

Los Problemas de Fermi y las Modelling Eliciting Activities como un recurso para fomentar la Modelización Matemática entre el alumnado de Educación Primaria

Fermi Problems and Modelling Eliciting Activities as a resource to promote Mathematical Modelling among Primary School students

XIMENA TOALONGO^A, CÉSAR TRELLES^B Y ÁNGEL ALSINA^C

^{A y C} Universitat de Girona, ^B Universidad de Cuenca (Ecuador)

^A ximetoalongo@gmail.com, ^B cesar.trellesz@ucuenca.edu.ec, ^C angel.alsina@udg.edu

^A <https://orcid.org/0000-0001-6163-4574>, ^B <https://orcid.org/0000-0002-4096-8353>, ^C <https://orcid.org/0000-0001-8506-1838>

Recibido/Received: Mayo de 2024. Aceptado/Accepted: Julio de 2024.

Cómo citar/How to cite: Toalongo, X., Trelles, C. y Alsina, Á. (2024). Los Problemas de Fermi y las Modelling Eliciting Activities como un recurso para fomentar la Modelización Matemática entre el alumnado de Educación Primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 13(1), 58-92. DOI: <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2024.58-92>

Artículo de acceso abierto distribuido bajo una [Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional \(CC-BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). / Open access article under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License \(CC-BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Resumen: La modelización matemática ocupa un lugar relevante en la investigación educativa internacional. En este contexto, el presente estudio trata sobre una actividad de modelización matemática diseñada y elaborada a partir de los planteamientos teóricos tanto de los problemas de Fermi como de las *Modelling Eliciting Activities (MEA's)*. El objetivo del estudio es describir y comprender los procesos de modelización matemática a través de las producciones y reacciones de alumnos ecuatorianos de Educación Primaria (10-11 años) cuando resuelven una de estas actividades. Se utilizó un enfoque metodológico mixto a través de un diseño de estudio de caso intensivo. Los resultados muestran que el alumnado, a pesar de no tener experiencia previa con estas actividades, es capaz de comprender el problema, establecer conjeturas, suposiciones y proponer ideas de solución. Se concluye que estas actividades presentan grandes ventajas para el desarrollo de las habilidades de modelización del alumnado de esta etapa educativa.

Palabras clave: Modelización matemática; Problemas de Fermi; *Modelling eliciting activities*; Ciclo de modelización; Educación Primaria

Abstract: Mathematical modelling occupies a relevant place in international educational research. In this context, the present study deals with a mathematical modelling activity designed and elaborated from the theoretical approaches of both Fermi problems and Modelling Eliciting Activities (MEA's). The aim of the study is to describe and understand the processes of mathematical modelling through the productions and reactions of Ecuadorian primary school students (10-11 years old) when they solve one of these activities. A mixed methodological approach was used through an intensive case study design. The results show that students, despite having no previous experience with these activities, are able to understand the problem, make conjectures and assumptions, and propose ideas for solutions. It is concluded that these activities have great advantages for the development of modelling skills of students at this educational stage.

Keywords: Mathematical modelling; Fermi problems; Modelling eliciting activities; Modelling cycle; Primary education

INTRODUCCIÓN

La investigación en educación matemática en los últimos años ha otorgado gran importancia a la modelización, focalizándose sobre todo en cómo puede favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Trelles-Zambrano y Alsina, 2017). Como muestra de ello, en la actualidad son numerosas las investigaciones educativas cuyo objeto de estudio es la modelización matemática (e.g., Barquero et al., 2018; Barquero y Jessen, 2020; Daher, 2021; Ferrando y Albarracín, 2021; Florensa et al., 2020; Jung et al., 2019; Lu y Kaiser, 2022; Montero y Vargas, 2022; Toalongo et al., 2021; Toalongo et al., 2022; Trelles et al., 2022a; Trelles et al., 2022b; Vargas et al., 2018). Podemos observar también como las principales reuniones de matemática educativa a nivel internacional, como por ejemplo el *International Congress on Mathematical Education* (ICME), el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM) o la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), entre otras, han designado espacios específicos para discutir acerca de la modelización matemática y sus implicaciones en los procesos de enseñanza - aprendizaje.

Además, varias organizaciones de prestigio internacional plantean, ya sea de forma explícita o implícita, la importancia que tiene la modelización matemática en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989) expresa la importancia y necesidad de desarrollar la comprensión de modelos matemáticos, haciendo énfasis en que los conocimientos matemáticos deben servir para modelizar, analizar, describir, evaluar y tomar decisiones

sobre problemas de la vida real. *La Organization for Economic Cooperation and Development* (OECD, 2023), define la competencia matemática como la capacidad que posee un individuo para razonar matemáticamente, así como para formular, emplear e interpretar la Matemática para resolver problemas en una variedad de contextos del mundo. Esto incluye utilizar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas que permitan describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a las personas a conocer el papel que la Matemática juega en el mundo, además de colaborar en la elaboración de juicios bien fundados y en la toma de las decisiones que necesita un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo del siglo XXI. Asimismo, para la OECD una de las siete capacidades fundamentales es la *matematización*, es decir, la capacidad para transformar un problema del mundo real a una forma estrictamente matemática, que es la esencia de la modelización.

Por lo expuesto, es necesario continuar con esta importante línea de investigación, y hacerlo desde diferentes aristas contribuirá significativamente a comprender la modelización matemática en todas sus dimensiones. En este sentido, Albarracín y Gorgorió (2019) señalan que los problemas de Fermi son adecuados para introducir la modelización en Educación Primaria, ya que propician la estimación de cantidades desconocidas en una situación real de la que no se conocen los datos. Adicionalmente, considerando que los problemas de Fermi tienen algunos puntos en común con las *Modelling Eliciting Activities*, es necesario el diseño y elaboración de nuevas actividades a partir de estos planteamientos.

En consecuencia, uno de los aspectos importantes a investigar es cómo reaccionan los alumnos de Educación Primaria al enfrentarse a actividades de modelización matemática, en la línea ya iniciada por English (2006, 2010, 2014), English y Watson (2018), Ruiz-Higueras et al. (2013) y Trelles et al. (2022a), entre otros. En este sentido, el objetivo de esta investigación es describir y comprender los procesos de modelización matemática a través de las producciones y reacciones de alumnos ecuatorianos de Educación Primaria (10-11 años) cuando resuelven una de estas actividades.

1. MARCO TEÓRICO

1. 1 La modelización matemática

En la literatura podemos encontrar fácilmente varias definiciones de modelización matemática. Por ejemplo, para Alsina et al. (2007), la modelización matemática consiste en un proceso en el cual se construye un modelo con el propósito de comprender y explicar un fenómeno real o matemático y para ello se necesitan constantes traducciones entre la realidad y las matemáticas.

Algunos autores tratan de dar una definición más apegada al ámbito educativo, en consecuencia, son estas las que se asumen en este estudio. Por ejemplo, Bliss y Libertini (2019) y Blum y Borromeo (2009) plantean que la modelización matemática se debe entender como un proceso en el que a través de la matemática se pretende predecir o proporcionar información acerca de los fenómenos del mundo real, lo que implica realizar traducciones entre el mundo real y las matemáticas. Para Aymerich y Albarracín (2022) “la modelización matemática es un proceso de resolución de problemas contextualizados en las que se elabora un modelo matemático para describir el fenómeno real estudiado” (p. 4). Trigueros Gaisman (2006, p. 1210), manifiesta:

Cuando hablamos de modelación en la enseñanza nos referimos a proporcionar a los estudiantes problemas suficientemente abiertos y complejos en los que puedan poner en juego su conocimiento previo y sus habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno en cuestión en términos matemáticos y mediante la revisión, la reflexión, la aplicación de sus conocimientos y la comunicación de sus resultados con la idea de que se acerquen a los procesos que se llevan a cabo en la actividad científica.

1. 2 El ciclo de modelización

Uno de los aspectos característicos de la modelización matemática es que se desarrolla a través de procesos no lineales, consecuentemente varios autores (e.g., Carreira et al., 2011; Geiger, 2011; Girnat y Eichler, 2011; Greefrath, 2011) proponen entenderla a través de ciclos de modelización. Si bien las diferentes propuestas presentan varias similitudes, para nuestro estudio asumimos el ciclo de modelización del Blum y Leiß (2007) que se presenta en la Figura 1.

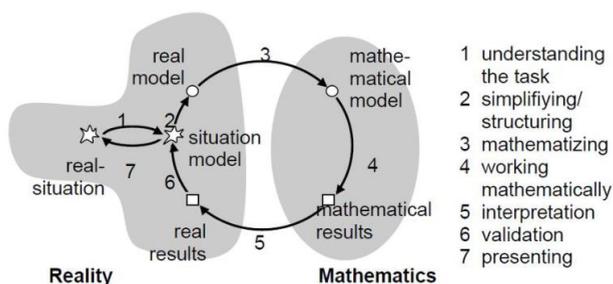


Figura 1. Ciclo de modelización matemática (Blum y Leiß, 2007)

Al ser un proceso no lineal e iterativo, se entiende que el alumnado al enfrentarse a actividades de modelización matemática puede transitar de forma no ordenada por cada una de las fases del ciclo, siendo estas: 1) comprender el problema, la tarea o la actividad; 2) simplificar y estructurar el problema a partir de sus datos y variables; 3) matematizar el problema a partir de las relaciones existentes entre las variables del problema y mediante el uso de objetos matemáticos; 4) trabajo matemático que permita obtener resultados matemáticos; 5) interpretar los resultados obtenidos de acuerdo a las características del problema; 6) validación, a partir de juzgar si el modelo obtenido soluciona el problema; y 7) presentación, donde el alumnado explica a los demás el modelo obtenido.

Si bien el ciclo de modelización antes descrito contribuye a tener una idea bastante aproximada de cómo se desarrollan los procesos de modelización, consideramos importante contar con varios indicadores en cada una de las fases del ciclo que permitan realizar un minucioso análisis de la producción de los alumnos al enfrentarse a actividades de modelización matemática, y que a su vez consideren los niveles educativos a los cuales pertenece el alumnado. Al respecto, con el propósito de evaluar los procesos de modelización matemática existen en la literatura varios planteamientos, por ejemplo: Leong (2012), Tekin-Dede y Bukova-Güzel (2018) o Turner et al. (2021); sin embargo, por lo explicado anteriormente, en nuestro estudio se asume la herramienta en forma de rúbrica denominada *Rubric for Evaluating Mathematical Modelling Processes (REMMP)*, desarrollada por Toalongo et al. (2022).

1. 3 Las *model-eliciting activities (MEA's)*

Son varias las propuestas existentes para implementar la modelización matemática en el proceso de enseñanza - aprendizaje, por ejemplo,

Albarracín (2017), Ferrando y Navarro (2015), Gallart et al. (2019) o Trelles-Zambrano et al. (2019), entre otras. En nuestro estudio, asumimos las *Model-eliciting activities (MEA's)*, propuestas por Lesh et al. (2000) y Lesh y Doerr (2003). Estas actividades están fundamentadas en seis principios: 1) construcción, 2) realidad, 3) autoevaluación, 4) documentación, 5) prototipo efectivo, y 6) generalización. Además, estas actividades se caracterizan por ser abiertas, lo que implica que no existen respuestas únicas, ni siquiera respuestas incorrectas, tan solo unas más eficaces que otras de acuerdo a las condiciones iniciales del problema y a los supuestos planteados por el alumnado. Otra característica es que se trabajan normalmente en grupos reducidos de máximo cuatro alumnos, su duración es de aproximadamente dos o tres sesiones de clase, y normalmente se pide al alumnado que mediante una carta asesore a las personas o instituciones que tienen interés en conocer la solución del problema; aquí explicarán detalladamente los procesos utilizados para la solución.

1. 4 Los problemas de Fermi

De acuerdo con Ärlebäck (2009), los problemas de Fermi son enunciados que proponen problemas de situaciones abiertas y no estandarizadas. Estas situaciones pretenden que el alumnado, a través de sus conocimientos previos, estructure ideas y dé respuesta a las necesidades de esa situación en particular. Para ello, se usa la estimación de cantidades como estrategia que permite dar respuestas mediante cálculos sencillos, de acuerdo con su nivel de escolaridad.

En este sentido, para Sriraman y Knott (2009), los problemas de Fermi deben ser considerados como problemas que permitan al alumnado estimar cantidades ante una situación particular, de tal manera que, de forma didáctica, se parta de ideas iniciales a través de operaciones sencillas hasta concluir con cálculos que requieren más fundamentación en cuanto a cantidades y variables para dar respuesta al problema.

Finalmente, es importante mencionar que se pueden realizar actividades de modelización matemática recogiendo algunos de los planteamientos de los problemas de Fermi. Así, por ejemplo, según Ärlebäck (2011) la utilización de problemas de Fermi en las aulas contribuye a que los alumnos se acerquen a actividades de modelización matemática, por las siguientes razones: a) pueden ser desarrolladas por el alumnado en cualquier etapa escolar sin poseer un conocimiento específico

en matemáticas, b) desarrollan la capacidad de estructurar y seleccionar información importante para la resolución del problema, c) desarrollan estrategias específicas de acuerdo al problema que se presenta, d) los alumnos están en capacidad de estimar cantidades sin que posean datos numéricos específicos, y e) fomenta el pensamiento crítico, la reflexión y la argumentación frente al punto de vista de otros alumnos.

1. 5 La modelización matemática en las primeras etapas educativas

Tradicionalmente, la modelización matemática ha sido implementada en los procesos de enseñanza - aprendizaje de niveles educativos superiores, fundamentalmente en la educación secundaria, universitaria, así como en la formación del profesorado (Barquero et al., 2014; Hernández-Martínez y Vos, 2018; Segura et al., 2023; Sol et al., 2011; Trelles-Zambrano et al., 2019). En consecuencia, son aún escasas las investigaciones que abordan el uso de la modelización matemática en las primeras etapas educativas, a pesar de que documentos elaborados por importantes organizaciones como el NCTM (2000) y la *National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers* (2010) recomiendan implementarla en las aulas desde los primeros niveles escolares.

Si bien en estas edades las investigaciones aún son limitadas, los trabajos pioneros de English (1996, 1997, 2004, 2006, 2010) permiten tener evidencia acerca del desarrollo de los procesos de modelización del alumnado de estos niveles. Concretamente, plantean que la modelización matemática propicia que los niños desarrollen ideas propias y procesos matemáticos en el marco de la resolución de problemas reales. Por su parte, investigaciones más recientes como las de Alsina et al. (2021), English (2014), English y Watson (2018), Ruiz-Higueras y García (2011), Ruiz-Higueras et al. (2013), Toalongo et al. (2022) o Trelles et al. (2022a, 2022b) permiten comprender los procesos de modelización matemática desde diferentes enfoques, como, por ejemplo, desde el punto de vista numérico, algebraico, geométrico y estadístico. A su vez, Toalongo et al. (2021) sugieren que los procesos de modelización matemática pueden ser desarrollados incluso por alumnado de Educación Infantil, logrando una verdadera conexión de significados de los objetos matemáticos y su utilidad en la vida cotidiana.

En cuanto a Educación Primaria, los problemas de Fermi son accesibles para los estudiantes de este nivel ya que no requieren

conocimientos previos de cursos superiores, sino más bien razonamientos de tipo aritmético y algunas nociones de estimación de medidas. Para autores como Albarracín y Gorgorió (2019), estos problemas pueden ser considerados como problemas de modelización “en miniatura”, lo que hace que sean completamente pertinentes para este nivel educativo. No obstante, para su implementación adecuada en el aula es conveniente la capacitación del profesorado, pues estudios como los de Segura y Ferrando (2023) dan cuenta de la dificultad que pueden tener con estos problemas inclusive algunos profesores.

En lo que concierne al tratamiento que se da a la modelización matemática en los documentos curriculares dirigidos a estos niveles educativos, Trelles-Zambrano y Alsina (2017) han realizado un estudio de estos documentos en países como España, Ecuador y Estados Unidos, identificando que la modelización matemática está presente y que uno de los aspectos comunes es la implementación progresiva de los procesos de modelización, siendo los modelos concretos y los modelos gráfico-visuales los que predominan en los currículos de estas edades.

Por todo ello, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo se dan los procesos de modelización en la producción y reacción de los alumnos ecuatorianos de educación primaria cuando resuelven actividades diseñadas a partir de los problemas de Fermi y las MEA's?

2. METODOLOGÍA

La investigación responde al paradigma interpretativo, con un enfoque metodológico de diseño mixto, concretamente cualitativo-cuantitativo (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018), es decir, con una preponderancia del enfoque cualitativo. En lo referente al enfoque cualitativo, se ha diseñado un estudio de caso descriptivo (Coller, 2005; Yin, 2018) con el propósito de identificar y describir los elementos clave del objeto de estudio, y realizar un estudio en profundidad del caso seleccionado. Un estudio de caso es un estudio intensivo de un solo caso o un pequeño número de casos que se basa en datos de observación y promete arrojar luz sobre una población más grande de casos (Gerring, 2017); de acuerdo con esto una de las principales características es estudiar el caso en profundidad, el mismo debe proporcionar importante evidencia para el argumento, logrando así una generalización analítica.

Las unidades de análisis son los 882 diálogos y producciones realizados por los participantes de la investigación, las categorías guardan

relación con la fundamentación teórica explicada en el anterior apartado y están formadas por cada fase del ciclo de modelización.

En lo referente al enfoque cuantitativo, se realizó un análisis de contenido cuantitativo (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018; Krippendorff, 2018), con el propósito de determinar qué fase del ciclo de modelización tiene una mayor presencia en el estudio del caso seleccionado.

2. 1 Participantes

La actividad se desarrolló dentro de un curso de 24 alumnos —14 niñas y 10 niños— de sexto grado de Educación General Básica de una institución privada de la ciudad de Cuenca-Ecuador, de edades comprendidas entre 10 y 11 años. El nivel socioeconómico al que pertenece el alumnado se puede catalogar como medio. El rendimiento académico de los alumnos en la asignatura de Matemáticas está en un promedio de 8.00/10, lo que corresponde a Alcanzar los Aprendizajes (AA) de acuerdo con el Artículo 26 del Reglamento a la Ley Orgánica de Educación Intercultural de Ecuador. Ningún alumno tenía experiencia previa en el trabajo con actividades de modelización matemática, debido a que estas actividades tienen poca o nula presencia en el currículo ecuatoriano (véase, por ejemplo, la investigación de Trelles et al., 2022b).

La actividad analizada en este estudio fue desarrollada por dos niñas de 10 años. El rendimiento académico de una de las niñas es de 10/10 y de la otra es de 9,5/10 en la asignatura de Matemáticas, lo que corresponde a la escala cualitativa de Dominio de los aprendizajes (DA), de acuerdo con el Artículo 26 del Reglamento a la Ley Orgánica de Educación Intercultural anteriormente mencionado.

2. 2 Diseño y aplicación de la actividad

La actividad fue ideada y diseñada por los autores siguiendo los planteamientos teóricos de las *Modelling Eliciting Activities* (MEA's) y los problemas de Fermi. La actividad pretende que el alumnado proponga un método para calcular el número de perros en cualquier ciudadela de Cuenca-Ecuador, y que mediante una carta expliquen los procedimientos utilizados.

Como se ha indicado, se aplicó una primera actividad a los 24 alumnos descritos en el apartado anterior, en la que se les pidió que se organizaran

por parejas según afinidad y establecieron un método para calcular el número de perros en una de las ciudadelas que queda cerca de la institución educativa. En esta parte se dieron indicaciones generales a todo el grupo y uno de los investigadores acompañó en el proceso del desarrollo de la actividad para orientar a las parejas que requieran alguna aclaración, la misma tuvo una duración de 80 minutos.

A continuación, con los resultados obtenidos, se seleccionó a la pareja que realizó la mejor propuesta en la primera parte de la actividad. Después de dos días, a esta pareja se le planteó otra actividad (Figura 2), a través de la denominada técnica de *upscaling* (Albarracín et al., 2022) que sirve como andamiaje para promover procesos de modelización gradualmente más complejos. Concretamente, la nueva actividad consistía en calcular el número de perros en cualquier ciudadela.

ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA, BASADA EN LOS PROBLEMAS DE FERMI Y LAS
MODELLING ELICITING ACTIVITIES



Estimados estudiantes, lean con atención el siguiente párrafo:

El Ministerio del Ambiente del Ecuador, piensa desarrollar una campaña de desparasitación a todos los perros de la ciudad. Empezará por cada ciudadela, para ello necesitan que ustedes les ayuden con lo siguiente: ellos no conocen el número exacto de cuántos perros hay, por lo tanto, les piden que ustedes se inventen una forma para calcular el número de perros en cualquier ciudadela.

No deben apresurarse en dar simplemente un número, es decir, hagan todas las suposiciones que crean necesarias y realicen todos los dibujos, gráficos, cálculos, etc., que crean convenientes para saber el número de perros en cualquier ciudadela. Todo lo que realicen escribanlo en su hoja de trabajo, para que al final mediante una carta le expliquen al Ministerio este procedimiento inventado por ustedes.

Adelante y éxitos en la actividad, desde ya el Ministerio y la ciudad de Cuenca les agradece por su ayuda.



Figura 2. Actividad de Modelización matemática

Fuente: Elaboración propia

Con el propósito de concentrarnos en la producción de estas alumnas, se acompañó a las niñas durante toda la sesión de trabajo, para estudiar el trabajo desarrollado y formular preguntas clave que permitan desarrollar la capacidad de modelización en las alumnas. La sesión tuvo una duración de 123 minutos, con breves pausas, toda la sesión fue videograbada para luego ser transcrita, analizada y codificada.

2.3. Análisis de Datos

El desarrollo de la actividad fue videograbado y posteriormente transcrito, a partir de la siguiente codificación: niña 1 (N1), niña 2 (N2) e investigadora (I). Con estos datos se realizó un análisis de contenido de carácter cualitativo, realizado por separado por los autores; específicamente se optó por un análisis inductivo, tomando como referente la herramienta REMMP (Toalongo et al., 2022), como se ha señalado anteriormente.

En la Tabla 1 se presentan los indicadores de la rúbrica para analizar los procesos de modelización matemática en Educación Primaria.

Tabla 1. Indicadores del instrumento REMMP para educación primaria

Fases	Educación Primaria
1. Comprensión	1.1. Explica el problema a los compañeros y al profesor, mostrando cómo relaciona el contenido utilizando los conocimientos previos. 1.2. Plantea preguntas sobre el problema. 1.3. Enuncia el tipo de solución que generaría el problema, por ejemplo, un número, un rango de valores, un conjunto de valores, una gráfica, una fórmula, una tabla, etc. 1.4. Representa mediante dibujos las principales características del problema. 1.5. Expresa lo que aportaría al entorno la solución del problema.
2. Estructuración	2.1. Identifica los datos que se conocen, se pueden conocer y se desconocen en el problema. 2.2. Propone ideas y/o supuestos que contribuyan a la simplificación del problema.
3. Matematización	3.1. Sustituye los elementos reales por objetos matemáticos.

	3.2. Justifica el uso de objetos matemáticos de acuerdo con las características del problema.
	3.3. Identifica todos los parámetros matemáticos presentes en el problema y las relaciones entre ellos.
4. Trabajo matemático	4.1. Utiliza diversas estrategias acordes a su edad que permiten proponer soluciones al problema.
	4.2. Utiliza objetos matemáticos y opera con ellos para resolver el problema.
	4.3. Obtiene un modelo matemático inicial como resultado de un trabajo previo.
5. Interpretación	5.1. Comprueba la coherencia de la solución matemática aplicada al contexto real inicial.
	5.2. Identifica las posibles limitaciones o restricciones de la solución matemática en el contexto real inicial.
6. Validación	6.1. Justifica el modelo propuesto mediante argumentos válidos.
	6.2. Valora si el modelo obtenido proporciona una solución parcial o total al problema inicial.
	6.3. Identifica si el modelo es siempre válido o si se requieren cambios para hacerlo generalizable a nuevas situaciones.
7. Presentación	7.1. Explica las razones de las decisiones tomadas a lo largo de cada fase del proceso.
	7.2. Explica el modelo obtenido aplicado a la situación del contexto real, su alcance y limitaciones utilizando un lenguaje adecuado a su edad.
	7.3. Utiliza diferentes tipos de ejemplos, representaciones, diagramas, dibujos, gráficos, tablas de valores, lenguaje simbólico, etc.
	7.4. En el caso de utilización de tecnología en una o varias fases del proceso, indica claramente en qué momento, cómo y para qué se utilizó.
	7.5. Escucha las observaciones y/o sugerencias planteadas por los compañeros y/o el profesor.
	7.6. Responde a las observaciones y/o sugerencias de los compañeros y del profesor, utilizando un lenguaje acorde a su edad.
	7.7. Si en el proceso se utilizaron caminos que no condujeron a ninguna solución, reflexiona sobre ellos y socializa sus principales aspectos.
	7.8. Analiza críticamente las presentaciones realizadas por los compañeros de clase.

Fuente: Toalongo et al. (2022, p.10-11)

Una vez clasificados los datos en las correspondientes categorías, se procedió a realizar un análisis de contenido cuantitativo (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018; Krippendorff, 2018), con el propósito de identificar qué fases del ciclo de modelización están más presentes en la realización de la actividad. Finalmente, debido a la naturaleza de los datos y con el propósito de presentarlos sistemáticamente, el desarrollo de la actividad se dividió en tres grandes momentos:

- Momento 1: Denominado de Exploración, corresponde a la identificación de las variables relevantes para desarrollar un modelo de la situación que conlleva a una primera estructuración y matematización más intuitiva.
- Momento 2: Pre-modelo matemático, se desarrollan más las ideas del momento 1 y se plantea un modelo matemático parcial.
- Momento 3: Modelo matemático final, se completa el modelo a partir de lo trabajado en los momentos 1 y 2 y se comunican los resultados a través de la carta.

3. RESULTADOS

Luego del respectivo estudio de los datos, se presentan tres tablas que representan tres momentos en el desarrollo de la actividad.

La Tabla 2 se corresponde con el momento 1, y presenta cómo las dos alumnas inician su tránsito por las diferentes fases del ciclo de modelización en busca de posibles alternativas. De esta forma contextualizan el problema de acuerdo con sus conocimientos previos y su entorno, logrando una identificación de las variables relevantes del problema, para desarrollar un modelo de la situación que conlleva a una primera estructuración y matematización más intuitiva.

Tabla 2. Análisis de los datos generados por las alumnas (momento 1)

N.º de diálogo	Participante	Diálogo	Fase correspondiente del ciclo de modelización / Ítem de acuerdo con la rúbrica
19	I	Como ven piden calcular el número de perros en cualquier ciudadela	
23	N1	¿Y no podemos ver la forma de la ciudadela en Google Maps?	Comprensión / 1.2
24	I	Podría ser, ya. ¿Está clara la actividad?	
25	N1 y N2	Sí (responden simultáneamente)	
28	I	Entonces qué podemos hacer, ¿qué haríamos primero?	
29	N2	Dibujar la ciudadela	
30	N1	Inventarnos la forma de la ciudadela	Estructuración / 2.2
31	I	...el momento que se van a inventar la forma de la ciudadela qué es lo primero que debería aparecer, o sea, más bien dicho, qué es lo más importante que va a aparecer en la ciudadela	
32	N1	Las casas, las calles	Comprensión / 1.1
36	N1	Y también en las calles	
37	I	¿Cómo es eso de las calles?	
38	N2	Hay perros callejeros	Comprensión / 1.1
41	I	Muy bien, entonces comencemos, ya	
	N1 y N2	N1 y N2 inician sus dibujos en sus respectivas hojas	
42	N1	¿Deben ser rectas las líneas?	Comprensión / 1.2
43	I	¿Qué cree usted? [hace una pausa] ¿las calles son rectas siempre?	
44	N1	No	Comprensión / 1.1
46	N1	Esta calle es un poco rara [dibuja una línea inclinada]	Matematización / 3.1
		Se toman su tiempo para realizar el dibujo	

47	N1	Ya está, esta es mi ciudadela [muestra de dibujo un cuadrilátero]	Matematización / 3.1
58	N2	En la mayoría de casas de mi urbanización hay muchos perros, demasiados	Comprensión / 1.1
65	I	Muy bien, ¿y esto de acá qué es N2? [señala la hoja de N2]	
66	N2	El resto de la ciudadela [muestra el gráfico de su hoja]	
71	N2	[N2 marca una equis dentro de uno de los pequeños rectángulos de su gráfico]	Matematización / 3.1
72	I	¿Qué significa esa equis, N2?	
73	N2	Que ahí nadie vive	Comprensión / 1.1
79	N2	Aquí hay un perro [señala un punto en el gráfico], aquí hay otro perro [señala otro punto en el gráfico], aquí hay otro perro [señala otro punto en el gráfico]... y los gatos no cuentan	Matematización / 3.1
81	N2	Aquí hay 5 perros si no estoy mal [sigue señalando puntos en el gráfico], aquí hay 6 perros, listo. Hay 5 perros en una casa de mi urbanización.	Comprensión / 1.1

En los diálogos de la Tabla 3, correspondiente al momento 2 se observa que las alumnas a través de preguntas por parte de la investigadora continúan su tránsito por las fases del ciclo de modelización de una forma no lineal, aquí las niñas desarrollan una propuesta parcial de solución acorde a las representaciones planteadas en el primer momento.

Tabla 3. Análisis de los datos generados por las alumnas (momento 2)

N.º de diálogo	Participante	Diálogo	Fase correspondiente del ciclo de modelización / Ítem de acuerdo con la rúbrica
106	I	Ya, una vez que tenemos los dibujos N1 y N2, ¿qué más tendríamos que hacer, ya tenemos el dibujo de una ciudadela hecha por N1 y una ciudadela hecha por N2, ahora ¿qué podríamos hacer?, ¿qué deberíamos hacer?	
107	N2	Contar los perros	
115	N1	Las casas, que hay	
117	N2	Dónde hay perros, y luego contar los perros	Estructuración / 2.2
121	N1	1, 2, 3, ... 18, 19, 20, 21	Matematización / 3.1
134	I	¿Ya está todo? ¿Cuántas casas hay en total?	
135	N1	39	
139	N1	[Continúa con la parte del gráfico que faltaba] 40, 41, 42, 43, ... 85	Matematización / 3.1
143	I	Entonces N2 ¿Cuántas en la tuya?	
148	N2	[Cuenta] 1, 2, 3, ... 50	Matematización / 3.1
156	I	¿Cómo podríamos saber cuántos perros hay, por ejemplo, en la que tiene 50 casas? ¿Y cuántos perros hay en la que tiene 85 casas?	
182	I	¿Entonces qué más tendríamos que hacer ahora?	
184	N2	Multiplicación, mmm sumar	Estructuración / 2.2
186	N1	No, primero deberíamos de restar el 85 menos las casas que están deshabilitadas	Estructuración / 2.2

190	N1	85-3. Ya acabé [muestra en su hoja la operación realizada $85-3=82$]	Trabajo matemático / 4.2
191	I	Perfecto	
192	N2	[Escribe en su hoja la operación de forma vertical $50-1=49$], listo	Trabajo matemático / 4.2
195	I	En estas 49 casas y en estas 82 casas, ¿qué pasaría en estas? En estas casas que ustedes han obtenido como respuesta	
196	N1	Que si hay personas	Interpretación / 5.1
197	I	Si hay personas, y el hecho de que haya personas, significa que...	
198	N1	Tal vez, puede haber perros	Interpretación / 5.1
200	N1	Seguro hay perros y en otras no han de haber perros	Comprensión / 1.1
215	I	Como podríamos saber cuáles sí tienen perros y cuales no	
235	N1	Estaba haciendo que 9 casas tienen perros, 10 perros aquí en toda la ciudadela, pero sería poco	Comprensión / 1.1
239	N1	Porque si es que hay 82 casas, es muy poco que haya 10 perros en total	Interpretación / 5.1
241	N2	La idea que yo propongo es que pongan el número de casas que hay en la ciudadela y le resten por las casas que tienen perros	Estructuración / 2.2
243	N2	Y de ahí, esas casas que tienen perros, mmm [piensa] tengo que sumar los perros que viven en cada casa	
244	N1	¿Pero si no sabemos el número de perros que hay en cada casa?	Comprensión / 1.2
247	I	Qué tal si, si es que, pensamos en esta calle de aquí [señala la calle que queda frente a la escuela] que ustedes conocen. ¿Cuántas casas habrá en esta calle?	
248	N2	¿Unas 15?	Matematización / 3.1

249	N1	Mmm [piensa] tal vez unas 9	
254	N2	¿12?	Comprensión / 1.2
255	I	¿Por qué el 12?	
258	N1	Porque tal vez es el número del medio que está entre el 15 y el 9 [lo expresa con una ligera duda]	Trabajo matemático / 4.1
344	I	De esas 12 casas ¿cuántas tendrán perros?	
346	N2	La de lado, mmm, la del otro... la siguiente allí al lado [indica con el dedo en señal de ubicación de casas]	Comprensión / 1.1
352	N2	Mmm [piensa] unos seis	Matematización / 3.1
353	I	Unas 6, muy bien, ¿cuántas casas había?	
354	N2	12	Matematización / 3.1
355	I	Y ustedes dicen que las 6 tienen perros	
357	I	Ya, el 6 qué es para el 12	
361	N2	La mitad	Matematización / 3.3

La Tabla 4 que forma parte del momento 3, presenta como las niñas hacen uso de los análisis que han desarrollado durante el momento 1 y 2, de esta manera se acercan a la solución final del problema.

Tabla 4. Análisis de los datos generados por las alumnas (momento 3)

N.º de diálogo	Participante	Diálogo	Fase correspondiente del ciclo de modelización / Ítem de acuerdo con la rúbrica
446	I	¿Cuál es la idea para saber el número de perros?	
447	N1	Tal vez podríamos dividir el 41 para el 2	Estructuración / 2.2
448	I	Pero, ¿qué era este 41?	
449	N1	El 41 era el número de casas con perros	Matematización / 3.1
460	I	N1 y N2, N2 ha dicho que hay 24 casas que tienen perros y N1 ha dicho que en la ciudadela que ella dibujó hay 41 casas que tienen perros. Atención a esta pregunta, N2 y N1 muy atentas a esta pregunta ¿cuántos perros habría en cada casa?, ¿cuántos perros vamos a poner que hay en cada casa?	
463	N1	Yo pondría unos 2	Comprensión / 1.1
492	I	Haber veamos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... [cuenta en la hoja con el dedo] bien, hay 15 perros aquí en el dibujo de N2, hay 15 perros en 8 casas	
493	N1	Y tal vez podríamos hacer esos 15 dividido para 8	Estructuración / 2.2
552	I	Entonces, si es que tengo 41 casas [señala en la hoja de trabajo] y digo que en cada casa hay 2 perros, cuántos perros hay	
564	N1	me da 82	Trabajo matemático / 4.2
596	I	Pero ¿ya con eso estaríamos? O falta o hay que poner algo más	
599	N1	No creo [piensa mirando a I]	Estructuración / 2.1
602	I	Había unos perros que ustedes dijeron antes	

603	N2	Que eran callejeros	Comprensión / 1.1
604	I	Eso, ahora ¿cuántos callejeros pondríamos?	
605	N2	Yo aquí [mira en sus otras hojas] hay, aquí tengo yo 6 callejeros	Comprensión / 1.1
636	I	Si, entonces les podríamos decir al ministerio que no sabe cómo calcular los perros, ¿le podríamos decir como una secuencia de operaciones para que ellos determinen el número de perros?	
637	N1 y N2	Sí, responden simultáneamente	Comprensión / 1.1

A continuación, en la Figura 3, se presentan los dibujos de las dos niñas que representan cada una de las ciudadelas con las que realizaron el trabajo.

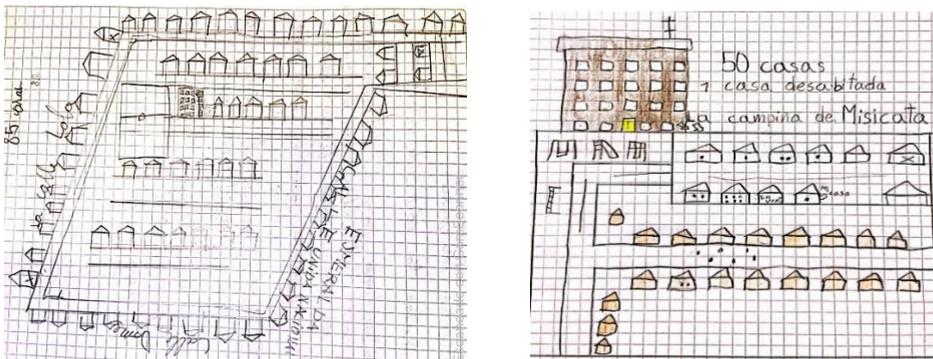


Figura 3. Representación de la ciudadela de la niña N1 (izquierda) y de la niña N2 (derecha)

Finalmente, la investigadora pregunta a las alumnas cuál es el procedimiento seguido para sumar los perros callejeros, las niñas utilizan el concepto de media aritmética y proponen que al final se deben sumar 5 perros callejeros; esto debido a que N1 en su trabajo sumó cuatro perros callejeros y N2 sumó 6. La síntesis del procedimiento se puede observar en la carta redactada por las niñas (Figura 4).

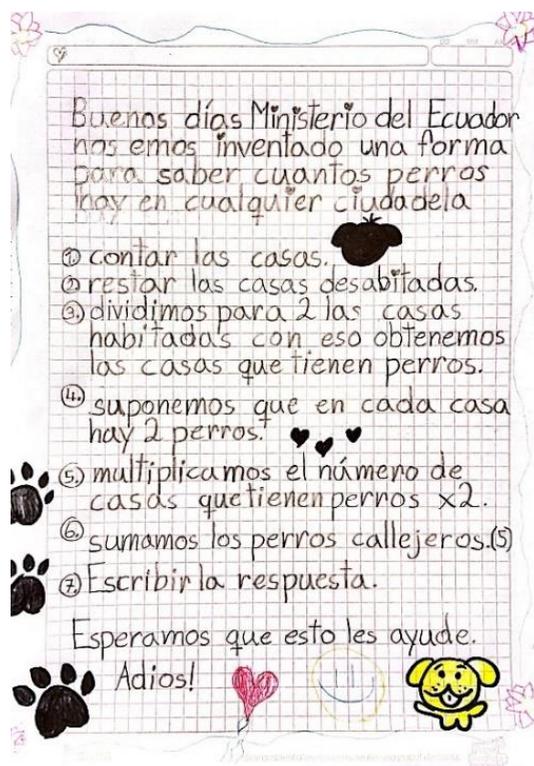


Figura 4. Carta redactada por las niñas
Fuente: Elaboración de las alumnas

Al cuantificar las fases por las que transitaron las dos alumnas al desarrollar la actividad, se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5. Cuantificación de las fases del ciclo de modelización presentes en el desarrollo de la actividad

Fases	Total	%
Comprensión	119	34,10
Estructuración	65	18,62
Matematización	54	15,47
Trabajo matemático	82	23,50
Interpretación	18	5,16
Validación	11	3,15
Presentación	0	0
Total	349	100

Es importante mencionar que dentro de las 882 unidades de análisis están los diálogos planteados por la investigadora, los mismos que no son categorizados dentro de las fases del ciclo de modelización, ya que esto hace alusión exclusiva a la producción de las alumnas. Así mismo, existen algunos diálogos que no son relevantes y que no pertenecen a ninguna de las fases del ciclo de modelización. También conviene aclarar que la fase correspondiente a la Exposición/Presentación no estuvo presente en el desarrollo de la actividad, esto se debe fundamentalmente al diseño del estudio, pues las características del diseño no posibilitaron que las alumnas presenten el trabajo ante sus pares.

4. DISCUSIÓN

En este estudio se ha analizado la producción de alumnos ecuatorianos de Educación Primaria al enfrentarse a una actividad de modelización matemática considerando los problemas de Fermi en combinación con los planteamientos teóricos de las *Modelling Eliciting Activities (MEA's)*. Los resultados obtenidos a partir de las producciones de dos alumnas evidencian que, a pesar de no haber tenido experiencia previa con actividades de modelización matemática, son capaces de comprender el problema, realizar suposiciones, conjeturas y proponer estrategias de solución, aspectos que, usualmente, están descuidados en los planes de estudio de matemáticas. Desde esta perspectiva, English (2010) afirma que normalmente no se expone al alumnado ante el desarrollo de eficaces procesos matemáticos, tan útiles para resolver los problemas actuales y futuros de la sociedad contemporánea. En la misma línea de ideas, coincidimos con Trelles et al. (2022a) en que es imperante entregar al alumnado problemas contextualizados, altamente significativos y que desafíen sus procesos de pensamiento.

El modelo elaborado por las alumnas pone de manifiesto la capacidad que tienen para hacer uso de conocimientos extramatemáticos, relacionarlos con la situación propuesta y proponer ideas de solución que se ajusten a las condiciones del problema. Esto coincide con los hallazgos de Trelles et al. (2022a), quienes afirman que los alumnos participantes en su investigación fueron capaces de relacionar aspectos extramatemáticos y decidir cómo estos aspectos pueden incidir en los datos; además, concuerda con los estudios previos que tratan específicamente sobre los problemas de Fermi como los de Henza y Fritzlär (2010) y Sriraman y Knott (2009).

Según los datos obtenidos, se evidencia que las alumnas transitan con mayor frecuencia por la fase denominada Comprensión. Esto sugiere que lograron un alto nivel de entendimiento del problema, lo cual es corroborado por el hecho de que alcanzaron a proponer una solución a través de un modelo. Sin embargo, estos resultados conviene interpretarlos con cautela, pues la subrepresentación de una fase del ciclo de modelización no necesariamente representa una debilidad, así como una sobrerepresentación una fortaleza. Consideramos que esto está en función de la naturaleza del problema, en ocasiones podría darse que la fase más transitada por los alumnos sea precisamente la que más dificultad les generó. Esto conlleva a pensar que lo más probable en un problema de modelización es que el alumnado transite con distinta frecuencia por cada una de las fases de ciclo.

Nuestros hallazgos coinciden con Kaygisiz y Şenel (2023), quienes describen que en su investigación los trabajos de los alumnos demostraron que la competencia de comprensión se había alcanzado en un nivel satisfactorio, pues los alumnos asociaron el problema con sus conocimientos previos y relacionaron la situación del problema con la vida real. No obstante, estos investigadores reportaron que el alumnado participante en su investigación tuvo dificultades para dibujar la representación del problema, resultados que difieren de nuestros hallazgos, ya que en nuestro estudio las dos niñas no presentaron dificultad para representar el problema mediante un dibujo.

Además, consideramos que la interacción de las dos alumnas en el desarrollo de la actividad de modelización les permitió fortalecer capacidades comunicativas, así como intercambiar ideas, pensamientos y formas de representación que les facilitan desarrollar el pensamiento matemático. Estos aspectos son coincidentes con los hallazgos de Segura et al. (2023) al trabajar con los Problemas de Fermi con estudiantes de educación superior. Para Brady (2018) y Jung y Brady (2023), los alumnos, cuando se enfrentan a actividades de modelización, pueden utilizar herramientas representacionales para imaginar una variedad de fenómenos en el mundo real que pueden ser capturados por esas herramientas; este trabajo imaginativo ayuda a condicionar sus formas de ver y les apoya en la producción reflexiva de matematizaciones. A su vez, esto apoya las lecturas críticas de los alumnos sobre sus propios modelos o modelos creados por sus compañeros. Asimismo, para Zubi et al. (2018), los alumnos aprendieron diferentes conocimientos de parte de sus compañeros al enfrentarse a actividades de modelización.

En cuanto a las fases de Estructuración y Matematización, se puede notar que están presentes en el desarrollo de la actividad en mayor medida en el momento 2, pues estas son esenciales para acercarse al planteamiento del modelo final. Estudios como los de Årlebäck y Bergsten (2010) y Sriraman y Knott (2009), enfocados en los problemas de Fermi, muestran que una estrategia válida consiste en dividir un problema en subproblemas y hacer suposiciones o estimaciones parciales para cada uno de ellos. Al final, es conveniente encadenar estos resultados parciales a través de relaciones que conduzcan a la solución, en la misma línea de lo propuesto por Taggart et al. (2007).

Una de las fases menos presente en el desarrollo de la actividad fue la Validación. De manera similar, Zubi et al. (2018), Ji (2012) y Tekin-Dede y Yilmaz (2013) encontraron que el alumnado con o sin experiencia en modelización presentaba dificultades al validar el modelo. Zubi et al. (2018) concluyen que, en su investigación, se examinaron las competencias de modelación de los alumnos y se observaron que estos se desempeñaron en el nivel deseado en términos de comprensión, simplificación, matematización y trabajo matemático. Sin embargo, su desempeño fue inadecuado o parcialmente adecuado en las fases de interpretación y verificación, hallazgos que coinciden en su gran mayoría con los nuestros.

Un aspecto que merece también la atención, y que ya ha sido manifestado por varios investigadores, como por ejemplo Toalongo et al. (2021), tiene que ver con el hecho de que los procesos de modelización siguen una estructura no lineal, es decir, los alumnos transitan de forma desordenada por cada una de las fases del ciclo de modelización.

Consideramos también que la combinación de los problemas de Fermi con actividades de modelización matemática pueden resultar una estrategia interesante para afianzar el conocimiento matemático en el alumnado. En esta misma línea, diversos autores (e.g., Albarracín y Gorgorió, 2019; Habertzettl et al., 2018) han subrayado que los problemas de Fermi pueden constituirse en un primer acercamiento del alumnado hacia la modelización. No obstante, recomendamos que para su elaboración se consideren los intereses de los alumnos, así como la formación del profesorado para su implementación.

5. CONCLUSIONES

La actividad fue ideada y diseñada por el equipo investigador partiendo de los intereses del alumnado, en este caso, las mascotas. A pesar de que las dos participantes no tenían experiencia previa en el desarrollo de estas actividades, se evidenció la capacidad que tienen para enfrentarse a actividades de este estilo, situación que sugiere que actividades como estas deberían estar más presentes en la planificación del profesorado.

Uno de los aspectos relevantes es el potencial que tienen las alumnas para intercambiar ideas, realizar conjeturas, suposiciones, relacionar conocimientos previos con la situación problemática, utilizar objetos matemáticos para representar problemas de la vida real y de realizar un aprendizaje conjunto. Sin embargo, estas situaciones difícilmente ocurren de manera espontánea, pues es preciso que el currículo, así como el profesorado, promuevan el desarrollo de actividades de modelización matemática en las aulas. Para ello, los problemas de Fermi, en combinación con las características de las actividades de modelización matemática, podrían ser una buena alternativa.

La formación del profesorado para diseñar actividades de modelización, orientar al alumnado en su desarrollo y evaluar sus respectivos procesos se convierten en un aspecto fundamental, pues en cualquier contexto comprender los procesos de pensamiento emergentes del alumnado es mucho más complicado que imponerles nuestro propio modelo.

Una de las principales limitaciones del estudio es que trata de un estudio de caso intensivo, concretamente del estudio en profundidad del trabajo de una pareja de niñas de 10 años con un alto dominio de los aprendizajes; por lo tanto, los resultados de este estudio no pueden generalizarse a todos los niños de esta edad. Sin embargo, existe la posibilidad de seguir estudiando más actividades de modelización matemática con otros niños de esta misma edad o incluso con grupos de diferentes edades en distintos contextos educativos.

Una segunda limitación del estudio tiene que ver con la imposibilidad de que las alumnas expongan sus trabajos ante sus pares y que estos a su vez también den opiniones para la mejora del modelo, para ello se necesita previamente que todo el grupo de alumnos hayan trabajado en la misma actividad. Sin embargo, queda abierta esta modalidad para futuras investigaciones.

Finalmente, consideramos importante ejecutar propuestas innovadoras en la clase de matemáticas, que propicien el desarrollo del pensamiento y la creatividad en el alumnado, para así contribuir al alcance de la competencia matemática, tan necesaria en la sociedad contemporánea.

REFERENCIAS

- Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(2), 117-135. <https://doi.org/10.4995/msel.2017.7707>
- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2019). Using large number estimation problems in primary education classrooms to introduce mathematical modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 27(2), 45-57. <https://doi.org/10.30722/IJISME.27.02.004>
- Albarracín, L., Segura, C., Ferrando, I. y Gorgorió, N. (2022). Supporting mathematical modelling by upscaling real context in a sequence of tasks. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 41(3), 183-197. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrab027>
- Alsina, Á., Toalongo, X., Trelles, C. y Salgado, M. (2021). Desarrollando habilidades de modelización matemática temprana en Educación Infantil: un análisis comparativo en 3 y 5 años. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática*, 30(1), 74-93. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23654>
- Alsina, C., García-Raffi, L. M., Gómez, J. y Romero, S. (2007). Modelling in science education and learning. *SUMA*, 54, 51-53.
- Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331-364. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157>
- Ärlebäck, J. B. (2011). Exploring the solving process of groups solving realistic Fermi problem from the perspective of the anthropological

- theory of didactics. En M. Pytlak, T. Rowland y W. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 7)* (pp. 1010-1020). University of Rzeszów.
- Ärlebäck, J. y Bergsten, C. (2010). On the use of realistic Fermi problems in introducing mathematical modelling in upper secondary mathematics. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 597-609). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_52
- Aymerich, A. y Albarracín, L. (2022). Modelización matemática en actividades estadísticas: episodios clave para la generación de modelos. *Uniciencia*, 36(1), 1-18. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.16>
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Incidencia del “aplicacionismo” en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 83-100. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.933>
- Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, 50, 31-43. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>
- Barquero, B. y Jessen, B. E. (2020). Impacto del enfoque teórico en el diseño de tareas de modelización matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, 98-113. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.317>
- Bliss, K. y Libertini, J. (2019). What is mathematical modeling? En S. Garfunkel y M. Montgomery (Eds.), *Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 7-21). Consortium for Mathematics and Its Applications and Society for Industrial and Applied Mathematics.

- Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can I Be Taught And Learn? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Brady, C. (2018). Modelling and the representational imagination. *ZDM*, 50(1), 45-59. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0926-4>
- Carreira, S., Amado, N. y Lecoq, F. (2011). Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling* (pp. 199-210). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_21
- Coller, X. (2005). *Estudio de casos*. Centro de Investigaciones Sociológicas.
- Daher, W. (2021). Middle school students' Motivation in solving modelling activities with technology. *EURASIA*, 17(9), 1-13. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11127>
- English, L. D. (1996). Children's reasoning in solving novel problems of deduction. En L. Puig y A. Gutiérrez (Ed.), *Proceedings of the 20th PME International Conference*, 2 (pp. 329-336). PME.
- English, L. D. (Ed.). (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Lawrence Erlbaum.
- English, L. D. (2004). Promoting the development of young children's mathematical and analogical reasoning. En L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 210-215). Lawrence Erlbaum.

- English, L. D. (2006). Mathematical Modeling in the Primary School: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 303-323. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9013-1>
- English, L. D. (2010). Modeling with Complex Data in the Primary School. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford, *Modelling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 287-300). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_25
- English, L. D. (2014). Promoting statistical literacy through data modelling in the early school years. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 441-458). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_23
- English, L. D. y Watson, J. (2018). Modelling with authentic data in sixth grade. *ZDM Mathematics Education*, 50, 103-115. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0896-y>
- Ferrando, I. y Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 61-78. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z>
- Ferrando, I. y Navarro, B. (2015). Un viaje de fin de curso y tres tareas de modelización. Una experiencia en un aula de secundaria. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 79-92. <https://doi.org/10.4995/msel.2015.3681>
- Florensa, I., García, F. J. y Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: estudios de casos en distintos niveles educativos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, 21-37. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315>
- Gallart, C., García-Raffi, L. y Ferrando, I. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning*, 12(1), 71-86. <https://doi.org/10.4995/msel.2019.10955>

- Geiger, V. (2011). Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modeling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling, (ICTMA 14)* (pp. 305-314). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_31
- Gerring, J. (2017). *Case study research: Principles and Practices (Strategies for Social Inquiry)*. Cambridge University Press.
- Girnat, B. y Eichler, A. (2011). Secondary Teacher`s Beliefs on Modeling in Geometry and Stochastics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling* (pp. 75-84). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_9
- Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling - Overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling, (ICTMA 14)* (pp. 301-304). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30
- Haberzettl, N., Klett, S. y Schukajlow, S. (2018). Mathematik rund um die Schule—Modellieren mit Fermi-Aufgaben. En K. Eilerts y K. Skutella (Eds.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 5. Ein ISTRON-Band für die Grundschule* (pp. 31-41). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21042-7_3
- Henze, J. y Fritzlar, T. (2010). Primary school children's model building processes by the example of Fermi questions. En A. Ambrus y E. Vásárhelyi (Ed.), *Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the 11th ProMath conference* (pp. 60-75). Eötvös Loránd University.
- Hernandez-Martínez, P. y Vos, P. (2018). "Why do I have to learn this?" A case study on estudents' experiences of the relevance of mathematical modelling activities. *ZDM Mathematics Education*, 50, 245-257. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0904-2>

- Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la Investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw-Hill.
- Ji, X. (2012). A quasi-experimental study of high school students' mathematics modelling competence. En *12th International Congress on Mathematical Education (8 - 15 July 2012)*. COEX.
- Jung, H. y Brady, C. (2023). Modeling actions foregrounded in whole-class modeling discourse: A case study of a model-eliciting activity and a three-act task. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-24. <https://doi.org/10.1080/10986065.2023.2180849>
- Jung, H., Stehr, E. y He, J. (2019). Mathematical modeling oportunities reported by secondary mathematics preservice teachers and instructors. *School Science and Mathematics*, 119(6), 353-365. <https://doi.org/10.1111/ssm.12359>
- Kaygisiz, I. y Şenel, E. A. (2023). Investigating mathematical modeling competencies of primary school students: Reflections from a model eliciting activity. *Journal of Pedagogical Research*, 7(1), 1-24. <https://doi.org/10.33902/JPR.202317062>
- Krippendorff, K. (2018). *Content Analysis: An introduction to its methodology*. SAGE Publications.
- Leong, R. (2012). Assessment of mathematical modeling. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 3(1), 61-65. <https://doi.org/10.7916/jmetc.v3i1.736>
- Lesh, R. y Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly, R. Lesh, A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research*

- Desing in Mathematics and Science Education* (pp. 591-645). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lu, X. y Kaiser, G. (2022). Can mathematical modelling works as a creativity-demanding activity? An empirical study in China. *ZDM Mathematics Education*, 54(1), 67-81. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01316-4>
- Montero, L. E. y Vargas, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Educación Matemática*, 34(1), 214-248. <https://doi.org/10.24844/EM3401.08>
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standars for School Matematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics. An overview*. NCTM.
- National Governors Association Center for Best Practices: Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standars for Mathematics*.
- OECD (2023). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. (PISA, Ed.) OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/dfef0bf9c-en>.
- Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de Modelización Matemática en la Escuela Infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(1), 41-70.
- Ruiz-Higueras, L., García, F. J. y Lendínez, E. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 95-118. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.95-118>
- Segura, C. y Ferrando, I. (2023). Pre-service teachers' flexibility and performance in solving Fermi problems. *Educational Studies in*

Mathematics, 113(2), 207-227. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10220-5>

Segura, C., Ferrando, I. y Albarracín, L. (2023). Does collaborative and experiential work influence the solution of real-context estimation problems? A study with prospective teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 70, 101040. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101040>

Sol, M., Giménez, J. y Rosich, N. (2011). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning*, 4(27), 329-343. <https://doi.org/10.4995/msel.2011.3100>

Sriraman, B. y Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange*, 40(2), 205-223. <https://doi.org/10.1007/s10780-009-9090-7>

Taggart, G. L., Adams, P. E., Eltze, E., Heinrichs, J., Hohman, J. y Hickman, K. (2007). Fermi Questions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(3), 164-167. <https://doi.org/10.5951/MTMS.13.3.0164>

Tekin-Dede, A. y Bukova-Güzel, E. (2018). A rubric development study for the assessment of modeling skills. *The Mathematics Educator*, 27(2), 33-72.

Tekin-Dede, A. y Yılmaz, S. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının modelleme yeterliliklerinin incelenmesi [Examination of modeling competencies of primary school mathematics teacher candidates]. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 4(3), 185-206.

Toalongo, X., Alsina, Á., Trelles, C. y Salgado, M. (2021). Creando los primeros modelos matemáticos: análisis de un ciclo de modelización a partir de un problema real en Educación Infantil. *CADMO*(1), 81-98. <https://doi.org/10.3280/CAD2021-001006>

- Toalongo, X., Trelles, C. y Alsina, Á. (2022). Design, Construction and Validation of a Rubric to Evaluate Mathematical Modelling in School Education. *Mathematics*, 10(24), 4662. <https://doi.org/10.3390/math10244662>
- Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, Á. (2022a). Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(2), 192-213. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3472>
- Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, Á. (2022b). La presencia de la modelización matemática en tareas de estadística y probabilidad de libros de texto ecuatorianos. *Innova Research Journal*, 7(2), 97-116. <https://doi.org/10.33890/innova.v7.n2.2022.2076>
- Trelles-Zambrano, C. y Alsina, Á. (2017). Nuevos Conocimientos para una Educación Matemática del S. XXI: panorama internacional de la modelización en el currículo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, 140-163.
- Trelles-Zambrano, C., Toalongo-Guamba, X., Alsina, Á. y Gonzáles, N. (2019). La modelización matemática a través de las actividades generadoras de modelos: una propuesta para el aula de secundaria. *Épsilon-Revista de Educación Matemática*, 102, 43-59.
- Trigueros Gaisman, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), 1207-1240.
- Turner, E., Chen, M., Roth McDuffie, A., Smith, J., Aguirre, J. y Foote, M. B. (2021). Validating a student assessment of mathematical modeling at elementary school level. *School Science and Mathematics*, 121(7), 408-421. <https://doi.org/10.1111/ssm.12494>
- Vargas, V., Escalante, C. y Carmona, G. (2018). Competencias matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación Matemática*, 30(1), 213-236. <https://doi.org/10.24844/EM3001.08>

Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: design and methods*. SAGE Publications, Inc.

Zubi, I. A., Peled, I. y Yarden, M. (2018). Children with mathematical difficulties cope with modelling tasks: what develops? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(4), 506-526. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1527404>