Leg 14 paquete 1º 16 Nº 16

1077

TEORÍA

DE LOS SISTEMAS

DE

NUMERACION

Y

DIVISIBILIDAD.

V. F. C.

VALLADOLID:
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE F. SANTAREN,
Fuente dorada, número 27.

Sistemas de Numeracion y Divisibilidad.

Al Sr. D. Venancio Fernández de Castro; en muestra de consideración y amistad

El Autor

TEORÍA GENERAL

DE LOS

SISTEMAS DE NUMERACION Y DIVISIBILIDAD

POR

EDUARDO GARCIA ROBLES,

PROFESOR DE LA ASIGNATURA

Y

Jefe de Trabajos Estadísticos de la provincia
de Valladolid.

V. F. C.

VALLADOLID:
Establecimiento tipográfico de Fernando Santaren.
Fuente dorada, número 27.
1880.

A LA DIPUTACION PROVINCIAL

Y

AYUNTAMIENTO DE VALLADOLID

dedica este pequeño trabajo en testimonio de sincera adhesion,

Eduardo García Robles.

A LOS PROFESORES Y ALUMNOS

DE

PREPARACION PARA CARRERAS ESPECIALES.

EN la enseñanza elemental de Matemáticas, y principalmente en la enseñanza preparatoria, he sentido frecuentemente la necesidad de recomendar al discípulo el estudio de un autor distinto para cada una de ciertas teorías, comunmente mal tratadas ó de un modo incompleto por lo menos, en la generalidad de las obras adoptadas como texto: lo que ha producido para él mayor desembolso y coleccion de libros, y más trabajo y atencion de los necesarios para mí.

Esto me hace pensar en la conveniencia de publicar separadamente algunas de dichas teorías; esperando prestar con ello un servicio á los Profesores y discípulos, y conseguir por mi parte, sinó honra ni provecho material, por no permitirlo la insignificancia de tales publicaciones, las ventajas de mayor facilidad en la enseñanza que deseo ofrecer á los primeros, y de una accion más eficaz sobre la inteligencia ménos distraida de los últimos.

Habiendo pues de responder á lo que juzgo una necesidad del momento, he de comenzar por donde esta necesidad se presente en condiciones que la hagan más indudable: circunstancia que encuentro en la Teoría general de los sistemas de Numeracion y Divisibilidad, objeto de estas páginas; en las que invito al lector á nó buscar gran novedad, pues solo puedo ofrecerle una pequeña parte con ese carácter; ni siquiera una originalidad completa en las formas de enunciacion y demostracion, que no ha debido preocuparme tanto como la claridad y utilidad de las explicaciones.

TEORÍA GENERAL

DE LOS

SISTEMAS DE NUMERACION Y DIVISIBILIDAD.

CAPÍTULO I.

SISTEMAS DE NUMERACION.

§ I. Idea de los sistemas distintos de numeracion.

1. La *Algorítmia* (1) ó *Ciencia de los números*, que comprende el estudio de la *Aritmética* y el *Algebra*, trata en la primera de estas, de la *Numeracion ó teoría de la formacion y expresion de los números*, y del *Cálculo aritmético*, donde se determinan las formas de composicion y descomposicion de los mismos números, y las relaciones que entre ellos existen.

2. La ley de expresion verbal ó simbólica de los números en uso, parte del doble convenio de que, *diez unidades de un órden constituyen una del órden inmediatamente superior:* y que, *todo signo, cifra ó guarismo colocado á la izquierda de otro, representa unidades*

(1) Wronski fué el primero que le dió este nombre en su *Filosofía de las Matemáticas.*

diez veces mayores que las que ese otro representa. Con la adopcion de las cifras árabes, (1) el lenguaje numerativo propio de cada idioma, y los convenios anteriores, se ha organizado el *sistema* completo de nuestra numeracion, que reconoce por base el número *diez*.

Pero como en vez de éste pudiera adoptarse otro número, conservando la forma de los convenios de numeracion independientemente de la base; fácil es comprender y formular la existencia de una ley general numerativa, afectando tantas formas, ó lo que es lo mismo, dando lugar á tantos *sistemas* distintos de numeracion, cuantas *bases* diferentes lleguen á adoptarse.

Contenida pues en la *Numeracion* la *ley general de formacion y expresion de los números; constituyen un sistema de numeracion, los convenios particulares, el lenguaje y los signos adoptados para expresar dichos números.*

Es *base* del sistema, *el número de unidades de un órden que componen una del inmediato*. La base dá nombre al sistema. Así el número *diez* es la base del sistema universalmente en uso, llamado sistema *decimal:* del mismo modo que se denominan *binario, ternario, cuaternario* ó *tetráctico, duodecimal*, etc., los sistemas que tienen respectivamente por bases los números *dos, tres, cuatro* y *doce.*

La distincion de sistemas se funda, pues, en la diversidad de las bases y altera la forma particular de los convenios referentes á cada uno, solo en cuanto hace relacion á las bases mismas. Vamos á dar una forma general á estos convenios, ya establecidos para el sistema decimal.

3. En un sistema dado de numeracion, *una unidad de cualquier órden, se compone de un número de unidades del órden anterior, igual á la base.*

En la expresion simbólica de los números, *toda cifra colocada á la izquierda de otra, representa unidades tantas veces mayores que las de esta otra, como unidades contiene la base del sistema.* En número igual al de estas mismas unidades serán, contando con el cero, las cifras que se emplearán en dicha expresion.

Como la formacion de un lenguaje especial para cada sistema exigiría un trabajo largo é innecesario para estos estudios; y como por

---

(1) Suelen tenerse por tales, por haberlas importado los árabes en Europa, por más que antiguas investigaciones hicieran creer, y recientes estudios filológicos permitan afirmar que dichas cifras tienen un origen mucho más remoto que la misma existencia de los pueblos semíticos.

otra parte, teniendo en cuenta las ideas que por las voces usadas han de representarse, puede atribuirse una acepcion general á las palabras empleadas en el sistema decimal; único que por la universalidad de su uso ha tenido parte en la formacion de los idiomas conocidos, resultando con lenguaje propio; emplearemos convencionalmente y con alguna ligera variacion etimológica las mismas palabras usadas en el sistema decimal, para la numeracion verbal de todos los demás; y las mismas cifras con igual valor absoluto: agregando cuando la base exceda de diez, para representar este y los siguientes números dígitos, las letras necesarias de nuestro alfabeto, en el órden del mismo. Sentado esto, vamos á dar idea de algunos sistemas particulares de numeracion.

4. A principios del siglo pasado presentó Leibnitz á la *Academia de Ciencias* de París, un *sistema de numeracion binaria*. Las cifras del sistema, de acuerdo con lo expuesto anteriormente, son 1 y 0; y sus convenios fundamentales, que, *dos unidades de un órden componen una del inmediato;* y que, *una cifra colocada á la izquierda de otra representa unidades dobles de las que representa esa otra.*

5. Si tratamos pues de expresar simbólicamente en el sistema binario un número escrito en el nuestro, el número 25 por ejemplo, observaremos que este se compone de veinticinco unidades de primer órden, que contienen doce veces la base, ó doce unidades de segundo órden ó pares; y una unidad simple que dejaremos representada en la forma 1. Doce unidades de segundo órden, forman exactamente seis de tercero; por lo que representaremos las unidades de segundo órden con la cifra 0. Seis unidades de tercer órden, componen exactamente tres de cuarto: se expresarán pues con 0 las de tercero. Tres unidades de cuarto órden, forman una del mismo y una de quinto; debiendo por tanto consignarse para unas y otras la cifra 1.

Reuniendo en un solo número las cifras representantes de unidades de los distintos órdenes que expresan estos resultados, tendremos:

Sistema decimal.	Sistema binario.			
	Unidades	de 1.er órden.	1.	
	Id.	de 2.º	0.	
N.º 25.	Id.	de 3.º	0.	N.º 11.001.
	Id.	de 4.º	1.	
	Id.	de 5.º	1.	

Si por el contrario tratásemos de expresar en el sistema decimal el número 11.001 escrito en el binario, haremos el siguiente razonamiento. Una unidad de quinto órden contiene dos de cuarto, de las cuales hay una mas en el número propuesto, siendo pues tres las unidades de dicho órden que este contiene; y como cada una vale dos del inmediato, las tres de cuarto contienen seis de tercero, y por la misma razon equivalen á doce de segundo órden ó á veinticuatro de primero; las cuales aumentadas en una del mismo órden contenida en el número, componen veinticinco unidades simples; que en el sistema decimal constituyen dos unidades de segundo órden y cinco de primero.

Esto puede expresarse bajo la forma siguiente:

	Sistema binario.		Sistema decimal.	
N.º 11.001..	10.000. . . .	=	. . . 16.	N.º 25.
	1.000. . . .	=	. . . 8.	
	0	=	. . . 0.	
	0	=	. . . 0.	
	1.. . . .	=	. . . 1.	

6. El sistema duodecimal ha tenido muchos partidarios, (1) y aún tiene algunos. (2) Sus cifras son las de nuestro sistema, con más las *diez* y *once* que representaremos con las letras *a* y *b*. En este sistema, *doce unidades de un órden componen una del inmediato; y toda cifra colocada á la izquierda de otra, representa unidades doce veces mayores que las de esta.*

7. El traslado de la expresion simbólica de un número del sistema decimal al duodecimal y vice-versa, se llevará á cabo teniendo presentes estas indicaciones, en la misma forma del ejemplo anterior.

Suponiendo que se trata del número decimal 1234; veremos desde luego por medio de la division, que contiene ciento dos docenas ó unidades de segundo órden, y diez unidades simples que dejaremos consignadas con la cifra *a*. Las ciento dos docenas contienen á su vez ocho docenas de ellas (3) ó unidades de tercer órden y seis de segundo; representaremos pues estas con la cifra 6, y con la cifra 8 aquellas: siendo por tanto 86*a* el número duodecimal buscado, obtenido en la siguiente forma:

(1) Buffon, D'Alembert y otros.
(2) Entre ellos Pujals de la Bastida; autor de un libro originalísimo, titulado si no recuerdo mal, *Filosofía de la numeracion:* que defiende la adopcion de la base doce con razones sumamente curiosas.
(3) En el comercio se llama *gruesa* á la docena de docenas.

Sistema decimal.	Sistema duodecimal.		
	Unidades de 1.er órden. . .	a.	
N.° 1.234.	Id. de 2.°	6.	N.° 86a.
	Id. de 3.°	8.	

Sea al contrario el número duodecimal 86a: en él, cada unidad de tercer órden vale doce de segundo; luego las ocho existentes de aquel equivaldrán á ocho veces doce, es decir, noventa y seis de este; que con seis más que el número propuesto contiene, componen ciento dos. Cada unidad de segundo órden vale doce unidades simples; luego las ciento dos contendrán el mismo número de veces doce, es decir, mil doscientas veinticuatro; que aumentadas con las a ó diez existentes, dan un total de mil doscientas treinta y cuatro unidades. Esta traduccion puede realizarse en la forma siguiente:

Sistema duodecimal.		Sistema decimal.	
	800. . . . . . = ...	1,152.	
N.° 86a. . .	60. . . . . . = ...	72.	1.234.
	a. . . . . . = ...	10.	

8. El traslado de la expresion de un número entre dos sistemas distintos del decimal, se hará pasando por este, sin dificultad alguna: así, para traducir al sistema *octaval* el número *vigesimal* 4cd, podremos hacer las dos reducciones que siguen; teniendo presente que c y d son respectivamente las cifras *doce* y *trece* del sistema dado:

SISTEMA VIGESIMAL.	Sistema decimal.		Sistema octaval.		
	$4.20^2 = 1.600.$		Unidades de 1.er órden.	5	
N.° 4cd. .	$c.20 = 240.$	N.° 1853.	Id. de 2.° . .	7	N.° 3475.
	$d. = 13.$		Id. de 3.° . .	4	
			Id. de 4.° . .	3	

Es decir, que 4cd en el sistema de base veinte, equivale á 1853 en el decimal, y á 3475 en el octaval: mas tarde sin embargo, (n.os 19 y 34) verificaremos directamente esta traduccion.

9. Además de los sistemas anteriormente expuestos, se ha estudiado algun otro; como el *cuaternario* explicado por Erad Weigel en su *Aritmética tetráctica*, publicada el año 1670: pero todos ellos, á pesar

de las ventajas reales (1) ó imaginarias que para su adopcion se ha tratado de hacer valer, han cedido hasta ahora y creemos que cederán en el porvenir, ante la universalidad del uso del decimal: universalidad que, prescindiendo de toda otra circunstancia, haría demasiado costosa para la Ciencia y para los hábitos de la vida práctica cualquier sustitucion.

§ II. *Cálculo aritmético.*

10. Definidas ya las operaciones que constituyen el cálculo aritmético, cuyas definiciones así como las demostraciones de principios que de ellas se han deducido, son independientes de la base del sistema en que se opera; podemos realizar dichas operaciones en cualquier sistema sin otra modificacion en los procedimientos que la que exija el cambio de base, y prévia la formacion de los datos elementales que para el sistema decimal conservamos en la memoria por la continuidad de su uso.

Adicion.

11. Para realizarla en un sistema de base B, colocaremos los sumandos de modo que sea fácil ver en correspondencia simétrica las unidades de cada órden, y procederemos á sumarlos; teniendo presente que B unidades de un órden constituyen una del órden superior inmediato, que debe sumarse con las de este.

Así, para reunir en uno solo los números del sistema *quincenal* 3.250*b*2*a*, 40*d*3 y *acd*40, dispondremos el cálculo en la siguiente forma:

3,250*b*2*a*	y teniendo presente que *a* vale *diez* unidades
40*d*3	*b* » *once*
*acd*40	*c* » *doce*, y
3,312*a*4*d*	*d* » *trece;* diremos:

a mas 3, igual *d;* cuya cifra de unidades dejaremos escrita: 2 y *d* son 10, y 4, 14; ó sean, 1 unidad de tercer órden y 4 de segundo que escribi-

(1) La mas importante de todas, correspondiente al sistema duodecimal, es la variedad de los divisores 2, 3, 4 y 6 de su base.

remos: 1 y b, forman c; mas d, $1a$; ó sea una unidad de cuarto órden, y a de tercero que escribiremos: 1 y 4, 5; mas c, son quince y dos, ó bien 1 unidad de quinto órden y 2 de cuarto que se dejarán escritas: 1 y 5, 6; y a, quince y uno, ó sea 1 unidad de sexto órden, y 1 de quinto que consignaremos: 1 y 2, 3 unidades de sexto órden, que se escribirán; así como las 3 de sétimo existentes en el primer sumando.

Sustraccion.

12. Despues de convenientemente colocados los términos de la sustraccion, se procederá á restar cada cifra del sustraendo de la que en el minuendo representa unidades del mismo órden, aumentada si preciso fuere en una del superior inmediato; cuyo aumento se neutralizará con otro de una unidad en la cifra inmediata del sustraendo.

Si se trata por ejemplo en el sistema de base catorce de realizar la sustraccion.

$28a4b50 - 7d20a6 = 20b2a88$, dispondremos la operacion como sigue:

$$\begin{array}{r} 28a4b50 \\ 7d20a6 \\ \hline 20b2a88. \end{array}$$

y diremos: de seis á catorce, 8, que dejaremos escrito: a mas uno son b, hasta diez y nueve, 8; cuya cifra se consignará: de uno á b, faltan a unidades de tercer órden, que escribiremos: de 2 á 4, 2: de d hasta a aumentada en catorce ó sean veinticuatro, faltan b unidades de quinto órden, que se escribirán: una y 7, 8; hasta 8, cero unidades de sexto órden, que consignaremos: así como las dos de sétimo existentes en el minuendo.

La adicion del sustraendo y el resto, comprobará la sustraccion.

Multiplicacion.

13. Fundándose el procedimiento para multiplicar números cualesquiera en el conocimiento de los productos de los números dígitos, formaremos ante todo el cuadro de estos productos en el sistema que

haya de ocuparnos, siguiendo para ello el procedimiento de adiciones llamado pitagórico; y pasaremos despues á aplicar la regla general de multiplicacion á números del sistema dado, cuya base tendremos presente.

Así, para efectuar la multiplicacion de los números *duodecimales* $a45b0$, y $32a$, formaremos la tabla pitagórica y dispondremos los cálculos en la siguiente forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	*a*	*b*
2	4	6	8	*a*	10	12	14	16	18	1*a*
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	*a*	13	18	21	26	2 *b*	34	39	42	47
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	12	19	24	2*b*	36	41	48	53	5 *a*	65
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
a	18	26	34	42	50	5*a*	68	76	84	92
b	1*a*	29	38	47	56	65	74	83	92	*a*1

$$\begin{array}{r} a45b0 \\ 32a \\ \hline 878b2 \\ 188ba \\ 27159 \\ \hline 296a5920 \end{array}$$

Hecho esto, diremos: *b* por *a*, 92, cuya cifra 2 escribiremos debajo de las unidades del multiplicador: 5 por *a*, 42, y 9, 4*b*: 4 por *a*, 34, y 4, 38: *a* por *a*, 84, y 3, 87, que escribiremos representando las unidades superiores del primer producto parcial. Para obtener el segundo, se dirá: *b* por 2, 1*a*; se escribirá la cifra *a* debajo de las *docenas* del multiplicador y se reservará la unidad obtenida de órden superior, para aumentarla al producto siguiente, continuando: 5 por 2, *a*, y 1, *b*; 4 por 2, 8; *a* por 2, 18, que se escribirá. Para el tercer producto: *b* por 3, 29; 5 por 3, 13, y 2, 15; 4 por 3, 10, y 1, 11; *a* por 3, 26, y 1, 27 que escribiremos. Despues de obtenidos los productos parciales del multiplicando por las diferentes cifras del multiplicador, escribiendo debajo de cada una de estas la primera cifra del producto correspondiente; y efectuada la adicion de todos ellos, se escribirá á la derecha del resultado un cero para neutralizar el efecto de la omision del que termina el multiplicando; teniendo finalmente:

$$a45b0.\ 32a = 296a5920.$$

La multiplicacion se comprobará del mismo modo en cualquier sistema que se opere. Sin embargo, si se hubiera de utilizar para ello el principio demostrado al tratar en el sistema decimal de la prueba por nueve de la multiplicacion, convendrá elegir por divisor el número que represente la base del sistema disminuida en una unidad; lo que nos permitirá referir las condiciones de divisibilidad de los números, á las de la suma de sus cifras (n.º 26), disfrutando las ventajas que en el sistema decimal nos hicieron preferir el divisor nueve á cualquier otro.

Así en el ejemplo propuesto, elegiremos el divisor b que representa once unidades, y haremos la comprobacion en la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} a45b0 = mb + 8 \\ 32a = mb + 4 \end{array}\right\} 8.4 = 28 = mb + a$$

$$296a5920 \ldots\ldots\ldots\ldots = mb + a$$

Division.

14. Para efectuar la de dos números en cualquier sistema de numeracion, conviene formar préviamente el cuadro de los productos del divisor por cada una de las cifras del sistema, y se aplicará despues la regla general de division; teniendo presente la base sobre que se opera, y lo expuesto anteriormente acerca de las operaciones auxiliares.

Si por ejemplo se trata de dividir los números tetrácticos 30.213 y 231, uno por otro; despues de formados los productos:

231. 1= 231
231. 2=1122, y
231. 3=2013; dispondremos la operacion

del modo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 30213 & 231 \\ \cline{2-2} 231 & 101 \\ \hline 1113 & \\ 231 & \\ \hline 222 & \end{array}$$

y diremos: 302 dividido por 231, dá de cociente 1; cuyo número que escribiremos, multiplicado por el divisor, forma el producto 231; que restado del dividendo parcial, dá como resíduo 11; colocando á la derecha de este la cifra siguiente, escribiendo en el cociente la cifra 0 obtenida de la division de 111 por 231 y escribiendo á la derecha del resto la cifra inmediata 3 del dividendo; dividiremos el número forma do 1113, por 231; obteniendo la cifra 1 que escribiremos en el lugar de las unidades del cociente; y el resíduo final 222, diferencia entre el dividendo parcial y el producto 231 del divisor por dicha cifra del cociente: esta sustraccion se podrá efectuar sin escribir el sustraendo, aunque convendrá hacerlo así hasta haberse ejercitado en las operaciones con números de cualquier sistema.

La division se comprobará multiplicando el cociente por el divisor y añadiendo al producto el resíduo; debiendo formar así un número igual al dividendo:

$$\text{Así: } 231 \,.\, 101 = 23331.$$
$$23331 + 222 = 30213.$$

Tambien podrá comprobarse la division teniendo en cuenta lo indicado en el n.º (13), determinando el resíduo por un divisor cualquiera del divisor y cociente, así como el del producto de estos dos resíduos; debiendo este último ser igual al que se obtenga directamente del dividendo disminuido en el resto de la operacion.

Así, eligiendo en nuestro ejemplo el divisor 3 por la consideracion (n.º 26) ya mencionada, tendremos:

$$30213 - 222 = 23331 = m\,3 + 0.$$
$$\left.\begin{array}{l} 231 = m\,3 + 0 \\ 101 = m\,3 + 2 \end{array}\right\} \; 2.0 = \ldots\ldots\ldots 0.$$

Potencias y raices.

15. Las potencias de los números son productos de factores idénticos; cuya circunstancia no los excluye en manera alguna de las leyes y procedimientos de multiplicacion aplicados anteriormente á sistemas de cualquier base: razon por la cual nos abstendremos para tales multiplicaciones de toda indicacion, ó más bien repeticion; puesto que la práctica de ellas no puede dar lugar á nuevas observaciones.

En cuanto á la extraccion de raíces, teniendo en cuenta que las leyes de formacion de las potencias de igual grado, de donde se derivan las reglas obtenidas para los números del sistema decimal, son independientes de la base del sistema y no sufren alteracion por la variacion de esta; deduciremos que tambien las mencionadas reglas son invariables: pero como en su aplicacion han de realizarse operaciones auxiliares, por mas que estas nos sean conocidas separadamente, las presentaremos en un ejemplo práctico que desvanezca todo género de dudas.

Si se trata de extraer en el sistema de base nueve la raiz cuadrada del número 342816, dispondremos la operacion en la siguiente forma:

	3 4'2 8'1 6	5 5 3
5^2=	2 7	
	6 2,8	1 1
115.5=	5 7.7	
	4 1 1,6	1 2 1
1213.3=	3 6 4 0	
	3 6 6	

diciendo: La raíz cuadrada del mayor (27) de los cuadrados contenidos en 34, es 5; primera cifra de la raíz buscada; (1) y la diferencia entre dicho cuadrado y 34, es 6: colocándo á la derecha de este número el grupo siguiente 28, separando una cifra, y dividiendo el número 62 por 11 duplo de la raíz hallada, obtenemos 5 para segunda cifra de la raíz; y colocándola á la derecha del divisor, multiplicando el número 115 así formado por la misma cifra y restando el producto 577 del dividendo con la cifra separada; tenemos el resto 41: á este agregaremos el grupo siguiente, y separando una cifra, dividiremos 411 por 121 duplo de 55; obteniendo finalmente la cifra 3 de las unidades, y el resíduo 366 de la raiz. Podemos por tanto concluir que $\sqrt{342816}=553$, en ménos de una unidad.

(1) Llamamos la atencion del lector sobre el hecho de encontrarse los cuadrados de los números dígitos de cualquier sistema, en la diagonal trazada en la tabla pitagórica del mismo, en direccion descendente de izquierda á derecha.

Fracciones.

16. Consideradas las fracciones ordinarias como cocientes indicados y sabiendo nosotros efectuar la division de dos números enteros en cualquier sistema, así como las demás operaciones á que dá lugar el cálculo de los números fraccionarios; bastará que hagamos constar aquí la invariabilidad y generalidad de los principios y reglas explicados para el sistema decimal, y su directa aplicacion á cualquier otro sistema de numeracion.

En cuanto á la forma de fracciones llamadas *decimales* en el sistema del mismo nombre, las llamaremos *binarias*, *ternarias*, *tetrácticas*, *duodecimales*, etc., en los sistemas que tengan la base *dos*, *tres*, *cuatro* ó *doce:* y las obtendremos, expresaremos y operaremos con ellas en igual forma que lo hemos hecho con las fracciones decimales, teniendo en cuenta el valor respectivo de la base de cada sistema y recordando nuestras reglas de traduccion de los números enteros.

Así, la fraccion ordinaria que en el sistema duodecimal contenga siete partes de doce en que se suponga dividida la unidad, se expresará bajo la forma $\frac{7}{10}$, leyéndose *siete duodécimas;* y será equivalente á la fraccion *duodecimal* 0'7.

En la reduccion de una á otra forma de fracciones, ténganse presentes los factores primos de la base de cada sistema, refiriendo á ellos lo expuesto con relacion á los factores *dos* y *cinco* en el sistema decimal.

§ III *Forma general de composicion y expresion de los números.*

17. Conocidas ya las leyes de la formacion y expresion de los números en cualquier sistema de numeracion y dada una idea de las operaciones elementales del cálculo aritmético; vamos á completar esta parte de la teoría exponiendo la forma general de composicion de los números, mediante cuyo conocimiento podremos realizar su traduccion directa entre sistemas cualesquiera.

Sean N y B dos números cualesquiera enteros, y el primero de ellos mayor que el segundo:

Supongamos efectuada la division de N por B, obteniendo de ella un cociente C y un resto r: llamemos asimismo C_1 y r_1; C_2 y r_2;... C_{n-2} y r_{n-2}; c y r_{n-1} respectivamente á los cocientes y restos de las divisiones sucesivas de C, C_1, C_2.... C_{n-2} por B; cuya série de divisiones detendremos al llegar á un cociente c menor que el divisor B. Del procedimiento seguido, deduciremos sucesivamente:

$$\begin{aligned} N &= BC + r \\ C &= BC_1 + r_1 \\ C_1 &= BC_2 + r_2 \\ &\vdots \\ C_{n-3} &= BC_{n-2} + r_{n-2} \\ C_{n-2} &= Bc + r_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando respectivamente los dos miembros de estas igualdades por 1, B, B^2... B^{n-2}, B^{n-1}, obtendremos:

$$\begin{aligned} N &= BC + r \\ BC &= B^2C_1 + Br_1 \\ B^2C_1 &= B^3C_2 + B^2r_2 \\ &\vdots \\ B^{n-2}C_{n-3} &= B^{n-1}C_{n-2} + B^{n-2}r_{n-2} \\ B^{n-1}C_{n-2} &= B^nc + B^{n-1}r_{n-1} \end{aligned}$$

Sumando ordenadamente estas igualdades y suprimiendo los términos BC, B^2C_1, B^3C_2... $B^{n-2}C_{n-3}$ y $B^{n-1}C_{n-2}$, comunes á los dos miembros de la resultante, se tendrá finalmente:

$$(a)\quad N = r + Br_1 + B^2r_2 + \dots + B^{n-2}r_{n-2} + B^{n-1}r_{n-1} + B^nc,$$

cuya fórmula general nos dice, que;

Si dividimos un número N y los cocientes sucesivos por otro número B menor que el primero, este se compondrá de; el primer resto, mas el producto del divisor B por el segundo resto, mas la segunda potencia del mismo divisor por el tercer resto, mas ... etc... hasta la potencia de un grado indicado por el número de términos obtenidos, multiplicada por el último resto, mas la potencia inmediata del divisor en cuestion por el cociente de la última division; que será aquella cuyo cociente sea menor que el divisor B.

18. Así, si dividimos por 12 el número decimal 4357 y los cocientes que sucesivamente vayan obteniéndose, en la siguiente forma:

43,5,7	12		
7 5	36,3	12	
3 7	0 3	30	12
1		6	2

tendremos: $4357=1+12.363$
pero....... $363=3+12.30$ $\Big\}$ $4357=1,+12.3+12^2.30$
pero $30=6.+12.2$, luego $\Big\}$ finalmente; $4357=1+12.3+12^2.6+12^3.2$; á cuyo resultado nos llevan igualmente la fórmula y regla que acabamos de establecer.

Ahora bien; si refiriéndonos al mismo número

$$4357 = 12^3.2 + 12^2.6 + 12.3 + 1$$

cuyos términos invertimos para mayor claridad, convenimos en que *doce* unidades de un órden constituyan una del órden inmediato; y que una cifra colccada á la izquierda de otra represente unidades *doce veces mayores* que las que esta otra representa; el número *decimal* 4357 estará expresado en el *sistema duodecimal* por el número 2631: y como lo dicho para aquel es independiente de su valor y del de las bases de los sistemas á que pertenecía y á que lo hemos trasladado; deduciremos generalizando estas consideraciones, la siguiente regla general de traduccion:

19 *Para trasladar un número de un sistema de numeracion á otro, se dividirán el número propuesto y los cocientes sucesivos, por la base del sistema á que se desea trasladarlo:* teniendo en cuenta que, tanto la expresion escrita del divisor constante, como toda la série de operaciones, habrán de ejecutarse dentro del sistema en que se halla expresado el número propuesto. Los restos sucesivos que se vayan obteniendo, traducidos si es preciso en cifras del sistema nuevo, representarán respectivamente las unidades de 1.°, 2.°, etc., órdenes del número buscado.

La ejecucion de estas operaciones no ofrecerá dificultad teniendo presente lo anteriormente explicado: y en cuanto á la escritura de la nueva base en el sistema propuesto, aunque en realidad sea un problema de la misma naturaleza que el que nos ocupa, no presenta obstáculos en la práctica, por la pequeñez relativa del número con que se opera;

y en último término, habremos reducido la cuestion á traducir un pequeño número decimal á otro sistema, cuestion resuelta ya de un modo sencillo al comienzo de la teoría.

20. Como ejercicio práctico, apliquemos la regla general enunciada, á la traduccion del número 3.450.214, escrito en el sistema de base *siete*, á los sistemas *tetráctico*, *decimal* y *quincenal*, que con el último ejemplo, comprenden todas las circunstancias que suelen presentarse en la práctica. Para mayor claridad, indicaremos la base del sistema en que escribimos los números, por medio de un pequeño número decimal escrito sobre ellos, ó por una palabra.

	Base siete		Base cuatro
Ejemplo 1.º	3450214.	=	1221202201.

Procedimiento.

```
34,5,0,2,1,4|4
 1 5        |6,3,0,0,3,6|4
   0 0 2 1  |2 3        |14,1,5,2,5|4
       3 4  |  1 0      |  3 1     |25,4,5,6|4
         1  |    3 0    |    2 5   |  3 4   |4,6,3,1|4
            |      1 3  |      3 2 |    1 5 |0 6    |11,4,2|4
            |        2 6|        3 5|     0 6|  2 3  |  0 4 |21,0|4
            |          0|          2|       2|    1 1|    0 2| 3 0|35|4
            |           |           |        |      0|       |   1| 2| 6|4
            |           |           |        |       |       |    |  | 2| 1
```

Productos de
4 . 1 = 4
4 . 2 = 11
4 . 3 = 15
4 . 4 = 22
4 . 5 = 26
4 . 6 = 33

	Base siete		Base diez
Ejemplo 2.º	3450214	=	432289

Procedimiento.

Base diez	Base siete
10 = 7 + 3 =	13

Productos de
13 . 1 = 13
13 . 2 = 26
13 . 3 = 42
13 . 4 = 55
13 . 5 = 101
13 . 6 = 114

```
34,5,0,2,1,4 |13
 5 5         |24,0,0,1,3 |13
 .0 0 2 1    | 11 0      |15,4,1,3 |13
      5 4    |    6 0    |  2 4    |115,5 |13
      1 2    |     2 1   |  1 1 1  |  1 5 |6 1 |13
             |      5 3  |   1 0 3 |   2  | 3  | 4
             |      1 1  |       2 |
```

Base siete		Base diez
12	=	9.

Base siete		Base diez
11	=	8

Ejemplo 3.º

Base siete		Base quince
3450214	=	88144

Procedimiento.

Base diez		Base siete
15=7.2 +1	=	21

Productos de
$$\begin{cases} 21\ .\ 1 = 21 \\ 21\ .\ 2 = 42 \\ 21\ .\ 3 = 63 \\ 21\ .\ 4 = 114 \\ 21\ .\ 5 = 135 \\ 21\ .\ 6 = 156 \end{cases}$$

```
34,5,0,2,1,4 |21
135          |15,0,0,1,0 |21
  0 0 2 1    |  1 2 0    |54,1,3 |21
      0 4    |     3 1   |12 1   |24,2 |21
             |    1 0 0  |  4 3  | 3 2 |11
             |        4  |    1  | 1 1 |
```

Base siete		Base quince
11	=	8

CAPITULO II.

DIVISIBILIDAD.

§ I. Caractéres generales de divisibilidad.

21. Si bien los principios generales de divisibilidad demostrados en Aritmética, son independientes de los convenios particulares de numeracion; no sucede lo mismo en cuanto se refiere á las propiedades observadas en los números del sistema decimal, de ser divisibles por ciertos números primos, cuando los valores absolutos y de posicion de sus cifras cumplen determinadas condiciones, cuya enunciacion constituye reglas prácticas de divisibilidad aplicables al sistema decimal únicamente.

Este hecho, que se reconoce fácilmente con solo recordar que los procedimientos de obtencion de las mencionadas reglas se encuentran en constante y estrecha dependencia de la base *diez* del sistema; hace necesario elevar el punto de vista seguido en el estudio de los caractéres de divisibilidad, en la medida que lo permite la generalizacion de los convenios de numeracion á sistemas de cualquier base, objeto del capítulo anterior.

Para conseguirlo, vamos á formular la composicion general de un número con relacion á un divisor cualquiera menor que la base del sistema en que está escrito, y á la figura y posicion de sus cifras, independientemente del valor particular de dicha base; demostrando al efecto el principio siguiente:

22. *Todo número N, consta con relacion á un divisor D, menor que su base, de dos partes; la primera de las cuales es múltiplo de dicho divisor, y la segunda es la suma de los productos respectivos de sus cifras por la unidad y las potencias sucesivas del resto R, de la division de la base B, por el divisor D.*

Es decir; que vamos á demostrar, que

$$N = mD + (a + Rb + R^2c + ... + R^{n-1}p + R^nq.)$$

Efectivamente: de la indicada division de B por D, se deduce: $B = mD + R$: y elevando los dos miembros de esta igualdad al cuadrado, $B^2 = mD + R^2$; del mismo modo que

$$B^3 = mD + R^3 ... \text{etc.}$$

Supongamos que esta ley de formacion rija á las potencias sucesivas de B hasta la del grado n, y tengamos por tanto

$$B^n = mD + R.^n$$

multiplicando miembro á miembro esta y la primera de las anteriores igualdades, tendremos

$$B^{n+1} = mD + R^{n+1}$$

cuya igualdad demuestra que, regida una potencia cualquiera de B por la ley observada, esta es extensiva á la potencia inmediata; y como hemos visto que rige á las tres primeras potencias segun aparece en las igualdades mencionadas, deduciremos que se extiende á la cuarta potencia; de esta á la quinta, y finalmente á todas las potencias de B.

Sustituyendo los valores de las potencias sucesivas de B obtenidos haciendo aplicacion de dicha ley, en la fórmula (a) del (núm. 17.)

$$N = r + Br_1 + B^2r_2 + ... + B^{n-2}r_{n-2} + B^{n-1}r_{n-1} + B^nc,$$

se convertirá en

$$N = r + mDr_1 + Rr_1 + mDr_2 + R^2r_2 + ... + mDc + R^nc,$$

ó bien,

$$N = r + Rr_1 + B^2r_2 + ... + R^{n-1}r_{n-1} + R^n\,c + mD$$

y representado por las cifras $abcd...pq$, los restos $r, r_1 r_2 ... r_{n-1}$ y el cociente final, obtendremos la fórmula enunciada;

$$(b)\ N = mD + (a + R\,b + R^2\,c + ... + R^{n-1}p + R^n q.)$$

23. 1.er carácter. *En todo sistema de numeracion, un número es divisible por la base, cuando termina en cero.*

Suponiendo en la fórmula anterior $D = B$, y por tanto, $R = 0$, tendremos:

$$N = mD + a$$

lo que nos dice que el número N solo será múltiplo del divisor propuesto D, cuando a lo sea: pero la cifra a, menor siempre que la base

B del sistema, no puede ser múltiplo de D = B sinó en el caso de ser cero; condicion por tanto necesaria y suficiente para que el número N sea divisible por otro D, igual á la base del sistema en que aquel se halla escrito; segun habiamos enunciado.

Considerando el número compuesto de cifras dobles ó triples, es decir formadas cada una por dos ó tres signos, con lo que vendremos á tener expresado por medio de los mismos signos el número en los sistemas de base B^2, B^3 etc., extenderemos el primer carácter expuesto, en la forma siguiente:

En todo sistema de numeracion, un número es divisible por una potencia de la base, cuando el grupo de tantas cifras de su derecha como unidades tiene el exponente de esta potencia, está formado exclusivamente por ceros: ó bien; *un número es divisible en cualquier sistema por la unidad seguida de ceros, si termina en tantos ceros cuantos siguen á la unidad en el divisor.*

24. **2.° carácter.** *Todo número que divide á la base del sistema en que otro está expresado y á su cifra de unidades divide á ese otro.*

Siendo el número de que se trata divisor de la base B y de la primera cifra a del propuesto, tendremos en la fórmula general (b, del número 22.)

B = mD, de donde se deduce que R = o; y haciendo en ella esta sustitucion, se convertirá en

$$N = mD + a$$

y teniendo presente que a es tambien múltiplo de D, tendremos finalmente,

$$N = mD$$

segun queríamos demostrar.

Debe observarse en vista de la primera de estas dos igualdades, que la divisibilidad por D del n.° N, depende de la de su cifra a de unidades, que en tal sentido se encuentra en sus mismas condiciones; es decir, que si esta cifra no es divisible por D, tampoco lo será el número; y en tal caso, el resíduo correspondiente al número, será el mismo que su cifra de unidades produzca.

25. Vamos á hacer aplicacion de lo expuesto, á números de distintos sistemas.

Supongamos B igual á diez, en cuyo caso D representará uno de los divisores 2 ó 5 de la base. En este caso, el principio anteriormente demostrado afectará, refiriéndose al sistema *decimal*, la forma particular siguiente; habida cuenta de la observacion que antecede:

En el sistema decimal de numeracion, un número será divisible por dos ó cinco, cuando lo sea su cifra de unidades.

Suponiendo B igual á seis, en cuyo caso D será igual á 2 ó á 3, el principio se enunciará;

En el sistema de base seis, un número será divisible por dos ó tres, cuando lo sea su primera cifra de la derecha.

Si B es doce ó sea $2^2 . 3$; diremos:

En el sistema duodecimal, un número es divisible por dos, por tres, por cuatro ó por seis, cuando lo sea su cifra de unidades

Si suponemos la base igual á B^2 ó B^3, etc., en estos mismos sistemas; y por consiguiente, las cifras del nuevo formadas por grupos de dos, tres ó más signos, podremos generalizar el principio á las potencias de los divisores de la base, como sigue:

En cualquier sistema de numeracion, un número es divisible por las potencias de los divisores de la base, cuando lo sea el número que forman tantas cifras de su derecha como unidades tiene el exponente respectivo de dichas potencias.

Y aplicando este principio á los mismos sistemas de base diez, seis, y doce, veremos que:

En el sistema decimal, un número es divisible por 4, 8, 16...; por 25, 125...; y en general por una potencia de 2 ó 5, cuando el número formado por tantas cifras de su derecha como unidades tenga el exponente de dicha potencia, sea divisible por ella.

En el sistema de base seis, un número será divisible en análogas circunstancias por las potencias de 2 ó de 3.

Un número duodecimal será de igual manera divisible por las potencias de 2, 3, 4 ó 6, cuando cumpla con la misma condicion.

26. 3.er carácter. *En todo sistema de numeracion, un número será divisible por cualquier divisor de la base disminuida en una unidad, cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras lo sea.*

Representando por D á este divisor, tendremos: $B - 1 = mD$, ó bien, $B = mD + 1$, de donde se deduce que $R = 1$, y lo mismo todas sus potencias R^2 R^3.... R^n, convirtiéndose por este hecho la fórmula general (b), en

$$N = mD + a + b + c + ... + p + q:$$

y llamando S á la suma de las cifras $a, b, c, ... p, q$,

$$N = mD + S.$$

Donde vemos que todo número puede considerarse compuesto de dos partes: una múltiplo siempre de D, y la otra variable, de cuyas condiciones de divisibilidad por D, dependen las del número propuesto; de manera que, si la suma de las cifras es divisible por D, el número tambien lo será, no siéndolo en el caso contrario; en este caso, el resíduo del número con relacion al divisor D, será el mismo que respecto á este divisor se obtenga de la suma referida.

Esto último puede justificarse fácilmente, suponiendo que la division de dicha suma por D produzca un resto r, en cuyo caso, $S = mD + r$; y sustituyendo este valor de S en la igualdad anterior,

$$N = mD + S, \text{ tendremos:}$$
$$N = mD + mD + r, \text{ ó bien}$$
$$N = mD + r,$$

que justifica nuestra observacion.

27. Apliquemos lo expuesto á algunos sistemas particulares de numeracion.

Suponiendo B igual á diez, en cuyo caso $B - 1 = 9$; y teniendo en cuenta que los divisores de este último número son 3 y 9, diremos:

En el sistema de numeracion decimal un número será divisible por tres ó nueve, cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras lo sea; y en el caso contrario, la division del número por 3 ó 9 producirá el mismo resto que la mencionada suma.

Suponiendo B igual á *ciento* y por tanto $B - 1$ igual á *noventa y nueve*, cuyos divisores primos son *tres, nueve y once;* y ocupándonos solo de este último por tener ya los anteriores comprendidos en una regla más sencilla; veremos que:

En el sistema decimal, un número es divisible por 11, cuando lo sea la suma de sus grupos de dos cifras, contando de derecha á izquierda.

Suponiendo B igual á *mil,* ó $B - 1$ igual á nuevecientos noventa y nueve, que á su vez lo es á tres elevado al cubo por treinta y siete; deduciremos, que:

En el mismo sistema, un número será divisible por 3, 9, 27 ó 37, cuando la suma de sus grupos de tres cifras á partir de las unidades, lo sea.

Si suponemos $B = 7$, sería $B - 1 = 6 = 2 . 3$; de donde se deduce que:

En el sistema de base siete, un número es divisible por dos, por tres, ó por seis, cuando lo sea la suma de los valores absolutos de sus cifras.

En las mismas circunstancias se encontrará cualquier número *undecimal* con relacion á los divisores *dos, cinco* y *diez;* ó un número *duodecimal* respecto al divisor *once*, ó sea *b*.

28. **4.º carácter.** *En cualquier sistema de numeracion, un número será divisible por cada uno de los divisores de su base aumentada en una unidad, cuando lo sea el exceso de la suma de sus cifras de órden impar sobre la de las cifras de órden par.*

Siendo D uno de estos divisores, tendremos:

$B + 1 = mD$: ó bien, $B = mD - 1$: de donde se deduce que $R = -1$, siéndolo por tanto todas sus potencias impares, R^3, R^5, R^7.....; y que $R^2 = 1$, así como todas las potencias pares, R^4, R^6..... cuyos valores sustituidos en la fórmula general (*b*), la convierten en

$$N = mD + a - b + c - d + e \ldots\ldots; \text{ ó bien}$$
$$N = mD + (a + c + e + \ldots) - (b + d + \ldots):$$

Y llamando S á la primer suma y S' á la segunda,

$N = mD + (S - S')$; y representando esta diferencia por D; $N = mD \pm d$, segun que S sea mayor ó menor que S'; lo que demuestra el principio enunciado.

Obsérvese que, siendo el número propuesto un múltiplo de D, aumentado en el exceso de la suma de las cifras de órden impar sobre la de las de órden par, ó disminuido en el exceso de esta sobre aquella; el resíduo de la division del número, por D, será el mismo que esta diferencia produzca; ó lo que le falte para ser igual á un múltiplo de D; segun que la primera suma S, sea mayor ó menor que la segunda S'.

Efectivamente; llamando *r* al resto de la division de *d* por D, tendremos:

$d = mD + r$: cuyo valor sustituido en la igualdad anterior, la convierte en

$$N = mD \pm (mD + r); \text{ ó bien}$$
$$N = mD \pm mD \pm r; \text{ ó}$$

$N = mD \pm r$: y suponiendo $D - r = r'$, tendremos separadamente

$$N = mD + r, \text{ para el caso en que } S > S';$$
$$\text{y } N = mD - r, \text{ ó } N = mD + (D - r), \text{ ó bien}$$
$$N = mD + r', \text{ cuando por el contrario sea } S' > S.$$

29. Aplicando lo expuesto al sistema de base *diez*, tendremos B + 1 igual á once; de donde se deduce que:

En el sistema decimal, un número es ó nó divisible por once, segun lo sea la diferencia entre las sumas de sus cifras de lugar par é impar.

Si B se supone igual á *ciento*, B + 1 lo será á ciento uno; pudiendo decirse que;

En el mismo sistema, un número es divisible por 101, cuando separado á partir de las unidades en grupos de dos cifras, lo sea el exceso de la suma de los grupos de órden impar sobre la de los de órden par.

Siendo la base *mil*, B + 1 será mil y uno, igual á 7 . 11 . 13: de consiguiente;

Un número decimal es divisible por 7, 11 ó 13, cuando separado á partir de las unidades en grupos de tres cifras, lo sea la diferencia entre la suma de los grupos de órden impar y la de los de órden par.

Si suponemos B = 9, en cuyo caso B + 1 será diez ó 2 . 5; tendremos que;

En el sistema de base nueve, un número es divisible por dos, por cinco ó por diez, cuando lo sea el esceso de la suma de sus cifras de órden impar sobre la de las de órden par.

El mismo carácter de divisibilidad ofrecerá un número *duodecimal* respecto al divisor *trece;* ó un número *undecimal* respecto al divisor *doce*, y á cualquiera de sus factores *dos, tres, cuatro* y *seis.*

30. Recapitulando, aun á riesgo de cansar con la repeticion al lector; los caracteres particulares de divisibilidad obtenidos en el estudio precedente para los números del sistema decimal, con relacion á varios divisores primos; tendremos la siguiente *coleccion de hechos*, que se traducen en otras tantas reglas prácticas, algunas de ellas ya obtenidas directamente en el estudio del mismo sistema:

1.° *Un número decimal es divisible por 2, cuando termina en cero ó cifra par.* (2.° carácter.)

2.° *Un número será divisible por 3, cuando lo sea la suma de los valores absolutos de sus cifras, ó de sus grupos de dos ó de tres cifras* (1)*: y en caso contrario, el resto de la division del número por*

(1) Fácil es observar que sucederá lo mismo sumando grupos de cuatro ó más cifras; puesto que dicha suma dará siempre á su vez una suma de valores absolutos igual á la que se obtendria directamente del número propuesto.

3, *será el mismo que se obtenga dividiendo por 3 cualquiera de las sumas mencionadas.* (3.er carácter.)

3.º *Un número es divisible por 5, si termina en alguna de las cifras* 0 *ó* 5. (2.º carácter.)

4.º *Un número será divisible por 7, cuando divididas sus cifras en grupos de tres á partir de las unidades, lo sea el exceso de la suma de los grupos de órden impar sobre la de los de órden par; ó el de esta sobre aquella; y cuando nó, el resto de la division del número por 7, será el mismo que se obtenga dividiendo por siete dicho exceso, en el primer caso; ó la diferencia entre dicho resíduo y el mismo divisor 7 en el segundo.* (4.º carácter.)

5.º *Un número será divisible por* 11, *cuando lo sea la suma de sus grupos de dos cifras; ó la diferencia entre sus cifras de órden impar y par; ó entre sus grupos de tres cifras de los mismos órdenes: determinándose el resto en la forma ya expresada.* (Caractéres 3.º y 4.º)

6.º *Un número será divisible por* 13, *cuando lo sea el exceso de la suma de sus grupos (de tres cifras) de órden impar sobre la de los de órden par; repitiéndose la consideracion anterior acerca del resto, en caso contrario.* (4.º carácter.)

7.º *Un número es divisible por* 37, *cuando lo es la suma de sus grupos de tres cifras; produciendo sinó igual resíduo que dicha suma.* (3.er carácter.)

8.º *Un número será divisible por* 101, *cuando dividido en grupos de dos cifras, lo sea la diferencia entre la suma de los grupos de órden impar y las de los de órden par: el resto será en caso contrario el mismo que arroje dicha diferéncia, ó su complemento al divisor.* (4.º carácter.)

Las trece condiciones de divisibilidad que anteceden son de fácil aplicacion en la práctica; como puede verse refiriendo cada una de ellas al número 112.222111; producto aumentado en una unidad de todos los factores mencionados; por cuya razon debe obtenerse y se obtiene efectivamente 1 como *resíduo* con relacion á cada uno de dichos divisores.

31. Y volviendo á nuestra teoría: de la consideracion de los principios demostrados, deduciremos el siguiente procedimiento general de investigacion.

Cuando en un sistema de numeracion de base B, se trate de determinar los caractéres de divisibilidad por un divisor dado D; *examinaremos los números B, B — 1, y B + 1 que descompondremos en sus factores primos, así como el divisor D; hecho esto, y en virtud de los principios demostrados (24, 26 y 28) anteriormente, formularemos los caracteres de divisibilidad correspondientes á cada uno de los factores primos contenidos en D, y reuniéndolos, tendremos las condiciones de divisibilidad por dicho divisor.*

Propongámonos como ejemplo conocer en el sistema duodecimal la condicion de divisibilidad por el número 29, teniendo en cuenta que este número es igual al número decimal $33 = 3.11 \times$ (1) y observando que el 1.º de estos factores (3) es divisor de la base y el 2.º (11) lo es de la base disminuida en una unidad, deduciremos que;

Un número duodecimal será divisible por 29 cuando su cifra de unidades sea múltiplo de tres (0, 3, 6 ó 9) y la suma de los valores absolutos de sus cifras lo sea de once, (ó bien b.)

§ II. **Factores primos.**

32. La cualidad de *primos* atribuida á los números que no tienen otro divisor que la unidad, es independiente de su forma de expresion; siendo por tanto aplicables á cualquier sistema los principios demostrados en Aritmética para dicha clase de números, é invariables los hechos observados en el sistema decimal.

La série de los números primos contiene pues los mismos términos en cualquier sistema; por más que cada número primo afecte una forma distinta segun el sistema de numeracion en que se le exprese. Así el número primo *decimal* 13, tendrá la forma *duodecimal* 11 y la *tetráctica* 31 en las tablas respectivas correspondientes á estos sistemas.

33. Sentados estos precedentes, vamos á descomponer en sus factores primos algunos números de sistemas distintos.

(1) Descomponiendo directamente en el sistema duodecimal el número 29 en sus factores primos, se obtiene el mismo sistema 3. b: véase el T.ª del n.º 34.

En la base *diez*, $(b = 11)$... ... $2.\ 3^2.\ 11 = 198$
En la base *ocho*, $(b = 13)$... ... $2.\ 3^2.\ 13 = 306$

Es decir; que el número

Duodecimal.		Decimal.		Octaval.
146	=	198	=	306

Este procedimiento que el autor no ha tenido ocasion de ver hasta hoy en ningun tratado de Aritmética, es muy ventajoso cuando los factores primos del número propuesto son números pequeños, y mucho más si constan de una sola cifra.

FIN DE LA TEORÍA.

TABLAS PITAGÓRICAS

Ó

DE PRODUCTOS DE LOS NÚMEROS DÍGITOS

CORRESPONDIENTES Á DISTINTOS SISTEMAS DE NUMERACION.

Sistema ternario.

1	2
2	11

Sistema tetráctico.

1	2	3
2	10	12
3	12	21

Sistema de base cinco.

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Sistema de base seis.

1	2	3	4	5
2	4	10	12	14
3	10	13	20	23
4	12	20	24	32
5	14	23	32	41

Base siete.

1	2	3	4	5	6
2	4	6	11	13	15
3	6	12	15	21	24
4	11	15	22	26	33
5	13	21	26	34	42
6	15	24	33	42	51

Base ocho.

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	10	12	14	16
3	6	11	14	17	22	25
4	10	14	20	24	30	34
5	12	17	24	31	36	43
6	14	22	30	36	44	52
7	16	25	34	43	52	61

Base nueve.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	6	8	11	13	15	17
3	6	10	13	16	20	23	26
4	8	13	17	22	26	31	35
5	11	16	22	27	33	38	44
6	13	20	26	33	40	46	53
7	15	23	31	38	46	54	62
8	17	26	35	44	53	62	71

Base once.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	*a*
2	4	6	8	*a*	11	13	15	17	19
3	6	9	11	14	17	1*a*	22	25	28
4	8	11	15	19	22	26	2*a*	33	37
5	*a*	14	19	23	28	32	37	41	46
6	11	17	22	28	33	39	44	4*a*	55
7	13	1*a*	26	32	39	45	51	58	64
8	15	22	2*a*	37	44	51	59	66	73
9	17	25	33	41	4*a*	58	66	74	82
a	19	28	37	46	55	64	73	82	91

Base trece.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	*a*	*b*	*c*
2	4	6	8	*a*	*c*	11	13	15	17	19	1*b*
3	6	9	*c*	12	15	18	1*b*	21	24	27	2*a*
4	8	*c*	13	17	1*b*	22	26	2*a*	31	35	39
5	*a*	12	17	1*c*	24	29	31	36	3*b*	43	48
6	*c*	15	1*b*	24	2*a*	33	39	42	48	51	57
7	11	18	22	29	33	3*a*	44	4*b*	55	5*c*	66
8	13	1*b*	26	31	39	44	4*c*	57	62	6*a*	75
9	15	21	2*a*	36	42	4*b*	57	63	6*c*	78	84
a	17	24	31	3*b*	48	55	62	6*c*	79	86	93
b	19	27	35	43	51	5*c*	6*a*	78	86	94	*a*2
c	1*b*	2*a*	39	48	57	66	75	84	93	*a*2	*b*1

Base catorce.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	*a*	*b*	*c*	*d*
2	4	6	8	*a*	*c*	10	12	14	16	18	1*a*	1*c*
3	6	9	*c*	11	14	17	1*a*	1*d*	22	25	28	2*b*
4	8	*c*	12	16	1*a*	20	24	28	2*c*	32	36	3*a*
5	*a*	11	16	1*b*	22	27	2*c*	33	38	3*d*	44	49
6	*c*	14	1*a*	22	28	30	36	3*c*	44	4*a*	52	58
7	10	17	20	27	30	37	40	47	50	57	60	67
8	12	1*a*	24	2*c*	36	40	48	52	5*a*	64	6*c*	76
9	14	1*d*	28	33	3*c*	47	52	5*b*	66	71	7*a*	85
a	16	22	2*c*	38	44	50	5*a*	66	72	7*c*	88	94
b	18	25	32	3*d*	4*a*	57	64	71	7*c*	89	96	*a*3
c	1*a*	28	36	44	52	60	6*c*	7*a*	88	96	*a*4	*b*2
d	1*c*	2*b*	3*a*	49	58	67	76	85	94	*a*3	*b*2	*c*1

Base quince.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
2	4	6	8	*a*	*c*	*e*	11	13	15	17	19	1*b*	1*d*
3	6	9	*c*	10	13	16	19	1*c*	20	23	26	29	2*c*
4	8	*c*	11	15	19	1*d*	22	26	2*a*	2*e*	33	37	3*b*
5	*a*	10	15	1*a*	20	25	2*a*	30	35	3*a*	40	45	4*a*
6	*c*	13	19	20	26	2*c*	33	39	40	46	4*c*	53	59
7	*e*	16	1*d*	25	2*c*	34	3*b*	43	4*a*	52	59	61	68
8	11	19	22	2*a*	33	3*b*	44	4*c*	55	5*d*	66	6*e*	77
9	13	1*c*	26	30	39	43	4*c*	56	60	69	73	7*c*	86
a	15	20	2*a*	35	40	4*a*	55	60	6*a*	75	80	8*a*	95
b	17	23	2*e*	3*a*	46	52	5*d*	69	75	81	8*c*	98	*a*4
c	19	26	33	40	4*c*	59	66	73	80	8*c*	99	*a*6	*b*3
d	1*b*	29	37	45	53	61	6*e*	7*c*	8*a*	98	*a*6	*b*4	*c*2
e	1*d*	2*c*	3*b*	4*a*	59	68	77	86	95	*a*4	*b*3	*c*2	*d*1

Base diez y seis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
2	4	6	8	a	c	e	10	12	14	16	18	1a	1c	1e
3	6	9	c	f	12	15	18	1b	1e	21	24	27	2a	2d
4	8	c	10	14	18	1c	20	24	28	2c	30	34	38	3c
5	a	f	14	19	1e	23	28	2d	32	37	3c	41	46	4b
6	c	12	18	1e	24	2a	30	36	3c	42	48	4e	54	5a
7	e	15	1c	23	2a	31	38	3f	46	4d	54	5b	62	69
8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	12	1b	24	2d	36	3f	48	51	5a	63	6c	75	7e	87
a	14	1e	28	32	3c	46	50	5a	64	6e	78	82	8c	96
b	16	21	2c	37	42	4d	58	63	6e	79	84	8f	9a	a5
c	18	24	30	3c	48	54	60	6c	78	84	90	9c	a8	b4
d	1a	27	34	41	4e	5b	68	75	82	8f	9c	a9	b6	c3
c	1c	2a	38	46	54	62	70	7e	8c	9a	a8	b6	c4	d2
f	1e	2d	3c	4b	5a	69	78	87	96	a5	b4	c3	d2	e1

Base diez y ocho.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	g	h
2	4	6	8	a	c	e	g	10	12	14	16	18	1a	1c	1e	1g
3	6	9	c	f	10	13	16	19	1c	1f	20	23	26	29	2c	2f
4	8	c	g	12	16	1a	1e	20	24	28	2c	2g	32	36	3a	3e
5	a	f	12	17	1c	1h	24	29	2e	31	36	3b	3g	43	48	4d
6	c	10	16	1c	20	26	2c	30	36	3c	40	46	4c	50	56	5c
7	e	13	1a	1h	26	2d	32	39	3g	45	4c	51	58	5f	64	6b
8	g	16	1e	24	2c	32	3a	40	48	4g	56	5e	64	6c	72	7a
9	10	19	20	29	30	39	40	49	50	59	60	69	70	79	80	89
a	12	1c	24	2e	36	3g	48	50	5a	62	6c	74	7e	86	8g	98
b	14	1f	28	31	3c	45	4g	59	62	6d	76	7h	8a	93	9e	a7
c	16	20	2c	36	40	4c	56	60	6c	76	80	8c	96	a0	ac	b6
d	18	23	2g	3b	46	51	5e	69	74	7h	8c	97	a2	af	ba	c5
e	1a	26	32	3g	4c	58	64	70	7e	8a	96	a2	ag	bc	c8	d4
f	1c	29	36	43	50	5f	6c	79	86	93	a0	af	bc	c9	d6	e3
g	1e	2c	3a	48	56	64	72	80	8g	9e	ac	ba	c8	d6	e4	f2
h	1g	2f	3e	4d	5c	6b	7a	89	98	a7	b6	c5	d4	e3	f2	g1

SUMARIO.

CAPÍTULO I.

SISTEMAS DE NUMERACION.

§ I. *Idea de los sistemas distintos de numeracion.*

1. Algorítmia: Aritmética: cálculo aritmético: numeracion. — 2. Sistema: base: distincion de sistemas. — 3. Forma general de los convenios de numeracion: lenguage. — 4. Exposicion del sistema binario. — 5. Traduccion al sistema binario de un número expresado en el decimal, y vice-versa. — 6. Exposicion del sistema duodecimal. — 7. Traduccion de un número entre los sistemas decimal y duodecimal. — 8. Traslado de la expresion de un número de un sistema cualquiera á otro, pasando por el decimal. — 9. Indicaciones acerca de otros sistemas de numeracion, y ventajas de la adopcion de alguno.

§ II. *Cálculo aritmético.*

10. Realizacion de las operaciones aritméticas en cualquier sistema. — 11. Adicion: procedimiento: aplicacion á un ejemplo práctico. — 12. Sustraccion: procedimiento: aplicacion práctica: comprobacion. — 13. Multiplicacion: productos de los números dígitos: procedimiento: aplicacion: prueba. — 14. Division: procedimiento: aplicacion: prueba. — 15. Elevacion á potencias y extraccion de raices: ejemplo. — 16. Fracciones: idea del cálculo y traduccion entre distintas formas fraccionarias.

§ III *Forma general de composicion y expresion de los números.*

17. Composicion general de un número en cualquier sistema: fórmula: su traduccion al lenguage ordinario. — 18. Aplicacion á un número de un sistema dado: convenio: generalizacion. — 19. Regla general de traduccion directa de los números de cualquier sistema á otro.— 20. Ejemplos prácticos.

CAPITULO II.

DIVISIBILIDAD.

§ I. *Caractéres generales de divisibilidad.*

21. Dependencia de las condiciones de divisibilidad de los números del sistema decimal respecto á la base de este.—22. Forma de composicion de un número con relacion á un divisor menor que la base del sistema en que está escrito, y al resíduo de la division de la misma base por dicho divisor. — 23. Caracteres de divisibilidad por la base del sistema y sus potencias.—24. Caracteres de divisibilidad por los divisores de la base y las potencias de los mismos. — 25. Aplicaciones á determinados sistemas. — 26. Caracteres de divisibilidad por los divisores de la base disminuida en una unidad.—27. Aplicacion á sistemas particulares.— 28. Caracteres de divisibilidad por los divisores de la base aumentada en una unidad.—29. Aplicaciones.—30. Recapitulacion de los caracteres de divisibilidad de los números del sistema decimal, por los primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 37 y 101, determinados en el estudio precedente.—31. Determinacion de los caracteres de divisibilidad por un divisor cualquiera: ejemplo práctico.

§ II. *Factores primos.*

32. Consideraciones generales acerca de los números primos, y de la forma y série de ellos, en cualquier sistema de numeracion.—33. Descomposicion de los números de cualquier sistema, en sus factores primos: ejemplos prácticos.—34. Teorema: Corolario: nuevo procedimiento de traduccion directa de los números entre sistemas cualesquiera.—35. Ejemplos.

TABLAS

de productos de los números dígitos, en los sistemas de base *tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, once, trece, catorce, quince, diez y seis y diez y ocho.*

Véndese á UNA PESETA en las principales librerías de España.

ROBLES. NUMERACION Y DIVISIBILIDAD.