.

Si por ejemplo se trata de dividir los números tetrácticos 30.213 y 231, uno por otro; después de formados los productos:

$$231. 1 = 231$$

$$231. 2 = 1122, \text{ y}$$

$$231. 3 = 2013; \text{ dispondremos la operación}$$

del modo siguiente:

30213	231
231	101
1113	
231	
222	

y diremos: 302 dividido por 231, dá de cociente 1; cuyo número que escribiremos, multiplicado por el divisor, forma el producto 231; que restado del dividendo parcial, dá como residuo 11; colocando á la derecha de este la cifra siguiente, escribiendo en el cociente la cifra 0 obtenida de la division de 111 por 231 y escribiendo á la derecha del resto la cifra inmediata 3 del dividendo; dividiremos el número formado 1113, por 231; obteniendo la cifra 1 que escribiremos en el lugar de las unidades del cociente; y el residuo final 222, diferencia entre el dividendo parcial y el producto 231 del divisor por dicha cifra del cociente: esta sustraccion se podrá efectuar sin escribir el sustraendo, aunque convendrá hacerlo así hasta haberse ejercitado en las operaciones con números de cualquier sistema.

La division se comprobará multiplicando el cociente por el divisor y añadiendo al producto el residuo; debiendo formar así un número igual al dividendo:

$$\begin{aligned} \text{Así: } 231 \cdot 101 &= 23331. \\ 23331 + 222 &= 30213. \end{aligned}$$

Tambien podrá comprobarse la division teniendo en cuenta lo indicado en el n.º (13), determinando el residuo por un divisor cualquiera del divisor y cociente, así como el del producto de estos dos residuos; debiendo este último ser igual al que se obtenga directamente del dividendo disminuido en el resto de la operacion.

Así, eligiendo en nuestro ejemplo el divisor 3 por la consideracion (n.º 26) ya mencionada, tendremos:

$$\begin{aligned} 30213 - 222 &= 23331 = m \ 3 + 0. \\ \left. \begin{aligned} 231 &= m \ 3 + 0 \\ 101 &= m \ 3 + 2 \end{aligned} \right\} 2 \cdot 0 &= \dots\dots\dots 0. \end{aligned}$$

Potencias y raices.

15. Las potencias de los números son productos de factores idénticos; cuya circunstancia no los excluye en manera alguna de las leyes y procedimientos de multiplicacion aplicados anteriormente á sistemas de cualquier base: razon por la cual nos abstendremos para tales multiplicaciones de toda indicacion, ó más bien repeticion; puesto que la práctica de ellas no puede dar lugar á nuevas observaciones.

En cuanto á la extraccion de raíces, teniendo en cuenta que las leyes de formacion de las potencias de igual grado, de donde se derivan las reglas obtenidas para los números del sistema decimal, son independientes de la base del sistema y no sufren alteracion por la variacion de esta; deduciremos que tambien las mencionadas reglas son invariables: pero como en su aplicacion han de realizarse operaciones auxiliares, por mas que estas nos sean conocidas separadamente, las presentaremos en un ejemplo práctico que desvanezca todo género de dudas.

Si se trata de extraer en el sistema de base nueve la raíz cuadrada del número 342816, dispondremos la operacion en la siguiente forma:

	3 4'2 8'1 6	5 5 3
$5^2 =$ 2 7	
	6 2,8	1 1
$115.5 =$ 5 7.7	
	4 1 1,6	1 2 1
$1213.3 =$ 3 6 4 0	
	3 6 6	

diciendo: La raíz cuadrada del mayor (27) de los cuadrados contenidos en 34, es 5; primera cifra de la raíz buscada; (1) y la diferencia entre dicho cuadrado y 34, es 6: colocando á la derecha de este número el grupo siguiente 28, separando una cifra, y dividiendo el número 62 por 11 duplo de la raíz hallada, obtenemos 5 para segunda cifra de la raíz; y colocándola á la derecha del divisor, multiplicando el número 115 así formado por la misma cifra y restando el producto 577 del dividendo con la cifra separada; tenemos el resto 41: á este agregaremos el grupo siguiente, y separando una cifra, dividiremos 411 por 121 duplo de 55; obteniendo finalmente la cifra 3 de las unidades, y el residuo 366 de la raíz. Podemos por tanto concluir que $\sqrt{342816} = 553$, en ménos de una unidad.

(1) Llamamos la atencion del lector sobre el hecho de encontrarse los cuadrados de los números digitos de cualquier sistema, en la diagonal trazada en la tabla pitagórica del mismo, en direccion descendente de izquierda á derecha.

Fracciones.

16. Consideradas las fracciones ordinarias como cocientes indicados y sabiendo nosotros efectuar la division de dos números enteros en cualquier sistema, así como las demás operaciones á que dá lugar el cálculo de los números fraccionarios; bastará que hagamos constar aquí la invariabilidad y generalidad de los principios y reglas explicados para el sistema decimal, y su directa aplicacion á cualquier otro sistema de numeracion.

En cuanto á la forma de fracciones llamadas *decimales* en el sistema del mismo nombre, las llamaremos *binarias*, *ternarias*, *tetrácticas*, *duodecimales*, etc., en los sistemas que tengan la base *dos*, *tres*, *cuatro* ó *doce*: y las obtendremos, expresaremos y operaremos con ellas en igual forma que lo hemos hecho con las fracciones decimales, teniendo en cuenta el valor respectivo de la base de cada sistema y recordando nuestras reglas de traduccion de los números enteros.

Así, la fraccion ordinaria que en el sistema duodecimal contenga siete partes de doce en que se suponga dividida la unidad, se expresará bajo la forma $\frac{7}{10}$, leyéndose *siete duodécimas*; y será equivalente á la fraccion *duodecimal* 0'7.

En la reduccion de una á otra forma de fracciones, ténganse presentes los factores primos de la base de cada sistema, refiriendo á ellos lo expuesto con relacion á los factores *dos* y *cinco* en el sistema decimal.

§ III **Forma general de composicion y expresion de los números.**

17. Conocidas ya las leyes de la formacion y expresion de los números en cualquier sistema de numeracion y dada una idea de las operaciones elementales del cálculo aritmético; vamos á completar esta parte de la teoría exponiendo la forma general de composicion de los números, mediante cuyo conocimiento podremos realizar su traduccion directa entre sistemas cualesquiera.

Sean N y B dos números cualesquiera enteros, y el primero de ellos mayor que el segundo:

Supongamos efectuada la división de N por B , obteniendo de ella un cociente C y un resto r : llamemos asimismo C_1 y r_1 ; C_2 y r_2 ;... C_{n-2} y r_{n-2} ; c y r_{n-1} respectivamente á los cocientes y restos de las divisiones sucesivas de C , C_1 , C_2 C_{n-2} por B ; cuya série de divisiones detendremos al llegar á un cociente c menor que el divisor B . Del procedimiento seguido, deduciremos sucesivamente:

$$\begin{aligned} N &= BC + r \\ C &= BC_1 + r_1 \\ C_1 &= BC_2 + r_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ C_{n-2} &= BC_{n-1} + r_{n-1} \\ C_{n-1} &= Bc + r_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando respectivamente los dos miembros de estas igualdades por 1 , B , B^2 ... B^{n-2} , B^{n-1} , obtendremos:

$$\begin{aligned} N &= BC + r \\ BC &= B^2 C_1 + B r_1 \\ B^2 C_1 &= B^3 C_2 + B^2 r_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ B^{n-2} C_{n-2} &= B^{n-1} C_{n-1} + B^{n-2} r_{n-2} \\ B^{n-1} C_{n-1} &= B^n c + B^{n-1} r_{n-1} \end{aligned}$$

Sumando ordenadamente estas igualdades y suprimiendo los términos BC , $B^2 C_1$, $B^3 C_2$... $B^{n-2} C_{n-2}$ y $B^{n-1} C_{n-1}$, comunes á los dos miembros de la resultante, se tendrá finalmente:

$$(a) \quad N = r + B r_1 + B^2 r_2 + \dots + B^{n-2} r_{n-2} + B^{n-1} r_{n-1} + B^n c,$$

cuya fórmula general nos dice, que;

Si dividimos un número N y los cocientes sucesivos por otro número B menor que el primero, este se compondrá de; el primer resto, mas el producto del divisor B por el segundo resto, mas la segunda potencia del mismo divisor por el tercer resto, mas ... etc... hasta la potencia de un grado indicado por el número de términos obtenidos, multiplicada por el último resto, mas la potencia inmediata del divisor en cuestion por el cociente de la última división; que será aquella cuyo cociente sea menor que el divisor B .

18. Así, si dividimos por 12 el número decimal 4357 y los cocientes que sucesivamente vayan obteniéndose, en la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l}
 43,5,7 & 12 \\
 75 & \overline{36,3} \quad 12 \\
 37 & 03 \quad \overline{30} \quad 12 \\
 1 & 6 \quad \overline{2}
 \end{array}$$

tendremos: $4357 = 1 + 12 \cdot 363$ }
 pero..... $363 = 3 + 12 \cdot 30$ } $4357 = 1 + 12 \cdot 3 + 12^2 \cdot 30$ } finalmente
 pero $30 = 6 + 12 \cdot 2$, luego

te; $4357 = 1 + 12 \cdot 3 + 12^2 \cdot 6 + 12^3 \cdot 2$; á cuyo resultado nos llevan igualmente la fórmula y regla que acabamos de establecer.

Ahora bien; si refiriéndonos al mismo número

$$4357 = 12^3 \cdot 2 + 12^2 \cdot 6 + 12 \cdot 3 + 1$$

cuyos términos invertimos para mayor claridad, convenimos en que *doce* unidades de un orden constituyan una del orden inmediato; y que una cifra colcada á la izquierda de otra represente unidades *doce veces mayores* que las que esta otra representa; el número *decimal* 4357 estará expresado en el *sistema duodecimal* por el número 2631: y como lo dicho para aquel es independiente de su valor y del de las bases de los sistemas á que pertenecía y á que lo hemos trasladado; deduciremos generalizando estas consideraciones, la siguiente regla general de traducción:

19 *Para trasladar un número de un sistema de numeración á otro, se dividirán el número propuesto y los cocientes sucesivos, por la base del sistema á que se desea trasladarlo: teniendo en cuenta que, tanto la expresión escrita del divisor constante, como toda la serie de operaciones, habrán de ejecutarse dentro del sistema en que se halla expresado el número propuesto. Los restos sucesivos que se vayan obteniendo, traducidos si es preciso en cifras del sistema nuevo, representarán respectivamente las unidades de 1.º, 2.º, etc., órdenes del número buscado.*

La ejecución de estas operaciones no ofrecerá dificultad teniendo presente lo anteriormente explicado: y en cuanto á la escritura de la nueva base en el sistema propuesto, aunque en realidad sea un problema de la misma naturaleza que el que nos ocupa, no presenta obstáculos en la práctica, por la pequeñez relativa del número con que se opera;

34,5,0,2,1,4	13	24,0,0,1,3	13	15,4,1,3	13	115,5	13	6 1	13
5 5		11 0		2 4		1 5		3	
0 0 2 1		6 0		1 1 1		2		4	
5 4		2 1		1 0 3					
1 2		5 3		2					
		1 1							

Base siete	=	Base diez
12		9.

Base siete	=	Base diez
11		8

EJEMPLO 3.º

Base siete	=	Base quince
3450214		88144

Procedimiento.

Base diez	=	Base siete					
15 = 7 · 2 + 1		21					
34,5,0,2,1,4	21	15,0,0,1,0	21	54,1,3	21	24,2	21
13 5		1 2 0		12 1		3 2	
0 0 2 1		3 1		4 3		1 1	
0 4		1 0 0		1		11	
		4				11	

Base siete	=	Base quince
11		8

CAPITULO II.

DIVISIBILIDAD.

§ I. *Caractères generales de divisibilidad.*

21. Si bien los principios generales de divisibilidad demostrados en Aritmética, son independientes de los convenios particulares de numeracion; no sucede lo mismo en cuanto se refiere á las propiedades observadas en los números del sistema decimal, de ser divisibles por ciertos números primos, cuando los valores absolutos y de posicion de sus cifras cumplen determinadas condiciones, cuya enunciacion constituye reglas prácticas de divisibilidad aplicables al sistema decimal únicamente.

Este hecho, que se reconoce fácilmente con solo recordar que los procedimientos de obtencion de las mencionadas reglas se encuentran en constante y estrecha dependencia de la base *diez* del sistema; hace necesario elevar el punto de vista seguido en el estudio de los caracteres de divisibilidad, en la medida que lo permite la generalizacion de los convenios de numeracion á sistemas de cualquier base, objeto del capítulo anterior.

Para conseguirlo, vamos á formular la composicion general de un número con relacion á un divisor cualquiera menor que la base del sistema en que está escrito, y á la figura y posicion de sus cifras, independientemente del valor particular de dicha base; demostrando al efecto el principio siguiente:

22. *Todo número N , consta con relacion á un divisor D , menor que su base, de dos partes; la primera de las cuales es múltiplo de dicho divisor, y la segunda es la suma de los productos respectivos de sus cifras por la unidad y las potencias sucesivas del resto R , de la division de la base B , por el divisor D .*

Es decir; que vamos á demostrar, que

$$N = mD + (a + Rb + R^2c + \dots + R^{n-1}p + R^n q.)$$

Efectivamente: de la indicada division de B por D, se deduce: $B = mD + R$; y elevando los dos miembros de esta igualdad al cuadrado, $B^2 = mD + R^2$; del mismo modo que

$$B^3 = mD + R^3 \dots \text{etc.}$$

Supongamos que esta ley de formacion rija á las potencias sucesivas de B hasta la del grado n , y tengamos por tanto

$$B^n = mD + R^n$$

multiplicando miembro á miembro esta y la primera de las anteriores igualdades, tendremos

$$B^{n+1} = mD + R^{n+1}$$

cuya igualdad demuestra que, regida una potencia cualquiera de B por la ley observada, esta es extensiva á la potencia inmediata; y como hemos visto que rige á las tres primeras potencias segun aparece en las igualdades mencionadas, deduciremos que se extiende á la cuarta potencia; de esta á la quinta, y finalmente á todas las potencias de B.

Sustituyendo los valores de las potencias sucesivas de B obtenidos haciendo aplicacion de dicha ley, en la fórmula (a) del (núm. 17.)

$$N = r + Br_1 + B^2r_2 + \dots + B^{n-2}r_{n-2} + B^{n-1}r_{n-1} + B^nc,$$

se convertirá en

$$N = r + mDr_1 + Rr_1 + mDr_2 + R^2r_2 + \dots + mDc + R^nc,$$

ó bien,

$$N = r + Rr_1 + B^2r_2 + \dots + R^{n-1}r_{n-1} + R^nc + mD$$

y representado por las cifras $abcd \dots pq$, los restos $r, r_1 r_2 \dots r_{n-1}$ y el cociente final, obtendremos la fórmula enunciada;

$$(b) N = mD + (a + Rb + R^2c + \dots + R^{n-1}p + R^n q.)$$

23. 1.^{er} carácter. *En todo sistema de numeracion, un número es divisible por la base, cuando termina en cero.*

Suponiendo en la fórmula anterior $D = B$, y por tanto, $R = 0$, tendremos:

$$N = mD + a$$

lo que nos dice que el número N solo será múltiplo del divisor propuesto D, cuando a lo sea: pero la cifra a , menor siempre que la base

B del sistema, no puede ser múltiplo de $D = B$ sinó en el caso de ser cero; condicion por tanto necesaria y suficiente para que el número N sea divisible por otro D, igual á la base del sistema en que aquel se halla escrito; segun habiamos enunciado.

Considerando el número compuesto de cifras dobles ó triples, es decir formadas cada una por dos ó tres signos, con lo que vendremos á tener expresado por medio de los mismos signos el número en los sistemas de base B^2 , B^3 etc., extenderemos el primer carácter expuesto, en la forma siguiente:

En todo sistema de numeracion, un número es divisible por una potencia de la base, cuando el grupo de tantas cifras de su derecha como unidades tiene el exponente de esta potencia, está formado exclusivamente por ceros: ó bien; un número es divisible en cualquier sistema por la unidad seguida de ceros, si termina en tantos ceros cuantos siguen á la unidad en el divisor.

24. 2.º carácter. *Todo número que divide á la base del sistema en que otro está expresado y á su cifra de unidades divide á ese otro.*

Siendo el número de que se trata divisor de la base B y de la primera cifra a del propuesto, tendremos en la fórmula general (b , del número 22.)

$B = mD$, de donde se deduce que $R = 0$; y haciendo en ella esta sustitucion, se convertirá en

$$N = mD + a$$

y teniendo presente que a es tambien múltiplo de D, tendremos finalmente,

$$N' = mD$$

segun queríamos demostrar.

Debe observarse en vista de la primera de estas dos igualdades, que la divisibilidad por D del n.º N, depende de la de su cifra a de unidades, que en tal sentido se encuentra en sus mismas condiciones; es decir, que si esta cifra no es divisible por D, tampoco lo será el número; y en tal caso, el residuo correspondiente al número, será el mismo que su cifra de unidades produzca.

25. Vamos á hacer aplicacion de lo expuesto, á números de distintos sistemas.

Supongamos B igual á diez, en cuyo caso D representará uno de los divisores 2 ó 5 de la base. En este caso, el principio anteriormente demostrado afectará, refiriéndose al sistema *decimal*, la forma particular siguiente; habida cuenta de la observacion que antecede:

En el sistema decimal de numeracion, un número será divisible por dos ó cinco, cuando lo sea su cifra de unidades.

Suponiendo B igual á seis, en cuyo caso D será igual á 2 ó á 3, el principio se enunciará;

En el sistema de base seis, un número será divisible por dos ó tres, cuando lo sea su primera cifra de la derecha.

Si B es doce ó sea $2^2 \cdot 3$; diremos:

En el sistema duodecimal, un número es divisible por dos, por tres, por cuatro ó por seis, cuando lo sea su cifra de unidades

Si suponemos la base igual á B^2 ó B^3 , etc., en estos mismos sistemas; y por consiguiente, las cifras del nuevo formadas por grupos de dos, tres ó más signos, podremos generalizar el principio á las potencias de los divisores de la base, como sigue:

En cualquier sistema de numeracion, un número es divisible por las potencias de los divisores de la base, cuando lo sea el número que forman tantas cifras de su derecha como unidades tiene el exponente respectivo de dichas potencias.

Y aplicando este principio á los mismos sistemas de base diez, seis, y doce, veremos que:

En el sistema decimal, un número es divisible por 4, 8, 16...; por 25, 125...; y en general por una potencia de 2 ó 5, cuando el número formado por tantas cifras de su derecha como unidades tenga el exponente de dicha potencia, sea divisible por ella.

En el sistema de base seis, un número será divisible en análogas circunstancias por las potencias de 2 ó de 3.

Un número duodecimal será de igual manera divisible por las potencias de 2, 3, 4 ó 6, cuando cumpla con la misma condicion.

26. 3.^{er} carácter. *En todo sistema de numeracion, un número será divisible por cualquier divisor de la base disminuida en una unidad, cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras lo sea.*

Representando por D á este divisor, tendremos: $B - 1 = mD$, ó bien, $B = mD + 1$, de donde se deduce que $R = 1$, y lo mismo todas sus potencias $R^2 R^3 \dots R^n$, convirtiéndose por este hecho la fórmula general (b), en

$$N = mD + a + b + c + \dots + p + q:$$

y llamando S á la suma de las cifras a, b, c, \dots, p, q ,

$$N = mD + S.$$

Donde vemos que todo número puede considerarse compuesto de dos partes: una múltiplo siempre de D , y la otra variable, de cuyas condiciones de divisibilidad por D , dependen las del número propuesto; de manera que, si la suma de las cifras es divisible por D , el número también lo será, no siéndolo en el caso contrario; en este caso, el residuo del número con relación al divisor D , será el mismo que respecto á este divisor se obtenga de la suma referida.

Esto último puede justificarse fácilmente, suponiendo que la división de dicha suma por D produzca un resto r , en cuyo caso, $S = mD + r$; y substituyendo este valor de S en la igualdad anterior,

$$N = mD + S, \text{ tendremos:}$$

$$N = mD + mD + r, \text{ ó bien}$$

$$N = mD + r,$$

que justifica nuestra observación.

27. Apliquemos lo expuesto á algunos sistemas particulares de numeración.

Suponiendo B igual á diez, en cuyo caso $B - 1 = 9$; y teniendo en cuenta que los divisores de este último número son 3 y 9, diremos:

En el sistema de numeración decimal un número será divisible por tres ó nueve, cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras lo sea; y en el caso contrario, la división del número por 3 ó 9 producirá el mismo resto que la mencionada suma.

Suponiendo B igual á ciento y por tanto $B - 1$ igual á noventa y nueve, cuyos divisores primos son tres, nueve y once; y ocupándonos solo de este último por tener ya los anteriores comprendidos en una regla más sencilla; veremos que:

En el sistema decimal, un número es divisible por 11, cuando lo sea la suma de sus grupos de dos cifras, contando de derecha á izquierda.

Suponiendo B igual á mil, ó $B - 1$ igual á novecientos noventa y nueve, que á su vez lo es á tres elevado al cubo por treinta y siete; deduciremos, que:

En el mismo sistema, un número será divisible por 3, 9, 27 ó 37, cuando la suma de sus grupos de tres cifras á partir de las unidades, lo sea.

Si suponemos $B = 7$, sería $B - 1 = 6 = 2 \cdot 3$; de donde se deduce que:

En el sistema de base siete, un número es divisible por dos, por tres, ó por seis, cuando lo sea la suma de los valores absolutos de sus cifras.

En las mismas circunstancias se encontrará cualquier número *undecimal* con relacion á los divisores *dos, cinco y diez*; ó un número *duodecimal* respecto al divisor *once*, ó sea *b*.

28. 4.º carácter. En cualquier sistema de numeracion, un número será divisible por cada uno de los divisores de su base aumentada en una unidad, cuando lo sea el exceso de la suma de sus cifras de orden impar sobre la de las cifras de orden par.

Siendo *D* uno de estos divisores, tendremos:

$B + 1 = mD$: ó bien, $B = mD - 1$: de donde se deduce que $R = -1$, siéndolo por tanto todas sus potencias impares, R^3, R^5, R^7, \dots ; y que $R^2 = 1$, así como todas las potencias pares, R^4, R^6, \dots cuyos valores sustituidos en la fórmula general (*b*), la convierten en

$$N = mD + a - b + c - d + e \dots; \text{ ó bien}$$

$$N = mD + (a + c + e + \dots) - (b + d + \dots):$$

Y llamando *S* á la primer suma y *S'* á la segunda,

$N = mD + (S - S')$; y representando esta diferencia por *D*; $N = mD \pm d$, segun que *S* sea mayor ó menor que *S'*; lo que demuestra el principio enunciado.

Obsérvese que, siendo el número propuesto un múltiplo de *D*, aumentado en el exceso de la suma de las cifras de orden impar sobre la de las de orden par, ó disminuido en el exceso de esta sobre aquella; el residuo de la division del número, por *D*, será el mismo que esta diferencia produzca; ó lo que le falte para ser igual á un múltiplo de *D*; segun que la primera suma *S*, sea mayor ó menor que la segunda *S'*.

Efectivamente; llamando *r* al resto de la division de *d* por *D*, tendremos:

$d = mD + r$: cuyo valor sustituido en la igualdad anterior, la convierte en

$$N = mD \pm (mD + r); \text{ ó bien}$$

$$N = mD \pm mD \pm r; \text{ ó}$$

$N = mD \pm r$: y suponiendo $D - r = r'$, tendremos separadamente

$$N = mD + r, \text{ para el caso en que } S > S';$$

$$\text{y } N = mD - r, \text{ ó } N = mD + (D - r), \text{ ó bien}$$

$$N = mD + r', \text{ cuando por el contrario sea } S' > S.$$

29. Aplicando lo expuesto al sistema de base diez, tendremos $B + 1$ igual á once; de donde se deduce que:

En el sistema decimal, un número es ó nó divisible por once, según lo sea la diferencia entre las sumas de sus cifras de lugar par é impar.

Si B se supone igual á ciento, $B + 1$ lo será á ciento uno; pudiendo decirse que;

En el mismo sistema, un número es divisible por 101, cuando separado á partir de las unidades en grupos de dos cifras, lo sea el exceso de la suma de los grupos de orden impar sobre la de los de orden par.

Siendo la base mil, $B + 1$ será mil y uno, igual á $7 \cdot 11 \cdot 13$: de consiguiente;

Un número decimal es divisible por 7, 11 ó 13, cuando separado á partir de las unidades en grupos de tres cifras, lo sea la diferencia entre la suma de los grupos de orden impar y la de los de orden par.

Si suponemos $B = 9$, en cuyo caso $B + 1$ será diez ó $2 \cdot 5$; tendremos que;

En el sistema de base nueve, un número es divisible por dos, por cinco ó por diez, cuando lo sea el exceso de la suma de sus cifras de orden impar sobre la de las de orden par.

El mismo carácter de divisibilidad ofrecerá un número *duodecimal* respecto al divisor *trece*; ó un número *undecimal* respecto al divisor *doce*, y á cualquiera de sus factores *dos, tres, cuatro y seis*.

30. Recapitulando, aun á riesgo de cansar con la repetición al lector; los caracteres particulares de divisibilidad obtenidos en el estudio precedente para los números del sistema decimal, con relación á varios divisores primos; tendremos la siguiente *coleccion de hechos*, que se traducen en otras tantas reglas prácticas, algunas de ellas ya obtenidas directamente en el estudio del mismo sistema:

1.º *Un número decimal es divisible por 2, cuando termina en cero ó cifra par.* (2.º carácter.)

2.º *Un número será divisible por 3, cuando lo sea la suma de los valores absolutos de sus cifras, ó de sus grupos de dos ó de tres cifras (1): y en caso contrario, el resto de la división del número por*

(1) Fácil es observar que sucederá lo mismo sumando grupos de cuatro ó más cifras; puesto que dicha suma dará siempre á su vez una suma de valores absolutos igual á la que se obtendría directamente del número propuesto.

3, será el mismo que se obtenga dividiendo por 3 cualquiera de las sumas mencionadas. (3.^{er} carácter.)

3.^o Un número es divisible por 5, si termina en alguna de las cifras 0 ó 5. (2.^o carácter.)

4.^o Un número será divisible por 7, cuando divididas sus cifras en grupos de tres á partir de las unidades, lo sea el exceso de la suma de los grupos de orden impar sobre la de los de orden par; ó el de esta sobre aquella; y cuando nó, el resto de la division del número por 7, será el mismo que se obtenga dividiendo por siete dicho exceso, en el primer caso; ó la diferencia entre dicho residuo y el mismo divisor 7 en el segundo. (4.^o carácter.)

5.^o Un número será divisible por 11, cuando lo sea la suma de sus grupos de dos cifras; ó la diferencia entre sus cifras de orden impar y par; ó entre sus grupos de tres cifras de los mismos órdenes: determinándose el resto en la forma ya expresada. (Caractéres 3.^o y 4.^o)

6.^o Un número será divisible por 13, cuando lo sea el exceso de la suma de sus grupos (de tres cifras) de orden impar sobre la de los de orden par; repitiéndose la consideracion anterior acerca del resto, en caso contrario. (4.^o carácter.)

7.^o Un número es divisible por 37, cuando lo es la suma de sus grupos de tres cifras; produciendo sinó igual residuo que dicha suma. (3.^{er} carácter.)

8.^o Un número será divisible por 101, cuando dividido en grupos de dos cifras, lo sea la diferencia entre la suma de los grupos de orden impar y las de los de orden par: el resto será en caso contrario el mismo que arroje dicha diferencia, ó su complemento al divisor. (4.^o carácter.)

Las trece condiciones de divisibilidad que anteceden son de fácil aplicacion en la práctica; como puede verse refiriendo cada una de ellas al número 112.222111; producto aumentado en una unidad de todos los factores mencionados; por cuya razon debe obtenerse y se obtiene efectivamente 1 como *residuo* con relacion á cada uno de dichos divisores.

31. Y volviendo á nuestra teoría: de la consideracion de los principios demostrados, deduciremos el siguiente procedimiento general de investigacion.

Cuando en un sistema de numeracion de base B , se trate de determinar los caracteres de divisibilidad por un divisor dado D ; *examinaremos los números B , $B - 1$, y $B + 1$ que descompondremos en sus factores primos, así como el divisor D ; hecho esto, y en virtud de los principios demostrados (24, 26 y 28) anteriormente, formularemos los caracteres de divisibilidad correspondientes á cada uno de los factores primos contenidos en D , y reuniéndolos, tendremos las condiciones de divisibilidad por dicho divisor.*

Propongámonos como ejemplo conocer en el sistema duodecimal la condicion de divisibilidad por el número 29, teniendo en cuenta que este número es igual al número decimal $33 = 3 \cdot 11 \times (1)$ y observando que el 1.º de estos factores (3) es divisor de la base y el 2.º (11) lo es de la base disminuida en una unidad, deduciremos que;

Un número duodecimal será divisible por 29 cuando su cifra de unidades sea múltiplo de tres (0, 3, 6 ó 9) y la suma de los valores absolutos de sus cifras lo sea de once, (ó bien b.)

§ II. *Factores primos.*

32. La cualidad de *primos* atribuida á los números que no tienen otro divisor que la unidad, es independiente de su forma de expresion; siendo por tanto aplicables á cualquier sistema los principios demostrados en Aritmética para dicha clase de números, é invariables los hechos observados en el sistema decimal.

La série de los números primos contiene pues los mismos términos en cualquier sistema; por más que cada número primo afecte una forma distinta segun el sistema de numeracion en que se le exprese. Así el número primo *decimal* 13, tendrá la forma *duodecimal* 11 y la *tráctica* 31 en las tablas respectivas correspondientes á estos sistemas.

33. Sentados estos precedentes, vamos á descomponer en sus factores primos algunos números de sistemas distintos.

(1) Descomponiendo directamente en el sistema duodecimal el número 29 en sus factores primos, se obtiene el mismo sistema 3. b: véase el T.^a del n.º 34.

En la base *diez*, ($b = 11$)... .. $2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 198$

En la base *ocho*, ($b = 13$)... .. $2 \cdot 3^2 \cdot 13 = 306$

Es decir; que el número

<u>Duodecimal.</u>		<u>Decimal.</u>		<u>Octaval.</u>
146	=	198	=	306

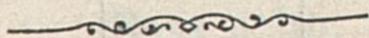
Este procedimiento que el autor no ha tenido ocasion de ver hasta hoy en ningun tratado de Aritmética, es muy ventajoso cuando los factores primos del número propuesto son números pequeños, y mucho más si constan de una sola cifra.

FIN DE LA TEORÍA.

TABLAS PITAGÓRICAS

ó

DE PRODUCTOS DE LOS NÚMEROS DÍGITOS
CORRESPONDIENTES Á DISTINTOS SISTEMAS DE NUMERACION.



Sistema ternario.

1	2
2	11

Sistema tetráctico.

1	2	3
2	10	12
3	12	21

Sistema de base cinco.

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Sistema de base seis.

1	2	3	4	5
2	4	10	12	14
3	10	13	20	23
4	12	20	24	32
5	14	23	32	41

Base siete.

1	2	3	4	5	6
2	4	6	11	13	15
3	6	12	15	21	24
4	11	15	22	26	33
5	13	21	26	34	42
6	15	24	33	42	51

Base ocho.

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	10	12	14	16
3	6	11	14	17	22	25
4	10	14	20	24	30	34
5	12	17	24	31	36	43
6	14	22	30	36	44	52
7	16	25	34	43	52	61

Base nueve.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	6	8	11	13	15	17
3	6	10	13	16	20	23	26
4	8	13	17	22	26	31	35
5	11	16	22	27	33	38	44
6	13	20	26	33	40	46	53
7	15	23	31	38	46	54	62
8	17	26	35	44	53	62	71

Base once.

Base once.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>a</i>
2	4	6	8	<i>a</i>	11	13	15	17	19
3	6	9	11	14	17	1 <i>a</i>	22	25	28
4	8	11	15	19	22	26	2 <i>a</i>	33	37
5	<i>a</i>	14	19	23	28	32	37	41	46
6	11	17	22	28	33	39	44	4 <i>a</i>	55
7	13	1 <i>a</i>	26	32	39	45	51	58	64
8	15	22	2 <i>a</i>	37	44	51	59	66	73
9	17	25	33	41	4 <i>a</i>	58	66	74	82
<i>a</i>	19	28	37	46	55	64	73	82	91

Base trece.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
2	4	6	8	<i>a</i>	<i>c</i>	11	13	15	17	19	1 <i>b</i>
3	6	9	<i>c</i>	12	15	18	1 <i>b</i>	21	24	27	2 <i>a</i>
4	8	<i>c</i>	13	17	1 <i>b</i>	22	26	2 <i>a</i>	31	35	39
5	<i>a</i>	12	17	1 <i>c</i>	24	29	31	36	3 <i>b</i>	43	48
6	<i>c</i>	15	1 <i>b</i>	24	2 <i>a</i>	33	39	42	48	51	57
7	11	18	22	29	33	3 <i>a</i>	44	4 <i>b</i>	55	5 <i>c</i>	66
8	13	1 <i>b</i>	26	31	39	44	4 <i>c</i>	57	62	6 <i>a</i>	75
9	15	21	2 <i>a</i>	36	42	4 <i>b</i>	57	63	6 <i>c</i>	78	84
<i>a</i>	17	24	31	3 <i>b</i>	48	55	62	6 <i>c</i>	79	86	93
<i>b</i>	19	27	35	43	51	5 <i>c</i>	6 <i>a</i>	78	86	94	<i>a</i> 2
<i>c</i>	1 <i>b</i>	2 <i>a</i>	39	48	57	66	75	84	93	<i>a</i> 2	<i>b</i> 1

Base catorce.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d
2	4	6	8	a	c	10	12	14	16	18	1a	1c
3	6	9	c	11	14	17	1a	1d	22	25	28	2b
4	8	c	12	16	1a	20	24	28	2c	32	36	3a
5	a	11	16	1b	22	27	2c	33	38	3d	44	49
6	c	14	1a	22	28	30	36	3c	44	4a	52	58
7	10	17	20	27	30	37	40	47	50	57	60	67
8	12	1a	24	2c	36	40	48	52	5a	64	6c	76
9	14	1d	28	33	3c	47	52	5b	66	71	7a	85
a	16	22	2c	38	44	50	5a	66	72	7c	88	94
b	18	25	32	3d	4a	57	64	71	7c	89	96	a3
c	1a	28	36	44	52	60	6c	7a	88	96	a4	b2
d	1c	2b	3a	49	58	67	76	85	94	a3	b2	e1

Base quince.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e
2	4	6	8	a	c	e	11	13	15	17	19	1b	1d
3	6	9	c	10	13	16	19	1c	20	23	26	29	2c
4	8	c	11	15	19	1d	22	26	2a	2e	33	37	3b
5	a	10	15	1a	20	25	2a	30	35	3a	40	45	4a
6	c	13	19	20	26	2c	33	39	40	46	4c	53	59
7	e	16	1d	25	2c	34	3b	43	4a	52	59	61	68
8	11	19	22	2a	33	3b	44	4c	55	5d	66	6e	77
9	13	1c	26	30	39	43	4c	56	60	69	73	7c	86
a	15	20	2a	35	40	4a	55	60	6a	75	80	8a	95
b	17	23	2e	3a	46	52	5d	69	75	81	8c	98	a4
c	19	26	33	40	4c	59	66	73	80	8c	99	a6	b3
d	1b	29	37	45	53	61	6e	7c	8a	98	a6	b4	c2
e	1d	2c	3b	4a	59	68	77	86	95	a4	b3	c2	d1

Base diez y seis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
2	4	6	8	a	c	e	10	12	14	16	18	1a	1c	1e
3	6	9	c	f	12	15	18	1b	1e	21	24	27	2a	2d
4	8	c	10	14	18	1c	20	24	28	2c	30	34	38	3c
5	a	f	14	19	1e	23	28	2d	32	37	3c	41	46	4b
6	c	12	18	1e	24	2a	30	36	3c	42	48	4e	54	5a
7	e	15	1c	23	2a	31	38	3f	46	4d	54	5b	62	69
8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	12	1b	24	2d	36	3f	48	51	5a	63	6c	75	7e	87
a	14	1e	28	32	3c	46	50	5a	64	6e	78	82	8c	96
b	16	21	2c	37	42	4d	58	63	6e	79	84	8f	9a	a5
c	18	24	30	3c	48	54	60	6c	78	84	90	9c	a8	b4
d	1a	27	34	41	4e	5b	68	75	82	8f	9c	a9	b6	c3
e	1c	2a	38	46	54	62	70	7e	8c	9a	a8	b6	c4	d2
f	1e	2d	3c	4b	5a	69	78	87	96	a5	b4	c3	d2	e1

Base diez y ocho.

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>a</u>	<u>b</u>	<u>c</u>	<u>d</u>	<u>e</u>	<u>f</u>	<u>g</u>	<u>h</u>
<u>2</u>	<u>4</u>	<u>6</u>	<u>8</u>	<u>a</u>	<u>c</u>	<u>e</u>	<u>g</u>	<u>10</u>	<u>12</u>	<u>14</u>	<u>16</u>	<u>18</u>	<u>1a</u>	<u>1c</u>	<u>1e</u>	<u>1g</u>
<u>3</u>	<u>6</u>	<u>9</u>	<u>c</u>	<u>f</u>	<u>10</u>	<u>13</u>	<u>16</u>	<u>19</u>	<u>1c</u>	<u>1f</u>	<u>20</u>	<u>23</u>	<u>26</u>	<u>29</u>	<u>2c</u>	<u>2f</u>
<u>4</u>	<u>8</u>	<u>c</u>	<u>g</u>	<u>12</u>	<u>16</u>	<u>1a</u>	<u>1e</u>	<u>20</u>	<u>24</u>	<u>28</u>	<u>2c</u>	<u>2g</u>	<u>32</u>	<u>36</u>	<u>3a</u>	<u>3e</u>
<u>5</u>	<u>a</u>	<u>f</u>	<u>12</u>	<u>17</u>	<u>1c</u>	<u>1h</u>	<u>24</u>	<u>29</u>	<u>2e</u>	<u>31</u>	<u>36</u>	<u>3b</u>	<u>3g</u>	<u>43</u>	<u>48</u>	<u>4d</u>
<u>6</u>	<u>c</u>	<u>10</u>	<u>16</u>	<u>1c</u>	<u>20</u>	<u>26</u>	<u>2c</u>	<u>30</u>	<u>36</u>	<u>3c</u>	<u>40</u>	<u>46</u>	<u>4c</u>	<u>50</u>	<u>56</u>	<u>5c</u>
<u>7</u>	<u>e</u>	<u>13</u>	<u>1a</u>	<u>1h</u>	<u>26</u>	<u>2d</u>	<u>32</u>	<u>39</u>	<u>3g</u>	<u>45</u>	<u>4c</u>	<u>51</u>	<u>58</u>	<u>5f</u>	<u>64</u>	<u>6b</u>
<u>8</u>	<u>g</u>	<u>16</u>	<u>1e</u>	<u>24</u>	<u>2c</u>	<u>32</u>	<u>3a</u>	<u>40</u>	<u>48</u>	<u>4g</u>	<u>56</u>	<u>5e</u>	<u>64</u>	<u>6c</u>	<u>72</u>	<u>7a</u>
<u>9</u>	<u>10</u>	<u>19</u>	<u>20</u>	<u>29</u>	<u>30</u>	<u>39</u>	<u>40</u>	<u>49</u>	<u>50</u>	<u>59</u>	<u>60</u>	<u>69</u>	<u>70</u>	<u>79</u>	<u>80</u>	<u>89</u>
<u>a</u>	<u>12</u>	<u>1c</u>	<u>24</u>	<u>2e</u>	<u>36</u>	<u>3g</u>	<u>48</u>	<u>50</u>	<u>5a</u>	<u>62</u>	<u>6c</u>	<u>74</u>	<u>7e</u>	<u>86</u>	<u>8g</u>	<u>98</u>
<u>b</u>	<u>14</u>	<u>1f</u>	<u>28</u>	<u>31</u>	<u>3c</u>	<u>45</u>	<u>4g</u>	<u>59</u>	<u>62</u>	<u>6d</u>	<u>76</u>	<u>7h</u>	<u>8a</u>	<u>93</u>	<u>9e</u>	<u>a7</u>
<u>c</u>	<u>16</u>	<u>20</u>	<u>2c</u>	<u>36</u>	<u>40</u>	<u>4c</u>	<u>56</u>	<u>60</u>	<u>6c</u>	<u>76</u>	<u>80</u>	<u>8c</u>	<u>96</u>	<u>a0</u>	<u>ac</u>	<u>b6</u>
<u>d</u>	<u>18</u>	<u>23</u>	<u>2g</u>	<u>3b</u>	<u>46</u>	<u>51</u>	<u>5e</u>	<u>69</u>	<u>74</u>	<u>7h</u>	<u>8c</u>	<u>97</u>	<u>a2</u>	<u>af</u>	<u>ba</u>	<u>c5</u>
<u>e</u>	<u>1a</u>	<u>26</u>	<u>32</u>	<u>3g</u>	<u>4c</u>	<u>58</u>	<u>64</u>	<u>70</u>	<u>7e</u>	<u>8a</u>	<u>96</u>	<u>a2</u>	<u>ag</u>	<u>bc</u>	<u>c8</u>	<u>d4</u>
<u>f</u>	<u>1c</u>	<u>29</u>	<u>36</u>	<u>43</u>	<u>50</u>	<u>5f</u>	<u>6c</u>	<u>79</u>	<u>86</u>	<u>93</u>	<u>a0</u>	<u>af</u>	<u>bc</u>	<u>c9</u>	<u>d6</u>	<u>e3</u>
<u>g</u>	<u>1e</u>	<u>2c</u>	<u>3a</u>	<u>48</u>	<u>56</u>	<u>64</u>	<u>72</u>	<u>80</u>	<u>8g</u>	<u>9e</u>	<u>ac</u>	<u>ba</u>	<u>c8</u>	<u>d6</u>	<u>e4</u>	<u>f2</u>
<u>h</u>	<u>1g</u>	<u>2f</u>	<u>3e</u>	<u>4d</u>	<u>5c</u>	<u>6b</u>	<u>7a</u>	<u>89</u>	<u>98</u>	<u>a7</u>	<u>b6</u>	<u>c5</u>	<u>d4</u>	<u>e3</u>	<u>f2</u>	<u>g1</u>

SUMARIO.

CAPÍTULO I.

SISTEMAS DE NUMERACION.

§ I. *Idea de los sistemas distintos de numeracion.*

1. Algoritmia: Aritmética: cálculo aritmético: numeracion. — 2. Sistema: base: distincion de sistemas. — 3. Forma general de los convenios de numeracion: language. — 4. Exposicion del sistema binario. — 5. Traduccion al sistema binario de un número expresado en el decimal, y vice-versa. — 6. Exposicion del sistema duodecimal. — 7. Traduccion de un número entre los sistemas decimal y duodecimal. — 8. Traslado de la expresion de un número de un sistema cualquiera á otro, pasando por el decimal. — 9. Indicaciones acerca de otros sistemas de numeracion, y ventajas de la adopcion de alguno.

§ II. Cálculo aritmético.

10. Realizacion de las operaciones aritméticas en cualquier sistema. — 11. Adicion: procedimiento: aplicacion á un ejemplo práctico. — 12. Sustraccion: procedimiento: aplicacion práctica: comprobacion. — 13. Multiplicacion: productos de los números dígitos: procedimiento: aplicacion: prueba. — 14. Division: procedimiento: aplicacion: prueba. — 15. Elevacion á potencias y extraccion de raices: ejemplo. — 16. Fracciones: idea del cálculo y traduccion entre distintas formas fraccionarias.



§ III *Forma general de composicion y expresion de los números.*

17. Composicion general de un número en cualquier sistema: fórmula: su traduccion al lenguaje ordinario. — 18. Aplicacion á un número de un sistema dado: convenio: generalizacion. — 19. Regla general de traduccion directa de los números de cualquier sistema á otro. — 20. Ejemplos prácticos.

CAPITULO II.

DIVISIBILIDAD.

§ I. *Caractères generales de divisibilidad.*

21. Dependencia de las condiciones de divisibilidad de los números del sistema decimal respecto á la base de este. — 22. Forma de composicion de un número con relación á un divisor menor que la base del sistema en que está escrito, y al residuo de la division de la misma base por dicho divisor. — 23. Caracteres de divisibilidad por la base del sistema y sus potencias. — 24. Caracteres de divisibilidad por los divisores de la base y las potencias de los mismos. — 25. Aplicaciones á determinados sistemas. — 26. Caracteres de divisibilidad por los divisores de la base disminuida en una unidad. — 27. Aplicacion á sistemas particulares. — 28. Caracteres de divisibilidad por los divisores de la base aumentada en una unidad. — 29. Aplicaciones. — 30. Recapitulacion de los caracteres de divisibilidad de los números del sistema decimal, por los primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 37 y 101, determinados en el estudio precedente. — 31. Determinacion de los caracteres de divisibilidad por un divisor cualquiera: ejemplo práctico.

§ II. *Factores primos.*

32. Consideraciones generales acerca de los números primos, y de la forma y série de ellos, en cualquier sistema de numeracion. — 33. Descomposicion de los números de cualquier sistema, en sus factores primos: ejemplos prácticos. — 34. Teorema: Corolario: nuevo procedimiento de traduccion directa de los números entre sistemas cualesquiera. — 35. Ejemplos.

TABLAS

de productos de los números dígitos, en los sistemas de base tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, once, trece, catorce, quince, diez y seis y diez y ocho.

UVA. BHSC. LEG 14-1 n°1077

Véndese á UNA PESETA en las principales librerías de España.

18 (1) 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59 61 63 65 67 69 71 73 75 77 79 81 83 85 87 89 91 93 95 97 99 101 103 105 107 109 111 113 115 117 119 121 123 125 127 129 131 133 135 137 139 141 143 145 147 149 151 153 155 157 159 161 163 165 167 169 171 173 175 177 179 181 183 185 187 189 191 193 195 197 199 201 203 205 207 209 211 213 215 217 219 221 223 225 227 229 231 233 235 237 239 241 243 245 247 249 251 253 255 257 259 261 263 265 267 269 271 273 275 277 279 281 283 285 287 289 291 293 295 297 299 301 303 305 307 309 311 313 315 317 319 321 323 325 327 329 331 333 335 337 339 341 343 345 347 349 351 353 355 357 359 361 363 365 367 369 371 373 375 377 379 381 383 385 387 389 391 393 395 397 399 401 403 405 407 409 411 413 415 417 419 421 423 425 427 429 431 433 435 437 439 441 443 445 447 449 451 453 455 457 459 461 463 465 467 469 471 473 475 477 479 481 483 485 487 489 491 493 495 497 499 501 503 505 507 509 511 513 515 517 519 521 523 525 527 529 531 533 535 537 539 541 543 545 547 549 551 553 555 557 559 561 563 565 567 569 571 573 575 577 579 581 583 585 587 589 591 593 595 597 599 601 603 605 607 609 611 613 615 617 619 621 623 625 627 629 631 633 635 637 639 641 643 645 647 649 651 653 655 657 659 661 663 665 667 669 671 673 675 677 679 681 683 685 687 689 691 693 695 697 699 701 703 705 707 709 711 713 715 717 719 721 723 725 727 729 731 733 735 737 739 741 743 745 747 749 751 753 755 757 759 761 763 765 767 769 771 773 775 777 779 781 783 785 787 789 791 793 795 797 799 801 803 805 807 809 811 813 815 817 819 821 823 825 827 829 831 833 835 837 839 841 843 845 847 849 851 853 855 857 859 861 863 865 867 869 871 873 875 877 879 881 883 885 887 889 891 893 895 897 899 901 903 905 907 909 911 913 915 917 919 921 923 925 927 929 931 933 935 937 939 941 943 945 947 949 951 953 955 957 959 961 963 965 967 969 971 973 975 977 979 981 983 985 987 989 991 993 995 997 999 1001 1003 1005 1007 1009 1011 1013 1015 1017 1019 1021 1023 1025 1027 1029 1031 1033 1035 1037 1039 1041 1043 1045 1047 1049 1051 1053 1055 1057 1059 1061 1063 1065 1067 1069 1071 1073 1075 1077 1079 1081 1083 1085 1087 1089 1091 1093 1095 1097 1099 1101 1103 1105 1107 1109 1111 1113 1115 1117 1119 1121 1123 1125 1127 1129 1131 1133 1135 1137 1139 1141 1143 1145 1147 1149 1151 1153 1155 1157 1159 1161 1163 1165 1167 1169 1171 1173 1175 1177 1179 1181 1183 1185 1187 1189 1191 1193 1195 1197 1199 1201 1203 1205 1207 1209 1211 1213 1215 1217 1219 1221 1223 1225 1227 1229 1231 1233 1235 1237 1239 1241 1243 1245 1247 1249 1251 1253 1255 1257 1259 1261 1263 1265 1267 1269 1271 1273 1275 1277 1279 1281 1283 1285 1287 1289 1291 1293 1295 1297 1299 1301 1303 1305 1307 1309 1311 1313 1315 1317 1319 1321 1323 1325 1327 1329 1331 1333 1335 1337 1339 1341 1343 1345 1347 1349 1351 1353 1355 1357 1359 1361 1363 1365 1367 1369 1371 1373 1375 1377 1379 1381 1383 1385 1387 1389 1391 1393 1395 1397 1399 1401 1403 1405 1407 1409 1411 1413 1415 1417 1419 1421 1423 1425 1427 1429 1431 1433 1435 1437 1439 1441 1443 1445 1447 1449 1451 1453 1455 1457 1459 1461 1463 1465 1467 1469 1471 1473 1475 1477 1479 1481 1483 1485 1487 1489 1491 1493 1495 1497 1499 1501 1503 1505 1507 1509 1511 1513 1515 1517 1519 1521 1523 1525 1527 1529 1531 1533 1535 1537 1539 1541 1543 1545 1547 1549 1551 1553 1555 1557 1559 1561 1563 1565 1567 1569 1571 1573 1575 1577 1579 1581 1583 1585 1587 1589 1591 1593 1595 1597 1599 1601 1603 1605 1607 1609 1611 1613 1615 1617 1619 1621 1623 1625 1627 1629 1631 1633 1635 1637 1639 1641 1643 1645 1647 1649 1651 1653 1655 1657 1659 1661 1663 1665 1667 1669 1671 1673 1675 1677 1679 1681 1683 1685 1687 1689 1691 1693 1695 1697 1699 1701 1703 1705 1707 1709 1711 1713 1715 1717 1719 1721 1723 1725 1727 1729 1731 1733 1735 1737 1739 1741 1743 1745 1747 1749 1751 1753 1755 1757 1759 1761 1763 1765 1767 1769 1771 1773 1775 1777 1779 1781 1783 1785 1787 1789 1791 1793 1795 1797 1799 1801 1803 1805 1807 1809 1811 1813 1815 1817 1819 1821 1823 1825 1827 1829 1831 1833 1835 1837 1839 1841 1843 1845 1847 1849 1851 1853 1855 1857 1859 1861 1863 1865 1867 1869 1871 1873 1875 1877 1879 1881 1883 1885 1887 1889 1891 1893 1895 1897 1899 1901 1903 1905 1907 1909 1911 1913 1915 1917 1919 1921 1923 1925 1927 1929 1931 1933 1935 1937 1939 1941 1943 1945 1947 1949 1951 1953 1955 1957 1959 1961 1963 1965 1967 1969 1971 1973 1975 1977 1979 1981 1983 1985 1987 1989 1991 1993 1995 1997 1999 2001 2003 2005 2007 2009 2011 2013 2015 2017 2019 2021 2023 2025 2027 2029 2031 2033 2035 2037 2039 2041 2043 2045 2047 2049 2051 2053 2055 2057 2059 2061 2063 2065 2067 2069 2071 2073 2075 2077 2079 2081 2083 2085 2087 2089 2091 2093 2095 2097 2099 2101 2103 2105 2107 2109 2111 2113 2115 2117 2119 2121 2123 2125 2127 2129 2131 2133 2135 2137 2139 2141 2143 2145 2147 2149 2151 2153 2155 2157 2159 2161 2163 2165 2167 2169 2171 2173 2175 2177 2179 2181 2183 2185 2187 2189 2191 2193 2195 2197 2199 2201 2203 2205 2207 2209 2211 2213 2215 2217 2219 2221 2223 2225 2227 2229 2231 2233 2235 2237 2239 2241 2243 2245 2247 2249 2251 2253 2255 2257 2259 2261 2263 2265 2267 2269 2271 2273 2275 2277 2279 2281 2283 2285 2287 2289 2291 2293 2295 2297 2299 2301 2303 2305 2307 2309 2311 2313 2315 2317 2319 2321 2323 2325 2327 2329 2331 2333 2335 2337 2339 2341 2343 2345 2347 2349 2351 2353 2355 2357 2359 2361 2363 2365 2367 2369 2371 2373 2375 2377 2379 2381 2383 2385 2387 2389 2391 2393 2395 2397 2399 2401 2403 2405 2407 2409 2411 2413 2415 2417 2419 2421 2423 2425 2427 2429 2431 2433 2435 2437 2439 2441 2443 2445 2447 2449 2451 2453 2455 2457 2459 2461 2463 2465 2467 2469 2471 2473 2475 2477 2479 2481 2483 2485 2487 2489 2491 2493 2495 2497 2499 2501 2503 2505 2507 2509 2511 2513 2515 2517 2519 2521 2523 2525 2527 2529 2531 2533 2535 2537 2539 2541 2543 2545 2547 2549 2551 2553 2555 2557 2559 2561 2563 2565 2567 2569 2571 2573 2575 2577 2579 2581 2583 2585 2587 2589 2591 2593 2595 2597 2599 2601 2603 2605 2607 2609 2611 2613 2615 2617 2619 2621 2623 2625 2627 2629 2631 2633 2635 2637 2639 2641 2643 2645 2647 2649 2651 2653 2655 2657 2659 2661 2663 2665 2667 2669 2671 2673 2675 2677 2679 2681 2683 2685 2687 2689 2691 2693 2695 2697 2699 2701 2703 2705 2707 2709 2711 2713 2715 2717 2719 2721 2723 2725 2727 2729 2731 2733 2735 2737 2739 2741 2743 2745 2747 2749 2751 2753 2755 2757 2759 2761 2763 2765 2767 2769 2771 2773 2775 2777 2779 2781 2783 2785 2787 2789 2791 2793 2795 2797 2799 2801 2803 2805 2807 2809 2811 2813 2815 2817 2819 2821 2823 2825 2827 2829 2831 2833 2835 2837 2839 2841 2843 2845 2847 2849 2851 2853 2855 2857 2859 2861 2863 2865 2867 2869 2871 2873 2875 2877 2879 2881 2883 2885 2887 2889 2891 2893 2895 2897 2899 2901 2903 2905 2907 2909 2911 2913 2915 2917 2919 2921 2923 2925 2927 2929 2931 2933 2935 2937 2939 2941 2943 2945 2947 2949 2951 2953 2955 2957 2959 2961 2963 2965 2967 2969 2971 2973 2975 2977 2979 2981 2983 2985 2987 2989 2991 2993 2995 2997 2999 3001 3003 3005 3007 3009 3011 3013 3015 3017 3019 3021 3023 3025 3027 3029 3031 3033 3035 3037 3039 3041 3043 3045 3047 3049 3051 3053 3055 3057 3059 3061 3063 3065 3067 3069 3071 3073 3075 3077 3079 3081 3083 3085 3087 3089 3091 3093 3095 3097 3099 3101 3103 3105 3107 3109 3111 3113 3115 3117 3119 3121 3123 3125 3127 3129 3131 3133 3135 3137 3139 3141 3143 3145 3147 3149 3151 3153 3155 3157 3159 3161 3163 3165 3167 3169 3171 3173 3175 3177 3179 3181 3183 3185 3187 3189 3191 3193 3195 3197 3199 3201 3203 3205 3207 3209 3211 3213 3215 3217 3219 3221 3223 3225 3227 3229 3231 3233 3235 3237 3239 3241 3243 3245 3247 3249 3251 3253 3255 3257 3259 3261 3263 3265 3267 3269 3271 3273 3275 3277 3279 3281 3283 3285 3287 3289 3291 3293 3295 3297 3299 3301 3303 3305 3307 3309 3311 3313 3315 3317 3319 3321 3323 3325 3327 3329 3331 3333 3335 3337 3339 3341 3343 3345 3347 3349 3351 3353 3355 3357 3359 3361 3363 3365 3367 3369 3371 3373 3375 3377 3379 3381 3383 3385 3387 3389 3391 3393 3395 3397 3399 3401 3403 3405 3407 3409 3411 3413 3415 3417 3419 3421 3423 3425 3427 3429 3431 3433 3435 3437 3439 3441 3443 3445 3447 3449 3451 3453 3455 3457 3459 3461 3463 3465 3467 3469 3471 3473 3475 3477 3479 3481 3483 3485 3487 3489 3491 3493 3495 3497 3499 3501 3503 3505 3507 3509 3511 3513 3515 3517 3519 3521 3523 3525 3527 3529 3531 3533 3535 3537 3539 3541 3543 3545 3547 3549 3551 3553 3555 3557 3559 3561 3563 3565 3567 3569 3571 3573 3575 3577 3579 3581 3583 3585 3587 3589 3591 3593 3595 3597 3599 3601 3603 3605 3607 3609 3611 3613 3615 3617 3619 3621 3623 3625 3627 3629 3631 3633 3635 3637 3639 3641 3643 3645 3647 3649 3651 3653 3655 3657 3659 3661 3663 3665 3667 3669 3671 3673 3675 3677 3679 3681 3683 3685 3687 3689 3691 3693 3695 3697 3699 3701 3703 3705 3707 3709 3711 3713 3715 3717 3719 3721 3723 3725 3727 3729 3731 3733 3735 3737 3739 3741 3743 3745 3747 3749 3751 3753 3755 3757 3759 3761 3763 3765 3767 3769 3771 3773 3775 3777 3779 3781 3783 3785 3787 3789 3791 3793 3795 3797 3799 3801 3803 3805 3807 3809 3811 3813 3815 3817 3819 3821 3823 3825 3827 3829 3831 3833 3835 3837 3839 3841 3843 3845 3847 3849 3851 3853 3855 3857 3859 3861 3863 3865 3867 3869 3871 3873 3875 3877 3879 3881 3883 3885 3887 3889 3891 3893 3895 3897 3899 3901 3903 3905 3907 3909 3911 3913 3915 3917 3919 3921 3923 3925 3927 3929 3931 3933 3935 3937 3939 3941 3943 3945 3947 3949 3951 3953 3955 3957 3959 3961 3963 3965 3967 3969 3971 3973 3975 3977 3979 3981 3983 3985 3987 3989 3991 3993 3995 3997 3999 4001 4003 4005 4007 4009 4011 4013 4015 4017 4019 4021 4023 4025 4027 4029 4031 4033 4035 4037 4039 4041 4043 4045 4047 4049 4051 4053 4055 4057 4059 4061 4063 4065 4067 4069 4071 4073 4075 4077 4079 4081 4083 4085 4087 4089 4091 4093 4095 4097 4099 4101 4103 4105 4107 4109 4111 4113 4115 4117 4119 4121 4123 4125 4127 4129 4131 4133 4135 4137 4139 4141 4143 4145 4147 4149 4151 4153 4155 4157 4159 4161 4163 4165 4167 4169 4171 4173 4175 4177 4179 4181 4183 4185 4187 4189 4191 4193 4195 4197 4199 4201 4203 4205 4207 4209 4211 4213 4215 4217 4219 4221 4223 4225 4227 4229 4231 4233 4235 4237 4239 4241 4243 4245 4247 4249 4251 4253 4255 4257 4259 4261 4263 4265 4267 4269 4271 4273 4275 4277 4279 4281 4283 4285 4287 4289 4291 4293 4295 4297 4299 4301 4303 4305 4307 4309 4311 4313 4315 4317 4319 4321 4323 4325 4327 4329 4331 4333 4335 4337 4339 4341 4343 4345 4347 4349 4351 4353 4355 4357 4359 4361 4363 4365 4367 4369 4371 4373 4375 4377 4379 4381 4383 4385 4387 4389 4391 4393 4395 4397 4399 4401 4403 4405 4407 4409 4411 4413 4415 4417 4419 4421 4423 4425 4427 4429 4431 4433 4435 4437 4439 4441 4443 4445 4447 4449 4451 4453 4455 4457 4459 4461 4463 4465 4467 4469 4471 4473 4475 4477 4479 4481 4483 4485 4487 4489 4491 4493 4495 4497 4499 4501 4503 4505 4507 4509 4511 4513 4515 4517 4519 4521 4523 4525 4527 4529 4531 4533 4535 4537 4539 4541 4543 4545 4547 4549 4551 4553 4555 4557 4559 4561 4563 4565 4567 4569 4571 4573 4575 4577 4579 4581 4583 4585 4587 4589 4591 4593 4595 4597 4599 4601 4603 4605 4607 4609 4611 4613 4615 4617 4619 4621 4623 4625 4627 4629 4631 4633 4635 4637 4639 4641 4643 4645 4647 4649 4651 4653 4655 4657 4659 4661 4663 4665 4667 4669 4671 4673 4675 4677 4679 4681 4683 4685 4687 4689 4691 4693 4695 4697 4699 4701 4703 4705 4707 4709 4711 4713 4715 4717 4719 4721 4723 4725 4727 4729 4731 4733 4735 4737 4739 4741 4743 4745 4747 4749 4751 4753 4755 4757 4759 4761 4763 4765 4767 4769 4771 4773 4775 4777 4779 4781 4783 4785 4787 4789 4791 4793 4795 4797 4799 4801 4803 4805 4807 4809 4811 4813 4815 4817 4819 4821 4823 4825 4827 4829 4831 4833 4835 4837 4839 4841 4843 4845 4847 4849 4851 4853 4855 4857 4859 4861 4863 4865 4867 4869 4871 4873 4875 4877 4879 4881 4883 4885 4887 4889 4891 4893 4895 4897 4899 4901 4903 4905 4907 4909 4911 4913 4915 4917 4919 4921 4923 4925 4927 4929 4931 4933 4935 4937 4939 4941 4943 4945 4947 4949 4951 4953 4955 4957 4959 4961 4963 4965 4967 4969 4971 4973 4975 4977 4979 4981 4983 4985 4987 4989 4991 4993 4995 4997 4999 5001 5003 5005 5007 5009 5011 5013 5015 5017 5019 5021 5023 5025 5027 5029 5031 5033 5035 5037 5039 5041 5043 5045 5047 5049 5051 5053 5055 5057 5059 5061 5063 5065 5067 5069 5071 5073 5075 5077 5079 5081 5083 5085 5087 5089 5091 5093 5095 5097 5099 5101 5103 5105 5107 5109 5111 5113 5115 5117 5119 5121 5123 5125 5127 5129 5131 5133 5135 5137 5139 5141 5143 5145 5147 5149 5151 5153 5155 5157 5159 5161 5163 5165